Educación Matemática en las Américas 2019

Volumen 7: Formación continua y desarrollo profesional

Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO
www.ciaem-iacme.org

Educación Matemática en las Américas 2019
Volumen 1: Formación inicial de profesores
Editado por Yuri Morales-López y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN: 978-9945-09-413-8

El *Comité Interamericano de Educación Matemática* (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la *International Commission on Mathematical Instruction*. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera al CIAEM y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no fue previamente publicado en otro medio; y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Se respetaron los metadatos (nombres, apellidos, títulos, entre otros) que los autores proporcionaron cuando postularon su trabajo en la plataforma del evento.

Para citar este libro:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2020). *Educación Matemática en las Américas 2019.* Editores: Yuri Morales-López y Ángel Ruíz. República Dominicana: Autor.

ISBN: 978-9945-09-413-8
9 789945 094138

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LAS AMÉRICAS 2019

Presentación

Para el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es un placer y un honor ofrecer a la comunidad educativa este Volumen de *Educación Matemática en las Américas 2019*, en donde se pueden encontrar muy importantes insumos para comprender el momento histórico que atraviesa la Educación Matemática desde la perspectiva de las Américas.

La *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática* se realizó entre el 5 y 10 de mayo del 2019 en Medellín, Colombia. La Universidad de Medellín y la Universidad de Antioquia fueron las organizaciones académicas anfitrionas del evento. Las sesiones fueron realizadas en el campus de la Universidad de Medellín. Participaron 700 personas provenientes de 25 países de cuatro continentes: Europa, Asia, África y las Américas. Participaron centenares de docentes en servicio de la ciudad de Medellín y del Departamento de Antioquia.

Alrededor de 400 trabajos fueron presentados: conferencias plenarias y paralelas, mesas plenarias, minicursos, sesiones temáticas, comunicaciones cortas, talleres y posters. Unas 50 personalidades del mayor nivel en la comunidad internacional de Educación Matemática expusieron sobre sus investigaciones. Entre ellas Jill Adler (Suráfrica), Ferdinando Arzarello (Italia), Salvador Llinares (España), Yoshinori Shimizu (Japón), Michael Shaughnessy (EUA), Luis Rico (España), Fidel Oteiza (Chile), Carlos Vasco (Colombia), Carlos Sánchez (Cuba), Luis Carlos Arboleda (Colombia), Edwin Chaves (Costa Rica), Nelly León (Venezuela), Vilma Mesa (EUA). Aunque físicamente no pudo estar presente envió su contribución en forma de video Ubiratan D'Ambrosio (Brasil). Los trabajos dentro de la plataforma del congreso se pueden consultar en https://ciaem-redumate.org/conferencia/index.php/xvciaem/xv/schedConf/presentations

La revisión científica de todos los trabajos fue responsabilidad de un Comité Asesor Internacional, un Comité Internacional del Programa y el Comité Ejecutivo del CIAEM. Se contó con la coordinación central de Directores de tema y la Dirección de la plataforma científica realizada por el académico Yuri Morales con el apoyo de la profesora Johanna Mena (ambos de Costa Rica) y con la participación voluntaria de muchísimos revisores científicos de muchos países.

Este volumen incluye trabajos que fueron efectivamente presentados en ese congreso.

Expreso mi agradecimiento a todos los miembros de los comités científicos, directores de tema, revisores científicos, y directores de la plataforma científica. También deseo agradecer por su apoyo en el registro de este libro a Sarah González y a la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra en República Dominicana. Agradezco mucho a todos los autores que decidieron compartir su trabajo en las instancias que abrimos

mediante la XV CIAEM. También a Yuri Morales quien técnica y formalmente generó este volumen para su registro.

En las diversas dimensiones del congreso, de cuya realización este libro es producto, quiero aprovechar esta ocasión para reconocer la valiosa contribución de las Universidades de Medellín y de Antioquia y al Comité Organizador Local de la XV CIAEM, y, además, agradecer al equipo humano del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* que ha sido durante muchos años un sostén crucial en la organización de todos los eventos del CIAEM y de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*; y en particular de este libro que hoy sacamos a la luz pública.

Este volumen es una parte del libro de *Memorias* completo (son 15 volúmenes que se pueden ver/descargar). Se ha respetado aquí la paginación del libro completo. Y las referencias *deben hacerse con base en el libro y su paginación*. No es necesario indicar el volumen específico donde se cita pues esta es una versión funcional al servicio de una mejor visualización o descarga de este valioso material.

Invitamos a los lectores de este libro a promoverlo en sus diversas actividades de docencia, investigación, extensión y divulgación en todos sus países.

Con afecto

Ángel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática
Presentación del 17 de julio de 2024
Costa Rica

Índice

<u>Basado en la información suministrada durante la postulación de cada trabajo</u>

2. Formación continua y desarrollo profesional

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Tarefas de aprendizagem profissional e suas potencialidades para formação continuada de professores dos anos iniciais

Lilian Cristina de Souza **Barboza**
Universidade Federal do ABC, campus Santo André
Brasil
lilicrissb@gmail.com
Alessandro Jacques **Ribeiro**
Universidade Federal do ABC, campus Santo André
Brasil
alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

Resumo

Esta oficina objetiva apresentar potencialidades do trabalho com tarefas de aprendizagem profissional (TAP) para possibilitar a mobilização e (re)construção de conhecimentos para ensinar matemática nos anos iniciais, com foco no desenvolvimento do pensamento algébrico para o trabalho com os diferentes significados do sinal de igualdade. O trabalho com tarefas de aprendizagem profissional, com uso de exemplos de práticas reais (vídeos, transcrições de áudios, protocolos de tarefas dos estudantes) ou exemplos de práticas fictícias, que os professores poderiam se reconhecer (algo que poderia ocorrer antes, durante ou após uma aula), compõe uma demanda maior da pesquisa de mestrado em andamento, cuja metodologia ancora-se em uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo. Nesta perspectiva, com as tarefas de aprendizagem profissional a serem propostas pretende-se promover discussões e reflexões sobre o conhecimento que o professor precisa ter e a importância de sustentá-lo e aprofundá-lo para repensar suas práticas e possibilitar aprendizagem dos estudantes.

Palavras clave: Continuada, Professores que Ensinam Matemática, Anos Iniciais, Pensamento Algébrico, Sinal de Igualdade, Conhecimento do professor.

Introdução

A formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais pode ser discutida a partir de conexões e interlocuções que se pode estabelecer entre os resultados de estudos e pesquisas (Ball& Cohen, 1999; Smith, 2001; Ball. Ben-Peretz & Cohen, 2014; Silver et al, 2007) e a prática letiva dos professores. Alguns autores nos apontam a potencialidade de fundamentar este contexto de formação na mobilização e (re)construção do conhecimento de professores que continuam a aprender no exercício de suas práticas (Ponte & Oliveira, 2002; Ponte &Quaresma, 2016).

Logo, o conhecimento do professor passa a ter um aspecto fundamental em sua formação, conforme nos evidencia Serrazina (2013), afirmando que este está inter-relacionado com o nível de confiança do professor, quer relativamente à matemática e ao seu ensino, quer àquilo que considera que os seus alunos são capazes de aprender em Matemática. Neste contexto estabelece-se uma relação positiva entre a confiança dos professores, que aumenta na medida em que eles passam a construir novos conhecimentos específicos do conteúdo e consequentemente possibilita uma melhora também no conhecimento pedagógico o que, por sua vez, acarreta a exigência de saber mais matemática. Compreendemos que tal lógica se estabelece na sala de aula, porém é possível estabelecer-se também, na medida em que professores puderem trocar experiências, discutir e compartilhar seus desafios, medos, incertezas, os imprevistos, suas práticas profissionais, seus novos conhecimentos, todos, alicerçados à luz das teorias (Serrazina, 2013).

A formação se dá a partir de práticas profissionais centradas na sala de aula, no hábito da reflexão sobre as práticas e na conscientização de que mudanças são necessárias para dar respostas aos desafios do ensino da matemática (Serrazina, 2009). Assim sendo, estabelece-se a importância do fazer, da elaboração de tarefas, da reflexão, das discussões e compartilhamento e da (re)elaboração de novas práticas.

Compreendendo que devemos possibilitar oportunidades de aprendizagem profissional em contexto de formação continuada, proporemos o trabalho com as tarefas de aprendizagem profissional (TAP), que possam favorecer a aprendizagem profissional do professor para o ensino dos diferentes significados do sinal de igualdade, um dos elementos do pensamento algébrico. Estes autores ainda reforçam, que para aprender na prática e com a prática, é necessário ao professor investigar o ensino no ensino, de modo que, além de compreender o conhecimento que está presente no pensamento dos estudantes, também aprenda a promover desequilíbrios e novas hipóteses e interpretá-las no contexto de ensino e aprendizagem da sala de aula. (Ball & Cohen, 1999).

Retomando as concepções sobre aprendizagem profissional, ressaltamos que Ball e Cohen (1999) indicam que sua concepção de aprendizagem profissional deve estar baseada nas discussões coletivas, pois assim, as trocas com outros profissionais podem permitir compreender, comparar, (re)formular suas próprias (in)certezas, ampliando assim suas próprias oportunidades de aprender.

Baseados em Smith (2001), as tarefas matemáticas, os episódios de ensino (recortes da prática na sala de aula, seja real ou fictício) e a compreensão do pensamento dos estudantes, são alguns dos elementos que oportunizam a aprendizagem profissional dos professores e estão presentes em nossas TAP.

Ainda ancorados em Ball e Cohen (1999), apresentamos seu modelo pedagógico de aprendizagem profissional para a formação de professores, o qual é estruturado em três pilares de componentes-chave: as TAP, em torno de materiais de prática e implicação de conteúdos, a natureza das discussões propiciadas a partir dos desdobramentos das referidas TAP e o papel dos formadores, que propiciariam tais tarefas e discussões. O impacto deste tripé possibilitaria o desenvolvimento de oportunidades de aprendizagem profissional e novas práticas letivas.

As TAP da pesquisa de mestrado da primeira autora, bem como a que será apresentada nesta oficina, foram arquitetadas nos pressuposto e domínios do MKT, referencial teórico de Ball e seus colaboradores (2008) tomando por base: (i) o que os professores precisam saber sobre matemática para o ensino dos diferentes significados do sinal de igualdade; (ii) quais práticas letivas irão oportunizar a interação e construção de conhecimentos aos alunos e alunas; (iii) quais tipos de tarefas e abordagens são potenciais ao ensino do sinal de igualdade. Ancorados ainda neste referencial teórico, entendemos que reconhecer os possíveis erros e equívocos cometidos pelos alunos e alunas e dimensionar a sua natureza, é parte do conhecimento especializado do conteúdo. Planejar o ensino, pensar sobre a disposição dos estudantes, escolher e elaborar as tarefas e antecipar as respostas dos alunos e alunas faz parte do conhecimento do conteúdo e dos estudantes. Compreender os desdobramentos do ensino dos diferentes significados do sinal de igualdade desde os anos iniciais e seu impacto nos anos escolares subsequentes é parte do conhecimento do conteúdo e do currículo. Por fim, compreender as diferenças dos tipos de tarefas, as possíveis intervenções possibilitadoras de entender de modo mais aprofundado o conteúdo trabalhado é parte do conhecimento do conteúdo e do ensino.

O desenvolvimento do Pensamento Algébrico

Pesquisas recentes indicam a possibilidade e importância de desenvolver o pensamento algébrico (PA) desde os anos iniciais (Kieran et al, 2016; Mestre, 2017; Molina, 2011; Britt & Irwin, 2011; Ponte & Branco, 2013), evidenciando-nos os contributos que tal trabalho à aprendizagem do professor que ensina matemática nos anos iniciais e ao ensino que ele pode oferecer. Assim, consideram que o desenvolvimento do PA, desde os primeiros anos de escolaridade, como um fio condutor curricular, pode servir de base para alicerçar a compreensão e experiência dos professores na preparação de um trabalho algébrico aprofundado, que permita aos estudantes apropriar-se de conhecimentos essenciais à matemática dos anos finais.

Em consonância, Kieran et al, (2016), asseguram que o ensino da Álgebra desde os anos iniciais tem por objetivo promover uma forma de pensamento, ou seja, um hábito de buscar regularidade e articular, testar, fornecer regras ou conjecturas para uma infinita classe de números, reafirmando o que foi discutido até o momento. Os mesmos autores afirmam ainda, que promover o desenvolvimento do PA é alcançado por meio de interações que se dão em sala de aula, ao redor de ideias que os alunos e alunas elaboram, algumas vezes em pares, ou até mesmo em pequenos grupos.

A inserção do desenvolvimento do PA, também é reforçada por Britt &Irwin (2011), em que os autores salientam, que a implementação do trabalho com o PA, fornece oportunidades para todos os alunos e alunas, por trabalhar com várias camadas de consciência de generalidade em todas as áreas do currículo de Matemática, antes de qualquer introdução formal para a Álgebra.

Compactuamos com a noção de Pensamento Algébrico como "um hábito da mente que permeia toda a matemática e que envolve a capacidade dos alunos de construir, justificar, e expressar conjecturas sobre as relações e estruturas matemáticas". (Blanton & Kaput, 2004, p. 142). Bem como as de Kieran (2007, 2011), que indica que a álgebra nos anos iniciais não é entendida como um conjunto de regras a ser operacionalizadas, mas antes, um modo de pensar, o que contribui para uma visão mais aprofundada da Matemática.

Escolhemos entre a gama de conteúdos matemáticos o trabalho com os diferentes significados do sinal de igualdade, pois em Matemática, a noção de igualdade desempenha um papel fundamental, pois estabelece relações de equivalência, estando sempre relativa a uma propriedade. Ponte, Branco and Matos (2009) apontam três significados atribuídos ao sinal de igualdade: o de operacional, largamente usado desde os anos iniciais e entendido como dar o resultado de uma operação (exemplo 2 + 5 = 7); o de equivalência, que possibilita a noção de equilíbrio entre os termos que estão antes e os que estão depois do sinal de igualdade, sendo essencial à compreensão conceitos algébricos a serem amplamente estruturados nos anos finais (exemplo: 3 + 4 = 2 + 5); e o relacional, quando possibilita estabelecer relações funcionais de variáveis (exemplo 10 + 5 = 12 + ___) (Stephens & Ribeiro, 2012; Trivilin & Ribeiro, 2015).

Desenvolvimento da oficina

Com o pressuposto de ancorar esta oficina em possibilidades de construção, mobilização e refinamento do conhecimento dos professores e sua aprendizagem profissional, vamos propor uma tarefa de aprendizagem profissional aos professores dos anis iniciais, sobre os diferentes significados do sinal de igualdade.

Nesta oficina iremos discutir e refletir sobre a importância do conhecimento do professor tanto para resolver esta tarefa, tendo por base a exploração de algumas situações associadas a dar sentido e significado às estratégias de resolução apresentada por estudantes, quanto para envolver-se em discussões coletivas. Queremos possibilitar as antecipações que os professores precisam fazer ao trabalhar com os conteúdos matemáticos, neste caso os diferentes significados do sinal de igualdade, para antecipar possíveis dificuldades dos estudantes, formas alternativas de resolução, questionamentos e questões-chave que possibilitem orquestrar discussões matemáticas, junto a seus estudantes (Stein et al., 2008).

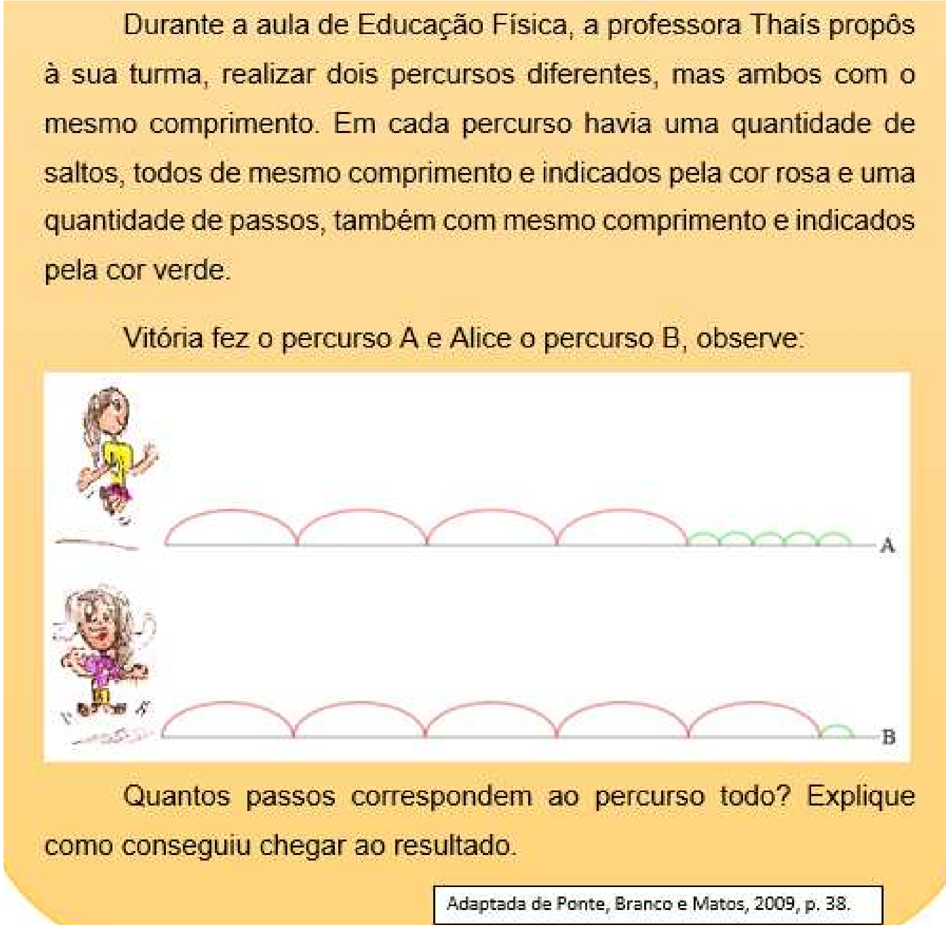
O conhecimento matemático que queremos mobilizar vai além de saber e conhecer o conteúdo matemático para si mesmo, pois possibilita avançar na compreensão dos “porquês matemáticos”, que estão intrínsecos às resoluções apresentadas pelos estudantes.

Nesta perspectiva a oficina acontecerá em 3 momentos distintos e complementares: (i) breve explanação da proposta da TAP; (ii) os participantes, divididos em pequenos grupos, resolverão a primeira e a segunda parte da TAP; (iii) abriremos uma plenária para o compartilhamento das respostas e reflexões de cada grupo.

Um exemplo a ser explorado na TAP

Apresentamos aqui, apenas parte da tarefa a ser explorada na oficina, na perspectiva de trazer algumas discussões sobre a especificidade da tarefa e sobre o conhecimento especializado do conteúdo e conhecimento do conteúdo e dos estudantes. A tarefa que aqui se apresenta objetiva explorar conhecimentos matemáticos associados ao significado de equivalência do sinal de igualdade, a propriedade comutativa da adição e o reconhecimento de padrões, tratando das dificuldades e antecipações que professores podem fazer antes de implementar uma tarefa em sala de aula e dos desafios que as resoluções apresentadas por estudantes podem trazer.

Parte da TAP dos professores é analisar a tarefa implementada em uma sala de aula, (conforme apresentada pela *Figura 1*) antecipar as possíveis dificuldades e resoluções e



posteriormente, atribuir sentido e significado às resoluções apresentadas pelos estudantes, bem como apontar indagações e devolutivas construtivas para que os estudantes melhor compreendessem suas resoluções.

Figura 1. Parte da TAP: As resoluções e seu desafios.

Algumas considerações

Acreditamos que escolher tarefas, o modo como serão aplicadas, antecipar as possíveis resoluções e possíveis equívocos, bem como analisar atentamente as resoluções apresentadas pelos estudantes, indo além do critério de correto ou (in)correto. Faz-se importante atentar-nos que se damos atenção aos equívocos e dificuldades que os estudantes apresentam, também devemos olhar para as resoluções inesperadas e muitas vezes não pensadas pelos professores. Esta mobilização de conhecimentos do conteúdo e dos estudantes e ampliação do conhecimento especializado, torna essencial a formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais, que continuam a aprender no decorrer de suas práticas.

Referências e bibliografía

Ball, D. L., Ben-Peretz, M. & Cohen, R. B. (2014). Records of practice and the development of collective professional knowledge. *British Journal Of Educational Studies,* p. 317-335.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, Thousand Oaks, v. 59, p. 389-407.

Ball, D. L. & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: toward a practice-based theory of professional education. In: SYKES, G; DARLINGHAMMOND, L. (Ed.). *Teaching as the learning profession*: handbook of policy and practice. São Francisco: Jossey-Bass, p.3-32.

Blanton, M. & Kaput, J. (2008). Building disctrict capacity for teacher development in algebraic reasoning. In: Kaput, J., Carraher, D. & Blanton, M. (Org.) Algebra in the Early Grades. Nova Iorque: Lawrence Erlbaum Associates,p. 133-160.

Britt, M. S. & Irwin, K. C. (2007). Algebraic thinking with and without algebraic representation: a three-year longitudinal study. *ZDM*, [s.l.], v. 40, n. 1, p.39-53, 13 out.

Kieran, C. et al. (2016). *Early Algebra*. ICME-13 Topical Surveys, [s.l.]. Springer International Publishing.

Mestre, C. & Oliveira, H. (2012). A mobilização da capacidade de generalização através da exploração de estratégias de cálculo: um estudo com alunos do 4. º ano. *Interacções*, n. 20, p.9-36.

Molina, M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica: Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. In: ENCONTRO DE INVESTIGACAO EM EDUCACAO MATEMÁTICA, 2011, Póvoa do Varzim. Atas. Póvoa do Varzim: EIEM, p. 27 - 51.

Ponte, J. P., Branco N. & Matos A. (2009). A Álgebra no ensino básico, Ministério da Educação, DGIDC.

Ponte, J. P. & Branco, N. (2013). Pensamento algébrico na formação inicial de professores. *Educar em Revista*, v. 1, n. 40, p.39-53.

Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. Educational Studies In Mathematics, [s.l.], v. 93, n. 1, p.51-66, 2 fev. *Springer Nature*.

Ponte, J. P. & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, v.2, n. 11, p. 145-163.

Serrazina, M. de L. (2013). O programa de formação contínua em matemática para professores do 1º ciclo e a melhoria do ensino da matemática. *Da Investigação às Práticas*, Lisboa, v. 3, n. 2, p.75-97.

Silver, E. A. et al. (2007). Where is the mathematics? Examining teachers' mathematical learning opportunities in practice-based professional learning tasks. *Journal Of Mathematics Teacher Education*, Springer Netherlands, v. 10, n. 4, p.261-277.

Smith, M. S. (2001). Practice-Based Professional Development for Teachers of Mathematics. Virgínia: NCTM.

Stein, M., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: five practice for helping teachers move beyond show and tell. Mathematical Thinking and Learning, 10(4), p. 313-340.

Stephens, M & Ribeiro, A. J. (2012). Working towards algebra:the importance of relational things.

Revista Latinoamericana de Investigación en Metemática Educativa. n. 15(3), p. 373-402.

Trivilin, L. R. & Ribeiro, A. J. (2015). Conhecimento matemático para o ensino de diferentes significados do sinal de igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Bolema*, v. 29, n. 51, p.38-59.

Estrategias de enseñanza para fracciones y problemas multiplicativos

Marta **Ramírez** Cruz
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
mramirez@cinvestav.mx
Marta Elena **Valdemoros** Álvarez
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
mvaldemo@cinvestav.mx

Esta comunicación se presenta en el marco de una investigación llevada a cabo con profesores en servicio. El propósito es identificar el conocimiento matemático y didáctico que pone en práctica una profesora con experiencia, cuando enseña temas relacionados con problemas multiplicativos ligados a las fracciones, así como las reflexiones que la maestra hace de su práctica docente. Los instrumentos metodológicos utilizados en la investigación fueron un cuestionario y una entrevista. En el presente reporte de investigación se integraron algunas tareas y fragmentos que permiten mostrar datos relevantes de la enseñanza propuesta por la profesora Rosa, así como algunas reflexiones que de ésta derivaron.

Palabras clave: Fracciones, problemas multiplicativos, unidad, representaciones gráficas y reflexión de la práctica.

Introducción

En esta comunicación nos interesa mostrar algunos aspectos de la práctica de una profesora de matemáticas; consideramos que es fundamental identificar los conocimientos matemáticos y didácticos con los que cuenta porque se consideran factores importantes en el diseño de actividades que se llevan al aula, así lo han señalado investigadores como Kieren (1988) cuando menciona que corresponde al profesor la creación de ambientes propicios para la construcción de conocimientos relacionados con los números fraccionarios en la clase de matemáticas.

Con base en la idea anterior y en los reportes de investigaciones previas orientadas al desempeño de los profesores en el aula, en este estudio nos interesa analizar los conocimientos de esta profesora relacionados con la enseñanza de la multiplicación y división de fracciones, a través del desarrollo de problemas multiplicativos en la escuela secundaria.

Problema de investigación

Se considera que el profesor con experiencia en la enseñanza tiene un abanico de estrategias para llevar al aula y para comunicarlas; se han realizado investigaciones en torno a los profesores y sus conocimientos matemáticos, aunque la mayoría de dichos reportes de investigación se enfocan hacia los docentes en formación básica e inicial. En este sentido Ball (2000) consideró la importancia de crear valiosas oportunidades de aprendizaje para los futuros profesores; ella señala que el contenido matemático influye en una buena enseñanza tomando en cuenta los conocimientos sobre el contenido disciplinar de los profesores, cómo lo saben y lo que son capaces de transmitir matemáticamente. En este orden de ideas el propósito de este trabajo consiste en identificar los conocimientos matemáticos y didácticos de una profesora de matemáticas de educación secundaria con la finalidad de una mejora en la enseñanza.

Preguntas de investigación

En la enseñanza de operaciones ligadas a las fracciones en la escuela secundaria, con profesores en servicio, interesa conocer: a) ¿cuáles son los contenidos de la Matemática Educativa a los que recurre la maestra Rosa para enseñar problemas multiplicativos que implican números fraccionarios? b) ¿De qué manera el autoanálisis reflexivo de su práctica docente contribuye a la mejora de su enseñanza?

Los objetivos de la investigación

Objetivo general: Con base en los cuestionamientos iniciales, este trabajo pretende identificar el conocimiento de la Matemática Educativa de una profesora en la resolución de problemas multiplicativos referidos a las fracciones, reflexionar sobre sus fortalezas y áreas de oportunidad.

Objetivos específicos: a) Identificar las estrategias que utiliza una profesora de educación secundaria al resolver problemas multiplicativos que implican números fraccionarios para analizar las estrategias y reflexionar sobre ellas para incorporarlas en actividades del aula. b) Determinar si el análisis de sus propias estrategias favorece la reflexión global acerca de su práctica docente. Para llevar a cabo lo anterior, se dio seguimiento a la profesora Rosa a través de un cuestionario inicial y posteriormente durante una entrevista, para conocer e identificar los conocimientos matemáticos y didácticos que subyacen en su *praxis,* cuando ella resuelve las tareas propuestas.

Marco teórico

En este espacio teórico se destacan distintos contenidos relevantes a nivel del reconocimiento de las operaciones con fracciones como la multiplicación y la división, las que en este comunicado son planteadas a través de problemas multiplicativos. Asimismo, esos aspectos particulares son destacados en cada párrafo con itálicas; todos ellos destacan la importancia de tales contenidos en el desarrollo de la presente investigación.

Kieren (1983) menciona que las fracciones están constituidas por constructos con cuatro significados: medida, cociente (con referencia al reparto), razón, operador multiplicativo y la relación parte-todo. Estos conocimientos forman la base del conocimiento de número racional; en este estudio, interpretamos a tales constructos como los que se construyen a partir de nociones elementales previas.

En lo que se refiere a la relación *parte-todo* se expresa a partir de regiones geométricas, conjuntos de objetos y la recta numérica, con ello se implica la noción de longitud y área. Kieren

(1985) menciona que la representación gráfica de solución puede proporcionar pistas valiosas de los procesos de pensamiento de los sujetos que tratan de resolver el problema. Afirma que la partición es un precursor esencial de las nociones de números racionales y permite observar las cualidades multiplicativas y aditivas.

En relación a la enseñanza de los números fraccionarios Vergnaud (1983) menciona que uno de los puntos desafiantes de la educación es usar problemas significativos tanto en aspectos teóricos como prácticos. Establece campos conceptuales y los define como "conjunto de problemas y situaciones para el tratamiento de conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos, pero estrechamente interconectados" (p.141); menciona dos campos conceptuales como principales, estructuras aditivas y multiplicativas, en donde los problemas involucran operaciones aritméticas y nociones de tipo aditivo y multiplicativo. Para este trabajo nos interesa lo que se refiere a las estructuras multiplicativas, donde él identifica tres categorías: isomorfismo de medidas, producto de medidas y proporción múltiple distinta del producto.

En el momento de introducción de los algoritmos aplicados a las fracciones, en general, y a la multiplicación en particular, Kieren (1988) menciona, que "en las escuelas suelen desarrollar los algoritmos como una extensión de los números enteros", y que "debido a lo anterior, el curriculum y la instrucción enfatizan prematuramente reglas técnico simbólicas de operación, así, los estudiantes aprenden la forma pero no el significado asociado a la operación correspondiente" (p. 87) *en este caso la multiplicación, agregamos nosotros*. Retomamos el planteamiento anterior que el autor hace con respecto a los estudiantes, pero en nuestra investigación lo hacemos extensivo a los profesores, dado que en este estudio son considerados como los actores principales en la enseñanza de las matemáticas, debido a que ellos toman decisiones didácticas con base en lo deben aprender los estudiantes, por ello consideramos que las decisiones didácticas de la profesora Rosa son fundamentales.

De manera particular en este estudio se analizan conocimientos de multiplicación y división de números fraccionarios, en este sentido Ball (1990) destaca que los docentes intentan plantear situaciones de la vida real para mostrar el significado o la aplicación de determinado contenido, sin embargo, hay una comprensión limitada de la división de fracciones y rara vez se enseña conceptualmente en la escuela, se sustenta con el uso de reglas, dejando de lado ideas o relaciones multiplicativas.

En relación con las actividades que se pueden desarrollar en el aula, con las fracciones, Tirosh (2000) menciona que existen situaciones en que los futuros profesores tienden a atribuir propiedades de división de números naturales a la división de fracciones, en este sentido, nos interesa conocer la práctica de la profesora Rosa para verificar si hay alguna relación de lo antes mencionado con su enseñanza y lo que anticipa de acuerdo a su experiencia cuando diseña actividades para su clase, al resolver problemas multiplicativos relacionados con las fracciones.

Por otra parte, en el estudio de las fracciones, Sharp y Welder (2014) mencionan que la división de fracciones es un tema difícil para los estudiantes y que los profesores pueden apoyar a los alumnos en las dificultades que presentan y que anticipan desde el diseño de situaciones de enseñanza. En este sentido consideramos de mucha relevancia la participación de la profesora Rosa, atendiendo los datos que puede aportar desde su amplia experiencia.

A este respecto, Valdemoros, Ramírez y Lamadrid (2015) sugieren la relevancia de identificar en el sujeto del conocimiento la presencia de "núcleos de significación y pensamiento", dado que tales núcleos permiten entender como organiza su discurso dicho sujeto del conocimiento. Las autoras referidas definen a los “núcleos de significación y pensamiento como aquellas palabras y expresiones matemáticas verbalizadas, así como las representaciones y los modelos de enseñanza plenamente cargados de sentido para quien construye el conocimiento” (p.195). Para este estudio se considera la propuesta de dichas investigadoras para el análisis de lo que aquí se presenta; a lo largo del análisis de cada tarea, se van a identificar los conocimientos matemáticos y didácticos de la profesora Rosa a través de su discurso y de las representaciones que emergen, asimismo, a través de los cuestionamientos que se hagan de las representaciones de la docente se espera documentar de manera escrita las reflexiones que surjan.

Diseño Metodológico

La investigación es de corte cualitativo (Stake, 1999) porque el objetivo es identificar una problemática particular, es decir, consideramos que la práctica docente implica procesos de enseñanza, que a su vez requieren de conocimientos matemáticos y didácticos para el diseño de la clase; para ello nos interesa identificar las estrategias de la profesora Rosa con formación normalista y amplia experiencia en la clase de matemáticas, asimismo, conocer sus reflexiones ante la resolución de tareas que implican problemas multiplicativos relacionados con fracciones.

Con el propósito de explorar los conocimientos matemáticos involucrados al resolver problemas de tipo multiplicativo ligados a las fracciones, en un primer momento, se aplicó un cuestionario con cinco problemas, en un segundo momento, se realizó una entrevista semiestructurada que incluía la resolución de tareas asociadas a problemas multiplicativos de fracciones. La entrevista permitió retroalimentar la exploración de las acciones, los significados, procedimientos, la toma de decisiones y reflexiones de la profesora Rosa al resolver los problemas.

Mediante la aplicación de estos problemas (aplicados en la entrevista) se pretende identificar: a) aspectos relacionados con la formación docente que son inherentes a la práctica, b) conocer los conocimientos matemáticos de las fracciones, como los vincula con el diseño de actividades en su práctica docente; c) decisiones didácticas de acuerdo a la experiencia en el trabajo con números fraccionarios, así como la reflexión de sus ideas.

El caso de la profesora Rosa

La profesora Rosa es egresada de una Escuela Normal para profesores de secundaria con especialidad en matemáticas en la Ciudad de México. La elegimos porque en el cuestionario que aplicamos a tres profesoras de matemáticas de educación secundaria, ella manifestó diferentes procedimientos para resolver las tareas asignadas, Rosa tiene 19 años de trabajo con alumnos de secundaria y esto permite suponer que su experiencia en la enseñanza es basta. Ella manifestó que ha tenido formación continua, es decir, ha participado en cursos que ofrecen las instituciones encargadas de capacitar al magisterio. Para esta información solo se presentan algunos de los resultados del análisis de las actividades realizadas por la profesora. Este reporte se aborda desde la relevancia de los datos que aporta la maestra, en el marco de una investigación más amplia.

Análisis de resultados

En este apartado del escrito presentamos fragmentos de la entrevista que le hicimos a la profesora y que permiten recrear e identificar “los núcleos de significación y pensamiento” que manifiesta en la resolución de problemas multiplicativos referidos a las fracciones, así como las estrategias que utiliza para definir las actividades para la enseñanza de su clase de matemáticas. Nos interesa conocer cuáles son las estrategias que privilegia, si identifica dificultades al desarrollar estos conocimientos, a qué elementos recurre para resolver dichas situaciones. Se utilizan corchetes *dentro de las tablas* para facilitar la lectura y descripción de los procedimientos desarrollados por la profesora, se numera la secuencia de las representaciones y señalamientos que ella hace.

Problema de división con números fraccionarios

La Figura 1 presenta los procedimientos que la profesora realizó para dar respuesta a la tarea 1.

Beto y Carla hacen competencia de carros, el coche de Beto recorre 1 2/3 metros y el de Carla 2/5 metros. ¿Cuántas veces el coche de Beto recorre la distancia que recorrió el coche de Carla?

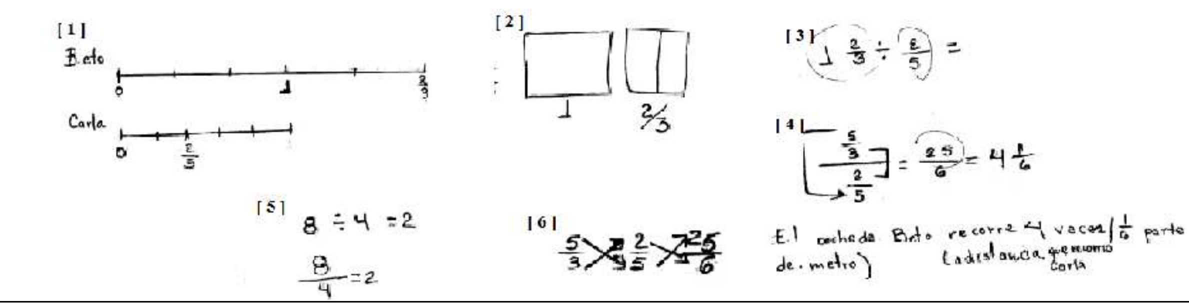


Figura 1. Problema de división de fracciones con modelos lineales y geométricos.

La profesora resolvió el problema y comunicó a las entrevistadoras los procedimientos que realizó con la consigna de considerar que la tarea la estaba realizando en el aula. Ella utilizó una recta numérica para representar los recorridos [1, en la Figura 1], y una representación geométrica [2, en la Figura 1], pero no las vinculó, después señaló la expresión numérica [3, en la Figura 1], y comentó al respecto: "hago una repartición de cuántas veces cabe dos quintas partes en la distancia que ha recorrido el carro de Beto, para esta repartición yo divido 1 2/5 entre 2/5", sin embargo, Rosa resolvió el problema utilizando la representación [4, en la Figura 1].

La entrevistadora, preguntó acerca del procedimiento que utilizó para resolver la división de fracciones y ella apeló a su experiencia "al alumno se le dificulta mucho entender cómo se va a dividir este número mixto con esta fracción propia [3, en la Figura 1], para mi es más sencillo que ellos lo interpreten con este arreglo", y señaló [4, en la Figura 1]; ella utilizó una representación con números naturales que se observa en [5, en la Figura1], con esa acción ella dio sentido a la división de fracciones y justificó el procedimiento que hizo en [4, en la Figura 1] y agregó "lo que hago es utilizar los extremos con los medios, es la forma de hacer la división." Ella mencionó que no utilizó el método de los productos cruzados [6, en la Figura 1] porque los alumnos lo confunden con el algoritmo de la multiplicación de fracciones.

En los núcleos de significación y pensamiento de la profesora Rosa observamos representaciones que permiten identificar los conocimientos que utilizó para resolver la tarea, el supuesto es que ella recurrió a modelos alternativos de solución para los problemas con fracciones, estas decisiones tienen origen en su experiencia de enseñanza, tuvo sentido de la unidad, apoyó la solución del problema con modelos lineales y geométricos para dar significado a la partición, pero no mencionó la equipartición de manera explícita. Ella consideró el modelo geométrico como estrategia para mostrar lo que realizó en el plano de las operaciones, sin embargo, no se observó una vinculación con los modelos de representación y las representaciones numéricas, estas representaciones geométricas no son significativas respecto al problema de división.

Problema del inverso de la multiplicación

La Figura 2 presenta los procedimientos que la profesora realizó para dar respuesta a la tarea 2.

Javier tiene una huerta rectangular que mide 21/6 metros cuadrados de área. En este terreno sembró cebollas y lechugas. Como se avecina el temporal de lluvias con posibilidad de granizo quiere proteger su huerta, así que le colocará una cubierta de plástico. Sabe que el ancho de terreno es de 1 ½ metros.
¿Cuánto debe medir el largo del plástico que necesita para cubrir el área del terreno?
Inspirado en Castañeda (2015) adaptación de las investigadoras.

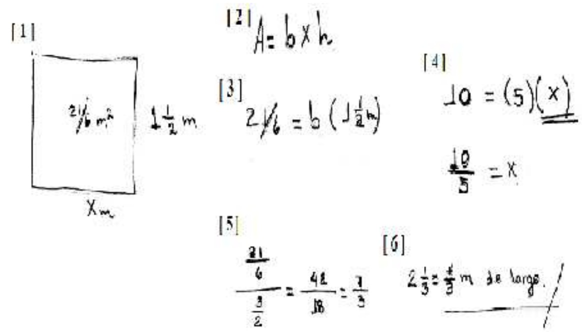


Figura 2. Problema 2, donde la profesora menciona el inverso de la multiplicación.

La profesora resolvió el problema y comunicó a las entrevistadoras las estrategias mostrando sus decisiones didácticas. Ella identificó cómo proporcionaría información a los alumnos en los siguientes términos: "deben conocer las fórmulas geométricas, ¿cómo representarían con algún dibujo este problema?", Rosa anticipó que ellos dibujarían un rectángulo al tiempo que señaló la producción correspondiente a [1, en la Figura 2]; de igual manera ella previó que los estudiantes tendrían interiorizada la fórmula del área y a partir de ello, resolverían el problema. Al respecto, la profesora manifestó como verbalizaría a sus alumnos las instrucciones para hacer uso de la figura, "este lado mide 1 ½ metro, ¿qué es lo que no sabemos?, ¿cuánto mide la base de este rectángulo?", al tiempo que señaló la base del rectángulo como asociándola con la incógnita.

Rosa continuó explicitando cómo asociarían los datos de la figura con la fórmula: "sabemos que el área se obtiene multiplicando la base por la altura", ella escribió la ecuación [3, en la Figura 2], y representó la fórmula del área [2, en la figura 2], continuó diciendo: "el área son 21/6 de metros cuadrados, la base no la conocemos, pero la altura si, la cual es 1 ½ metro", lo indico en [3, en la Figura 2], luego preguntaría a sus estudiantes como resolverían tal situación.

La profesora anticipó la dificultad que podrían tener los alumnos y utilizó una representación algebraica con números naturales [4, en la Figura 2], ella verbalizó tal aspecto: "para hacerlo más sencillo utilizo un ejemplo, podemos conocer ese valor a través de una operación inversa que en este caso es una división", se refiere a la operación inversa de la multiplicación, ella agregó "sirve para despejar, para que ellos conozcan que es un despeje, y nos va a permitir conocer el valor que hace falta", la profesora se refirió a lo que hizo en [4, en la Figura 2], para ella este proceso es suficiente para acceder a la división de fracciones, ya que el procedimiento que utilizó fue el mismo del problema anterior [5, en la Figura 2], así la profesora dio sentido a la división de fracciones "los alumnos ya entendieron que una división va a resolver el problema", resuelto el problema, interpretó la repuesta "que está queriendo decir este 7/3, o 2 1/3, pues que es la medida del largo en metros con respecto a lo que nos pide el problema".

Del análisis de la tarea 2 consideramos que la profesora Rosa utilizó un modelo geométrico para dar sentido al problema, sin embargo, no lo vinculó con la operación de fracciones, utilizó la figura donde representó algebraicamente la situación de manera aislada. Ella no justificó el significado de la operación inversa de la multiplicación, sólo se limitó a despejar la ecuación recurriendo a un caso particular. Tuvo presente la unidad de referencia porque indicó que el valor encontrado es la base del rectángulo.

Problema de multiplicación de fracciones

En la figura 3 la profesora Rosa resolvió una tarea de multiplicación de fracciones.

Un edificio de planta rectangular hace esquina con dos calles. Uno de sus frentes ocupa un tercio de una calle, y el otro frente ocupa dos quintos de la otra calle. ¿Qué parte de la manzana está ocupada por el edificio?
Tomado de (Jiménez, 2015)

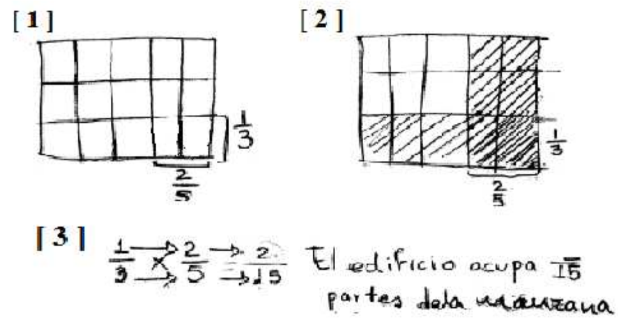


Figura 3. Problema de multiplicación.

La profesora resolvió y comunicó a las entrevistadoras los procedimientos que utilizó para resolver el problema “vamos a dividir este frente en tercios, tomando una tercera parte y el otro lado del arreglo rectangular lo vamos en dividir en quintas partes de las cuales vamos a tomar dos” ella señaló la representación [1, en la Figura 3], y mencionó la necesidad de colorear las regiones y obtener secciones con doble sombreado, así lo indicó en [2, en la Figura 3]. Ella hizo énfasis en que la región con doble sombreado le permitía representar la solución gráfica del problema y mostrar a los estudiantes la multiplicación de fracciones, dijo que lo había aprendido durante los cursos de formación continua y que previo a dicha capacitación solo enseñaba el algoritmo.

Rosa señaló la representación numérica que hizo en [3, en la Figura 3] y refiriéndose a la solución relacionó el denominador con el total de partes en que se dividió la figura, resalto que el numerador y las partes con doble sombreado eran la misma cantidad y con base en ello dio sentido a la multiplicación de fracciones; ella anotó dos flechas para indicar lo que realizó al nivel de la representación numérica para la multiplicación de las fracciones y agregó “al momento de representar una multiplicación se van a dar cuenta de que se realiza multiplicando de forma directa numerador por numerador y denominador con denominador y llegamos a 2/15, así queda más claro qué representan las fracciones o el algoritmo de la multiplicación con fracciones”. En la tarea tres observamos que la profesora tenía presente la unidad de referencia, lo manifestó para resaltar la respuesta del problema, es decir, la relación del resultado con el total. Se identificó el papel preponderante del modelo geométrico para justificar lo que realizó de manera operatoria. Se apoyó en lo visual para comunicar el algoritmo de la multiplicación.

Consideraciones finales

Del análisis de los instrumentos aplicados, identificamos que la profesora Rosa recurrió al uso del todo continuo sin establecer de manera concreta la equidivisión, privilegió el uso de la representación geométrica destacando el modelo del área. Es posible suponer que desde su experiencia de enseñanza ella le otorga eficacia a este modelo de representación, ya que utilizó el rectángulo sobre otras figuras, esta situación favoreció el sentido de las fracciones y sus operaciones, ella, sin embargo, estas representaciones no le permitieron ilustrar el caso de la división.

En torno a estas observaciones es posible suponer que las decisiones de la profesora Rosa están definidas por el currículum oficial, por su formación en la Escuela Normal, por los cursos de formación continua y por su experiencia docente. Con relación a los documentos oficiales, desde la década de los setenta se incorporó al Plan y Programas de estudio de educación básica el uso de representaciones en la recta numérica y con figuras geométricas para el estudio de las fracciones, estos recursos siguen estando actualmente vigentes en el Plan y Programas de estudio de educación secundaria.

Con base en lo anterior la profesora Rosa tomó decisiones para el diseño de las actividades que podría llevar a su clase de matemáticas, considerando que las operaciones de números fraccionarios representan dificultades de aprendizaje y cognitivas en los alumnos. Así, en la solución de los problemas surgieron estrategias informales como el caso de la división de fracciones, donde ella implementó ejemplos sencillos con números naturales y trasladó los procedimientos de esos números a las operaciones de números fraccionarios. Durante la solución de los problemas se identificó que ante la ausencia del tratamiento del inverso de la multiplicación se apoyó en el despeje de una ecuación (en el más estricto sentido algebraico), como se ha reportado en otros estudios como Valdemoros et al. (2015), esta situación señala tendencias en profesores en servicios y los futuros profesores. Habrá una continuidad en torno a estos procesos y representaciones en una segunda entrevista, a realizar próximamente.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers´ understanding of division. *Journal for researcher in Mathematics Education, 21, (2), 132-134.*

Ball, D. L. (2000). Brinding practices: Interwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher of Teacher Education*, 51, 241-247.

Castañeda, A. (2015). *Retos matemáticos 1*. México: Ediciones SM.

Jiménez, L. (2015). *Matemáticas 1.* México: Grupo Editorial Patria.

Kieren, T. (1983). Partitioning, Equivalence and the Construction of rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical education,* 506-525.

Kieren, T., Nelson, D. & Smith G. (1985) Graphical Algorithms in partitioning Tasks. *The Journal of Mathematics Behavior 4,* 25-36: Edmonton, Alberta, Canadá.

Kieren, T. (1988) Personal Knowledge of rational number: its intiutive and formal development. In J. Hiebert & M. Berh (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sharp, J., & Welder, R. (2014). Reveal limitations through fraction division problem posing. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 19, (9), 490-496.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata

Tirosh, D (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*, 125-147.

Valdemoros, M., Ramírez, M. & Lamadrid P. (2015). Núcleos de significación y pensamiento en la enseñanza de fracciones. *Comité Interamericano de Educación Matemática. Educación Matemática en las Américas,* 1, 195-204: Formación Inical para Profesores de Primaria. Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz. República Dominicana. ISBN Volumen: 978-9945-415-98-8 ISNB Obra Completa: 978-9945-415-97-1.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh & Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.127-174). New York: Academic Press.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Literatura infantil e Matemática: uma ação formativa

Edvonete Souza de **Alencar**
Universidade Federal da Grande Dourados
Brasil
EdvoneteAlencar@ufgd.edu.br

Resumo

Esta comunicação apresenta dados parciais de uma formação continuada. Neste trabalho nosso objetivo foi apresentar como as atividades formativas veem sendo desenvolvidas e mostrar as potencialidades que a Literatura infantil pode ter para o ensino de Matemática. Como referencial teórico utilizamos: Cerquetti e Albernauce; Candido, Diniz e Smole; Zacarias e Moro, entre outros. A metodologia utilizada foi o Design experiments referenciado por Cobb; Confrey; Di Sessa; Lehrer e Schauble , no qual serão registrados e analisados os dados obtidos durante o processo de formação. Apresentamos as respostas das professoras do questionário e identificamos que em sua maioria estas tiveram experiências positivas enquanto estudantes e professoras. Ao demonstrarmos a sequência didática realizada percebemos como o uso da Literatura infantil pode ser benéfico em atividades formativas e em sua utilização no ensino de Matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Formação continuada. Literatura infantil. Aprendizagem.

Introdução

Esta investigação surgiu com uma revisão de bibliográfica das pesquisas de Cerquetti e Albernauce (2001), Smole (2000), Zacarias e Moro (2005), Reame, Ranieri, Gomes e Montenegro (2012) e Gasperin (2013) que de modo geral relatam sobre a dificuldade de alguns professores no planejamento de suas atividades para ensinar Matemática e como novas propostas de ensino podem ser benéficas. Essa revisão nos alertou sobre a necessidade de formações que viabilizassem o uso de novas metodologias. Nesses mesmos estudos identificamos a Literatura infantil como um possível caminho para o ensino de Matemática. Realizamos também algumas leituras de dissertações e teses, Campos (2007), Garcia Silva (2007) e Alencar (2012) , que nos fizeram corroborar os estudos anteriores , pois também relatam sobre as dificuldades dos docentes em ensinar determinados conteúdos, o que alerta para uma necessidade de ações formativas. Assim surgiu o nosso interesse em realizar uma formação continuada fazendo o uso da Literatura infantil por considerarmos que a utilização de diferentes recursos permitem a reflexão e a melhoria nos planejamentos de ensino realizados.

Assim neste trabalho apresentamos as ações formativas que estão sendo realizadas na Universidade Federal da Grande Dourados – Brasil, com um grupo de 10 professoras da Educação Infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Nosso objetivo foi demonstrar como as atividades formativas veem sendo desenvolvidas e apresentar as potencialidades que a Literatura infantil pode ter para o ensino de Matemática em uma formação continuada.

Por tanto, organizamos este trabalho em três partes, na primeira apresentamos a revisão bibliográfica que será nosso referencial teórico para a análise da ação formativa. A segunda será apresentada a metodologia utilizada para o desenvolvimento da investigação. E terceira parte mostraremos um excerto das ações formativas já realizadas.

Referencial teórico: Literatura infantil e Matemática

Realizamos algumas leituras com o intuito de conhecer mais sobre as áreas de Literatura infantil e Matemática e ao mesmo tempo perceber as suas relações para o ensino e aprendizagem. Assim, buscamos alguns autores que pudessem fundamentar nossa investigação e que explanassem sobre a importância do uso de diferentes recursos para o ensino de Matemática , especificamente a Literatura infantil.

Cerquetti e Albernauce (2001) em suas investigações diz que historicamente a Matemática tem sido vista como uma área de difícil compreensão. A autora menciona que o método utilizado e ações de planejamento pode ser um dos motivos dessa problemática. Além disso, nos diz que deve-se ter sempre um estímulo para ensinar e aprender, um dos meios para que isso aconteça, é apresentar o conteúdo de diferentes formas e estas devem estar relacionadas aos gostos e interesses dos estudantes. Por esse motivo consideramos que promover nas formações de professores reflexões sobre novas estratégias de ensino podem ser benéficas.

Em complemento a Cerquetti (2001) , as autoras Candido, Diniz e Smole (2000) trazem reflexões a respeito do papel do professor ao estimular seu aluno para a aprendizagem em Matemática, e menciona que o docente deve promover momentos de aprendizagem que explorem não somente uma variedade numérica, mas incentive a aprendizagem de noções da geometria, de medidas e de estatística. As autoras citam que a curiosidade dos alunos deve ser estimulada para que eles adquiram o gosto em aprender Matemática e acrescentam que a Literatura infantil é um dos recursos que podem ser explorados. Assim, foi por meio deste estudo que consideramos ser importante realizar formações de professores utilizando-se da Literatura infantil.

Reafirmamos assim nossas escolhas por este tipo de formação ao lermos as investigações de Gitirana , Carvalho e Guimarães (2010) que também realizam as mesmas considerações dos autores anteriores e acrescentam que algumas situações para os adultos consideradas sem significado são para as crianças momentos oportunos de aprendizagem.

> Situações que podem parecer bobas ou sem sentido para o adulto, mas despertam o interesse, a curiosidade e a imaginação da criança. Por isso mesmo, os jogos, os brinquedos, e a literatura infantil são extremamente importantes na contextualização dos conhecimentos matemáticos. Eles exploram o lúdico, a imaginação e o faz de conta. (Gitirana, Carvalho e Guimarães ,2010, p. 72)

Considerando o exposto buscamos outros autores que fundamentassem a importância do uso da Literatura infantil para o ensino de Matemática nas formações de professores como: Zacarias e Moro (2005) que em seus estudos nos diz sobre a possibilidades deste uso e trazem o alerta que apesar da existência de muitos livros infantis pouco evidenciam o desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Outros autores como Reame, Ranieri, Gomes e Montenegro (2012) relacionam a língua e a Matemática e acreditam que estas tem a capacidade de desenvolver a interpretação, a análise e a síntese. As autoras demonstram que no uso da Literatura infantil o papel do professor vai muito mais além do que o da leitura , pois este deve estimular a expressão de sentimentos, de ações e no incentivo a participação crítica. Com isso, mencionam como a Literatura infantil pode auxiliar o ensino da Matemática assim como também de outras áreas do conhecimento. E afirmam: “A Literatura infantil pode ser concebida como um importante e significativo recurso para a inserção das crianças nas práticas de leitura e escrita, objetos de conhecimentos construídos socialmente”. (Reame, Ranieri, Gomes e Montenegro,2012. p.150).

Nesta mesma vertente Gasparin (2013) nos diz como a Literatura infantil é um recurso metodológico que permite a interdisciplinaridade, além de proporcionar a socialização e a relação com os aspectos do cotidiano do aluno.

Diante do exposto, a realização de formações continuadas que estimulem o uso da Literatura infantil para o ensino de Matemática pode contribuir para as ações de planejamento das docentes cursistas. Além do mais, a divulgação do relato dessas experiências formativas pode estimular que outras ações sejam realizadas em diferentes instituições.

Caminhos formativos: metodologia

Para a realização deste estudo adotamos como metodologia o Design Experiments, que, na perspectiva de Cobb, Confrey, di Sessa, Lehrer e Schauble (2003), consiste na elaboração de uma pequena teoria sobre o processo de ensino e aprendizagem de determinado conteúdo matemático. O desenvolvimento da pequena teoria pretendida refere-se a um modo de se realizar a formação de professores.

O projeto de formação Criação de histórias infantis para o ensino de Matemática é financiado pelo Instituto Serrapilheira e possui registro no comitê de ética sobre o número CAEE 90142518.0.0000.5160. Neste projeto nosso objetivo foi investigar se a criação e o desenvolvimento de histórias de Literatura infantil (e-book animados e livros convencionais) para o ensino de conceitos matemáticos pode influenciar e auxiliar as práticas e/ou conhecimentos profissionais de um grupo de professores da Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Salientamos que neste artigo nosso objetivo é apresentar como as atividades formativas veem sendo desenvolvidas e mostrar as potencialidades que a Literatura infantil pode ter para o ensino de Matemática em uma formação continuada

Destacamos que os elementos que irão compor a ecologia da aprendizagem citadas por

Cobb et. all. serão as diferentes representações, os registros e análises dos professores em cada etapa do estudo formativo. Segundo os autores essa metodologia tem "sistemas interativos em uma coleção de atividades ou uma lista de fatores separados que influenciam aprendizagem" (Cobb et. al., 2003, p.11). Caso haja necessidade haverá a modificação das tarefas , com prévia analise das mesmas e no qual será desenvolvido no mesmo grupo de professores participantes da formação.

Temos consciência que nossas hipóteses inicias podem ser validadas ou refutadas. Assim após realização das tarefas formativas e realização da primeira intervenção, caso nossas hipóteses tenham sido refutadas estas serão reelaboradas e analisadas para um novo desenvolvimento formativo.

As formações foram realizadas, na Universidade proponente do curso quinzenalmente em encontros de 4 horas com um grupo de 10 professores da rede pública da Educação Infantil e Ensino Fundamental

Neste artigo apresentamos duas das etapas realizadas na formação continuada: 1) aplicação do questionário aberto para identificação do perfil dos docentes; 2)Apresentação de uma sequência didática para o ensino de Matemática com Literatura infantil. Além dessas etapas há outras ainda em desenvolvimento que serão apresentadas em futuras comunicações, sendo estas: 3) Criar histórias infantis coletivamente para o desenvolvimento de conceitos matemáticos previamente selecionados pelos cursistas; 4) Discussão e análise das criações coletivas para reescritas e adequações; 5) Criação das ilustrações e suas análises; 6) Diagramação dos livros produzidos.

As ações formativas

As ações formativas aqui descritas serão os questionários e a sequência didática apresentada as docentes sobre o uso da Literatura infantil para o ensino de Matemática.

Ao realizarmos o primeiro dia de encontro, fizemos uma abordagem geral sobre o projeto e suas ações. Formalizamos a participação dos docentes no projeto de pesquisa conforme estabelece o Comitê de ética com a assinaturas dos termos de consentimento de participação. E aplicamos um questionário aberto para que pudéssemos conhecer as experiências do grupo de professores cursistas da formação continuada com a Literatura infantil e Matemática. As perguntas relacionavam-se ao conhecimento e experiências profissionais ou referiam-se as suas vivências como estudante com relação a Literatura infantil para o ensino de Matemática, conforme apresentamos no quadro a seguir:

Quadro 1- Questionário aberto

1- Você já observou, vivenciou ou utilizou uma história de Literatura infantil para o ensino de Matemática? Se positivo relate sua experiência
2- Quais fatores você considera pertinente e/ou não, no uso de histórias de Literatura infantil para o ensino de Matemática?
3- Quais conteúdos matemáticos da Educação Infantil você considera importantes serem abordados em histórias de Literatura infantil? Explique suas considerações
4- Quais conteúdos matemáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental você considera importantes serem abordados em histórias de Literatura infantil? Explique suas considerações

5- Você já criou ou adaptou alguma história infantil para o ensino de Matemática ou outras disciplinas?

Fonte: Autoria própria

Salientamos que neste artigo, mostraremos breves análises devido a pouca extensão concedida ao texto. De modo geral, as respostas das professoras na questão 1 , demonstraram que a grande maioria (90%) das docentes já tiveram alguma experiência como estudantes ou desenvolvem algumas atividades utilizando a Literatura infantil, destas a grande maioria adapta histórias convencionais como Chapeuzinho Vermelho, O patinho feio e outras. Tal fato, nos leva a inferir a existência de poucas histórias infantis específicas para o ensino de Matemática o que é evidenciado nos estudos de Zacarias e Moro (2005, p.277) que utilizam-se de histórias clássicas infantis que não possuem o objetivo para o ensino de Matemática como as professoras analisadas

Na questão 2 , em sua totalidade (100%) das professoras consideram que o ensino com Literatura infantil pode se tornar mais prazeroso e lúdico, permitindo maior compreensão dos alunos, pois as histórias podem aproximar-se de situações do cotidiano. Essas análises vão ao encontro do que é mencionado por Reame, Ranieri, Gomes e Montenegro (2012) e Gasparin (2013) que consideram o uso da Literatura infantil vai além de sua utilização para a leitura e atividades de alfabetização, mas permitem a expressão dos sentimentos e o estimulo a aprendizagem.

A questão 3 e 4 serviram para que pudéssemos identificar os conteúdos , no qual criaremos as histórias de Literatura infantil, sendo para Educação Infantil a Geometria e para o Ensino Fundamental o Sistema de Numeração Decimal.

A questão 5 mostra o uso que este docente realiza com a Literatura infantil, no qual observamos que 60 % utiliza essa metodologia como recurso para o ensino e 40 % apresenta dificuldades em estabelecer as relações que o livro infantil pode proporcionar. Essas dificuldades são apresentadas por Cerquetti e Albernauce (2001) e Candido, Diniz e Smole (2000) que nos alertam sobre a necessidade de realização de formações continuadas com propostas do uso da Literatura infantil ou outros recursos, para que o docente reflita sobre suas práticas e possa modifica-las.

Ao realizarmos o segundo dia de encontro apresentamos uma sequência didática com o livro “O lobo que virava formas geométricas” de autoria de Edvonete Souza de Alencar e ilustrado por Antt Pereira pela editora Scortecci. Selecionamos esta história pois a questão 3 nos mostrou o interesse das professoras pelos conteúdos da Geometria. A seleção específica do livro foi por que este é uma história que possui como objetivo abordar as figuras planas e suas propriedades para o seu ensino aos alunos da Educação Infantil e primeiros anos do Ensino Fundamental. A sequência didática foi criada a partir do enredo da história pela coordenadora do projeto Criação de histórias infantis para o ensino de Matemática. O objetivo da sequência didática foi apresentar as potencialidades do uso da Literatura infantil para o ensino de Matemática.

Inicialmente para a realização da sequência didática foi realizada a leitura da história utilizando a projeção multimídia. Após a leitura deu-se as professoras papel para que registrassem as características de cada forma plana conforme citado na narrativa. Com este primeiro registro observamos as dificuldades das docentes em identificar determinadas características das figuras e registra-las no papel. As dificuldades dos professores em determinados conteúdos matemáticos são apontados pelas dissertações e teses Campos (2007), Garcia Silva (2007) e Alencar (2012), que nos fazem inferir sobre as dificuldades dos professores na compreensão dos conteúdos . A investigação de Pavanello (1993) indica a dificuldade dos professores em compreender e ensinar Geometria. A autora menciona que por muitos anos foi um conteúdo pouco abordado nos anos iniciais e demonstra a necessidade de realizar ações formativas que discutam os aspectos do ensino de Geometria.

As características das figuras planas foram discutidas com o grupo para que houvesse uma compreensão sobre o assunto, utilizou-se materiais concretos, como recortes das figuras em papel colorido e as dúvidas foram sanadas, pois as professoras modificaram os seus registros e o modo como realizavam suas explicações oralmente.

O grupo percebeu as possibilidades que o uso da Literatura infantil pode ter para o ensino de Matemática.

Algumas considerações

Ao elaborarmos esta comunicação apresentamos um excerto do projeto “Criação de Histórias da Literatura infantil para o ensino de Matemática” tínhamos como proposta apresentar como as atividades formativas veem sendo desenvolvidas e mostrar as potencialidades de seu uso em atividades de ensino. O excerto apresentado refere-se as duas primeiras etapas do projeto que demonstra as respostas das professoras do questionário e a sequência didática desenvolvida com as docentes cursistas.

Com o questionário notamos que as docentes tiveram em suas experiências o uso da Literatura infantil para o Ensino de Matemática, como estudantes ou como professoras. Este fato, é um dado positivo, pois demonstra que as docentes estão em busca de novas propostas e recursos metodológicos para o ensino. Inferimos também que os conteúdos – Geometria e Sistema de Numeração Decimal - indicados pelas professoras para a realização das histórias são os que provavelmente estas possuem dificuldade para o ensino.

Com o desenvolvimento da sequência didática pudemos comprovar que as docentes possuem dificuldade na identificação das características das figuras planas, quando estas realizam os registros em papel. Percebemos assim que outras formações deverão ser realizadas com os conteúdos indicados, para que ao final sejam criadas boas histórias para o ensino destes conteúdos.

Consideramos que as atividades formativas (aplicação de questionário , leitura de história infantil , registro das características das figuras planas e reflexão das mesmas, recorte das figuras em papel colorido) até aqui desenvolvidas puderam iniciar um trabalho de reflexão para que as docentes começassem a perceber a importância de utilizar diferentes recursos para o ensino de Matemática, sendo um deles a Literatura infantil.

Referências

Alencar, E. S. D. (2012) *Conhecimento Profissional Docente de Professores do 5º ano em uma escola com bom desempenho em Matemática:* o caso de estruturas multiplicativas. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). ed. UNIBAN: São Paulo.

Candido, P T. Diniz, M I S. Smole, K(2000) *Brincadeiras infantis nas aulas de Matemática*. Porto Alegre: Artmed.

Campos, E. G. J. D. *Dificuldades na aprendizagem da divisão:* análise da produção dos erros dos alunos do ensino fundamental e sua relação com o ensino praticado pelos professores. Dissertação (Mestrado em Educação). ed. Universidade Católica Dom Bosco: Campo Grande, 2007.

Cerquetti, Françoise e Albercane, Catarine Berdonneau.(2001) *O ensino da matemática na Educação Infantil.* Porto Alegre: Artmed.

Cobb, P .; Confrey, J.; Di Sessa, A.; Lehrer, R.; E Schauble, L. (2003)*Experimentos de design em pesquisa educacional*, em: Pesquisador Educacional, V. 32, n. 1, pp. 9-13.http: //www.aera.net/uploadedFiles/Journals_and_Publications/Journals/Educational_Researcher /3201/32 01_Cobb.pdf

Garcia Silva, A. D. F. (2007)*O Desafio do Desenvolvimento Profissional docente Análise da Formação Contínua de um Grupo de Professores da Série Inicial de Ensino Fundamental, tendo como objeto de Discussão o Processo de Ensino e Aprendizado de Frações*. São Paulo: Tese de Doutorado.

Galperin, Cláudio. (2013) *Os desafios da escola pública do Paraná na perspectiva da professora PDE*. Literatura e Inclusão Infantil. 2013. Artigo disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/ 2013_ue np_port_artigo_elizangela_idalgo_regallo_maria.pdf. Acessado em: 8 de fevereiro de 2017.

Gitirana, Verônica; Guimarães, Gilda Lisboa; Carvalho, João Bosco Pitombeira de. *Os livros paradidáticos para o ensino da Matemática.* Brasília, 2010. (Coleção explorando o ensino: Matemática).

Pavanello, R. M. *O abandono do ensino da geometria no Brasil:* causas e conseqüências. *Revista Zetetiké*. Ano I, Nº 1, p.7-17, 1993

Reame, E.Ranieri, A. C.; Gomes, L. Montenegro, P. *Matemática na educação do dia-a-dia das crianças:* rodas, músicas, jogos e histórias. São Paulo: 2 ed. Página 1

Zacarias, E., Moro M. L. F. *A Matemática das Crianças Jovens e Literatura infantil.* Educar Curitiba n25, p.275-299, 2005.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Estudio del sistema documental de una profesora de primaria para enseñar estimación y medición de longitudes

Marisol **Santacruz** Rodríguez
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México-Colombia
msantacruzr@cinvestav.mx
Ana Isabel **Sacristán** Rock
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
asacrist@cinvestav.mx

Resumen

Presentamos algunos resultados de un investigación reflexiva en la cual se hizo seguimiento al trabajo documental de varios profesores de primaria en Colombia, buscando analizar su selección, apropiación y uso de recursos digitales en su práctica docente. Para ello, desarrollamos un instrumento metodológico: una técnica que promueve la introspección y reflexión por parte de los docentes. En este trabajo nos centramos en el caso de una profesora de grado quinto, enfocándonos en el análisis de la selección que esta docente hace de los recursos para enseñar la estimación y medición de longitudes. A través de la introspección y reflexión de esta profesora en situaciones específicas (utilizando el instrumento arriba mencionado), pudimos definir su sistema documental, analizar sus acciones y conocimientos profesionales al interactuar ella con los recursos digitales, e inferir su esquema de selección de dichos recursos para enseñar magnitudes y medidas en grado quinto.

Palabras clave: sistema documental, investigación reflexiva, enseñanza de las magnitudes y su medida, selección de recursos digitales, educación primaria.

Introducción

El desarrollo de Internet y la pujante digitalización de la sociedad deberían impactar el trabajo de los profesores: por ejemplo, el acceso, relativamente fácil y rápido, a recursos para la enseñanza, nuevas maneras de comunicarse con sus estudiantes y diversas formas de trabajo colaborativo entre colegas (Pepin et al, 2017), ilustran cambios potencialmente sustanciales en la práctica para la enseñanza de las matemáticas de los profesores, así como algunas modificaciones al currículo, la evaluación, el aprendizaje y las prácticas de aula (Remillard, 2005).

Estos cambios deberían requerir la emergencia de nuevos conocimientos profesionales de los profesores sobre los recursos y cómo usarlos en sus clases. En un esfuerzo por analizar estos conocimientos profesionales de los profesores en interacción con los recursos, en nuestra investigación nos proponemos estudiar los procesos de selección de recursos digitales (y los conocimientos profesionales asociados), que hacen profesores de primaria (en Colombia) para la enseñanza de la geometría. Para esto, realizamos estudios de casos con profesores de diversos grados (en particular, de grado quinto), a partir de entrevistas y observaciones de sus clases. En este artículo, nos centramos en el análisis de los conocimientos profesionales de una profesora de grado quinto (Sonia) cuando seleccionó recursos (digitales) para enseñar la estimación y medición de longitudes.

Marco teórico

El principal referente de nuestro trabajo es la Aproximación Documental de la Didáctica (Trouche, Gueudet & Pepin, 2018), la cual consiste en un enfoque teórico y metodológico que se ocupa primordialmente del estudio del trabajo de los profesores con los recursos y su desarrollo profesional. Su punto de vista parte de considerar los recursos (Adler, 2000) como elementos fundamentales de los sistemas documentales que desarrollan los profesores en su práctica. El sistema documental de un profesor (Gueudet & Trouche, 2009) es donde éste organiza los recursos que usa, e incluye los conocimientos profesionales (esquemas de utilización) que el docente tiene sobre esos recursos durante su trabajo documental (en contextos específicos) a lo largo del tiempo (Gueudet & Trouche, 2008).

El trabajo documental (Gueudet & Trouche, 2009) se refiere al desarrollo del sistema documental del profesor, involucrando las distintas interacciones que tiene éste con los recursos que usa (e.g. libros de texto, dispositivos digitales, representaciones, conceptos matemáticos, discusiones con otros colegas, reflexiones en clase, plataformas educativas, etc.) en distintas situaciones: búsqueda, selección, adaptación, re-diseño y uso de los recursos (en clase o fuera de ella). Estas dinámicas del trabajo documental pueden llegar a redimensionar los conocimientos profesionales de los profesores; por ejemplo, cuando participan en redes sociales (con distintas motivaciones) y desarrollan nuevas formas de organización del conjunto de recursos que usan (e.g. en sus computadoras personales o en plataformas como Google).

Para analizar los conocimientos de los profesores en situaciones profesionales específicas (e.g. la selección de recursos para su clase) tomamos en cuenta la idea de esquema (Vergnaud, 1997); esta idea permite analizar los conocimientos profesionales involucrados en los sistemas documentales de los profesores. Los esquemas corresponden a organizaciones invariantes de la actividad (profesional) del profesor la cual depende de la situación y de la experiencia del profesor. Un esquema consta de: metas y anticipaciones; reglas de acción; invariantes operatorias e inferencias (Vergnaud, 1997).

En nuestro trabajo buscamos identificar los esquemas organizadores que los profesores de primaria desarrollan para seleccionar los recursos (digitales) que usan en sus clases de geometría. En este escrito presentamos el análisis del caso de la profesora Sonia, maestra de grado quinto de una escuela pública, mixta y urbana en Colombia, quien nos permitió acceder a su aula con el propósito de caracterizar su proceso de selección de recursos (digitales) mediante la identificación de su sistema de recursos e inferencia de su esquema de selección de recursos para enseñar estimación y medidas de longitud.

Metodología

Esta investigación se interesa en el estudio de casos de profesores de primaria (en Colombia) que enseñan geometría, integrando recursos digitales. Para ello, tuvimos en cuenta algunos principios de la investigación reflexiva (Guin & Trouche, 2007), mediante la cual se promueve la mirada retrospectiva de los profesores respecto a su propia práctica (es decir, sus interacciones con diversos recursos: su “trabajo documental”). Los elementos de la investigación reflexiva (Guin & Trouche, 2007) que utilizamos fueron: el seguimiento del trabajo documental de los profesores participantes (dentro y fuera de la clase) durante un tiempo prudente (tres meses en el caso de la maestra Sonia que reportamos abajo); el uso de una bitácora por parte de los profesores; y la elaboración, por parte de cada profesor, de representaciones esquemáticas del conjunto de recursos que usa (mapa de recursos), así como de su ruta de selección de dichos recursos, entre otros aspectos.

Para lo anterior y para recabar datos, además de tomar en cuenta las planeaciones de clases y bitácoras de los profesores, se llevaron a cabo observaciones de clase (*in situ*), con atención particular en los recursos que el profesor usa; así como entrevistas con cada profesor donde se promovía su reflexión y se le ayudaba a elaborar sus representaciones esquemáticas (mediante la aplicación de una “técnica de introspección” que presentamos abajo). Cabe señalar que no hubo ningún tipo de intervención en la práctica en el aula de los profesores participantes, ni tampoco trabajo de formación con ellos, aunque el trabajo reflexivo durante las entrevistas implica un análisis de los profesores de su propia práctica.

Desarrollo de nuestra técnica de introspección

Como se mencionó anteriormente, una de las características de nuestro estudio fue el desarrollo de una técnica de introspección como instrumento metodológico de investigación; dicha técnica fue diseñada para definir lo que llamamos “ruta-recorrida” a través de promover la reflexión de cada profesor. El propósito de esta técnica es recabar información sobre la práctica de cada profesor (además de ayudarnos a organizar y analizar los datos), considerando su contexto, así como su “historia” (Vollstedt, 2015). Para determinar cada “ruta-recorrida”, el uso de la técnica consistió en “estimular” la reflexión de cada profesor, durante las entrevistas, a partir de información (textual u audiovisual) tomada de su propia práctica (e.g. videograbaciones de sus clases), que le permitió evocar (*a posteriori*) sus acciones, pensamientos y acciones en un momento o actividad específica.

Particularmente, nosotros estábamos interesados en que cada profesor re-construyera su proceso de selección de recursos, por tanto, le pedíamos que representara esquemáticamente dicho proceso y lo acompañara de sus explicaciones verbales. Los profesores siempre estaban enterados del propósito de la investigación y del funcionamiento de la técnica de introspección; además se les invitaba a que profundizaran en la reflexión sobre su práctica como un ejercicio profesional importante.

Como en nuestro estudio nos enfocamos en el proceso documental de selección de recursos, priorizamos todas las interacciones en las cuales los profesores (participantes en la investigación) aludían directa o indirectamente sobre este tema. Para esto, grabamos las entrevistas, clases y demás interacciones de cada profesor con los investigadores, tomamos fotografías de escenas, recursos usados por el profesor o recolectamos materiales usados (e.g. páginas web, fotocopias, etc.). Los datos fueron clasificados de acuerdo a cuánto aludían a nuestro tema de interés (i.e., la selección de recursos para la clase); posteriormente, las entrevistas y grabaciones fueron transcritas, segmentadas, codificadas y analizadas por los investigadores para elegir los extractos de la información que se presentarían a los profesores para estimular su reflexión (Vollstedt, 2015).

A posteriori (una semana después, generalmente), se llevó a cabo la presentación a cada profesor de los extractos de información elegidos (extractos de videos, de fotos, de las planeaciones de clase, etc.). Esos extractos se relacionaban con nuestro tema de interés: episodios de clase, de la planeación de la clase o alguno de los recursos que seleccionó para su clase. Cuando el profesor interactuaba con esos extractos de información enfocados al tema de nuestra investigación, se le pedía que escribiera, conversara y realizara una representación esquemática (mapa o diagrama) de la ruta que recorrió para seleccionar determinados recursos para su clase. Las producciones de los profesores (e.g. rutas-recorridas, mapas, diagramas, textos, conversaciones), obtenidas mediante su trabajo reflexivo e introspectivo, son de un gran valor metodológico para nosotros ya que constituyen un recuerdo estimulado (Calderhead, 1981) que evoca acciones particulares respecto a nuestro tema de interés. En este artículo ejemplificamos el uso de la técnica de introspección en el caso de la profesora Sonia, así como su proceso documental para seleccionar recursos.

La profesora Sonia y su sistema de recursos para enseñar geometría

Los principales criterios de elección de la profesora Sonia como sujeto de investigación, fueron: su participación voluntaria, su interés en la enseñanza de la geometría y el uso de recursos digitales en sus clases. Al respecto debemos notar que la profesora Sonia es normalista y licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas; tiene una experiencia de 11 años en la docencia, todos en educación primaria, de los cuales, los tres últimos años ha enseñado grado quinto en la escuela en la que trabaja actualmente.

Durante su experiencia, Sonia ha consolidado un sistema de recursos variado, que incluye: un conjunto de textos escolares con sus correspondientes guías del profesor, talleres (fotocopias) para estudiantes que ella misma diseña o adapta, recursos curriculares institucionales, presentaciones de diapositivas (que incluyen imágenes, links o videos). Cada año, dependiendo de las necesidades educativas de sus estudiantes, Sonia gusta de revisar los recursos que tiene disponibles y los va modificando. Una de las características que Sonia resalta, en su sistema de recursos, es la necesidad de digitalizar (en su computador personal) la mayor parte del material que usa; en su opinión, eso le facilita su organización, búsqueda, acceso y adaptación:

> Sonia: *Para mi es importante que los niños y los padres de familia vean un trabajo bien hecho. Si les voy a dar un taller, que no sea cualquier fotocopia sino un material organizado, con los logos de la escuela y bien presentado, hecho en computador… y cambiarlo según lo que necesito. [Luego] le pongo más preguntas o le quito otras, o le meto más indicaciones.* (Fragmento de entrevista).

Para Sonia, la elaboración del mapa o representación esquemática del conjunto de recursos que usa (i.e. su sistema de recursos), resultó ser para ella una actividad importante ya que, en su opinión, resumía la planeación de la clase. Se dio cuenta que poder determinar qué recursos usar, cuándo y cómo, eran algunas de sus objetivos al planear la clase. Las representaciones esquemáticas (mapas) de Sonia sobre su sistema de recursos variaron mucho a lo largo del tiempo, dependiendo de los elementos que ella iba considerando. Por ello categorizamos esas distintas versiones de sus mapas de recursos, en tres niveles: (i) Un nivel meta: compuesto por recursos generales; esos que son fundamentales para la enseñanza (e.g. recursos curriculares, el pizarrón, cuadernos de los estudiantes, etc.); (ii) Un nivel macro: recursos especializados en la enseñanza de la geometría (e.g. regla y compás, geometría dinámica; y (iii) Un nivel micro: recursos muy enfocados a un situación particular, sea un tema específico de enseñanza o una problemática respecto al aprendizaje (e.g. un *applet*, un video, una hoja de trabajo o taller).

Esta clasificación del sistema de recursos de Sonia corresponde a sus intencionalidades y maneras de organizar la enseñanza, considerando aquellos elementos que ella toma en cuenta para planear su trabajo. La planeación es, para Sonia, una actividad fundamental que le permite prever la temática a trabajar, los recursos a usar y las estrategias de enseñanza. En la representación esquemática, o mapa, que Sonia hizo de su sistema de recursos para enseñar geometría (ver Figura 1) podemos analizar varios elementos: el primero es que, para Sonia, esta representación corresponde a un nivel macro; el segundo, la existencia de ligas entre varios elementos de su sistema, y, el tercero, la explicitación del sentido y usos de algunos de los recursos allí representados.

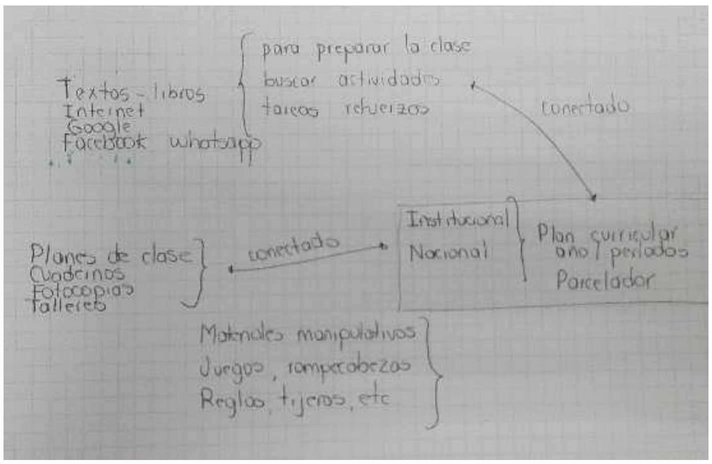


Figura 1. Mapa de recursos de Sonia (nivel macro).

Sonia organiza los recursos que usa en cuatro grandes categorías: (i) recursos para planear (sea la clase o actividades específicas); (ii) recursos curriculares; (iii) materiales manipulativos (e.g., escuadra, compás, etc.); y (iv) recursos para apoyar el aprendizaje de los estudiantes (e.g. hojas de trabajo, talleres, fotocopias). En esta organización de su sistema de recursos es posible analizar la manera como Sonia concibe su trabajo documental.

Al respecto, un aspecto interesante antes mencionado, son las conexiones o ligas que relacionan algunas categorías del sistema. Inicialmente, Sonia no consideraba este tipo de relaciones, pero posteriormente, y a través de su ejercicio de reflexión, pudo darse cuenta de la influencia o correspondencia entre grupos de recursos. Al respecto, Sonia señala, de manera explícita, las relaciones entre recursos curriculares-recursos para planear-recursos dirigidos a los estudiantes; en estas conexiones son evidentes las maneras en que Sonia considera la retroalimentación entre distintos grupos de recursos y sus posibilidades de evolución.

Como parte de nuestro análisis, también tuvimos en cuenta el papel que Sonia le asigna a los recursos digitales en su sistema; aparecen éstos, de manera explícita, en la categoría "recursos para planear"; esto nos permite entrever que la profesora prioriza su interacción con los recursos digitales cuando está pensando en seleccionar y adaptar actividades para sus estudiantes. También es llamativa la aparición de algunas redes sociales en esta misma categoría, como espacios de interacción con colegas y mediante los cuales se puede compartir información y materiales.

El proceso de selección de recursos (digitales), de la profesora Sonia

En nuestro análisis consideramos la re-construcción del proceso de selección de recursos de Sonia, poniendo especial énfasis en los recursos digitales. Analizamos el tipo de recursos que Sonia selecciona para su clase y propone a sus estudiantes respecto a un tema específico: la estimación y medición de longitudes. Sonia escogió este tema gracias a que correspondía a temas del currículo y porque le parecía una excelente oportunidad para el uso de recursos.

En una primera clase, Sonia le propuso a sus estudiantes algunas actividades de estimación de longitudes mediante comparaciones de líneas con igual longitud (aunque distinta forma); posteriormente introdujo el uso de uso de la cinta métrica pidiendo a los niños que agregaran marcas a una tira de papel. Hasta ese momento, Sonia priorizaba el uso de manipulativos; sin embargo, en la siguiente clase Sonia decidió introducir algunas ideas del sistema métrico decimal, momento en el cual consideró usar recursos digitales. En la siguiente clase, Sonia propuso un *applet* en GeoGebra para que los estudiantes experimentaran con la medición de longitudes (https://www.geogebra.org/m/qYHjHDAf) usando una regla graduada.

Consideramos que los principales criterios de Sonia para la selección del *applet* fueron de orden didáctico-cognitivo: la visualización, la aplicación de las equivalencias y la interacción estudiantes-recursos. Sonia realizó la búsqueda de ese *applet* en un portal especializado de recursos de GeoGebra, haciendo una búsqueda concienzuda acerca del tipo que quería encontrar. Para profundizar en la manera en que Sonia seleccionó ese recurso, utilizamos nuestra técnica de introspección (ver Figura 2).

Para la elaboración de su "ruta-recorrida", le propusimos a Sonia representar su proceso de selección del *applet* usado específicamente en su clase. Para nosotros era necesario que la ruta correspondiera a una situación muy particular con el propósito de poder inferir un posible esquema en las acciones de Sonia. Por tanto, le proporcionamos a Sonia el video de la sesión en la cual ella buscó el recurso por Internet, lo seleccionó y lo adaptó para su clase. La Figura 2 muestra la ruta-recorrida que Sonia propuso en esta situación específica.

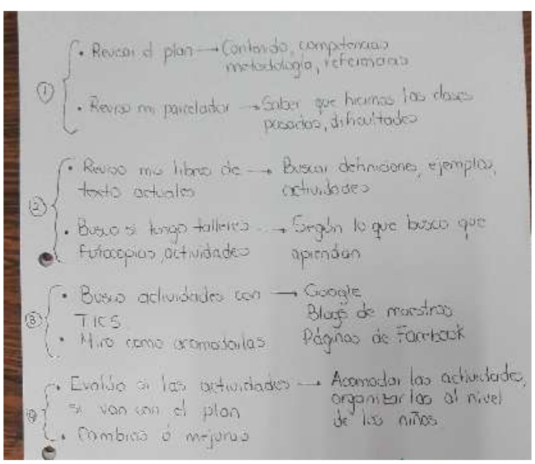


Figura 2. Ruta-recorrida propuesta por Sonia.

Mientras nos explicaba la ruta, Sonia agregaba detalles al mapa, como la numeración y algunas explicaciones. En esta ruta es notorio el interés de Sonia por organizar sus acciones en bloques de actividades consecutivas que parten de considerar los lineamientos que le ofrecen los recursos curriculares que usa habitualmente, su bitácora o seguimiento de clases y los libros de texto. Para

Sonia es importante ubicar su selección de acuerdo a lo que ya ha hecho anteriormente y hacia dónde quiere avanzar con sus estudiantes.

La situación de selección de Sonia es bastante específica: buscó un recurso digital que complementara un trabajo que ya venía realizando en clase y que se articulara con la hoja de trabajo para los estudiantes, ya prevista. Sus criterios de selección fueron bastante específicos en dos aspectos: (i) la demanda cognitiva del recurso digital y (ii) las necesidades educativas de sus estudiantes. De allí que sus anticipaciones se relacionaran con el repositorio en el cual buscó el recurso, en términos de las calidades ergonómica (el diseño del recurso) y didáctica (la situación que el recurso le propone a los estudiantes).

Así pues, las reglas de acción propuestas por Sonia se pueden organizar en dos categorías: tener en cuenta las necesidades educativas de sus estudiantes y la del recurso. Sonia es consciente que probablemente puede encontrar recursos muy interesantes que pueden exceder la capacidad de sus estudiantes y que serían contraproducentes para su aprendizaje; ella buscó un recurso que afianzara lo que los niños ya sabían y que les permitiera avanzar un poco más.

Las invariantes operatorias de Sonia exhiben sus conocimientos curriculares, didácticos y matemáticos. Su insistencia en el papel de la estimación, de la equivalencia, el sentido de las unidades y el uso de geometría dinámica, muestran su interés por focalizar su enseñanza en aspectos que ella considera centrales y que van mucho más allá de aprender fórmulas. Finalmente, Sonia considera que el uso de recursos digitales puede llegar a ser un elemento importante para atender las dificultades de estudiantes con bajo desempeño escolar. Esta inferencia se deriva del interés explícito de Sonia por atender las necesidades educativas de sus estudiantes y su experiencia trabajando con este tipo de recursos.

Conclusiones y comentarios finales

Como se mostró arriba, mediante nuestros instrumentos metodológicos de investigación (los que nos ayudaron a codificar y analizar los datos, así como la técnica de introspección), pudimos analizar el sistema documental de Sonia compuesto por: (i) los recursos que usa para enseñar geometría (su sistema de recursos, categorizado por nosotros en tres niveles), y (ii) sus conocimientos profesionales sobre cómo usar dichos recursos (su esquema de selección del *applet*).

El uso de nuestra técnica de introspección para determinar la "ruta-recorrida" resultó de gran ayuda para comprender las acciones y conocimientos de Sonia (a través de sus producciones verbales y gráficas) e inferir su esquema de selección subyacente. Adicionalmente, pasar por la experiencia introspectiva le permitió a la profesora reflexionar sobre su práctica y los recursos que selecciona y usa. Una de las fortalezas de nuestra técnica de introspección es que nos ayudó a obtener distintos datos (representaciones esquemáticas, verbalizaciones, textos), los cuales nos permitieron lograr un análisis más exhaustivo de las acciones de Sonia. Una posible limitante de nuestra técnica de introspección es que requiere cierto tiempo de "entrenamiento" por parte de cada profesor participante, con el objeto de que se sienta cómodo realizando las producciones que le solicitamos.

Asimismo, el esquema que inferimos de selección de recursos por parte de Sonia, nos permitió estudiar sus conocimientos profesionales en situaciones específicas (e.g., en su planeación de clase), mostrando la intencionalidad, secuencialidad y organización de sus acciones; además de la variedad de conocimientos involucrados (ergonómicos, curriculares, matemáticos y didácticos). Por otro lado, nuestro análisis del sistema documental de Sonia, nos lleva a plantearnos nuevos cuestionamientos sobre el trabajo documental de los profesores. Por ejemplo, surgen cuestionamientos respecto a qué recursos curriculares usan los profesores en su práctica, y por qué.

Consideramos que este tipo de estudios enfocados en la práctica de los profesores y sus conocimientos profesionales, son necesarios en el análisis de las interacciones de los profesores (y sus conocimientos) con los recursos que usan habitualmente. En nuestro caso, nuestro estudio da cuenta de los criterios de selección de recursos por parte de profesores en ejercicio y, también, de las expectativas que tienen sobre la oferta de recursos que tienen a su alcance. Esto puede ser de utilidad para quienes se dedican a diseñar recursos de enseñanza-aprendizaje, o a los interesados en los procesos de formación de profesores.

Referencias y bibliografía

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 205–224. doi:10.1023/A:1009903206236.

Calderhead, J. (1981). Stimulated recall: a method for research on teaching. *British Journal of Educational Psychology*, 51, 211-217.

Gueudet, G., y Trouche, L. (2009). Towards New Documentation Systems for Teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71, 3, 199-218.

MEN (2007). *Estándades básicos de compentencias. Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Magisterio.

Pepin B, Choppin J, Ruthven K, Sinclair, N. (2017). Digital curriculum resources in mathematics education: foundations for change. *ZDM*, 49, 5, 645–661

Remillard, J. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. Review of Educational Research, 75, 2, 211–246. doi:10.3102/00346543075002211.

Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B. (2018). Documentational approach to didactics. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. N.Y.: Springer. doi:10.1007/978-3-319-77487-9_100011-1

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In Nunes, T. & Bryant, P. (Eds.) *Learning and teangching mathematics, an international perspective,* 5−26. Hove: Psychology Press.

Vollstedt, M. (2015). To See the Wood for the Trees: The Development of Theory from Empirical Interview Data Using Grounded Theory. In Bikner-Ahsbahs, A; Knipping, C. & Presmeg, N. (Eds.) *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods.* Dordrecht: Springer.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

La transición de profesor a formador de profesores: Aprendiendo a establecer discusiones didáctico-matemáticas con profesores en ejercicio.

Luz **Valoyes-Chávez**
Centro de Investigación Avanzada en Educación – Universidad de Chile
Chile
luz.valoyes@ciae.uchile.cl
Natalia **Ruiz**
Centro de Investigación Avanzada en Educación – Universidad de Chile
Chile
nruiz@dim.uchile.cl

Resumen

La propuesta se enmarca en los esfuerzos por estudiar los procesos de expansión de los programas de desarrollo profesional que buscan transformar la enseñanza de las matemáticas. ***ARPA*** es uno de estos programas; su objetivo es fortalecer las habilidades de los profesores para implementar la resolución de problemas matemáticos en sus clases. En el contexto de los esfuerzos por expandir ***ARPA***, en esta propuesta presentamos resultados preliminares de una investigación que analiza los desafíos que implica formar monitores capaces de reproducir ***ARPA*** en diversas regiones de Chile. Basándonos en los desarrollos teóricos del Aprendizaje Situado, analizamos el proceso de aprendizaje de los monitores para establecer y sostener discusiones didáctico-matemáticas significativas, una característica clave de ***ARPA***. Los resultados indican elementos fundamentales que posibilitan el tránsito de profesor a monitor.

Palabras clave: Desarrollo profesional, resolución de problemas matemáticos, formador de profesores, aprendizaje situado.

Introducción

Diversos estudios (e.g, Even, 2008) han señalado los desafíos que implica expandir programas de desarrollo profesional (PD) para profesores de matemáticas. Una dificultad se relaciona con la formación de monitores capaces de reproducir fielmente y, al mismo tiempo, de manera flexible los aspectos centrales de los PD (Borko, Knoellner & Jacobs, 2014). Poco se sabe acerca del conocimiento y las habilidades necesarias para que los monitores recreen los principios fundamentales de los PD y para que puedan responder plenamente a las necesidades de los profesores de matemáticas en contextos escolares nuevos. Desde diversas perspectivas teóricas, algunos investigadores (e.g, Jackson et al., 2015) han diseñado e implementado programas de formación para monitores, ilustrando experiencias de aprendizaje que les permiten recrear los principios de los PD así como participar en sus actividades centrales. Aspectos tales como el compromiso colectivo, la reflexión individual y colectiva en relación con la práctica, y las interacciones sistemáticas con monitores expertos parecen contribuir a fortalecer los conocimientos y habilidades de los monitores para expandir los PD. Sin embargo, estos estudios también indican el impacto limitado y efímero de estos programas de formación en el conocimiento y habilidades de los monitores.

En esta propuesta se aborda esta problemática. Presentamos los resultados preliminares de una investigación en curso destinada a comprender los procesos de aprendizaje de monitores en formación. Dicha investigación se realiza en el marco de los esfuerzos por expandir el PD ***Activando la Resolución de Problemas en el Aula***,(***ARPA***) en Chile. En el contexto de la reciente reforma curricular en matemáticas en el país, ***ARPA*** se diseñó con el propósito de fortalecer el conocimiento y las habilidades de los profesores para implementar la resolución de problemas en sus aulas. A medida que la investigación ha mostrado el impacto positivo de ***ARPA*** en las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Cerda et al., 2017) y en sus propias habilidades para resolver problemas matemáticos no rutinarios (Felmer & Perdomo-Díaz, 2016), ha surgido el desafío de expandirlo en todo Chile.

En particular, y con base en los desarrollos de la teoría del Aprendizaje Situado (Lave & Wenger, 1991), analizamos el proceso de aprendizaje de Luis[1], un monitor novato. Un aspecto fundamental de ***ARPA*** se relaciona con la habilidad de los monitores para establecer y sostener discusiones didáctico-matemáticas con los profesores participantes (Elliot et al., 2009). La experiencia muestra las dificultades para llevar a cabo esta actividad en tanto que implica, entre otros aspectos, construir sobre el pensamiento y las experiencias previas de los profesores participantes. La pregunta de investigación que guía este estudio es:

> *¿De qué forma se fortalece el conocimiento y las habilidades para establecer y sostener discusiones didáctico-matemáticas significativas de un monitor novato como resultado de su participación en las experiencias de aprendizaje propuestas en el programa de formación de monitores ARPA?*

Marco Teórico

En este estudio utilizamos la teoría del *Aprendizaje Situado* (Lave & Wenger, 1991) como "un marco conceptual desde el cual se puede derivar un conjunto consistente de principios generales y recomendaciones para comprender y posibilitar el aprendizaje" (Wenger, 2009; p. 201); es decir, abordamos esta perspectiva como una herramienta analítica y teórica para comprender el proceso de aprendizaje de los monitores novatos. En esta perspectiva, el aprendizaje se define como "un aspecto de la participación en prácticas situadas socialmente" (Wenger, 2009; p. 211). Aprender implica participar en las prácticas, construir significado acerca de dichas prácticas y principalmente, *llegar a ser (becoming)*. En consecuencia, asumimos que "aprender a ser monitor ***ARPA***" implica participar gradualmente en las prácticas compartidas de la comunidad de monitores ***ARPA***. Tales prácticas incluyen, entre otros, el diseño e implementación de talleres RPAula, la elaboración de problemas matemáticos no rutinarios, la retroalimentación a los profesores y el enriquecimiento profesional. Lo anterior requiere construir significado para estas

[1] Todos los nombres utilizados son pseudónimos.

prácticas así como *llegar a ser* monitor ***ARPA***. Por lo tanto, ***participación en las prácticas***, ***significado e identidad*** emergen como las nociones claves para comprender inicialmente los procesos de aprendizaje de los monitores novatos.

Al entender el aprendizaje de esta manera, tanto la colaboración profesional como la participación en prácticas colectivas surgen como elementos fundamentales para el desarrollo de los monitores. Basándonos en el modelo de Wenger (2009), introducimos un marco preliminar para comprender y guiar el análisis del proceso de aprendizaje de los monitores novatos, tal y como se ilustra a continuación.

Tabla 1

*Elementos para el Análisis del Aprendizaje de los Monitores **ARPA**.*

Elemento	**Aspecto del Aprendizaje**	**Definición**
Comunidad	Experiencia	Comunidad de monitores ***ARPA*** expertos y novicios. Se reconoce en esta noción el acervo histórico y conceptual que permite reconocer a un individuo como monitor ***ARPA***.
Práctica	Participación	● Diseñar talleres RPAula que respondan a las necesidades de los profesores de acuerdo con los diversos contextos/niveles educativos. ● Planificar individual/colectivamente talleres RPAula ● Retroalimentar el aprendizaje de los profesores participantes. ● Etc.
Significado	Pertenencia	Construcción de significado acerca de las prácticas definidas anteriormente y sobre los roles del monitor ***ARPA***.
Identidad	Llegar a ser	Discursos propios y ajenos sobre “ser Monitor ***ARPA***”.

El Programa de Formación de Monitores *ARPA* (PFM-*ARPA*)

ARPA es un PD cuyo principal objetivo es fortalecer el conocimiento y las habilidades de los profesores chilenos para implementar la resolución de problemas en su enseñanza. ***ARPA*** modela la actividad de resolver problemas en cuatro etapas: Entrega, Activación, Consolidación y Discusión (Felmer & Perdomo-Díaz, 2016). En grupos organizados al azar, los estudiantes resuelven problemas matemáticos no rutinarios. El papel principal del profesor es plantear preguntas que les permitan a los estudiantes avanzar en el proceso de resolución. Si un grupo tiene dificultades para resolver el problema, se le propone una simplificación. De lo contrario, el grupo recibe una extensión. La actividad termina con una plenaria en donde los estudiantes discuten acerca del proceso de resolución. Durante ***ARPA***, los profesores participantes tienen múltiples oportunidades de vivenciar el modelo propuesto para implementarlo en sus propias aulas.

El **PFM-*ARPA*** comprende 4 etapas: El taller de formación inicial, práctica guiada, práctica autónoma y desarrollo profesional. La participación activa en las diferentes experiencias de aprendizaje es el principio básico que fundamenta el programa. Estas experiencias de aprendizaje tienen un fuerte componente práctico y presentan las principales prácticas de la comunidad de monitores ***ARPA***. El **Taller de Formación Inicial para Monitores** consta de 9 sesiones distribuidas en dos meses. Durante esta etapa, los participantes resuelven problemas y realizan actividades claves de los talleres ***ARPA***. El taller inicial tiene un componente experiencial importante en tanto les brinda a los participantes múltiples oportunidades para vivenciar las principales prácticas de la comunidad de monitores ***ARPA***. La reflexión acerca de las prácticas y de su propio rol como monitores son aspectos fundamentales en esta etapa. Al finalizar el taller inicial, los monitores novatos avanzan a la segunda etapa del programa, la **Práctica Guiada**. Durante un año escolar, los monitores novatos implementan sus propios talleres RPAula con la orientación de un monitor experto. Se reúnen una vez al mes para planear, discutir, evaluar y analizar las sesiones de sus talleres RPAula. Como parte del proceso de orientación, los monitores expertos observan las sesiones de los monitores novatos y proporcionan retroalimentación colectiva e individual para fortalecer su proceso de aprendizaje. Esta es una instancia importante del programa en la cual los monitores novatos y expertos constituyen una comunidad que les permite construir conocimiento conjunto acerca de su rol como monitores ***ARPA***. Una vez que termina la etapa de la práctica guiada, los monitores novatos avanzan a la **Práctica Autónoma.** Los monitores novatos y expertos se reúnen dos veces al año. En la primera reunión, establecen metas anuales y planifican el trabajo que realizarán durante el año. En la segunda reunión, los monitores novatos y expertos evalúan la implementación de los talleres. Durante esta etapa, el monitor experto observa las sesiones del taller RPAula de los monitores y proporciona retroalimentación al monitor novato. A medida que los monitores novatos avanzan hacia la experticia, la etapa de **Desarrollo Profesional** les permite participar en seminarios y otras actividades académicas destinadas a fortalecer su conocimiento sobre la resolución de problemas matemáticos y la formación docente.

Metodología

Con el objetivo de expandir ***ARPA*** a una región del sur de Chile, 9 profesores de primaria y secundaria ingresaron al PFM-*ARPA* durante el segundo semestre de 2017. Las 9 sesiones del taller inicial fueron impartidas por Pedro, monitor experto. Utilizando técnicas de la tradición cualitativa, analizamos el proceso de aprendizaje de Luis.

Participante

Luis tiene 8 años de experiencia como profesor de matemáticas. Después de terminar exitosamente el taller inicial, Luis y 4 profesores más fueron seleccionados para continuar en el PFM-***ARPA*** implementando sus propios talleres RPAula durante el año escolar 2018. Seleccionamos a Luis como participante de este estudio en tanto que no tenía experiencia previa con ***ARPA***, a diferencia de otros participantes. Tal característica nos permitiría vincular su proceso de aprendizaje con las experiencias de aprendizaje propuestas en el PFM-***ARPA.***

Recolección de datos y análisis

Los datos para esta propuesta están conformados por las grabaciones de las 9 sesiones del taller inicial, las grabaciones de las sesiones de la práctica guiada, y las sesiones del taller RPAula implementado por Luis. Adicionalmente, hemos realizado dos tipos de entrevistas. El primer tipo es una entrevista semi estructurada aplicada al comienzo del año, antes de iniciar su taller RPAula. El segundo tipo de entrevistas son basadas en episodios de sus talleres en los cuales Luis interactúa con los profesores participantes de su taller.

Para el análisis de las grabaciones utilizamos las técnicas del *Videoanálisis* (Knoblauch & Schnettler, 2012). Este es un enfoque interpretativo de las interacciones sociales registradas en entornos naturales y desde el cual se asume que los significados de tales interacciones se construyen conjuntamente entre participantes y observadores a partir del conocimiento contextual que éstos aportan al análisis (Knoblauch & Schnettler, 2012). Así, el equipo de investigación se reúne periódicamente para observar colectivamente los videos. En primer lugar, nos enfocamos en la participación de Luis en las diferentes experiencias de aprendizaje durante el taller y la práctica guiada. Observamos cada sesión y registramos tanto las experiencias de aprendizaje como las interacciones entre los monitores expertos y novicios. En esta fase del análisis, mantuvimos un contacto cercano con los monitores expertos para obtener su retroalimentación sobre el contexto de los episodios y las interacciones (Knoblauch & Schnettler, 2012). En segundo lugar, nos centramos en las interacciones entre Luis y sus profesores durante el taller RPAula. Seleccionamos episodios en los cuales Luis implementa plenarias, discute con los profesores participantes y responde a sus inquietudes. Para el análisis de las entrevistas utilizamos un enfoque interpretativo con base en las categorías propuestas. Examinamos como Luis redefine su propia comprensión de las discusiones didáctico matemáticas y de su propio rol como monitor ***ARPA***. En este sentido, nuestro análisis se sitúa en la interacción entre los elementos de práctica, significado e identidad del marco teórico.

Resultados Preliminares y Discusión

Aunque los resultados son preliminares, nuestro análisis evidencia la manera como Luis construye sobre experiencias docentes y personales para significar tanto su rol de monitor ***ARPA*** así como la práctica de establecer y sostener discusiones didáctico-matemáticas con los profesores.

Construyendo significado para la práctica de establecer y sostener discusiones didáctico-matemáticas durante el taller inicial.

Durante la segunda sesión del taller inicial, Pedro pide a los monitores novatos diseñar e implementar un ***ARPA***, haciendo énfasis en la discusión plenaria. Inicialmente, Pedro selecciona a Lina para liderar la actividad. Al finalizar, Pedro reune al grupo para reflexionar sobre la experiencia, al tiempo que él mismo modelaba una sesión plenaria. La experiencia de aprendizaje termina con un segundo proceso de reflexión acerca de la actividad de Pedro liderando la plenaria, en el cual los monitores destacan elementos claves para implementar discusiones significativas con los profesores. A través de la participación en la actividad, las experiencias de Luis como profesor surgen tanto en las preguntas que plantea así como en las interpretaciones que realiza. Estas experiencias constituyen aspectos críticos de su identidad como profesor y proporcionan una línea de base para entender su proceso de aprendizaje. Por ejemplo, basándose en su experiencia docente, Luis duda sobre las posibilidades de propiciar discusiones significativas entre los estudiantes debido al tiempo y al número de estudiantes en clase:

> Luis: Tenemos que considerar el contexto. En una clase normal, tenemos 40 estudiantes. Un profesor podría argumentar: "tengo 40 estudiantes, decido hacer 5 u 8 grupos". Digamos que tenemos 10 grupos, 4 estudiantes en cada uno. Así que, *como profesor*, me doy cuenta de que aunque no todos los grupos resolvieron el problema, algunos hicieron un gran progreso. Quiero (idea sin finalizar). Él (señalando a un profesor en el grupo) está motivado para explicar su solución en la pizarra. Y todos los grupos quieren. Planeé un ARPA para que durará 45 minutos. Es imposible.
>
> Pedro: ¿Qué harías tú?

> Luis: No sé. Es imposible. Estoy diciendo esto porque es lo que realmente ocurre en la clase, esa es la experiencia. Cada grupo necesita y pide ayuda, el profesor se mueve alrededor, responde algunas preguntas. Pero no sé qué hacer. Trataría de que cada grupo tuviera la oportunidad de explicar su solución hasta que termine el tiempo de clase. También podría elegir un grupo con la respuesta correcta. Eso.

En este intercambio, Luis se posiciona como un profesor "normal" para expresar un reto importante en los esfuerzos actuales por transformar la enseñanza de las matemáticas. Antes que asumir el rol de monitor, enuncia una preocupación común de los profesores relacionada con el manejo del tiempo en la institución educativa, el cual es un problema crítico en los esfuerzos por implementar las reformas educativas. Es decir, en el sistema educativo chileno, el tiempo de clase es altamente controlado en aras de cubrir el plan de estudio propuesto. Como resultado de esta experiencia, Luis necesita ser convencido de que es posible establecer discusiones significativas en el contexto real de las escuelas chilenas antes de poder asumir esta discusión con otros profesores. Así pues, más allá de la reflexión sobre los aspectos técnicos para facilitar discusiones significativas con los profesores (pedir explicaciones en lugar de buscar y dar respuestas correctas, involucrar a todos, pedir aclaraciones y construir sobre las ideas de los demás), surgen en la discusión una serie de cuestionamientos de naturaleza didáctica (¿Es posible implementar la resolución de problemas con grupos de estudiantes numerosos?) que serán importantes durante la implementación de sus propios talleres RPAula. Aunque la participación en la reflexión colectiva entre monitores con distintos niveles de experticia posibilita la negociación y renegociación de significados sobre la práctica (Lave & Wenger, 1991), el aprendizaje se consolidará a medida que cuestiones del orden didáctico - matemático surjan en otros espacios como el taller RPAula.

Resignificando la práctica de establecer y sostener discusiones didáctico-matemáticas a partir de las experiencias en el taller RPAula.

En la medida en que los monitores novatos se involucran activamente en las prácticas de la comunidad de monitores, su aprendizaje, entendido como participación completa en tales prácticas, es fortalecido (Lave & Wenger, 1991). Este es el caso de Luis durante la implementación por primera vez del taller RPAula. Nuestro análisis preliminar evidencia la forma en la cual al involucrarse activamente en la planificación e implementación del taller, Luis resignifica las prácticas. Este es un proceso constante en el cual Luis transita desde su experiencia como profesor hacia un nuevo campo de representaciones, ideas y significados para su rol de monitor. Este transitar no es unidireccional. Por el contrario, puede pensarse como un ir y venir entre su identidad como profesor y una nueva como monitor. En este sentido, y como veremos, el taller RPAula constituye un espacio fundamental de aprendizaje.

En el episodio que analizamos a continuación Luis se enfrenta al mismo tipo de preguntas que él formulaba durante el taller inicial. Ana, una de las profesoras participantes, señala las restricciones para implementar ***ARPA*** debido al tiempo y al número de estudiantes en su curso:

> Ana: Otra cosa que me costó a mí fue la plenaria, donde son tantos cabros chicos.
> Luis: ¿Y cómo fue eso? ¿Cómo hizo la plenaria? Porque ese era el foco (del ARPA).
> Ana: Como para mí (idea sin terminar); aquí salen todos, yo también saqué a cada uno de todos los grupos, entonces eran 10 cabros chicos adelante. ¡Llena la sala!
> Luis: ¡Ah! Y todos querían contar cómo (idea sin finalizar).

> Ana: (Interrumpiendo a Luis) Si me hubiesen ido a grabar esa clase. ¡Eso es lo que no se debe hacer en un ARPA!
> (Todos los profesores se ríen).
> Ana: No sabían lo que habían hecho ellos, no tenían idea.
> Luis: Por eso uno (idea sin terminar). Es que ese día se fue como (idea sin terminar). Tuve que hacer fuerza (idean sin terminar). Pasó todo lo que pasó. Vimos cómo seleccionar a los grupos. La idea es que fueran de menos a más ¿cierto?, que mostraran las estrategias.
> Ana: Es que yo insisto que la cantidad de alumnos de un curso (idea sin terminar).
> Luis: Siii, 33 es harto.
> Ana: Porque hubo un momento en que todos los grupos me llamaban, entonces no, es verdad que no se puede trabajar. Entonces después darle la posibilidad de que todos los grupos puedan exponer, hay que tener por lo menos media hora de plenaria, y uno cierra la clase en 15 min. La cantidad de alumnos en un ARPA, influye mucho.

Como parte de la técnica aprendida para adelantar las discusiones con los profesores, Luis no responde a la crítica de Ana; por el contrario, le permite expresar su descontento; además involucra a los demás profesores en la discusión. Durante una de las entrevistas, mostramos este episodio a Luis y le solicitamos Luis reflexionar sobre el reclamo de Ana. Primero, le pedimos que interpretara las dificultades planteadas por Ana:

> Luis: Claro. Sí, es complicado, sí, es complicado hacerlo, porque yo vengo de un colegio que son numerosos, hasta con 44. Y es un tema físico, de espacio físico, porque la sala está como para ponerlos de a dos, de a dos, de a dos, de a tres, de tres, de tres, pero si tú modificas (la organización de la sala) te cuesta hasta pasar po. Es un tema físico. Así que yo entiendo esa situación. Hay una profe que ideó poner grupos, cuatro, cuatro, cuatro al medio, apoyar los otros a la pared y los otros acá y ella poder pasar por el medio, pero tampoco puede pasar entre medio, tiene que darse como una vuelta en U. Entonces ideó esa forma. Pero es un problema, es un problema.

La experiencia docente le permite a Luis identificarse con Ana en relación con las dificultades para implementar ***ARPA*** en las actuales condiciones del sistema educativo chileno. En esta experiencia se expresan una serie de conocimientos provenientes de la práctica cotidiana de enseñar, los cuales, en este caso, son usados para crear un ambiente que permita construir nuevas posibilidades, tal y como se evidencia en la narrativa. Sin embargo, también hay un reconocimiento de la existencia de un conocimiento que le permita dar una respuesta "distinta" a Ana, pero que Luis no posee aún. Ante la pregunta por otra respuesta para la dificultad planteada por Ana, Luis responde:

> Luis: Hubiese dado muchas otras respuestas (a Ana), pero que no las tenía en ese momento; pero ahora las tengo porque con el tiempo las he ido aprendiendo. A eso voy con que a veces no sé qué responder, pero con el tiempo me voy informando.

Así pues, es en el contexto mismo de la práctica en el que se reconoce la falta de un conocimiento importante para apoyar el crecimiento de la maestra en términos didáctico-matemáticos, conocimiento que aunque no se posee, se adquiere paulatinamente como resultado de participar en las prácticas de la comunidad. Desarrollar las prácticas relacionadas con el taller RPAula le permite a Luis tanto negociar nuevos significados sobre las discusiones didáctico-matemáticas así como fortalecer sus conocimientos y habilidades. Este proceso es mediado por la experiencia docente de Luis, quien ingresa al programa PFM-***ARPA*** con las mismas necesidades de los profesores con los que eventualmente trabajará en tanto pertenecen a la misma cultura escolar. Llegar a ser "monitor ARPA" significa reconocer, confrontar y reconstruir estas experiencias a través de una mayor participación en las prácticas de la comunidad. En este sentido vemos que como resultado de dicha participación, Luis se encuentra en un proceso de cambio, de tránsito entre “ser profesor” y “ser monitor”. Tal y como afirman Lave y Wenger (1991), “una manera de pensar el aprendizaje es a partir de la producción y transformación histórica de las personas, su cambio” (p. 51). La participación en el PFM-***ARPA,*** a partir de la consolidación de una red de colaboración en la que se benefician monitores novatos y expertos, contribuye al reconocimiento por parte de los monitores novatos de la existencia de ciertos conocimientos específicos que permitan atender a las dificultades de los profesores. Así, la coparticipación en y el compromiso social con las prácticas de la comunidad son aspectos críticos de la formación de monitores ***ARPA***.

Estos resultados preliminares señalan la importancia de considerar las experiencias previas de los participantes que ingresan al programa. Nos invitan a pensar no sólo en un perfil necesario para hacer parte del proceso de formación, sino además, y principalmente, en la forma de atender las necesidades individuales de los participantes. ¿Es posible, por ejemplo, formular un conocimiento general necesario para ser monitor ***ARPA*** tal y como lo sugieren algunos investigadores en el campo? ¿O por el contrario, dicho conocimiento debería ser más “local” e individual siempre en relación con las prácticas que definen a la comunidad de monitores? Son estas las preguntas que actualmente orientan nuestro análisis.

Agradecimiento: El presente estudio se adelanta con recursos del Proyecto FONDEF ID14I20338. Se agradece además financiamiento otorgado por el Proyecto Basal FB0003 del PIA-CONICYT.

Referencias

Borko, H., Koellner, K., & Jacobs, J. (2014). Examining novice teacher leaders’ facilitation of mathematics professional development. *Journal of Mathematical Behavior, 33*, 149-167.

Cerda, G., Pérez, C., Giaconi, V., Perdomo-Díaz, J., Reyes, C., & Felmer, P. (2017). The effect of a professional development program workshop about problem solving on mathematics teachers’ ideas about the nature of mathematics achievement in mathematics, and learning in mathematics. *Psychology, Society & Education*, *9*(1), 11-26.

Elliot, R., Kazemi, E., Lesseig, K., Mumme, J., Carroll, C., & Kelley-Petersen, M. (2009). Conceptualizing the work of leading mathematical tasks in professional development. *Journal of Teacher Education, 60* (4), 364-379.

Even, R. (2008). Facing the challenge of educating educators to work with practicing mathematics teachers. In B. Jaworski & T. Woods (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education: The mathematics teacher educator as a developing professional (Vol. 4)* (pp. 57-74). The Netherlands: Sense Publishers.

Felmer, P., & Perdomo-Díaz, J. (2016). Novice Chilean secondary mathematics teachers as problem solvers. In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving problems. Advances and new perspectives* (pp. 287-308). Springer: Switzerland.

Jackson, K., Cobb, P., Wilson, J., Webster, M., Dunlap, C., & Appelgate, M. (2015). Investigating the development of mathematics leaders’ capacity to support teachers’ learning on a large scale. *ZDM, 47*, 93-104.

Knoblauch, H., & Schnettler, B. (2012). Videography: analyzing video data as a “focused” ethnographic and hermeneutical exercise. *Qualitative Research, 12*(3), 334-356.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning. Legitimate peripheral participation.* Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Wenger, E. (2009). A social theory of learning. In K. Illeris (Ed.), *Contemporary theories of learning* (pp. 209-218), New York, NY: Routledge.

Análisis sobre situaciones de enseñanza del Teorema de Pitágoras entre universidad y escuela

Noemí **Pizarro** Contreras
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Chile
noemi.pizarro@umce.cl
Gabriela **Nuñez** Contardo
Colegio Alemán del Verbo Divino.
Chile
gabrielanunezcontardo@gmail.com
Guillermo **Arancibia** Canales
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Chile
guillermo.arancibia@umce.cl
Tomas **Cruces**
Escuela Ronda de San Miguel
Tomas.cruces@live.com

Resumen

Mediante una reflexión y acción conjunta entre profesores y formadores de profesores emerge la necesidad de desarrollar conocimiento profesional para la enseñanza del Teorema de Pitágoras, conocimiento desconocido para el equipo, que es tanto objeto y sujeto de investigación. En esta comunicación mostramos un breve análisis de dos episodios vinculados a la primera clase, correspondiente al trabajo con Ternas Pitagóricas. Observamos la débil formación e investigación sobre la enseñanza del Teorema de Pitágoras, el escaso de material didáctico para representar triángulos rectángulos y la importancia de la relación entre el pensamiento matemático y el pensamiento geométrico.

Palabras clave: Conocimiento profesional, práctica, enseñanza, Teorema de Pitágoras.

Introducción

Comúnmente, los formadores de profesores no se relacionan con la escuela, y a la vez, los profesores de escuela, no se relacionan con la academia, situación que conlleva un paralelismo contante entre ambos trabajos que, en la práctica, deberían estar interrelacionados (Zeichner, 2010). A raíz de esto, surge el proyecto “Investigación entre universidad y escuela: Un análisis sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática por medio de reflexión conjunta sobre la práctica”, donde se espera que profesores de aula y formadores de profesores investiguen en conjunto sobre problemas en la enseñanza de la matemática.

Dentro de este contexto, un docente que trabaja en el último grado de primaria (13 años) sostiene lo complejo que es para él enseñar el Teorema de Pitágoras, explicando que siempre lo ha enseñado de acuerdo a la secuencia: muestra de la relación de catetos e hipotenusa, demostración, ejercicios y problemas. Estrategia que no ha dado resultados. Desde la academia, sólo se tiene experiencia en su demostración, pero no en cómo tratar el contenido con estudiantes de 13 años.

Para poder realizar las clases indagamos en la literatura en educación matemática y observamos que la mayoría de las propuestas de enseñanza o análisis comparativos sobre ellas, se centran en demostraciones, dejando de lado el pensamiento matemático y el trabajo docente.

Por ello, dicho saber es idóneo observarlo desde la complejidad de la práctica, que ha sido estudiada por múltiples investigadores, quienes coinciden que para la enseñanza es necesario que los profesores posean y empleen una amplia variedad de conocimientos y habilidades que pueden ser perfeccionadas con el tiempo (Darling-Hammond y Bransford, 2005, entre otros).

A raíz de lo anterior nos preguntamos ¿Qué conocimiento debe tener un profesor de matemáticas para enseñar el Teorema de Pitágoras? ¿Qué recursos podrían ser idóneos para el trabajo en aula? ¿Qué dificultades pueden emerger por parte de los estudiantes y del saber? ¿Qué habilidades matemáticas se desarrollan en su tratamiento?

Planteamiento del Problema

El proyecto, que plantea hacer co-docencia entre formadores de profesores y profesores provocó una situación compleja y didácticamente interesante: el problema de cómo enseñar el Teorema de Pitágoras. El docente de aula planteó no tener formación al respecto y de no tener actividades, ni en los libros de texto ni en los programas de estudio que lo orientaran a no reproducir la fórmula y las ternas pitagóricas. Los formadores de profesores, conocíamos diversas demostraciones, pero no nos habíamos planteado cómo llegar a esa demostración haciendo partícipes a los estudiantes.

La primera pregunta que, en conjunto, nos hicimos, fue ¿Por qué y para qué tenemos que enseñar el Teorema de Pitágoras? ¿cómo realizamos una clase que no caiga en el esquema tradicional de definición-ejemplo y ejercicio? Estas fueron las primeras preguntas durante la planificación para la práctica, que encuentran respuesta en el desarrollo del objetivo de investigación: analizar la práctica de enseñanza del Teorema de Pitágoras de acuerdo a una propuesta de trabajo diseñada entre universidad y escuela.

De esta forma, la investigación que se presenta posee espacios de planificación, ejecución y reflexión que posibilitan significar y resignificar los procesos de enseñanza y aprendizaje considerando el conocimiento especializado para la enseñanza de la matemática y su desarrollo.

Fundamentos Teóricos

El Teorema de Pitágoras es la relación más recordada de las épocas escolares (González, 2008). En él, se establece conexiones importantes y naturales entre el álgebra y la geometría. Es espacialmente apropiado para realizar modelamiento matemático y no hay manera de "descubrirlo" sin una clara conducción del profesor (Varas, Cubillos & Jimenez, 2008).

Por lo que observa en los distintos agentes de enseñanza sobre él (Gurrola y Jáuregui, 2008; Barreto, 2009; entre otros), el Teorema de Pitágoras se ha reducido a su muestra, demostración y aplicación, sin considerar conjeturas y validaciones que propicien un trabajo matemático en el aula para el desarrollo del pensamiento inductivo.

Es necesario mencionar que se han realizado esfuerzos por descubrir el Teorema de Pitágoras, sin embargo, este descubrimiento es sólo el resultado de una "actividad de indagación, sin aclarar que se obtiene apenas una conjetura, que no tiene la validez de un teorema, aumenta la confusión acerca de lo que es un teorema, una demostración y una certeza en matemática; sobre lo que es la matemática, su estructura interna y su racionalidad (Varas et al, 2008, p.126)

A raíz de lo anterior, se considera indispensable desarrollar la argumentación y demostración al tratar el Teorema de Pitágoras en la escuela, dado que su tratamiento debe responder a un trabajo intelectual lejano a la deducción lógica, por ello es un ícono de la Geometría racional en la Escuela Pitagórica y es, además, la base de una multitud de teoremas geométricos (González, 2008)

La práctica docente

Shulman (1986) sostiene la importancia del conocimiento docente para una práctica efectiva, dando un giro en las investigaciones sobre la enseñanza, que se centraban, principalmente en el comportamiento de los estudiantes, los tiempos utilizados en la clase o las planificaciones de las mismas. Por ello, el análisis del proceso de las prácticas de la enseñanza revela el conocimiento docente, porque éste debe ponerse en juego en un escenario complejo e impredecible, dando el paso a la constitución de ejes que permiten realizar reflexiones sobre el quehacer docente en un caso particular.

Desde la década de los 80, varios autores (Schön, 1992; Shulman, 1986, 1987; Darling-Hammond y Bransford, 2005, entre otros) han concluido que reflexión y práctica son conceptos indisolubles, estrechamente relacionados y mutuamente exigidos, de cuya evolución emerge el desarrollo profesional. Por ello, en los últimos años las investigaciones centradas en la práctica de la enseñanza de la matemática han aumentado, transformando a docentes y su quehacer en un elemento fundamental para comprender los procesos de enseñanza para el aprendizaje, lo que ha traído como consecuencia que los profesores y su enseñanza han pasado a ser un elemento central (Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna, 2005; Sfard, 2005; English y Kirshner, 2016).

La premisa que guía este estudio considera que el profesorado reflexiona sobre su práctica por medio de un análisis que involucre crítica, redescubrimiento y modificación de los referentes y creencias que la sustentan, así de esta manera desarrolla herramientas para construir su profesionalismo sobre su conocimiento para enseñar, y por lo demás, su propio aprendizaje.

Conocimiento especializado del profesorado de matemática

Para analizar la enseñanza, consideramos como referente al Conocimiento especializado para el profesor de matemática (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge, MTSK) propuesto Carrillo, Climent, Contreras, Escudero-Ávila., Flores-Medrano, Montes (2014). Este marco comprende el conocimiento del contenido del profesor desde la contribución de Shulman (1986, 1987) y el Mathematical Knowledge for Teaching desarrollado por Ball y su equipo (2008). En este marco teórico se distinguen dos componentes: una referida al conocimiento de la matemática, MK (Mathematical Knowledge), y otra relativa al conocimiento didáctico para enseñar, el PCK. (Pedagogical Content Knowledge). El MTSK además de ser una propuesta teórica para modelar el conocimiento del profesor de matemática, es una herramienta metodológica, con la cual es posible analizar la práctica.

Las componentes se dividen a la vez en seis dominios, que serán a la vez, las dimensiones de análisis de los datos de este estudio. A continuación, se explica cada uno de los seis dominios del MTSK, los tres primeros son referentes al MK y los tres últimos al PCK (Flores, Escudero y Aguilar, 2001, Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2013). En cada uno de ellos nos referiremos al contexto de la enseñanza del Teorema de Pitágoras:

El Conocimiento de los Temas (Knowledge of Topics, KoT): este dominio analiza o modela qué y cómo el profesor de matemáticas conoce los temas que va a enseñar, supone conocer los contenidos matemáticos y sus significados de manera fundamentada. En este subdominio, por ejemplo, el docente debe ser capaz de comprender la relación entre los catetos y la hipotenusa en un triángulo rectángulo o diferenciar el Teorema de Pitágoras y su recíproco

Conocimiento de la estructura de la matemática (Knowledge of the Structure of Mathematic, KSM): Es el conocimiento de las relaciones que el profesor realiza entre distintos contenidos. Estos contenidos pueden ser del curso que está tratando o bien de otros cursos y niveles, la idea es que realice conexiones entre temas matemáticos. El desarrollo del Teorema de Pitágoras involucra trabajo geométrico y algebraico, relacionando composiciones de figuras; descomposiciones y composiciones de áreas, resolución de ecuación y cálculo de raíces.

Conocimiento de la práctica matemática (Knowledge of the Practice of Mathematics, KPM): Este dominio considera que es importante el conocimiento de los resultados matemáticos, pero que es fundamental conocer las formas de proceder para llegar a ellos y las características del trabajo matemático. El KPM es quizás la dimensión más compleja en el tratamiento del Teorema de Pitágoras, dado que en el aula se considera por demostración una actividad de indagación.

El Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (Knowledge of Features of Learning Mathematics KFLM): Este dominio se enfoca en el contenido matemático como objeto de aprendizaje, por ello se evita mirar al estudiante en sí, dado que la idea es observar las características del proceso de comprensión del estudiante sobre el contenido, que derivan de su interacción con el mismo. En nuestro caso, un conflicto es que los estudiantes no están acostumbrados a desarrollar conjeturas o a trabajar en equipo en miras a la resolución de un problema.

Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (Knowledge of Mathematics Teaching, KMT): el KMT tiene como foco la enseñanza. En este dominio incluye el conocimiento de los recursos, materiales, formas de presentar el contenido, el uso de ejemplos adecuados tanto en el contenido, como en el contexto y la intención. Esta subdimensión es la más importante dentro del estudio. ¿cómo presentamos el Teorema de Pitágoras? Si observamos la historia de la matemática, podríamos partir por el recíproco del Teorema de Pitágoras, dado que diversas culturas lo utilizaron para realizar construcciones. ¿Qué demostración incentivaremos en el aula?

6. Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las Matemáticas (Knowledge of Mathematics Learning Standards, KMLS): se refiere al conocimiento curricular del maestro. Es el conocimiento que el profesor tiene sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueven en determinados momentos educativos.

Por otro lado, el papel de las creencias del docente es central dado que engloba a los seis subdominios anteriores.

Metodología

Como se puede observar, las características del estudio exigen que sea un estudio de caso de corte cualitativo y descriptivo de la investigación-acción docente. Para González- Lloret (2012) lo que distingue a la investigación-acción cualitativa es su claro objetivo de cambiar y mejorar la práctica o la situación que se está estudiando y no solo su descripción o interpretación. Los datos se recogen tanto de las reflexiones individuales y colectivas de los docentes y formadores de docentes, como de las prácticas de aula por medio de video tape, dado que las evidencias de prácticas de aula son indispensables en la formación docente

En la investigación participan cuatro docentes, dos de ellos docentes de aula de escuelas diferentes y dos formadores de profesores, los cuatro son sujetos y objetos de investigación. Se realizan cuatro clases para el último curso de primaria (octavo año, 13 años aproximadamente) de la Escuela Ronda de San Miguel sobre el Teorema de Pitágoras.

Para realizar la investigación, se consideran tres instancias de investigación: sobre la práctica, en la práctica y para la práctica. Killion & Todnem (1991), considerando los primeros trabajos de Shön, distinguen estos tres momentos de reflexión; las dos primeras son de índole reactiva, la reflexión en la práctica se lleva a cabo durante el trabajo de aula; la reflexión sobre la práctica se realiza después de un hecho puntual. La reflexión para la práctica es el resultado de las dos anteriores y a la vez, el antecedente de las dos anteriores, dado que componen un ciclo de investigación y acción.

Análisis de resultados

Durante la actividad, se presentaron diversos episodios de análisis que nos permiten detectar factores que indicen en la enseñanza del Teorema de Pitágoras, lo que conlleva, construcción del conocimiento del profesor de matemática. Por cuestiones de espacio, en esta comunicación sólo presentaremos dos episodios correspondientes a la primera clase. A continuación, se muestran diálogos entre estudiantes (E); profesores (P) y Formadores de Profesores (FP)

Episodio 1:

Durante la reflexión para la práctica, el profesor del curso y dos académicos se reúnen para planificar la primera clase:

1.a Primera reunión

FP1: *Tenemos que pensar en el desarrollo de buenas demostraciones*

P1: *Pero antes de eso hay que hacer un buen inicio, algo que no sea artificial. No quiero hacer lo mismo de siempre, porque los estudiantes no aprenden*.

FP1: *Creo que antes de todo, tenemos que preguntarnos ¿Por qué enseñamos el Teorema de Pitágoras?*

FP: *Es un Teorema importante… fundamental.*

P: *No tendría aún respuesta para ello.*

FP2: *Busquemos información, y posterior a ello, a partir del porqué de la enseñanza, busquemos información*.

1.b Segunda reunión

FP2: *He encontrado cuatro razones por qué enseñar el Teorema.*

- *Es fundamental para comprender, geométricamente, es decir, más allá de la percepción visual cuando dos planos son perpendiculares. Distintas culturas lo han trabajado para ello. En este caso, deberíamos considerar el recíproco del teorema.*
- *Relaciona dos magnitudes: longitud y área de superficie.*
- *Gracias a él, podemos localizar los números irracionales.*

- *Por otro lado, es un Teorema pilar de muchos otros teoremas, sobre todo para tercero medio, miren "es la base de multitud de teoremas geométricos, de los estudios sobre polígonos y poliedros, de la Geometría Analítica y de la Trigonometría –la fórmula $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ es un caso particular del Teorema de Pitágoras y el Teorema del coseno es una generalización del mismo–. La relación pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$ es la ecuación de la circunferencia y la raíz histórica del Análisis indeterminado de Diofanto y Fermat. El Teorema de Pitágoras también pudo ser el germen de la dramática aparición pitagórica de la inconmensurabilidad de gran trascendencia en la estructuración y sistematización platónico-euclídea de la Geometría griega" (González, 2008, p.103)*

P1: *Otra razón es para observar la diferencia entre la diferencia entre distancia y trayectoria, relacionándolo con la física (relación con Física)*
FP1: *Bueno quizás después encontremos más. ¿Cómo partimos?*
FP2: *Con el contexto histórico.*
P1: *¿Con el recíproco?*
FP2: *No… con el Teorema. Directamente, contextualicemos en paredes perpendiculares. A partir de la perpendicularidad, podrían construir triángulos rectángulos, para que posteriormente, a partir del recíproco, ciertas ternas nos aseguren que las paredes están derechas. El recíproco podría ser parte del cierre de la clase*
FP1: *¿Y pretendes que los chicos descubran las ternas?*
P1: *Claro… es la idea*
FP1: *Imposible… demósle una, el 3-4-5 en el inicio, por lo menos, sino, estaremos toda la clase con el tanteo*.
FP2: *es que no sería tanteo, sería trabajo con material concreto, composición de figuras.*
FP1: *¿Y cómo harías eso?*
FP2: *¡No sé!*
P1: *Busquemos material*
1.c Tercera reunión
PF2*: No sé cómo hacer que los estudiantes construyan triángulos rectángulos (explica en contexto)*
P2: *Tráeme lana, lo haremos como los egipcios. Yo creo que no sería problema que los estudiantes descubran las ternas. Si no lo hacen, ahí vemos que pasa*.
P1: *Yo haría cuerdas con cuentas (pedazos de madera o plástico para separar cuerdas), Yo las hago*
Posteriormente, fue bastante complejo el trabajo con el material. Los espacios entre las cuerdas no eran congruentes y con el pegamento era compleja su movilidad en las cuentas. Costó encontrar material adecuado para poder realizar la actividad. Finalmente se utilizaron palillos y pelotas para poder realizar la actividad.
En este episodio podemos observar que los profesores y los formadores de profesores no tienen una respuesta automática ante la pregunta ¿por qué enseñamos el Teorema de Pitágoras? (KTM) Por otro lado, se observa que uno de los FP no considera posible que los estudiantes logren encontrar las Ternas Pitagóricas (KFLM), sin embargo, para los otros docentes era imprescindible (KPM). Una vez que se pusieron de acuerdo en la construcción de triángulos para encontrar las ternas no fue posible conseguir material didáctico de segmentos separados por una misma distancia.
Episodio 2:
Durante la reflexión en la práctica, se lleva a cabo la construcción planificada en el episodio 1.

El curso se organiza en grupos de 3 o 4 estudiantes, se entrega, por grupo, un envase que contiene palillos y pelotitas con perforaciones, que permite el encaje con los palillos. Previo al diálogo que continua, la FP2 muestra la representación de un cuadrado utilizando el recurso entregado.

PF2: *¿Ustedes creen que podrían armar un triángulo rectángulo con este material?*
Grupo curso: ¡*Síiiii!*
PF2: *Manos a la obra.*
(A los 4 minutos)
E1: *Aquí está armado uno, tiene lados 3 palitos, 4 palitos y 5 palitos*
PF2: *Muy bien. ¿y has armado otro?*
P2: *Sí, es más se ha dado cuenta de algo.*
E1: *Sí, armé otro que es 6-8 y 10. Son los dobles de las medidas anteriores. Yo creo que, si les saco el triple, igual se arma*.
P2: *Yo quiero que lo pruebe*
E2: *Yo creo que dé más da…*
Posteriormente se validan, en forma colectiva, las distintas construcciones, comentando el episodio anteriormente nombrado
E3: *A mí me dio lo mismo, entonces hay muchas ternas para armar triángulos.*
FP2: *¿podrías representar una que no hayamos realizado?*
E3: *No… para qué, si con la multiplicación del 3, 4 y 5 ya estamos listos.*
FP2: *¿Y eso cómo lo puedes asegurar?*
E3: *porque es una regularidad…*
Varios estudiantes: *Claro, es más que seguro que da*
E4: *¿Guardamos el material entonces?*

En este episodio podemos observar, que, a los cuatro minutos, varios grupos de estudiantes ya habían encontrado la terna 3-4-5 (KPM) por otro lado, la regularidad algebraica fue para ellos tan convincente como el material concreto.

Conclusiones

Antes de conocer al Profesor 1 (P1) ninguno de los otros tres participantes del estudio se había cuestionado sobre cómo enseñar el Teorema de Pitágoras a un grupo de estudiantes de 13 años. Fue interesante observar que, desde nuestras distintas experiencias y formaciones, a pesar que formamos profesores (FP1 y FP2) y coordinamos grupos de profesores (P2), no teníamos una respuesta ante la pregunta ¿Por qué debemos enseñar el Teorema de Pitágoras? Hemos observado que este desconocimiento, es un lugar común, porque hemos preguntado en congresos, reuniones docentes y situaciones informales, y los profesores de matemática tienden a responder que el Teorema se enseña sólo para comprobar perpendicularidades o diferenciar distancias de trayectorias.

A raíz de lo anterior, nos parece necesario que en la formación docente se considere la pregunta ¿Por qué enseñar cierto contenido? (KPM) Gracias a este estudio, ahora podemos formar profesores que sí se realicen esta pregunta y planifiquen clases considerando aquellos porqués como objetivos. Podemos destacar la importancia que universidad y escuela hagan un trabajo conjunto de desarrollo bidireccional, donde el docente de escuela tenga experiencias de investigación como un par, no sólo como un objeto de investigación y que el formador de profesores comprenda los problemas de enseñanza a los que serán enfrentados los futuros profesores que forma.

Por otro lado, observamos que hay pocos recursos de enseñanza para trabajar el Teorema de Pitágoras. Dado que es un contenido que curricularmente (KMLS, KPM, KMLS) está en la frontera de la enseñanza primaria con la secundaria, en los libros para profesores, de primaria o secundaria, si se llega a mencionar, es bastante superfluo, por lo tanto, es indispensable revertir la situación, con actividades como las mencionadas en esta comunicación.

A pesar que uno de nosotros (PF1) se resistía a que los estudiantes encontraran las ternas por sí mismos, gratamente pudimos observar que los estudiantes, a pesar de estar en una clase de matemática a las cinco de la tarde, trabajaron concentrados y entusiastas. A los cuatro minutos ya tenían la terna 3-4-5 y gracias a un pensamiento algebraico, rápidamente lograron obtener más ternas. En variadas ocasiones tendemos a subestimar a los estudiantes, es necesario que comencemos a revertir nuestras prácticas. Sin embargo, es complejo revertirlas sin en el mercado no hay material didáctico de apoyo (KTM) ni en los libros de textos o directrices curriculares actividades para los docentes. Por ello, mientras las editoriales avanzan, es indispensable que la formación de profesores se haga cargo del conocimiento profesional de los docentes con investigaciones como esta.

Bibliografía

Adler, J., Ball, D., Krainer, K, Lin F.L., y Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 359-381.

Barreto, J. (2009). Otras deducciones o extensiones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas 70*, 35-51.

Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, M. Montes (2014), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas,* el MTSK. Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva

Darling-Hammond, L., & Bransford, J. (2005). *Preparing Teachers for a changing world. What teachers should learn and be able to do.* San Francisco: Jossey Bass.

English, L. D., & Kirshner, D. (2016). Changing agendas in international research in mathematics education. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (Third, pp. 3–18). New York: Routledge.

Flores, E., Escudero, D. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepay N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275- 282). Bilbao, España: SEIEM.

González, P. *(2008). Un* teorema llamado de Pitágoras*. Sigma Revista de Matemáticas, 32(*8*), 103-130.*

González-Lloret, M. (2012). *Investigación acción (II): la investigación cuantitativa.* Recuperado el 24 de enero de 2017, de: http://cvc.cervantes.es/aula/didactired/anteriores/diciembre_12/17122012. html

Killion, J. &Todnem, G. (1991) A process for personal theory building. *Educational Leadership, 48* (6), pp. 14-16.

Montes, M. A., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). MTSK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. In *Proceedings of the CERME* (Vol. 8).

Schön, D. A. (1992). *La Formación de profesionales reflexivos: hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones.* Barcelona: Paidós.

Sfard, A. (2005). What could be more practical than good research? On mutual relation between research and practice of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *58(3*), 393–413.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22.

Varas, M. L., Cubillos, L. F., & Jiménez, D. (2009). Análisis de la calidad de clases de matemática: teorema de Pitágoras y razonamiento. *Chile, Ministerio de Educación, Departamento de Estudios y Desarrollo (Ed.), Selección de investigaciones primer concurso FONIDE: evidencias para políticas públicas en educación*, 123-153.

Zeichner K (2010) Rethinking the connections between campus courses and field experiences in college- and university-based teacher education. *J. TeacherEduc. 61:* 89-99.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Álgebra y Pensamiento Algebraico. Una experiencia de reconceptualización

Leslie Mariel **Torres** Burgos
Facultad de Matemática, Universidad Autónoma de Yucatán
México
leslie.torres@correo.uady.mx
Karla Margarita Gómez Osalde
Facultad de Matemática, Universidad Autónoma de Yucatán
México
karla.gomez@correo.uady.mx

Resumen

El aspecto central de la discusión en el taller será una propuesta didáctica del álgebra en donde la matemática constituye un medio; es decir, se mira una matemática centrada en el desarrollo de formas de pensamiento, específicamente, que favorezca el pensamiento algebraico. Esto con el propósito de promover un conocimiento algebraico que de sentido y significado a los pensamientos y acciones ante la resolución de cierto tipo de problemas matemáticos. Para ello se recurrirá al diálogo reflexivo respecto a los alcances y limitaciones didácticas de una propuesta centrada en favorecer experiencias de aprendizaje, como guía para desarrollar el pensamiento algebraico en jóvenes de bachillerato.

Palabras clave: propuesta didáctica, pensamiento algebraico, álgebra escolar.

Introducción

En Aparicio, Sosa y Gómez, 2016 se menciona que, en la actualidad, para hablar del aprendizaje de las matemáticas se debe tomar en consideración que los estudiantes aprenden o no a partir de una confrontación de realidades. Por un lado, se vive una realidad social permeada de exigencias del dominio de herramientas matemáticas para el desarrollo de la ciudadanía plena, donde el aprendizaje debe ir más allá de los rudimentos aritméticos inflexibles que son base de los currículos escolares (Callejo et al., 2010). Esta realidad social, destaca la función de cada persona como ciudadano en sociedad, por lo que en un enfoque por competencias el énfasis recaerá en las herramientas necesarias para que un ciudadano se desenvuelva fuera de la escuela, es decir, que pueda emplear la matemática en su realidad y generar nuevo conocimiento dentro del ámbito donde se desarrolle.

Por otro lado, también se vive una realidad educativa que responde a necesidades curriculares específicas en función de un discurso Matemático Escolar, el cual, debido a la naturaleza que lo constituye, provoca diversas problemáticas relacionadas con el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (Cordero, Gómez, Silva y Soto, 2015). Este discurso, se rige por un paradigma inflexible y abstracto que se centra en formas de razonamiento a partir de algoritmos sin contextos ni experiencias asociadas a su conceptualización. De alguna manera, esta realidad educativa se encuentra deshumanizada y concretizada en aspectos científicos sin considerar la construcción social del conocimiento matemático. Un individuo construye saberes matemáticos propios a partir del uso de su conocimiento en situaciones que exigen de un pensamiento matemático asociado a la especificidad de las prácticas que conforman su quehacer como parte de la comunidad. (Aparicio, Sosa y Gómez, 2016)

Ante estas dos realidades, se puede afirmar que el álgebra en la escuela vive una realidad escolar; es decir, está alejada de la realidad social, por lo que esta matemática no tiene un uso y sentido social, se queda limitada a operaciones, símbolos, algoritmos, que responden a situaciones de la misma matemática, pero que difícilmente se pueden extrapolar a situaciones reales en las que la matemática adquiere sentido y significado. De esta forma, la investigación en Matemática Educativa señala que el estudio del álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante, de las situaciones numéricas más concretas a la búsqueda de generalidades para representar y comprender relaciones cuantitativas entre cantidades variantes e invariantes (Kieran y Filoy, 1989), constituyendo así una herramienta matemática que permite comprender, estudiar y modelar diferentes sucesos que se presentan en el mundo.

Ante esta realidad del álgebra escolar, surge la necesidad de generar nuevas propuestas didácticas que promuevan un aprendizaje funcional y con sentido social de los saberes propios de la disciplina, de manera que más allá de la centración en objetos matemáticos, se promueva el desarrollo de una forma algebraica de pensar; esto implica un cambio de mirada respecto a la matemática, de ser un fin; es decir, aprender matemáticas como base de nuevo conocimiento matemático, a entenderla como medio; esto es, aprender matemáticas como herramienta que permite responder y tomar decisiones en diversas situaciones.

De esta forma, en el taller se presenta una propuesta didáctica del álgebra para su conceptualización como una forma de pensamiento matemático; dicha propuesta se compone de experiencias de aprendizaje por medio de las cuales el estudiante conceptualiza el álgebra escolar, al tiempo que desarrolla su pensamiento algebraico y reconoce el sentido social de dicho saber.

Fundamentación Teórica-Metodológica

Como se discute en el apartado anterior, en el taller se pretende reflexionar sobre una propuesta didáctica del álgebra centrada en promover el desarrollo del pensamiento algebraico; dicha propuesta atiende a la necesidad de referentes didácticos que favorezcan un álgebra funcional con sentido social, debido a que se ha reportado que las costumbres didácticas del profesor y la difusión escolar de las matemáticas en la escuela, han sido en las últimas décadas, regidas por una lógica axiomática deductiva de la disciplina, aun cuando el aprendizaje matemático requiere de experiencias y aprehensiones conceptuales, procedimentales y estructurales, inherentes a todo saber matemático (Aparicio y Sosa, 2017). Esto se identifica por ejemplo, en la transición de los jóvenes estudiantes de la aritmética al álgebra; puesto que el tránsito entre ambas áreas de la matemática provoca rupturas cognitivas, de manera que lo útil y funcional en la aritmética no necesariamente se extrapola al álgebra; por lo que esa visión lógica axiomática deductiva de la matemática, será un obstáculo para el desarrollo de una nueva forma de pensar; debido a que concebir a la matemática de esa manera opaca su significado y sentido social, es decir, promueve una matemática propia de la escuela, en la que el aspecto conceptual de cada conocimiento matemático es minimizado respecto a lo procedimental, lo cual no favorece su uso fuera del escenario escolar. Ante esto, diversas investigaciones como Demonty, Vlassis y Fagnant (2018), Radford (2012), proponen el desarrollo del pensamiento algebraico desde edades tempranas; es decir, identificar y desarrollar en los estudiantes aquellas actividades propias de una forma de pensar algebraica, de manera que el álgebra tenga sentido más allá de situaciones del contexto escolar.

Así, el significado usualmente asociado al Álgebra escolar como generalización "conceptual y operativa" de la aritmética; en el que poco se reconoce la importancia de las filiaciones y rupturas cognitivas y en general, epistémicas de los saberes algebraicos y el pensamiento asociado, requiere repensarse. Este enfoque clásico de enseñanza, otorgado a los saberes algebraicos, obstaculiza su sentido, entendimiento y uso como herramientas matemáticas para generalizar, modelar o trabajar con estructuras algebraicas. En ese sentido, no se favorecen los procesos cognitivos que permiten desarrollar el pensamiento algebraico tales como el pensamiento relacional, el sentido estructural, la generalización, simbolización, entre otros.

Demonty, Vlassis y Fagnant (2018), Kaput & Blanton (2001), entre otros autores, proponen que los estudiantes deben enfrentarse a situaciones, que promuevan la búsqueda de regularidades, generalizaciones, justificaciones, reconocimiento de variaciones y formalizaciones para el desarrollo de un pensamiento algebraico. Otras investigaciones, (Kaput, 2000; Vega-Castro, Molina, & Castro, 2012; Velásquez, 2014; Molina; 2007) han concluido que, para desarrollar este tipo de pensamiento matemático, es necesario enriquecer la actividad algebraica a partir de promover diversos procesos cognitivos en los estudiantes. De manera que se favorezca una concepción del álgebra que englobe la verbalización, la simbolización, el sentido estructural, el pensamiento relacional, la representación, la modelación, la generalización y la abstracción.

Para lo anterior, la propuesta didáctica del álgebra que se realiza se enmarca en la concepción sobre la conceptualización matemática de Aparicio, Sosa y Gómez (2016):

"Consiste en la posibilidad de reconocer, enunciar y usar un objeto matemático más allá del escenario en el que originalmente fue presentado/tratado. Conceptualizar entonces está asociado al tipo de experiencias que las personas puedan entablar con un mismo objeto matemático en más de una forma o registro de representación semiótica".

De tal forma que la conceptualización del álgebra, no debe reducirse a la memorización de definiciones y propiedades o a entender los conceptos como definiciones, sino que, debe favorecerse su construcción desde las tres dimensiones que los conforman (*lo conceptual, lo procedimental y lo estructural*) permitiendo la adherencia a un objeto matemático aun cuando éste sea de naturaleza abstracta.

Los significados de los conocimientos matemáticos son parte del concepto matemático y depende de las formas en las que se utilizan o emplean. Enfatizan sobre la relación del saber qué y el saber cómo, durante su conceptualización. Sin embargo, Aparicio, Sosa y Gómez (2016) reconocen que todo conocimiento matemático es parte de una estructura matemática más amplia en la que los conocimientos se relacionan por medio de significados y usos. Con ello, la conceptualización matemática propicia una adherencia al objeto matemático desde sus significados, procedimientos y estructuras (Gutierrez, 2017).

En este sentido, la propuesta didáctica del álgebra desarrollada, se compone de Diseños de Experiencias de Aprendizaje (DEA), puesto que asume que el aprendizaje es resultado de experiencias de los individuos que aprenden. Este constructo considera al saber desde su naturaleza epistémica (*lo conceptual, operacional y estructural*), es decir, la complejidad de su construcción, así como su naturaleza didáctica (Aparicio y Sosa, 2013) por lo que se consideran un escenario propicio para la construcción de conocimiento matemático, al incorporar también aspectos propios del individuo, como su cognición.

Así, un DEA que favorezca el pensamiento algebraico, parte de la interpretación de la funcionalidad y el sentido social de los saberes matemáticos algebraicos y a partir de ello se generan argumentos, explicaciones e interpretaciones, mismos que permiten procesos de generalización, simbolización y modelación, característicos en álgebra. De modo que las caracterizaciones, definiciones y ejemplos ahora complementan la estructura conceptual y procedimental de los saberes puestos en juego.

Método

En el estado de Yucatán, México, se ha llevado a cabo un programa de acompañamiento docente con profesores de nivel medio superior (bachillerato) cuyo objetivo se centra en favorecer el desarrollo de formas de pensamiento matemático en los estudiantes. Para ello y como medio de diálogo entre el profesor, estudiante y saber, se ha elaborado e implementado, particularmente para la asignatura de álgebra, una propuesta didáctica compuesta de experiencias de aprendizaje que busca promover el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes.

La metodología desarrollada para el diseño de esta propuesta didáctica, se basa en la propuesta por Aparicio y Sosa, 2013 para la conceptualización de saberes matemáticos en educación básica. Se describen los momentos seguidos para su desarrollo:

Momento 1. Establecimiento de la Relación Sistemica (RS). Esta primera etapa consiste en identificar el Aprendizaje Esperado (A.E.), el Saber específico y determinar una posible relación en forma sistémica (integral) con los procesos que favorecen el pensamiento algebraico.

Momento 2. Problematización del Saber Matemático (PSM). Esta etapa consiste en reconocer la naturaleza epistémica y didáctica del saber matemático, es decir plantearse y responder preguntas de índole:

- Epistemológica: relativa a los procesos de construcción de conocimiento matemático;
- Cognitiva: relativa a procesos y representaciones mentales de las personas;
- Didáctica: relativa a las formas de organización y difusión escolar de los saberes.

Etapa 3. Trabajo de Ingeniería Didáctica y elaboración de diseños. En esta tercera etapa se desarrolla un trabajo de ingeniería didáctica con el que esencialmente debe determinarse un conjunto de análisis sobre el aprendizaje matemático a obtenerse como producto del plan de acción.

Con base en lo anterior se realiza el diseño de las tareas de aprendizaje, las cuales se elaboran siguiendo las fases de la teoría de situaciones didácticas. Esto es, una tarea para la acción, una para la formulación y una de validación, juntas integran un diseño didáctico para el aprendizaje.

En la imagen 1 se muestra un esquema para la elaboración de DEA's:

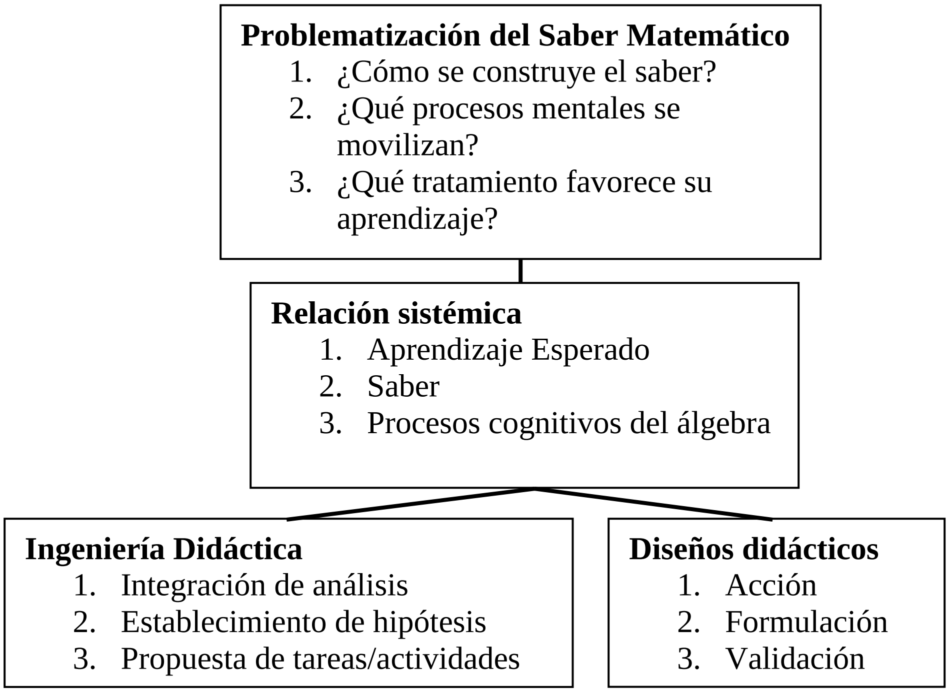


Imagen 1: Esquema de articulación didáctica para la elaboración de DEA's, (Aparicio y Sosa, 2013)

Particularmente, la propuesta didáctica para la conceptualización del álgebra como una forma de pensamiento algebraico, se puede analizar en el libro Álgebra y Pensamiento Algebraico (Aparicio, Sosa y Gómez, 2016). La cual se organiza en tres bloques principales, lenguaje algebraico, operaciones algebraicas fundamentales y modelación con ecuaciones lineales y cuadráticas. En cada uno de los diseños de experiencias de aprendizaje, se presentan situaciones cotidianas en las que se hace uso del saber algebraico en desarrollo, de manera que se mire su sentido social a la par que se construye el conocimiento.

Con base en lo anterior, se propone desarrollar el taller en dos momentos o etapas, de manera que se discuta y reflexione respecto al álgebra escolar y al pensamiento algebraico, desde la práctica docente; para posteriormente presentar una propuesta didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico; de manera que se propondrá una visión general de lo que significa desarrollar una forma didáctica de pensar y practicar el álgebra en situación escolar.

Las estrategias a considerar en cada uno de los momentos en los que se divide el taller, se describen en la Tabla I siguiente:

Tabla I

Momentos del taller.

Momento	Estrategias
1. Álgebra escolar y Pensamiento algebraico	Discusión sobre las problemáticas asociadas a procesos de enseñanza aprendizaje del álgebra escolar, a partir de ejemplos específicos.
2. Propuesta didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico.	Reconocimiento de los elementos considerados en algunos Diseños de Experiencias de Aprendizaje (DEA).

Los DEA que se analizarán durante el taller forman parte del libro Álgebra y Pensamiento Algebraico (Aparicio, Sosa y Gómez, 2016).

Conclusiones

La experiencia desarrollada en un programa de acompañamiento docente con profesores de nivel medio superior en el estado de Yucatán, respecto a la implementación de los DEA, ha puesto de manifiesto cierto grado de modificación en la organización de las prácticas en las aulas, percibiéndose mayor interés, participación y disposición por parte de los estudiantes hacia el estudio, mediante la realización de actividades centradas en su aprendizaje y en una visión funcional de los saberes matemáticos.

Se ha evidenciado que la conceptualización de la noción de variable es fundamental para el desarrollo del pensamiento algebraico y la posterior conceptualización de otros saberes propios del álgebra escolar.

De igual forma, se evidenció la necesidad de conceptualizar la propuesta didáctica generada con los docentes; es decir, es necesario que el docente viva experiencias de reconceptualización tanto matemática como didáctica de manera que se desarrollen elementos en esas dos direcciones, puesto que el entender el álgebra como una forma de pensamiento provoca que los estudiantes desarrollen nuevos argumentos, razonamientos y explicaciones, que generan una respuesta no única en las actividades.

En ese sentido, se espera que los participantes al taller profundicen y amplíen su visión del álgebra, reconociendo dos perspectivas didácticas distintas para su enseñanza aprendizaje; es decir, que se reconozca que el álgebra, no es una combinación de símbolos, letras y números, o una forma general de la aritmética o únicamente un lenguaje de las matemáticas; porque si bien el álgebra es todo lo anterior, el énfasis de esta área de las matemáticas se encuentra en una forma de establecer relaciones entre magnitudes variables. Es decir, el reconocimiento de elementos variantes y constantes y la generación de relaciones matemáticas es fundamental para el desarrollo de un pensamiento algebraico.

De igual forma con el estudio del concepto ecuación, se espera que se reconozca la relación entre la modelación matemática elemental y el pensamiento algebraico ante el análisis y resolución de situaciones que demandan del uso de la variable.

Finalmente, se espera socializar una propuesta de tratamiento didáctico del álgebra escolar en bachillerato, discutida y reflexionada con profesores del estado de Yucatán, México; y con base en ello, señalar alcances y limitaciones de dicha propuesta.

Referencias y bibliografía

Aparicio, E., Sosa, L., Torres, L. y Gómez, K. (2018). *Reconceptualización del saber matemático en educación básica.* Mérida, Yucatán, México.

Aparicio, E. y Sosa, L. (2017). Profesionalización docente en matemáticas. Reflexiones desde una forma de pensar didácticamente. Artículo presentado en el 1er Congreso Internacional de Investigación Educativa y Formación Docente. Guerrero, México.

Aparicio, E., Sosa, L. y Gómez, M. (2016). Álgebra y Pensamiento Algebraico. Experiencias de aprendizaje en bachillerato. Mérida, Yucatán: Ediciones de la Universidad Autónoma de Yucatán. (no publicado)

Aparicio, E., Sosa, L. y Gómez, K. (2016). Lo matemático como argumentación en el aprendizaje Escolar. Una reflexión desde la investigación para la Educación. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa. 1(1).* 427-435.

Aparicio, E. y Sosa, L. (2013). Contenidos matemáticos en secundaria. Una propuesta para su tratamiento escolar. En Sosa, L., Hernández, J. y Aparicio, E. (Eds.). *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa,* (pp. 154 - 159). México: Red Cimates.

Callejo, M., Goñi, J., Alsina, C., Civil, M., Giménez, J., Gómez-Chacón, I.., Venegas, Y. (2010). Educación matemática y ciudadanía. Barcelona, España: Graó.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci y Soto, D. (2015) El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad. Barcelona, España: Editorial Gedisa.

Demonty, I. Vlassis, J. y Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Springer.*

Gutiérrez, A. (2017). Hacia una epistemología para la conceptualización escolar del método de L'hospital a partir de un enfoque geométrico-variacional. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán, Facultad de Matemáticas. Mérida, México.

Kaput J. J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K–12 curriculum. En: National Research Council (ed.) The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: Proceedings of a National Symposium. National Academy Press, Washington, DC.

Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the Elementary Mathematics Experience. Part I: Transforming Tasks Structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), The Future of the Teaching and Learning of Algebra (Proceedings of the 12th ICMI Study, Vol. 1, pp. 344-351). Melbourne: University of Melbourne.

Molina, M. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. PNA, 6(4), 117-133.

Vega-Castro, D, Molina, M, & Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 15(2), 233-258.

Velásquez, E. (2014). Unidad didáctica para el proceso de generalización y solución de ecuaciones, utilizando métodos informales, como apoyo para el sexto grado. Tesis de Maestría no publicada., Universidad Nacional de Colombia.

Desenvolvimento profissional do professor de matemática: reflexões sobre currículo e competências

Nielce Meneguelo **Lobo da Costa**
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN
Brasil
nielce.lobo@gmail.com
Rosangela de Souza Jorge **Ando**
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN
Brasil
rosangela.ando@gmail.com

Resumo

Este artigo refere-se a uma pesquisa de doutoramento empreendida em um processo de formação continuada sobre avaliação, com foco em funções, cujo objetivo foi identificar características para impulsionar o desenvolvimento profissional docente. O aporte teórico quanto à formação e desenvolvimento profissional veio de Ponte e Thurler. A metodologia foi do tipo co-generativa, segundo Greenwood e Levin. A coleta de dados foi por questionário, observações, gravações audiovisuais e recolha de materiais produzidos/adaptados pelos oito professores de Matemática do Ensino Médio participantes do estudo. A análise foi interpretativa e pelo método de análise de vídeo por eventos críticos dos períodos evolutivos do grupo. O artigo foca um episódio do Período Preparatório. As reflexões compartilhadas permitiram rever e recontextualizar os conceitos de currículo e competências. As trocas de ideias foram frutíferas e evidenciaram a relevância das parcerias universidade-escola, na qual cada elemento contribui de forma distinta de modo que a co-aprendizagem ocorra.

Palavras chave: Formação de professores, Ensino de funções, Avaliação educacional, Avaliação da aprendizagem

Introdução

Este artigo é um recorte de uma pesquisa de doutoramento, na linha de formação docente. Nela partimos do pressuposto que um processo de formação continuada – no qual se discuta a avaliação, as questões curriculares nela envolvidas e as competências a se desenvolver nos alunos, promovendo reflexões sobre a prática pedagógica – é um contexto significativo para o compartilhamento de ideias entre professores de Matemática. Esse contexto significativo é o que impulsiona a ampliação do conhecimento profissional e, em última análise, auxilia o desenvolvimento profissional docente.

A investigação que subsidia este artigo se propôs a responder à questão de pesquisa: Quais são as contribuições da participação em um processo de formação continuada sobre avaliação (questões que versaram sobre o conteúdo de funções) para o desenvolvimento profissional docente? Assim sendo, teve como objetivo geral: Identificar como a participação de professores de Matemática em um processo de formação continuada sobre avaliação, auxilia a impulsionar o desenvolvimento profissional. Para tanto, analisou um grupo de professores de Matemática atuantes no Ensino Médio que se reuniram com duas pesquisadoras da Universidade semanalmente, por um ano, para estudar processos avaliativos que envolvem funções, em uma escola pública estadual da cidade de São Paulo.

A pesquisa se inseriu em um projeto maior, intitulado “Educação Continuada do Professor de Matemática do Ensino Médio: Núcleo de Investigações sobre a Reconstrução da Prática Pedagógica”, nº.19366/2012, do Programa Observatório da Educação da CAPES.

A seguir discorremos sobre a fundamentação teórica que embasa este artigo.

Fundamentação Teórica

A fundamentação teórica para este recorte baseia-se nos estudos de Ponte e de Thurler (2002) quanto ao Desenvolvimento Profissional Docente (DPD) e de Murphy & Lick, além de Gimenez & Penteado quanto aos processos formativos que envolvem grupos.

Segundo Ponte (1997), o professor deve ser o protagonista da sua formação continuada, por decidir o que quer fazer e do que pretende participar. Para o autor, faz parte do DPD a gestão das práticas letivas e não letivas, assim como das questões educacionais mais amplas com as quais o professor deve lidar ao longo da carreira. Ponte (1998) enfatiza o favorecimento do DPD a partir de contextos colaborativos nas escolas, por propiciar interações com seus parceiros, a troca de experiências e o apoio dos gestores.

O autor elenca vários aspectos fundamentais para o DPD, enfatizando que ele “torna os professores mais aptos a conduzir um ensino de Matemática adaptado às necessidades e interesses de cada aluno e a contribuir para melhorar as instituições educativas, realizando-se pessoal e profissionalmente”.(p.32) Ele é entendido como uma evolução docente, que se inicia na formação inicial do professor e continua ao longo da vida profissional e que envolve desenvolvimento pessoal, profissionalização e socialização docente.

A pesquisadora suíça Thurler (2002) investigou processos formativos docentes promovidos por políticas públicas, especialmente as atreladas a mudanças curriculares e implementações de reformas educacionais diversas. Ela inventariou as modalidades possíveis em formações continuadas – entendidas na perspectiva da aprendizagem ao longo da vida – para impulsionar o DPD. São elas: 1) Sensibilização para os objetivos educacionais e desafios das reformas; 2) Desenvolvimento de competências didáticas e pedagógicas; 3) Exploração Colaborativa; 4) Cooperação contínua em uma organização aprendiz.

Os estudos de Thurler (2002) sobre DPD apontam modalidades que subsidiaram as análises desta pesquisa, no entanto, este recorte foi subsidiado pela modalidade 4- Cooperação contínua em uma organização aprendiz, a qual indica que nas implementações de mudanças curriculares é fundamental para os professores formações, que devem ser feitas em seus horários de trabalho, ou períodos de trabalho coletivo. A cooperação pode contribuir para impulsionar o desenvolvimento profissional.

Murphy & Lick (1998), que pesquisaram grupos de estudos, enfatizam que eles podem ser propícios ao crescimento pessoal e profissional, possibilitando o aprendizado, o compartilhamento de ideias e opiniões, a ajuda mútua, a participação efetiva nas questões próprias ao grupo, entre outras; trazendo resultados positivos para prática pedagógica e impulsionando o desenvolvimento profissional. Entretanto, esses autores alertam para que os participantes dos grupos tenham metas e objetivos em comum necessários para que ocorra um trabalho de cooperação e participação autêntica.

Já Gimenes & Penteado (2008) indicam outros dois aspectos proporcionado pelos estudos em grupos de professores: a possibilidade de o docente pensar como as práticas pedagógicas são realizadas e a oportunidade para discutir, refletir e partilhar com seus pares problemas vivenciados no cotidiano escolar.

Isto nos conduziu a pressupor que estudos conjuntos de um grupo de professores da Educação Básica e de pesquisadores da Universidade constitui-se em um tipo de processo formativo propício a impulsionar o desenvolvimento profissional dos participantes.

Concluindo, o DPD é entendido neste texto como sendo um processo evolutivo do docente que envolve aprendizagem ao longo de toda a sua vida profissional. Trata-se de um desenvolvimento global do indivíduo nos aspectos cognitivos, atitudinais e relacionais ligados à docência, à gestão da carreira e à instrução propriamente dita. O conhecimento profissional, objeto da próxima seção, faz parte do DPD, assim como o desenvolvimento pessoal e identitário.

Na próxima seção descrevemos a metodologia da pesquisa.

Metodologia da Pesquisa

A pesquisa caracterizou-se como qualitativa do tipo investigação – ação, de caráter co-generativo, segundo Greenwood & Levin (2000), os quais consideram que a investigação-ação se dá através da colaboração entre pesquisadores e pesquisados de modo que as duas partes aprendam e gerem conhecimentos em contexto. No caso, foi envolvido um grupo que empreendeu estudos e, a partir desses, desenvolveu ações pedagógicas ligadas à avaliação da aprendizagem seguidas de reflexões que conduziram à construção de significados práticos. A pesquisa esteve centrada no contexto de atuação dos envolvidos, procurando resolver, em contexto, aspectos da prática pedagógica ligados à avaliação da aprendizagem.

A pesquisa foi desenvolvida em duas etapas: documental e de campo. A documental envolveu estudos sobre Processos Avaliativos; análise das macro avaliações, tais como Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA e o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, a identificação das características de cada sistema; análise das Orientações curriculares nacionais; estudos sobre o ensino de funções no Ensino Médio; análise de resultados de pesquisas em Educação Matemática envolvendo avaliação, funções e seu ensino.

A pesquisa em campo foi desenvolvida com um grupo formado de oito professores, que lecionavam no Ensino Médio, de escolas públicas estaduais na capital de São Paulo e duas pesquisadoras da Universidade. O ponto central dos estudos foi processos avaliativos educacionais e neles, particularmente o de funções. Os professores participantes foram identificados por pseudônimos de modo a garantir o anonimato. São eles: Alfenas, Barbacena, Botumirim, Olivedos, Paraty, Penedo, Simões, Votorantim.

A coleta de dados da fase em campo se deu por questionário, observações, gravações audiovisuais e recolha de materiais produzidos/adaptados pelos professores do grupo.

O grupo teve encontros semanais em uma escola estadual da região Norte da cidade de São

Paulo, durante um ano, totalizando 28 encontros de três horas de duração. Neste período, esses professores elaboraram uma avaliação diagnóstica, aplicaram aos alunos, corrigiram, tabularam e analisaram seu resultado. Paralelamente, empreenderam estudos sobre avaliação interna, externa (ENEM e PISA) e sobre modalidades de avaliação. Além disso, estudaram sobre ensino de funções na Educação Básica. Estes professores analisaram as provas do ENEM no período de 2009 a 2015, selecionando questões que envolviam o conteúdo de funções, resolvendo e classificando-as segundo a matriz do ENEM e segundo a classificação do PISA. Uma avaliação formativa foi elaborada por eles com uma seleção de tais questões e aplicadas aos seus alunos. Os erros apresentados pelos estudantes foram categorizados e cada professor fez uma intervenção em suas turmas, que foi posteriormente discutida no grande grupo.

A análise foi interpretativa, o que significa que visou a compreensão dos fenômenos a partir dos dados coletados, que foram analisados a partir do alicerce teórico, com significados atribuídos pelo pesquisador, levando em conta variáveis, tais como regras institucionais, valores pessoais e sociais (Hernández, et al., 2000). A análise dos encontros se estruturou em cinco períodos evolutivos do grupo, estabelecidos à posteriori, quais sejam: Período Preparatório; Período de Consolidação de Estudos sobre Avaliação e sobre Funções; Período Analítico; Período Prático e Período Conclusivo.

O Período Preparatório englobou os oito primeiros encontros e se caracterizou por ser o dos primeiros contatos com o tema, o início de estudos sobre o que é avaliação, matriz de referência e demais particularidades. Envolveu ainda a construção, aplicação e correção de uma avaliação diagnóstica sobre funções, com a utilização da experiência docente dos participantes, o período finalizou por estudos teóricos sobre as questões curriculares ligadas à avaliação e o tema currículo e competências.

Foi utilizado o método proposto por Powell, Francisco & Maher (2004) para análise dos vídeos e demais dados coletados, em cada período foram identificados eventos críticos. Os autores denominam eventos críticos à ocorrências significativas e relevantes, momentos nos quais se percebe que houve alguma desestabilização, mudança, ruptura, assimilação de novas informações. Por exemplo, pode ser um momento de aprendizado e de recontextualização ou ressignificação dos conhecimentos.

Na próxima seção descreveremos e analisaremos um dos eventos críticos, referente a estudos preparatórios e seu contributo para reflexões entre os participantes do grupo sobre currículo e competências.

Evento Crítico: - Descrição e Análise

No último encontro do que denominamos "Período preparatório" foi proposta a leitura e discussão de artigo de Mello (2012), intitulado "Competências como referência do currículo", e a elaboração de um resumo para auxiliar as reflexões conjuntas sobre o texto. Nesse artigo o autor descreve a tendência de organização do currículo por competências nas propostas de reformas educacionais, que surgiram no Brasil, nas Américas, na Europa, na Ásia e na África nas últimas décadas. Essas competências são entendidas como organizadoras dos conteúdos curriculares e surgiram em resposta à crise da escola na segunda metade do século XX provocada pelo início da revolução tecnológica e pela heterogeneidade dos alunos, devido ao acesso à escola. Segundo o texto "As competências são introduzidas como um conjunto de operações mentais que são resultados a serem alcançados nos aspectos mais gerais do desenvolvimento do aluno". (Mello, 2012, p. 9)

Na primeira parte da discussão, os professores Botumirim, Simões, Alfenas e Paraty apresentaram como um pequeno "resumo" do texto de Guiomar Namo de Mello, evidenciando o que entenderam e trazendo as dúvidas para discussão. A seguir, a professora Alfenas disse:

> A autora explica que o currículo por competências é adotado no Brasil, nas Américas, Europa, Ásia e África e essas competências são entendidas como organizadoras dos conteúdos curriculares que surgiram em resposta à crise da escola na segunda metade do século XX provocada pela incipiente revolução tecnológica e pela heterogeneidade das clientelas escolares. No texto, escreve que as competências é um conjunto de operações mentais que são resultados a serem alcançados nos aspectos mais gerais do desenvolvimento do aluno, ou seja, a generalidade e transversalidade e não relacionadas com nenhum conteúdo escolar específico, mas entendidas como necessárias para a construção de qualquer conhecimento. Assim a autora, define a competência como um conjunto de elementos que o sujeito pode mobilizar para resolver uma situação com êxito e mostra o significado das palavras elementos, mobilizar, situação e êxito para esclarecer a definição dada.

Em relação ao conceito de competência e de currículo por competência, Alfenas disse:

> A autora ressalta que a competência refere-se sempre a mobilização de recursos internos do sujeito. Escreve que do ponto de vista pedagógico as competências são importantes, pois mostram que os processos internos do aluno podem ser aprendidos e o currículo por competência se expressa, se manifesta, se valida pelas aprendizagens que propiciou e que o aluno coloca em ação de determinada maneira em determinada situação. Para a autora, o que valida o currículo são os processos que se constituíram no aluno e se expressam pela competência de saber, de saber fazer e de saber por que sabe. As competências como referência do currículo devem ser o objetivo de aprendizagem de todas as áreas ou disciplinas, por que são necessárias para aprender qualquer conteúdo curricular e se expressam em expectativas de aprendizagem, pois as competências valorizam os conteúdos curriculares e se articulam, mas o currículo é muito mais do que as competências por que inclui tudo aquilo que faz parte do processo de aprender e ensinar. A autora finaliza o texto falando que o conceito de currículo inclui um modelo curricular até as atividades desenvolvidas por professores e alunos em situações de aprendizagem em que se organizam conteúdos curriculares ordenados no tempo e no espaço escolar.

Na discussão no grande grupo, que se seguiu, foi apontado que no Brasil não temos um currículo nacional, apenas Diretrizes Curriculares Nacionais – DCN (Brasil, 2013) e os Parâmetros Curriculares Nacionais -PCN (Brasil, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática, 1998).[1]

No diálogo que se seguiu, o professor Simões expôs que não concorda com propostas de currículos nacionais ou mesmo estaduais. Para ele

> Cada escola, cada comunidade é singular e o currículo é plural... isso eu me baseei pelo próprio concurso que teve, esse último que a gente prestou... que era uma questão dessa que dizia que a escola é singular e ela tem que aplicar as metodologias conforme a necessidade, mas o currículo não diz isso, né? Na hora que chega a apostila não tem como você aplicar na escola... é uma outra realidade... A diferença do noturno pro diurno... você não consegue dar a apostila pro noturno, tem que ser diferenciada...

Observamos pelo excerto que o professor Simões acredita num currículo "vivo" e adaptado a cada classe, respeitando a realidade local. No caso, a apostila a qual ele se refere é o Caderno do Aluno (São Paulo, 2014).[2]

Para Simões

---

[1] Vale ressaltar que, na ocasião dos encontros do grupo, estava em elaboração uma Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2016)

[2] O Caderno do Aluno é um material didático de apoio disponibilizado pela Secretaria da Educação de São Paulo.

> As competências dos alunos devem ser avaliadas como uma generalização, transversalidade e uma aquisição do aluno sem nenhum conteúdo curricular específico... trabalhar com as competências possibilita resolver quaisquer problemas com as várias definições e mobilizar sua capacidade de raciocínio, no sentido de não... procurar saber a resposta correta do aluno, mas como ele chegou na resposta, dessa forma você consegue avaliar.

Notamos que o professor Simões não se limitou a fazer uma súmula do texto, mas acrescentou sua opinião. Isso permitiu que fosse extrapolado o estudo teórico, envolvendo reflexões sobre a docência.

No decorrer da discussão, surgiu uma dúvida sobre a diferença entre competência e habilidade. Os professores participantes deram exemplos sobre tal diferença, evidenciando que não tinham clareza sobre o que a literatura considera competência e o que se trata como habilidade. Por exemplo, o professor Penedo entendia que

> Considere andar de bicicleta, eu tenho competência para andar de bicicleta, mas não tenho nenhuma habilidade... eu não sei andar

O professor Paraty acrescentou

> Sem a habilidade você não tem a competência.

No diálogo as discussões teóricas foram avançando e promovendo reflexões sobre o currículo e as competências a desenvolver nos estudantes.

Na discussão sobre competências, os professores mostraram que tinham interesse em desfazer dúvidas sobre competência e habilidade, partilhando conhecimentos sobre este tema. (Gimenes & Penteado, 2008)

O professor Botumirim, contribuiu, acrescentando:

> Aqui, está um conjunto de operações mentais, ele [o aluno] está ali mentalmente envolvido... aí ele chegou ao resultado, então ele usou as competências dele.

Uma das pesquisadoras complementou: “Habilidades”.

O professor Botumirim questionou:

> Mas não é mental?

A pesquisadora auxiliou, dizendo:

> No texto você leu o que são operações mentais... as operações mentais estão envolvidas nas habilidades... por exemplo, ele está resolvendo o problema, você me disse que ele está ali escrevendo, anotando, apagando... então ele tem a habilidade de escrever, de apagar, escrever, uma série de habilidades que estão em jogo e que ele está mobilizando as habilidades fazem parte da competência

O professor Botumirim completou

> Então elas fazem parte da competência. Ele está usando as habilidades.

A professora Alfenas acrescentou:

> Aqui no texto ela define tudo isso... aqui: conjunto de elementos que o sujeito pode mobilizar para resolver uma situação com êxito... e ela fala “o que são elementos? São recurso do conhecimento que a gente tem”... e ela fala “ o que é mobilizar? Colocar em ação, esquemas em operação”, e depois “o que é situação?” porque todas essas palavras ela usou pra explicar o que é competência... ela fala “situação: atividade complexa ou como um problema e sua solução e a representação dessa solução é feita pelo sujeito” e depois o êxito “exercício adequado de um papel, função ou atividade, como realizar de maneira eficaz”... aqui logo na página 9 ela dá essa definição

A pesquisadora, continuou

> E ela termina "apesar das diferenças a competência refere-se sempre à mobilização dos recursos do sujeito".

A professora Barbacena acrescentou

> a competência ela [Mello] coloca ai [no texto] quando a pessoa é capaz de resolver determinado problema, ... porque o aluno pode até desenvolver um caminho mas não ser competente de chegar ao produto final, então ela não vai considerar ai uma competência... se ele não conseguiu, ele pode ter algumas habilidades, ter colocado em prática mas não foi o suficiente para resolver aquele assunto.

A professora Alfenas associou a discussão sobre competências e habilidades às atividades desenvolvidas nos encontros:

> Então a gente pode usar como exemplo, ensinamos função para os alunos... a atividade, analisando as provas, demos função para os alunos, o que aconteceu, a primeira [questão], a maioria fez, mas a outra, a aplicação era igual, mas tinha um contexto... ele não teve a competência, mas as habilidades eles tinham.

Uma das formadoras acrescentou que "essas habilidades não foram suficientes para que ele tivesse a competência de resolver... {} faltou habilidade". Nessa discussão percebemos que os professores construíram conhecimentos sobre competência e sobre habilidades, que compõem o conhecimento profissional docente para o ensino. Aqui notamos que o conhecimento profissional envolveu muitos domínios: o do currículo, o da instrução, e o da aprendizagem (Ponte, 1998), o que pode auxiliar o DPD dos envolvidos.

Vale ressaltar que esta formação ocorria na escola e, como Thurler (2002) afirma, as formações contínuas no *locus* escolar contribuem com atividades que impulsionam o desenvolvimento profissional no que ela caracteriza como "Cooperação contínua em uma organização aprendiz".

Notamos também que esta discussão oportunizou o compartilhamento de ideias e opiniões para chegar a um senso comum, auxiliando o desenvolvimento do senso de pertencimento de cada professor ao grupo, todos aprendendo em conjunto. (Murphy & Lick, 1998).

Conclusões

Concluímos, pela análise do encontro relatado, que as reflexões surgidas ao longo das discussões relativas ao texto permitiram aos envolvidos rever os conceitos de currículo e competências. As trocas de ideias foram frutíferas e evidenciaram a relevância de promover na escola oportunidades de discussão sobre aspectos teóricos, especialmente quando essas trocas ocorrem em grupos formados por parcerias universidade-escola, na qual cada elemento contribui de forma distinta de modo que a co-aprendizagem ocorra.

Ressaltamos que estudos conjuntos entre pesquisadores da Universidade e professores da Educação Básica têm estado cada vez mais presentes na Educação Matemática, produzindo resultados tanto no campo da Educação Continuada quanto na pesquisa acadêmica sobre processos formativos.

Ressaltamos que a análise empreendida se refere a uma pequena amostra de professores, sem ter a intenção de generalizar, no entanto acreditamos que estas formações continuadas empreendidas no *locus* escolar contribuam para impulsionar o desenvolvimento profissional docente.

Agradecimento

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de

Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

Brasil. (1998). *Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.* Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (2013). *Ministério da Educação. Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação.* Brasília: MEC.

Brasil. (2016). Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Acesso em 19 de novembro de 2016, disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/BNCC-APRESENTACAO.pdf

Gimenes, J., & Penteado, M. G. (2008). Aprender Matemática em grupo de estudos: uma experiência com professoras das séries iniciais. *Zetetiké, 16*.

Greenwood, D. J., & Levin, M. (2000). Reconstructing the relationships between universities and society through action research. Em N. Denzin, & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (2ª ed., pp. 85-106). Thousand Oaks, California: Sage Publications Inc.

Hernández, F., Sancho, J., Carbonell, J., Tort, A., Simó, N., & Sánchez-Cortês, E. (2000). *Aprendendo com as inovações nas escolas.* Artmed.

Mello, G. N. (2012). Competências como referência do currículo. *Revista da Avaliação*, 9-11.

Murphy, C., & Lick, D. (1998). *Whole faculty study groups: A powerful way to change schools and enhance learning.* Califórnia: Corwin.

Ponte, J. P. (1997). *O conhecimento profissional dos professores de matemática.* Lisboa: DEFCUL.

Ponte, J. P. (1998). Da Formação ao desenvolvimento profissional. *Actas do ProfMat 98*, pp. 27-44. Acesso em maio de 2015, disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm

Powell, A. B., Francisco, J., & Maher, C. (2004). Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das ideias matemáticas e do raciocínio de estudantes. *BOLEMA Boletim de Educação Matemática, 17*, 81-140.

São Paulo. (2014). *(Estado) Secretaria da Educação. Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo: caderno do professor; matemática, ensino médio, 1ª série* (Nova edição 2014-2017 ed., Vol. 1). (coordenação geral, Maria Inês Fini, Ed.) São Paulo: SE.

Thurler, M. G. (2002). O Desenvolvimento Profissional do Professor: Novos Paradigmas, Novas Práticas. Em P. Perrenoud, M. G. Thurler, L. Macedo, N. Machado, & C. D. Alessandrini, *As Competências para Ensinar no Século XXI* (C. Schilling, & F. Murad, Trads., pp. 89-111). Porto Alegre, Brasil: Artmed Editora.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

O trabalho colaborativo na formação continuada de professores de Matemática: uma aproximação entre Universidade e Escola Básica

Marcos Antônio **Petrucci** de Assis
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
Brasil
petrucci@ifpb.edu.br
Roger Ruben Huaman **Huanca**
Universidade Estadual da Paraíba
Brasil
roger@uepb.edu.br

Resumo

A presente comunicação trata de uma pesquisa de cunho qualitativo, desenvolvida na cidade de Cajazeiras, situada na região Nordeste do Brasil. Teve por objetivo pôr em prática a aproximação entre a Universidade e a escola básica em busca de construir uma proposta de formação continuada que, partindo da voz dos professores de Matemática, contemplasse seus saberes experienciais para trazer para análise, discussão e posterior reflexão suas necessidades. Trabalhou-se o ensino da Geometria apoiado em uma metodologia de ensino de Matemática através da Resolução de Problemas. A análise dos dados sugere que os discursos dos sujeitos foram balizados por suas necessidades e dificuldades na atualização dos conhecimentos para o ambiente de ensino. Os resultados obtidos evidenciaram o surgimento de um espaço de discussão e reflexão que respeitou o contexto dos professores, resgatando o seu protagonismo frente ao processo de formação como uma das etapas de seu desenvolvimento profissional.

Palavras chave: Formação continuada, Resolução de Problemas, Grupo de Estudos, Educação Matemática, Geometria.

Introdução

O século XXI traz uma complexidade para o cenário social que exige das pessoas que se (re)construam em termos de comportamento e ação para enfrentar os desafios da nova realidade que a quebra de barreiras geográficas proporcionada pela globalização trouxe. Podemos citar o aumento do números de alunos com acesso à escola, a adequação do currículo, diferentes nuances socioculturais e a crescente busca por melhoria na escolarização como fatores que afetam diretamente a profissão docente.

A formação do professor não passa imune a estas mudanças e necessita ser repensada em suas modalidades inicial e continuada. Entendemos que associada a formação continuada está a necessidade de proporcionar um fortalecimento no conhecimento matemático para um ensino motivante, inspirador e que fomente o fazer matemática em sala de aula

O trabalho cooperativo/colaborativo se posiciona como um forte aliado para a construção de uma formação contínua que busque romper com o modelo positivista de treinamento do professor, em busca de uma abordagem que estimule o desenvolvimento profissional e o coloque com protagonista deste processo.

Formação Continuada: aproximando Universidade e Escola Básica

Não podemos negar que as mudanças nos contextos sociais e educacionais que alicerçam todo ato social tenham ação direta sobre a formação do professor, trazendo como consequências diretas a falta de delimitação clara do seu espaço de atuação e um aumento de exigência frente a diversidade das novas demandas.

Para Imbernón (2010), não vamos conseguir vencer essa situação se continuarmos a tratar a formação continuada como um conjunto de lições-modelo, de cursos padronizados ministrados por especialistas onde os professores são meros espectadores e consumidores de uma solução genérica, que desconsidera as especificidades da sala de aula.

Este autor destaca, também, que cometemos um engano ao tratar, de forma separada, a formação e o contexto de trabalho, pois estamos pressupondo que as soluções apresentadas se aplicam a todas as realidade de modo linear. Ao contrário, o contexto condiciona as ações de formação e a sua repercussão no fazer docente.

No tocante ao impacto da formação continuada dos professores na qualidade do ensino, Imbernón (2016) nos adverte que, mesmo após progressos nas políticas e nas práticas de formação, esta ainda é um ponto fundamental na profissão. É chegada a hora de uma pausa para uma reflexão que permita identificar, diante da quantidade e da diversidade de atividades voltadas à formação, aquelas que possam dar impulso às habilidades interpessoais, relacionais e comunicativas do professor.

Apesar dos esforços envidados em promover melhoria e adequações na formação do professor observamos, nas discussões das quais participamos em nosso grupo de pesquisa, uma incipiente aproximação com o desenvolvimento profissional, pois as ações formativas são apenas uma das variáveis deste cenário, ao lado de fatores como baixos salários, carga horária de trabalho e fortalecimento da identidade docente, dentre tantos outros.

Além disso, é fundamental que os professores possam protagonizar experiências de superação de concepções errôneas que porventura tenham persistido após a formação inicial (Onuchic e Huanca, 2013). A formação continuada pode sediar estas vivências permitindo a construção de conhecimentos matemáticos consistentes e de mecanismos para perceber e ajudar na superação de ideias inconsistentes em seus alunos.

Em busca de colocar o professor como protagonista de sua formação, a colaboração tem papel determinante, e pode ser fomentada por meio da participação em um grupo de estudos. Murphy e Lick (2005) destacam que uma das bases para o funcionamento de um grupo de estudos é a crença em que todos os membros tenham algo importante a trazer para contribuição no grupo. O foco dos trabalhos deve estar sobre as ações e não sobre as características individuais, bem como às questões diretamente associadas ao fazer dos professores e alunos em sala de aula, facilitando a sinergia.

Nesse novo olhar para a formação continuada, duas coisas merecem ser evidenciadas: enxergamos um processo contínuo de reflexão motivado fortemente pelo trabalho cooperativo/colaborativo e a promoção da parceria entre a universidade e a escola em busca da melhoria dos resultados, aproximando os conhecimentos da academia à prática pedagógica das escolas.

Resolução visual de problemas e geometria: primeiros passos

A Geometria no Ensino Fundamental vem se firmando no currículo e na sala de aula nos últimos anos. Para Walle (2009) uma compreensão rica deste assunto tem implicações diretas em outros tópicos curriculares, permitindo aos alunos fazerem conexão com medidas, raciocínio proporcional e álgebra.

Brasil (2017) ressalta que acrescentar a Resolução de Problemas ao ensino de Geometria se mostra uma alternativa válida para aumentar o interesse dos alunos e, possivelmente, influenciar na formação do professor com o objetivo de lançar luz sobre a percepção das dificuldades de seus alunos em sala de aula. Obviamente que isso não remove todos os óbices e as dificuldades não se atém apenas ao ato de ensinar, embora se configure um passo significativo na busca por melhores dias para a Geometria no ensino fundamental.

Reforçando o entendimento da importância da Resolução de Problemas na formação do professor de Matemática, Huanca (2014) levanta a seguinte questão: Por que se faz necessário conhecer e dominar essa metodologia, especificamente no ensino de matemática em sala de aula? Uma possível resposta aponta que:

> A resolução de problemas tem um papel fundamental, na formação do professor, por oferecer estratégias teóricas e práticas para o desenvolvimento profissional da ação pedagógica do professor em uma sala de aula. Vemos, também, que a Resolução Problemas, para os cursos de formação de professores é importante e necessário para que eles sejam multiplicadores nas escolas. (Huanca, 2014, p. 168)

Vale (2017) nos alerta para a necessidade dos alunos conseguirem resolver problemas sob diversas abordagens na realidade atual, dada a necessidade de termos alunos motivados e inspirados para entrarem num ciclo de querer aprender, conferir significado ao aprendido e prosseguirem aprendendo sempre mais. Nas palavras de Vale, apesar de pouco presentes ou pouco valorizados nas aulas de matemática,

> há um conjunto de problemas, geralmente de natureza visual, que permitem abordagens diversificadas, facilitando o desenvolvimento da criatividade dos alunos nas várias componentes que lhe estão associadas, como a fluência, a flexibilidade e a originalidade. Essa criatividade pode ser desenvolvida nos alunos, uma vez que pode ser promovida pelas práticas de ensino. (Vale, 2017, p. 132)

Esta autora prossegue tratando das potencialidades das resoluções visuais aplicada aos problemas matemáticos, ao destacar que

> uma característica dos alunos matematicamente competentes é serem capazes de empenhar-se em procurar uma solução clara, simples, curta e, portanto, elegante, para um problema. Acreditamos que a visualização pode ser uma mais valia nesta procura, mas para isso os

> professores devem possuir um conjunto de tarefas que permitam ajudá-los na sua prática (Vale, 2017, p. 144).

Assim, observamos que oportunizar aos professores em serviço o contato com problemas que possam explorar esse potencial pode enriquecer as possibilidades do seu trabalho em sala de aula com a Geometria. Afinal, o ensino de Geometria é um tópico que tem se apresentado como um ponto de conflito tanto nas ações da formação inicial quanto continuada.

Caminhar metodológico

O trabalho apresenta um recorte da dissertação[1] de mestrado do primeiro autor no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Na ocasião conseguimos alinhar a nossa pesquisa de campo em parceria com a Secretaria Municipal de Educação da cidade de Cajazeiras/PB, localizada no Nordeste do Brasil, já que os professores estavam em um programa de formação continuada. Objetivo da pesquisa foi levantar as possíveis contribuições que um grupo de estudos pode trazer para professores de matemática do Ensino Básico que pretendem ensinar matemática apoiados na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

A pesquisa foi desenvolvida por meio de uma abordagem qualitativa, que é caracterizada como tendo o ambiente natural como fonte de dados; como sendo descritiva; como estando mais interessada no processo do que nos resultados finais; por realizar análise indutiva dos dados; e por dar importância vital aos significados dados aos fatos (Bogdan e Biklen, 1994). Esse entendimento mostrou-se coerente como o objetivo da pesquisa que deu origem os dados aqui discutidos, que visava analisar os estudos cooperativos/colaborativo entre os professores.

Em consonância com as vozes dos vinte professores participantes e da equipe pedagógica criamos um grupo de estudos e construímos a proposta para a Formação Continuada dos professores de Matemática do Ensino Básico da Rede Municipal da cidade de Cajazeiras, no ano de 2017 (março a novembro). Fomentamos a formação com base na colaboração em busca de minimizar o isolamento docente e por acreditarmos que, “pesquisadores e docentes podem se aliar no processo de construção de saberes, proporcionando a interconexão entre esses mundos” (Ibiapina, 2016, p. 36).

Dentre os diversos temas trazidos pelos professores, a busca por alternativa para o ensino de Geometria se destacou. Para a condução das ações no âmbito do grupo de estudos nos alinhamos com a visão de Murphy e Lick (1998, 2005).

Para isso, ocorreram dez sessões com periodicidade quinzenal, duração média de três horas, estruturadas em dois momentos: iniciando pela leitura e discussão de temas associados à formação de professores e ao ensino de Matemática e um segundo momento onde trabalhamos com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (Onuchic e Allevato, 2011).

Para esta comunicação, trazemos um recorte que trata de um dos encontros, no qual optamos por iniciar com a apresentação de um resumo escrito acerca do ensino de Geometria para discussão em sala. Assim, deixamos para cada participante realizar uma leitura posterior do

[1] Resolução de Problemas e Grupo de Estudos: possíveis contribuições na formação continuada de professores de matemática do ensino básico.

texto intitulado: O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas de autoria das pesquisadoras Marlene Aparecida do Prado e Norma Suely Gomes Allevato.

Dando continuidade, na segunda parte do encontro, entregamos a cada participante um problema (figura 1), cujo objetivo era estudar formas geométricas, áreas; trabalhar com números racionais sob a relação parte/todo; desenvolver habilidade de expressão em linguagem matemática e resolução visual. Visando, para tanto, à construção de diversos tópicos matemáticos, de livre escolha dos participantes, através de sua resolução.

Um projetista está demarcando um novo loteamento que ocupa uma área de 250.000 m^2.
Ao considerar que a demarcação dos quarteirões continuará a seguir o padrão iniciado pela área em destaque na imagem ao lado, quanto esta representa em relação à área total?

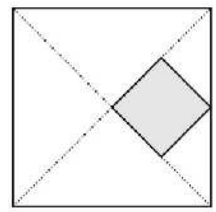


Figura 1. Problema matemático.

Breve discussão acerca do realizado

O encontro em discussão nesta comunicação foi o quinto dentre dez realizados. Até este momento os participantes vinham dando prioridade a uma abordagem algébrica para traçarem as estratégias de resolução dos problemas apresentados.

Neste encontro, apenas um grupo adotou a linguagem matemática por meio de utilização de cálculos matemáticos para exprimir a relação entres as áreas solicitada no problema. Tomaram por base o lado *l* do quadrado maior e colocaram as demais medidas em função desta informação, prosseguindo em busca da solução. Já os outros dois usaram abordagens concretas e analíticas.

Depois do tempo estipulado para a resolução, desfizemos os grupos e passamos a realizar uma exposição da solução de cada grupo para a apreciação de todos os participantes, em um momento que denominamos plenária.

Durante a exposição do primeiro grupo que adotou abordagem concreta, o Participante$_8$ apresentou as partes que separou, por corte, e através do rearranjar das partes chegou a solução procurada. Este ainda destacou que:

> Nos pareceu tão simples quando trocamos ideias, embora nenhum de nós tenha, de forma isolada, pensado em começar um conteúdo de Geometria dessa forma em sala de aula. Penso que, foi motivante e nos envolveu apesar da nossa vivência com os conteúdos matemáticos, muito mais instigante será para nossos alunos. Afinal, este procedimento pode naturalmente surgir na sala de aula, ao aplicarmos o problema antes do conteúdo matemático necessário ser trabalhado (Participante$_8$, Notas do encontro).

Outro momento rico foi a socialização para os demais participantes, da estratégia adotada pelo grupo do Participante$_{12}$, que chegou a solução por meio da análise da figura, referenciando a área destacada e a comparando em tamanho e forma com as demais, sinalizando para o uso de uma solução visual para o problema, embora não tenha explorado outras arranjos visuais além do descrito, conforme palavras do próprio participante:

> Acompanhem comigo na figura: metade desta área destacada corresponde a esse triângulo acima dela e a outra metade corresponde ao triângulo da parte inferior. Assim, se rebatermos esse quadrado no sentido anti-horário, estamos prolongando os riscos e aí é só contar quantas partes temos e obter a relação entre a parte destacada e o total de partes com a mesma forma, ou seja, temos quatro quadrados cheios mais outros quatro formados pelos outros triângulos. Assim, chegamos a 1/8 (Participante$_{12}$, Notas do encontro).

Como podemos observar na figura 2, além da solução construída com base na fala do participante e representada por meio da primeira imagem, apresentamos duas outras abordagens visuais que levam a razões equivalentes à da solução traçada pelo Participante$_{12}$.

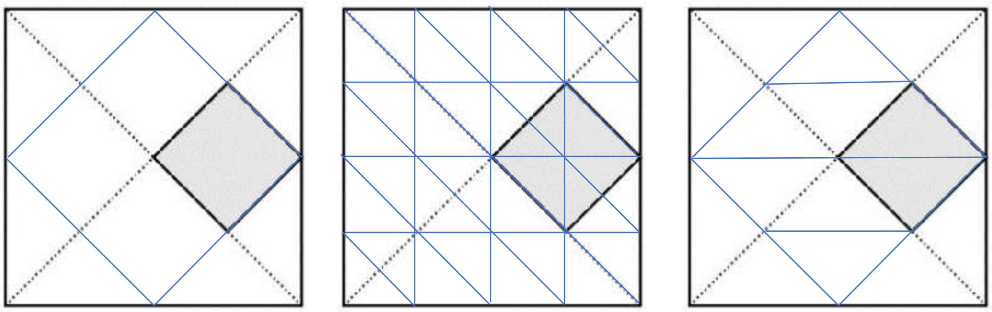
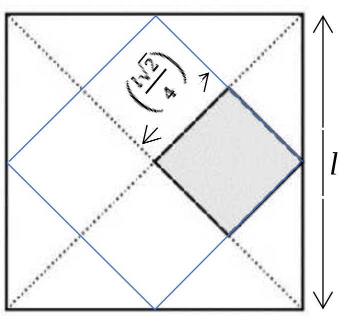


Figura 2. Solução do grupo do participante$_{12}$ e outras duas possibilidades.

Após o trabalho com as representações pictóricas e por meio da linguagem vernácula, retomamos a resolução do grupo que havia optado por uma estratégia puramente algébrica para guiar a busca pelo resultado e seus integrantes construíram e apresentaram o que se pode observar na figura 3.



Considerando l o comprimento do lado do quadrado maior e fazendo uso do teorema de Pitágoras, obtemos o lado do quadrado menor. Em seguida calculamos a razão procurada.

$$\frac{\text{Área do quadrado menor}}{\text{Área do quadrado maior}} = \frac{\left(\frac{l\sqrt{2}}{4}\right)^2}{l^2} = \frac{2l^2}{16l^2} = \frac{1}{8}$$

Figura 3. Resolução utilizando a linguagem matemática

No decorrer deste quinto encontro, os participantes conseguiram se desvencilhar da fórmulas matemáticas e deram espaço a duas abordagens muito interessantes, uma concreta e outra analítica, nas duas puderam pensar, montar uma estratégia sem uso da linguagem matemática formal, com foco na compreensão da razão procurada por meio da relação parte-todo. Pensaram e agiram em sintonia com os documentos norteadores para o Ensino Fundamental que preconizam que o “ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio". (Brasil, 1998, p. 57).

Em nosso grupo de estudos 70% dos participantes exerciam a profissão de professor em mais de uma escola e com aulas os três turnos, quatro dias por semana. Desta forma a busca pela dignidade e de manter a família se coloca em oposição aos processos de formação e do desenvolvimento profissional, transformando os encontros do grupo de estudos no único espaço para estudos, discussões e um caminhar em direção ao fortalecimento da identidade docente.

Buscando mitigar essa condição, procuramos criar espaços nos encontros para o compartilhamento de saberes e situações advindas da sala de aula de Matemática, com o objetivo de gerar um ambiente onde o isolamento profissional a que o professor se encontra submetido seja minimizado, propiciando a partilha de experiências com seus pares para subsidiar uma posterior reflexão que terá alcance no seu fazer pedagógico e na sua condição de ser humano.

Conclusão

Destacando um dos encontros da pesquisa que teve foco na formação continuada do professor de Matemática no contexto da Educação Matemática, ficou evidente que ao trabalharmos sob a atmosfera de um grupo de estudos, podemos experimentar uma formação focada no protagonismo do professor de Matemática, estimulando a pensarem antes, visualmente e só depois, numericamente, pondo em prática habilidades como realizar escolhas; comunicar-se e colaborar entre si; pensamento crítico através da Resolução de Problemas e criatividade. Para Boaler (2016), estas são habilidades essenciais ao desenvolvimento do ser humano, no mundo atual, que podem impactar positivamente a sala de aula, apesar de exigir um redesenho dos papéis do docente e do estudante, levando aos alunos um ensino motivante e inspirador.

Destacamos que, considerando os demais encontros do grupo de estudos, foi positivo termos conseguido construir conceitos matemáticos, como Probabilidade Geométrica e o Teorema de Menelau, ambos desconhecidos pelos professores participantes da formação. No decorrer da formação, fomos percebendo que um grupo de estudos pode contribuir, não somente em relação ao processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, mas tem outros aspectos: reflexão sobre a prática da sala de aula, dificuldades em lidar com a sala de aula no contexto atual, valorização do conhecimento matemático em evolução durante os encontros, além do compartilhamento de experiências, onde os membros se sintam em harmonia e igualdade. Porém, como limitante percebemos que o trabalho cooperativo se fez mais frequente, enquanto o trabalho colaborativo se fortaleceu nos últimos encontros, tendendo a se consolidar com a continuidade das ações do grupo de estudos.

Por fim, a aproximação entre os docentes e pesquisadores da universidade e da escola básica fomentou um processo de compartilhamento de saberes experienciais advindos da prática dos participantes oriundos da Educação Básica que realimentou as pesquisas. A universidade trouxe conhecimentos construídos na academia que puderam auxiliar no fazer docente na escola. Acreditamos que esta proposta, se mantida e fortalecida, pode se configurar em fundamento para uma formação continuada que resgate o protagonismo do professor,

Bibliografia e referências

Boaler, J. (2016). *Mathematical Mindsets*: Unleashing Students' Potential Through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching. (1st ed.). San Francisco, CA: John Wiley and Sons Inc.

Bogdan, R.C., Biklen, S.K. (1994). *Investigação qualitativa em educação - uma introdução à teorias e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF.

Brasil, T. C. (2017). *O ensino da geometria através de resolução de problemas*: explorando possibilidades na formação inicial de professores de matemática. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologias da Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.

Huanca, R. R. H. (2014). *A Resolução de Problemas e a Modelização Matemática no processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação*: uma contribuição para a formação continuada do professor de matemática. 2014. 315 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Ibiapina I. M. L. M. (2016). Reflexões sobre a produção do campo teórico-metodológico das pesquisas colaborativas: gênese e expansão. In: Ibiapina, I. M. L. M; Bandeira, H. M. B.; Araujo, F. A. M. *Pesquisa Colaborativa: multirreferenciais e práticas convergentes*. EDUFPI.

Imbernón, F. (2010). *Formação Continuada de Professores*. Porto Alegre: Artmed.

Imbernón, F. (2016). *Qualidade do ensino e formação do professorado*: uma mudança necessária. São Paulo: Cortez.

Murphy, C. U., Lick, D. W. (1995). *Whole-Faculty Study Groups*: a powerful way to change schools and enhance learning. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Murphy, C. U., Lick, D. W. (2005). *Whole-Faculty Study Groups*: creating professional learning communities that target student learning. (3. Ed.). Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Onuchic, L. R., Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Boletim de Educação Matemática*, vol. 25, num 41.

Onuchic, L. R., Huanca, R. R. H. (2013). A licenciatura em matemática: o desenvolvimento profissional dos formadores de professores. In. Frota, M. C. R., Carvalho, A. M. F. T., Bianchini, B. L. (orgs.). *Marcas da educação matemática no ensino superior*. Campinas, SP: Papirus.

Vale, I. (2017). Resolução de Problema um tema em contínua discussão: vantagens das resoluções visuais. In. Onuchic, L. R., Júnior, L. C. L., Pironel, M. (org). Perspectivas para a Resolução de Problemas. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Walle, J. A. V. (2009). *Matemática no ensino fundamental*: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed.

Gestão da Aprendizagem Escolar II (GESTAR II) e o Curso de Formação Docente (CFD): un análisis de dos programas de formación continua de profesores que enseñan matemática

Emerson **Rolkouski**
Sector de Ciencias Exactas, Universidad Federal de Paraná (UFPR).
Brasil
rolkouski@uol.com.br
Jeser C. **Candray**
Instituto de Ciencia, Tecnología e Innovación – Universidad Francisco Gavidia (ICTI-UFG).
El Salvador
jcandray@ufg.edu.sv / jccandray@gmail.com

Resumen

Este documento tiene como objetivo presentar y comunicar los resultados de una investigación que analizó las concepciones de Educación Matemática y de formación de profesores presentes en dos políticas públicas de formación continua de profesores que enseñan matemáticas: el programa *Gestão da Aprendizagem Escolar* (GESTAR II) de Brasil y el Curso de Formación Docente (CFD) de El Salvador. Los datos fueron constituidos a partir de documentos oficiales y de la realización de entrevistas con responsables de la elaboración de la propuesta pedagógica de ambos proyectos. Para ello, se utilizaron aportes metodológicos del área de Educación Comparada y de la Historia Oral. Los resultados indican diferentes concepciones de Educación Matemática y semejanzas entre las concepciones de formación de profesores. Tales resultados, ayudan a ampliar la comprensión sobre esta faceta de la formación de profesores, que se da en el ámbito de políticas públicas de formación continuada a gran escala, lo que puede contribuir para la (re)elaboración de tales acciones.

Palabras clave: Educación Matemática, formación continua de profesores, políticas educacionales, GESTAR II, CFD, Historia Oral.

Introducción

Este artículo presenta los resultados de una investigación relacionada a dos políticas públicas de formación continua de profesores que enseñan matemática el programa *Gestão da Aprendizagem Escolar* (GESTAR II) de Brasil y el Curso de Formación Docente (CFD) de El Salvador. A continuación se presenta una breve descripción de los programas, la metodología utilizada y los principales hallazgos de la investigación.

Sobre los programas de formación

La descripción que se realizará en los siguientes párrafos está basada en los documentos oficiales *Programa Gestão da Aprendizagem Escolar II: Guia Geral* (BRASIL, 2010) y Plan Nacional de Formación de Docentes en servicio en el sector público (EL SALVADOR, 2014) emitidos por los Ministerios de Educación de Brasil (MEC) y de El Salvador (MINED) respectivamente.

El programa de *Gestão da Aprendizagem Escolar II* (GESTAR II)

El programa de *Gestão da Aprendizagem Escolar II* (GESTAR II) es un programa federal de educación continua para los profesores de matemática y de portugués realizadas por la Secretaría de Educación Básica del Ministerio de Educación de Brasil (MEC) y tiene como objetivo actualizar los saberes profesionales de los maestros que actúan desde el sexto al noveno año de Educación Básica (once a catorce años de edad) de las redes públicas de Educación: distrital, municipal y estatal.

El GESTAR II está compuesto por dos cursos: Curso de Formación de Profesores Formadores/Tutores y Curso de Formación de Profesores para cada una de las áreas. Los dos cursos se desarrollan de manera semipresencial coordinado por profesores de Instituciones Educativas Superiores (IES). El Curso de Formación de Profesores Formadores/Tutores (CT) está dirigido a los profesores efectivos de la red pública de Educación y es impartido por docentes vinculados a las Universidades Públicas participantes. La carga horaria total es de 300 horas, así distribuidas: 104 horas presenciales con 40 horas de formación inicial; dos seminarios de seguimiento de 24 horas cada uno; un seminario de evaluación, y; 196 horas de actividades que involucran monitoreo a los cursistas, estudios y actividades a distancia, para cada área temática. El Curso de Formación de Profesores (CP) es dirigido a los profesores del sector público en ejercicio que enseñan matemáticas y el idioma portugués entre el sexto y noveno año de Educación Básica siendo impartido por los profesores Formadores/Tutores. La carga horaria total es de 300 horas, así distribuidas: 120 horas presenciales con 80 horas de talleres; 40 horas para la elaboración del proyecto y seguimiento pedagógico, y; 180 horas de actividades que involucran su participación en el papel de orientadores, trabajos y estudios a distancia para cada temática.

El Curso de Formación Docente en El Salvador (CFD)

El Curso de Formación Docente en El Salvador (CFD) es un proyecto del Ministerio de Educación (MINED) que tiene por objetivo la "construcción de un Sistema Nacional de Desarrollo Profesional Docente" que permita superar el "retraso académico y científico del cuadro docente nacional". El CFD consiste en dos cursos de formación continuada dirigidos a los docentes del sector público de las distintas disciplinas que se ofrecen en el sistema escolar. El CFD se ejecuta en tres etapas: "constitución de los núcleos de expertos", "curso de formación de los docentes especialistas" y el "curso de formación de los profesores del sector público".

La primera etapa, la constitución de los núcleos de expertos, es hecha por el MINED y consiste en la elección de "expertos disciplinares formadores". Estos expertos son un grupo de profesionales destacados en su especialidad que son los encargados de diseñar los planes de estudios para los cursos de formación y materiales de trabajo, y desarrollar el "Programa de Formación de los Docentes Especialistas".

El "Programa de Formación de los Docentes Especialistas" (PFE) es la segunda etapa del Plan y es dirigido a un grupo de profesores del sector público. El curso tiene una duración de dos años, con ocho módulos específicos. Cada módulo tiene una duración de 120 horas, desarrolladas de manera intensiva durante ocho semanas distribuidas de la siguiente manera: Fase presencial de 64 horas durante ocho sábados consecutivos; Fase no presencial de 24 horas de tutoría virtual por el experto disciplinar e interacción con otros recursos, y; 32 horas de práctica en el aula donde implementará los procesos y estrategias desarrolladas en los módulos. El docente especialista deberá llevar un registro en una cartera de evidencias.

El objetivo principal del PFE es el de constituir el grupo de expertos que desarrollaron la tercera etapa del Curso, que pretende llegar a todo el cuadro docente del país a través del "Programa de la Formación de los Profesores del sector público" (PFP). El PFP se dirige a todos los profesores que trabajan en el sector público en los centros educativos. El PFP también tiene una duración de dos años, con ocho módulos específicos. Cada módulo tiene una duración de 120 horas, desarrolladas de manera intensiva durante ocho semanas así distribuidas: Jornadas presenciales: ocho sábados y ocho horas por sesión, haciendo un total de 64 horas; Jornadas no presenciales: tiene una duración de 56 horas, y; 24 de ellas serán ejecutadas en la sala virtual por el especialista y 32 horas de práctica en su propia aula.

Metodología

Se decidió realizar una investigación de tipo cualitativa con apoyo de los documentos oficiales de los programas y de entrevistas. En el caso de las entrevistas se entrevistó personas que hayan tenido una participación importante en la construcción, diseño, implementación y seguimiento de los cursos en cada país; es así que se elige para el caso del GESTAR II al Dr. Cristiano Muniz, coordinador general del curso en Matemática así como formador y autor de libros de formación, para el caso del CFD se eligió al ing. Carlos Canjura quien fue autor de muchos libros y que impulsó el programa desde el Ministerio de Educación que dirigió en el período 2014-2019. Además, se consideraron para esta investigación los aportes metodológicos de la Educación Comparada y la Historia Oral. Los alcances de estas metodologías en esta investigación se desarrollan a continuación.

La comparación, según Bonitatibus (1989), es examinar dos o más cosas al mismo tiempo y buscar elementos de semejanza y diferencia entre ellas. Trojan y Sánchez (2009, p. 2), por su parte, dicen que comparar es “confrontar, establecer relaciones entre dos o más objetos con la finalidad de emitir juicios de valor”. El uso inicial de la comparación, según Gonçalves (2013), era la herramienta que tenían los Estados para recopilar información sobre políticas “correctas” y “equivocadas” que eran desarrolladas por otros, así mismo en el plano pedagógico, los estudios comparados tenían como objetivo enriquecer los conocimientos pedagógicos sobre distintos políticas educativas a modo de medir su impacto y para evitar errores que otras naciones cometen al abordarlos (TROJAN y SÁNCHEZ, 2009, p. 4). Sin embargo, en esta afirmación de Trojan y Sánchez se fundamentan muchas críticas a los estudios comparados en la educación ya que en muchas ocasiones estos son frecuentemente utilizados por los organismos internacionales como una forma de jerarquizar sistemas educacionales, programas de formación e incluso países. Es por ello que, ante la carga conceptual que conlleva el término “comparar” y la casi inevitable jerarquización que puede surgir, es que se expone que este estudio no buscó jerarquizar en términos de eficiencia o eficacia de los programas, sino que se buscará con esta metodología una mayor comprensión sobre estas políticas de formación docente y como el contexto incide en su construcción.

Ante la intención de dar un nivel mayor de profundidad de los cursos en cuestión que permitieran mirar los programas desde otras aristas, desde otras perspectivas es que se decidió realizar entrevistas con los impulsores de ambos programas de formación. Es así que surge la incursión de esta investigación en la Historia Oral como herramienta metodológica.

Para Garnica (2013, p. 88) hablar de "Historia Oral" ya es una expresión simplificada y "sería mejor decir 'la constitución de fuentes de estudio a partir de la oralidad' o, 'la elaboración de fuentes, a partir de la oralidad, que pueden disparar un ejercicio historiográfico'.

En lo referente al método Garnica (2013, p. 102) expone que un trabajo de Historia Oral tiene dos momentos y que podrían "ser marcados en dos niveles: uno relativo a la recolección de los testimonios y el otro, subsecuente, relativo al tratamiento de las informaciones recolectadas". El primer momento hace referencia a los preparativos previos antes y durante la entrevista, entre estos preparativos está la elección de los declarantes, el número de entrevistas, de las preguntas o frases de las entrevista, el lugar de la entrevista. En un segundo momento el investigador decidirá el tratamiento, uso y análisis de los testimonios. Para el tratamiento de las entrevistas existen dos fases: la *transcripción*, en la cual se registra por escrito el material grabado y la *textualización* que busca retirar las "marcas y los vicios propios de la oralidad".

Con esto en mente, se decidió realizar dos entrevistas con los responsables de los programas, uno para cada país. Para el caso del GESTAR II se entrevistó al Dr. Cristiano Muniz, coordinador del área de Matemática, autor de materiales del GESTAR II y profesor y supervisor del mismo. En el caso del CFD salvadoreño se entrevistó al Ing. Carlos Canjura, autor de varios materiales de formación, formador en el programa y propulsor del CFD desde su papel como Ministro de Educación de El Salvador.

Principales hallazgos

En esta sección se traen algunas observaciones acerca de ambos programas que permitirán ampliar la comprensión acerca de las concepciones de políticas públicas de formación de profesores a gran escala y de la Educación Matemática presente en cada uno de los programas. Se observa que, anclados en los aportes metodológicos de la Educación Comparada, es fundamental que tal comprensión no sea desvinculada de consideraciones sobre el contexto de cada uno de los países.

El Salvador y Brasil tienen contextos históricos, geográficos y políticos administrativos bastante distintos, sin embargo, el modelo utilizado de formación es bastante similar, es decir, la construcción de una red, en la que un formador/experto es responsable de la formación de los tutores/especialistas y éstos son responsables de la formación de un grupo de profesores. Esta formación se moviliza por medio de materiales didácticos y en cursos de larga duración.

Es importante observar que tal diseño trae ventajas y desventajas, dependiendo mucho más de la forma de ejecución del programa que del propio diseño. De dicho modelo se puede verificar que si es vinculado a una concepción constructivista de formación (FIORENTINI, 2008), es posible alcanzar a una gran cantidad de personas de forma presencial, formando una red de formadores/expertos y tutores/especialistas con gran potencial de dar continuidad a grupos de estudios en sus lugares de trabajo.

En los documentos de ambos programas se enfatiza la reflexión en el contexto que se opera indicando la necesidad que parte de la formación continuada se dé en el aula. Por otro lado, la adopción de materiales previamente estructurados disminuye la participación docente en su proceso formativo, ampliando la característica indeseable *top-down*. El profesor Cristiano Muniz, en su entrevista, reconoce que, tal modelo podría ser superado:

> E outro desafio que nós temos, se você me pergunta: "*Cristiano, se você hoje for chamado para fazer uma continuidade do GESTAR, como é que você faria?*" Eu chamaria os professores da escola para criar novas unidades, novos CTP´s. [...] Ele ser o autor [...].

Podemos caracterizar los programas como intentos de promover una reflexión a gran escala con todos los profesores, basados en sus contextos. Ambos programas permiten e indican esa necesidad en su estructura. Sin embargo, cabrá a los formadores que actúan junto a los profesores dar movimiento a la reflexión, invitando y estimulando a los profesores a discutir sus propias prácticas. Los materiales estructurados dan pistas en la dirección de comprender que la Educación Matemática está presente en tales programas. En el caso de GESTAR II la definición de los contenidos del currículo del curso de matemáticas tiene como base los Parámetros Curriculares Nacionales (PCN) de los años finales de la enseñanza fundamental. En el caso del CFD, los materiales están construido según lo decidió el grupo de expertos quienes decidieron no tomar como referencia el currículo nacional. Con el fin de ilustrar cómo los contenidos matemáticos se articulan en los cuadernos de formación se presenta a continuación un resumen del desarrollo del tema "ecuaciones lineales" en cada uno de los programas.
En el caso del GESTAR II, la temática "sistemas de ecuaciones lineales" está desarrollada en la unidad 23 y gira en torno al tema "alimentación y salud". En las primeras páginas se presenta el tema haciendo algunas consideraciones teóricas. La unidad está dividida en tres secciones: en la primera sección "muestra cómo las situaciones de la vida real generan problemas que pueden ser resueltos por un sistema de dos ecuaciones de grado uno con dos incógnitas", la segunda sección "trata de la resolución de estos sistemas" y la "tercera" muestra cómo estas cuestiones pueden abordarse en el aula "(BRASIL, 2008, p. 112).
La sección 1, "Resolución de situación-problema", comienza con un texto sobre la importancia de la alimentación adecuada a las necesidades y las actividades diarias, en ella hay una discusión sobre aspectos tales como: ¿qué son las calorías y para qué sirven?, el uso de calorías en los humanos y distintos animales y el índice de masa corporal. La sección termina presentando una situación-problema tal como aparece en la figura 1:

Rui gosta de feijão e de peixe e tem facilidade para obter esses alimentos. Ele procura ingerir 1880 calorias por dia, tomando como base os dois alimentos. Olhando em uma tabela, verificou que: 100 g de feijão fornecem 330 calorias; 100 g de peixe fornecem 70 calorias. Ele concluiu que: 1 grama de feijão fornece 3,3 calorias; 1 grama de peixe fornece 0,7 calorias.
Para ter o total de 1880 calorias, o que Rui pode fazer?

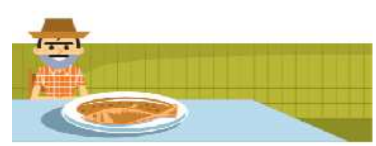


Figura 1. Construyendo sistemas lineales a partir da Realidad. Matemática e nutrición
Fuente: MEC, 2008, Cuaderno TP6, p. 115.

Después de la presentación de esta situación problema, la sección 2, "Construcción del conocimiento matemático en acción", retoma la situación anterior, en la cual se describe cómo Rui pensó para responder utilizando una ecuación de dos variables:

Rui pensou em comer: x gramas de feijão, que lhe dariam x.3,3 calorias (ou 3,3x); y gramas de peixe, que lhe dariam y.0,7 calorias (ou 0,7y)
O total deveria ser 1880, portanto 3,3x + 0,7y – 1880.
Rui tentou resolver esta equação, mas descobriu que haveria muitas soluções para ela. Conforme comesse um tanto de feijão, ele teria que comer determinada quantidade de peixe para completar as calorias. Rui não gostou daquilo: todo dia anotar quanto tinha comido de feijão e calcular para ver quanto faltava comer de peixe. Queria uma solução mais prática.
Figura 2. Orientando la solución de la Situación-Problema.
Fuente: (Ibid, p. 116-117).

La autora finaliza esa situación-problema invitando al lector a buscar otra solución del problema del Rui. Esta parte finaliza aportando algunos datos de tipo teórico sobre lo que son los sistemas de ecuaciones lineales. La sección aún contempla los tres métodos algebraicos para resolver estos sistemas de ecuaciones: sustitución, comparación y adición, la representación gráfica, discusión de sistemas y el uso de la metáfora de la balanza como recurso didáctico.
En el caso del CFD, la unidad comienza describiendo el concepto de ecuación y las distintas expresiones algebraicas que pueden representar una ecuación. Se discute sobre la importancia de la idea de la noción de ecuación y la muestra como un factor que, si no es comprendido, dificulta su resolución, además de presentar la visualización de las ecuaciones en el plano (EL SALVADOR, 2015: 47). La sección invita entonces a los profesores a demostrar algunas propiedades haciendo uso de las propiedades de la igualdad y de los axiomas de campo del conjunto de los números y utilizarlos para luego solicitar a los profesores las debidas justificaciones (Figura 3).

Paso	Justificación
$5x - 7 = x + 1$	
$(5x - 7) + 7 = (x + 1) + 7$	
$5x = x + 8$	
$5x - x = x + 8 - x$	
$4x = 8$	
$(4x) \cdot \frac{1}{4} = 8 \cdot \frac{1}{4}$	
$x = 2$	

Figura 3. Módulo I - Álgebra dos Números Reais e Complexos.
Fuente: EL SALVADOR, MINED (2015), CFD-M, M1 Especialistas, p. 47.

Para cerrar esta sección se presenta, a manera de ejemplo, el siguiente problema: "En un corral hay gallinas y conejos. Hay 35 animales en total. Entre ellos hay 108 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay? Para la resolución de este problema el autor llama "x" al número de gallinas, y, consecuentemente, el número de conejos de "35 - x"; finalizando con la resolución del problema, en estos términos. (ibid., página 48). A partir de la ecuación de la situación, el autor solicita al profesor justificar los pasos que seguirá para llegar a la respuesta del problema. Esta sección termina desarrollando otro problema parecido al anterior. La sección aún contempla inequidades y ecuaciones cuadráticas, el método de la eliminación de Gauss y la discusión de sistemas.
Se observa en la conducción de las actividades concepciones diferentes de Educación Matemática. En el caso de GESTAR II hay una preocupación en lo que se refiere a cuestiones didácticas, que se nota en la introducción a partir de un problema no usual, en la discusión de diferentes resoluciones, en la utilización de diferentes representaciones, teniendo en vista que

hay mención a la representación gráfica y en la discusión de metáforas como recurso didáctico. En el caso del CFD, se observa que existe una preocupación por el rigor matemático, teniendo en vista que el capítulo comienza con la discusión sobre propiedades y su justificación matemática, habiendo aún, una mayor profundización con la presentación del método de la eliminación de Gauss, debido al hecho de que el CFD también apunta a alcanzar profesores de educación media. La concepción de Educación Matemática en el GESTAR II es así descrita por el profesor Cristiano:

> O referencial teórico que a gente tem são, primeiro, a teoria do currículo em rede, [...] Ou seja, que o conhecimento se dá numa visão mais complexa e não linear e que você pode ter diferentes entradas [...]. Segundo, nós trabalhamos com a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. [...]A gente busca também, busca bastante dentro da perspectiva do Brousseu, a Teorias das Situações [...] E outro elemento importante que o Brousseau traz e o Chevallard também traz é a ideia da institucionalização [...]
> E nós temos ali um pouco de Duval, [...] a questão de representação e que de repente tudo o que a gente fala de aprendizagem estão baseados nos objetos matemáticos e os objetos não são exteriores aos sujeitos, os objetos matemáticos são conceitos, são representações mentais.

Se observa entonces, una presencia de la Didáctica Francesa en el programa GESTAR II, característica bastante presente en la Educación Matemática brasileña, teniendo en vista su histórico de constitución, que presenta varios profesores que tuvieron su formación en Francia, entre ellos el propio profesor Cristiano Muniz.
El CFD, presenta un carácter en el que predomina el contenido matemático en detrimento de cuestiones metodológicas, como se puede observar en la lectura de los materiales de formación. No hay explícitamente una vertiente teórica, lo que es reafirmado por el Ing. Carlos Canjura, cuando afirma:

> […] todas las teorías que hasta ahora tenemos son teorías importantes, todas, [...] hasta la conductista; hay momentos, en los que sí es importante. Claro, pero una componente chiquita, pero si tiene y está presente por ahí. Usted no puede decir jamás que no le interesa que el cipote[1] memorice, usted no puede tampoco decir que nunca va en el aula a buscar una forma de construir un concepto, a usar toda la línea de constructivista de conocimiento pero, yo creo que todo debiera estar referido […] lo que le estoy queriendo decir es que nosotros debemos hacer uso de todas estas teorías para efecto de conseguir lo que llamo lo fundamental: construcción del ciudadano (golpes a la mesa) con capacidades productivas y capacidades ciudadanas. Hay quienes lo hacen con ciertas teorías, hay quienes que lo hacen con otras [...] Entonces, yo creo que aferrarse a un modelo nunca es bueno, [...] creo que sí se tienen referencias, (eso es) lo más importante.

Se observa en el discurso del Ing. Carlos Canjura y en el del profesor Cristiano Muniz un distanciamiento entre las concepciones de Educación Matemática presentes en los programas estudiados. Ciertamente, el histórico de la constitución del área de Educación Matemática en los

[1] Cipote: término coloquial utilizado en El Salvador para referirse a los niños.

dos países y la cantidad de recursos humanos, se refleja en la construcción de tales políticas desde el punto de vista pedagógico y debe ser tenido en cuenta para un análisis más profundo.

Conclusiones

Esta comunicación tuvo como finalidad presentar y discutir los resultados de la investigación que analizó las concepciones de Educación Matemática y de formación de profesores presentes en dos políticas públicas de formación continua de profesores que enseñan matemáticas: el programa *Gestão da Aprendizagem Escolar* (GESTAR II) de Brasil y el Curso de Formación Docente (GESTAR II) (CFD) de El Salvador. Se destaca que desde el punto de vista operacional, tales programas se asemejan en el intento de constituir una red de formación, con cursos de larga duración, articulados en torno a materiales de formación estructurados. Entre las actividades de estos cursos, se destacan las realizadas en el aula, potenciadoras de reflexiones sobre la relación entre teoría y práctica. Entendemos que esta configuración puede servir de ~~una~~ tendencia a perseguir en países que necesitan movilizar la formación continua de profesores a gran escala. Sin embargo, la concepción de Educación Matemática presente en ambos programas se distancia. El programa brasileño está marcado por la Didáctica Francesa, mientras que el programa salvadoreño no presenta marcas claras de una u otra tendencia internacional. Es posible que tal distanciamiento se deba al histórico de construcción del área de Educación Matemática en ambos países y por la especificidad de los recursos humanos.

En la búsqueda de ampliación de la comprensión de los límites y potencialidades de tales programas se indica la necesidad de incrementar las investigaciones relacionadas a las políticas públicas de formación de profesores a larga escala, desde el punto de vista operacional, hasta el punto de vista pedagógico. La investigación aquí relatada es un esfuerzo en ese sentido que apunta, además de la comprensión, la ampliación del diálogo entre países que poseen históricos de constitución del área de Educación Matemática distintos, sin que ello signifique la importación de modelos, sino la reflexión conjunta, respeto al contexto, con miras a la cooperación entre investigadores, formadores, profesores y gestores.

Referencias y bibliografía

Brasil. (2008). *Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR II: Matemática, caderno de teoria e prática 6.* Brasília.

Brasil. (2010). *Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR II: Guía GERAL*. Brasilia.

El Salvador. (2014). Plan Nacional de Formación de Docentes en servicio en el sector público. San Salvador.

El Salvador. (2015).Especialización docente tercer ciclo y media: Matemática, módulo 1. San Salvador.

Bonitatitus, Suely Grant.(1989). Educação Comparada: conceito, evolução, métodos. São Paulo.

Fiorentini, D. A. (2008). *Pesquisa e as Práticas de Formação de Professores de Matemática em face das Políticas Públicas no Brasil*. Bolema, ano 21, n° 29, p. 43-70.

Garnica, Antonio Vicente (2013). *História Oral e Educação Matemática*. In: Borba, M.C.; Araújo, J.L.; Fiorentini, D.; Garnica, A.V.M.; Bicudo, M.A.V. *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*, 87-109.

Gonçalves Carvalho, E. J. (2013). Reflexões sobre a importância dos estudos de educação comparada na atualidade. HISTEDBR On-line, Campinas, nº 52, p. 416-435, SET 2013.

Trojan, R. M; Sánchez, M. M. (2009). *EDUCAÇÃO COMPARADA: considerações teórico-metodológicas no contexto da globalização. Brasil.*

A formação continuada em matemática no pacto nacional pela alfabetização na idade certa

Rute Cristina Domingos da **Palma**
Universidade Federal de Mato Grosso
Brasil
rutecristinad@gmail.com
Daniela Maria Almeida de **Lima**
Universidade Federal de Mato Grosso
Brasil
danielafelau@hotmail..com
Suelene **Rezende**
Universidade Federal de Mato Grosso
Brasil
suhrezend@gmail.com

Resumo

O Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) foi instituído pelo governo Federal no Brasil, através da Lei 12.801/2013, com o objetivo de alfabetizar as crianças até 8 anos de idade, ao final do primeiro ciclo do Ensino Fundamental, e tem como eixo principal a Formação Continuada dos Professores. Esta pesquisa objetiva compreender o que narra um grupo de professoras sobre o processo formativo e as influências nas práticas pedagógicas que desenvolvem nos anos iniciais. Para este estudo qualitativo, utilizou-se, para a produção de dados, um questionário de caracterização e uma entrevista semiestruturada. A partir da análise dos dados, as professoras indicam pontos que dificultam um melhor aproveitamento da formação e destacam como aspectos positivos a aprendizagem da sequência didática e de jogos matemáticos. Considerando os dados analisados entende-se que a proposta de Formação Continuada precisa estar centrada na escola e inserida num movimento de investigação e reflexão.

Palavras chave: Formação Continuada, professores, matemática, PNAIC, narrativas.

É consenso, entre os pesquisadores da educação, que a formação do professor é contínua ao longo da vida e se relaciona com as práticas pedagógicas e institucionais, com as políticas públicas de ensino e com a busca de soluções para as adversidades encontradas na profissão.

Dessa forma, no exercício da docência, muitas são as experiências de Formação Continuada que os professores vivenciam. Interessa-nos aqui discutir a percepção de um grupo de professoras sobre um projeto de Formação Continuada desencadeada pelo Ministério da

Educação, o Pacto Nacional para Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), que visava alcançar professores que atuavam na Educação Básica, especificamente, professores alfabetizadores.

Cabe destacar que a proposta de formação desencadeada pelo PNAIC apresentava uma formatação que, segundo Gatti e Barreto (2009), caracteriza-se como "um modelo 'em cascata', no qual o primeiro grupo de profissionais é capacitado e transforma-se em capacitador de um novo grupo que por sua vez capacita um grupo seguinte" (p. 202).

Neste texto apresentamos a percepção das professoras sobre o processo de formação do PNAIC e suas contribuições para a prática pedagógica.

Formação continuada

O professor, ao longo da carreira docente, nas diversas fases da vida profissional, "o início da carreira, o processo de desenvolvimento e os tempos mais avançados em que o professor consolida sua experiência profissional", tem a necessidade de investigar e encontrar soluções constantemente, em "um movimento orientado a responder diversos desafios" (Gatti & Barreto, 2009, p. 203), enfrentados na atividade docente.

Concernente a isso, no que tange ao exercício da atividade docente,

> Saber por que se ensina, para que se ensina, para quem e como se ensina é essencial ao fazer em sala de aula. O professor precisa estar em constante formação e processo de reflexão sobre seus objetivos e sobre a consequência de seu ensino durante a formação, na qual ele é o protagonista, assumindo a responsabilidade por seu próprio desenvolvimento profissional. (Paiva, 2013, p. 92)

Nesse sentido, observamos a necessidade de os processos formativos possibilitarem aos professores a ampliação e a ressignificação das teorias e da reflexão sobre a prática educativa "em um contexto em que a participação, a interação, o diálogo, a colaboração, a troca de conhecimentos e experiências sejam privilegiados" (Palma, 2013, p. 47).

Contudo, sem dúvida, um dos muitos desafios da formação consiste em promover uma abordagem que privilegie as dimensões coletiva, contextual e organizacional. Sobre isso, Garcia (1999) sinaliza que essa abordagem "deve ser orientada para a mudança" (p. 137) e apresentar-se numa perspectiva de "implicação e de resolução de problemas escolares a partir de uma perspectiva que supera o caráter tradicionalmente individualista das actividades de aperfeiçoamento dos professores" (p. 137).

Compreendemos, assim, que importa propor e desenvolver uma Formação Continuada, tomando como princípio o contexto em que ela se realiza, nas suas múltiplas dimensões (administrativas, pedagógicas, políticas, etc.), como uma de suas mudanças mobilizadas por ações coletivas.

Ainda, neste viés, e considerando especificamente as formações voltadas para a área da matemática, "as pesquisas vêm evidenciando a necessidade de que, em programas de formação, os conteúdos matemáticos sejam visitados e revisitados, mas é necessário pensar sob que olhar isso deveria acontecer" (Nacarato & Paiva, 2013, p. 14). É fundamental que esse processo possibilite, dentre outras ações, o aprofundamento teórico, a reflexão sobre as práticas pedagógicas e a elaboração de propostas inovadoras.

Dessa forma, acreditamos que a Formação Continuada, no que se refere à matemática, precisa configurar-se em espaços de discussão que potencializem a organização das práticas pedagógicas dos professores participantes e, consequentemente, promovam o aprendizado dos alunos ao longo do processo de escolarização.

O pacto nacional pela alfabetização na idade certa

O Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) é um programa do Ministério da Educação (MEC) que conta com a participação articulada entre o Governo Federal, os Governos Estaduais e Municipais e o Distrito Federal, objetivando alfabetizar plenamente todas as crianças até 8 anos de idade, apresentando como referência o Decreto nº 6.094, de 24 de abril de 2007 e a Meta 5 do PNE.

O PNAIC ofereceu Formação Continuada em grande escala, sendo considerado o maior programa de formação de professores já desenvolvido pelo MEC, tanto pela abrangência da maioria dos municípios brasileiros, como pelo número de professores participantes. O pacto foi implantado em 2013, em todos os municípios e estados do Brasil, com discussões sobre a Alfabetização e, no ano seguinte, sobre a Alfabetização Matemática.

No caderno de Matemática do Pacto (Brasil, 2012a), a contribuição para o aperfeiçoamento profissional dos professores alfabetizadores foi constituída por um conjunto integrado de ações, materiais e referências curriculares e pedagógicas disponibilizado pelo MEC, tendo como eixo principal a Formação Continuada de professores alfabetizadores.

As ações do Pacto apoiaram-se em quatro eixos de atuação, segundo o documento oficial (Brasil, 2012a, p. 8): 1. Formação Continuada presencial; 2. Materiais didáticos, obras literárias, obras de apoio pedagógicos, jogos e tecnologias educacionais; 3. Avaliações sistemáticas; e 4. Gestão, controle social e mobilização.

Para o desenvolvimento da formação em matemática, foram elaborados os cadernos de Formação em Alfabetização Matemática, denominados: Organização do trabalho pedagógico (8 horas); Quantificação, registros e agrupamentos (8 horas); Construção do sistema de numeração decimal (12 horas); Operações na resolução de problemas (12 horas); Geometria (12 horas); Grandezas e medidas (12 horas); Educação estatística (8 horas); Saberes matemáticos e outros campos dos saberes (8 horas); Educação matemática no campo (8 horas); Educação Matemática inclusiva (8 horas); Jogos na alfabetização Matemática (8 horas).

A formação foi operacionalizada em encontros mensais entre os Professores Formadores (PF), selecionados pelas universidades públicas brasileiras, e professores Orientadores de Estudos (OE), selecionados pelos municípios, a partir de critérios estabelecidos pelo MEC. Do processo de formação participaram os professores alfabetizadores que estavam atuando nos três primeiros anos do ensino fundamental, em escolas públicas das diversas regiões do País. O curso de Alfabetização Matemática foi organizado em 8 unidades, totalizando 80 horas, distribuídas em encontros semanais ou quinzenais. Ao final da formação ocorreu o Seminário de Encerramento, desenvolvido em 8 horas.

O processo formativo objetivava promover o estudo e a reflexão dos professores alfabetizadores em torno dos cinco Direitos Básicos de Aprendizagem em Matemática recomendados pelo PNAIC da Alfabetização Matemática para Ciclo de Alfabetização (1.º, 2.º e 3.º anos) do Ensino Fundamental, quais sejam: I. Utilizar caminhos próprios na construção do conhecimento matemático, como ciência e cultura construída pelo homem, através dos tempos, em resposta a necessidades concretas e a desafios próprios dessa construção; II. Reconhecer regularidades em diversas situações, de diversas naturezas, compará-las e estabelecer relações entre elas e as regularidades já conhecidas; III. Perceber a importância da utilização de uma linguagem simbólica universal na representação e na modelagem de situações matemáticas como forma de comunicação; IV. Desenvolver o espírito investigativo, crítico e criativo, no contexto de situações-problema, produzindo registros próprios e buscando diferentes estratégias de solução; V. Fazer uso do cálculo mental, exato, aproximado e de estimativas. Utilizar as Tecnologias da Informação e Comunicação, potencializando sua aplicação em diferentes situações.

No que diz respeito ao professor alfabetizador, a orientação é que ele fosse tratado como um profissional em formação em todas as áreas do ciclo de alfabetização. A formação continuada deveria ser norteada pelos princípios orientadores: a prática da reflexividade, a constituição da identidade profissional, a socialização, o engajamento e a colaboração.

Percurso metodológico

A pesquisa caracteriza-se como uma pesquisa de abordagem qualitativa, do tipo estudo exploratório, tendo como contexto de investigação duas escolas da rede pública de educação do município de Cuiabá - Mato Grosso – Brasil que atendem o primeiro ciclo do ensino fundamental.

O cenário da pesquisa foi composto por cinco professoras efetivas, que aceitaram colaborar com esta investigação, caracterizadas na Tabela 1:

Tabela 1

Caracterização das professoras participantes da pesquisa

	Professora 1	Professora 2	Professora 3	Professora 4	Professora 5
Idade	44 anos	33 anos	51 anos	31 anos	46 anos
Ano que leciona	1.º ano	3.º ano	3.º ano	2.º ano	2.º ano
Tempo de atuação	23 anos	12 anos	34 anos	13 anos	25 anos
Formação	Pedagogia	Pedagogia	Magistério Pedagogia	Pedagogia	Pedagogia
Especialização	Psicopedagogia	Psicopedagogia	Psicologia	-	Supervisão e Currículo Escolar

Notas. Dados produzidos através do questionário de caracterização.

Com intuito de compreender o processo de Formação Continuada desenvolvido pelo PNAIC e sua influência nas práticas pedagógicas dessas professoras, no período de maio a agosto de 2017, realizamos, com essas colaboradoras, entrevistas semiestruturadas, que foram transcritas e posteriormente disponibilizadas para que analisassem e fizessem indicações para excluir ou acrescentar alguma informação, se necessário. Contudo, elas não sugeriram modificação alguma. Da leitura das entrevistas, emergiram dados correspondentes a dois eixos temáticos: a formação e as práticas pedagógicas.

Apresentação e análise dos dados

Observamos, nas falas das professoras entrevistadas, a recorrência de alguns aspectos relacionados à formação, especificamente, entre eles, a obrigatoriedade do curso, a sobrecarga de trabalho e o desencontro de informações. Concomitantemente, as professoras destacaram as contribuições que a formação promoveu para a ampliação de suas práticas.

Iniciamos nossa discussão abordando questões referentes à formação proposta no PNAIC, tendo em vista os aspectos evidenciados durante seu desenvolvimento. À princípio emergiram das entrevistas indícios de insatisfação com relação ao formato obrigatório proposto. Ao ser questionada sobre suas primeiras impressões sobre o curso, por exemplo, a Professora 2 (comunicação pessoal, 19 de maio de 2017) relata: "Recebemos a informação que quem não frequentasse o curso não poderia atribuir aula no 1 ciclo. Fomos quase obrigados a fazer o curso", conforme determina o documento: "que o professor alfabetizador que tenha concluído a formação em 2014 permaneça atuando nas turmas do Ciclo de Alfabetização em 2015" (Brasil, 2015, p. 44).

Portanto, ficou claro que as professoras que não participassem do PNAIC não poderiam receber aulas no 1.º ciclo no ano seguinte. Dessa forma, todos que quisessem manter-se atuando nas respectivas classes, obrigatoriamente deveriam estar vinculados à formação, conforme as Orientações para o processo de atribuição de aulas e/ou classes do 1.º Ciclo/PNAIC: "NÃO poderão atribuir aula no 1º Ciclo, os professores que: a) Assinaram o Termo de Compromisso do PNAIC/2013, 2014 e 2015 e depois se recusaram a participar da formação oferecida pela SME/MEC".

A dinâmica do curso incluía estudos teóricos, prática em sala de aula e o compartilhamento dos resultados das ações propostas pelo PNAIC, conforme relata a Professora 2 (comunicação pessoal, 19 de maio de 2017): "Seguíamos uma dinâmica, leitura do texto, apresentação em grupo, preparação das sequência didáticas, exposição das sequências didáticas para o grupo. Retomada do que foi aplicado".

Algumas professoras apontaram, em suas narrativas, aspectos relativos ao tempo que precisavam destinar à formação para seu aproveitamento efetivo. A Professora 2 (comunicação pessoal, 19 de maio de 2017), nessa perspectiva, sinaliza que "para dar certo uma formação assim, o professor precisa de tempo para estudar e se dedicar".

Concomitante a isso, evidencia-se, em algumas falas, um sentimento de sobrecarga, associando às práticas já presentes no processo de atuação pedagógica nas Unidades Escolares, as práticas de estudo, ação e reflexão propostas pelo curso do PNAIC. A Professora 5 (comunicação pessoal, 17 de agosto de 2017), nesse aspecto, aponta que "o difícil do PNAIC é a questão de sobrecarregar o professor. São muitas coisas diferentes em que estamos envolvidos. Até nos propomos a fazer, mais por uma cobrança externa, do que por necessidade de melhorar a aprendizagem das crianças".

Ainda percebemos uma preocupação das professoras com a falta de apoio e orientação nas unidades escolares. A Professora 1 (comunicação pessoal, 12 de maio de 2017) afirma: "Não tínhamos orientação em como proceder na escola. A coordenação não participava das formações, as colegas não socializavam as experiências, era tudo muito confuso". Falas como essa demonstram uma desarticulação entre a escola e o processo formativo, o que possivelmente impactou negativamente na proposta de continuidade prevista pelo curso do PNAIC. Consideramos essa orientação absolutamente necessária para desenvolver com qualidade o processo de formação.

Nesse tocante, compreendemos que a Formação Continuada deve ser pensada e organizada "de maneira a envolver todos os profissionais, centrada nos trabalhos em conjunto com a equipe gestora, professores e funcionários, buscando as soluções para as diversas situações problemáticas vivenciadas na escola" (Schavaren, 2018, p. 58).

Entretanto, apesar dessas afirmações referentes às divergências com relação à obrigatoriedade do curso e à sobrecarga de ações a serem desenvolvidas pelos professores nesse ínterim, aspectos positivos também foram apontados. A Professora 4 (comunicação pessoal, 21 de julho de 2017) afirma que "o PNAIC veio não só para contribuir, mas para trazer uma mudança de atitude por parte dos professores"

Nesse tocante, as contribuições que se destacam nas falas das professoras estão principalmente relacionadas ao desenvolvimento da sequência didática e à inserção ou à releitura do jogo como metodologia de ensino. Como afirma a Professora 2 (comunicação pessoal, 19 de maio de 2017): "No Pacto nós aprendemos a construir jogos de Matemática. Tenho utilizado em sala e os resultados são positivos. As crianças se divertem e aprendem".

Dando continuidade à discussão, elencamos aspectos eminentes do segundo eixo, no que se refere às contribuições da formação do PNAIC para ampliação das práticas pedagógicas das professoras participantes da pesquisa. Nesta perspectiva, algumas narrativas foram significativas, reafirmando a importância da formação como potencializadora no desenvolvimento de práticas inovadoras, como aponta a Professora 1 (comunicação pessoal, 12 de maio de 2017), ao afirmar que *"a* partir do PNAIC passei a fazer a Sequência Didática. Antes ouvia falar sobre, mas foi na formação que eu aprendi a executar mesmo. A socialização foi muito válida também*"*. Ou quando menciona: "Passei a ter outra visão do jogo também. A importância do jogo, por que propor, quando, com qual finalidade". Nesse sentido, a Professora 4 (comunicação pessoal, 21 de julho de 2017) reitera:

> Você não precisa nem ter caderno e nem papel, para você ensinar vários conteúdos de matemática de uma forma prazerosa, brincando, jogando, ou seja, dentro das fases do desenvolvimento da criança, que a gente trabalha com a fase do operatório concreto, que a criança ela precisa sentir, pegar, ela precisa não só visualizar, mas ela usa a questão do tato o tempo todo.

Essas falas indicam que o curso mobilizou aprendizagens para as professoras com relação à prática do planejamento e da avaliação do desenvolvimento desse planejamento, bem como do processo de aprendizagem. No entanto, indica também a necessidade de aprofundamento teórico, metodológico e do conteúdo matemático.

Entendemos, assim, que o processo de Formação Continuada, neste caso, o PNAIC, possibilita ao professor:

> Experiências de aprendizagem através das quais adquirem ou melhoram os seus conhecimentos, competências e disposições, e que lhes permite interferir profissionalmente no desenvolvimento do seu ensino, do currículo e da escola, com objetivo de melhorar a qualidade da educação que os alunos recebem. (Garcia, 1999, p. 26)

Preocupa-nos, no entanto, o fato de que, quando a Professora 3 (comunicação pessoal, 15 de junho de 2017) é questionada com relação as suas impressões sobre os impactos da formação na aprendizagem efetiva dos alunos, ela relata que, ao chegarem ao 3.º ano, turma em que leciona, eles ainda apresentam lacunas, no que diz respeito à aprendizagem da matemática, pois ela "percebe que não houve aquele trabalho de inclusão numérica, sem aquele trabalho de conservação numérica, tem crianças que não conserva quantidade, sempre ela tem voltar. E isso é muito ruim, essas coisas são básicas".

Desse modo, ainda que as professoras sinalizem em suas falas aproveitamento do curso, no que diz respeito à ampliação de repertório metodológico, aspectos divergentes se evidenciam, como a questão da obrigatoriedade, da organização do tempo e da articulação entre formação e escola/gestão. As professoras indicam um sentimento de sobrecarga e de desamparo quanto ao apoio da Escola no processo. Além disso, explicitam o fato de os dados indicarem que a formação não tem impactado na ampliação do repertório dos conhecimentos específicos dos conteúdos matemáticos que as professoras precisam saber para ensinar e nem diretamente na aprendizagem dos alunos, o que, certamente, é o objetivo principal das políticas de Formação Continuada para professoras.

Tendo em vista essas considerações e entendendo que as ações do PNAIC previam como princípios de formação: práticas da reflexividade, constituição da identidade profissional, socialização, engajamento e a colaboração (Brasil, 2012 a ou b?), concebemos que parte dos objetivos estabelecidos não foi devidamente alcançada e que avanços ainda precisam ser propostos.

Considerações finais

A Formação Continuada de professores que atuam no primeiro ciclo, ou seja, professores alfabetizadores, ainda é um desafio no Brasil. O desenvolvimento do PNAIC foi influenciado por muitos aspectos: a formação em "cascata", o perfil do formador, o envolvimento das secretarias de Educação, o envolvimento da equipe gestora da escola, a falta de tempo dos professores para o estudo, dentre tantos outros aspectos.

Consideramos que os professores conseguirão organizar o ensino da matemática e acompanhar a aprendizagem das crianças quando dominarem os conhecimentos matemáticos que precisam ensinar e entenderem como elas aprendem matemática e quais as alternativas metodológicas para ensiná-la. Nesse sentido, os professores precisam ser inseridos num movimento reflexivo que lhes permita a tomada de consciência de quais são os problemas que precisam enfrentar quanto à própria formação, à formação de seus alunos, aos currículos propostos, às políticas públicas de ensino.

Em nossa perspectiva, a Formação Continuada deve estar centrada na escola de maneira que os professores e a equipe gestora possam planejar, desenvolver e avaliar propostas pedagógicas para o ensino da matemática, investigar problemas de aprendizagem dos alunos e de 'ensinagem' dos professores, visando a uma ação contínua de reflexão sobre os processos de ensino e aprendizagem da matemática. Essas ações podem ser desencadeadas de diferentes maneiras, dentre elas, com a colaboração entre os profissionais da escola e os grupos de pesquisadores, configurando uma rede de apoio, estudo e pesquisa.

Referências y bibliografia

Brasil. (2012a). *Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: formação do professor alfabetizador. Caderno de apresentação*. Brasília: MEC, SEB/DAGE.

______. (2015). Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. *Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa. Interdisciplinaridade no ciclo de alfabetização. Caderno de Apresentação*. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB.

______. (2007). Presidência da República. *Decreto n° 6.094, de 24 de abril de 2007.* Dispõe sobre a implementação do Plano de Metas Compromisso Todos pela Educação. Brasília.

Decreto n. 6.094. (2007, 24 de abril). Dispõe sobre a implementação do Plano de Metas Compromisso Todos pela Educação, pela União Federal, em regime de colaboração com Municípios, Distrito Federal e Estados, e a participação das famílias e da comunidade, mediante programas e ações de assistência técnica e financeira, visando a mobilização social pela melhoria da qualidade da educação básica. Brasília, DF: Presidência da República.

Garcia, C. M. (1999). *Formação de professores - para uma mudança educativa.* Porto: Porto Editora.

Gatti, B. A., & Barreto, E. S. S. (2009). *Professores do Brasil: impasses e desafios*. Brasília: UNESCO.

Paiva, M. A. V. (2013). O professor de matemática e sua formação: a busca da identidade profissional. In A. M. Nacarato, & M. A. V. Paiva, (Orgs.), *A formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas* [1](pp.). Belo Horizonte: Autêntica.

Palma, R. C. D. (2013). *Estratégias formativas no curso de especialização em Educação Infantil: em discussão as potencialidades e os obstáculos do trabalho com projetos*. Cuiabá: EdUFMT.

Schavaren, M. B. B. (2018). *O projeto de estudos e intervenção pedagógica (PEIP): o que dizem professores de matemática do Ensino Médio de uma escola estadual de Mato Grosso*. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Dificultades para razonar inductivamente en profesores de secundaria al resolver un problema de generalización

Landy **Sosa** Moguel
Universidad Autónoma de Guerrero
México
landy.sosa@gmail.com
Guadalupe **Cabañas** Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero
México
gcabanas@uagro.mx
Eddie **Aparicio** Landa
Universidad Autónoma de Guerrero
México
eeddie16@gmail.com

Resumen

En este estudio se examinó el razonamiento inductivo en profesores de matemáticas de secundaria, con el objeto de identificar las dificultades que enfrentan al resolver un problema de generalización. Dicho problema consistió en inducir una regla general correspondiente a un patrón de comportamiento cuadrático, y se aplicó a 19 profesores quienes lo resolvieron por escrito de forma individual. Las dificultades halladas radican principalmente en el proceso para establecer el patrón y están asociadas a la observación de una regularidad global entre los datos, al establecimiento de relaciones entre variables y a la abstracción de lo general.

Palabras clave: dificultades, profesores, razonamiento inductivo, resolución de problemas, generalización.

1. Introducción

El razonamiento inductivo es un proceso esencial para generalizar en matemáticas (Castro, Cañadas & Molina, 2010; Pólya, 1966). En el aprendizaje de las matemáticas, es fundamental en la resolución de problemas de generalización, ya que apoya el reconocimiento de regularidades, el establecimiento de patrones, la abstracción y formulación de reglas generales (Haverty, Koedinger, Klahr & Alibali, 2000; Murawska & Zollman, 2015; Mousa, 2017).

En educación secundaria, es necesario que los estudiantes usen razonamiento inductivo para buscar relaciones matemáticas y generalizar distintas clases de patrones (NCTM, 2000). Es por ello que, para entender como favorecer dicho razonamiento en niños y jóvenes, varios estudios han analizado el razonamiento inductivo en la resolución de problemas, y se han enfocado en describir los procesos cognitivos que usan (Christou & Papageorgiou, 2007), la forma en que reconocen patrones en relaciones funcionales numéricas (Haverty, et al., 2000) y las estrategias inductivas que emplean en problemas sobre sucesiones (Cañadas, Castro y Castro, 2008).

No obstante, aun cuando el profesor es el principal actor en promover esta y otras formas de razonamiento en los estudiantes, escasos estudios se han centrado en analizar el razonamiento inductivo en profesores de matemáticas en servicio (Sosa y Cabañas, 2017). Con el interés de contribuir en este tema de investigación, se examinó el uso de dicho razonamiento por profesores de secundaria en la resolución de un problema matemático. El objetivo consistió en identificar las dificultades que ellos enfrentan al resolver el problema, el cual demanda razonar inductivamente para generalizar. La detección de tales dificultades proporciona información que puede orientar a la configuración de programas de desarrollo profesional.

2. Razonamiento inductivo

Filosófica e históricamente, el razonamiento inductivo ha sido una vía de estudio para descubrir principios universales o leyes de fenómenos, los cuales son abstraídos de la observación empírica de hechos particulares (e.g. Pineda, 2009; Poincaré, 1948). Es un tipo de razonamiento que posibilita el paso de los hechos singulares a las proposiciones generales (Frolov, 1984).

Cognitivamente, el razonamiento inductivo es un proceso que involucra inferir conclusiones generales de una totalidad de elementos a partir de un subconjunto de esos elementos (Sriraman & Adrian, 2004). En la literatura sobre el tema, una manera de analizar este razonamiento ha sido elucidando los procesos o fases que permiten pasar de la observación de un conjunto finito de casos particulares a la inferencia de una regla general (e.g. Cañadas y Castro, 2007; Christou & Papageorgiou, 2007; Haverty et al. 2000; Klauer, 1996). Estos estudios han coincidido en señalar que el razonamiento empieza con el trabajo con casos particulares dirigido a la observación de regularidades y se cristaliza en la generalización, como producto del proceso inductivo. Sin embargo, también han reportado que no todos los sujetos alcanzan tal generalización, esto es, extender el patrón a todos los casos de una clase o categoría general.

Es así que, en este estudio la atención estuvo en indagar cómo profesores de secundaria pasan de la observación de una regularidad a la formulación de una generalización, con el objeto de identificar las dificultades en su razonamiento inductivo para efectuar este tránsito.

3. Método

El estudio realizado fue empírico de tipo descriptivo, basado en la comparación y contraste de datos. Estos se obtuvieron por medio de la aplicación y resolución de un problema de razonamiento inductivo que involucraba generalizar una relación entre variables continuas.

3.1. Diseño del instrumento

El problema se diseñó con base en la propiedad genérica de las tareas del razonamiento inductivo: “requerir que el individuo induzca una regla que gobierna un conjunto de elementos” (Glaser & Pellegrino, 1982, p. 200). En éste la regla correspondía a la expresión de una relación funcional que representa la generalización de un patrón de comportamiento cuadrático, esto significa que la variación entre las variables es lineal (Villa, 2008).

El problema consistió en inducir una regla general para determinar la medida del área de cualquier rectángulo de una familia de estos (Figura 1). Para ello, se proporcionó información de tres rectángulos mediante tres puntos en una gráfica cartesiana, cuyas coordenadas representaban las medidas de su base (b) y área (A). La regla general podía inducirse a partir de reconocer el siguiente patrón asociado a las medidas de la base y la altura de los rectángulos: la suma de las medidas de la base y la altura (el semiperímetro) de la familia de rectángulos mide 8 unidades. La expresión algebraica de la regla es de la forma: $A = b(8 - b)$, con $0 < b < 8$.

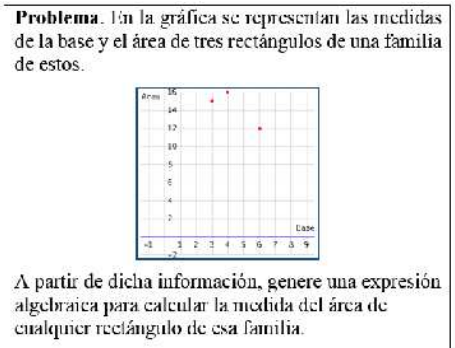


Figura 1. Problema planteado para generalizar usando razonamiento inductivo.

3.2. Participantes

El estudio fue conducido con un grupo de 19 profesores de matemáticas en educación básica (secundaria), en escuelas públicas en México. Ellos contaban con conocimientos matemáticos básicos sobre sucesiones y funciones lineales y cuadráticas, debido a su formación profesional en Escuelas Normales o en alguna ingeniería. Asimismo, enseñan esos contenidos como parte del currículo matemático de secundaria.

3.3. Recolección y análisis de datos

El problema fue planteado a los profesores por escrito y lo resolvieron de manera individual con una duración aproximada de 20 a 30 minutos. Las soluciones de los profesores fueron analizadas primeramente, para reconocer a aquellos que alcanzaron a formular una generalización y expresarla de manera verbal o escrita, y se clasificaron formando dos grupos de profesores, según si lograron generalizar (Grupo 1) o no lo lograron (Grupo 2). Para preservar el anonimato de los profesores, en los resultados se hará referencia a ellos con las letras del alfabeto castellano. Posteriormente, se compararon y contrastaron los procesos de solución de estos dos grupos, a fin de identificar las acciones del razonamiento inductivo que estuvieron ausentes en los profesores del Grupo 2, en relación con las del Grupo 1. Esto permitió identificar dificultades en su razonamiento inductivo para generalizar, las cuales se exponen a continuación.

4. Dificultades para generalizar razonando inductivamente

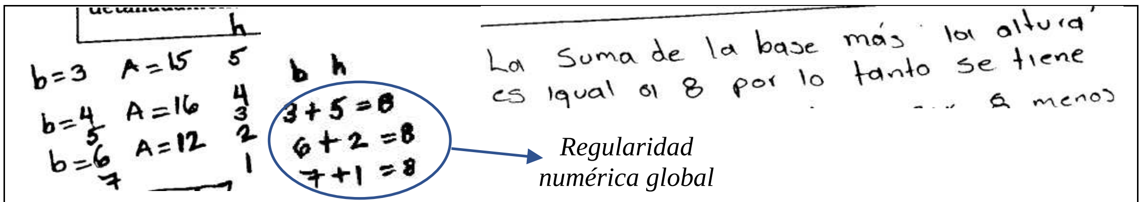
Todos los profesores iniciaron el proceso de razonamiento para la solución del problema mediante la obtención y organización de casos particulares. Esto se realizó interpretando las coordenadas de los puntos en la gráfica cartesiana dada. Así, los profesores obtuvieron los valores 3, 4 y 6 unidades, como medida de la base (b) de tres rectángulos y los valores 15, 16 y 12 unidades cuadradas, respectivamente, como medida de su área (A). Después, determinaron los valores de las alturas (h), utilizando la fórmula para calcular la medida del área de rectángulos: $A = b \times h$. Dichos valores constituyeron los casos particulares observados, y se organizaron en tablas o en columnas de datos. Sin embargo, solamente el 16% de los profesores (3/19) pasaron del trabajo con casos particulares a la obtención de una regla general.

Las dificultades para razonar inductivamente en quienes no alcanzaron generalizar se situaron en el paso de la observación de una regularidad a la formulación de una generalización, especialmente en el establecimiento de un patrón. Se identificaron las dificultades siguientes:

a. Dificultad para reconocer numéricamente una regularidad global

La búsqueda de regularidades para establecer un patrón se centró en el trabajo aritmético entre cantidades y el uso de una estrategia recursiva de cálculo de diferencias, pero se presentaron dificultades para observar una regularidad que englobe varios casos particulares.

Los profesores que reconocieron un patrón y generalizaron adecuadamente, se basaron en la observación de regularidades numéricas de manera global. Ellos establecieron una relación aditiva entre los pares de valores (medidas de la base y la altura) obtenidos de la gráfica y compararon los resultados de la adición de esas medidas globalmente. Así observaron que la suma es igual al valor 8 en todos los casos, independientemente de la variación en los valores de b y h, como puede verse en la solución del profesor A (Figura 2).



[b: base, A: área, h: altura]

Figura 2. Regularidad global observada por el profesor A (Grupo 1).

Por el contrario, los profesores que solamente observan una regularidad localmente, no logran transitar hacia una generalización correcta, pues su razonamiento no trasciende a la observación de una regularidad global, es decir, que relacione y agrupe los casos particulares. Por ejemplo, el profesor D identifica una regularidad geométrica y numérica en los casos particulares. Geométricamente, la regularidad observada es que los puntos de la gráfica son simétricos respecto a un eje vertical. Considera que los puntos corresponden a la gráfica de una parábola vertical y determina puntos simétricos, $(5, 3)$ a $(3, 5)$ y $(2, 6)$ a $(6, 2)$, respecto al eje focal de la parábola (Figura 3). Numéricamente, observa que los valores de la base y la altura de algunos rectángulos son los mismos, pero intercambiados, y así obtiene otros casos particulares tales como: $(7, 1)$ y $(1, 7)$.

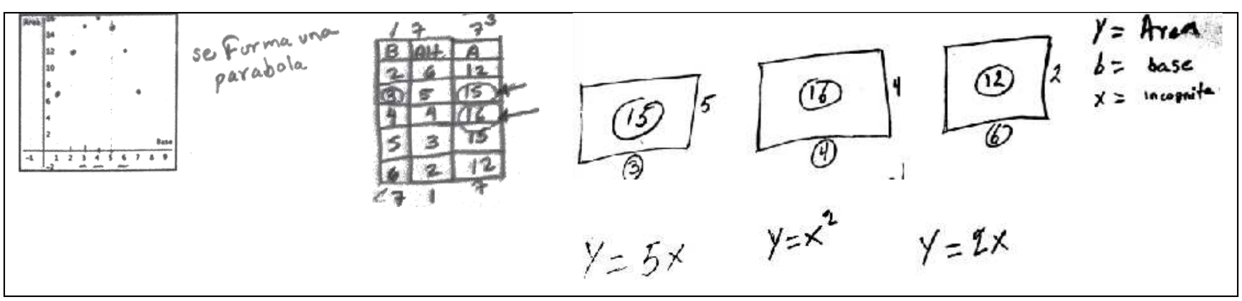


Figura 3. Solución del profesor D (Grupo 2).

No obstante, el razonamiento del profesor se caracterizó por un análisis puntual de los casos particulares, sin mostrar un análisis de qué y cómo se relacionan los pares de valores entre cada caso. Si bien determinó expresiones para la medida del área, éstas eran distintas y no correspondían a la familia de rectángulos en general, sino a cada uno en específico, tal como la ecuación $y = 5x$ para el rectángulo que mide 3 unidades de base y 15 unidades cuadradas de área. Esta dificultad para observar una regularidad global que relacione distintos casos particulares obstaculiza poder establecer un patrón para generalizar inductivamente.

b. Dificultad para asociar una regularidad observada con una estructura matemática

Los profesores que llegan a establecer un patrón son quienes logran asociar una estructura matemática a las regularidades observadas. La dificultad en este proceso consistió en determinar alguna relación matemática entre las variables del problema.

En el caso de los profesores que sí establecieron un patrón, lo hicieron a partir de asociar y representar con una relación aditiva a la regularidad numérica observada entre las medidas de la base y la altura de los rectángulos, y establecer una relación de igualdad entre lo variable (base y altura) y lo constante (el semiperímetro de la familia de rectángulos). Por ejemplo, el profesor A expresó el patrón verbalmente como sigue: "*la suma de la base más la altura es igual a 8*" (Figura 2), mientras que el profesor B (Grupo 1) lo expresó tanto verbal como simbólicamente (Figura 4).

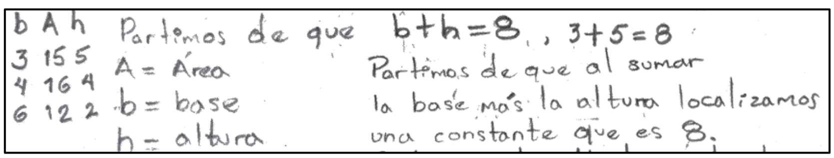


Figura 4. Expresión del patrón mediante una relación aditiva por el profesor B (Grupo 1).

Sin embargo, quienes no logran reconocer una relación matemática que conecte los casos particulares, no alcanzan a establecer el patrón. Esto es porque no identifican una relación que asocie lo variable con lo constante en la situación del problema. Tal fue el caso del profesor F (Grupo 2), por citar un ejemplo. Él trabajó con las medidas de la base (b) y el área de cada rectángulo por separado (Figura 5). Su atención estuvo en la forma de calcular la medida de la altura de los rectángulos, estableciendo una expresión lineal ($y = mx$) para la medida del área de cada uno, pero no identificó alguna relación entre las medidas de los distintos rectángulos para generar una fórmula general con la cual determinar el área de todos los rectángulos de la familia. En otras palabras, no mostró un análisis sistemático que le permitiera relacionar e interconectar las variables del problema en los distintos casos particulares por él considerados.

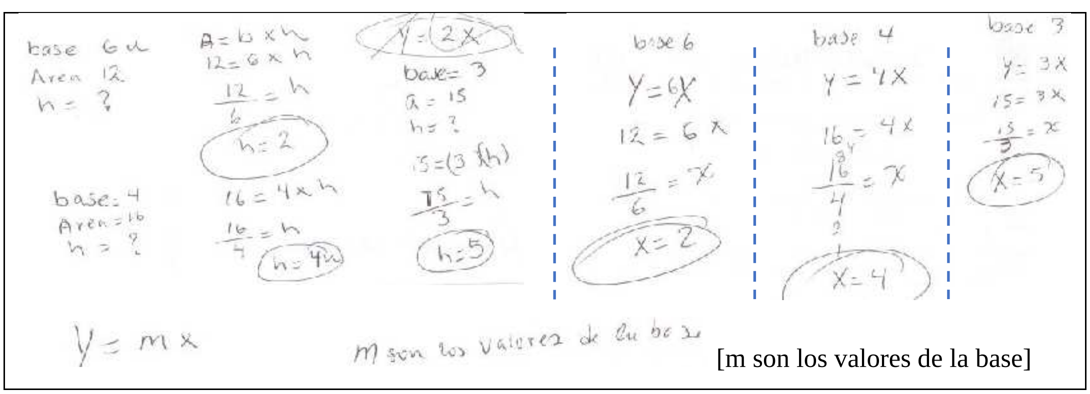


Figura 5. Solución del profesor F (Grupo 2).

Asimismo, se detectó que si la relación establecida entre las variables del problema queda imprecisa, entonces tampoco se llega a establecer el patrón adecuado. Por ejemplo, el profesor E plantea una relación entre los valores de b y h que expresa como sigue "*La b y h varían inversamente. Si la b aumenta una unidad, la h disminuye una unidad*" (Figura 6), pero resulta ambigua debido a que no establece con precisión la relación de dependencia entre tales variables.

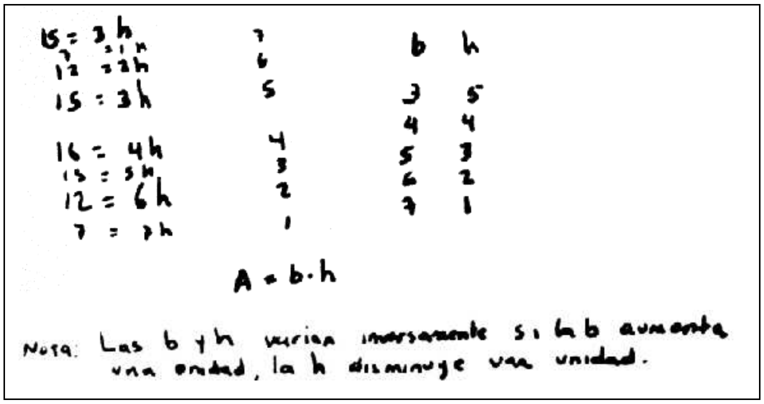


Figura 6. Relación entre los valores de b y h establecida por el profesor E (Grupo 2).

El razonamiento de quienes dieron una solución incompleta o no formularon una regla general para determinar la medida del área de los rectángulos, se caracterizó por no lograr establecer un patrón en los datos. La dificultad para establecerlo se atribuye a la imposibilidad de reconocer relaciones funcionales entre las variables implicadas en el problema. Adicionalmente, se plantea hipotéticamente que tal dificultad también podría ser relativa a la naturaleza covariacional de esas variables. Esto es, a la existencia de una dificultad específica en los profesores para determinar relaciones entre variables continuas que varían simultáneamente.

c. Dificultad para abstraer lo general en lo particular

Una dificultad en los profesores para culminar su proceso inductivo fue abstraer lo general en lo particular. Es decir, descontextualizar o aislar el patrón de la particularidad de los casos analizados y extenderlo a un conjunto que englobe una totalidad de casos, incluso no conocidos.

Los profesores que pasaron del establecimiento de un patrón a la formulación de una generalización evidenciaron la abstracción de relaciones invariantes en las tareas. Por ejemplo, abstrajeron que al variar las medidas de la base y la altura de los rectángulos, la medida de su semiperímetro permanece constante (Figura 7). Asimismo, infirieron que para calcular la medida de la altura de cualquier rectángulo, debían restar 8 unidades a la medida correspondiente a su base. De este modo generaron una regla general para determinar la medida del área de la familia de rectángulos, la cual expresaron como: $A = b(8 - b)$.

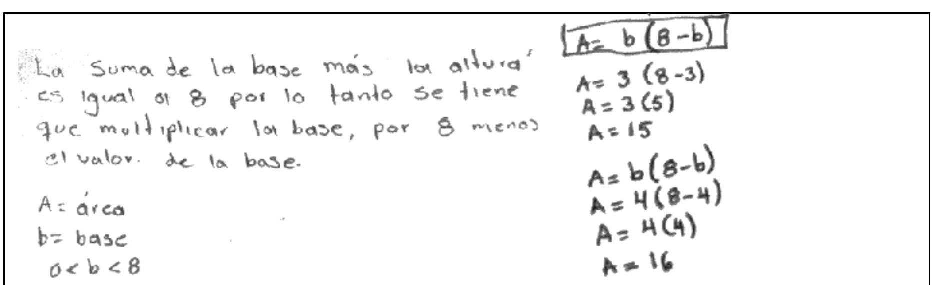


Figura 7. Expresión de la generalización en la solución del profesor A (Grupo 1)

La dificultad para abstraer una relación matemática que relacione y englobe los casos en una clase general, fue centrarse en la particularidad de cada caso de forma separada, tal como puede notarse en la solución del profesor D (Figura 3). Si bien relacionó uno a uno cada par de medidas de la base y el área de los tres rectángulos con su área y, por ensayo y error, le asoció una expresión algebraica, ésta fue distinta para cada rectángulo. No consiguió abstraer las relaciones invariantes entre los datos ni una forma general para determinar la medida del área de cualquier rectángulo de la familia.

Se infiere en este estudio que, ambas dificultades referidas en los apartados anteriores imposibilitan la formulación de una generalización, ya que dificultan abstraer lo general en lo particular.

5. Conclusiones

Una de las tareas importantes de los profesores de educación secundaria es promover el razonamiento inductivo en sus estudiantes. Sin embargo, el diseño y la conducción de actividades para llevar a cabo con éxito esta tarea, puede verse obstaculizada si los profesores carecen de competencias para resolver problemas mediante procesos inductivos. Bajo este supuesto, el propósito de este estudio fue identificar aquellas dificultades ligadas a la producción de generalizaciones de manera inductiva por parte de profesores de secundaria en servicio.

Los resultados muestran que la mayoría de los profesores no logró pasar de la observación de regularidades a la formulación de una regla general, y esto se debió a un conjunto de dificultades que radican esencialmente en el proceso de establecer un patrón de comportamiento cuadrático, particularmente de variables continuas. Si bien se había detectado mayor dificultad en generalizar comportamientos cuadráticos que lineales en estudiantes (Ebersbach & Wilkening, 2007) y profesores en formación (Manfreda et al. 2012), en este estudio se concluye que dichas dificultades en los profesores se hallan por un lado, en la falta de asociación de las regularidades observadas en casos particulares de una situación, con una relación matemática que las describa; y por otro, en la complejidad para abstraer lo general en lo particular, debido a que no se logra reconocer la característica invariante en todos los casos analizados y aquello que norma su comportamiento.

La observación puntual o aislada de lo que se repite en un conjunto de casos particulares resultó insuficiente para que los profesores pudieran establecer el patrón, pues este proceso inductivo requiere del establecimiento de relaciones numéricas entre datos que varían por medio de estructuras matemáticas. Por tanto, se hace necesario que los profesores dispongan de conocimientos para interpretar y representar relaciones entre variables; en especial, para construir la expresión de relaciones funcionales cuadráticas con base en datos numéricos. Esto sugiere que, en experiencias de aprendizaje profesional docente, se favorezca el desarrollo de procesos inductivos para pasar de lo particular a lo general, así como conocimientos basados en el estudio de relaciones matemáticas.

Referencias y bibliografía

Cañadas, M., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3° y 4° de educación secundaria obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, *2*(3), 137–151.

Canadas, M. C., & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67–78. https://doi.org/10.1227/01.NEU.0000032542.40308.65

Castro, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2010). El Razonamiento Inductivo como Generador de Conocimiento Matemático. *UNO, 54*, 55–67. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Christou, C., & Papageorgiou, E. (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction*, *17*(1), 55–66. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.11.009

Ebersbach, M., & Wilkening, F. (2007). Children's intuitive mathematics: The development of knowledge about nonlinear growth. *Child Development*, *78*(1), 296-308.

Frolov, I. (1984). *Diccionario de filosofía.* Moscú: Editorial Progreso.

Glaser, R. & Pellegrino, J. (1982). Improving the skills of learning. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *How and how much can intelligence be increased* (pp. 197-212). Norwood, NJ: Ablex

Haverty, L., Koedinger, K., Klahr, D., & Alibali, M. (2000). Solving Inductive Reasoning Problems in Mathematics: Not-so-Trivial Pursuit. *Cognitive Science*, *24*(2), 249–298.

Klauer, K. (1996). Teaching inductive reasoning: some theory and three experimental studies. *Learning and Instruction*, *6*(1), 37–57. https://doi.org/10.1016/0959-4752(95)00015-1

Manfreda, V., Slapar, M. & Hodnik, T. (2012). Comparison of competences in inductive reasoning between primary teachers students and mathematics teacher students. In B. Maj-Tatsis & K. Tatsis (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels.* Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego

Mousa, M. (2017). The influence of inductive reasoning thinking skill on enhancing performance. *International Humanities Studies*, *4*(3), 37-48.

Murawska, J. M., & Zollman, A. (2015). Taking it to the next level: Students using inductive reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *20*(7), 416–422.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Pineda, O. (2009). Inducción y deducción como origen de la ciencia. *Konvergencias: Filosofía y culturas en diálogo*, *21*, 122-133.

Poincaré, H. (1948). *Science and Method*. New York: Dover Publications.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Sosa, L. y Cabañas, M. G. (2017). Analytical framework to study inductive reasoning in mathematical teachers while solving task. En Galindo, E. and Newton, J. (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1415-1418). Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Sriraman, B., & Adrian, H. (2004). The Pedagogical Value and the Interdisciplinary Nature of Inductive Processes in Forming Generalizations: Reflections from the Classroom The University of Montana. *Interchange*, *35*(4), 407–422

Villa, A. (2008). El concepto de función: Una mirada desde las matemáticas escolares. En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *21*, 245-254. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A.C.

Uso de algunos constructos del modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemático para el estudio de informes de práctica de futuros profesores de matemáticas.

Vicenç **Font-Moll**
Universitat de Barcelona
España
vfont@ub.edu

Yuri **Morales-López**
Universidad Nacional
Costa Rica
ymorales@una.ac.cr

Marianela **Alpízar-Vargas**
Universidad Nacional
Costa Rica
marianela.alpizar.vargas@una.ac.cr

Resumen

El Modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemático ha permitido el abordaje de problemas de la didáctica de las matemáticas y en particular, el análisis didáctico. El objetivo de este taller es utilizar algunos elementos teóricos y constructos del modelo para el estudio de las narrativas de tal manera que se identifiquen o se logre encontrar evidencia de los conocimientos y competencias en los futuros profesores de matemáticas. El trabajo será desarrollado de tal manera que 1. Se expone la narrativa y pautas para análisis, 2. Se tratan de contestar preguntas vinculadas a las competencias y conocimientos evidenciados, y, 3. en una actividad grupal, se comparten las percepciones de los distintos participantes.

Palabras clave: Modelo CCDM; Competencias; conocimientos; futuro profesor; matemáticas.

Use of some constructs of the model of Didactic-Mathematical Competences and Knowledge for the study of practice reports of future mathematics teachers.

Abstract

The Model of Didactic-Mathematical Competences and Knowledge has allowed the approach of problems of the didactics of mathematics and, mainly, the didactic analysis. The objective of this workshop is to use some theoretical elements and constructs of the model for the study of narratives, in such a way that evidence of knowledge and skills can be identified in future mathematics teachers. The work will be developed in the following sequence: 1. the narrative and guidelines for analysis are presented, 2. the participants try to answer questions linked to the skills and knowledge evidenced, and, 3. in a group activity, the perceptions of the different participants are shared.

Keywords: DMKC model; Competences; Knowledge, prospective teacher; mathematics.

Trabajo por desarrollar

El Enfoque Ontosemiótico y el modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemático

Varias de las tendencias actuales en la formación inicial y continua de profesores de matemáticas apuntan al desarrollo de la competencia para el análisis y reflexión de las situaciones que ocurren en el aula. Existen muchas situaciones que merecen interés, por ejemplo, solo en el campo de la formación se pueden mencionar la capacidad de análisis de los profesionales en situaciones video grabadas, la reflexión del planeamiento y el diseño de tareas, el estudio de las reflexiones en portafolios, entre muchos otros.

En este taller se desarrolla una serie de actividades que fomentan el estudio de competencias y conocimientos presentes en los informes de práctica de los estudiantes en formación inicial y las evidencias que justifican la aparición o ausencia de estas competencias o conocimientos.

Para tal fin, se ha decidido utilizar el modelo de competencias y conocimientos didáctico-matemático del profesor (CCDM) (Godino, Batanero, Font y Giacomene, 2016; Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017) el cual proporciona una herramienta teórica para la interpretación de las competencias y los conocimientos del profesor de matemática. Este modelo está sustentado en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007).

Respecto a esta forma de usar el EOS, Godino (2009), señala que en sí mismo el EOS "es un marco teórico que propone articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje" (p.20). Inclusive, "las nociones teóricas del EOS deben ser vistas como herramientas de análisis y reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje y pueden ser utilizadas por los propios profesores para indagar sobre su propia práctica" (Godino, 2009, p. 20).

En particular, se aborda en este taller constructos de la competencia general de *diseño e intervención didáctica* y las cinco subcompetencias que la componen. En el cuadro 1, se muestran las facetas y componentes que forman parte del modelo de conocimiento matemático.

Cuadro 1

Modelo de conocimiento matemático, las facetas y componentes del CCDM.

Faceta	Interpretación
Epistémica	es el conocimiento de la pluralidad de los significados institucionales de cualquier objeto matemático, dependiendo de los diferentes contextos de uso, y el reconocimiento del sistema de prácticas, objetos y procesos implicados en cada significado parcial. Sería equivalente a lo que Ball, Lubienski y Mewborn (2002) denominan conocimiento especializado del contenido matemático, aunque en nuestro caso el EOS aporta un desglose analítico de sus elementos constituyentes.
Cognitiva	implica el conocimiento de cómo lo estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y como progresan en su aprendizaje.
Afectiva	incluye los conocimientos sobre los aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
Instruccional	conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, organización de las tareas, resolución de dificultades de los estudiantes, e interacciones que se puede establecer en el aula.
Mediacional	conocimiento de los recursos (tecnológicos, materiales y temporales) apropiados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes.
Ecológica	implica las relaciones del contenido matemático con otras disciplinas, y los factores curriculares, socio-profesionales, políticos, económicos que condicionan los procesos de instrucción matemática.

Fuente: Extraído de Godino, Batanero, Font & Giacomone (2016, pp. 288 – 289).

Respecto a las subcompetencias vinculadas a la competencia general de *diseño e intervención didáctica*, se mencionan a manera de ejemplo, algunas de las preguntas que persiguen cada una de ellas en el cuadro 2.

Cuadro 2

Subcompetencias de la competencia general de diseño e intervención didáctica del CCDM y preguntas orientadoras.

Subcompetencias	Preguntas orientadoras
Competencia de análisis de significados globales	– ¿Cuáles son los significados del objeto matemático (por ejemplo, cuáles son los diferentes significados de la probabilidad)? –¿Cómo se articulan entre sí?
Competencia de análisis Ontosemiótico de prácticas matemáticas	– ¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados en la resolución que son característicos de los diversos significados de los contenidos pretendidos? (configuraciones epistémicas). – ¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos puestas en juego por los alumnos en la resolución de los citados problemas? (configuraciones cognitivas).
Competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas	– ¿Qué tipos de interacciones entre personas y recursos se implementan en los procesos instruccionales y cuáles son sus consecuencias sobre el aprendizaje? – ¿Cómo gestionar las interacciones para optimizar el aprendizaje?
Competencia de análisis normativo	– ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales? – ¿Quién, cómo y cuándo se establecen las normas? – ¿Cuáles y cómo se pueden cambiar para optimizar el aprendizaje matemático?
Competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica	– ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza – aprendizaje implementado sobre las ecuaciones de segundo grado? – ¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso de estudio para incrementar su idoneidad didáctica en un próximo ciclo de experimentación?

Fuente: Extraído de Godino, Batanero, Font & Giacomone (2016, pp. 290 – 292).

Protocolo y preguntas generadoras para el taller

En este taller se abordan dos momentos de trabajo: el trabajo en subgrupos basados en un análisis de las narrativas y otra referente en la puesta en común y discusión sobre algunos hallazgos. Así, las etapas se pueden resumir de la siguiente manera:

1. Se expone la narrativa y pautas para análisis.
2. Se tratan de contestar preguntas vinculadas a las competencias y conocimientos evidenciados,
3. En una actividad grupal, se comparten las percepciones de los distintos participantes

De esta manera, se pretende que, mediante algunos constructos del CCDM, los participantes ofrezcan posibles respuestas para las siguientes preguntas: ¿Qué competencias (y con qué grado de desarrollo) se pueden inferir a partir de la narrativa? ¿Qué tipo de conocimientos (y cuáles) se pueden inferir a partir de la narrativa? ¿Qué aspectos de la pauta utilizada para la observación se podrían mejorar para poder responder mejor las dos primeras preguntas?

Algunos referentes para este taller

Muchos trabajos, tanto de corte teórico como práctico, han sido desarrollados en el marco del EOS y del modelo CCDM. Para este taller se ha tomado como referencia directa los trabajos de Breda y Lima (2016), Breda, Font y Lima (2015), Breda, Font y Pino-Fan (2018), Breda, Font, Lima y Pereira (2018), Breda, Pino-Fan, y Font (2017), Font (2015), Morales y Font (2017a; 2017b), Morales, Araya y Font (2017a, 2017b), Font (2018), Pino-Fan, Godino y Font (2018) y Seckel (2016), Morales y Poveda (2013), Morales y Poveda (2015), Morales, García y Fonseca (2014), Morales-López (2015), Morales-López (2017), Morales-López y Font (2019), Morales (2019).

Reconocimiento

La investigación realizada es parte del proyecto EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE), el proyecto REDICE18-2000 y del proyecto 0082-16 de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional, Costa Rica, y el Convenio Internacional entre la Universidad Nacional, Costa Rica, y la Universitat de Barcelona, España (Cod 018133).

Referencias y bibliografía

Breda, A., & Lima, V. M. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT*, *5*(1), 74-103.

Breda, A., Font, V. & Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*(2), 1-41.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios Valorativos y Normativos en La Didáctica de las Matemáticas: el Caso del Constructo Idoneidad Didáctica. *Bolema*, *32*(60), 255-278.

Breda, A., Font, V., Lima, V. M. R. & Pereira, M. V. (2018). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. *Transformación*, *14*(2), 162 -176

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal Of Mathematics Science And Technology Education*, *13*(6), 1893-1918.

Font, V. (2015). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática* [Guideline for the analysis and assessment of the didactical suitability of the mathematics teaching and learning processes]. Unpublished manuscript. Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática, Universitat de Barcelona.

Font, V. (2018). Los criterios de idoneidad didáctica en la formación de profesores. En *Memorias del Cuarto Encuentro Internacional de Investigación en Educación Matemática*. Colombia: Universidad del Atentico.

Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: El modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). Málaga: SEIEM. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/8859/1/Batanero2016Articulando.pdf

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113.

Morales, Y. y Poveda, R. (2013). *Plataforma Educativa Nacional para la Formación Continua de Docentes de Matemáticas en Costa Rica*. En E. Rodríguez, Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática CIBEM 7, 7030-7037. Montevideo, Uruguay. Descargado de http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/53.pdf

Morales, Y. y Poveda, R. (2015). Capacitación de docentes con apoyo de tecnologías en la reforma de la educación matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 10(13), 79-97. Recuperado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/19146/

Morales, Y., & Font, V. (2017a). Elementos de idoneidad didáctica que los futuros profesores de matemática muestran durante su práctica docente. En J. Martínez (Ed.). *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 23-31). Madrid: CIBEM. Recuperado de http://cibem.org/images/site/LibroActasCIBEM/ComunicacionesLibroActas_CB1-100.pdf

Morales, Y., & Font, V. (2017b). Análisis de la reflexión presente en las crónicas de estudiantes en formación inicial en educación matemática durante su periodo de práctica profesional. *Revista ACTA SCIENTIAE, 19*(1), 122-137. Recuperado de http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/2975/2280

Morales, Y., García, M. y Fonseca, J. (2014). Perfil académico-profesional del docente de matemáticas bajo el enfoque por competencias. *Revista Unión*, 38 (1), 85 – 101. Disponible en http://www.fisem.org/www/union/revistas/2014/38/archivo9.pdf

Morales-López, Y. & Font, V. (2019). Evaluation by a teacher of the suitability of her mathematics class. *Educação e Pesquisa, 45*, 1-19. e189468. doi: 10.1590/S1678-4634201945189468

Morales-López, Y. (2015). Uso de tecnología en la educación: las habilidades básicas del maestro de primaria en la clase de matemática. *Revista Tecnología en Marcha*, 28(4), pág. 108-121. doi: http://dx.doi.org/10.18845/tm.v28i4.2448

Morales-López, Y. (2017). *Costa Rica: The Preparation of Mathematics Teachers*. In A. Ruiz (Ed.), Mathematics Teacher Preparation in Central America and the Caribbean: The Cases of Colombia, Costa Rica, the Dominican Republic and Venezuela (pp. 39–56). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-44177-1_3

Morales-López, Y. (2019). Knowledge evidenced by prospective mathematics teachers when performing a task involving geometry, teaching and the use of technology. *ACTA SCIENTIAE, 21*(2), 75-92. doi https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss2id5081

Morales-López, Y., Araya, D., y Font, V. (2017a). El uso de la noción de idoneidad didáctica como herramienta para la reflexión sobre lo que ocurre en episodios videograbados de clase. En Angel, R. Memorias: *II Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe*. Colombia. Disponible en http://ciaem-redumate.org/cemacyc/index.php/ii_cemacyc/iicemacyc/paper/view/469

Morales-López, Y.; Araya, D. y Font, V. (2017b). La noción de idoneidad didáctica como herramienta para la reflexión de la clase de matemática. En Y. Morales-López, M. Picado, R. Gamboa, C. Martínez, M. Castillo y R. Hidalgo (Eds.). *Memorias del VI Encuentro Provincial de Educación Matemática, Costa Rica, 2017* (pp. 49-51). Heredia: Universidad Nacional. DOI: http://dx.doi.org/10.15359/epem.6.13

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(1), 63-94.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática.*Tesis de doctorado no publicada. Barcelona, España: Universitat de Barcelona.

Los *estudios de caso:* una posibilidad para movilizar el sentido personal de profesores que enseñan matemáticas en programas de administración

Diego Alejandro **Pérez** Galeano

Institución Universitaria CEIPA

Colombia

diego.perez@ceipa.edu.co

Diana Victoria **Jaramillo** Quiceno

Universidad de Antioquia

Colombia

diana.jaramillo@udea.edu.co

Resumen

Fundamentados en la perspectiva histórico-cultural de la educación y en la Teoría de la Actividad, presentamos un proyecto a nivel doctoral cuyo objetivo es analizar la movilización del sentido personal de tres profesores que enseñan matemáticas en programas de administración, a partir de la metodología de clase llamada *estudios de caso.* En este sentido, al reconocer la alienación como un fenómeno social y cultural que causa, entre otras cosas, un desencuentro entre el significado cultural y el sentido personal de los profesores, proponemos un proceso formativo fundamentado en la reflexión sobre la propia práctica al interior de un colectivo de formación y la escritura de *estudios de caso*, como posibilidad para que estos profesores le atribuyan otro sentido a su propia actividad. La investigación narrativa posibilitará una aproximación a dicha movilización de modo que los profesores, permeados por las experiencias de sus compañeros y sus historias de vida, le atribuyan otro sentido personal a su actividad de enseñanza.

Palabras-clave: formación continuada de profesores, alienación, Teoría de la Actividad, colectivo de formación, investigación narrativa, perspectiva histórico-cultural, docencia universitaria.

Planteamiento del problema

La investigación sobre la formación inicial y continuada de maestros que enseñan matemáticas centradas en procesos de reflexión e investigación se ha desarrollado en dos contextos específicos: en primer lugar, trabajos como los de Jaramillo (2003) y Cedro (2008, 2016), que han analizado los procesos de formación en las licenciaturas; y las investigaciones de Polettini (2000), Araujo (2003), Asbahr (2005), Moretti (2007), Moretti y Moura (2010), Migueis (2010), González (2014), Pérez (2016) y Cadavid (2017) analizaron los procesos de formación de profesores que enseñan matemáticas en un contexto escolar. Sin embargo, autores como Almeida (2012) advierten que una proporción menor de investigaciones se ha enfocado en el contexto universitario.

Así, pensando ese último contexto, presentamos un proyecto de nivel doctoral cuyo objetivo es analizar la movilización del sentido personal de tres profesores que enseñan matemáticas en programas de administración, a partir de la metodología de clase llamada *estudios de caso.* A continuación, comentaremos sobre el contexto en el cual se desarrolla esta investigación, así como el problema que fundamenta la misma.

La universidad en la cual trabajan los tres profesores protagonistas de esta investigación tiene una escuela de administración en la que se forman profesionales en los programas de administración de empresas, administración financiera, administración de mercadeo, administración de negocios internacionales, administración de gestión humana y contaduría pública en las modalidades presencial (diurno y nocturno) y virtual. Una de las principales características de la escuela de administración es su modelo pedagógico; en él se destaca la organización curricular de sus cursos, llamados núcleos problémicos. En la estructura curricular de todos los programas de pregrado aparecen tres núcleos que conforman el área académica de ciencias básicas. Los núcleos que componen esta área académica son: matemáticas, estadística y métodos cuantitativos para los negocios. A lo largo de cada uno de estos núcleos, los problemas y las temáticas subyacentes a ellos están organizados en una subestructura de los núcleos llamada objetos de aprendizaje.

Cada uno de los objetos de aprendizaje tiene una situación problematizadora la cual, por lo general, es una historia de un gerente o un administrador, creada por un profesor experto en administración, que requiere solucionar un problema de su empresa. Esta historia contiene implícita o explícitamente una necesidad de aplicar conceptos matemáticos que el estudiante debe reconocer a partir de la primera lectura. Además, a través de una serie de tareas (debates, trabajos escritos y evaluaciones, entre otras modalidades) se espera que el estudiante se aproxime a una solución, la cual se discute al final del objeto de aprendizaje. En la figura 1 mostramos la estructura general de los programas de administración.

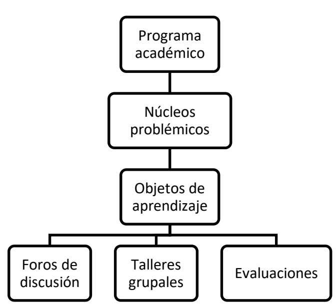


Figura 1. Estructura básica de los programas académicos de la escuela de administración.

En este sentido, comprender la realidad de las empresas para dar solución a sus problemáticas ha generado en la universidad la necesidad de establecer unas metodologías para la enseñanza de los núcleos en la institución. Así, la escuela de administración ha buscado estrategias que les posibilite a profesores y a estudiantes atribuirle sentido a la teoría a través de la práctica, y al análisis de los eventos que ocurren en las empresas. Es por esto por lo que la mayoría de los profesores son profesionales que no solo realizan actividades de docencia sino también consultorías, investigaciones aplicadas a empresas y acompañamiento a procesos de prácticas empresariales, lo cual les posibilita escribir *estudios de caso*, exponer sus prácticas a través de charlas y aportar a la reflexión en las clases centrados en sus experiencias.

Sin embargo, estas metodologías aún no han sido apropiadas por los tres profesores del área de ciencias básicas, protagonistas de esta investigación, ya que las actividades de consultorías o de apoyo a las empresas no corresponden al perfil que, según la universidad, tienen estos profesores. Ante esta situación, las metodologías que tienen a su disposición estos profesores, se caracterizan por estar poco relacionadas con los contextos reales de las empresas, ocasionando, desde el punto de vista de los profesores, que las discusiones en términos matemáticos estén alejadas de los contextos donde se desempeñarán laboralmente los estudiantes que ellos atienden. Esta situación ha venido ocasionado un desencuentro entre el significado que la universidad ha construido en torno a la enseñanza de las matemáticas en la escuela de administración, y el sentido personal que el profesor le atribuye a su actividad de enseñanza. Dicho desencuentro lo entendemos como una forma de *alienación*. Según Marx (1980), la relación objetiva-subjetiva del trabajo y su objeto se entiende alienada cuando tanto el objeto de su trabajo, como el proceso y la cultura son ajenos o no totalmente interiorizados por los trabajadores. Según el autor:

> El objeto del trabajo que el trabajador produce, su producto, se enfrenta a él como un *ser extraño*, como un *poder independiente* del productor. El producto del trabajo es el trabajo que se ha fijado en un objeto, que se ha hecho otra cosa; el producto es la objetivación del trabajo. La realización del trabajo es su objetivación. Esta realización del trabajo aparece en el estadio de la Economía Política como *desrealización* del trabajador, la objetivación como *pérdida* del *objeto* y servidumbre a él, la apropiación como *extrañamiento,* como *enajenación.* (p. 106, énfasis del autor)

En otras palabras, entendemos a la alienación como un fenómeno cultural de las formas de trabajo que ocasiona *(des)encuentros* entre el sentido personal que el trabajador le atribuye a su trabajo y el significado que la cultura le ha dado a dicha actividad. Utilizamos la expresión (des)encuentros para mostrar que en algunas ocasiones el sentido personal y el significado cultural convergen, mientras que en otras ocasiones se distancian. Además, comprendemos que el sentido personal y los significados culturales se constituyen dialécticamente, y que es en esta dialéctica donde habita la alienación, como algo que moviliza tanto al sujeto y al sentido personal que este les atribuye a sus actividades, como a la sociedad y al significado cultural que se ha determinado, para dichas actividades.

Frente a estos (des)encuentros entre el sentido personal que el profesor le atribuye a su actividad de enseñanza y el significado cultural que se le ha dado a la escuela de administración en la formación de los administradores, buscamos con esta investigación una aproximación a la movilización del sentido personal que supere dichos (des)encuentros, por medio de un proceso permeado por reflexiones sobre la metodología de enseñanza llamada *estudios de caso* en un colectivo de formación constituido por los tres profesores protagonistas del estudio. Comprendemos al colectivo de formación en el sentido de Moura (2000), como un grupo de sujetos que comparten una necesidad, la cual llama a estos sujetos a planear colaborativamente las actividades que llevarán al alcance de los objetivos comunes.

Así, a través de esta investigación pretendemos responder a la pregunta ¿Cómo se moviliza el sentido personal de profesores que enseñan matemáticas en programas de administración, a partir de la metodología de clase *estudios de caso*? Y, en coherencia con dicha pregunta, nuestro objetivo es analizar la movilización del sentido personal de profesores que enseñan matemáticas en programas de administración, a partir de la metodología de clase *estudios de caso*.

Marco teórico

La fundamentación teórica de esta investigación se centra en dos aspectos: primero, la formación de profesores en la perspectiva histórico-cultural de la educación, y, segundo, los *estudios de caso* como apuesta metodológica para la enseñanza de las matemáticas.

La formación de profesores en la perspectiva histórico-cultural de la educación.

Sobre la formación de profesores que enseñan matemáticas en la perspectiva histórico-cultural de la educación, compartimos las posturas de autores como Moura (2000), Fontana (2000), Jaramillo (2003), Asbahr (2005), Moretti (2007), Cedro (2008) y Cadavid (2017) quienes apuntan que la formación de los profesores no puede ser comprendida como un proceso lineal (en un modelo que atienda a la racionalidad causa-efecto); donde un investigador (quien parece detentor del conocimiento y, a veces, es ajeno a la práctica pedagógica) dice y el profesor ejecuta lo dicho. Nuestra comprensión sobre la formación de profesores se fundamenta en la posibilidad de movilizar las subjetividades, sentidos y actividades a través del compartir con los otros. A propósito, apunta Fontana (2000) que:

> Solamente en relación con otro individuo nos volvemos capaces de percibir nuestras características, de delinear nuestras peculiaridades personales y nuestras peculiaridades como profesionales, de diferenciar nuestros intereses de las metas ajenas y de formular juicios sobre nosotros mismos y sobre nuestro hacer.. (p. 62)

En este sentido, manifestamos a continuación algunas de nuestras comprensiones epistemológicas, gnoseológicas y ontológicas respecto a la formación de profesores. En primer lugar, comprendemos que la formación de profesores no es un proceso lineal que obedezca a razonamientos como este: “si un profesor recibe una buena formación, entonces será un buen profesor y, por tanto, sus estudiantes aprenderán más”. Contrario a esta perspectiva, comprendemos la formación de profesores como un proceso dialéctico, que posibilita el encuentro de voces, de tensiones y de contradicciones que movilizan las actividades en los profesores y el sentido personal que estos le atribuyen a dichas actividades (Jaramillo, 2003).

En segundo lugar, comprendemos que la formación de profesores no consiste en procesos de transmision de conocimientos por alguien que “ostenta” el conocimiento, sino que, antes bien, entendemos dicha formación como un trabajo colaborativo para/con/por los profesores que aporta elementos de formación para ellos, ya que a partir de la voz del otro se constituyen los sujetos.

Y, en tercer lugar, en cuanto a la formación de profesores que enseñan en contextos universitarios, coincidimos con autores como Cunha (2003, 2013), Morosini (2000), Isaia (2000) para quienes esta formación debe caracterizarse por aspectos como la colaboración, el trabajo en comunidades de práctica, la mediación entre la producción académica y la investigación sobre la propia práctica y, de manera particular, la reflexión sobre los procesos de formulación de metodologías que aporten a la construcción de conocimientos en los estudiantes.

Los *estudios de caso* como metodología de clase

En el proceso de formación propuesto para/con/por los profesores es importante identificar un aspecto de su actividad de enseñanza sobre el cual ellos no solo reflexionen en términos de su pertinencia, sino que también muestren otros caminos para la enseñanza de las matemáticas en un contexto particular como lo es la escuela de administración. Es así como en esta investigación centraremos nuestra atención en la movilización del sentido personal de los profesores de ciencias básicas, a partir de la reflexión y escritura de *estudios de caso* al interior de un colectivo de formación. A continuación, comentaremos algunas comprensiones en cuanto a esta metodología de clase.

Los *estudios de caso*, como metodología de clase, fueron utilizados por primera vez en programas de derecho y medicina en la Universidad de Harvard en la segunda década del siglo XX, como respuesta a las metodologías centradas en las lecturas de contextos ajenos a los estudiantes, y como posibilidad de recrear situaciones reales sobre las cuales se puedan analizar escenarios y tomar decisiones (Bayona y Castañeda, 2017). En este sentido y en el contexto de esta investigación, entendemos los *estudios de caso* como narraciones (reales o ficticias) de realidades empresariales en las cuales los estudiantes y los profesores analizan la situación, se cuestionan y debaten sobre las posibles causas, proponen soluciones y elaboran conclusiones sobre la aplicación de estas soluciones a las problemáticas inicialmente analizadas.

Otro aspecto que es importante resaltar es el hecho de que la discusión en torno a los *estudios de caso* no determina una única solución; en efecto, de acuerdo con Puchol (2005)

> La metodología de *estudios de caso* no pretende que los formandos encuentren la solución ideal preestablecida, pues con frecuencia esa solución ideal no existe, o, alternativamente, se puede llegar a los mismos resultados por distintos caminos. La metodología *estudios de caso* huye así de las soluciones y opiniones dogmáticas, y pretende más bien el aprendizaje de los formandos en actitudes favorables a la resolución de problemas en equipo, favoreciendo la percepción de la realidad, la reflexión personal, la capacidad de análisis/síntesis y la asunción de riesgos. (p. 2)

Para lograr dichos procesos de análisis y síntesis, retomamos los elementos que deben tener los *estudios de caso*. Wassermann (1994) enumera los principales elementos que estos deben tener: en primer lugar, debe existir obviamente un caso. Dicho caso, como se mencionó anteriormente, es una narración creada por el profesor (o recuperada en repositorios) en la cual resultan algunas preguntas abiertas frente a una problemática (en este caso de las empresas) y que requiere, entre otras cosas, un análisis que use los conceptos que el profesor propone que los estudiantes utilicen (como parte de la planeación de las clases).

En segundo lugar, los *estudios de caso* se caracterizan por presentar preguntas críticas, las cuales implican que los estudiantes realicen reflexiones sobre los problemas y no solamente el recuento de informaciones aisladas previamente aprendidas. En tercer lugar, los *estudios de caso* implican el trabajo en equipos pequeños, ya que las reflexiones suscitadas por las preguntas críticas deben ser debatidas con el fin de establecer acuerdos respecto a las posibles soluciones para las problemáticas planteadas. En cuarto lugar, los *estudios de caso* proponen una discusión general luego del trabajo en equipo, de modo que se llegue a un consenso sobre las causas del problema, las posibles soluciones y el impacto que tendrían dichas soluciones. Finalmente, el profesor debe cerrar el *estudio de caso* por medio de una conclusión, lo cual puede dejar abierto el debate sobre la solución utilizada frente al problema.

Método de Investigación

Este estudio se está desarrollando bajo un paradigma cualitativo de la investigación. Este paradigma se caracteriza por analizar al ser humano en varias de sus dimensiones y reconoce, a partir de su subjetividad, sus aspectos sociales, políticos, culturales, entre otros (Taylor y Bogdan, 1996; Cohen, Manion y Morrison, 2007; Denzin y Lincoln, 2012).

Asumimos además en esta investigación un enfoque metodológico crítico-dialéctico (Sánchez, 1998) tanto para planear el trabajo de campo como para realizar el análisis. Consideramos este enfoque pertinente para analizar el sentido personal, pues en sus presupuestos epistemológicos guarda la intencionalidad de aportar a la transformación de los sujetos y no la simple observación y descripción de un fenómeno particular. En nuestro caso, creemos en la posible transformación de los maestros del colectivo de formación frente al sentido personal sque le atribuyen a sus actividades de organización de la enseñanza.Así mismo, en este proyecto asumimos como método la investigación narrativa (Conelly y Clandinin, 1995, 2000; Jaramillo, 2003; Cadavid, 2017), la cual se caracteriza por

- Tener como fundamentación a la experiencia compartida entre el investigador y los protagonistas de la investigación.
- Contar con una negociación de entrada y salida del campo.
- Disponer de instrumentos de producción de registros y datos como ideogramas, autobiografías, cartas, diarios de campo (del investigador y los protagonistas), textos biográficos, planes de clase, entrevistas semi-estructuradas, entre otras formas de narración, en las cuales los sujetos exponen sus experiencias a través de relatos.
- Destacar el papel del investigador como alguien que, lejos de ser pasivo, tiene una voz importante dentro de la comunidad de colaboración.
- Tener un relato final como producto no solo de las observaciones del investigador, sino como consecuencia de la lectura constante de los datos y los análisis con los protagonistas.

Como lo mencionamos en el planteamiento del problema, los protagonistas de la investigación son los tres profesores del área de ciencias básicas de una universidad del municipio de Sabaneta (Colombia). A partir de la motivación de estos maestros para la creación de *estudios de caso* para la enseñanza de las ciencias básicas en la escuela de administración desde el año 2017, y la socialización de los objetivos de la presente investigación doctoral, se constituyó con ellos un colectivo de formación, con una agenda consistente en encuentros quincenales en los cuales se realizan actividades acordadas de manera colaborativa. Así, para la producción de registros y datos se están utilizando técnicas e instrumentos, los cuales comentamos a continuación.

En primer lugar, los ideogramas han posibilitado reflexionar respecto a preguntas como ¿Quién soy como maestro de matemáticas? En este sentido, en las socializaciones de estos ideogramas los profesores han evocado sus historias de vida, para contar sus caminos de formación como maestros que enseñan matemáticas en programas de administración. En segundo lugar, los mapas conceptuales creados colaborativamente han dado cuenta de las comprensiones que los maestros tienen en torno a la actividad de enseñanza y a la importancia de las necesidades de los estudiantes para la búsqueda y apropiación de metodologías. En tercer lugar, se ha propuesto a los maestros una serie de entrevistas semi-estructuradas, las cuales se han constituido en espacios de diálogo que muestran constantemente el sentido personal que ellos le han atribuido a sus propias actividades y cómo el trabajo colaborativo ha apuntado a otros caminos para la apropiación y (co)creación de *estudios de caso.*

Finalmente, en los registros y datos son clave los *estudios de caso*; estos están siendo escritos de manera colaborativa. La unidad de análisis son los enunciados (Bajtín, 2009) como manifestación de las acciones propias de las actividades realizadas por los profesores. Al momento del envío de este documento, el proyecto se encuentra en la etapa del trabajo de campo; así, el análisis se realizará durante el año 2019.

Referencias bibliográficas

Almeida, M. M. (2012). Desenvolvimento profissional dos docentes do ensino superior. Contributos para a compreensão do desenvolvimento profissional dos docentes que atuam na formação inicial de professores (Tesis doctoral inédita, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal).

Araujo, E. (2003). *Da formação e do formar-se. A atividade de aprendizagem docente em uma escola pública.* (Tesis doctoral inédita, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil).

Asbahr, F. (2005). *Sentido pessoal e Projeto político pedagógico: análise da atividade pedagógica a partir da psicologia histórico-cultural.* Recuperado de http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/47/47131/tde.../DissertFlavia1.pdf

Bajtín, M. (2009). *Estética de la creación verbal*. México D.F., Estados Unidos Mexicanos: Publimex.

Bayona, J. y Castañeda, I. (2017). Case Method Effectiveness: Role of Individual Characteristics in a Sample of Colombian Students. *Management education & development, 15*, 409–428.

Cadavid, L. (2017). Constitución de la subjetividad del sujeto maestro que enseña matemáticas, desde y para la actividad pedagógica. (Tesis doctoral inédita, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia).

Cedro, W. (2008). O motivo e a atividade de aprendizagem do professor de matemática: uma perspectiva histórico-cultural. (Tesis doctoral inédita, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil).

Cedro, W. (2016). Changing teachers' mathematical knowledge during their teaching activity. *RIPEM, 6*(2), 89-110.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6° Ed.). New York, NY: Routledge.

Connelly, M., y Clandinin, J. (1995). Relatos de experiencia e investigación narrativa. En Larrosa, J. et al. (Eds.), *Déjame que te cuente: ensayos sobre narrativa y educación* (pp. 11–59). Barcelona, España: Laertes.

Cunha, M. I. (2000). Ensino como mediação da formação do professor universitário. En M. Morosini (Ed.), *Professor de ensino superior. Identidade, docência e formação* (pp. 45–51). Brasilia, Brasil: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

Denzin, N. y Lincoln, Y. (2012). Introducción general. La investigación cualitativa como disciplina y como práctica. En N. Denzin e Y. Lincoln (Eds.), *Manual de investigación cualitativa* (1ª Ed.) (pp. 43–108). Barcelona, España: Graó.

Ellet, W. (2007). The case study handbook. How to read, discuss, and write persusively about cases. Boston, Estados Unidos: Harvard Business Press.

Fontana, R. (2000). *Como nos tornamos professoras?* Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.

González, D. (2014). *Constitución de la identidad del profesor que enseña estadística.* (Tesis doctoral inédita, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia).

Grillo, M. (2000). O lugar da reflexão na construção do conhecimento profissional. En M. Morosini (Ed.), *Professor de ensino superior. Identidade, docência e formação* (pp. 75–80). Brasília, Brasil: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

Jaramillo, D. (2003). (Re)constituição do ideário de futuros professores de Matemática num contexto de investigação sobre a prática pedagógica. (Tesis doctoral inédita, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil).

Kazemi, F. y Ghoraishi, M. (2012). Comparison of Problem-based Learning Approach and traditional teaching on attitude, misconceptions and mathematics performance of University Students. *Procedia social and behavioral sciences, 46*, 3852–3856.

Leontiev, A. N. (1984). *Actividad, consciencia y personalidad.* México D.F., Estados Unidos Mexicanos: Cartago.

Marx, K. (1980). *Manuscritos: economía y filosofía* (9ª Ed.). Madrid: Alianza Editorial.

Migueis, M. (2010). *A formação como actividade de aprendizagem docente.* (Tesis doctoral inédita, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal).

Moretti, V. (2007). *Professores de matemática em atividade de ensino. Uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente*. (Tesis doctoral inédita, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil). Recuperado el 01 de 04 de 2012, de http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-05102007-153534/pt-br.php.

Moretti, V. D. y Moura, M. O. (julio- diciembre, 2010). O sentido em movimento na formação de professores de matemática. *Zetetiké*, *18*(34), 155-180.

Moura, M. O. (2000). *O educador matemático na coletividade de formação: uma experiência com a escola pública*. (Tesis de Libre docencia en Metodologia de Enseñanza de las Matemáticas, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil).

Pérez, D. (2016). *El profesor de matemáticas y su sentido personal hacia la enseñanza.* Saarbrücken, Alemania: Editorial Académica Española.

Polettini, A. (2000). Mathematics teaching life histories in the study of teachers' perceptions of change. Teaching and Teacher Education, 16, 765-783.

Puchol, L. (2005). Nuevos casos en dirección y gestión de recursos humanos 25 casos de recursos humanos acompañados de las soluciones propuestas por sus autores. Madrid: Díaz de Santos

Rave, E. y Franco, J. (2011). Casos empresariales colombianos. Decisiones gerenciales ante momentos de crisis. Sabaneta, Colombia: Ceipa Business School.

Sánchez, S. (1998). Fundamentos para la investigación educativa. Presupuestos epistemológicos que orientan al investigador. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Taylor, S. J. y Bogdan, R. (1996). Introducción a los métodos cualitativo de investigación. La búsqueda de significados. Barcelona, España: Paidós.

Wassermann, S. (1994). *El estudio de casos como método de enseñanza*. Buenos Aires, Argentina: Amorrortu editores.

Desarrollo de la modelación por medio de una gestión argumentativa en el aula de matemáticas

Horacio Solar Bezmalinovic
Facultad de Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile
Chile
hsolar@uc.cl
María Aravena Díaz
Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Católica del Maule
Chile
maravena@ucm.cl
Manuel Goizueta
Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
manuel.goizueta@pucv.cl
Rodrigo Ulloa Sánchez
Facultad de Educación, Universidad Católica de la Santísima Concepción
rulloa@ucsc.cl

Resumen

Si bien existe una línea extensa y nutrida de investigaciones en modelación y argumentación el desarrollo de ambas líneas ha sido de manera independiente. El propósito de esta comunicación es describir una propuesta didáctica para la formación continua de profesores en modelación mediante una gestión argumentativa. El enfoque de la investigación es de corte cualitativo~~,~~ mediante estudio de casos múltiples, para lo cual se seleccionó un grupo de docentes que realizan clases de matemática en educación primaria y que tenían experiencia en argumentación. Se diseñó una propuesta de formación de profesores basada en la modelación y la argumentación que actualmente está en fase de implementación. Los resultados preliminares muestran que más allá de las dificultades y errores que pueden tener los docentes de primaria para resolver problemas de modelación, los diferentes ciclos de modelación que se aprecian en las producciones son oportunidades para la gestión argumentativa

Palabras clave: competencias matemáticas, argumentación, modelación, desarrollo profesional

Modelación por medio de una gestión argumentativa

Los resultados de los estudiantes en las pruebas estandarizadas internacionales PISA 2012 (OECD, 2013) muestran que los desempeños a nivel sudamericano están muy por debajo del estándar. Tal es el caso de matemática en Chile, donde los estudiantes se encuentran en el ranking 51, 71 puntos bajo el promedio de la OECD (Agencia de Calidad de la Educación, 2014). Estos resultados indican que un 52% de los estudiantes chilenos de 15 años no tiene las competencias básicas que le permiten usar su conocimiento y habilidades para resolver problemas, así como desarrollar tareas contextualizadas en la vida cotidiana, participando positivamente en la sociedad (Agencia de la Calidad de Educación, 2014). Para enfrentar este tipo de dificultades en matemáticas, varios países han incorporado en sus marcos curriculares una visión desde la alfabetización matemática, entendida como la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos (OECD, 2015). En varios países se ha incorporado el enfoque por competencias en el currículo. En el caso de Chile se han considerado cuatro habilidades matemáticas: resolver problemas, argumentar y comunicar, modelar, y representar (MINEDUC, 2013).

Si bien la perspectiva de competencia matemática considera varios procesos matemáticos (Niss & Højgaard, 2011), creemos que en especial las competencias de argumentación y modelación se relacionan con aspectos esenciales de la actividad matemática de los estudiantes. Respecto a la modelación, algunos autores la sitúan como la base de la actividad matemática, debido a que en las tareas de modelación de situaciones se da más importancia a los procesos cognitivos que a los modelos obtenidos (Blomhøj, 2004). Ello se puede ver en el marco teórico de PISA 2015 (OECD, 2016), donde se describen siete competencias matemáticas según el ciclo de modelación (Borromeo-Ferri, 2006; Maaß, 2006).

Desde el punto de vista de la argumentación, uno de los estándares académicos fundamentales en matemáticas en EEUU (*Common Core Math Practices*) hace referencia a la construcción de argumentos viables y a la evaluación del razonamiento de otros[1]; además, las orientaciones curriculares del National Council of Teachers of Mathematics señalan que una de las prácticas de enseñanza eficaz es el diálogo entre los estudiantes, pues les permite construir una comprensión compartida de las ideas matemáticas a través del análisis y comparación de sus enfoques y argumentos (NCTM, 2014). En efecto, la discusión en el aula de matemáticas permite a los estudiantes compartir ideas, clarificar su comprensión y construir argumentos convincentes respecto del cómo y el por qué las cosas funcionan (NCTM, 2000).

Si bien se puede esperar que promover las competencias de argumentación y modelación en el aula siente bases para superar las dificultades de los estudiantes en matemáticas, es necesario tener profesores formados para ello. Según el consenso a nivel internacional, se destaca como esencial preparar a los profesores en la formulación de problemas que involucren procesos de modelación, la utilización del lenguaje matemático, la comunicación y argumentación matemática y la capacidad de analizar y construir modelos matemáticos en diferentes contextos (Niss & Højgaard, 2011). Sin embargo, Blomhoj y Carreira (2009) señalan que la formación de profesores para promover la modelación en el aula de matemáticas sigue siendo una cuestión pendiente, tanto para la educación primaria como para secundaria.

En relación con la investigación, aunque existen líneas extensas y nutridas de investigaciones en modelación (Blomhøj 2004; Blum & Borromeo-Ferri, 2009; Maaß, 2006) y en argumentación (Conner, Singletary, Smith, Wagner, & Francisco, 2014; Inglis, Mejia-Ramos, & Simpson, 2007; Krummheuer, 1995, 2007; Rasmussen, Stephan, & Allen, 2004, Solar & Deulofeu, 2016), el desarrollo de ambas líneas ha sido de manera independiente. Es decir, existen escasos estudios que busquen relacionar las competencias de argumentación y modelación (e.g., Dede, 2018), y estos se han realizado en contextos de formación inicial de

[1] http://www.corestandards.org/Math/Practice/#CCSS.Math.Practice.MP3

profesores. No hemos encontrado investigaciones asociadas a la formación continua de profesores con un foco en el desarrollo articulado de la modelación y la argumentación en el aula de matemáticas.

Esta tensión entre desarrollo de competencias y formación de profesores es señalada por Kauertz, Newmann y Hearting (2012), quienes indican que la relación entre el desarrollo de las competencias y la enseñanza es todavía vaga. Según los autores, las evaluaciones no proporcionan información del proceso de desarrollo de las competencias, sino que señalan las metas que deberían haberse logrado, proporcionando información que es útil para el diseño de políticas públicas en educación, pero no para orientar procesos de enseñanza. Para revertir esta situación se requiere de más estudios en profundidad relacionados con el desarrollo de competencias matemáticas, en particular, con el desarrollo de la argumentación y la modelación. El propósito de esta comunicación es describir el diseño de una propuesta de formación continua de profesores que se encuentra actualmente en fase de implementación. En lo que sigue, describimos los principios que están en la base tanto del diseño de la propuesta formativa como de su implementación, y analizamos algunas producciones de profesores participantes para ilustrar algunos de los logros y desafíos de la propuesta.

Metodología

La propuesta de formación que se ha diseñado, la cual exponemos y discutimos en este texto, se inscribe en el contexto de un proyecto de investigación más amplio, que pretende dar cuenta de los aprendizajes de estudiantes en el aula de matemáticas cuando se promueven conjuntamente la argumentacón y la modelación Así, la instancia de desarrollo profesional se diseña e implementa con el fin de que el grupo de docentes participantes en el estudio tenga una base de conocimientos común en el desarrollo de la modelación y argumentación para las clases de matemáticas que serán observadas.

Los participantes del proceso de formación realizan clase de matemáticas en educación primaria (6 a 14 años) y tienen experiencia previa en el desarrollo y/o análisis de la argumentación en el aula de matemáticas, debido a su participación en instancias formativas anteriores. Participan un total de 22 docentes, 13 en Santiago y 9 de Concepción (Chile) y se seleccionó este grupo de manera intencionada, puesto que era conveniente que tuvieran formación previa en relación con procesos argumentativos para así enfrentar los procesos de modelación matemática.

Al momento de enviar esta comunicación, ya se habían realizado 6 sesiones del proceso de formación. En lo que sigue, reportaremos las etapas que se han ejecutado: (1) diseño de una propuesta de trabajo para formación de profesores basada en la modelación y la argumentación; (2) implementación de la propuesta formativa; (3) análisis de resultados preliminares de la implementación. A continuación, se explica en detalle cada una de estas tres etapas

Diseño de la propuesta de formación basada en modelación y argumentación

Para el diseño de la propuesta se realizó un estudio bibliográfico de las componentes teóricas y didácticas para promover las competencias de modelación y argumentación. Se consideraron el ciclo de modelación (Borromeo-Ferri, 2006; Maaß, 2006) y la argumentación colectiva (Conner et al., 2014; Krummheuer, 1995). La propuesta incorpora, además, el modelo Mejoramiento de la Experiencia Docente (MED) (Solar, Ortiz, & Ulloa, 2016), centrado en el análisis de la práctica de formación para el desarrollo profesional de profesores. Este modelo de formación considera cuatro etapas:

La primera etapa hace referencia ***al análisis de la práctica de otros***. Los docentes realizan un análisis didáctico y matemático de la modelación. El análisis didáctico se hace a través de episodios de clases en los que se analiza el desarrollo de la modelación, mientras el análisis matemático se realiza por medio de tareas matemáticas de modelación.

La segunda etapa considera el ***análisis de la propia práctica.*** Los docentes realizan análisis didáctico de la modelación y la argumentación. Analizan la propia práctica mediante ciclos de modelación con el propósito de apropiarse de estrategias adecuadas para promover modelación por medio de la gestión argumentativa en el aula de matemáticas.

En la tercera etapa se aborda ***el diseño e implementación*** de clases. Los docentes adaptan tareas de modelación a fin de abordar clases para desarrollar la modelación mediante una gestión argumentativa. Estas clases son implementadas y observadas por el equipo de formadores para su posterior análisis y evaluación.

En la cuarta etapa se considera la ***reflexión sobre la práctica***. Se evalúa el proceso de estudio y desarrollo de la modelación mediante la gestión argumentativa, valorando tanto el desempeño como la reflexión docente sobre el modelación y argumentación en el aula de matemáticas

En la figura 1 se presenta un esquema que resume el modelo MED, mediante el cual se ha~~n~~ trabajado con los docentes las primeras dos etapas.

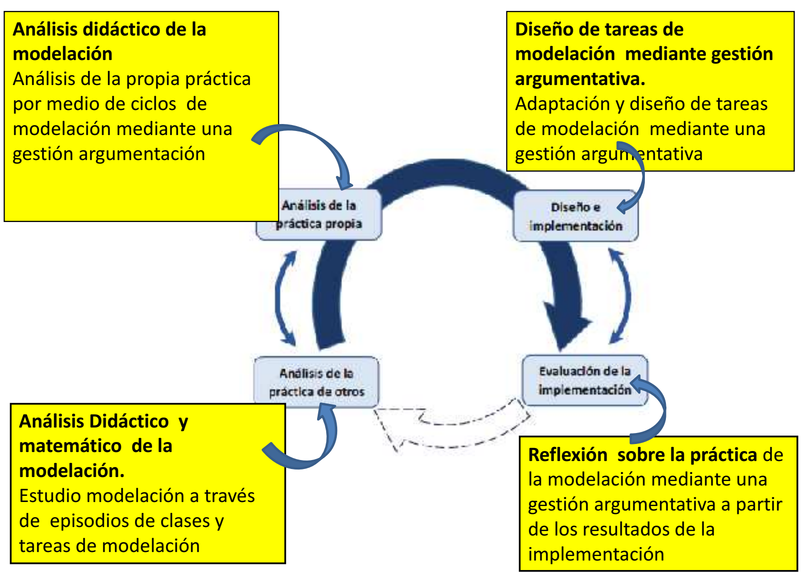


*Figura 1***.** Elaboración propia basada en el Modelo de formación MED

El equipo de investigadores elaboró una secuencia de tareas basada en situaciones de modelación para ser estudiadas con los docentes. El propósito es que reflexionen, mediados por el equipo de investigadores, sobre dichas situaciones para valorar las estrategias y habilidades matemáticas que colocan a prueba en ciclos de modelación (Etapa 1 y 2 del modelo MED) y el conocimiento base para elaborar su propia propuesta didáctica de aula, de acuerdo a su contexto, nivel y objetivos de aprendizaje, para posteriormente gestionar en el aula de matemática dicha secuencia de tareas (Etapa 3 y 4, modelo MED), con sus alumnos de enseñanza primaria. Esto permitirá que, posteriormente, reflexionen sobre la implementación por medio de la evaluación de la gestión argumentativa de la modelación a partir de los resultados de dicha implementación (Etapa 4 Modelo MED).

A modo de ejemplo, en la figura 2 se muestra la secuencia metodológica de la formación de los docentes, con la primera etapa que se ha trabajado, las actividades que dan respuesta a las etapas del modelo y las estrategias metodológicas.

Etapas modelo MED	Actividad	Estrategia Metodológica
I. Primera etapa. **Práctica de otros a través de casos.** **Análisis didáctico-matemático.** Análisis de situaciones de modelación e identificación de los procesos argumentativos que colocan a prueba.	**Análisis matemático y didáctico de los ciclos de modelación.** **(1) Análisis de casos**. Discusión de problemas para identificar procesos de modelación matemática. (1) Análisis didáctico y matemático del proceso de modelación • Contrate del proceso seguido con propuestas teóricas de la idea de modelo. (2) Analizar los procesos argumentativos que utilizan los docentes en cada uno de los ciclos de modelación matemática.	Se presenta un video de una clase con un caso para reconocer si es un problema de modelación. Argumentación colectiva. **Discusión grupal.** Oportunidades de aprendizaje sobre procesos matemáticos que son esenciales en la actividad matemática. Gestión argumentativa para los procesos de modelación matemática en el aula.

*Figura 2***.** Elaboración propia Secuencia metodológica de la formación docente

Implementación de la propuesta.

El curso de formación (12 sesiones de 3 horas) comenzó a implementarse en agosto de 2018. En esta primera parte se ha trabajado la primera etapa del modelo de formación MED. Durante el resto del año (octubre-diciembre de 2018) se implementará~~n~~ el resto de las etapas que se ha descrito (figura 1). Durante el 2019, se seleccionarán entre 7 y 9 docentes de Santiago y Concepción para hacer un seguimiento en sus aulas, el que permitirá analizar cómo aprenden los estudiantes cuando se promueve la argumentación y la modelización de manera articulada. A continuación, se describen las sesiones 1 a 4 correspondientes a la primera etapa.

La metodología de trabajo de las sesiones 1 y 2 consistió en que los docentes, tomando como base su propia experiencia, analizaran de qué manera se desarrollaba la modelación en episodios de clase de distintos cursos de Educación Primaria, para luego contrastar sus análisis por medio de apuntes con criterios sobre modelación en el aula de matemáticas. Ello busca que la apropiación de los temas sea por medio de conflictos cognitivos que evidencian los profesores a raíz del contraste entre sus concepciones y la teoría. En la sesión 3 y 4, en cambio, el foco estuvo en el desarrollo de tareas de modelación realizadas por los docentes para identificar cómo se enfrentan a los procesos de modelado a partir de sus intuiciones, concepciones, conocimientos matemáticos, estrategias para su resolución y etapas del ciclo de modelado que identifican para dar respuesta al problema, tanto en términos matemáticos como en términos de la situación real. A partir de la solución del problema, contrastan sus producciones con el ciclo de modelado de Maaß (2006). Se muestra en la figura 3 una situación trabajada en la etapa II.

Cuidemos el medio ambiente

En 1896 el científico sueco Svante Arrhenius fue el primero en predecir el efecto invernadero como resultado de las emisiones de dióxido de carbono en el aire por parte de los países industrializados. La quema de combustibles fósiles continúa produciendo 5,4 mil millones de toneladas de carbono al año, las cuales son absorbidas por la atmósfera y por los océanos. En 1990 el Grupo Internacional sobre el Cambio de Clima (GICC) pronosticó que, de continuar la tendencia actual, aumentará la temperatura promedio global de la Tierra.

La Tabla 1 muestra los datos del aumento de la temperatura global pronosticada, en grados Celsius.

1980	2000	2020	2040	2060	2080
0,0	0.42	0.84	1.26	1.68	2.10

A partir de la información:

1) Determina un modelo de manera que concuerde con los datos.
2) Explica el significado de los coeficientes de tu modelo
3) Predice la variación de temperatura estimada para los años: 2030 y 2085, respecto a 1980.

*Figura 3***.** Situación de modelado trabajadas por los docentes en Etapa, extraído de (Aravena y Caamaño, 2007)

Resultados preliminares de la implementación.

Para mostrar el proceso de apropiación de los docentes en la etapa I del proceso de formación, de las producciones de los docentes en las tareas de modelación se analiza el ciclo de modelación (Maaß, 2006), que incorpora las siguientes etapas: simplificación del problema real para obtener una primera aproximación el modelo, matematización para obtener el modelo matemático, trabajo matemático con el modelo para obtener una solución, interpretación de la solución, justificación de la validez del modelo, y, finalmente, el análisis y proyección del modelo, que requiere ser analizado en todo proceso de modelación matemática (Aravena, 2016).

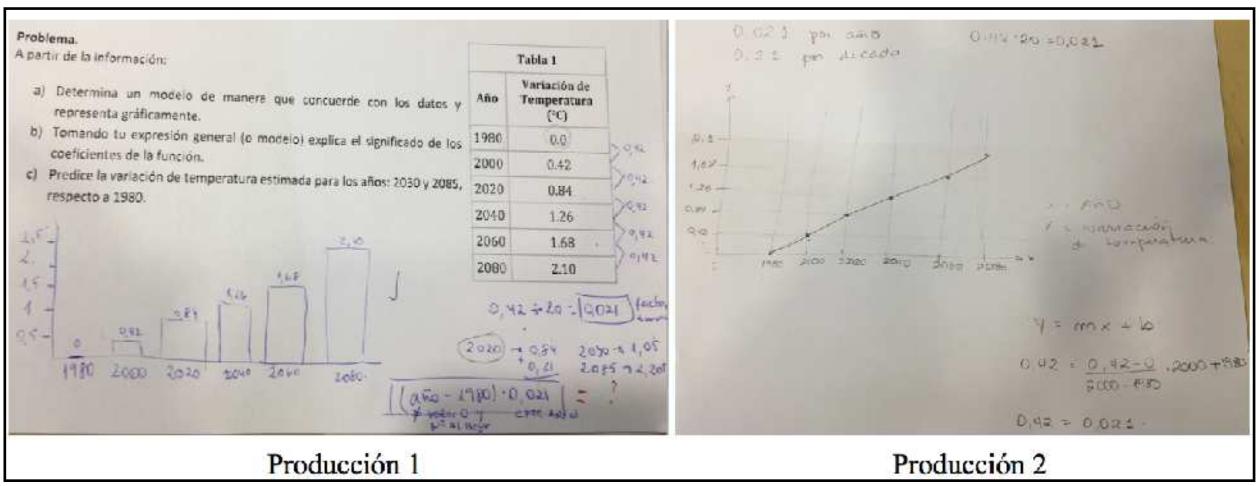


Figura 4: Producciones de docentes en la tarea de modelación "Cuidemos el medio ambiente", Etapa *1*

Para la tarea "Cuidemos el medio ambiente" en la figura 4 se muestran dos producciones de docentes. En la producción 1 se ha simplificado el problema mediante un gráfico de barras. En cambio, en la producción 2 se ha simplificado mediante un gráfico de líneas. Esto representa dos simplificaciones al modelo, uno discreto (producción 1) y el otro continuo (producción 2) de los datos del problema. En la fase de matematización, en la producción 1 se obtiene una expresión numérica $(año - 1980) \cdot 0{,}021$, usando "año" como variable y el valor 0.021 como un factor multiplicativo; mientras que en la producción 2 se muestra la ecuación $y = mx + b$, donde '*x*' es el año, '*y*' es la variación de temperatura, y el valor 0.021 representa la pendiente de la recta; aunque en la producción 2 no se aprecia la ecuación $y = 0.021x$. En ambos casos, el trabajo matemático se centró en obtener la solución al problema de encontrar una expresión matemática de la forma *T(t)=0.021t* en que *t* es el tiempo y *T(t)* es la variación de temperatura. En relación con la validación de los modelos, en la producción 1 el gráfico de barras representa un modelo discreto al problema, en cambio, en la producción 2, si bien el gráfico lineal permite hacer predicciones, no se considerado el año 1980 como tiempo cero, lo que impide que se llegue a la formulación del modelo. En ninguna de las producciones se analiza la proyección de los modelos matemáticos.

Más allá de las dificultades y errores que pueden tener los docentes de primaria para desarrollar problemas de modelación, los diferentes ciclos de modelación que se aprecian en las producciones son oportunidades para la gestión argumentativa. Por ejemplo, en la fase de simplificación del problema se pueden contrastar el gráfico de barras y lineal; y en la fase de validez se puede contrastar las expresiones algebraicas según las condiciones del problema. Este trabajo es promovido por los formadores con los profesores, con el propósito que los docentes pueden experimentar lo que espera que ellos mismos promuevan en clase con sus estudiantes.

Conclusiones

Se ha presentado una propuesta didáctica para la formación continua de profesores de primaria para fomentar procesos de modelación. Los resultados preliminares se centran en la etapa I del modelo de formación, en la que los docentes se ven enfrentados a tareas de modelación. En las etapas siguientes del modelo de formación, los docentes incorporarán estrategias argumentativas, que ya conocen, para gestionar la modelación en el aula de matemáticas, adaptando y diseñando tareas de modelación para ser implementadas.

Si bien esta comunicación se enmarca en un proyecto más amplio que tiene como propósito caracterizar los aprendizajes de los estudiantes al promover de manera articulada las competencias de argumentación y modelación en el aula de matemáticas, hemos diseñado una propuesta de formación de profesores, ya que para el desarrollo de la modelación mediante una gestión argumentativa no basta con una propuesta didáctica enfocada directamente al aula, sino que se requiere de una propuesta de mayor envergadura, que implica un desarrollo profesional de profesores para luego diseñar una propuesta didáctica conjunta entre profesores e investigadores.

Referencias y bibliografía

Agencia de Calidad de Educación (2014). *Informe Nacional Resultados Chile PISA 2012*, Agencia de Calidad de Educación, Chile: Autor.

Aravena, M. (2016). Modelización Matemática en Chile. En: J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa* (pp.195-234). México. Barcelona: Gedisa.

Aravena D, María, & Caamaño E, Carlos. (2007). Modelizacion matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *33*(2), 7-25. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052007000200001

Blomhoj, M. (2004). Mathematical modelling—a theory for practice. En B. Clarke et al. (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-160). Göteborg University: National center for mathematics education

Blomhøj, M., & Carreira, S. (2009). Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics. En *Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 6-13).

Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1 (1), 45-58.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86, 95.

Conner, A. M., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 401–429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8

Dede, A. T. (2018). Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1501825

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 3–21. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8

Kauertz, A., Neumann, K., & Haerting, H. (2012). Competence in science education. (B.Fraser, K. Tobin, & C. Mc Robbie, Edits.) Second International Handbook of Science Education, 711-721

Krummheuer. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Ed.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 60–82.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies?*ZDM*, 38(2), 113-142.

MINEDUC. (2013). *Bases curriculares chilenas 7º básico a 2º medio*. Santiago: Autor.

NCTM. (2000): *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Va: autor.

NCTM. (2014): *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All.* Reston, Va: autor.

Niss, M. & Højgaard, T. (2011). (eds.) *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark.*(English edition). IMFUFA tekst n. 485/2011. Roskilde: Roskilde University.

OECD. (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem* Solving *and Financial Literacy*. OECD Publishing. Recuperado el 05 de febrero de 2016 desde http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en

OECD. (2015). *PISA 2015 Integrated Design*. OECD Publishing: Paris.

OECD. (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. OECD Publishing: Paris.

Rasmussen, C., Stephan, M., & Allen, K. (2004). Classroom mathematical practices and gesturing. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*(3), 301–323.

Solar, H. & Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema*, *30*(56), 1092–1112

Solar, H., Ortiz, A., & Ulloa, R. (2016). MED: Modelo de formación continua para profesores de matemática, basada en la experiencia. *Estudios Pedagogicos*, *42*(4), 281–298. https://doi.org/10.4067/S0718-07052016000500016

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Nociones didácticas en la investigación en Educación Matemática: comparación del simposio de la SEIEM y la RELME

Paola **Castro**
Universidad de los Andes
Colombia
dp.castro116@uniandes.edu.co
Pedro **Gómez**
Universidad de los Andes
Colombia
argeifontes@gmail.com
María C. **Cañadas**
Universidad de Granada
España
mconsu@ugr.es

Resumen

Identificamos los atributos de caracterización de dos comunidades de Educación Matemática en relación con la medida en la que abordan nociones didácticas de la disciplina en sus trabajos de investigación y realizamos comparaciones entre ellas. Analizamos la documentación de las comunidades que convergen en el simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) y la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME). Tomamos como fuente de información los avances y resultados de investigación que fueron publicados en las actas del simposio de la SEIEM y de la RELME entre 2014 y 2017. A partir de una taxonomía de términos clave específica de la Educación Matemática, realizamos una aproximación semántica a su contenido. Establecemos la importancia de las nociones didácticas en las dos comunidades y sus atributos de distinción. Encontramos diferencias significativas entre las comunidades en las nociones enseñanza, análisis de contenido, currículo y profesor.

Palabras clave: educación, matemática, didáctica, investigación, comunidad.

Introducción

La Educación Matemática se ha consolidado como una disciplina en el sentido de que hay un conjunto de personas que converge en un repertorio compartido, con un foco de interés, un lenguaje y un propósito común (Ernest, 1998). La producción de conocimiento en esta disciplina en Iberoamérica y su difusión ámbitos locales y regionales ha aumentado, y se percibe diversidad en ella (Maz-Machado, Bracho-López, Torralbo-Rodríguez, Gutiérrez-Arenas y Hidalgo-Ariza, 2011). Por tanto, resulta importante caracterizar el conocimiento que es transmitido por la comunidad de investigadores y educadores matemáticos en eventos de relevancia. De este modo, es significativo estudiar la documentación de investigación que es producida por las comunidades en Educación Matemática que concurren en el simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) y en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), dada la relevancia e impacto de estos eventos en la disciplina en el ámbito iberoamericano. La RELME se constituye como un encuentro para consolidar redes de investigadores en América Latina (CLAME, 2018). El simposio de la SEIEM es representativo de la actividad investigadora en España (Maz-Machado et al., 2011). En Educación Matemática, es trascendental caracterizar las comunidades que emergen en ella de modo que se reconozcan, entre otros elementos, sus intereses de investigación (Rico, 2012).

En esta comunicación, proporcionamos resultados que permiten que la comunidad de investigadores y educadores matemáticos de Iberoamérica identifique los focos de interés en la investigación en relación con las nociones didácticas que aborda. Nos basamos en la documentación publicada por dos eventos de gran importancia en América Latina y España. El trabajo que presentamos se enmarca en un proyecto más amplio en el que pretendemos caracterizar la comunidad de Educación Matemática de habla hispana en términos de los patrones de producción de la documentación que produce.

Marco conceptual

La caracterización de una comunidad implica determinar sus atributos peculiares de modo que claramente se distinga de otras (Real Academia Española, 2018). En Educación Matemática, se emplean diversos medios de divulgación del conocimiento que es producido en ella (Waldegg, 1998). Además de la difusión en artículos y libros, en esta disciplina se produce documentación que surge de eventos académicos en los que se reúnen investigadores y educadores matemáticos. Los trabajos que son compartidos incluyen tanto resultados como avances de las investigaciones que se adelantan.

Con el propósito de hacer un análisis sistemático y objetivo de la ciencia, la bibliometría se centra en el estudio de las fuentes bibliográficas, con el propósito de identificar sus tendencias (Spinak, 2001). Los estudios bibliométricos consideran los elementos representativos de la documentación —título de la publicación, tipo de documento, idioma, resumen y palabras claves o descriptores— (Solano, Castellanos, López y Hernández, 2009). La organización y manejo de los datos permiten obtener datos numéricos —indicadores bibliométricos— que dan cuenta de los fenómenos sociales de la actividad científica de la disciplina (López Piñero y Terrada Ferrandis, 1992). Además de emplear indicadores de visibilidad e impacto y colaboración para establecer características de la documentación, hay una oportunidad de estudiar el desarrollo de una disciplina con indicadores de producción (Callon, Courtial y Penan, 1995) como la especialización temática. Para esto, el estudio del contenido de los documentos, desde una aproximación semántica, posibilita la identificación de los fenómenos o problemas concretos que se tratan en un documento (Abela, 2002). Es posible realizar el estudio de los documentos desde unas categorías relativas a clasificaciones de descriptores propios de la disciplina para determinar sus atributos respecto a su especialización temática.

Gómez y Cañadas (2013) presentan una taxonomía de la Educación Matemática que parte de una teoría curricular específica a la Educación Matemática. Esta taxonomía proporciona una clasificación y jerarquización de descriptores propios de la disciplina. Los autores diferencian los términos relacionados con la Educación Matemática de aquellos que abordan los contenidos matemáticos. En lo que respecta a la especificidad de descriptores en la Educación Matemática, adoptaron la teoría curricular (Rico, 1997). A partir de ella, Gómez y Cañadas (2013) organizan los descriptores en nueve categorías: (a) sistema educativo, (b) centro educativo, (c) aula, (d) alumno, (e) profesor, (f) aprendizaje, (g) enseñanza, (h) evaluación e (i) currículo. En cada categoría, los autores proponen valores más concretos. Por ejemplo, dentro de la categoría profesor, se pueden identificar valores como desarrollo del profesor, formación de profesores y relaciones entre profesores. Adicional a las mencionadas, los autores incluyen una categoría que se refiere a otras nociones de Educación Matemática, que incluye los siguientes valores: enfoques de las matemáticas escolares, evolución histórica de conceptos, fenomenología didáctica, fines, resolución de problemas y sistemas de representación. Tomamos como base la propuesta de (Gómez y Cañadas, 2013) para definir las variables de nuestro estudio.

Objetivos de investigación

El propósito del estudio que presentamos es identificar los atributos de caracterización de dos comunidades de Educación Matemática en relación con la medida en la que abordan nociones didácticas de la disciplina en sus trabajos de investigación. Los siguientes son los objetivos específicos.

- Establecer en qué medida se tratan las nociones didácticas en la investigación de las comunidades que convergen en el simposio de la SEIEM y en la RELME.
- Determinar las nociones didácticas en las que difieren los intereses de investigación de las dos comunidades.

Método

El estudio que realizamos es documental de tipo descriptivo. Las fuentes de información son las actas del simposio de la SEIEM y las actas de la RELME —que corresponden a trabajos de investigación— que fueron publicadas entre 2014 y 2017. Tomamos 344 documentos de las contribuciones realizadas en las versiones XVIII a XXI del simposio de la SEIEM (Fernández, Molina y Planas, 2015; González, Codes, Arnau y Ortega, 2014; Macías, Jiménez, González, Sánchez, Hernández, Fernández *et al.*, 2016; Muñoz, Arnal-Bailera, Beltrán-Pellicer, Callejo y Carrillo, 2017) y 515 documentos publicados en los volúmenes 27 a 30 del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Flores, 2015; Lestón, 2014; Mariscal, 2016; Serna Martínez, 2017).

Variables

De acuerdo con las categorías de temas específicos a Educación Matemática de la taxonomía de Gómez y Cañadas (2013), definimos las variables del estudio. Estas son: sistema educativo, centro educativo, aula, alumno, profesor, aprendizaje, enseñanza, evaluación, gestión curricular, análisis de contenido (historia de los contenidos, sistemas de representación y fenomenología) y resolución de problemas. Las variables son dicotómicas (valor 1, si el documento cumple con la condición de la variable y 0, si no).

Procedimientos

Realizamos una aproximación semántica a los documentos para codificarlos en términos de las variables dicotómicas de nuestro estudio, con el detalle necesario que nos permitiera identificar los fenómenos y problemas concretos que abordan. Organizamos los resultados de la codificación en bases de datos. Un documento podía estar codificado en una o más variables, porque trata una o más nociones didácticas (p. ej., aula y evaluación). Determinamos que hay un éxito si el documento está codificado en una variable (valor 1) y hay un fracaso, si no lo está (valor 0). Una vez realizada la codificación por un equipo de codificadores, un revisor de las codificaciones verificó la validez y precisión de la información que fue registrada para cada documento y verificó que las variables asociadas a cada documento daban cuenta de los fenómenos que este abordaba. Un último revisor supervisó el trabajo realizado por el revisor de la codificación.

Con procedimientos de estadística descriptiva, obtuvimos las proporciones de documentos de cada comunidad que trata cada variable. De esta forma, establecimos la importancia relativa de las nociones didácticas en el simposio de la SEIEM y en la RELME. Identificamos la medida en la que estas nociones son tratadas por cada comunidad. De esta manera, determinamos los focos de interés en la investigación de las comunidades en relación con la especialización temática.

Para establecer las nociones didácticas en las que se diferencian las comunidades, determinamos las variables en las que hay diferencias estadísticamente significativas. Para esto, tuvimos en cuenta las proporciones de documentos que cada comunidad tiene en cada variable. Realizamos pruebas de hipótesis de comparación de proporciones.

Resultados

En la figura 1, presentamos la importancia relativa de las nociones didácticas en las dos comunidades. También, incluimos el P-valor obtenido en las pruebas de hipótesis sobre la igualdad de proporciones en cada variable.

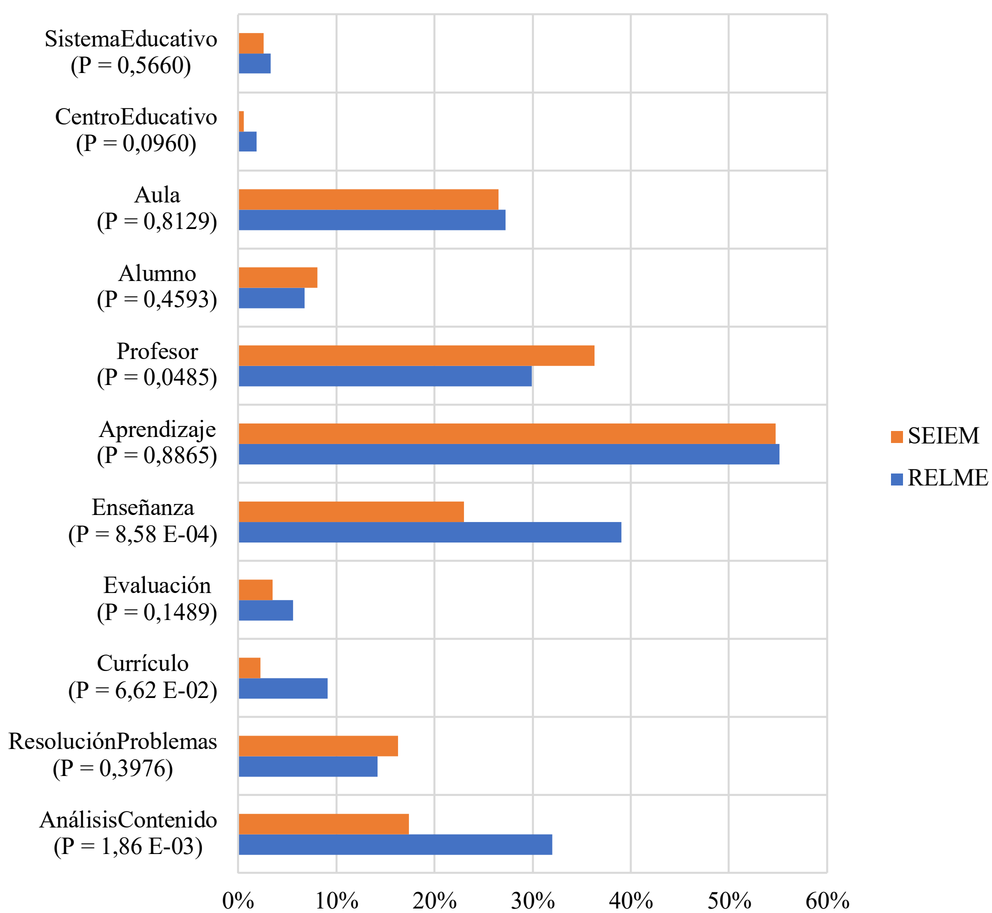


Figura 1. Importancia relativa de las nociones didácticas en las comunidades

Como se observa en la figura 1, aprendizaje es la noción que se trata de manera más importante en la comunidad que participa en el simposio de la SEIEM. Le sigue la noción de profesor. Aula y enseñanza se abordan, en promedio, en un 24,7%. Las nociones evaluación y currículo tienen una importancia mínima en esta comunidad, además de sistema y centro educativo. En contraste, se evidencia un interés importante por tratar elementos de análisis de contenido y resolución de problemas.

Encontramos que en la RELME se destaca interés por la noción curricular aprendizaje. Le siguen enseñanza y análisis de contenido. Esta variable está por encima de nociones como currículo, alumno y evaluación. Profesor y aula tienen una importancia relativa media de 28,5%, cada una. En menor medida, se tratan aspectos relacionados con sistema y centro educativo.

Podemos ver en la figura 1 que la noción didáctica que más se aborda en los dos eventos es aprendizaje. También, se evidencia la importancia reducida que currículo, evaluación, sistema y centro educativo tienen en las comunidades que convergen en ambos eventos. Aunque en ambas comunidades es importante el estudio del contenido matemático, es claro que en la RELME su relevancia supera la de las nociones profesor y aula. En comparación con la RELME, la comunidad que converge en el simposio de la SEIEM estudia en mayor medida aspectos relacionados con alumno, profesor y resolución de problemas.

Evaluamos la relación entre las proporciones en las que las comunidades tratan las nociones didácticas. Identificamos diferencias estadísticamente significativas en las variables profesor, enseñanza, currículo y análisis de contenido. Encontramos que el simposio de la SEIEM se distingue de la RELME por la importancia que tiene la variable profesor en su documentación. Las variables en las que la RELME se destaca por tener mayor proporción de documentos son enseñanza, análisis de contenido y currículo.

Debido a la relevancia que tiene la noción aprendizaje en la investigación de ambas comunidades, decidimos indagar por aspectos específicos dentro de esta noción en los que las comunidades podrían tener diferencias. Entonces, establecimos tres subvariables dentro de la variable aprendizaje de acuerdo con la taxonomía de Gómez y Cañadas (2013): aspectos afectivos —actitud, ansiedad, creencias, motivación—, cognición —conocimiento, dificultades, errores, rendimiento— y procesos cognitivos —abstracción, aplicación, comprensión, cálculo mental, formulación de conjeturas, generalización, modelización, pensamiento matemático, procesos de justificación, razonamiento—. Determinamos la proporción de documentos de cada comunidad en estas subvariables y obtuvimos los resultados que presentamos en la figura 2.

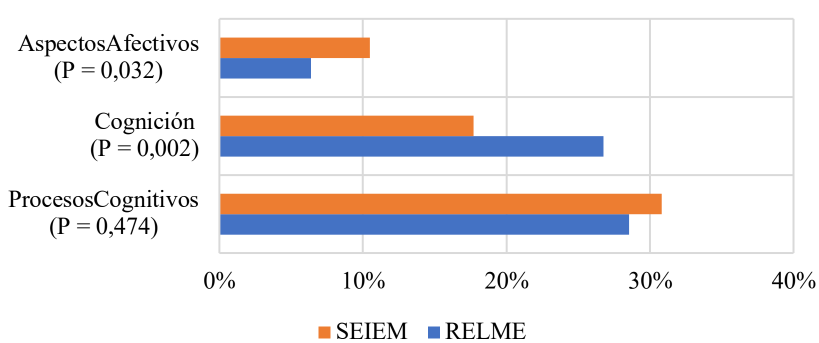


Figura 2. Importancia relativa de las subvariables de aprendizaje en las comunidades

Con un nivel de significancia de 0,05, identificamos diferencias estadísticamente significativas entre las comunidades que concurren en el simposio de la SEIEM y en la RELME en la medida en la que tratan aspectos afectivos y cognición. En el simposio de la SEIEM se trata con mayor relevancia lo concerniente a afectividad, mientras que en la RELME hay más preocupación por la cognición.

En el caso de la variable aula, la diferencia entre las proporciones de documentos del simposio de la SEIEM y de la RELME es mínima. Por tanto, determinamos tres subvariables que nos permitieran identificar distinciones entre las comunidades. Estas subvariables son: relaciones interpersonales, recursos didácticos y gestión de aula (Gómez y Cañadas, 2013). Como se observa en la figura 3, hay una diferencia estadísticamente significativa en la medida en la que las comunidades aborda la gestión de aula. La comunidad que concurre en la RELME da mayor importancia a este aspecto en comparación con el simposio de la SEIEM.

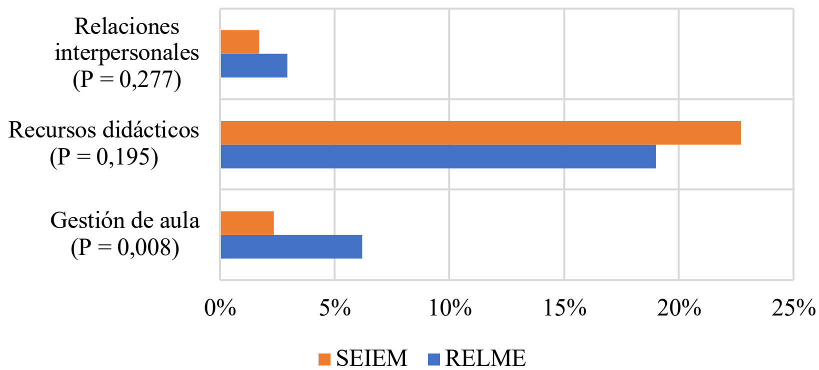


Figura 3. Importancia relativa de las subvariables de aula en las comunidades

Conclusiones

El propósito de este estudio estaba en identificar atributos de caracterización de las comunidades que concurren en el simposio de la SEIEM y en la RELME en relación con su investigación en nociones didácticas de la Educación Matemática. Para ello, realizamos una aproximación semántica al contenido de los documentos publicados entre 2014 y 2017 por ambos eventos. Utilizamos una taxonomía de términos clave que es específica a la disciplina para establecer los descriptores de los documentos en relación con las variables sistema educativo, centro educativo, aula, alumno, profesor, aprendizaje, enseñanza, evaluación, gestión curricular, análisis de contenido y resolución de problemas. Calculamos la proporción de documentos de las dos comunidades en cada variable para establecer en qué medida tratan las nociones didácticas. Posteriormente, identificamos en cuáles de estas nociones las comunidades tienen diferencias estadísticamente significativas.

En ambos eventos, identificamos la importancia reducida que tienen las nociones currículo, evaluación, sistema y centro educativo. Encontramos que las dos comunidades tienen un gran interés por tratar cuestiones relacionadas con el aprendizaje; sin embargo, difieren en que los aspectos afectivos son abordados en mayor medida en el simposio de la SEIEM y la cognición en la RELME. En comparación con la RELME, la comunidad que converge en el simposio de la SEIEM estudia en mayor medida la noción profesor. En la RELME, la relevancia está en las nociones enseñanza, análisis de contenido y currículo. También observamos que, en la variable aula, la RELME se distingue de la SEIEM por su interés por la gestión de aula.

En este trabajo, realizamos una aproximación al proceso de caracterización de comunidades en Educación Matemática a partir del conocimiento que producen y difunden en eventos académicos. Consideramos que conocer los atributos de caracterización de dos comunidades que son relevantes en España y en América Latina genera nuevas oportunidades de investigación. A partir de la identificación de los intereses de estas comunidades, se podrían concretar nuevas subvariables de las variables asociadas a las nociones didácticas, como lo hicimos en el caso del aprendizaje. Además de hacer referencia al estado actual de la investigación en estas nociones, sería interesante establecer el comportamiento de las variables en el tiempo. Para continuar el trabajo realizado por otros investigadores en Educación Matemática (por ejemplo, Jiménez-Fanjul, Maz-Machado y Bracho-López, 2013; Maz-Machado, Bracho-López, Torralbo-Rodríguez, Gutiérrez-Arenas, Jiménez-Fanjul y Adamuz-Povedano, 2012), sería posible identificar redes de colaboración científica en cada comunidad y entre ellas.

Referencias y bibliografía

Abela, J. A. (2002). Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada. España: Fundación Centro de Estudios Andaluces.

Callon, M., Courtial, J. P. y Penan, H. C. (1995). *Cienciometría. El estudio cuantitativo de la actividad científica: de la bibliometría a la vigilancia tecnológica*. Gijón, España: Ediciones TREA.

CLAME. (2018). RELME. Descargado el 18/10/2018, de https://clame.org.mx/relme/

Ernest, P. (1998). A postmodern perspective on research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 71-85). Dordrecht: Springer.

Fernández, C., Molina, M. y Planas, N. (Eds.). (2015). *Investigación en Educación Matemática XIX* (Vol. XIX). Alicante, España: SEIEM.

Flores, R. (Ed.). (2015). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 28). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2013). Development of a taxonomy for key terms in mathematics education and its use in a digital repository. *Library Philosophy and Practice (e-journal)*.

González, M. T., Codes, M., Arnau, D. y Ortega, T. (Eds.). (2014). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (Vol. XVIII). Salamanca, España: SEIEM.

Jiménez-Fanjul, N., Maz-Machado, A. y Bracho-López, R. (2013). Quiénes son y qué citan los autores españoles de educación matemática en el Social Science Citation Index. *Epsilon, 30*(3), 55-68.

Lestón, P. (Ed.). (2014). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 27). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

López Piñero, J. M. y Terrada Ferrandis, M. (1992). Los indicadores bibliométricos y la evaluación de la actividad médico-científica: los indicadores de producción, circulación y dispersión, consumo de la información y repercusión. *Medicina clínica, 98*(4), 142-148.

Macías, J. A., Jiménez, A., González, J. L., Sánchez, M. T., Hernández, P., Fernández, C., et al. (Eds.). (2016). *Investigación en Educación Matemática XX* (Vol. XX). Málaga, España: SEIEM.

Mariscal, E. (Ed.). (2016). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 29). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Maz-Machado, A., Bracho-López, R., Torralbo-Rodríguez, M., Gutiérrez-Arenas, M.-P. y Hidalgo-Ariza, M.-D. (2011). La investigación en Educación Matemática en España: los simposios de la SEIEM. *PNA, 5*(4), 163-185.

Maz-Machado, A., Bracho-López, R., Torralbo-Rodríguez, M., Gutiérrez-Arenas, M. P., Jiménez-Fanjul, N. y Adamuz-Povedano, N. (2012). Redes académicas generadas por las tesis doctorales de educación matemática en EspaÃ±a. *Revista de Investigación Educativa, 30*(2), 271-286.

Muñoz, J. M., Arnal-Bailera, A., Beltrán-Pellicer, P., Callejo, M. L. y Carrillo, J. (Eds.). (2017). *Investigación en Educación Matemática XXI* (Vol. XXI). Zaragoza, España: SEIEM.

Real Academia Española. (2018). Diccionarios de la lengua española. Descargado el 18/10/2018, de http://www.rae.es/

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*(1), 39-63.

Rico, L. (Ed.). (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid, España: Síntesis.

Serna Martínez, L. A. (Ed.). (2017). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 30). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Solano, E., Castellanos, S., López, M. y Hernández, J. (2009). La bibliometría: una herramienta eficaz para evaluar la actividad científica postgraduada. *MediSur. Revista electrónica, 7*(4), 59-62.

Spinak, E. (2001). Indicadores cienciométricos. *ACIMED, 9*(4), 16-18.

Waldegg, G. (1998). La educación matemática ¿una disciplina científica? *Colección Pedagógica Universitaria*(29), 13-44.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Análisis de las respuestas de escolares de 7 años al resolver problemas de comparación e igualación

Dra. Carmen Paz **Oval Soto**
Universidad de Magallanes
Chile
carmen.oval@umag.cl
Dra. Paola **Donoso Riquelme**
Universidad de Magallanes
Chile
paola.donoso@umag.cl

Resumen

El siguiente texto tiene por objetivo identificar los errores y procedimientos que realizan los escolares de 7 años al enfrentarse a problemas de comparación e igualación. Para el logro de este objetivo, nos hemos basado en dos de las cuatro categorías de Carpenter y Moser (1983): comparación e igualación. El análisis de las producciones escritas de los estudiantes de 2do año de primaria permitió identificar los errores y los procedimientos más utilizados por ellos. Tal y como se esperaba, el problema de igualación es respondido de manera incorrecta por el 61% de los estudiantes mientras que el problema de comparación es respondido de manera incorrecta por el 62% de los estudiantes.

Palabras clave: resolución de problemas, matemática, errores, procedimientos.

Introducción

La resolución de problemas implica el desarrollo de habilidades, actitudes y valores que entrega la oportunidad a que los estudiantes puedan desarrollar el pensamiento crítico, la argumentación de sus ideas, entre otras competencias. Poirier-Proulx (1999) subraya que la resolución de problemas pone en juego tanto habilidades intelectuales como habilidades metacognitivas. La autora afirma que resolver problemas requiere también la utilización de conocimientos y de ciertas habilidades que el estudiante debe poseer para poder reconocer los aspectos que van a permitirle resolver la situación propuesta. La resolución de problemas crea un ambiente espléndido para poder desarrollar la comunicación dentro del grupo curso, puesto que, el estudiante a través de esta forma da a conocer los métodos empleados, se crea un espacio de discusión entre los estudiantes en el que el profesor es un mediador. Finalmente, la resolución de problemas ocupa un lugar importante tanto en el aprendizaje de las matemáticas como en otras disciplinas.

Marco teórico

Las investigaciones realizadas en didáctica de la matemática, sobretodo en educación básica, se han centrado en diferentes aspectos de la resolución de problemas. Entre estas investigaciones, algunas han abordado la resolución de problemas según su estructura (Bermejo y Rodríguez, 1987; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; Carpenter y Moser, 1984; Riley, Greeno y Heller, 1983), la utilización del simbolismo matemático (Vergnaud, 1990) y la influencia de las variables didácticas (DeBlois, 2011; Weisser, 1999). Por otro lado, algunas investigaciones se han centrado en las dificultades de los estudiantes en resolver problemas en matemáticas debido a la comprensión de las relaciones y de los algoritmos (Baffrey Dumont, 1996; Bermejo y Rodríguez 1987; Carpenter y Moser, 1984; Fayol, 1990; Nantais, 1991; Vergnaud, 1990; Weisser, 1999).

Estas diferentes investigaciones se detuvieron en la resolución de problemas matemáticos por parte de los estudiantes desde el punto de vista de las estrategias de resolución privilegiadas así como también en la utilización del simbolismo matemático pasando por las cuatro operaciones elementales (adición, sustracción, multiplicación y división). Un análisis de los trabajos de investigación sobre resolución de problemas pone en evidencia el interés de estos autores sobre el desarrollo de conocimiento matemáticos de los estudiantes.

Categorización de problemas de Carpenter & Moser (1983)

Desde los años 1980, la resolución de problemas de estructuras aditivas ha sido un objeto de estudio importante en diferentes universidades de los Estados Unidos y Europa. Varios estudios realizados en esa época se volvieron clásicos en el área de la resolución de problemas en matemática. (Carpenter et al, 1981; Carpenter y Moser, 1983; Riley et al, 1983; Riley y Greeno, 1988; Vergnaud y Durand, 1976; Vergnaud, 1982)

La investigación realizada por Carpenter y Moser (1983: 16) identificó cuatro clases diferentes de problemas que usan operaciones de suma y resta: cambio, combinación, comparación e igualación. Estas categorías nos permiten tener problemas verbales con las características semánticas que implican operaciones de suma, resta o ambas. Por su parte, Riley et al. (1983, p.160), en un proyecto de investigación que se centró en el desarrollo de habilidades de resolución de problemas aritméticos estudiantiles, identificó tres clases diferentes de problemas: los problemas de cambio, comparación y combinación. También consideraron tres dimensiones importantes en la resolución de problemas de las estructuras aditivas: las relaciones semánticas, la operación involucrada y la identidad del elemento desconocido. Es sobre esta base que se han creado los diferentes tipos de problemas.

Problemas de Cambio

Los problemas de cambio se caracterizan por el hecho de que tienen una cantidad inicial y una acción directa o implícita que causa un cambio en esta cantidad inicial. Este tipo de problema implica al menos una transformación temporal aplicada a un estado inicial y que da como resultado un estado final. Riley et al. (1983) señalan que, en este tipo de problema, la transformación puede ser aditiva o sustractiva, como en el siguiente ejemplo: "Jean tiene 5 canicas. José le da tres más. ¿Cuántas bolas tiene John ahora?”.

Problemas de Combinación

Este tipo de problema presenta una relación estática que involucra dos cantidades distintas que son parte de un todo. No hay transformaciones y lo desconocido puede afectar al total o a una de las partes. Este tipo de problema se presenta en los siguientes problemas: "*John tiene 4 caramelos. Anne tiene 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos tienen juntos?*" o *"Algunos niños van a patinar sobre hielo. Hay 3 niñas y 9 niños. ¿Cuántos niños van a patinar sobre hielo?"*

Problemas de comparación

En algunos casos, para Carpenter et al. (1981), los problemas implican la comparación de dos cantidades distintas. Los autores explican que en este tipo de problema, es necesario encontrar la diferencia entre las dos cantidades dadas. En otras palabras, el estudiante hace una comparación de los conjuntos para encontrar la diferencia, que puede relacionarse con uno de los dos conjuntos, como por ejemplo: "Marc ganó 4 premios en el festival. Su hermana Connie ganó 8 premios en el mismo festival. ¿Cuántos premios ha ganado Connie más que su hermano Marc?". En este tipo de problema, Riley et al. (1983) identificaron tres tipos diferentes de problemas que implican la comparación: la diferencia, el conjunto comparado y el conjunto de referencia y la categoría no posee subdivisión.

Problemas de igualación

Este tipo de problema tiene las mismas características que los problemas de cambio y comparación. La diferencia es que aquí se comparan dos conjuntos de datos, y para responder a la pregunta del problema, una de las dos cantidades debe ser igualada. Este es el caso en el siguiente problema: "Pierre tiene 12 canicas. Betty tiene 7. ¿Qué debería hacer Betty para tener tantos mármoles como Peter? y está presente solo en Carpenter et al. (1981).

Vergnaud (1982) explica que los problemas de comparación, combinación y de cambio permiten al niño comprender las dos ideas principales del concepto primitivo del número: la cardinalidad y la adición. El autor señala que las situaciones de tipo aditivo son de disímil dificultad porque ellos están construidos a partir de diferentes variables didácticas como las clases de problemas, los tipos de números y los cálculos a realizar, el orden de presentación de datos y el contenido de los problemas. El autor señala que desde que los niños están en la edad escolar, se enfrentan a situaciones en las que ellos deben apropiarse de los conocimientos diversos sobre el número.

Dificultades en la resolución de problemas

Si bien la resolución de problemas es un espacio privilegiado para el desarrollo de aprendizaje en matemática, diversos estudios realizados en el área de la didáctica de la matemática, sobretodo en la resolución de problemas de estructura aditiva, han mostrado la presencia de dificultades en la resolución por parte de los estudiantes. Las investigaciones llevadas a cabo por Riley et al (1983), Vergnaud (1982) así como también por Bermejo y Rodríguez (1987) han mostrado que ciertas variables didácticas, tales como el largo del enunciado del problema, la complejidad gramatical, el ámbito numérico en juego en la situación y el orden de los datos de un problema, tienen efectos significativos sobre la resolución de problemas en el estudiante. Estas variables pueden ser controladas por el profesor cuando crea los problemas que entregará a los estudiantes. De hecho, las investigaciones llevadas a cabo por Bermejo y Rodríguez (1987) y Fayol (1990) han mostrado que les problemas representados por frases donde la incógnita está en primer o en segundo lugar son más difíciles para los estudiantes que los problemas representados por ecuaciones donde el resultado es desconocido. Estas mismas investigaciones han establecido también que la formulación verbal del problema aumenta el nivel de dificultad para los niños que deben resolver este tipo de problema propuesto por el profesor. Además, de estas variables se desprenden cuatro grandes conjuntos: cambio, reunión y complemento de conjuntos, comparación e igualación.

Los estudios que se ocupan de la resolución de problemas con la estructura de aditivo (Baffrey Dumont, 1996; DeBlois, 1997) muestran que los estudiantes asocian el término utilizado en la operación aritmética sin necesidad de entender la relación en juego, por ejemplo, DeBlois (1997) presentó la siguiente situación a los estudiantes: Tienes 54 autos en tu caja de juguetes. Tu vecino tiene 42 autos menos que tú. ¿Cuánto tiene tu vecino con autos en su caja de juguetes? Para responder a esta situación, uno de los estudiantes que participó en el estudio restaba, pero le costaba entender que el resultado coincidía con el conjunto en comparación. En este caso, la comprensión de la situación, desde el punto de vista del niño, es rudimentaria. Otro aspecto importante observado en esta investigación es la diversidad de enunciados. Los niños tienden a reconstruir los problemas de diferentes maneras. En otras palabras, el estudiante cambia el significado de los datos del enunciado del problema para que coincida con la estrategia de resolución que conoce o porque la declaración es demasiado compleja para él.

Los cambios en los problemas involucran diferentes variables didácticas tales como la estructura del problema, el tamaño de los números y la familiaridad con el contenido matemático del enunciado. Estas variables didácticas pueden modificar las estrategias utilizadas por los estudiantes. Un estudio realizado por Weisser (1999) mostró que la variable "orden de presentación de los datos" no tiene una influencia significativa en la elección de las estrategias de los alumnos. La variable "tipo de números" parece tener una influencia significativa en la elección de la estrategia adoptada por el estudiante al resolver la situación propuesta, además de resaltar una cierta autonomía en el desarrollo de ciertas habilidades.

DeBlois (2011) informa que la enseñanza de algoritmos en niños de primer año podría ser perjudicial para el desarrollo del razonamiento matemático de los niños cuando resuelven problemas con una estructura aditiva. La autora explica que las estrategias de resolución de los niños evolucionan, es decir, los niños comienzan a pensar o actuar mentalmente para obtener una respuesta. Una vez que los niños han explorado este paso, pueden representar (o externalizar) este conocimiento ya sea por sus propias palabras o por símbolos personales hasta el uso de símbolos formales.

Se han realizado varias investigaciones para resolver problemas matemáticos en los estudiantes desde el punto de vista de las dificultades encontradas para resolver problemas en matemáticas. Estas dificultades están relacionadas, para algunos autores, con la comprensión del enunciado y la comprensión de los algoritmos de cálculo.

Comprender las relaciones

Diversas investigaciones han demostrado que cuando los estudiantes resuelven problemas tienen dificultades para comprenderlo, tanto sobre la posición de la incógnita como en la cuestión en el enunciado (Baffrey- Dumont, 1996; Bermejo y Rodríguez, 1987; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; DeBlois, 1997; Fayol, 1990; Oval, Oliveira y López, 2017; Weisser, 1999). Por ejemplo, la investigación realizada por Bermejo y Rodríguez (1987) muestra que la estructura semántica del problema a resolver influye en la elección del estudiante de las estrategias de resolución. En otras palabras, los problemas en que la incógnita está en el operando (a + b = ;? + A = b) se considera más difícil que aquellos en los que la incógnita está en el resultado (a + b =?)

Comprender los algoritmos

Varios autores han identificado los errores que los estudiantes hacen al resolver algoritmos de suma y resta (Bermejo et al., 2004, Carpenter y Moser 1984, Nantais 1991). Carpenter y Moser (1984) mencionan que el aprendizaje del algoritmo supone una comprensión de muchos elementos tales como la comprensión de la numeración posicional, la operación aritmética a realizar, los símbolos utilizados y las reglas o propiedades relacionadas con la operación. Bermejo et al. (2004) explican que incluso si el alumno resuelve un algoritmo paso a paso, eso no significa que haya entendido lo que hizo. De hecho, para comprender el algoritmo formal y su uso, el estudiante debe relacionar cada elemento (números y operaciones).

Por otro lado, Nantais (1991) explica que los errores ocurren por varias razones, pero que podrían estar relacionados con el conocimiento del sistema numérico o la enseñanza recibida del estudiante, es decir, diga las generalizaciones que puede hacer cuando el maestro le dice, por ejemplo, "que no puede restar un número pequeño de un número grande" (p.5). Como hemos visto anteriormente, los estudios presentados muestran que la estructura del problema y las diferentes variables consideradas en el problema tienen una influencia directa en la elección de las estrategias movilizadas por los alumnos y en las dificultades que pueden aparecer.

Así, como objetivo para esta comunicación nos hemos trazado el identificar los errores y procedimientos que realizan los escolares de 7 años al enfrentarse a problemas de comparación e igualación.

Metodología y Análisis de resultados

En este texto nos abocaremos a identificar los errores y procedimientos de resolución escolares de 7 años y que cursan 2do año de primaria. Los problemas fueron presentados de manera aleatoria e individual y creados a partir de las categorías de Carpenter y Moser (1983). En ambos casos los problemas fueron resueltos por 90 estudiantes. Los análisis realizados a los procedimientos de los escolares nos permitirán identificar los errores que cometen estos al momento de enfrentarse a problemas de comparación e igualación.

Resultados

De manera general, los resultados obtenidos muestran que al plantear problemas de igualación y comparación los estudiantes comenten más errores que en otro tipo de problemas. Ante el problema de igualación *"Sara tiene 13 libros. Si Francisca compra 5 libros, ella tendrá tantos libros como Sara. ¿Cuántos libros tiene Francisca?*, cuyo procedimiento correcto consiste en realizar un procedimiento sustractivo, restando 13 menos 5, para llegar a la respuesta que es *Francisca tiene 8 libros*, los análisis de las respuestas dadas por los 90 escolares que lo resolvieron, se observa que del total de estudiantes que respondieron el problema de igualación 32% lo respondieron de forma correcta, 61% de manera incorrecta, y 7% no lo respondieron. En cuanto a los procedimientos que utilizaron los estudiantes, la tabla 1 sintetiza las diferentes formas de registrar el resultado y procedimiento que realizaron los escolares, para dar respuesta al problema de igualación. Destaca que el algoritmo de sustracción permite resolver el problema, sin embargo, dos escolares plantearon el algoritmo de sustracción, pero obtuvieron un resultado incorrecto, lo que manifiesta la comprensión del enunciado, por tanto la dificultad radica en la resolución del algoritmo.

Tabla 1.
Registro de respuestas dadas al problema de Igualación

Respuestas	Algoritmo de Sustracción	Algoritmo de Adición	Palotes	Palabras	Número	N° de Escolares
Correctas	26	0	3	0	0	29
Incorrectas	2	45	0	7	1	55
No responden	--	--	--	--	--	6
Total	28	45	3	7	1	90

Ante el problema de comparación *Susana tiene 28 chalecos. Ella tiene 9 chalecos menos que Cecilia. ¿Cuántos chalecos tiene Cecilia?”*, cuyo procedimiento correcto consiste en realizar una adición, sumando 28 más 9, para llegar a la respuesta que es *Cecilia tiene 37 chalecos*, los análisis de las respuestas dadas por los 90 escolares que lo resolvieron, se observa que 30% de ellos respondieron de forma correcta, 62% lo resolvieron de manera incorrecta y 8% no respondieron. En cuanto a los procedimientos que utilizados, la tabla 2 sintetiza las diferentes formas de registrar el resultado y procedimiento que realizaron los escolares, para dar respuesta al problema de comparación. Destaca que el algoritmo de adición permite resolver el problema, sin embargo, nueve escolares plantearon el algoritmo de adición, pero obtuvieron un resultado incorrecto.

Tabla 2
Registro de respuestas dadas al problema de Comparación

Respuestas	Algoritmo de Adición	Algoritmo de Adición y palotes	Algoritmo de Sustracción	Algoritmo de Sustracción y palotes	Palabras y palotes	Palotes	Palabras	Números	N° de Escolares
Correctas	21	3	0	0	1	0	2	0	27
Incorrectas	9	1	38	2	0	1	4	1	56
No Responden	--	--	--	--	--	--	--	---	7
Total	30	4	38	2	1	1	6	1	90

Conclusión

Los análisis realizados en torno a la resolución de problemas de comparación e igualación nos han permitido identificar los errores y procedimientos que realizan los escolares de 7 años al momento de resolver los problemas planteados. El análisis en torno a los procedimientos como tal, muestran la utilización del algoritmo tradicional con las dificultades que esto conlleva. En relación a las respuestas otorgadas por los estudiantes al problema de igualación, el análisis de las respuestas correctas permite identificar 2 categorías de respuesta: una de ellas es la realización del algoritmo de sustracción y la segunda es el registro gráfico correspondiente a dibujar la cantidad total de “palote” y tachar aquellos que hay que sustraer. Respecto al registro de las respuestas incorrectas, se identifican 4 tipos de registros: error de resolución del algoritmo de sustracción, la realización del algoritmo de adición lo que evidencia la incomprensión del enunciado, repetición de la información del problema sin necesariamente llegar a resolverlo y finalmente, escribe una respuesta numérica sin dejar rastro del procedimiento que utilizó para la resolución.

Si nos enfocamos en las respuestas correcta del problema de comparación, el análisis de las respuestas de los estudiantes permite identificar 4 tipos de registro: algoritmo de adición, algoritmo de adición y “palotes”, palabras y “palotes” y solo palabras. Respecto a esto último, los estudiantes no registran de manera gráfica su respuesta y sólo escriben el resultado sin dejar rastro del procedimiento realizado. En relación a las respuestas incorrectas, se identifican 7 tipos de registro: algoritmo de adición, algoritmo de adición y “palotes”, algoritmo de sustracción, algoritmo de sustracción y “palotes”, “palotes”, palabras y números. En las producciones escritas de estudiantes que resolvieron con algoritmo de adición pero su respuesta es incorrecta, se debe a una dificultad en la comprensión de la relación entre los sumandos o en el valor posicional al momento de realizar la adición.

Las dificultades evidenciadas por este grupo de estudiantes permitirán al profesor tomar decisiones en beneficio del desarrollo de la habilidad de resolución de problemas y a los estudiantes superar aquellos errores que manifiestan en su actividad matemática.

Referencias y bibliografía

Baffrey-Dumont, V. (1996). Résolution de problèmes arithmétiques par des enfants de huit ans. Revue des sciences de l’éducation, 22(2), 321–343. Retrieved from http://www.erudit.org/revue/RSE/1996/v22/n2/031883ar.pdf

Bermejo, V., & Rodríguez, P. (1987). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. Infancia y aprendizaje, 39-40, 71–81.

Carpenter, T., Hiebert, J., & Moser, J. (1981). Problem Structure and First-Grade Children’s Initial Solution Processes for Simple Addition and Subtraction Problems. Journal for Research in Mathematics Education, 12(1), 27–39. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/748656. doi:10.2307/748656

Carpenter, T., & Moser, J. (1983). The acquisition of addition and substraction concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. Academic Press.

Carpenter, T., & Moser, J. (1984). The acquisition of addition and substraction concepts in grades one through three. Journal for Research en Mathematics Education, 15(3), 179–202.

De Corte, É., & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders’ strategies for solving addition and subtraction word problems. Journal for Research en Mathematics Education, 18(5), 363–381.

De Corte, E., Verschaffel, L., & De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children’s problem representations and solutions. Journal of Educational Psychology, 77(4), 460–470. doi:10.1037//0022-0663.77.4.460

Deblois, L. (1997). Quand additionner ou soustraire implique comparer. Éducation et francophonie, XXV(1). Retrieved from http://www.acelf.ca/c/revue/revuehtml/25-1/rxxv1-08.html

DeBlois, L. (2011). Enseigner les mathématiques: des intentions à preciser pour planifier, guider et interpréter (p. 223). Québec, Canada: Presses de l’Université Laval (PUL).

Fayol, Michel. (1990). La résolution de problèmes et sa génèse. In Michel Fayol (Ed.), L’enfant et le nombre: du comptage à la résolution de problèmes (pp. 149–184). Neuchâtel, Suisse: Éditions Delachaux & Nestlé.

Nantais, N. (1991). L’analyse d'erreurs appliquées aux algorithmes arithmétiques. Instantanés Mathématiques, 27(5), 6–11.

Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. Educational Studies in Mathematics, (13), 373–394.

Oval, C., Oliveira, I, López, C (2017) Resolución de Problemas en Matemáticas: Procedimientos de

Resolución em estudiantes de 7 años. Libro de Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Madrid.

Poirier, L., & Bednarz, N. (1997). Comprendre le sens du symbolisme mathématique… Une question d'autobus. La revue de l'ADOQ, 9(2), 9–10.

Poirier-Proulx, L. (1999). La résolution de problèmes: une stratégie de pensée. In L. Poirier Proulx (Ed.), La résolution de problèmes en enseignement. Perspectives en Éducation. Bruxelles, Bélgique: DeBoeck.

Riley, M. S., & Greeno, J. G. (1988). Developmental Analysis of Understanding Language About Quantities and of Solving Problems. Cognition & Instruction, 5(1), 49. Retrieved from http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=aph&AN=7383489&site=ehost-live

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of Children's Problem-Solving Ability in Arithmetic. In H. Ginsburg (Ed.), The Development of Mathematical Thinking (pp. 153–196). New York, USA: Academic Press.

Vergnaud, G. (1990). Théorie des Champs Conceptuels. Recherches en Didactiques des Mathématiques, 10(2.3), 133–170.

Vergnaud, G., & Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogenetique. Revue française de pédagogie, (36), 28–43.

Weisser, M. (1999). Les problèmes d'arithmétique : traits de surface , modes de résolution et taux de réussite. Revue des Sciences de l'Éducation, 25(2), 375–399.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Desarrollo del sentido de la medida en educación primaria

Marianela **Alpízar** Vargas
Universidad Nacional
Costa Rica
marianela.alpizar.vargas@una.ac.cr

Resumen

Los retos del sistema educativo son muy grandes y los docentes son un pilar importante en dicho sistema por lo que recae en ellos gran parte de esta responsabilidad. Durante este taller se pretende analizar diversas tareas no tradicionales del área de Medidas que permitan desarrollar diferentes habilidades cognitivas en estudiantes de educación primaria, donde se potencien diversos procesos de pensamiento. Un estudiante de educación primaria debe comprender los atributos medibles de un objeto y las unidades de medida básicas, además de utilizar instrumentos apropiados según la medición por efectuar y resolver actividades de índole cotidiano, donde el uso de diversas magnitudes es común; por otra parte el docente es el encargado de crear el entorno adecuado para potenciar el aprendizaje en sus estudiantes, por lo que debe dominar aspectos teóricos de la disciplina así como didácticos.

Palabras clave: educación primaria, matemáticas, medidas, formación docente, didáctica.

Introducción

La sociedad se encuentra en constantes cambios y con ella la educación en todos los niveles, año tras año se hacen diversas investigaciones que tratan de entender la manera de pensar de las personas, como aprenden y que necesitan para adquirir nuevos conocimientos, dentro de esta realidad se encuentra inmersa la Matemática Educativa, dentro de esta línea se trabaja la formación docente, el currículo escolar, las estrategias de aprendizaje y enseñanza, las dificultades y errores que muestra el estudiantado y las oportunidades que se tienen para avanzar.

Diversos países han apostado por hacer un cambio en el currículo no solo en el contenido por abarcar sino también en la metodología a seguir. Un ejemplo de ello es Costa Rica, en 2012 se aprobaron nuevos Programas de Estudio en el área de las Matemáticas del Ministerio de Educación Pública (MEP), desde el primer año de educación primaria hasta el último año de educación secundaria. Esta etapa de la educación costarricense se divide en cuatro ciclos, los tres primeros corresponden a la Educación General Básica, la población oscila entre 6 y 15 años, para finalizar con el ciclo diversificado, donde la edad de los estudiantes oscila entre 16 y 18 años.

Aunque ya van más de cinco años del cambio aún hay aspectos por mejorar entre ellos la preparación de los docentes, los materiales bibliográficos que se utilizan en las clases entre otros; además hace falta más investigación acerca de lo que está ocurriendo en el aula.

Lo estipulado en dicho programa es abarcado en todas las instituciones públicas del país, con él se pretende un cambio con miras a mejorar la formación básica de los ciudadanos costarricenses, con una matemática que los prepare para la vida; donde la resolución de problemas y las situaciones contextualizadas toman un papel trascendental (Alfaro, Alpízar, Morales, Salas y Ramírez, 2013). Se establecen cinco áreas de conocimiento para desarrollarse a través de la formación básica (primaria y secundaria) del estudiante; a saber: Números, Medidas Relaciones y Álgebra, Geometría, Probabilidades y Estadística (MEP, 2012).

Cada área tiene distinta representatividad según el ciclo escolar, en particular el tema de Medidas solamente es abarcado como contenido en I y II Ciclos, en el III y IV se considera como un tema transversal. En este taller se abordarán tópicos referentes al tema de Medidas en educación primaria, considerando las habilidades generales y específicas que establece el programa de estudios del MEP (2012) y los lineamientos curriculares que emanan de este, de manera específica para II Ciclo.

El área de Medidas, en ocasiones es considerado de fácil manejo para los estudiantes de educación primaria; sin embargo, el sentido de la medida no se desarrolla con procedimientos mecanizados que se trasfieren en el aula sin relación con la cotidianidad, ni con conversión memorísticas, sino que lo aprendido en el aula debe ser de utilidad para las actividades cotidianas de los estudiantes y es ahí donde existe evidencia que el sentido de la medida no se ha desarrollado de la mejor manera, un ejemplo de ello podría ser cuando un vendedor en una tienda de comestibles no puede entregarle al cliente el cambio de dinero correspondiente, de igual forma en una construcción de una casa de habitación donde sobra gran cantidad de material (cemento, varillas, etc.) porque se compró de más o por el contrario hay faltante del mismo, entre otros (Alpízar, 2014).

Por otra parte en la validación que realizaron Pincheira y Vásquez (2018) de un cuestionario de medición de Conocimiento Didáctico Matemático para la Enseñanza de la matemática elemental en futuros profesores de educación básica, encontraron que el eje de medición fue el que presentó más debilidades en cuanto al conocimiento especializado del contenido, además los docentes en formación que llenaron el cuestionario no relacionaron el concepto de estimación como un concepto que se requiere para adquirir otros más avanzados del currículo escolar. Por lo anterior, se justifica la preocupación por atender el tema de Medidas.

Según el MEP (2012) la enseñanza de los conocimientos relacionados con Medidas debe tener una orientación adecuada, que evolucione según las características de los niños y las habilidades adquiridas, en el primer ciclo deben abordarse en asociación, en mayor parte, con el área de Números, debido a la importancia de las estimaciones, comparaciones y uso de instrumentos no convencionales. En el segundo ciclo debe relacionarse con Geometría y Estadística y Probabilidades, en este nivel se le debe dar énfasis al Sistema Métrico Decimal y al análisis de las diversas medidas en contextos reales, donde es indispensable que las tareas que se propongan abarquen distintos tipos de medidas.

Elementos conceptuales y metodológicos sobre Medidas

Según Moreno, Gil y Montoro (2015) la medida es un área importante dentro del campo de la Educación Matemática y cada vez toma más relevancia en los currículos escolares debido a su utilidad en contextos cotidianos, por ejemplo al organizar las actividades en un horario específico, realizar proyectos de construcción y manuales, administrar dosis de medicamentos, realizar recetas de cocina, entre otras.

Las medidas están directamente vinculadas con el sentido numérico, por lo que se debe aprovechar esta relación para establecer conexiones con las otras áreas matemáticas del currículo así como con otras disciplinas como ciencias, historia, geografía (MEP, 2012; Hurrell, 2015), es decir se deben plantear actividades donde el contexto pertenezca a distintas áreas, no solo a las matemáticas.

Según el MEP (2012) la medida es una característica de algunos objetos físicos (o matemáticos); donde es claro que no todo atributo es medible cuantitativamente, los objetos que admiten medición permiten establecer un "sentido de aproximación". Esto cobra importancia en el análisis de las mediciones pues ellas constituyen una aproximación en sí misma, en tanto que los instrumentos de medición están sujetos a un margen de error. Una misma característica (medida) es común para varios objetos lo que permite que se puedan comparar dichos objetos.

Según el NCTM (2000) los conceptos básicos sobre la medida y el uso de instrumentos y técnicas de medida, deberían establecerse a partir de tareas de comparación de objetos, conteo de unidades y uso de conexiones entre conceptos espaciales y el número. Así los estudiantes pueden visualizar que una misma característica que es común a varios objetos permite la comparación de mediciones, y de este modo, se pueden determinar u observar semejanzas y diferencias entre esos objetos y así crear clasificaciones.

El uso de las medidas y el lenguaje asociado se adecua al contexto donde se estén desarrollando, para Godino, Batanero y Roa (2002) existen tres contextos relacionados con medidas:

a) En la vida cotidiana y en las ciencias experimentales se habla de magnitudes para propiedades o cualidades de los objetos o fenómenos susceptibles de tomar diferentes valores numéricos, por ejemplo peso, velocidad, longitud.
b) En las ciencias humanas y sociales las "cantidades" vienen a ser las distintas modalidades o valores que puede tomar el rasgo o característica del objeto o fenómeno en cuestión.
c) En la matemática, con la palabra magnitud se designa un conjunto de objetos abstractos (cantidades) dotado de una cierta estructura algebraica, y medida es un isomorfismo entre dicha estructura y un subconjunto apropiado de números reales (p. 615)

El docente debe conocer acerca del significado de medición según el nivel de estudiantes que atiende, en el caso de educación primaria se desarrolla el primero de los contextos citados por Godino, Batanero y Roa (2002). Según el NCTM (2000) las tareas relacionadas con mediciones desarrollan habilidades de diversas áreas de las matemáticas y conceptos de medida que serán formalizados y ampliados en otros niveles de su educación.

Al iniciar la educación formal la medición que interesa es la relacionada con aspectos cotidianos con valores numéricos y que exista interacción con diversos instrumentos de medición. El docente debe ir guiando a los estudiantes para que estos descubran la necesidad que tienen los seres humanos de medir la longitud, la capacidad, el peso, entre otros, y hacer comparaciones entre diversas mediciones; además deben guiar esos procesos de medición y estar atentos para que los recursos que permitirán la experimentación se encuentren accesibles para el estudiantado.

Antes de abordar el uso de instrumentos estandarizados el estudiante debe manipular distintas herramientas que le ayuden a estimar, se recomienda que el estudio del Sistema Internacional de Unidades sea abordado después de haber trabajado de manera exhaustiva con medidas arbitrarias, el trabajo con unidades debe darse de manera manipulativa (cuando el tamaño lo permita) para que el estudiante se familiarice con el orden de la magnitud, requisito para las estimaciones en medida (Chamorro, 2003).

No se aprende a medir sin hacer trabajo de campo, los estudiantes deben enfrentarse, en sus primeros años de formación, a esa experimentación de realizar mediciones con instrumentos no convencionales como las partes de su cuerpo, herramientas fáciles de encontrar como lápices de color, lapiceros, etc., hasta llegar a utilizar de manera correcta los instrumentos convencionales. Desarrollar habilidades en el área de Medidas requiere acción, socialización y reflexión, tal como lo indica Hurrell (2015) una lección donde se aborda un tema relacionado con medidas no puede ser una lección pasiva.

Tal como se describió anteriormente, el área de Medidas en Costa Rica, se abarca como conocimiento en I y II Ciclo, el propósito de dicha área en el I Ciclo de la Educación General Básica "es dar inicio a la comprensión del concepto de medida y que se calcule, estime, compare y aplique algunas de ellas" (MEP, 2012, p. 123). Para ello deben manipular instrumentos tradicionales y no tradicionales para efectuar diversas mediciones, considerar errores y discutir acerca de las diferencias que existen según el instrumento de medición a utilizar.

Las habilidades generales que deberán ser adquiridas, al finalizar el I ciclo, son:

- Construir la noción de medición (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad).
- Utilizar instrumentos de medición.
- Realizar mediciones (longitud, moneda, peso, tiempo).
- Estimar medidas (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad).
- Aplicar la medición en diversos contextos. (p. 123).

De lo anterior es posible determinar que diversos autores y entes encargados de la formación de niños en edades de 6 a 9 años consideran que el sentido de la medición debe iniciarse con ideas intuitivas acerca de cada tipo de característica medible, además que la importancia del tema de medidas radica en su uso en las actividades cotidianas.

Al continuar el proceso de instrucción se debe profundizar en el análisis de las mediciones, su importancia en la resolución de problemas del contexto, especialmente en medidas de longitud, moneda, peso, tiempo y capacidad. También se amplía el tipo de problemas que pueden ser resueltos mediante mediciones o estimaciones: medidas de superficie, volumen y temperatura, y se profundiza en el análisis del sistema métrico decimal.

Según la NCTM (2000) el proceso en el área de medidas debe continuar con los estudiantes profundizando y ampliando la comprensión de las medidas y en especial las de su entorno, en este nivel se incluyen otras medidas como ángulos y área y se presta mayor atención a la precisión al emplear instrumentos de medida y se introduce el uso de las fórmulas para determinar la medida de algunos de los atributos.

Por su parte para el sistema educativo costarricense, el propósito general para la enseñanza de las medidas en este II ciclo "es ampliar el conocimiento que traen las y los estudiantes en esta área y prepararlo en la comprensión y la aplicación del Sistema Métrico Decimal, sin dejar de lado el uso de diversos materiales e instrumentos de medición" (MEP 2012, p. 223).

Las habilidades generales que deben promoverse durante este ciclo son:

- Realizar mediciones (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad, superficie, volumen, temperatura).
- Estimar medidas (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad, superficie, volumen, temperatura).
- Aplicar el sistema métrico decimal.
- Aplicar la medición en diversos contextos. (MEP 2012, p. 223)

Es decir se pretende que al finalizar este ciclo de enseñanza (estudiantes que oscilan entre 10 y 12 años) el estudiantado tenga una comprensión adecuada del concepto de medición y pueda realizar, estimar y comparar mediciones con mayor precisión que en el ciclo anterior, domine el uso de instrumentos convencionales y pueda resolver problemas de su entorno donde es evidente la mezcla de diversas mediciones en un mismo contexto.

Hasta aquí se presentó un panorama acerca de las orientaciones que debe tener el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conocimientos relacionados con el área de Medidas, a continuación se presenta un apartado donde se dan algunas nociones del conocimiento docente.

Conocimiento del docente

Ruiz (2014) expresa que el reto más importante que tiene el país (Costa Rica), después del cambio en sus planes de estudio es mejorar la preparación de los docentes; debe prestarse atención tanto a la capacitación de docentes en servicio, como a la formación universitaria de los mismos.

Un docente, sin importar el nivel, que imparte Matemáticas, debe estar en la capacidad de proponer actividades para sus estudiantes de acuerdo con el nivel que estos tengan, considerando los conocimientos previos de los mismos, y esas actividades deben estar en estrecha relación con el contenido que se quiere enseñar y que es propuesto en el currículo correspondiente; además debe tener un conocimiento especializado en cuanto al contenido por enseñar (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016).

Existen diversas posiciones acerca de lo que debe dominar un docente para impartir clases de matemáticas en educación primaria, uno de ellos es conocido como Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Mathematical knowledge for teaching, MKT) de Ball, Thames y Phelps, 2008. En este modelo se divide el conocimiento que tienen que tener el docente en dos categorías Conocimiento del Contenido que enfatiza en los conceptos matemáticos y Conocimiento Pedagógico del Contenido referido al proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. A su vez el Conocimiento del Contenido se divide en Conocimiento Común del Contenido (conocimiento de los contenidos que el docente tiene en común con otros profesionales que utilizan las matemáticas), Conocimiento en el Horizonte Matemático (conocimiento de la relación existente entre los conocimientos de matemáticas con otras áreas del currículo) y el Conocimiento Especializado del Contenido (conocimiento que el docente requiere para enseñar). Mientras que el Conocimiento Pedagógico del Contenido se subdivide en Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (conocimiento que permite a los docentes interpretar el pensamiento de sus estudiantes respecto de las tareas y contenidos matemáticos), Conocimiento del Currículo (conocimiento acerca de la propuesta curricular) y Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (conocimiento que mezcla el saber sobre la enseñanza y sobre las matemáticas) (Ball, Thames, Phelps, 2008).

Como se evidencia en el modelo anterior el conocimiento que el docente tenga acerca de la temática por enseñar es indispensable, las bases en los conceptos disciplinares deben ser fuertes, en este caso particular del conocimiento acerca de las nociones básicas de Medidas debe adecuarse al nivel donde va ha impartir las lecciones, así como al uso que se le da a estos conocimientos fuera del aula; por otra parte el dominio que este tenga de aspectos didácticos puede facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje, otro de los elementos a dominar por parte del docente es el currículo vigente, en Costa Rica el planteamiento de las actividades que guiarán el proceso de enseñanza y aprendizaje en las escuelas públicas debe apegarse a los lineamientos curriculares que se establecen en los Programas de Estudio de Matemáticas del MEP vigente, por tanto se incluye en este documento un resumen de algunos de esos elementos con el fin de determinar las características que se deben tomar en cuenta para la actividades que se desarrollarán en el taller.

Los Programas de Estudio se sustenta en un conjunto de habilidades, procesos, ejes disciplinares, actitudes y creencias (MEP, 2012). Las habilidades se clasifican en específicas y generales, las primeras se relacionan con las capacidades que posee un estudiante para comprender un conocimiento, concepto o procedimiento desarrollables a corto plazo y las segundas corresponden a la generalización o combinación de las habilidades específicas, las generales se citaron en el apartado anterior.

En cuanto a los procesos matemáticos, son aquellas actividades que realizan las personas en las distintas áreas de las Matemáticas, y se dividen en cinco categorías básicas; a saber: *razonar y argumentar* se relaciona con actividades mentales como: deducción, inducción, comparación analítica, generalización, justificaciones, pruebas, uso de ejemplos y contraejemplos; p*lantear y resolver problemas* planteamiento de problemas (principalmente en contextos reales) y el diseño de estrategias para resolverlos; *comunicar* capacidad para expresar de manera adecuada tanto oral, visual o escrita las ideas, resultados y argumentos matemáticos al resto de los compañeros de clase o al docente; *conectar* establecer relaciones entre las diferentes áreas Matemática y con otras ciencias, y *Representar* es capaz de reconocer, interpretar y manipular diversas representaciones sobre un mismo objeto (gráficas, numéricas, visuales, simbólicas, tabulares) (MEP, 2012).

Otro elemento de los Programas de Estudio corresponden a los ejes disciplinares, con los cuales se busca responder a las debilidades existentes y posicionar la Educación Matemática que se desarrolla en el país con estándares internacionales. El MEP (2012), define cinco ejes disciplinares, los cuales son: la resolución de problemas como estrategia metodológica principal, la contextualización activa como un componente pedagógico especial, el uso inteligente y visionario de tecnologías digitales, la potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a la Matemática y el uso de la Historia de la Matemática (p. 17).

Hasta aquí se dio un panorama general acerca de la las características que debe contemplar el proceso de enseñanza y aprendizaje para el área de Medidas y algunas nociones acerca de las responsabilidades docentes en este proceso.

Aspectos metodológicos del taller

Tal como lo expresan Ball, Thames, Phelps (2008) el docente debe dominar conocimiento relativos al contenido como a aspectos pedagógicos o didácticos, por lo que la intensión de este taller es realizar diversas actividades que relacionan estos dos aspectos, ya que se expondrán tareas relacionadas con los conocimientos básicos de Medidas, las cuales pueden plantearse a estudiantes de educación primaria, estas se analizarán bajo dos perspectivas, la primera relacionada con los conocimientos disciplinares que deben tener los estudiantes para poder resolverlas y por ende los conceptos que deben dominar los docentes que imparten las lecciones y la segunda los elementos didácticos que deben considerarse al plantear actividades de este tipo en un aula.

Las actividades por presentar son situaciones problema que se identifiquen con las siguientes habilidades: Realizar mediciones (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad, superficie, volumen, temperatura), estimar medidas (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad, superficie, volumen, temperatura) y aplicar el sistema métrico decimal.

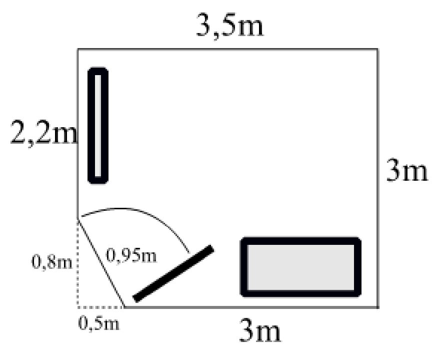
Para cada actividad se completará un instrumento de manera grupal, donde se analizarán aspectos como: el conocimiento matemático que se debe tener previo para realizar la actividad, la(s) habilidad(es) que se estarían desarrollando, los procesos matemáticos que se pueden activar con dicha actividad, el nivel y momento específico donde se desarrollaría (introducir, desarrollar o evaluar una temática), dificultades que pueden tener los estudiantes al efectuar las actividades y los errores que pueden cometer y el papel que debe tener un docente dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje del tema en cuestión y al utilizar las actividades planteadas.

Cabe destacar que la encargada del taller adjuntará a cada grupo de trabajo los documentos necesarios para poder completar la tabla, esos sería: listado de conocimientos, habilidades y procesos que se pretenden trabajar con las actividades.

Las actividades por presentar son problemas no tradicionales planteados con base en los lineamientos curriculares del MEP de Costa Rica presente en los Programas de Estudio, donde se busca en la medida de lo posible trabajar contextos reales. Se adjunta una de estas actividades como ejemplo.

Decorando el espacio

La sala de la casa de María tiene la forma y las longitudes que se presentan en la figura adjunta, lo único que tiene dicho espacio es un televisor en el lado izquierdo y un estante para libros en el frente, la abertura de la puerta es de 95cm de ancho.



La familia de María requiere compran, al menos, un sillón principal y para ello asisten a la tienda respectiva.

Al ir a la tienda encuentran las siguientes opciones para el sillón principal:

I. Un sillón de 220cm de ancho, por 90cm de fondo y 85cm de alto.
II. Un sillón de 195cm de ancho, por 100cm de fondo y 105cm de alto.

¿Cuál opción debe elegir la familia de María? Justifique su respuesta.

Figura 1. Ejemplo de las actividades por presentar en el taller.

Con este taller se pretende validar algunas de las actividades propuestas por quien imparte el taller para ser desarrolladas en las aulas de educación primaria, de manera específica en II Ciclo de la Educación General Básica en el área de Medidas. Se espera que al compartir con docentes e investigadores de otras latitudes se puedan analizar los distintos elementos que se requieren para que las actividades sean de provecho para las clases del nivel citado; además de discutir las condiciones necesarias para que una actividad se pueda considerar como adecuada.

Por otro lado se espera que parte del público que asista al taller sea docente en ejercicio de educación primaria por lo que las actividades que se discutirán les podrán servir en sus clases de Matemáticas, porque, aunque dichas actividades están relacionadas con lo estipulado en los Programas de Estudio de Matemáticas del MEP de Costa Rica hay muchas similitudes con los currículos de otros países.

Reconocimientos

Trabajo elaborado en el marco del proyecto de investigación Formación docente en II Ciclo de la Educación General Básica en cuanto al tema de las Matemáticas de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional, bajo el código SIA 0082-16.

Referencias y bibliografía

Alfaro, A.L., Alpízar, M., Morales, Y., Ramírez, M., y Salas, O. (2013). La formación inicial y continua de docentes de Matemática en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*(8), 131-179. Recuperado de http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/viewFile/12225/11496

Alpízar, M. (2014). Área de Medidas en el I Ciclo de la Educación General Básica, algunas consideraciones para su abordaje en el aula. Ponencia presentada en II Encuentro Centroamericano de Matemática Educativa (II ECAME). Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education,* 59(5), 389-407. doi http://dx.doi.org/10.1177/0022487108324554

Chamorro, M.C (2003). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En Didáctica de las Matemáticas, Ed M.C Chamorro. Editorial Pearson. España.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XX* (pp. 288-297). Málaga: SEIEM. Recuperado de http://www.seiem.es/docs/actas/20/ActasXXSEIEM.pdf

Godino, J. Batanero, C., y Roa, R. (2002). Medida de magnitud y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Mestros, Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada.

Hurrell, D. (2015). Measurement: Five considerations to add even more impact to your program. Australian Primary Mathematics Classroom 20 (4), 14-18.

Ministerio de Educación Pública. (2012). Programas de estudio en Matemáticas para la Educación general Básica y el Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica: autor.

Moreno, M.F., Gil, F., y Montoro, A.B. (2015). Sentido de la medida. En Flores, P. y Rico, L. (Coords). Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria. Ediciones Pirámide. España.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics. Reston: NCTM, Inc.

Pincheira, N. y Vásquez, C. (2018). Conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la Matemática Elemental en futuros profesores de educación básica: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Estudios Pedagógicos* 44, 1. 25-48. Recuperado de http://revistas.uach.cl/index.php/estped/article/view/3597

Ruiz, A. (2014). La implementación de los programas oficiales de Matemática. *Informe Estado de la Educación.* San José: PEN. Recuperado de http://www.estadonacion.or.cr/files/biblioteca_virtual/educacion/005/Angel_Ruiz_La_implementacion_programas_matemt.pdf

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas en ingeniería: un primer acercamiento

Rafael Antonio **Arana-Pedraza**
Universitat de Barcelona
España
rafael.arana.pedraza@gmail.com
Silvia Elena **Ibarra** Olmos
Universidad de Sonora
México
silvia.ibarra@unison.mx
Vicenç **Font** Moll
Universitat de Barcelona
España
vfont@ub.edu

Resumen

El presente trabajo es parte de una investigación en curso que pretende responder qué conocimientos y competencias didáctico-matemáticas necesita el profesor de matemáticas que labora en las escuelas de ingeniería, tomando como referencia el estudio de los Sistemas de Ecuaciones Lineales. Específicamente se reporta la información generada en la primera fase del proyecto, con referencia al análisis ontosemiótico de los documentos curriculares y el libro de texto propuestos por una institución de educación superior. La identificación y articulación de los objetos matemáticos primarios presentes en dichos documentos permiten definir la práctica matemática que se promueve.

Palabras clave: configuración ontosemiótica, formación de profesores, enfoque ontosemiótico, sistemas de ecuaciones lineales, educación superior.

Antecedentes

Aproximadamente dos décadas después de su creación, la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (por sus siglas en inglés, UNESCO) en conjunto con la Organización Internacional del Trabajo (OIT) emite en 1966 la Recomendación relativa a la situación del personal docente, la cual toma en consideración numerosos aspectos del ámbito profesional del profesor entre ellos la capacitación inicial y continua. En términos de la presente investigación, es de vital importancia retomar dos de ellos, el profesionalismo y la capacitación del personal docente.

En cuanto al primero, la recomendación menciona que la enseñanza debería considerarse como una profesión cuyos miembros prestan un servicio público, por lo tanto, debería de exigir del docente una preparación mantenida mediante estudios rigurosos y continuos que lo ayuden a tener un conocimiento profundo y una competencia especial, además de un sentido de las responsabilidades que se adquieren en la profesión. En cuanto a la capacitación del personal docente, menciona que aquellos individuos encargados de esta labor (formador de formadores) deberían de estar capacitados para dar una formación equiparable al de la enseñanza en nivel superior y quienes proporcionan la formación pedagógica deberían contar además con la experiencia en la enseñanza escolar, renovando esta experiencia de manera periódica mediante la práctica de la docencia. Aunque esta disposición se dirige a profesores de los niveles desde preprimaria hasta secundaria, brinda pautas que han permeado en la formación de los profesores.

Es hasta 1997 cuando la UNESCO emite la Recomendación relativa al personal docente de la enseñanza superior, la cual es complementaria a la emitida en 1966 pero se dirige a todo el personal docente e investigador de la educación superior. De forma similar, se abordan diferentes aspectos referentes al profesor, de los cuales retoman el profesionalismo o profesionalidad definiendo nuevamente la profesión como un servicio público que requiere conocimientos profundos, pero agregan a diferencia de la recomendación de 1966 la necesidad de un saber especializado. En términos de la capacitación, en el rubro de condiciones de empleo menciona que el personal docente de la enseñanza superior debería gozar de un sistema abierto y equitativo de desarrollo profesional. Actualmente, la formación del profesorado es aspecto sujeto a observación por la UNESCO, como se contempla en la Estrategia a plazo medio 2014-2021 aprobada en su 37ª. Conferencia General.

La formación del profesorado en Educación Matemática

Dentro del campo de la Educación Matemática, la formación del profesor de igual manera ha sido un aspecto analizado e investigado desde diferentes perspectivas teóricas y en los diferentes niveles educativos. De acuerdo con Ball (2017), un problema fundamental ha sido el identificar cuál es el conocimiento que el profesor de matemáticas necesita para una buena enseñanza de las matemáticas, ya que, si bien ha existido un consenso en que el profesor debe saber matemáticas para enseñarlas no sucede lo mismo con la idea de *cuántas* matemáticas debería saber, incluso diversos estudios han fallado al tratar de demostrar la relación entre la cantidad de matemáticas que el profesor conocer con la predicción del aprendizaje de los estudiantes.

En la investigación referente a la formación del profesor se han desarrollado diferentes modelos teóricos que describen los tipos de conocimientos puestos en práctica por el profesor para el aprendizaje de los alumnos (Pino-Fan & Godino, 2015). A pesar de que estos modelos generaron una base sobre los conocimientos que el profesor debería poner en juego en el proceso de enseñanza, Godino (2009) puntualizaba que éstos consideran categorías muy generales siendo útil el desarrollo de un modelo que permita realizar un análisis más pormenorizado de cada uno de los tipos de conocimiento.

Tomando en cuenta lo anterior, se desarrolló un modelo teórico que contemplara lo desarrollado por las investigaciones anteriores, pero que permitiera ampliar el nivel de análisis y que brindara una forma sistemática para la investigación de este tema, denominado modelo de conocimiento didáctico-matemático del profesor (Pino-Fan & Godino, 2015; Godino, 2009) y que en investigaciones posteriores se desarrolla e incorpora la noción de competencia del profesor de matemáticas generando así el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor (CCDM) (Godino et al., 2016; Godino et al., 2017). El modelo propuesto tiene su base en los constructos teóricos desarrollados en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino, Batanero, & Font, 2007).

Contexto de la investigación

El presente trabajo se enmarca en una investigación que se lleva a cabo en una institución del nivel superior ubicada en el noroeste de la República Mexicana, la cual brinda formación tecnológica a nivel licenciatura a jóvenes en edades entre los 18 y 22 años. Se estudian profesores de matemáticas que imparten clases a los programas educativos (PE) de ingeniería, centrando la atención en la noción de Sistemas de Ecuaciones lineales (SEL), específicamente en la asignatura de Álgebra Lineal.

Tomando en cuenta las aportaciones en el desarrollo del modelo CCDM y la naturaleza de los sujetos de estudio surge la siguiente interrogante que motiva esta investigación: ¿qué conocimientos y competencias didáctico-matemáticas, con respecto a la noción de los SEL, necesita el profesor de matemáticas en ingeniería?

En los siguientes apartados, se desarrolla el sustento teórico que nos brinda soporte para responder a esta pregunta que guía, así como las consideraciones y acciones metodológicas que llevan a buen término la investigación.

Consideraciones teóricas

Como se menciona anteriormente, para el desarrollo de la investigación se toman como base los constructos teóricos desarrollados en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática y del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor (CCDM).

Según Godino, Batanero y Font (2007), una práctica matemática es toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos. Sin embargo, más que estudiar una práctica en particular, resulta de mayor interés estudiar el sistema de prácticas (operativas y discursivas) puestas en manifiesto al abordar algún tipo de situación problemática. Los sistemas de prácticas se clasifican en aquellos que realiza una persona (personales), o las que se realizan en el seno de una institución (institucionales).

En el EOS se considera que los objetos matemáticos emergen de un sistema de prácticas donde se ponen en juego diferentes elementos para resolver cierta situación que se presenta. Godino, Batanero y Font (2007) identifican estos elementos que se ponen en juego en seis objetos primarios: (1) Situaciones, (2) Lenguajes, (3) Conceptos, (4) Proposiciones, (5) Procedimientos y (6) Argumentos. El análisis de los seis objetos primarios y sus relaciones permiten establecer una Configuración Epistémica, en otras palabras, como interactúan los objetos puestos en juego.

El modelo CCDM, se compone de tres dimensiones: matemática, didáctica y meta didáctico-matemática; a su vez dentro de la dimensión didáctica se encuentran seis facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica; además se considera que las dos competencias clave son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica. Esta última se considera una competencia general del profesor de matemáticas, caracterizada mediante cinco sub-competencias: a) Competencia de análisis de significados globales, b) Competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas, c) Competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas, d) Competencia de análisis normativo, y e) Competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica (Godino et al., 2016; Pino-Fan & Godino, 2015; Godino, 2009).

Consideraciones metodológicas

Para responder la interrogante central de la investigación, se ha establecido como objetivo general "Caracterizar la competencia general de análisis e intervención didáctica para el profesor de matemáticas en ingeniería". A su vez, el objetivo general se desglosa en seis objetivos específicos con las preguntas de investigación que deberán de ser respondidas, los cuales han sido planteados en término de las cinco sub-competencias planteadas en el modelo CCDM. Con respecto al proyecto de investigación se definen cuatro fases de trabajo: (1) análisis documental, (2) investigación de campo siguiendo el método del estudio de casos, (3) integración de la información generada y, (4) establecimientos de pautas para un programa de desarrollo profesional docente. Para los términos de lo que se reportan, se centra la atención en la primera de las fases.

El análisis documental consistió en la revisión y análisis de documentos oficiales que establecen los conocimientos y las competencias básicas declarados por uno de los organismos nacionales encargados de la acreditación de los PE de ingenierías, específicamente el Consejo de Acreditación de la Enseñanza de la Ingeniería (CACEI) que, en el caso de la institución en que se realiza la investigación, es el responsable de la evaluación de los PE de ingeniería. Asimismo, el análisis de los programas y planes de estudio en ingeniería que propone la institución, donde se pone especial énfasis en el currículo matemático. Finalmente, se revisaron los libros de texto propuestos por la citada institución en los documentos curriculares. Tanto la información presentada en el programa del curso, como lo que presenta el libro sugerido en la bibliografía básica, se analizan utilizando herramientas teórico-metodológicas propuestas por el EOS como lo son los sistemas de prácticas y la articulación de las redes de objetos primarios intervinientes y emergentes en configuraciones epistémicas.

Considerando lo anterior, se resumen las siguientes acciones metodológicas:

a) Análisis de los mapas curriculares de los PE de ingeniería para determinar las asignaturas del bloque de Ciencias Básicas.

b) Selección de las asignaturas del bloque de Ciencias Básicas por analizar, las cuales en una primera instancia son las del área de matemáticas.

c) Identificación y articulación mediante configuraciones ontosemióticas de los objetos primarios presentes en el programa de curso de la asignatura de Álgebra Lineal.

d) Identificación y articulación mediante configuraciones ontosemióticas de los objetos primarios presentes en el libro de texto propuesto por el programa del curso.

Análisis de resultados

La organización de los PE se plantea en términos de lo que establece CACEI. Esta distribución se refleja en los mapas curriculares de los PE de cada institución, donde por lo general, se forman grandes bloques donde coexisten asignaturas las cuales tienen objetivos afines como lo son Ciencias Básicas, Ciencias de la Ingeniería e Ingeniería Aplicada y Diseño en Ingeniería.

Analizando el mapa curricular de los PE, se observa la agrupación de las asignaturas en dos grandes bloques: Formación Básica y Especialización. Asimismo, dentro del bloque de Formación Básica se encuentra, entre otros, el programa de Ciencias Básicas que se constituye de asignaturas referentes a Matemáticas, Física y Química; es en este bloque donde se sitúa la asignatura de Álgebra Lineal, con una duración de 45 horas al semestre. En ella se contempla como competencia específica el aplicar los principios, leyes y modelos de las ciencias básicas en la resolución de problemas relacionados con procesos y sucesos en fenómenos que se presenten en su quehacer o desempeño profesional. La competencia específica señalada se disgrega en cuatro unidades de competencia, ubicando el estudio de los SEL en la tercera, la cual propone "solucionar problemas con base en diferentes métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales".

Con la información que se presenta en el programa del curso, se llevó a cabo un análisis ontosemiótico, que se ejemplifica a continuación. Se identificaron el tipo de práctica matemática que se promueve en la unidad de competencia, así como, los objetos matemáticos primarios intervinientes y emergentes de estas prácticas matemáticas; lo anterior se puede observar en la Tabla 1.

Tabla 1

Prácticas matemáticas y objetos matemáticos identificados en el programa del curso

Práctica Matemática	**Tipo de Objeto**	**Intervinientes**	**Emergentes**
Identificación de los tipos de sistemas de ecuaciones lineales con base en sus características	Situaciones	• Problemas de contexto intra-matemático	
	Lenguaje	• Natural • Algebraico	• Natural • Algebraico
	Conceptos	• Rango de una matriz • Determinante de una matriz	• Sistemas consistentes determinados • Sistemas consistentes indeterminados • Sistemas inconsistentes • Sistemas homogéneos
Resolución sistemas de ecuaciones lineales utilizando diferentes métodos algebraicos	Situaciones	• Problemas de contexto intra-matemático • Problemas de contexto extra-matemático (modelación de problemas)	
	Lenguaje	• Natural • algebraico	• Natural • Algebraico
	Conceptos	• Sistemas consistentes determinados • Sistemas consistentes indeterminados • Sistemas inconsistentes • Matriz inversa • Determinante de una matriz	• Ecuación matricial • Solución trivial
	Procedimientos	• Calcular el determinante de una matriz • Realizar operaciones	• Solucionar SEL: - Por medio de la Matriz inversa - Utilizando la regla de Cramer

	elementales con renglones y columnas	- Por medio de eliminación Gaussiana - Por medio de eliminación de Gauss-Jordan

Notas. Elaboración a partir del Programa de Curso de Álgebra Lineal

De manera inicial, en lo que se plantea en términos de la práctica matemática que se promueve y los objetos matemáticos que intervienen y emergen de lo declarado en el programa del curso, parece existir una tendencia a privilegiar el desarrollo de la resolución de situaciones problemas carentes de un contexto extra-matemático que propicien el desarrollo de la competencia de modelación en los futuros ingenieros. En cuanto a los procedimientos y conceptos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas, se observaron aquellos relacionados con el álgebra de matrices.

De manera análoga a lo que se realizó para el programa del curso, se analiza para el libro de texto el tipo de práctica matemática que se promueve, así como los objetos matemáticos primarios intervinientes y emergentes que aparecen. Como bibliografía básica del curso se propone el libro *Álgebra lineal fundamentos y aplicaciones* (Kolman, & Hill, 2013). Para este caso, se dividió el texto en unidades de análisis más pequeñas que permitieran analizar de manera pormenorizada los objetos matemáticos que intervienen y emergen en la práctica que se promueve, las cuales a su vez de presentan de manera sintética en la Tabla 2.

Tabla 2

Prácticas matemáticas y objetos matemáticos identificados en el libro de texto

Práctica Matemática	**Tipo de Objeto**	**Intervinientes**	**Emergentes**
Presentación conceptual de las características de los SEL	Situaciones	• Problemas de contexto intra-matemático sobre la verificación si valores particulares de las incógnitas satisfacen una ecuación lineal.	
	Lenguaje	• Natural • Algebraico	• Natural • Algebraico
	Conceptos	• Lineal • Ecuación lineal • Variable • Incógnitas • Solución	• Sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas (sistema lineal) • Solución de un sistema lineal
Identificación de los tipos de sistemas de ecuaciones lineales con base en sus características	Situaciones	• Problemas de contexto intra-matemático sobre SEL con $m = n$, $m > n$ y $m < n$ • Problemas de contexto extra-matemático sobre SEL con $m = n$ y $m < n$	
	Lenguaje	• Natural • Algebraico	• Natural • Algebraico • Gráfico
	Conceptos	• Incógnita • Recta • Ecuación • Punto • Conjunto vacío • plano	• SEL con única solución • SEL con infinitas soluciones • SEL sin solución

	Procedimientos	• Sistema lineal • Solucionar SEL por el método de eliminación. • Intercambiar dos ecuaciones • Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero • Sumar un múltiplo de una ecuación a otra.	
Resolución sistemas de ecuaciones lineales utilizando diferentes métodos algebraicos	Situaciones	• Problemas de contexto intra-matemático • Problemas de contexto extra-matemático (modelación de problemas)	
	Lenguaje	• Natural • algebraico	• Natural • Algebraico
	Conceptos	• Matriz aumentada • Filas • Columnas • Matriz de $m \times n$ • Matriz inversa • Determinante de una matriz • Matriz singular	• Forma escalonada reducida por filas • Columna pivote • Fila pivote • Sistemas consistentes indeterminados • Sistemas inconsistentes • Sistemas homogéneos • Solución trivial • Solución no trivial
	Procedimientos	• Calcular el determinante de una matriz • Realizar operaciones elementales con renglones y columnas	• Solucionar SEL: - Por medio de la Matriz inversa - Utilizando la regla de Cramer - Por medio de eliminación de Gauss - Por medio de eliminación de Gauss-Jordan

Notas. Elaboración a partir del libro *Álgebra lineal fundamentos y aplicaciones* (Kolman, & Hill, 2013).

Las situaciones que se aborda en el libro son tanto de contexto intra-matemático como extra-matemático. En el caso de los problemas en contexto extra-matemáticos, se presentan situaciones de cálculo del rendimiento de fondos de inversión, planeación de la producción, además de aplicaciones relacionadas con el área de ingeniería eléctrica y electrónica como son los circuitos eléctricos.

De manera general las prácticas matemáticas que se identifican en el programa del curso se corresponden con las que propicia el libro, por ejemplo, para la identificación los tipos de SEL recurre a un abordaje gráfico para identificar cual es el tipo de solución. Sin embargo, para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando diferentes métodos algebraicos, a diferencia de lo que se establece en el programa del curso, inicia utilizando como procedimiento de solución el método de eliminación, para continuar posteriormente con los que se indican en el programa del curso referentes al álgebra de matrices.

Conclusiones

Resulta interesante el hecho que desde la definición de la competencia a la que abona el curso se mencionen la solución de situaciones que se presenten en el quehacer profesional de un ingeniero. Sin embargo, en el programa del curso la modelación de problemas en el contexto del quehacer del ingeniero se pudiera considerar que no juega un papel preponderante en los sistemas de prácticas que se promueven, al ser relegado hasta considerarse como un requerimiento de información y no la parte medular de la competencia que desarrolla. Si bien, pudiera ser una cuestión que se refleja sólo en los documentos curriculares, será de especial interés el observar qué papel juega la modelación de situaciones problema en contextos extra-matemáticos en la práctica docente de los sujetos de estudio. En estos términos, es también de importancia considerar lo establecido por estudios como el desarrollado por Ruiz, Dávila, Etxeberria y Sarasua (2013), quienes mencionan que diversas investigaciones muestran que más del 95% de los profesores utilizan el libro de texto como su principal recurso didáctico. Lo anterior, lleva a considerar el impacto del libro de texto en la práctica del profesor de matemáticas.

Referencias y bibliografía

Ball, D. L. (2017). Uncovering the Special Mathematical Work of Teaching. In G. Kaiser (Ed.), Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education (pp. 11–34). Hamburg: Springer.

CACEI. (2017). Marco de Referencia 2018 del CACEI en el Contexto Internacional (Ingenierías). Recuperado a partir de http://cacei.org.mx/docs/marco_ing_2018.pdf

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* (20), 13–31.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, 39(1), 127–135. doi:10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. In J. A. Macias, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (pp. 288–297). Málaga.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema*, 31(57), pp. 90–113.

Kolman, B., & Hill, D. R. (2013). Álgebra Lineal. Fundamentos y aplicaciones (1ra ed.). Colombia: Pearson.

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87–109.

Ruiz de Gauna, J., Dávila, P., Etxeberria, J., & Sarasua, J. (2013). Los libros de texto de matemáticas del bachillerato en el periodo 1970-2005. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(2), 245–276.

UNESCO. (1998). Declaración mundial sobre la educación superior en el siglo XXI: visión y acción. Recuperado de http://www.unesco.org/education/educprog/wche/declaration_spa.htm

UNESCO. (2008). Recomendación conjunta de la OIT y la UNESCO relativa a la Situación del Personal Docente (1966) y Recomendación de la UNESCO relativa a la Condición del Personal Docente de Enseñanza Superior (1997) con la guía del usuario. Recuperado de http://unesdoc.unesco.org/images/0016/001604/160495s.pdf

UNESCO. (2015). Incheon Declaration and SDG4 – Education 2030 Framework for Action. Recuperado de http://unesdoc.unesco.org/images/0024/002456/245656E.pdf

Conocimiento Matemático de Probabilidad que ponen en acción Profesores de Bachillerato

José Miguel León Banguero
Universidad Autónoma de Zacatecas
México
josemigleon@gmail.com
Leticia Sosa Guerrero
Universidad Autónoma de Zacatecas
México
lsosa@uaz.edu.mx
Diego Díaz
Universidad del Valle
Colombia
diegoden09@yahoo.com

Resumen

Resulta interesante plantearse la cuestión acerca del conocimiento que debe de poseer un profesor para enseñar probabilidad, dado que el desarrollo del pensamiento aleatorio en estudiantes contribuye a la toma de decisiones en eventos aleatorios. Para abordar dicha cuestión se considera pertinente identificar el estado actual de *Conocimiento de los Temas* (KoT) para la enseñanza de la probabilidad en bachillerato en Colombia; para ello se propone, a partir del modelo MTSK, el diseño de un cuestionario de preguntas abiertas para la evaluación de conocimientos de ocho profesores en ejercicio. El análisis de los resultados de la aplicación de la prueba permitió reconocer que los profesores estudiados poseen desempeños bajos en los temas de probabilidad; también la investigación arrojó la identificación de elementos importantes para la enseñanza de la probabilidad con respecto al KoT.

Palabras clave: conocimiento, probabilidad, didáctica, profesores, formación.

Introducción

En la actualidad, uno de los principales interrogantes de investigación en la disciplina de la Matemática Educativa es acerca del conocimiento que debe de poseer un profesor de matemáticas para llevar a cabo un proceso de enseñanza eficaz y propiciar el aprendizaje en sus alumnos. Sin embargo, responder dicha cuestión no es tarea fácil, dado que conlleva a hacer un análisis más profundo del conocimiento del profesorado que toma en consideración la naturaleza, las características, el grado de conocimiento actual y necesario, las formas de enseñanza y demás elementos que juegan un papel fundamental en la formación del profesor.

Fruto de diversas reflexiones sobre el desarrollo profesional del profesor, surgen perspectivas sobre las cuales se pueden estudiar y modelar los conocimientos del profesor para la enseñanza de las matemáticas, entre las cuales se destaca el modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), propuesto por el grupo Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) de la Universidad de Huelva, España. Este modelo dual se considera, por un lado, como una herramienta metodológica que brinda al investigador diferentes maneras de analizar las prácticas del profesor mediante la delimitación de categorías de conocimiento; por otro lado, como una propuesta teórica que modela el conocimiento matemático y didáctico del profesor (Medrano, Escudero, Montes, Águilar y Carrillo; 2014).

En las últimas décadas, distintas reflexiones manifiestan la importancia de delimitar elementos para la enseñanza de contenidos de estadística y probabilidad en distintos niveles educativos (Mohamed, Ortiz y Serrano, 2007; Ortiz, Batanero y Contreras, 2012); dado que el aprendizaje de contenidos estocásticos promueve el razonamiento crítico de fenómenos aleatorios y contribuyen a la elaboración de juicios razonables a través de datos cuantitativos y conceptos elementales para tomar decisiones en fenómenos permeados por el azar y la aleatoriedad (Batanero, Gómez, Contreras y Díaz., 2015). Por esta razón, resulta relevante y significativo para la delimitación del conocimiento núcleo del profesor de matemáticas realizar investigaciones que estén dirigidas a caracterizar y establecer el conocimiento del profesor en la enseñanza de contenidos de estadística y probabilidad (Guerrero, 2015).

En este sentido, se plantea el objetivo general de la investigación el cual es identificar el estado actual de *Conocimiento de los Temas* (KoT) a profesores que estén impartiendo probabilidad en el nivel bachillerato en Colombia. Es importante resaltar que para esta investigación toma en consideración el modelo del MTSK, con el fin de identificar elementos en uno de sus subdominios de conocimiento, sin embargo, se reconoce a partir de resultados de otras investigaciones, la posibilidad de que aparezcan elementos pertenecientes otros subdominios, dado que estos poseen distintas relaciones entre sí y están en forma de amalgama.

Fundamentos Teóricos

En los últimos años, el grupo de investigación SIDM de la Universidad de Huelva, España, ha desarrollado un modelo que comprende aquellos conocimientos específicos del profesor que están relacionados directamente con la enseñanza de las matemáticas. Este modelo, basado en la idea de especializar el conocimiento del profesor, provee una mirada crítica y reflexiva del quehacer docente, dado que considera las creencias y concepciones de los profesores con respecto a la matemática y su enseñanza (Rojas et al., 2015).

Es importante resaltar, que el modelo MTSK surge a partir de algunas modificaciones y precisiones del modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), propuesto Ball et al. (2008). Esto se debe a que el MKT ha sido objeto de discusión por problemas de delimitación del Conocimiento Común del Contenido y del Conocimiento del Horizonte Matemático, como acciones del profesor (Montes et al., 2013; Jakobsen, Thames y Ribeiro, 2013). En este sentido, el MTSK, en respuesta a dichos problemas de delimitación, propone caracterizar, desde la especificidad, la enseñanza de los contenidos específicos por parte del profesor a partir de una nueva propuesta de organización, la cual está compuesta por dos categorías Conocimiento Matemático (MK) y Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK); a su vez, cada una de esos dominios comprende tres subdominios, los cuales han sido divididos de manera intrínseca y van a ser explicitados en este documento más adelante.

De manera breve y sucinta se presentan a continuación los distintos subdominios del MK y PCK, los cuales son de gran interés en el foco de esta investigación, dado que ayudarán a esclarecer y evidenciar algunos elementos del conocimiento especializado del profesor a través de instrumentos de recolección de datos.

El MK es considerado como uno de los conocimientos articuladores del MTSK dado que retoma factores fundamentales del conocimiento del profesor como la materia, los conceptos y sus relaciones, los procesos de resolución de problemas, los conocimientos implícitos de los procedimientos, etc. (Rojas et al., 2015). A partir de la delimitación de este dominio, se establecen tres subdominio esenciales los cuales son:

- Conocimiento de los Temas (KoT): Este abarca los conocimientos que posee un profesor de matemáticas con respecto a los contenidos matemáticos y su significado. Este subdominio comprende todo lo que se refiere en saber definiciones, procedimientos, ejemplos específicos, fenomenologías asociados al concepto, propiedades y sus caracterizaciones (Sosa, Flores-Medrano y Carrillo, 2016).
- Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM): Este subdominio encierra una perspectiva conjuntista y global de la estructura matemática (Rojas et al., 2015); dado que abarca todas las conexiones interconceptuales entre los contenidos, las cuales comprenden los vínculos que hay entre las ideas con las representaciones del mismo concepto. Este tipo de conocimiento también reconoce las conexiones temporales que existen de un mismo concepto, es decir, aquellos enlaces entre los conocimientos previos y posteriores del mismo con respecto a diferentes cursos y niveles educativos.
- Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM): Se considera como el conocimiento que posee el profesor sobre los modos de proceder y sintaxis en matemáticas. Este conocimiento consiste en saber cómo hacer, descubrir y crear matemáticas.

Por otro lado, en el MTSK se propone la consideración del PCK dado que retoma los aspectos de conocimiento particular del profesor relacionados con la enseñanza y aprendizaje de un contenido, las consideraciones curriculares, el conocimiento que se deriva de la indagación bibliográfica de la literatura en investigación (Rojas et al., 2015). A partir de la delimitación de este dominio, se establecen tres subdominios esenciales los cuales son:

- Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT): Es el conocimiento que le provee al profesor herramientas para la elección de recursos (materiales o tecnológicos) que utiliza para enseñar. En este sentido, este tipo de subdominio incluye los conocimientos acerca de la elección de libros de texto, tipos de representación, ejemplos, tipos de tareas, entre otras, usadas para los procesos de instrucción; la elección de este tipo de recursos didácticos se hace con el fin de adquirir, reforzar, potenciar o ejercitar los contenidos (Rojas et al., 2015).
- Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM): Este engloba los conocimientos que tiene el profesor de matemáticas con respecto a las características de aprendizaje (formas de razonamiento, dificultades, errores, sesgos, conexiones intraconceptuales, entre otras.) que poseen los estudiantes en la interacción inherente con el contenido matemático.
- Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS): En este se considera el conocimiento que tiene el profesor acerca de los estándares, aprendizajes esperados por niveles, competencias, contenidos, orientaciones de enseñanza, materiales curriculares, entre otros., propuestos por las organizaciones oficiales o asociaciones de investigadores expertos (PISA, NCTM, OCDE, UNESCO).

Para esta investigación, se toma como referencia el modelo MTSK propuesto por Carrillo, et al. (2013), con el fin de explorar el conocimiento actual del profesor de matemáticas en el currículo de matemáticas en Colombia; específicamente se pretende identificar el conocimiento de los temas de probabilidad, de profesores estudiantes de primer año de bachillerato. Es importante resaltar, que para esta investigación tomando en consideración los Lineamientos Curriculares en Matemáticas, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje propuestos por el Ministerio de Educación Nacional en Colombia en el 1998, 2003 y 2013, respectivamente.

En adición a lo anterior, es importante mencionar que las vertientes teóricas sobre contenido probabilístico en las aulas de bachillerato son limitadas, a pesar de ello no se ha dejado de hacer investigación y se han adaptado modelos de conocimiento profesoral como el MTSK, MTK y Modelo de Conocimiento Didáctico Matemático, en la investigación sobre el contenido conocimiento profesoral para la enseñanza de la probabilidad. En ese sentido, para esta investigación se destacan referentes teóricos y metodológicos como Batanero et al. (2015), Vásquez y Alsina (2015) y Mohamed (2012); quienes en sus investigación del conocimiento profesoral para la enseñanza de la probabilidad en los temas (KoT) hacen aportes significativos a el estado actual del conocimiento, permitiendo delimitar elementos fundamentales como: fenomenología, historia, conocimientos previos y esperados, definiciones, entre otros.

Metodología

En este estudio se propone el diseño de un instrumento de investigación con preguntas tipo abiertas, las cuales estarán encaminadas a identificar elementos del Conocimiento de los Temas (KoT), subdominio perteneciente al modelo MTSK.

El diseño del instrumento se hace a partir de la contextualización al sistema educativo en Colombia y se retoman actividades propuestas de instrumentos elaborados por Vásquez y Alsina (2014), Batanero et al., (2015) y Mohamed (2012). En los instrumentos retomados, se realizan pruebas de conocimiento con el objetivo de medir el conocimiento de contenido y didáctico del profesor de matemáticas en la enseñanza de probabilidad, desde el modelo del MKT. Sin embargo, el rediseño que se propone pasó por un proceso de validación, el cual consta de dos momentos: en el primero, cada ítem planteado fue sometido a una validez de contenido, lo cual permite reconocer a priori si cada uno de estos mide el conocimiento de los contenidos y sus interconexiones para la enseñanza de la probabilidad; esta prueba de validez de contenido está soportada a partir de un análisis previo sobre las recomendaciones de currículos internacionales como Escuela Secundaria Obligatoria, National Council of Teachers of Mathematics y Proyecto Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Educations (GAISE). En un segundo momento, se coteja si cada ítem elaborado es capaz de medir el conocimiento para la enseñanza de la probabilidad, en los subdominios del Conocimiento de los Temas (KoT) y el Conocimiento de las Características de Aprendizaje (KFLM), para lo cual se consideró un juicio de expertos quienes permiten hacer una evaluación cualitativa para identificar el grado de correspondencia, formulación y pertinencia de cada uno de los ítems propuestos.

Es importante resaltar que hasta el momento se ha implementado este instrumento para identificar el conocimiento actual a siete profesores de matemáticas de secundaria, bachillerato y preparatoria que están cursando la Maestría en Matemática Educativa en la Universidad del Valle, Colombia. Los participantes del estudio son profesores de instituciones educativas públicas y cuentan con más de cinco años de experiencia profesoral, de los cuales, al menos, han impartido dos años matemáticas a niveles educativos que en sus contenidos posee probabilidad. La aplicación de la prueba fue en el marco del curso Concepción Teórica, el cual se brinda a estudiantes de primer semestre.

La forma en cómo se analizarán los resultados del instrumento aplicado es a través de un análisis cuantitativo y cualitativo. Con respecto al análisis cuantitativo se hace una clasificación de las respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas; es importante resaltar que el objetivo de la investigación no es evaluar el estado actual del conocimiento de los profesores estudiados, sin embargo, se considera pertinente hacer mención a este resultado dado que permite dimensionar el estado actual de conocimiento profesoral del dominio MK, dado que según Batanero et al. (2015), existe una intrínseca relación entre los conocimiento matemáticos y didácticos a la hora de enseñar un contenido en particular. En un segundo momento, haciendo un análisis desde un punto de vista cualitativo de las respuestas, se reconocen algunos elementos propios del Conocimiento de los Temas (KoT).

Instrumento

El cuestionario de investigación está propuesto en dos momentos. En el primero se pide resolver tres problemas sobre probabilidad, los cuales son adaptaciones de problemas validados y utilizados en investigaciones de maestría y doctorado (Batanero et al., 2015; Mohamed, 2012 y Vasquez y Alsina, 2015) ; esto con el fin de identificar el estado actual del conocimiento matemático de probabilidad en profesores de bachillerato. En un segundo momento, se identifican los conocimientos didácticos y estructurales del profesor en la enseñanza de la probabilidad, en ese sentido se realizan tres ítems adicionales, en los cuales se busca que el participante seleccione la respuesta o respuestas correctas y justifique ampliamente cada una de las respuestas incorrectas de los estudiantes, en este sentido se busca que reconozca errores y dificultades que presenta el alumno ficticio. A continuación se presenta a manera de ejemplo una de las situaciones del instrumento.

Situación 3: Alejandra y Amparo son estudiantes muy curiosas. Cansadas de jugar siempre lo mismo, han decidido poner en uso su imaginación para inventar un juego que consiste en lanzar dos dados. Para jugar deben de tener en cuenta las siguientes reglas:

- Calculan la diferencia de puntos entre el mayor y el menor.
- Si el resultado es 0, 1 ó 2, entonces Alejandra le cobra a Amparo $1.000
- En cambio, si el resultado es 3, 4 ó 5, Amparo es quien le cobra a Alejandra $1.000.

Parte 1: A partir de la situación anterior responde:

- Desde su opinión ¿el juego inventado por Alejandra y Amparo es justo? Justifica tu respuesta.
- En caso de que su respuesta anterior sea negativa, ¿cuál sería la manera de modificar el juego para volverlo justo?
- Si usted decidiera jugar con las condiciones iniciales de Alejandra y Amparo, luego de n-partidas ¿cuánto se esperaría que ganara o perdiera cada una de las participantes?

Parte 2: A partir de las respuestas de los alumnos responde las siguientes preguntas:

- Indica el contenido matemático deben usar los alumnos para dar la respuesta correcta
- Señala las respuestas correctas e incorrectas
- Para cada una de las respuestas incorrectas explica cuáles son las posibles intuiciones o estrategias que han llevado a los participantes a dar una respuesta errónea

Respuestas de alumnos ficticios al ítem 1

- El juego es justo, dado que todos los resultados son igualmente probables.
- Es justo. Sin embargo como es un juego de azar, no se puede predecir.

- Es injusto, porque es más difícil obtener los resultados 3, 4 o 5.
- El juego es injusto, dado que si se analiza cada uno de los casos y se calcula la probabilidad se puede dar cuenta que Amparo tiene mayor probabilidad de ganar.
- El juego es justo, sin embargo si se juega varias veces es posible que Amparo gane.

Resultados

Posterior a la aplicación del instrumento, se realiza una recolección y análisis de los resultados. Entre los hallazgos que deja la prueba se pueden reconocer algunos elementos importantes a tomar en consideración durante la enseñanza de la probabilidad en nivel de bachillerato, los cuales algunos de éstos han sido reportados en investigaciones como Batanero et al. (2015); Guerrero (2015) y Mohamed (2012).

Con respecto a las respuestas de la Parte 1 de cada una de las situaciones del instrumento, el desempeño de los profesores con respecto al conocimiento del contenido matemático fue bajo. Esto puede inferirse a partir de la clasificación de las respuestas Incorrectas (I), Parcialmente Correctas (PC) y Correctas (C), lo cual pueden ver en la Tabla 1.

Tabla 1:
Resultados de las respuestas por parte de los siete profesores (estudiantes de la maestría) a la Parte 1 de las situaciones.

	Situación 1			**Situación 2**			**Situación 3**		
	I	PC	C	I	P	C	I	P	C
A	5	1	1	3	2	2	2	2	3
B	7	0	0	3	1	3	3	2	2
C							6	0	1

Fuente: Elaboración propia

Haciendo un análisis cualitativo de las respuestas, los resultados permiten inferir que los profesores identifican tres tipos de conceptos y elementos, los cuales guardan relación a los identificados por Batanero et al. (2015): conceptos relacionados con el azar (azar, probabilidad, posibilidades, juego equitativo, proporción, etc.), relacionados con las propiedades (carácter aleatorio, sucesos con mayor o menor probabilidad); y procedimientos (combinatorios para enumerar probabilidades, asignación de probabilidades, comparación de casos, regla de tres.)

El análisis de las respuestas permite encontrar elementos que son importantes tomar en consideración para la enseñanza de la probabilidad. En este sentido, se hace mención, con evidencias, de algunos de los elementos que deberían estar presentes en el Conocimiento de los Temas (KoT), desde un punto de vista del MTSK, para la enseñanza de la probabilidad.

- Hacer mención a la definición de equiprobabilidad y los factores que condicionan un evento aleatorio (Ver Figura 2).

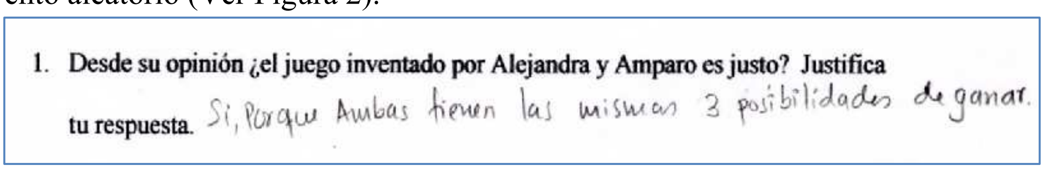

1. **Desde su opinión ¿el juego inventado por Alejandra y Amparo es justo? Justifica tu respuesta.** Si, Porque Ambas tienen las mismas 3 posibilidades de ganar.

Figura 2: Respuesta Participante #1

En la Figura 2 se puede inferir que uno de los participantes presenta errores con respecto a la noción de equiprobabilidad.

- Se establece la importancia de que el profesor determine objetos y conceptos probabilísticos como espacios muéstrales, dependencia o no de eventos y cálculo de las probabilidades a cada uno de los eventos de la situación (Ver Figura 3).

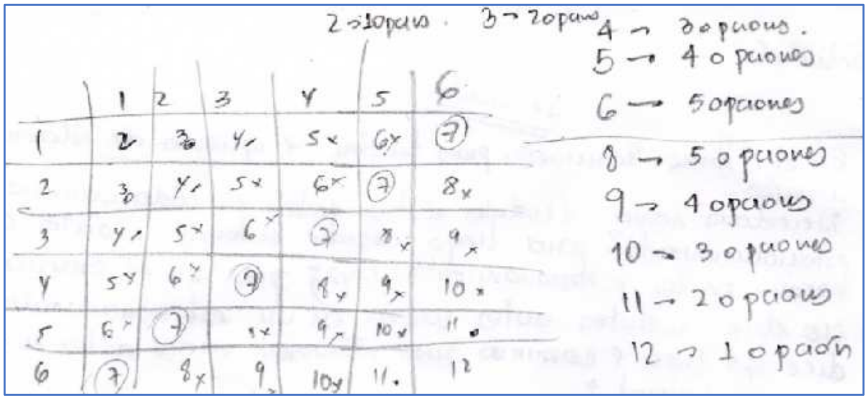


Figura 3: Respuesta Participante #2

En la Figura 3 se puede inferir que la respuesta de uno de los participantes de la prueba en su procedimiento de respuesta calcula todas las probabilidades asociadas a cada evento de la situación. De igual forma hace uso de una representación tabular para mostrar todas las posibles combinaciones que se puede dar en el lanzamiento de dos dados.

- Se reconoce la importancia de elementos para la enseñanza de la probabilidad, específicamente ellos que guardan relación con la comparación de probabilidades y noción de juego equitativo (Ver Figura 4).

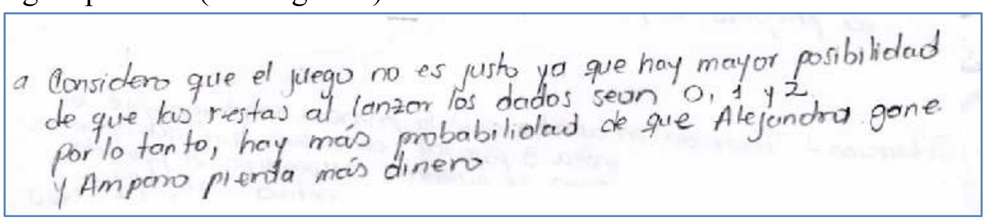


Figura 4: Respuesta Participante #3

En la Figura 4 se puede inferir que uno de los participantes en sus respuestas trae a colación propiedades de conceptos, en este caso de juegos equitativos, dado que manifiesta la necesidad de una proporcionalidad en términos de probabilidades eventos y respectivas recompensas.

Conclusiones

El diseño, aplicación y análisis del instrumento de investigación para la evaluación del KoT ha permitido reconocer la importancia latente del conocimiento de los temas por parte del profesor en la labor de enseñanza. El análisis cuantitativo de las respuestas permite afirmar que los conocimientos sobre los temas para la enseñanza de la probabilidad son limitados, lo cual se complementa lo encontrado por Batanero et al., (2015). Se considera pertinente y significativo para fortalecer el estado actual del arte, rediseñar y replicar el instrumento propuesto, esto con el fin de establecer conclusiones generales los profesores en la enseñanza de la probabilidad.

Otro aspecto relevante que se concluye a raíz del diseño del instrumento es la importancia de los aspectos fenomenológicos de los conceptos probabilísticos; en este sentido se reconoce el papel fundamental que tienen los juegos de azar para el aprendizaje, comprensión y significación de la probabilidad. Se hace la recomendación, para fortalecer dicho aspecto, diseñar secuencias didácticas o propuestas de aula que integren los juegos de azar en el diseño de las situaciones.

El análisis cualitativo de los resultados de la prueba permite inferir distintos elementos que pertenecen a la subcategoría del Conocimiento de los Temas, en este sentido se reconocen diversos elementos como objetos y conceptos fundamentales para la enseñanza de la probabilidad. Se considera importante que para futuras investigaciones, analice una muestra mayor de profesores, esto con el fin de rescatar elementos del KoT y elaborar indicadores para la evaluación de este conocimiento.

Referencias Bibliográficas

Ball D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Batanero, C. Ortíz, J. Serrano, L. (2007). *Investigación en Didáctica de la Probabilidad*. Departamento de Didáctica de la Matemática. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 44, 7-16.

Batanero, C., Contreras, J., Cañadas, C., y Gea, M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. *Novedades educativas*, 261, 78-84.

Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J., & Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: un estudio exploratorio. *Práxis Educativa*, 10 (1).

Carrillo, J. Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). “Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching”. En B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Ankara, Turquía.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila, & E. Flores Medrano (Eds.), Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (pp. 57-72). Huelva, España. Universidad de Huelva Publicaciones.

Guerrero, H. (2015). *Evaluación de Conocimientos sobre Esperanza Matemática y juegos equitativos en alumnos de Bachillerato*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Jakobsen, A., Thames, M. H. y Ribeiro, C. M. (2012). Delineating Issues related to Horizon Content Knowledge for Mathematic Teaching. En B. Ubuz , C. Haser C, MA Mariotti (Eds.), Actas del 8.o congreso del *CERME (*pp. 3125–3134). Antalya, Turquía.

Mohamed, N. (2012). *Evaluación del Conocimiento de los Futuros Profesores De Educación Primaria Sobre Probabilidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Montes, M., Contreras, L., y Carrillo., J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 403-410). Huelva, España.

Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. *Boletim de Educação Matemática*, 29 (51), 143-166.

Vásquez, C. & Alsina, A. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *Números*, 85, 5- 23.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Repensando os caminhos de uma formação continuada para professores dos anos iniciais

Marli Teresinha **Quartieri**
Universidade do Vale do Taquari
Brasil
mtquartieri@univates.br
Ieda Maria **Giongo**
Universidade do Vale do Taquari
Brasil
igiongo@univates.br
Márcia Jussara Hepp **Rehfeldt**
Universidade do Vale do Taquari
Brasil
mrehfeld@univates.br
Thuliê Nunes dos **Santos**
Universidade do Vale do Taquari
Brasil
thulie.santos@universo.univates.br

Resumo

Este trabalho tem como objetivo socializar dados decorrentes de um questionário aplicado a um grupo de professores dos Anos Iniciais que participaram de formação continuada, com o intuito de analisar reações e percepções. A formação explorou e problematizou o uso de atividades investigativas com foco em conteúdos de pré-álgebra. Os resultados mostram, por um lado, que um grupo considerou as atividades exploradas complexas para serem efetivadas nos Anos Iniciais; e, por outro, um grupo destacou a importância de tais atividades para estimular o interesse e a motivação dos alunos. Alguns participantes foram enfáticos em comentar que não pretendem participar de formações devido à falta de tempo e as atividades extras nas escolas. Assim, as próximas ações dos pesquisadores consistem em operar com referenciais do campo do "estudo de las classes" e o acompanhamento sistemático e contínuo de um grupo de professores para o desenvolvimento das atividades investigativas.

Palavras chave: Anos Iniciais, formação continuada, pré-álgebra, investigação matemática, acompanhamento sistemático.

Introdução

Estudos têm analisado problematizações, inquietações, avanços e discussões em relação à formação continuada de docentes, em função das novas configurações sociais, políticas e econômicas da contemporaneidade. Tais configurações necessitam que esses profissionais, continuamente, (re) pensem suas práticas pedagógicas. Nesta perspectiva, Nóvoa (2009, p. 27) explicita que "o trabalho do professor consiste na construção de práticas docentes que conduzam os alunos à aprendizagem" e de acordo com o próprio autor a formação continuada pode proporcionar momentos de reflexão e de construção de práticas pedagógicas produtivas. Aliado a isso, Paiva (2008) destaca a importância da participação ativa dos docentes tanto nos processos de formação inicial como continuada, pois assim eles poderão manifestar seus pensamentos e questionamentos, agindo na sua própria formação.

Diante deste contexto este grupo de pesquisadores está desenvolvendo desde 2017 a pesquisa intitulada "Ensino-aprendizagem-avaliação em Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: atividades exploratório–investigativas e formação docente" que foi aprovada e conta com apoio financeiro pelo edital Chamada MCTI/CNPq Nº 01/2016 UNIVERSAL. Esta pesquisa tem como objetivo geral "problematizar estratégias de estudantes na resolução de atividades exploratório-investigativas de matemática elaboradas em estudos conjuntos com grupos de professores dos Anos Iniciais a fim de examinar quais aprendizagens teórico-metodológicas são desencadeadas por esses professores considerando a relação ensino-aprendizagem-avaliação a partir de suas próprias experiências". Um dos objetivos específicos deste projeto é "planejar, desenvolver e avaliar com os docentes, atividades exploratório investigativas, com ênfase na Geometria e Álgebra, para posterior exploração com os estudantes".

Assim, uma das primeiras ações foi proporcionar cursos de formação continuada aos professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental com foco em problematizar atividades usando a Investigação Matemática e conceitos relacionados a pré-álgebra. A referida formação ocorreu com todos os professores dos Anos Iniciais da rede municipal de um determinado município do interior do Rio Grande do Sul. Portanto, o intuito deste trabalho é socializar os dados decorrentes de um questionário aplicado aos professores dos Anos Iniciais que participaram da formação continuada no decorrer de 2017. O objetivo do instrumento foi analisar as reações e percepções dos docentes em relação a formação continuada proposta pelos pesquisadores.

Referencial teórico

Um dos entraves no ensino de Matemática da Educação Básica consiste em como e o que ensinar em relação a álgebra. Aliado a isso, observa-se que as práticas de ensino podem favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de situações "que criem oportunidade de as crianças generalizarem padrões aritméticos, estabelecerem relação entre duas grandezas e resolverem problemas com os diferentes termos desconhecidos das operações" (Luna, Santos, 2013, p. 829). Os autores comentam a importância de se oportunizarem situações de aprendizagem utilizando conhecimentos algébricos desde os Anos Iniciais, "até então denominados de pré-álgebra, ampliando-os paulatinamente no decorrer da escolaridade, para uma compreensão algébrica mais estrutural" (Ibidem, p. 832).

Salienta-se que a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) brasileira expressa que "é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental" (Brasil, 2017, p. 266). Ademais, nesse documento está enfatizado que nos Anos Iniciais se deve proporcionar atividades para "generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam" (Brasil, 2017, p. 266).

Corroborando, Groenwald (2014, p. 2) expressa sobre a importância da álgebra desde os Anos Iniciais, “embora, nos primeiros anos de escolarização não seja de modo formalizado”. A autora destaca que “quando o aluno aprende a calcular o valor desconhecido, em problemas de Matemática, mesmo sem atribuir a esse um valor ou símbolo que o represente, já está sendo introduzido o pensamento algébrico” (Ibidem).

Estudos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) também já destacavam a relevância de se trabalhar conteúdos algébricos sob diferentes perspectivas, como atividades investigativas, análises de gráficos, situações problemas, desde os primeiros anos de escolaridade. Neste contexto, a Investigação Matemática pode ser uma metodologia potente para o professor dos Anos Iniciais iniciar o desenvolvimento de conceitos pré-algébricos. Para os autores a Investigação está associada à ideia de pesquisar, questionar e buscar conhecimento, por meio de situações abertas, em que o aluno é convidado a elaborar hipóteses e conjecturas para a resolução de problemas abertos, bem como a socializar diferentes estratégias de resolução. Em síntese, “o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização das provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e professor” (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009, p. 23).

Entretanto, destaca-se que os professores dos Anos Iniciais além de dificuldades em relação ao ensino de conceitos de pré-álgebra também possuem pouco conhecimento em relação a metodologia da Investigação Matemática. Neste sentido para auxiliar os professores, acredita-se que encontros de formação continuada podem ser produtivos para diminuir tais dificuldades. Costa (2015) problematiza sobre a formação que por vezes ocorre distante da realidade vivida pelos professores em formação e destaca a importância de estudos a partir das práticas, pois,

Não proporcionar espaço e tempo ao diálogo e à reflexão sobre a própria prática é ignorar uma dimensão da formação, pois ao ouvir o outro o sujeito pensa sobre si, sobre suas ações, pode, ao conhecer distintas experiências, encontrar e/ou tornar-se inspiração ao compartilhar também, as suas (Costa, 2015, p. 58)

Nessa mesma linha argumentativa, Albuquerque e Gontijo (2013, p. 85) expressam que é durante a formação continuada que o professor “constrói e reconstrói conhecimentos que, articulados com sua prática cotidiana, produzirá saberes que lhes serão indispensáveis” para que ocorra a aprendizagem de seus alunos. Para Galindo e Vital (2011, p. 11) o professor necessita “aprender a aprender” e questionam “quando será o momento de “aprender” alguma coisa?”. Ao responder a essa questão as autoras comentam que é necessário

práticas de formação que sejam úteis na aquisição de conhecimentos e técnicas e práticas de formação que contribuam para a emancipação profissional e para a consolidação de uma profissão que é autônoma na produção de seus saberes e valores. É preciso “aprender a aprender” e aprender conteúdos específicos também. (Galindo, Vital, 2011, p. 11)

Assim, proporcionar momentos de trocas de experiências e de reflexão, palestras, grupos de estudo na escola ou fora dela, oficinas, dentre outros, são formas de fomentar a participação dos docentes em atividades de formação continuada. Aliado a isso, é importante à participação ativa durante os processos de formação continuada do professor, de forma a permitir que esse possa manifestar seus pensamentos e questionamentos, fazendo-o agir na sua própria formação. Para atender as necessidades dos docentes, Fiorentini (2009) sugere parcerias entre escolas e universidades e propõem a constituição de grupos de trabalho dentro das escolas.

Metodologia

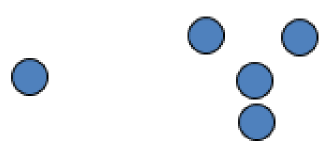
A pesquisa, de cunho qualitativo, teve como objetivo analisar as reações e percepções dos professores dos Anos Iniciais envolvidos em curso de formação sobre o uso da metodologia da Investigação Matemática com foco em conceitos algébricos. Utilizar pesquisa qualitativa permite analisar um universo de significados e ações subjetivas que interferem nos fenômenos estudados. Godoy (1995, p. 21) destaca que o uso de uma abordagem qualitativa em pesquisas "não se apresenta como uma proposta rigidamente estruturada", permitindo assim "que a imaginação e a criatividade levem os investigadores a propor trabalhos que explorem novos enfoques".

Partindo do intuito de explorar atividades investigativas nos encontros de formação continuada, inicialmente o grupo, reuniu-se semanalmente para elaborar e explorar atividades alicerçadas na Investigação Matemática para o ensino de Álgebra. As atividades desenvolvidas nos encontros de formação são fruto de planejamentos e estudos coletivos sendo que, anterior à pratica com os docentes na formação continuada, todas foram testadas pelos participantes do grupo de pesquisa. Assim, doze delas foram planejadas para esses encontros, por meio de discussões e estudos dos pesquisadores envolvidos, compartilhando experiências.

Posteriormente, as atividades foram exploradas e problematizadas com um grupo de quarenta e cinco professores dos Anos Iniciais. Aconteceram quatro encontros de formação continuada, no decorrer de 2017, em escolas diferentes pertencentes à rede municipal (parceira do projeto). Durante a realização das atividades a coleta de dados ocorreu por meio do uso de gravadores, com o intuito de analisar as falas dos participantes desde as conjecturas até as generalizações e houve o recolhimento das resoluções das atividades nos grupos. Nas atividades primava-se pelo uso de material concreto para resolução. Como exemplo, cita-se a Figura 1:

Sequência de tampinhas

Observar a sequência de tampinhas abaixo:



Utilizar o material disponibilizado (no caso tampinhas) para representar essas figuras.

a) Representar com as tampinhas a terceira figura, observando um padrão de sequência.

b) Quantas tampinhas você utilizou nessa terceira figura? Como você pensou?

c) Representar com as tampinhas a quarta figura, observando um padrão de sequência.

d) Quantas tampinhas você utilizou nesta quarta figura? Como você pensou?

Figura 1. Exemplo de atividade explorada com os professores da formação continuada

As doze atividades foram exploradas, sendo que o grupo de pesquisadores deixou os pesquisados resolverem cada situação, sem interferir. Assim, tinham a oportunidade de discutir, conjecturar e propor ideias em seus grupos. Os formadores, no entanto, instigaram os participantes em relação às conjecturas e estratégias, com o intuito de que os mesmos expressassem com mais detalhes a resolução proposta. Destaca-se que a metodologia utilizada sempre foi a mesma, ou seja, os professores, em grupo, resolviam as atividades propostas, depois eram discutidas as respostas e as estratégias de resolução, bem como a viabilidade e a necessidade de transformações e adequações para os referidos níveis de escolaridade.

No mês de abril de 2018, os pesquisadores retornaram às escolas para aplicar um questionário aos participantes da formação de 2017, com o intuito de analisar as implicações do referido curso de formação na prática pedagógica dos participantes. O referido instrumento continha questões de dados gerais (idade, tempo de atuação no magistério, titulação); perguntas quanto ao desenvolvimento das atividades, tais como: i) Você já explorou as tarefas desenvolvidas nos encontros de formação ocorridos em 2017? Em caso afirmativo, responda: a) quais; b) qual a reação dos alunos? c) quais as dificuldades enquanto docente? d) quais potencialidades das tarefas que você desenvolveu? Em caso negativo, justifique os motivos; ii) como você avalia os encontros realizados em 2017 (quanto à metodologia, atividades, tempo disponível); iii) você gostaria de seguir a sistemática das discussões em companhia dos pesquisadores? Justifique. As respostas foram digitadas, sintetizadas e analisadas. Na próxima seção apresentam-se os dados coletados com os trinta e cinco professores que responderam ao instrumento.

Resultados decorrentes

Inicialmente destaca-se que se obteve apenas resposta de trinta e cinco dos quarenta e cinco professores que participaram da formação em 2017. Isto ocorreu porque alguns professores saíram da referida rede municipal indo trabalhar em outro município, outros se aposentaram e ainda alguns não estavam na escola no dia em que ocorreu a aplicação do questionário.

A idade dos 35 respondentes variava entre 25 e 57 anos e o tempo de atuação nos Anos Iniciais, de 1 a 30. Apenas um professor não tem curso de graduação em Pedagogia, mas tem curso de Magistério. Nenhum respondente tem Mestrado e apenas 15% têm especialização.

Em relação às atividades desenvolvidas em 2017, 60% dos professores respondentes do questionário destacou que não tinha explorado nenhuma das atividades propostas na formação continuada. Estes citam como motivos que as atividades são difíceis para o nível de alunos que tinham em sala, como segue: “achei as práticas muito difíceis para o nível dos alunos”; “achei as atividades mais indicadas/direcionadas para séries mais adiantadas (6º ano em diante)”; “no momento as atividades não condizem com minha turmas”. Em relação à questão: como você avalia os encontros realizados em 2017? Novamente alguns professores citaram que as atividades eram difíceis para os Anos Iniciais, mesmo que a metodologia era interessante, como segue:

Penso que as metodologias eram positivas, porém na minha opinião para aplicar com os alunos dos primeiros anos é complicado então a princípio não trabalhei. (P2)

Considero tudo muito bem planejado, criativo e desafiador, porém, como já exposto antes mais indicado para as séries após o 5º ano. (P8)

Atividades bem dinâmicas e práticas que foram aplicadas com os professores. Porém algumas atividades um pouco difíceis para aplicar com alunos de 1º, 2º ano. (P18)

Acho que deveriam ser direcionadas as turmas das séries iniciais. Mais fáceis as atividades. (P19)

Percebe-se nos depoimentos dos professores respondentes que eles acharam as atividades interessantes, entretanto complicadas para os Anos Iniciais. Nesse sentido ficam alguns questionamentos: será que as atividades exploradas eram difíceis? Ou os professores não têm segurança em relação aos conteúdos relacionados a pré-álgebra que devem ser ensinados neste nível de escolaridade? Por que a resistência de incluir tais conceitos nos Anos Iniciais? Essa constatação pode ser inferida pela resposta de uma professora quando ela comenta “tive bastante dificuldade, pois eu não tenho firmeza no assunto”. Outra professora comentou ainda que ela precisa “entender um pouco mais sobre álgebra” e por isso não tinha desenvolvido as atividades.

As atividades propostas na formação estavam vinculadas às diretrizes propostas na BNCC e neste ano de 2018, o grupo de pesquisadores está indo para algumas escolas e explorando as atividades desenvolvidas no decorrer da formação. Os alunos estão realizando as atividades e respondendo com diferentes conjecturas e estratégias. E, os professores destes alunos (que antes não tinham aplicado, pois as achavam difíceis) estão encantados com a reação dos alunos e as resoluções propostas. Assim, o grupo está refletindo sobre a questão de que o não uso das atividades está ligada à insegurança do professor em relação ao conteúdo.

Os professores que desenvolveram alguma das atividades foram unânimes em comentar que o uso do material concreto foi fundamental para a resolução das atividades. Destacaram que houve interesse dos alunos, motivação e se sentiram desafiados, conforme alguns depoimentos: “gostaram e se sentiram desafiados”; “eles sempre gostam quando usamos matérias concreto”; “muito boa, compreenderam, exploraram, criaram”; “gostaram bastante, alguns tiveram bastante dificuldades outros não”. De acordo com o grupo dos professores que explorou as atividades pode-se inferir que os alunos conseguiram realizar as atividades.

Outra questão que chamou atenção foi a resposta em relação a questão “você gostaria de seguir a sistemática das discussões em companhia dos pesquisadores? Justifique”. Dos respondentes, 50% disse que não tinham interesse, alegando os seguintes motivos: sobrecarga de atividades na escola; falta de tempo; existência de muitos projetos nas escolas; outras formações nas escolas; atividades difíceis para os Anos Iniciais. Percebe-se que estes professores sobrecarregados e todas as atividades que precisam realizar acabam suprindo o tempo do professor e ele direciona suas atividades para as questões que são mais emergentes no contexto escolar. Assim, ficam os questionamentos: porque tantos projetos devem ser desenvolvidos nas escolas? Qual a função da escola frente às questões da contemporaneidade? E como fica o professor diante de tantas demandas? O que ele deve escolher e desenvolver na sua prática pedagógica? O que e como ensinar nos Anos Iniciais? Que tipo de formação continuada é produtiva para auxiliar os professores a diminuir seus anseios em relação a estas questões e dúvidas?

Cabe aqui referir que a importância da formação de grupo de estudos que reúna professores da Escola Básica reside no fato de que, como bem apontam Knijnik et al (2012, p. 85) professores se sentem muitas vezes pressionados para cumprir programas preestabelecidos, resistindo a novas perspectivas teórico-metodológicas “não porque avaliem que seu trabalho docente usual esteja produzindo tão bons resultados, mas porque temem se aventurar por caminhos outros que não aqueles nos quais realizaram seus estudos e sua formação profissional”. Assim, entende-se que, para além de cursos de formação continuada em larga escala e não sistemáticos, os docentes da Escola Básica poderão, por meio de grupos de estudos, se aventurar ao novo; neste caso, o ensino de álgebra por meio da Investigação Matemática.

Alguns participantes comentaram que a formação ofertada foi diferente de outras que já haviam participado, pois houve maior interatividade, participação de todos durante os encontros e construção coletiva. Isto pode ser confirmado pelo depoimento da seguinte professora: “a formação não foi somente uma fala, os professores agiam, participavam, foram desafiados a pensar". Nesta linha argumentativa, Chimentão (2009, p. 3) destaca que "Fica mais difícil de o professor mudar seu modo de pensar o fazer pedagógico se ele não tiver a oportunidade de vivenciar novas experiências, novas pesquisas, novas formas de ver e pensar a escola".

Reflexões e conclusões

Após a análise dos resultados parece não ser mais admissível pensar em investigações na escola ocupando-se apenas em mostrar fragilidades e a potencialidade de outros modos de ensinar e aprender em tempos pós-modernos. Há que se pensar em investigações em que a Universidade e a Escola Básica sejam parceiras e assim pesquisar "com a escola" em detrimento da ideia de pesquisar "na escola e "sobre a escola".

Salienta-se que o grupo de pesquisa após a análise das respostas dos professores também ficou se questionando em relação a formação continuada e (re)planejou suas ações da pesquisa. Uma das ações, como já mencionado antes, é os pesquisadores estão indo nas escolas explorando as atividades em conjunto com os professores. Após o desenvolvimento de tais atividades os pesquisadores se reúnem com os professores para discutir percepções e reações dos alunos frente ao uso de atividades investigativas e conceitos de pré-algebra, bem como para planejar atividades a serem realizadas com os alunos.

Esta ação está sendo muito produtiva, pois o grupo sendo constituído por quatro professores da escola básica, pesquisadores e bolsistas de iniciação científica está tendo complexidade em relação aos estudos, discussões e problematizações. Os professores dos Anos Iniciais estão se sentindo co-partícipes das pesquisa e no decorrer dos encontros trocam experiências e se sentem com coragem para tirar suas dúvidas tanto em relação à metodologia quanto ao conteúdo. Os professores comentam que o estar junto dos pesquisadores, no momento do desenvolvimento das atividades, é muito bom, pois "aprendem" em como fazer com os alunos. Assim, está se observando que os docentes estão começando a ter maior segurança tanto na metodologia da Investigação Matemática como em relação ao que se pode ensinar de álgebra desde os Anos Iniciais. Portanto, o grupo de pesquisadores está apostando na formação continuada em pequenos grupos, mas com maior interatividade, colaboração e cumplicidade.

Outra ação em andamento consiste no uso da metodologia "estudo de las classes" na perspectiva de Blanco-Álvarez e Castellanos (2017). De acordo com os autores a metodologia de estudo de classes é produtiva para o adensamento teórico-metodológico de docentes. Para eles,

> Esta metodología busca por parte de los maestros una cualificación permanente, un trabajo reflexivo y crítico sobre su práctica. El estudio de clase permite abrir el aula de clase a la mirada crítica de los colegas, lo que permite un enriquecimiento mutuo con las experiencias y especialidades de cada uno. Esta metodología debe mirarse siempre como un proceso de mejoramiento y no de evaluación descalificadora (Blanco- Álvarez e Castellanos, 2017, p. 9).

Os autores propõem quatro etapas. Na primeira, ocorre o planejamento conjunto das atividades a serem desenvolvidas em sala de aula. Nesta etapa ocorre também a observação mais acurada da turma em questão, bem como a discussão dos objetivos da atividade. Finda esta etapa, a seguir as atividades elaboradas são efetivadas em sala de aula com a presença do professor e de um observador (que pode ser um colega professor ou um investigador). As observações ocorrem desde o modo como os estudantes resolvem as questões, a pedagogia do docente e as dificuldades apresentadas pelos discentes. A terceira etapa consiste em avaliar, no grupo de professores, as atividades desenvolvidas. Por fim, na última etapa, considerado o "redesenho" das atividades a partir das considerações efetuadas na etapa anterior. Neste contexto, esta experiência está sendo efetivada em uma escola com duas professoras (uma do quarto ano e outra do quinto ano) as quais se dispuseram a participar desta experiência. Assim, os professores da Escola Básica, bolsistas e mestrandos estão efetivando as práticas pedagógicas com estas duas turmas, sendo que, em tais ocasiões, há um docente e um observador, que filma as aulas e observa o desenvolvimento das atividades no que concerne à atuação do docente e os modos de resolução que emergem dos estudantes no decorrer das atividades investigativas.

Por fim, cabe destacar que este estudo explicitou a produtividade de apostar em modelos de formação que valorizam, sobretudo, a efetiva participação dos docentes envolvidos, em detrimento de apenas ser consumidor de ideias e pesquisas geradas nas instituições. Acredita-se que os docentes, em conjunto com os pesquisadores, podem estudar referenciais teóricos, discutir sua produtividade, elaborar práticas pedagógicas e examinar seus resultados.

Referências y bibliografia

Albuquerque, l. c. de; Gontijo, C. H. (2013). A complexidade da formação do professor de matemática e suas implicações para a prática docente. Espaço Pedagógico. Passo Fundo, 20 (1): 76-87.

Blanco- Álvarez, H.; Castellanos, M. T. (2017) La formación de maestros reflexivos sobre su propia práctica y el estudio de clase. In: Observatório da Educação III: práticas pedagógicas na educação básica. Porto Alegre: Evangraf, p.7-18.

Brasil. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. (2017). 3° edição. Brasília: Secretaria de Educação Básica.

Costa, L. Vivências autoformativas no ensino de matemática: vida e formação em escolas ribeirinhas. (2015) Tese. Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas, Instituto de Educação Matemática e Científica da UFPA Belém PA.

Chimetão, L. K. (2009). O significado da formação continuada docente. Congresso Norte paranaense de Educação Física Escolar. Recuperado http://www.uel.br/eventos/conpef/conpef4/trabalhos/comunic.

Fiorentini, D. (2009). Quando Acadêmicos da Universidade e Professores da Escola Básica Constituem uma Comunidade de Prática Reflexiva e Investigativa. In: Fiorentini, D.; Grando, R. C.; Miskulin, R. G. S. Práticas de Formação e Pesquisas de Professores que Ensinam Matemática. Campinas: Mercado das Letras, p. 223-256.

Galindo, M. A.; Vital, M. L. (2011) Formação continuada de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental: o ensino de Física como duplo desafio. In Anais do XI Encontro de Pesquisa em Ensino de Física. Curitiba.

Godoy, A. S. (1995). Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. Revista de Administração de Empresas. São Paulo: v.35, n.3, p.20-29. Maio-junho.

Groenwald, C.L.O. (2014). Pensamento aritmético e pensamento algébrico no ensino fundamental. In: IV EIEMAT – Encontro Nacional Pibid Matemática.

Knijnik, G. et al. (2012). Etnomatemática em movimento. Belo Horizonte: Autêntica.

Luna, A. V. de; Souza, C. C. C. F. (2013). Discussões sobre o ensino de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental. In Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, 15 (1): 817-835.

Nóvoa, A. (2009). Professores: imagens do futuro presente. Portugal, Lisboa: Educa.

Paiva, V. P.(2008). Educação popular e educação de jovens e adultos. Rio de Janeiro: Edições Loyola.

Ponte, J. P.; Brocardo, J.; Oliveira, H. (2009). Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica.

Conhecimentos matemáticos: investigação com tarefas de aprendizagem profissional

Lilian Cristina de Souza Barboza
Universidade Federal do ABC
Brasil
lilicrissb@gmail.com

O estudo apresenta uma pesquisa em andamento, que trata da formação continuada do professor que ensina matemática nos anos iniciais (Ball, Thames & Phelps, 2008; Silver et al., 2007) e do pensamento algébrico (Blanton & Kaput, 2008; Kieran et al., 2016), nomeadamente o trabalho com os diferentes significados do sinal de igualdade (Trivilin & Ribeiro, 2015). É uma pesquisa de intervenção, em contexto de formação continuada, com o propósito de provocar mudanças e possibilitar aprendizagem profissional (Ball & Cohen, 1999), com o uso de tarefas de aprendizagem profissional (TAP).

O estudo está alicerçado em três grandes eixos:

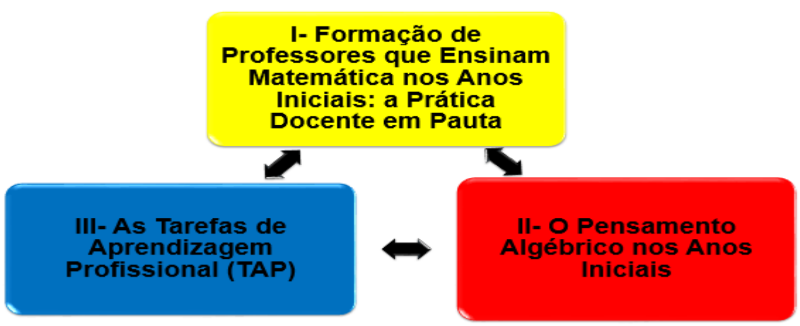


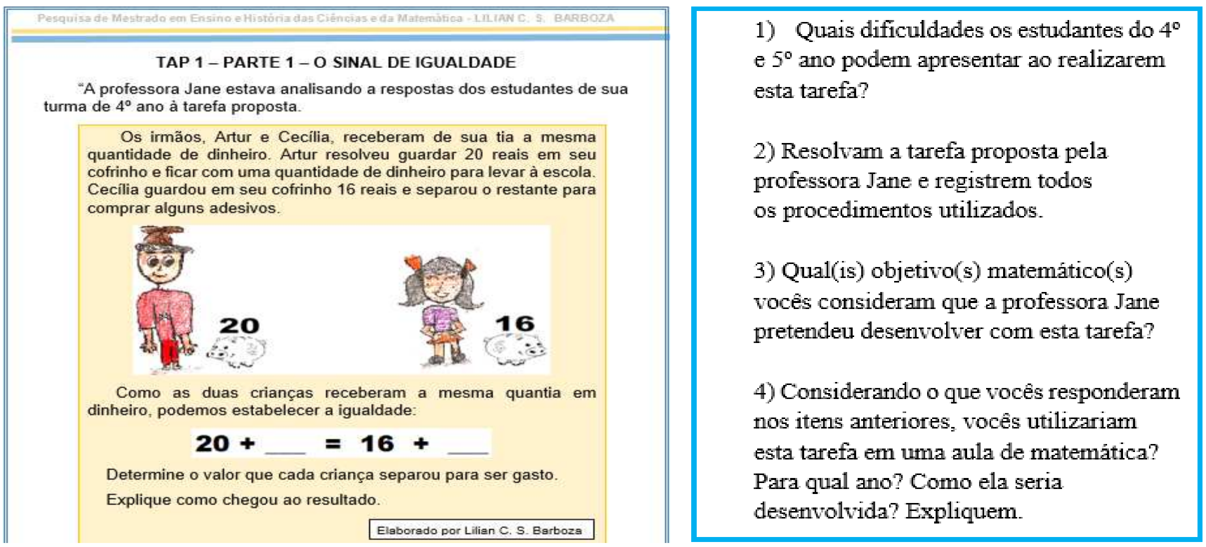
Figura 1. Eixos da Pesquisa.

Diante dos eixos estabelecidos, o objetivo geral é investigar se e como tarefas de aprendizagem profissional possibilitam a mobilização e a construção de conhecimentos para ensinar matemática nos anos iniciais. Este objetivo geral desdobra-se em dois objetivos específicos: (I) identificar se tarefas de aprendizagem profissional fundamentadas na prática letiva contribuem para a mobilização do pensamento algébrico; e (II) compreender e explicar como ocorre a construção do conhecimento matemático e didático de professores dos anos iniciais em um processo formativo, sobre os diferentes significados do sinal de igualdade.

Esta pesquisa insere-se em uma metodologia de cunho qualitativo, perspectiva teórica pautada no interpretativismo e perspectiva epistemológica construcionista.

A pesquisa de campo foi estruturada em 14 encontros de trabalho presenciais, com professoras dos anos iniciais, de uma escola pública do município de São Paulo, em contexto de formação continuada. Três instrumentos possibilitadores à produção e recolha de dados alicerçam a pesquisa: (I) o questionário, mobilizando conhecimentos prévios das professoras; (II) as TAP, com diferentes enfoques para possibilitar uma variedade de discussões e abordagens relativas ao conhecimento específico, conhecimento dos estudantes e dos processos de ensino e conhecimento do currículo; e as (III) gravações em áudio e vídeo realizadas em alguns dos encontros.

As TAP foram estruturadas tomando por base: (I) o que os professores precisam saber sobre matemática para o ensino dos diferentes significados do sinal de igualdade; (II) quais práticas letivas irão oportunizar a interação e construção de conhecimentos aos alunos e alunas; (III) quais tipos de tarefas e abordagens são potenciais ao ensino do sinal de igualdade. Parte de uma das TAP, desenvolvida junto às professoras, pode ser apreciada na *Figura 2*:


Pesquisa de Mestrado em Ensino e História das Ciências e da Matemática - LILIAN C. S. BARBOZA

TAP 1 – PARTE 1 – O SINAL DE IGUALDADE

"A professora Jane estava analisando a respostas dos estudantes de sua turma de 4º ano à tarefa proposta.

Os irmãos, Artur e Cecília, receberam de sua tia a mesma quantidade de dinheiro. Artur resolveu guardar 20 reais em seu cofrinho e ficar com uma quantidade de dinheiro para levar à escola. Cecília guardou em seu cofrinho 16 reais e separou o restante para comprar alguns adesivos.

Como as duas crianças receberam a mesma quantia em dinheiro, podemos estabelecer a igualdade:

20 + ___ = 16 + ___

Determine o valor que cada criança separou para ser gasto.

Explique como chegou ao resultado.

Elaborado por Lilian C. S. Barboza

1) Quais dificuldades os estudantes do 4º e 5º ano podem apresentar ao realizarem esta tarefa?

2) Resolvam a tarefa proposta pela professora Jane e registrem todos os procedimentos utilizados.

3) Qual(is) objetivo(s) matemático(s) vocês consideram que a professora Jane pretendeu desenvolver com esta tarefa?

4) Considerando o que vocês responderam nos itens anteriores, vocês utilizariam esta tarefa em uma aula de matemática? Para qual ano? Como ela seria desenvolvida? Expliquem.

Figura 2. Parte da TAP 1 – O Sinal de Igualdade.

Principais Referências

Ball, D. L. & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: toward a practice-based theory of professional education. In: Sykes, G & Darlinghammond, L. (Ed.). *Teaching as the learning profession*: handbook of policy and practice. São Francisco: Jossey-Bass, p.3-32.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, Thousand Oaks, v. 59, p. 389-407.

Blanton, M. & Kaput, J. (2008). Building disctrict capacity for teacher development in algebraic reasoning. In: Kaput, J., Carraher, D. & Blanton, M. (Org.) Algebra in the Early Grades. Nova Iorque: Lawrence Erlbaum Associates, p. 133-160.

Kieran, C. et al. (2016). *Early Algebra*. ICME-13 Topical Surveys, [s.l.]. Springer International Publishing.

Silver, E. A. et al. (2007). Where is the mathematics? Examining teachers' mathematical learning opportunities in practice-based professional learning tasks. *Journal Of Mathematics Teacher Education,* Springer Netherlands, v. 10, n. 4, p.261-277.

Trivilin, L. R. & Ribeiro, A. J. (2015). Conhecimento matemático para o ensino de diferentes significados do sinal de igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Bolema*, v. 29, n. 51, p.38-59.

Curso de Formação para Professores de Matemática: Aula Investigativa no Ensino de Probabilidade

Albano Dias **Pereira Filho**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins
Brasil
albano_filho@ifto.edu.br
Nielce Meneguelo **Lobo da Costa**
Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil
nielce.lobo@anhanguera.com

Resumo

Neste artigo discute-se um experimento de ensino sobre Probabilidade realizado com doze professores de matemática inseridos em um processo formativo. A pesquisa objetivou analisar a construção de conhecimentos profissionais dos participantes sobre Probabilidade, que vivenciaram uma proposta de aula investigativa e criaram atividades para levar os alunos construírem os conceitos de espaço amostral, aleatoriedade, definição de probabilidade, distribuição de frequências e Lei dos Grandes Números. No texto aborda-se a atividade intitulada "jogo com dois dados". A metodologia da pesquisa foi à qualitativa do tipo *Design-Based Research,* na concepção de Brown e de Collins. Analisaram-se as contribuições da formação continuada para o conhecimento profissional docente dos participantes**.** Como resultado, constatamos indícios de ampliação do conhecimento pedagógico do conteúdo.

Palavras – chave: Jogo de dados, investigação, probabilidade, formação.

Aulas Investigativas: Apoio teórico

A ideia do ensino por investigação como metodologia foi proposta por John Dewey no início do século XX nos Estados Unidos. Dewey apontou que era necessário que as escolas acompanhassem as mudanças ocorridas no contexto da época integrando métodos científicos à Educação, possibilitando aos estudantes realizarem experiências práticas.

As ideias de Dewey só foram difundidas e incorporadas na Educação na metade do século XX quando o educador Joseph Schwab recomendou o professor propusesse problemas com base em investigações fazendo o uso de experiências para conduzir as aulas. Isso deveria ser uma fase a cumprir, antes de introduzir a teoria, conceitos e princípios das ciências (Sá, 2009).

No Brasil as aulas investigativas começaram a surgir nas décadas de 50 e 60. Nessa época prevalecia o modelo de ensino como uma sequência fixa de comportamentos que iniciavam na identificação de problemas, passavam para elaboração de hipóteses e verificação experimental e por fim conclusão das hipóteses. Assim sendo as ideias de aulas investigativas pouco difundidas.

De acordo com Vieira (2012), somente no fim da década de 80 e início da década de 90 do século passado, a proposta de ensino por meio de aulas investigativas foi retomada no Brasil, criando assim expectativas quanto à promoção de um ensino mais científico e dinâmico. Contudo, somente a partir de 2000 surgiram pesquisas pretendendo definir o conceito de aula investigativa. Nesse aspecto muito embasado nas pesquisas portuguesas, tais como as de Ponte (2003, 2009).

O ensino por meio de aulas investigativas possibilita a construção de conceitos e conhecimentos possibilitando ao educando intuir presumir, experimentar, provar, avaliar e apresentar os resultados encontrados. A ação de investigar significa compreender e procurar soluções para os problemas propostos e assim buscar relações, procurando sempre justificá-las. O uso de aula investigativa no ensino gera um chamado desequilíbrio que é necessário para instigar o raciocínio do aluno, esse desequilíbrio ocorre quando o aluno é retirado da passividade das aulas clássicas da sala de aula e passa a fazer parte da ação sobre o meio, sobre os objetos, sobre as ideias com os colegas, e ainda a experimentação, criação e solução de problemas, observações, testes e pesquisas (Bona & Souza, 2015).

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006) as aulas investigativas são aquelas que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação. Os autores afirmam que, dependendo da forma como essas aulas são desenvolvidas, a atividade pode restringir-se apenas à fase de explorações e problematizações. Porém, se ocorrer, durante a atividade, formulação de questões ou conjecturas que desencadeiam um processo de realização de testes e de tentativas de demonstração ou prova dessas conjecturas, teremos, então, uma situação de investigação matemática. Ou seja, postura do professor, pode ajudar a trazer para sala de aula um aluno participativo, uma vez que ele é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões, conjecturas e nas realizações de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e nas discussões e argumentações com os seus colegas e com o professor.

Segundo Ponte, Brocado, & Oliveira (2009) a realização de investigação na sala de aula pode ajudar a estabelecer um ambiente em que os alunos participam ativamente. Facilita a compreensão dos processos e ideias matemáticas e da atividade matemática. Desta forma, tarefas de natureza investigativa podem assumir relevância, pois os alunos viverão experiências com características semelhantes à dos matemáticos profissionais.

Ponte (2003) propõe o uso de metodologias investigativas na sala de aula e discute como a investigação pode contribuir para aprendizagem dos alunos. Além disso, aponta as competências necessárias aos professores para promover a investigação na sala de aula. Aborda também o que ainda precisa melhorar para que essa prática se torne integrada á gestão escolar, a investigação deve ser contínua e não momentânea. A investigação não pode ocorrer apenas em uma aula e na aula seguinte voltar à aula com repetições de fórmulas e tradicionalismo.

O autor afirma que, investigar não significa fundamentalmente trabalhar com problemas de grande dificuldade. Mas sim, refletir a partir de questões que nos interessam e que apresentam primeiramente obscuras, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado. Nesse sentido, investigar corresponde a realizar descobertas, recorrendo a processos metodologicamente válidos, como formular problemas, explorar hipóteses, fazer e testar conjecturas, generalizar e construir argumentos e demonstrações. Segundo o autor, em uma investigação matemática o aluno parte de uma questão geral pouco estruturada e tenta formular uma questão mais específica e sobre ela produzir várias conjecturas que devem ser testadas para que em caso de refutações as questões sejam revistas ou novas questões sejam avaliadas até ganharem credibilidade.

A opção de trazer João Pedro da Ponte como luz do referencial teórico do trabalho investigativo, se deve ao fato do autor considerar a investigação como sendo o ato de descobrir relações, padrões, procurando identificar e comprovar as propriedades levantadas pelo investigador. Ele destaca a importância dessa atividade por contribuir para a construção do conhecimento, levando o aluno a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar, e apresentar o(s) resultado (s) encontrado reforçando atitudes de autonomia cooperação e capacidade de comunicação oral e escrita (em se tratando do trabalho em grupo). Essas definições do autor vão todas ao encontro aos nossos objetivos do trabalho, que busca trabalhar o ensino de probabilidade através de aulas investigativas.

Método

A pesquisa maior que subsidia este artigo, foi desenvolvida com metodologia qualitativa do tipo *Design Based Research*, segundo Cobb et al (2003). Essa metodologia caracteriza-se pela flexibilidade, por permitir modificações ao longo do percurso de pesquisa, baseadas nos feedbacks recebidos a cada experimento de ensino desenvolvido, são os re-designs, os quais permitem corrigir rumos ao longo da formação continuada e da pesquisa. Nela foram analisadas as contribuições de uma formação continuada para o conhecimento profissional docente. A formação focou o ensino de probabilidades por aulas investigativas. Os procedimentos metodológicos de coleta de dados durante a formação continuada foram por observações, recolha dos materiais produzidos/ adaptados pelos professores para suas classes, gravações de áudio e vídeos do processo formativo e da sala de aula. Os dados coletados foram analisados pelo método de análise de conteúdo, segundo Bardin (1979), considerando as etapas: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Além disso, foram analisados os vídeos dos encontros.

A atividade: Jogo de Dois Dados

Neste texto discutimos um episódio da formação continuada e os resultados parciais das análises. Entendemos que trabalhar com investigações matemáticas na sala de aula pode proporcionar ao professor um espaço de reflexão sobre suas práticas de ensino. Segundo Ponte, Brocado, & Oliveira (2009) estudos em Educação têm mostrado que este tipo de trabalho constitui uma poderosa forma para auxiliar o aluno a construir conhecimentos. Sob a ótica de ensinar por atividades investigativas, professores de matemática participantes do processo formativo, refletiram nos encontros sobre essa metodologia e criaram uma atividade para levar os alunos a tomar contato de forma investigativa com conceitos de espaço amostral, aleatoriedade, definição de probabilidade, distribuição de frequências e Lei dos Grandes Números. Tal atividade foi intitulada “jogo com dois dados”.

A seguir, apresentamos um relato do episódio com os professores no qual a atividade foi discutida.

Inicialmente dividimos os professores participantes em grupos de cinco em cada mesa e propusemos que se engajassem em um jogo. Um dos professores de cada grupo ficou responsável de jogar os dados e conferir as somas, paralelamente, os outros quatros professores formaram duas duplas, sendo uma equipe contra a outra.

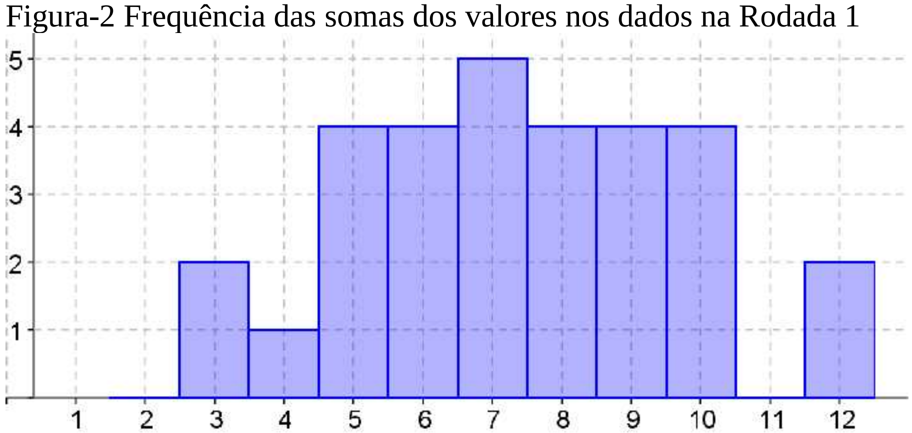
Figura 1- Algumas das cédulas fictícias e dados da atividade

Fonte: Dados da pesquisa.

Entregamos para cada equipe, dois dados enumerados de 1 a 6 e várias cédulas de uma moeda fictícia (relas), conforme o modelo da figura 1, com notas de 2 até 18. Explicamos que cada equipe poderia escolher números pertencentes aos conjuntos A ou ao B, formados pelos números $A = \{2, 4, 5, 8, 10,11\}, B = \{3, 6, 7, 9,12\}$. Desta forma, em cada rodada do jogo, a equipe seria considerada vencedora se a soma dos dados fosse igual a algum dos números do seu respectivo conjunto. A equipe que ganha na rodada, guarda em seu banco a cédula com o valor correspondente. Por exemplo: Caso eu opte pelo conjunto A e em determinada rodada, saia em um dado o número 3 e no outro o número 5, sua soma é 8, assim eu guardaria no banco uma cédula de 8 relas.

Apresentamos na figura 2 os resultados das somas que ocorreram de fato na primeira roda do jogo.

Figura-2 Frequência das somas dos valores nos dados na Rodada 1



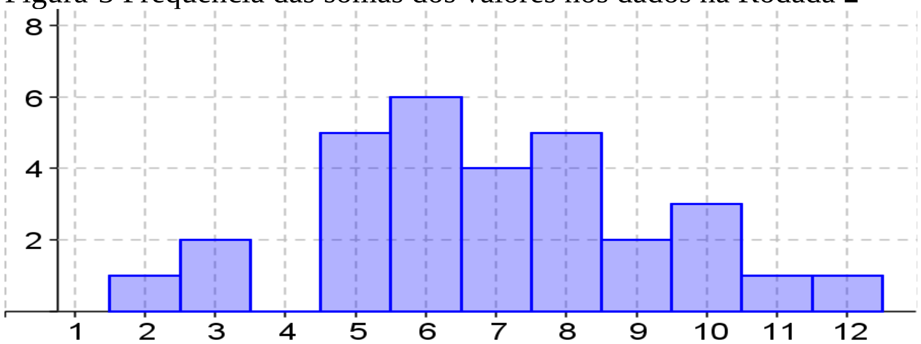
Fonte: Dados da Pesquisa.

Destacamos que a soma 7 obteve uma frequência de cinco, enquanto a soma 2 e onze não apareceram nenhuma vez.

Combinamos com os professores participantes que após as 30 rodadas, iriamos jogar novamente mais 30, sendo que os conjuntos da primeira rodada seriam invertidos.

A figura 3 apresenta os resultados da segunda rodada

Figura-3 Frequência das somas dos valores nos dados na Rodada 2

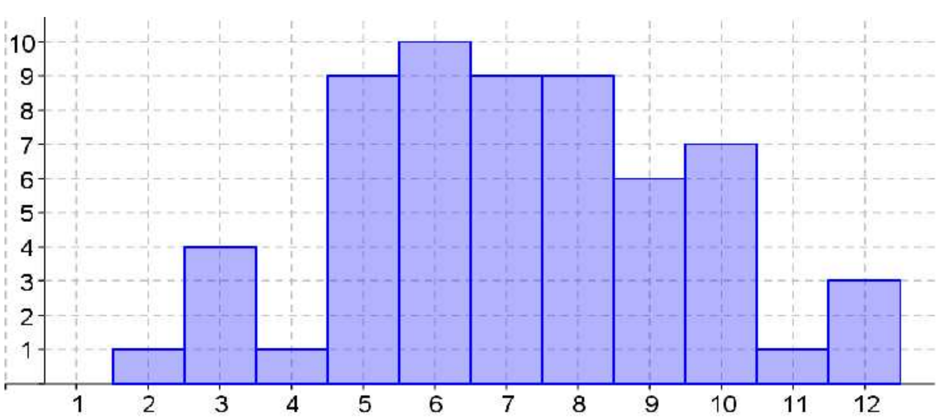


Fonte: Dados da Pesquisa.

Observamos que a soma 4 não apareceu e que as somas 5 e 8 empataram com frequência absoluta de cinco, a soma 7 apareceu quatros vezes e a soma 6 obteve a maior frequência, sendo seis a sua frequência absoluta.

Após as duas rodadas de trinta jogadas, construímos o histograma de frequência absoluta com as sessenta jogadas, que pode ser observado na figura 4 abaixo.

Figura-4 Frequência das somas dos valores incluindo as duas Rodadas



Fonte: Dados da Pesquisa.

Destacamos que as frequências 5 a 8 se mantiveram quase iguais, a soma 6 com uma frequência um pouco maior.

Ao final do encontro observamos que cada par de professores participantes o sagrou-se vencedor do jogo uma vez. Propusemos então que fosse feita uma análise do ocorrido. Feita a análise, percebemos também que ao final das duas partidas, houve um empate entre as somas, 5,7 e 8. Não houve a supremacia da soma 7, como imaginávamos. Os professores sugeriram que analisássemos as frequências de cada face dos dados separadamente. Desta forma, conferimos com um dos professores a contagem das frequências absolutas e relativas de cada face nas duas rodas e depois das 60 jogadas os resultados foram estocados em uma planilha eletrônica no software Excel.

O fato da soma 7 não ter obtido a maior frequência, como era esperado pelos professores participantes, foi uma boa oportunidade para discutirmos o conceito de aleatoriedade e, também, a lei dos grandes números.

Depois de experimentarem o jogo dos dois dados, os professores iniciaram o processo de criação de uma aula com teor investigativo para aplicar a seus alunos. Assim, adaptaram o jogo a novas situações para investigação. Um dos participantes da formação, o Professor T sugeriu a construção de um dado viciado; de um dado com duas ou três cores e também de um dado com cores e números diferentes. Outra ideia sugerida pelo grupo foi na aplicação do jogo com alunos, considerar o conjunto $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ e por uma disputa inicial no par ou ímpar, o grupo vencedor escolheria o primeiro número dentre os doze do conjunto X, após o primeiro escolhido, seriam então as escolhas alternadas pelas equipes de alunos. Foi enfatizado que, apenas após os alunos terem investigado e jogado é que os conceitos relativos á Teoria da Probabilidade, envolvidos seriam discutidos pelo professor na sala de aula.

Resultado e discussão

Neste episódio, através da vivência da atividade investigativa do jogo de dois dados, os professores participantes do processo formativo tiveram a oportunidade de desenvolver uma experimentação que provocou uma situação de desequilíbrio quanto à expectativa de resultados.

Consideramos que a atividade proposta proporcionou a produção de significados sobre atividades investigativas, promoveu reflexões sobre aspectos inerentes ao trabalho em equipe, também sobre a importância de uma formação continuada, bem como sobre metodologia para ensino de probabilidade. As reflexões foram centradas na importância de que o ensino seja voltado para a participação dos alunos, como agentes ativos na construção dos conceitos e na apropriação das definições.

A composição do grupo de professores participantes foi relevante para as discussões, uma vez que tínhamos no grupo professores de matemática, que tinham formação em ciências da computação, economia, química, biologia, ciências e agronomia, de modo que os conhecimentos em outras áreas foram significativos para as demais atividades desenvolvidas no curso de formação continuada.

Ao final dos encontros, ficou evidente que a participação na formação pôde ampliar o conhecimento profissional docente (específico, curricular e pedagógico), oferecendo aos professores subsídios para reflexões sobre suas práticas em classe, oportunizando inserir as aulas investigativas para abordar os conceitos de probabilidade.

Referências Bibliográficas

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo* (7ª ed). Lisboa: Edições 70.

Bona, A. S., & Souza, M. T. (2015). Aulas investigativas e a construção de conceitos de matemática: um estudo a partir da teoria de Piaget. *Psicologia USP*.

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehre, R. R. y Schauble, L. (2003). *Design experiments in education*. Educational Researcher, 32(1), 9-13.

Fiorentini, D. Lorenzato, S. A. (2006). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados.

Ponte, J.P. (2003) Investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em educação*, 2, 93-169.

Ponte, J. P., Brocado, J. y Oliveira, H. (2009). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula.* Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Sá, E.F. (2009) *Discursos de professores sobre ensino de ciências por investigação.* Tese, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil.

Vieira, F. A. (2012). *Ensino por Investigação e Aprendizagem Significativa Crítica: análise fenomenológica do potencial de uma proposta de ensino. Ensino por Investigação e Aprendizagem Significativa Crítica: análise fenomenológica do potencial de uma proposta de ensino*. Tese . Bauru, São Paulo, Brasil.

La enseñanza de la multiplicación: una propuesta a partir de la medida de longitudes

Liliana **Quintero** López
Universidad de Antioquia
Colombia
liliql22@gmail.com

Francisco José Brabo **Bezerra**
Universidade Federal do ABC
Brasil
francisco.bezerra@ufabc.edu.br

Resumen

El trabajo que a continuación se presenta relaciona algunos de los resultados y reflexiones del proceso de investigación asociado a la formación como magister. El objetivo de esta comunicación es presentar una posibilidad para organizar la enseñanza de la multiplicación a partir de la medida de longitudes, esta propuesta se tejió comprendiendo la multiplicación como isomorfismo de medida y estableciendo relación con los nexos conceptuales de la medida. El trabajo de campo se hizo en un curso de extensión con maestros de primaria de una escuela estadual, en este se buscó construir actividades orientadoras de enseñanza, para esto se compartieron situaciones desencadenadoras que movilizaron el aprendizaje de los maestros y la organización de la enseñanza. El resultado final fue la evidencia de un modo general de acción en las actividades de enseñanza que les permitió a los maestros movilizar la enseñanza de la multiplicación.

Palabras clave: multiplicación, medida, actividad orientadora de enseñanza, longitud, educación básica.

Introducción

Este trabajo presenta los resultados de una de las construcciones realizadas en el marco del desarrollo de la disertación de maestría titulada: "a medida como instrumento mediador para o ensino da multiplicaçao no ensino fundamental" finalizada en Brasil en el año 2016 en la Universidade Federal do ABC. Esta investigación tuvo como objetivo la organización de la enseñanza de la multiplicación a partir del concepto de medida para los años iniciales de la educación básica, y como pregunta norteadora: ¿Cómo el profesor puede organizar la enseñanza de la multiplicación para los años iniciales de la educación básica, teniendo el concepto de medida como instrumento mediador? La multiplicación se comprendió en este estudio como isomorfismo de medida, porque transciende el modelo tradicional al reconocerla como una relación cuaternaria a la cual están asociados otros conceptos matemáticos. Esta mirada de la multiplicación facilitó el estudio de las relaciones del concepto de multiplicación con las medidas y posibilitó la construcción de situaciones desencadenadoras de aprendizaje en las que las medidas fueron protagonistas y el pensar multiplicativamente el objetivo a ser alcanzado. Una de ellas fue: ¿cómo ardilla, coyote o canguro? que será presentada en esta comunicación.

El trabajo de campo fue realizado en un curso de extensión con profesores de educación básica de la misma institución, donde buscamos formar a los maestros y movilizarlos para que organizaran la enseñanza de la multiplicación para los diferentes grados considerando sus experiencias, el conocimiento de los grupos y el contexto.

La hipótesis con la que iniciamos este estudio y que hizo parte de nuestro camino fue que llevar a los estudiantes por el camino de los nexos conceptuales del medir posibilita el entendimiento de las etapas del pensar multiplicativamente. Concluimos que las situaciones desencadenadoras de aprendizaje desarrolladas con y para los profesores posibilitaron la re-significación de la enseñanza de la multiplicación, y presentaron un modo general de acción para organizar la enseñanza de la multiplicación a partir de las medidas.

A seguir, se presenta el horizonte teórico que sustenta este trabajo, mostrando las comprensiones desde la teoría de la actividad, entendiendo la enseñanza como la actividad principal de los maestros y finalmente presentando la actividad orientadora como posibilidad para organizar la enseñanza-aprendizaje. También se esbozan algunas ideas relativas a la comprensión de multiplicación y medida. Seguidamente está el camino metodológico que se siguió para cumplir el objetivo, donde se presentan los actores y las acciones de la investigación. Luego se presenta la situación desencadenadora ¿cómo ardilla, coyote o canguro? desde su construcción, orientación y las acciones derivadas que posibilitaron la construcción de la AOE. Por último, se comparten algunas consideraciones finales derivadas de este estudio.

Horizonte teórico

A continuación se presentan las reflexiones teóricas centrales que hicieron parte de este estudio, transitando desde la comprensión de actividad, enseñanza como actividad principal del maestro, actividad orientadora de enseñanza (AOE), multiplicación y medidas.

Actividad y Actividad Orientadora de Enseñanza (AOE)

Nuestras voces se movilizaron desde la Teoría de la Actividad propuesta por Leontiev, quien dio continuidad a los presupuestos histórico-culturales desarrollados por Vigotsky. Este autor estudió el concepto de actividad vinculado al concepto de trabajo propuesto por Marx, que tiene un papel central en la constitución del hombre, pues es quien humaniza y posibilita el desarrollo de la cultura. Este concepto tiene completo carácter social, y guarda relación con los procesos de mediación.

Leontiev (1978) explicita como el hombre es movido por necesidades que deben ser suplidas por medio de actividades ejecutadas, que deben responder a un motivo con significado social. Este mismo autor explica que en un primer momento, la actividad responde al instinto de sobrevivencia, el ser humano necesita dar solución a sus necesidades básicas, y solo después en el transcurrir de la vida se constituye como hombre por su actividad.

Leontiev presenta el concepto de actividad como una estructura que tiene dos características centrales: orientación (necesidades, motivos y tareas) y ejecución (acciones y sus operaciones), se refiere entonces al conjunto de acciones y operaciones organizadas y orientadas para alcanzar un objetivo, que responde a un motivo y a una necesidad humana (del sujeto).

Observando con este lente al maestro y su práctica, encontramos que según Moura (2012):

> El hecho de ser profesor dice que tenemos una característica común con otros sujetos que tienen como practica principal enseñar algo a alguien, esto es, para ser profesor es necesaria una acción que busque transformarse al transformar a otra persona, cambiar su modo de ser y de actuar. (p. 144)

De acuerdo con el mismo autor y otros (2010), la principal actividad del maestro es la enseñanza, una actividad que busca la transformación del otro (sus estudiantes) y la propia, en un proceso dialectico. Él debe organizar situaciones que busquen esta transformación de los sujetos de manera intencional. Siendo la enseñanza la actividad principal del profesor, hace parte de su actividad mediar la relación de los estudiantes con el objeto de conocimiento, ósea, el profesor tiene la gran tarea de orientar y organizar la enseñanza. En palabras de Moura y otros (2010)

> La búsqueda de la organización de la enseñanza, recurriendo a la articulación entre la teoría y la práctica, es que constituye la actividad del profesor, más específicamente la actividad de enseñanza. Esa actividad se constituirá como praxis pedagógica si permite transformación de la realidad escolar por medio de la transformación de los sujetos, profesores y estudiantes. (p. 89)

Es por esto que el autor en mención adoptó el concepto de actividad de la teoría de la actividad de Leontiev y lo pensó en la enseñanza, generando reflexiones en torno del modo de organizar la enseñanza, presentando así, una posibilidad para realizar la actividad educativa: las AOE.

La necesidad que moviliza la AOE es la apropiación de la cultura, esta se materializa en la apropiación del conocimiento históricamente acumulado, comprendiendo ser este el motivo real de la actividad. Mirando más específicamente los sujetos envueltos en la AOE, el objetivo específico que moviliza al profesor y a los estudiantes, es el de enseñar en el caso del primero y el de aprender en el caso del segundo.

La AOE según Moura

> (…) se constituye en un modo general de organización de enseñanza, en que su contenido principal es el conocimiento teórico del individuo en el movimiento de apropiación del conocimiento. Así, el profesor al organizar las acciones que objetivan el enseñar, también cualifica sus conocimientos, y es ese proceso que caracteriza la AOE como unidad de formación del profesor y del estudiante. (2002, p.150)

Con base en la propuesta de Moura, se concluye que la AOE busca la organización de la enseñanza, siendo elemento de mediación entre la actividad de enseñanza y actividad de aprendizaje, y promueve un modo general de apropiación de la cultura humana.

Multiplicación y medida

Investigadores como Starepravo (2010), Obando (2014), Torres (2013), Madera (2012) y Crestani (2013) han centrado sus investigaciones en la enseñanza de la multiplicación presentando como resultados de sus estudios diferentes posibilidades para organizar su enseñanza. En ellos encontramos coincidencias en las maneras de describir la realidad frente a la enseñanza de la multiplicación tanto en las escuelas brasileras como colombianas, resaltando el uso del algoritmo, entendiéndola como suma de sumandos iguales y dando prioridad a la memorización de las tablas de multiplicar.

Fue a partir de la voz de estos autores que reconstruimos la comprensión de lo que significa pensar multiplicativamente, que reconocimos la existencia de la correlación entre una colección de conjuntos con igual cantidad de elementos, la relación biunívoca y las relaciones de proporcionalidad entre las cantidades representadas en las colecciones de conjuntos.

Desde nuestros modos de hacer guiados por el interés de constituir actividades orientadoras de enseñanza, también fue importante el rastreo histórico de los conceptos, referente a la multiplicación encontramos que en la historia de la humanidad los primeros registros aparecen en la constitución de los sistemas numéricos como herramienta para optimizar el conteo y la escritura. Este rastreo se hizo consultando autores como Boyer (1996), Eves (2004) e Ifrah (1985), allí encontramos episodios que confirman el interés principal de nuestros antepasados frente a la organización de los sistemas numéricos y el perfeccionamiento de los métodos de cálculo, hechos que tienen correspondencia con la realidad encontrada en las aulas mencionada antes.

Reconocemos que para desarrollar el pensamiento multiplicativo no es suficiente la memoria y el uso del algoritmo, se deben considerar los conceptos asociados como razón, proporción y proporcionalidad. En la interacción con estos autores comprendimos que a los problemas multiplicativos se les asocian cantidades y no solo números, que sus representaciones en la mayoría de los casos giran en torno de las medidas y que las cantidades asociadas no son de la misma naturaleza, esto hace que se reconozcan dos sistemas de cantidades y dos procesos de variación, uno en cada sistema de cantidades.

Según Vergnaud (2009), la relación de multiplicación constituye una relación cuaternaria, que comprende tres clases de estructuras diferentes: isomorfismo de medidas, producto de medidas y proporción múltiple. De acuerdo con el mismo autor, el isomorfismo de medidas considera que en todo problema multiplicativo existen cuatro cantidades relacionadas, dos que pertenecen a un espacio de medidas y las otras dos a otro.

Obando (2014) y Torres (2013) sobre estos presupuestos, hicieron una síntesis en la que definen tres etapas que indican cuando se está pensando multiplicativamente, son ellas: identificar los dos sistemas de cantidades, establecer relaciones entre las cantidades de los dos sistemas e identificar las razones y proporciones que permiten correlacionar las cantidades entre los dos sistemas. Este fue nuestro punto de llegada.

Frente a la medida, Caraça (1975), apunta que medir consiste en comparar dos magnitudes de la misma especie, necesidad que surgió en el contexto del trueque y posteriormente en la división de tierras y el cobro de impuestos en el antiguo Egipto. Siguiendo el camino lógico – histórico, el grupo de estudio OBEDUC de la USP, organizó las relaciones esenciales (nexos conceptuales): el primero es el reconocimiento de la magnitud, el segundo es la comparación entre dos o más objetos que poseen la misma magnitud y el tercero es la medida de la magnitud a partir de una unidad de medida. De esta manera es posible transitar el camino del desarrollo histórico y lógico del concepto. Este fue nuestro punto de partida.

Camino metodológico

La situación desencadenadora que se comparte en esta comunicación fue pensada desde la medida, transitando los nexos conceptuales antes presentados y buscando el desarrollo del pensamiento multiplicativo. Como ya se mencionó, la producción de los datos se dio en un curso de extensión en el que participaron 37 maestros pertenecientes a la misma escuela, 34 que acompañan grupos de primero a quinto de primaria y tres directivos docentes. El trabajo se organizó en tres momentos: planeación, desarrollo del curso y producción, y finalmente análisis de los datos. Para la producción de los datos se usaron instrumentos como las grabaciones de audio, tareas diagnósticas, diario de campo, discusiones en subgrupos y generales.

En el desarrollo del curso se tenía primero un momento de formación que buscaba movilizar a los profesores para que organizaran la enseñanza de la multiplicación a partir de las medidas, luego ellos hacían su trabajo con los estudiantes y después se daba un momento de discusión y reflexión con dos objetivos: el primero, constituir actividades de enseñanza a partir de los relatos de experiencia de los profesores con relación a la Actividad de Enseñanza y a la Actividad de Aprendizaje, y el segundo, reflexionar sobre cómo el concepto de medida puede ser un instrumento mediador para la enseñanza de la multiplicación.

Se propusieron pequeñas tareas con la intención de garantizar el reconocimiento y la apropiación de cada nexo conceptual de las medidas. Buscando movilizar en los profesores la reflexión acerca de la organización de la enseñanza de la multiplicación a partir del concepto de medida y la actividad de aprendizaje de los estudiantes.

Se entiende que, a partir de las experiencias, observaciones, planeaciones y sugerencias los profesores contribuyen con la organización de la enseñanza. Es importante explicitar las acciones de enseñanza organizadas por ellos, y las acciones de aprendizaje desarrolladas por los alumnos para dar solución a las tareas propuestas. A partir de los relatos de los profesores, fue posible describir cómo organizar la enseñanza de la multiplicación teniendo el concepto de medida como instrumento mediador.

Para explicitar los análisis, fueron construidos episodios con las acciones más significativas desde el punto de vista del objetivo de la investigación. Para Moura, un episodio se refiere a:

> (…) Frases escritas o habladas, gestos y acciones que constituyen escenas que pueden revelar interdependencia entre los elementos de una acción formadora. Así, los episodios no son definidos a partir de un conjunto de acciones lineales. Puede ser que una afirmación de un participante en una actividad no tenga impacto inmediato sobre los otros sujetos del colectivo. Ese impacto podría revelarse en otro momento en el que al sujeto se le pida utilizar algún conocimiento para participar de una acción en el colectivo. (2004, p.276)

No se trata entonces de transcripciones completas de lo expresado por los profesores, se refiere, como indica Moura, a una composición que resulta de la junción de partes de lo dicho o escrito que convergen en una misma categoría de análisis.

¿Cómo ardilla, coyote o canguro?

La pregunta desencadenadora fue ¿cuánto usted puede saltar?, ¿Cómo la ardilla, el coyote o el canguro? Fue presentada una guía con las orientaciones y reglas del juego junto con tiras de colores de diferentes tamaños, a cada tira se asociaron un número determinado de puntos. Los maestros debían saltar, medir la distancia alcanzada usando alguna de las tiras y registrar los puntos logrados según correspondía. Después los profesores debieron establecer relaciones entre las tiras y la medida de longitud estándar para responder a la pregunta por el salto según el tipo de animal que podían ser, porque esta información fue presentada en metros. También fueron presentadas tareas en las que los maestros debían llenar tablas con algunas situaciones que relacionaban saltos, cintas y número de puntos.

En el espacio de reflexión colectivo los profesores proyectaron acciones posibles para el trabajo con sus estudiantes y recordaron clases pasadas identificando el uso de instrumentos y unidades de medida patrón en su enseñanza, que relacionaron con uno de los nexos conceptuales estudiados.

Los profesores de educación física compartieron con los colegas que ellos han realizado ejercicios parecidos al planteado en el curso, pero lamentaron no conocer lo que ahora saben porque reconocen que podrían haber aportado a la comprensión de lo que es medir. Se resalta el poder de la reflexión docente y el proceso de formación doble, en el que el profesor termina orientando la situación sin planearlo en la que se forma en cuanto forma a sus estudiantes.

Aunque los profesores no tenían formación específica en matemáticas, en el desarrollo del curso de extensión comprendieron la importancia de los nexos conceptuales del medir, y se apropiaron de ellos para reflexionar sobre sus acciones en clases pasadas. Evidenciadas en la experiencia contada por los profesores de educación física cuando compararon la diferencia entre el salto triple de los estudiantes, del profesor y de los atletas. También cuando los estudiantes afirmaban que quien es más alto salta más y quien es más bajo salta menos.

Por su parte, las profesoras de primer grado movilizadas por las reflexiones en el curso de extensión, organizaron algunas clases a partir de esta situación desencadenadora, presentando las siguientes acciones de enseñanza: en conjunto con los profesores de educación física se orientó y acompañó el espacio para que los estudiantes saltaran y midieran sus saltos usando las cintas de colores construidas para este estudio, los estudiantes debían registrar gráficamente la medida de cada salto en un formato propuesto por las profesoras. Luego en el salón de clase se trabajó a partir de los dibujos de los estudiantes y se buscó que calcular los puntajes. Una de las profesoras resalto expresiones de los niños como: “yo perdí el juego porque solo tengo una cinta y tú tienes un montón” lo que nos muestra como para algunos solo existe un espacio de medida y la posibilidad de ganar el juego por acumulación de cintas sin pensar en los puntos que se relacionan. Pero en el desarrollo de la clase el estudiante reconoce el otro espacio de medida y comprende porque con solo una cinta él le ganó a su compañero.

Este trabajo se hizo paso a paso, recorriendo una y otra vez cada nexo conceptual, logrando que los niños vivieran lo que es medir y avanzaran en el pensar multiplicativamente. Las maestras también usaron cuentos infantiles que invitaban a medir, hicieron gráficos de barras con los datos de los puntos obtenidos por los estudiantes y usaron las preguntas como orientadoras en cada momento. Este trabajo reveló que es posible que los niños de primer grado se apropien de los conocimientos teóricos que envuelven las medidas y la multiplicación tal como se entienden en este estudio.

Consideraciones finales

A la composición entre situaciones desencadenadoras de aprendizaje y acciones de enseñanza reconocidas en la voz de los profesores desde sus recomendaciones y relatos de experiencia es lo que consideramos una AOE. Las acciones que permiten organizar esta enseñanza se originan a partir de la reflexión del maestro, quien primero aprende en interacción con las situaciones desencadenadoras de aprendizaje fortaleciendo su saber teórico, y después piensa en su grupo específico para proponer las variaciones necesarias que garanticen el movimiento de la actividad de aprendizaje en sus clases.

Concluimos que los maestros entraron en actividad de estudio acogiendo como motivo propio la enseñanza de la multiplicación consiguiendo su organización a partir de las medidas. Resaltamos en este proceso cómo ellos se movilizaron y reflexionaron sobre sus planeaciones de clase, logrando intercambios y colaboraciones importantes con sus colegas valorando la experiencia de cada uno.

Referencias y bibliografía

Asbahr, F. (2011). "Por Que Aprender Isso, Professora?" Sentido Pessoal e Atividade de Estudo na Psicologia Histórico-Cultural. (Tesis de doctorado, Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo, São Paulo).

Boyer, C. (1996). História da Matemática. São Paulo, SP: Edgard Blücher.

Caraça, B. (1975). Conceitos fundamentais da Matemática. Lisboa: Tipografia Matemática Ltda.

Crestani, S. (2013). Análise conceitual das proposições de Davydovi e seus colaboradores para o ensino do conceito de divisão. (Especialização em educação, Faculdade de Educação, Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma).

Eves, H. (2004). Introdução à história da matemática. Campinas, SP: UNICAMP.

Ifrah, G. (1996). Os números: história de uma grande invenção. (Tradução Stella Maria de Freitas Senra): São Paulo: Globo.

Leontiev, A. (1978) Actividad, consciencia y personalidad. Havana: Editorial pueblo y educación.

Madeira, S. (2012). “Prática”: uma leitura histórico-crítica e proposições Davydovianas para o conceito de Multiplicação. (Disertación de maestria, Faculdade de Educação, Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma).

Moretti, V. (2007). Professores de Matemática em Atividade de Ensino. Uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente. (Tesis de doctorado en educación, Universidade de São Paulo, São Paulo).

Moura, O. (1996). A atividade de ensino como unidade formadora. Bolema, 12 (2), 29-43.

Moura, O. (2012). A atividade de ensino como ação formadora. En: Domingues, A y Pessoa, A. Ensinar a ensinar. São Paulo: Pioneira Thomson Learning Ltda, 143-162.

Moura, O. (2010). Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. Revista Diálogo Educacional, 205-229.

Moura, O. (2010). A atividade pedagógica na Teoria Histórico-Cultural. Brasilia: Liber Livro Editora Ltda.

Obando, G. (2014). Sistema de Prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica. (Tesis de doctorado en educación, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali).

Starepravo, A. (2010). Multiplicação na Escola Fundamental I: análise de uma proposta de ensino. (Tesis de doctorado en educación, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo).

Torres, M. (2013). Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas: una mirada del isomorfismo de medida en terminos del análisis relacional. (disertación de maestria em educación, Facultad de Educación, Universidad de Antioquia, Medellín).

Vergnaud, G. (2009). A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: UFPR.

Vigotsgy, L. (2007). Formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes.

La Didáctica de Matemáticas y Ecología de Saberes

Abdón Pari Condori
Universidad Nacional de Educación
Ecuador
abdon.pari@unae.edu.ec

Resumen

Esta comunicación tiene como propósito presentar el análisis de una experiencia educativa de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde un enfoque de diversidad epistémica e intercultural que desarrolla la Universidad Nacional de Educación en la Amazonía ecuatoriana. Se ha considerado como parte de un curso de *Ecología de Saberes* que tiene como objetivo, compatibilizar los distintos enfoques de estudio de la matemática, su enseñanza y aprendizaje para relacionarla con otras asignaturas como lenguaje, medio natural y sociales, la investigación atraviesa de manera transversal todas las asignaturas del ciclo. Todas las asignaturas giran alrededor de un núcleo problémico y un eje integrador fundamentado en el concepto de "ecología de saberes" y el Modelo Pedagógico de la UNAE. El estudio es de corte cualitativo e interpretativo donde la narración se convierte en un espacio transformador para presentar la reflexión de los efectos del curso sobre su propia práctica.

Palabras clave: didáctica de matemáticas, ecología de saberes, formación docente.

Introducción

La Universidad Nacional de Educación (UNAE) de Ecuador es una universidad estratégica que genera una dinámica singular. Según Freddy Álvarez, Rector de la UNAE: "crear una universidad nueva requiere nuevas mentalidades" (Álvarez, 2016, p.15). Esto conlleva uno de los mayores retos institucionales de la UNAE, porque crear una nueva universidad con personas que vienen de diferentes universidades, diversos países y culturas con experiencias y formaciones variadas. Esto es una riqueza institucional, pero no fácil de lograr la convergencia con los principios educativos y normativos de la política educativa ecuatoriana y los principios pedagógicos y curriculares del Modelo Pedagógico de la Universidad. La UNAE, es una universidad de formación de maestros que apuesta por la transformación de la educación ecuatoriana en relación de los desafíos de la educación mundial.

La UNAE, al ser una universidad de alcance nacional ha constituido algunos Centros de Apoyo o Sedes institucionales. El primer Centro de Apoyo se encuentra en la ciudad de Nueva Loja, cantón Lago Agrio, provincia de Sucumbíos denominada UNAE Amazonia, por estar ubicado en la Región de Amazonía, y el segundo está ciudad de San Vicente, provincia Manabí, que corresponde la a Región de Costa. Contunua las proyecciones de creación de otros Centros de Apoyo para otras reiones. En la UNAE Amazonía, se oferta por ahora las carreras de Educación Básica (EB) y Educación Intercultural Bilingüe (EIB) para profesores en servicio que no cuentan con el título de tercer nivel (Licenciado). También se desarrollan los cursos de Formación Continua para docentes y directivos de la región. Además, de las anteriores, se realizan Seminario/Talleres bajo el rótulo de "Ecología de Saberes" como parte de la vinculación con la colectividad del Centro. Estos seminarios/talleres buscan dar respuesta a las demandas y necesidades de formación de docentes y directivos. Estos cursos son desarrollados por un equipo multidisciplinar de la UNAE y dirigidos también a un público diverso y variado. En estos espacios de reflexión se crean debates y diálogo de saberes. En la que participan profesores de distintas especialidades, diferentes niveles y distintas formaciones.

El perfil del docente UNAE se basa en el desarrollo de competencias básicas y profesionales que configuran el desarrollo del pensamiento docente práctico. El Modelo Pedagógico está fundamentado en la epistemología constructivista (Pérez, 2017), en la que representación y acción constituyen ámbitos fundamentales de los procesos de construcción del conocimiento. Desde este enfoque pedagógico el conocimiento se construye a partir del desarrollo de competencias docentes, entendidas como un complejo constructo de pensamiento y acción, que implica un tetrágono de saber: saber pensar, saber decir, saber hacer y saber convivir.

Además, el desarrollo del pensamiento práctico y creativo constituye uno los principios del modelo curricular. Las competencias profesionales del docente de la cibersociedad son entendidas como sistemas de comprensión y actuación profesional capaz de responder a las exigencias de un ciudadano crítico, creativo, responsable y comprometido con su contexto.

La formación docente se basa en los principios pedagógicos: aprender haciendo, esencializando el currículo, en ambientes de colaboración y conectividad, fomentando la meta cognición, la formación formativa y el rol tutorial del docente, es decir todo está orientado a desarrollar el pensamiento práctico que le permita experimentar la teoría y a teorizar la práctica.

En esa perspectiva, busca desarrollar una formación dinámica que permite a las instituciones tener una presencia efectiva en contextos en los que el acceso a procesos académicos relacionados con estudios superiores es difícil. Particularmente, en el caso de la Amazonia ecuatoriana. Por eso se ofertan los siguientes cursos y carreras:

1. Carreras de Educación Básica (EB) y Educación Intercultural Bilingüe (EIB).
2. Cursos para docentes: *Enseñanza y Aprendizaje para la Investigación y la Innovación Retos del docente contemporáneo hacia una educación del buen vivi*r.
3. Curso para directivos docentes: *Gestión educativa y Liderazgo pedagógico para la Investigación y la Innovación*
4. Ecología de Saberes. *Seminarios UNAE sobre didácticas en Educación.*

Aunque las matemáticas se imparte tanto en las carreras EB y EIB y los seminarios UNAE de "Ecología de Saberes". En ambos programas son consideradas las matemáticas desde un enfoque de la diversidad epistémica e intercultural con énfasis en el pensamiento práctico y la experimentación en el aula.

En este trabajo mostraremos la experiencia de impartir la Didáctica de la Matemática en el marco de "Ecología de Saberes" Seminario UNAE sobre didácticas de la matemática desde una perspectiva interdisciplinar, intercultural respetando el ritmo de aprendizaje de los estudiantes. . La población objetivo fue 75 maestros de una unidad educativa de los diferentes niveles de Primario y secundario. De los cuales 12 son profesores de matemáticas en los diferentes niveles. El seminario taller "Ecología de Saberes" tuvo una acogida muy importante tanto de parte de los profesores como de los directivos. Incluso algunos profesores que son parte de las carreras de EB y EIB también participan de forma activa y creativa.

Posteriormente presentamos algunas autonarraciones reflexivas de los participantes del seminario taller desde su experiencia con las matemáticas como estudiante y docente. Haremos especial énfasis en la compatibilización de los diferentes saberes o conocimientos ante la polarización o hegemonía unilateral del conocimiento científico.

El objetivo es generar procesos de reflexión sobre las prácticas educativas y de investigación, para fortalecer e incentivar la gestión social de los conocimientos en contextos plurales de formación continua y permanente; iniciar las actividades para el fortalecimiento de los procesos de formación de la Red Académica de Docentes Investigadores en la Amazonia; promover nodos de relación interinstitucional e interdisciplinaria entre la comunidad académica de Sucumbíos, y establecer acuerdos para la realización de procesos de investigación singular y colectiva sobre educación y pedagogía en contextos plurales de formación.

Marco teórico

La ecología de saberes se fundamenta en la idea de que el conocimiento es interconocimiento, intersubjetivo e intercultural. Lo contrario de lo que se planteaba desde la hegemonía propugnada por la Civilización Occidental considerando que su conocimiento es científico y los otros no son científicos. Por ejemplo, el ambateño Marcos Guerrero Ureña platea de la siguiente manera:

> La historia de la ciencia se ha elaborado bajo la premisa de que la configuración básica del saber científico es un proceso acaecido dentro de las fronteras de la Civilización Occidental. Si bien hoy se tiende a admitir que los importantes y copiosos desarrollos intelectuales de las antiguas culturas egipcia, babilónica, o de la hindú y china, son progenitores de ese saber, no se les reconoce, en cambio, como productos científicos propiamente dichos. El argumento esgrimido es bastante convincente y recoge el hecho de que ninguno de los antecedentes de la matemática griega alcanzó a sistematizarse como una geometría –al modo de los Elementos de Euclides, con cuya aparición pudo cimentarse el escenario para la fluida realización del pensar y el conocer. (2004, p. 2).

Sin embargo, a lo largo de la historia de las matemáticas se han dado descubrimientos paralelos sin que se conozcan los autores o no compartan sus conocimientos. Por ejemplo, la disputa de la paternidad del cálculo de las derivadas y las integrales, que después de casi tres siglos y medio aproximadamente desde su invención, aún continúan controversias y comentarios sobre quién fue mejor matemático y científico: Isaac Newton (1641-1727) o Gottfried Leibniz (1646-1716), por mencionar alguno.

En la misma línea Guerrero (2004), plantea: *Los dos Máximos Sistemas del Mundo: las matemáticas del Viejo y del Nuevo mundo.* El autor se pregunta: ¿hubo en alguna otra parte de nuestro planeta, una invención equivalente, un desarrollo paralelo de un sistema de referencia igual apropiado para la expresión de las ideas? Y añade, de ser cierta esta posibilidad: ¿Cuál es la otra ciencia, dónde y cómo se originó? Para responder a estas inquietudes y a otras el autor presenta el sistema matemático desarrollado por el hombre precolombino, en el marco de los Espacios de Representación. Estas exóticas matemáticas contemplaban la Geometría Analítica Fractal que presenta una Geometría Arborescente o p-ádica totalmente desconocida y no consta en los Anales de Matemáticas (Guerrero, 2004).

Si bien es cierto, que hubo importantes y copiosos desarrollos intelectuales en Europa y en el Oriente, todo esto muestra que las matemáticas son un conocimiento construido sobre la interconectividad de los conocimientos e interculturales. Incluso, el sistema de numeración que hoy utilizamos es intercultural, porque es "Indo arábigo". Asimismo, no se puede negar los saberes matemáticos en América, como la cultura Maya, Inca, Tiwanacu, entro otros, conocido como ABYA-YALA.

Por ejemplo, recién en la década de los 70, el matemático francés Benoit Mandelbrot acuña el término fractal derivándola del adjetivo latín *fractus*. Sin embargo, la existencia de los fractales se conoce desde mucho antes. En la matemática andina ya estaba en la Chacana (ver Guerrero, 2004). Mientras que en el Occidente, recién en el siglo XIX eran considerados, simplemente como curiosidades matemáticas, porque su verdadera identidad no fue plenamente expresada hasta las décadas de entre 1960 y 1970, gracias a los importantes estudios de Mandelbrot y otros científicos.

El propósito del curso que desarrollamos desde la UNAE, no es polarizar entre los dos Sistemas Máximos del Mundo: Las Matemáticas del Viejo y Nuevo Mundo (Guerrero, 2004), impulsando en lugar de la hegemonía unilateral, sino más bien compatibilizar entre ambos sistemas y posibles otros. Como la etnomatemática acuñado por el profesor e investigador brasileño Ubiratan D'Ambrosio ha contribuido a la concepción de la matemática como una construcción social y actividad humana (D'Ambrosio, 2001).

En esa perspectiva se toma el concepto de "Ecología de Saberes" del sociólogo Boaventura de Sousa Santos (2012) como una metodología de investigación que favorece la interactividad sobre la unilateralidad y a su vez propone un intercambio entre quienes poseen el conocimiento científico y aquellos sectores de la población que poseen otros tipos de conocimientos.

Método

El presente estudio forma parte del Proyecto Ecología de Saberes. *Seminarios UNAE sobre didácticas en educación.* Específicamente el caso de matemáticas. En la que han participado 12 profesores de diferentes niveles perteneciente a una unidad educativa de la provincia de Sucumbíos.

El estudio llevado a cabo por el equipo académico de la Universidad Nacional de Educación en la Amazonía, se ha desarrollado de un modo secuencial mediante la observación participante de tres procesos: (1) un seminario taller de "ecología de saberes" para el profesorado en general, (2) un seminario taller de didáctica de las matemáticas y (3) un diálogo de saberes entre los profesores de matemáticas, lenguaje, medio natural y ciencias sociales.

La población involucrada en el estudio de caso abarca 75 profesores de la Unidad Educativa Pacífico Cembranos de Lago Agrio. De los cuales 12 son profesores de matemáticas de diferentes niveles de primario y secundarios.

Se han utilizado clases presenciales para generar espacios de reflexión y diálogo sobre la diversidad epistémica, la interculturalidad y la interdisciplinaridad que busca compatibilizar los diferentes saberes y conocimientos como un potencial del ser humano. En esa perspectiva la matemática es concebida como una construcción del hombre, por lo tanto es una actividad humana (Freudenthal, 1981). Mientras que en el aprendizaje autónomo de los profesores se contempla las lecturas de artículos seleccionado por los facilitadores y la reflexión desde sus experiencias frente a esas teorías o posturas paradigmáticas. Estas reflexiones eran presentadas en forma narrativa. En la fase de aprendizaje colaborativo se han realizado guiones para la grabación de un video de máximo de cinco minutos.

En cuanto al diseño del estudio de caso, este se ha enmarcado en un modelo de investigación cualitativa, que nos ha permitido acercarnos y comprender el objeto de estudio desde una perspectiva comprensiva y de exploración abierta y compleja (Diez y Díaz, 2018).

Resultados

Es posible encontrar a la matemática en cualquier actividad humana, desde el quehacer científico, hasta las manifestaciones culturales y artísticas. Por eso es importante desarrollar en los ciudadanos los aspectos básicos de la matemática que permitirán desempeñarse de manera adecuada y satisfactoriamente tanto en contextos académicos y científicos como en sociales, culturales y laborales. En esa perspectiva, la didáctica de matemática en la formación de profesores de matemáticas necesita ser un proceso continuo, sistémico, organizado y permanente en la transformación personal y profesional. Independiente de cómo vean las matemáticas, les guste o no, si siente que podría explicar qué es la matemática o no, la mayoría de las personas estarían de acuerdo que las matemáticas son una forma de comunicar información. Esta forma puede parecer bastante diferente a la información que se comunica oralmente o por escrito, sin embargo sigue siendo información de algún tipo. Como una forma de comunicación están sujetas a influencias y variaciones en la interpretación tanto a nivel social, cultural e incluso individual. En este curso, la ecología de saberes se fundamenta en que el conocimiento o saber matemático es interconocimiento. Por esa razón, se trabajó las diferentes formas de aprender, conocer, estudiar etc. Sin caer en la polarización, ni la unilateralidad de los conocimientos de ciertas culturas. Más bien busca la compatibilización de los diferentes saberes que son diferentes.

Los participantes de ecología de saberes han trabajado desde las diferentes formas de entender y hacer matemáticas y han realizado narraciones reflexivas desde sus experiencias y vivencias personales (Pari, 2017), como estudiantes y profesores de matemáticas. Estos aspectos permiten un movimiento de construcción y reconstrucción de conocimientos y competencias profesionales que posibilita una mejor comprensión y perfeccionamiento de los procedimientos y una mejora en el desempeño y en el resultado del trabajo de mediación en el aula.

A continuación presentamos algunas narraciones de los profesores participantes del curso Ecología de Saberes:

> *La enseñanza de las matemáticas cuando yo estudiaba en la escuela, era muy tradicional, teníamos que aprender de memoria las tablas de sumar, restar y multiplicar, para luego realizar las operaciones. El estudiante que no sabía de memoria las tablas recibía castigo, como hincarse en granos de maíz o en piedras, recibir reglazos o latigazos, jalón de orejas, dentro otros castigos. En esa época poco o nada enseñaban a razonar (...) Yo recuerdo que para el nivel de bachillerato, también había que memorizarse, pero ya empezaban con problemas de razonamientos lógicos para prepararnos para la evaluación de las pruebas de Ser Bachiller. (Informante n° 1).*

Sin embargo, esta forma de enseñanza tradicional la matemática todavía continúa en la amazonia ecuatoriana. Por ejemplo, muchos docentes siguen enseñando como ellos aprendieron. El libro más utilizado en la enseñanza de la matemática en el nivel secundario sigue siendo libro de Álgebra de A. Baldor. A pesar de que le Ministerio de Educación elabora y distribuye los textos escolares para el sistema educativo del país. Pero para ellos es más cómo resolver un ejercicio modelo y hacer que los estudiantes sigan la receta para realizar las actividades propuestas en forma memorística, mecánica con poco o nada de resolución de problemas.

> *Aprendí matemáticas por medio de la numeración, para mí era muy complicado, porque tenía maestros muy enojones. Yo les pedía que me expliquen de nuevo y se molestaban muchísimo. Por eso a mí me daba mucho miedo preguntar al profesor y pensaba que mi deber estaba mal hecho. Para mí fue muy duro porque en mí en esa época no existía quien me ayude a resolver los problemas de matemáticas. Me tocó aprender a base de mis propios esfuerzo y dedicación. Cuando los ejercicios no estaban bien hechos el maestro nos castigaba. Varias veces yo me quedaba sin salir al recreo y mis compañeros se burlaban de mí. En mi época era muy duro los estudios en todas las asignaturas, porque el maestro en lugar de ser un amigo era un enemigo. (Informante n° 2).*

Experiencias vividas en las aulas han dejado en los estudiantes huellas marcadas, en quienes ahora son profesores con mucha inseguridad y miedo de participar en las clases o los seminarios. Además, se ha observado que sólo algunos profesores participan de forma voluntaria y algunos sólo participan si el facilitador pregunta.

> *Soy un docente con nueve años de experiencia en el área de matemáticas e imparto clases a grados de básica superior donde cada año para mí ha sido muy lindo y de mucho esfuerzo, porque en cada grado va quedando una historia. Pero no me siento un docente bien formado todavía me faltó mucho por aprender por eso estoy muy contento y agradecido a la UNAE por los seminarios de Ecología de Saberes (Informante n° 3).*

Los espacios generados para los diálogos han sido muy importantes para compartir sus percepciones y creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Además, todos manifestaron el deseo de cambiar y transformar su forma de enseñar desde la diversidad epistémica. A su vez, algunos docentes manifestaron, que nunca se imaginaron antes ser docente, y peor ser profesor de matemáticas.

> *Jamás imaginé ser maestra y peor de matemáticas. Sin embargo estoy dando o mejor de mi parte para mis estudiantes. Desde pequeña me gustaba jugar a las profesiones. Abogada, médico secretaría e incluso niñera, pero nunca docente. Pensaba que mi carácter no daba para esa profesión. Además, los comentarios de los docentes en ese tiempo era: ser maestro es muy fácil y no pagan bien. A medida que yo iba creciendo en edad y estatura, mi interés se fue hacia las computadoras. En aquellos años eran muy pocos los que podían comprar una computadora de mesa y no existían las portátiles. Mi papá con un poco de esfuerzo pudo comparar una computadora. Así yo podía estudiar informática y me matriculé en la carrera de informática y me gradué. Yo podía pasar horas frente a la computadora haciendo ejercicios de programación e incluso me gustaba ayudar a mis compañeras en la materia de programación y ellas me ayudaban en matemáticas. (…) Ahora comprendo por qué yo era buena en lógica y programación, pero pésima en matemáticas. Por el miedo que me infundieron mis maestros. Mis docentes tienen mucho que ver. Uno no podía preguntar en ese tiempo, porque el docente se molestaba y los compañeros se burlaban. Mi sueño era ser Ingeniera de Sistemas, pero terminé siendo maestra de matemáticas por causa del amor. (Informante n° 4).*

También es importante señalar, que para algunos profesores participantes del curso, las matemáticas siempre fueron sus asignaturas favoritas. Pero por motivos del contexto de la amazonia que fue abandonado por los por las autoridades nacionales y en consecuencia existe una dificultad de acceso a la educación superior en la región. Esta situación, es una limitante para realizar los estudios y la formación formación anhelan y desea. Por ejemplo, uno de los participantes señala:

> *Las matemáticas siempre me han gustado. En la escuela no he tenido problemas con la matemática, porque me gustaba mucho. Hoy en día estoy enseñando matemáticas a mis estudiantes. Lo que he recibido en el colegio domino muy bien, pero hay temas nuevos que nunca lo recibí, estos temas son complicados en la enseñanza. (Informante n° 5).*

Las narraciones presentadas de los profesores participantes del curso de Ecología de Saberes, muestra la necesidad de formación y capacitación que tienen los docentes de la amazonía ecuatoriana. Además, ellos muestran un gran interés por curso de actualización y profundización en los conocimientos matemáticos, pedagógicos y tecnológicos.

Los particiapnte, después de haber realizado las reflexiones durante las clases presenciales y las lecturas de los artículos sobre la diversidad de concepciones y el díalogo de estos saberes, se siente motivados y conscientes de que también existen objetos y conceptos matemáticos en sus comunidades y su entorno que muchas veces no lo han visto o no lo han considerado como un saber matemático. Una de las actividades que ha generado un mayor interés en el asistentes, es la posiblidad de relacionar los conocimientos matemáticos con otras áreas del saber.

Al final del curso, han presentado algunos videos de sus experiencias en el aula, con sus estudiantes y se ha podido observar un interés y motivación porseguir buscando nuevas experiencias en su práctica pedagógica a través de la enseñanza y parendizaje de la matemática. La integración del contexto y la recuperación de los objetos y conceptos matemáticos de su comunidad.

Ellos son consciente del impacto que un maestro tiene en los estudiantes, y desean formarse y preparase para que puedan cambios profundos en las actitudes de sus estudiantes y la comunidad.

¿Qué hace grande a un maestro? La respuesta no es nítida ni se mide fácilmente con pruebas. Pero todos conocemos a un gran maestro cuando vemos uno. Los mejores maestros tienen una cosa que los diferencia de los demás. Es aparentemente intangible y no enseñable, ya que a menudo se dice que, "Algunas personas nacen para ser maestros".

Por lo tanto, la preparación del maestro eficiente y eficaz se basa en estándares para asegurar que todos los candidatos a maestros conozcan el contenido y tengan las habilidades necesarias para convertirse en buenos maestros. Las voces de maestros y sus reflexiones como estudiantes nos ayudan a desarrollar el lenguaje, construir un mapeo y las herramientas para examinar las experiencias pedagógicas en el contexto de la amazonía.

Además, nos permite visualizar el conocimiento práctico y pedagógico de los docentes desde sus prácticas prácticas pedagógicas y las motivaciones que que ellos tienen a pesar de las dificultades, están dispuestos trabajar en forma creativa y responsable y comprometida con su comunidad.

Podríamos analizar y sistematizar muchas prácticas exitosas de profesores que trabajan en la Amazonia, a pesar de las dificultades que presenta el contexto. Especialmente, los profesores que laboran en el sistema de educación denominado multigrado. Por ejemplo, una maestra relata, que después del curso de Ecología de Saberes. Ella había realizado la enseñanza de fracciones desde las matas de rosas. Los estudiantes contaron todas las matas de rosas y por colores, luego calcularon las proporciones por colores y estudiantes se motivaron con esta estrategia y muchos querían seguir haciendo más matemática. Ella lamenta no haber grabado para mostrar las evidencias. Pero, la próxima vez la documentará para compartir con sus colegas.

Conclusiones

Lo interesante del curso Ecología de Saberes, fue la generación de espacios y tiempos para reflexionar sobre la educación, los conceptos sobre la escuela, sus prácticas y demás experiencias que hacen parte de las vidas de los docentes y los estudiantes de lo que compondría las diferentes comunidades de formación con las que se relaciona y forma parte el docente. En didáctica de la matemática se dedicó a las reflexiones de los profesores sobre su propia práctica en su contexto y las reflexiones sobre diferentes teorías o enfoques de la matemática, su enseñanza y aprendizaje. Originalmente, fue propuesto como un Programa de Vinculación con la Colectividad y los Territorios de UNAE en la Amazonia. Sin embargo, a raíz de la experiencia vivida y la motivación al cambio de actitud en los participantes, se espera continuar y expandir a otras unidades educativas.

La didáctica de la matemática en la Ecología de Saberes se comprende como la dimensión en la que se construyen relaciones entre diferentes saberes matemáticos, con la intención de fortalecer la comprensión de la producción de conocimiento a partir de la relación entre enseñanza-aprendizaje-formación. Como ecología constituye un ambiente educativo en el que los saberes se promueven, desde la descripción, la explicación, la implicación, la complejidad, conformando un ecosistema educativo, que en este caso se propone desde la relación entre saberes y prácticas de enseñanza que constituyen los diferentes procesos de formación.

Referencias y bibliografía

Álvarez, F. (2016). Logros y desafíos de la UNAE. En *Educamos para el Buen Vivir*. Azogues: UNAE-EP

Bolívar, A. Domingo, J. y Fernández, M. (2001). *La investigación biográfica-narrativa en educación enfoque y metodología*. Aula Abierta. Madrid, España: La Muralla.

D'Ambrosio, U. (2001). *Etnomathematics*. Netherlands: Sense Publishers.

D'Ambrosio, U. (2015). Traversing the Path of Mathematics Education in the Southern Americas. En H. Rosario, P. Scott y B Vogeli (Eds.), *Mathematics and Its Teaching in the Southern Americas*. Singapore: world Scientic Publishing.

Diez, E. y Díaz, J. M. (2018). Ecología de aprendizaje ubicuo para la ciberciudadanía crítica. *Revista científica de Educomunicación*, N° 52, Vol. 26, pp. 49-58. Disponible en www.revistacomunicar.com

Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. Educational Studies in Mathematics, vol. 12 (2), pp. 133-150.

Guerrero, M. (2004). *Los dos Máximos Sistemas del Mundo. Las Matemáticas del Viejo y Nuevo Mundo*. Quito, Ecuador: Ediciones ABYA-YALA.

Pari, A. (2018). Una experiencia educativa de ducho en la Amazonia. En A. Sales y N Martins (orgs.), *Trabalho Didáctico: Trajectórias de Pesquisas*. Campo Grande, Brasil: Life Editora

Pérez, A. (2017). Modelo Pedagógico de la UNAE. *Illari: Revista de estudiantes que serán maestros.* No. 4, pp. 90-99.

Santos, B. (2012). De las dualidades a las ecologías. *Cuaderno de Trabajo N° 8*. La Paz, Bolivia: Red Boliviana de Mujeres Transformando la Economía.

Percepciones del profesorado sobre las TIC (GeoGebra) como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica

Abdón Pari Condori
Universidad Nacional de Educación
Ecuador
abdon.pari@unae.edu.ec
Roxana Auccahuallpa Fernández
Universidad Nacional de Educación
Ecuador
roxana.auccahuallpa@unae.edu.ec

Resumen

Esta comunicación es parte de una investigación en curso sobre la integración de GeoGebra como recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica en el Ecuador. Se desarrolla a través de un curso piloto en la Amazonía, en particular en las zonas más vulnerables del país. El enfoque metodológico es mixto y los instrumentos son: cuestionario, entrevistas y actividades didácticas de manera virtual. La muestra está compuesta de 70 profesores (31 mujeres y 39 varones). Los resultados señalan que la edad promedio es de 48 años, el 75 % no han utilizado software antes del curso, pero destaca el interés generalizado por el uso de GeoGebra como recurso didáctico. No obstante, los participantes consideran que GeoGebra es un programa que puede ayudar a los estudiantes a comprender los objetos y conceptos matemáticos y permite al docente potenciar la productividad de conocimientos matemáticos.

Palabras clave: GeoGebra, enseñanza de matemática, formación docente y TIC.

Introducción

Los seminarios, cursos y eventos internacionales sobre el uso de TIC y GeoGebra constituyen una línea de investigación activa en el campo de la educación matemática, a pesar de que existen estudios sobre el uso de GeoGebra en el nivel secundario y superior, aún es escaso los estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para la Educación Básica. Los cursos de GeoGebra como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica pretenden profundizar en el dominio tecnológico de GeoGebra de manera que sus participantes adquieran competencias en el empleo del programa a nivel avanzado. Actualicen sus conocimientos matemáticos con nuevas utilidades y potencialidades que el software libre de GeoGebra permite, así como la fundamentación didáctica, pedagógica y metodológica a través del estudio y la investigación de la práctica en el aula con el uso del software.

Esta investigación sobre la integración de GeoGebra como recurso didáctico se desarrolla como parte del Grupo de Investigación Institucional EUREKA 4i y en conexión con el proyecto docente de innovación 2018/2019 desde el constructo del área de matemáticas de la carrera de Educación Básica de la Universidad Nacional de Educación de Ecuador. Además, el proyecto en curso realizado en la Amazonia con el apoyo del Ministerio de Educación y la Universidad Nacional de Educación tiene como objetivo aplicar la experiencia piloto para la capacitación de los docentes de matemáticas de todo el país.

Marco teórico

El uso de tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se configura como una línea actual de investigación. Este estudio planteamos desde la Génesis instrumental (Rabardel, 2001 y Artigue, 2002), como el proceso de transformación de un artefacto (GeoGebra) en un instrumento, es decir, la conjunción del artefacto y habilidades cognitivas para construirlo. En este sentido, la instrumentalización de GeoGebra ocurre cuando se le dota de potencialidades (actividades didácticas) y se le transforma para aplicaciones específicas como un recurso didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En este proceso el estudiante construye esquemas mentales, asimilando esquemas existentes o produciendo nuevos esquemas para llevar a cabo la actividad existente. Además, se distingue lo que es la instrumentalización e instrumentación:

Instrumentalización, son las características del Software que influye en las estrategias de resolución como en las concepciones del estudiante.
Instrumentalización, es el proceso en que cada estudiante de acuerdo con sus concepciones, formas de trabajar, conocimientos puestos en juego y actividades o problemas internaliza en el uso del artefacto.
Sin embargo, en la literatura disponible evidenciamos que existen diversos softwares de geometría dinámica, como por ejemplo Cabrí Géometre II (www.Cabri.com) y Cinderella (www.cinderella.de.) que facilitan la experimentación con Geometría Sintética (Irnzo y Fortuny, 2009). No obstante, para esta investigación escogemos trabajar con GeoGebra (www.geogebra.org) porque es un software de código abierto que integra de forma dinámica la representación gráfica con la expresión algebraica de los objetos gráficos (Hohenwarter y Preiner, 2007). Además, es fácil de aprender a manejar, es intuitivo y no requiere estrategias de uso avanzado para utilizarlo en la enseñanza de las matemáticas.

Por otro lado, para Area (2018), distintos estudios a nivel internacional han puesto en evidencia que uno de los factores clave y vitales del proceso de integración pedagógica y su uso educativo de las tecnologías digitales está vinculado con las creencias y perspectivas que tengan los profesores sobre dicho proceso (Area et al, 2018, p. 230). En esa perspectiva, las políticas educativas de inversión económica en la adquisición y dotación de infraestructuras y recursos tecnológicos a las unidades educativas son necesarias, pero insuficientes. Dado que, si esto no va acompañado paralelamente de una adecuada formación y capacitación que incida en un cambio de concepciones, opiniones y prácticas del profesorado, directivos y demás agentes de apoyo con relación al potencial de cambio e innovación educativa que conlleva la utilización de GeoGebra (Area, et al, 2018, Pari et al, 2018, Colás, De Pablos y Ballesta, 2018).

A pesar de que las investigaciones sobre las concepciones y creencias del profesorado sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje emergen a fines de los 80 e inicios de 90 del siglo pasado con los trabajos semilleros de Thompson (1992). Sin embargo, se requieren de mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ciencia que ha creado problemáticas en los aprendices a nivel educativo. Sin embargo, los estudios sobre las precepciones, creencias, opiniones, valoraciones y expectativas sobre las tecnologías y su integración en la enseñanza de las matemáticas son incipientes. Por ello, es una línea de vital importancia en el campo de la educación matemática desarrollar estrategias educativas en el uso de GeoGebra.

En este sentido, existe un consenso entre los investigadores de que la tecnología es esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Hohenwarter y Lavicza, 2009, Area, 2018), porque los estudiantes pueden beneficiarse de diversas formas de integración de la tecnología, así como, en los entornos tecnológicos se proporciona nuevas oportunidades de aprendizaje que provee a los estudiantes de diferentes habilidades matemáticas y niveles de entendimiento y comprensión con base en la visualización y exploración de objetos y conceptos matemáticos en entornos de multimedia. Por ello, las tecnologías son herramientas que permiten a los docentes revolucionar los modelos pedagógicos e incursionar en nuevos paradigmas que propicien la anhelada formación de calidad y calidez.

En esa perspectiva, el Modelo Pedagógico de la Universidad Nacional de Educación se enmarca en el paradigma del Buen Vivir, que plantea un perfil de egreso del bachillerato justo, innovador y solidario. En este modelo el rol del profesor, debe ser un guía que motiva el uso eficiente y efectivo de las tecnologías, entre otras, asegurando y democratizando el acceso a la información de calidad que es compartida a través de diferentes medios.

Por otro lado, según Trouche (2002) la aparición de artefactos computacionales en la clase de matemáticas, supone un problema de carácter didáctico acerca de transformar los artefactos en verdaderos instrumentos de actividad matemática y no como “recursos que resuelven y solucionan” problemas en el aprendizaje (Silva y Flores, 2017, p. 72).
En la misma línea, Barrera, Barahona y Vaca (2015) señalan que, las tecnologías son herramientas que permiten a los maestros revolucionar los modelos pedagógicos e incursionar en nuevos paradigmas que generen la anhelada formación de calidad. Este paradigma cambia el rol del profesor, motiva el uso eficiente de las tecnologías (Silva y Flores, 2017, p. 71)

Método

La investigación utiliza un enfoque mixto, es decir, el cuantitativo y cualitativo de manera complementario. Para el cuantitativo, de naturaleza descriptiva se ha empleado un cuestionario en línea de 27 ítems sobre las percepciones y el uso de las TIC y GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje, de los que se analizan 8 ítems para fines de esta comunicación. Para el cualitativo de naturaleza interpretativo se utilizó la observación y la entrevista y las preguntas abiertas del cuestionario que complementan a la parte cuantitativa.

Población y muestra

Según el observatorio de la Universidad Nacional de Educación en el Ecuador hay 163 999 docentes en el sector público, de los cuales 10000 son profesores de matemáticas. Sin embargo, el estudio considera los 90 profesores de matemáticas de la Amazonia (Quinindé y Esmeraldas) convocados y seleccionados por el Ministerio de Educación que participan del curso de GeoGebra como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica. La muestra no es probabilística porque corresponde a los 70 profesores que respondieron al cuestionario en línea (31 mujeres y 39 varones).

Análisis de información

La información obtenida, fue procesada estadísticamente, con una estadística descriptiva de tendencia central y cuadros cruzados, conocidos como frecuencia y porcentajes, así como su representación gráfica, acompañados de sus análisis e interpretación.

Se presentan los resultados obtenidos sobre las percepciones, opiniones, valoraciones y expectativas sobre el uso de GeoGebra como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas de los profesores participantes del curso y que respondieron el cuestionario.

Resultados

El Ministerio de Educación de Ecuador para la selección de los profesores ha considerado como uno de los requisitos el nombramiento definitivo en el sistema educativo público con el propósito de asegurar la continuidad de los docentes en el proceso de enseñanza. Posiblemente, por esta condición varios docentes han quedado al margen de la convocatoria, especialmente aquellos que cuentan solo con el contrato temporal. En ese marco, la distribución de la edad de los profesores, presenta la edad promedio de 41 años con una desviación típica de 8.13 años. El rango de la distribución es 32, cuya edad mínima es de 24 y máxima de 56 años. La moda de la distribución es de 48 años y la mediana de 43. A continuación resumimos los estadísticos en la tabla 1.

Tabla 1

Distribución de la edad de los profesores participantes al curso de GeoGebra

Estadísticos	Valores
Mínimo	24
Cuartil1	25
Mediana	43
Cuartil 3	48
Máximo	56

Fuente propia: Encuesta privada, 2018.

Además, los resultados obtenidos se pueden presentar de forma visualizados a través del diagrama de caja y bigotes o Box-plot. Como se muestra en la figura siguiente:

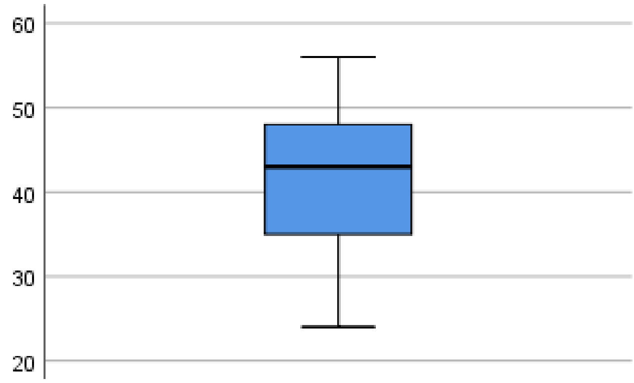


Figura 1: Diagrama de cajas de la edad de los profesores asistentes

A pesar de que GeoGebra cuenta con más de quince años desde que fue creado por Markus Hohenwarter en 2002 como parte de su tesis de maestría en Educación Matemática, esta ha ido creciendo de una manera muy acelerada tanto en su potencial, la incorporación y la adopción de usuarios en Europa, Estados Unidos y recientemente en América Latina. En cuanto al Ecuador, hace un año se creó el Instituto Ecuatoriano de GeoGebra con sede en la Universidad Nacional de Educación el 6 de febrero de 2018. Sin embargo, algunos profesores han estado utilizando de forma independiente y aislada, tal vez, hasta de forma un poco tímida y limitada. La información obtenida al respecto se ha resumido en la tabla 2.

Tabla 2

Distribución de profesores por sexo y su experiencia de uso de GeoGebra en el aula.

Sexo	**Ha utilizado GeoGebra en el aula antes del curso**					
	No		Si		Total	
	N°	%	N°	%	N°	%
Mujer	24	34.29	7	10.00	31	44.29
Hombre	28	40.00	11	15.71	39	55.71
Total	**52**	**74.29**	**18**	**25.71**	**70**	**100**

Fuente propia: Encuesta privada, 2018.

Aproximadamente, el 75% de los profesores participantes no habían utilizado GeoGebra antes de este curso y solo el 25% conocían o utilizaban GeoGebra para enseñar y aprender matemáticas. Incluso, a través de las observaciones de algunas presentaciones y visitas a instituciones se ha podido observar que algunos profesores utilizaban GeoGebra simplemente como una pizarra en la pantalla, no se aprovechaba las combinaciones dinámicas y creativas del software. En cuanto al género, el uso de TIC (GeoGebra) en ambos es escaso en la Amazonia del Ecuador. Y con respecto a los años de servicio en el magisterio se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 3

Distribución de profesores por años de experiencia y uso de GeoGebra en el aula

Años de Experiencia	Ha utilizado GeoGebra en el aula antes del curso					
	No		Si		Total	
	N°	%	N°	%	N°	%
Menor a 5 años	10	14.28	2	2.86	12	17.14
Entre 5 a 10 años	12	17.14	6	8.57	18	25.71
Entre 10 a 15 años	11	15.71	2	2.86	13	18.57
Mayores a 15 años	19	27.14	8	11.44	27	38.58
Total	52	74.27	18	25.73	70	100

Fuente propia: Encuesta privada, 2018.

Según los datos obtenidos del cuestionario en línea, los profesores con más años de experiencia también han incorporado el uso de GeoGebra y/o se han interesado en el curso de GeoGebra como recurso didáctico. Lo que contradice que los adultos mayores son más resistentes hacia las tecnologías de la información y la comunicación. Así, todos los participantes están desarrollando las actividades propuestas en el curso a través de retos de cada tema que provee el curso.

Por otra parte, las entrevistas a los participantes muestran que varios de ellos creen que GeoGebra les permite enseñar desde un enfoque constructivista y resolver problemas desde diferentes formas de representación. No cabe duda, si el estudiante comprende que existen diferentes formas de presentar un mismo objeto matemático y se le capacita a conectar o a transformar de una representación a otra, conseguirá un aprendizaje significativo.

Otra de las opiniones sobre el curso de GeoGebra destaca la forma de desempeño de los facilitadores: “los docentes que impartieron el taller muy dinámicos, ese es la manera de enseñar” (Anónimo, 2018). Mientras que, a otros, le impactó la parte dinámica de GeoGebra y el sin número de posibilidades del software y para otros la forma de proponer las actividades dinámicas de los docentes.

Sin embargo, en los trabajos presentados en la parte virtual se ha podido evidenciar que existe carencia de formación disciplinar rigurosa en algunos docentes de matemáticas. Algunos no logran distinguir entre una construcción que mantenga las condiciones y permita visualizar o inducir invariantes y el dibujo que realizar para hacer los objetos matemáticos. Así, por ejemplo, en una actividad que consistía en la construcción de un triángulo rectángulo, muchos profesores usaron la ventana gráfica de GeoGebra con la cuadrícula y dibujaron un triángulo rectángulo como se muestra en la figura 2.

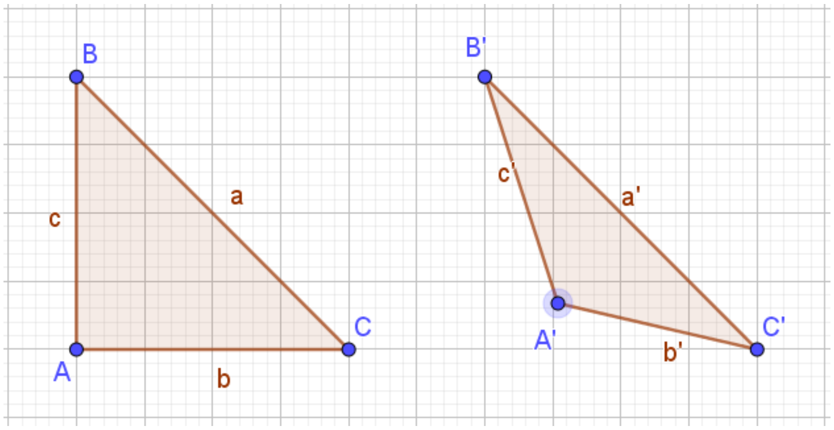


Figura 2. El triángulo rectángulo dibujado y no construido

El triángulo de la izquierda está dibujado como triángulo rectángulo, pero al mover el punto A se transforma en A' y deja de ser triángulo rectángulo. Varios docentes han cometido este tipo de errores en las actividades propuestas.

Otro de los errores más comunes, ha sido el trabajo con la circunferencia inscrita en un triángulo. Muchos, trazaron la circunferencia con centro en la intersección de las bisectrices (incentro) y han tomado como otro punto de la circunferencia el punto de intersección de una bisectriz con el lado opuesto del triángulo al vértice. Como se muestra en la figura 3.

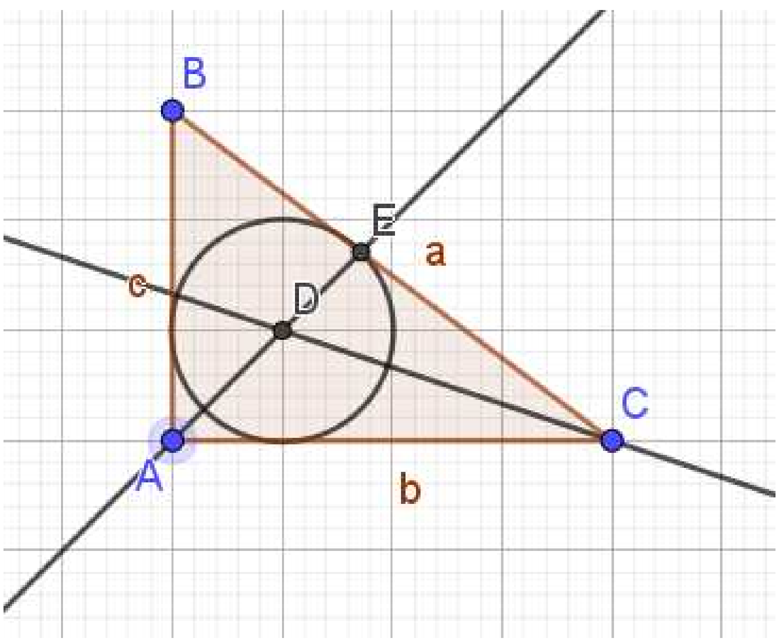


Figura 3. Construcción de la circunferencia inscrita

Según la gráfica parece estar inscrita la circunferencia, pero al mover uno de los vértices se observa que ya no está inscrita, como se observa en la figura 4.

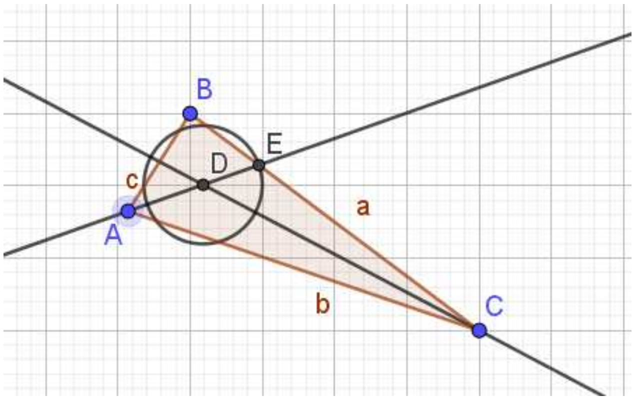


Figura 4. Circunferencia no inscrita

No cabe duda, de que una construcción fija como se hace en la pizarra que no tiene la parte del dinamismo de GeoGebra se suele cometer este tipo de errores. Esto fue uno de los errores más frecuentes reflejados en las construcciones de las actividades. Evidentemente, este hecho y otros en los docentes de la Amazonía han despertado el interés de aprender el uso tecnológico y didáctico de GeoGebra, para poder incorporar en su práctica docente. Además, ellos solicitan más actividades y encuentro de docentes y expertos en GeoGebra para conformar una comunidad de aprendizaje que antes no se vinculaba con zonas vulnerables y de escasos recursos tecnológicos.

Conclusiones

Como la investigación está en proceso de desarrollo lo que hemos presentado es una primera reflexión sobre cómo se realiza la incorporación de las TIC (GeoGebra) en el profesorado de la Amazonia que participa del curso de GeoGebra como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas en Educación Básica. El grupo está compuesto de profesores de las Zona 1 y 2 de las 9 zonas educativas del país. Al comienzo del curso los profesores mostraban cierto temor y resistencia al uso de las TIC y en particular al uso de GeoGebra en el aula. Varios manifestaron que las unidades educativas donde laboran cuentan con laboratorios de informática y un profesor de computación. Además, el 75% de los asistentes no habían conocido o utilizado GeoGebra antes del curso. Sin embargo, los docentes muestran un interés generalizado en su formación continua y tienen la percepción o creencia de que las TIC en general y GeoGebra en particular es una herramienta poderosa para la innovación de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Al finalizar el curso los participantes muestran una opinión positiva sobre el uso de las TIC, incluso varios solicitan continuar con más cursos sobre el uso de GeoGebra. Además, varios profesores han presentado como una actividad final la realización de un video de la clase donde se utiliza el software como un instrumento de apoyo para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Estos datos e informaciones serán analizados y presentados por el grupo de investigación.

Referencias y bibliografía

Álvarez, F. (2016). Logros y desafíos de la UNAE. En *Educamos para el Buen Vivir*. Azogues: UNAE-EP

Area, M., Cepeda, O., y Feliciano, L. (2018). El uso Escolar de las TIC desde la visión del alumnado de Educación Primaria, ESO y Bachillerato. *Educación Siglo XXI, 36, 2,* 229-276

Area, M. y Sanabria, A. L. (2014). Opiniones, expectativas y valoración del profesorado participante en el Programa Escuela 2.0 en España. *Revista Educar*, *50, 1*, 15-39. Doi: http://dx.doi.org/10.5565/rev/educar.64

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS enrironment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning, 7,* 245-274.

Colás, P., De Pablos, J. y Ballesta, J. (2018). Incidencia de las TIC en la enseñanza en el sistema educativo español: una revisión de investigación. RED. *Revista de Educación a Distancia*, *56,* enero 2018. Disponible en http://www.um.es/ead/red/56/colas_et_al.pdf

De Pablos, J. (Coord.) (2015). *Los centros educativos ante el desafíos de las tecnologías digitales*. Madrid: La Muralla.

Domínguez, R., Chica, E. y Hernández; A. (2015). Valoración del uso de las tecnologías para el aprendizaje por alumnos de secundaria. Investigar con y para la sociedad, Actas del XVII Congreso Internacional AIDIPE, *3*, 1571-1580. Disponible en http://avanza.esaidipe2015/libro/volumen3.pdf

Hohenwarter, M. y Lavicza, Z. (2009). Introducing Dynamic mathematics software to secondary school teachers: The case of GeoGebra, of Computers in Mathematics.

Iranzo, N. y Fortuny, J. M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. Enseñanza de Ciencias 27(3), 433-446. Disponible en https://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/142075/332857

Pérez, A. (2017). Modelo Pedagógico de la UNAE. *Illari: Revista de estudiantes que serán maestros.* No. 4, pp. 90-99.

Rabardel, P. y Bourmaud, G. (2003). From computer toinstrument system: A developmental perspective. *Interacting with Computers*, 15(5), 665-691.

Silva, M. y Flores, J. V. (2017). Génesis instrumental del circuncentro con el uso de GeoGebra. *Rev. Prod. Disc. Educ. Matem*., Sao Paulo, 6(1), 70-84.

Thompson, A. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: A synthesis of research. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. 127-146.

Transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria en el contexto del pensamiento algebraico

Sandra Milena **Zapata**
Universidad de Antioquia
Colombia
sandra.zapata@udea.edu.co
Zaida Margot **Santa** Ramírez
Tecnológico de Antioquia
Colombia
zaida.santa@tdea.edu.co
Carlos Mario **Jaramillo** López
Universidad de Antioquia
Colombia
carlos.jaramillo1@udea.edu.co

Resumen

El trabajo doctoral presenta elementos prácticos y teóricos que ponen de manifiesto la necesidad de fundamentar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas en la educación primaria, para que vincule-el pensamiento algebraico en su-práctica. En este escenario, la investigación pretende analizar cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del álgebra temprana. El horizonte metodológico se enmarca en algunas concepciones del conocimiento profesional del profesor y su incidencia en las decisiones sobre la práctica para promover el pensamiento algebraico. El horizonte metodológico es de corte cualitativo y a través de la teoría fundamentada se busca proponer una postura explicativa para analizar la transformación del conocimiento del profesor. Mediante de tareas de formación se han logrado dilucidar algunos procesos que permiten un acercamiento a la formulación de dicha postura.

Palabras clave: álgebra temprana, conocimiento profesional, pensamiento algebraico, profesor de primaria, transformación del conocimiento.

Planteamiento del problema

El estudio doctoral se lleva a cabo a partir de un referente experiencial y uno teórico. El experiencial está asociado con el conocimiento de la enseñanza de una comunidad de profesores de primaria, en relación a sus posibilidades para desarrollar tareas de formación de carácter algebraico y vincularlas en sus prácticas. El teórico está determinado, en primer lugar, por los problemas reportados en la literatura, que señalan la necesidad de algunos profesores de fundamentar su conocimiento profesional para promover el pensamiento algebraico de los estudiantes en la educación básica primaria; en segundo lugar, por la justificación y pertinencia de vincular la enseñanza del álgebra en niveles iniciales de escolaridad, proceso que es reconocido como álgebra temprana, y la inquietud acerca de cómo hacerlo. Es así como, diferentes investigaciones (Cai y Knuth, 2011) reconocen la importancia del trabajo algebraico en la educación básica primaria y la necesidad de identificar cómo se vincula con el pensamiento aritmético.

La experiencia profesional como generadora de objetos de investigación

Los trabajos realizados como investigadora y formadora de profesores, a través de programas de formación inicial, continuada, desarrollo profesional, diplomados y cursos de actualización, tanto en el municipio de Medellín como en regiones de Antioquia, me han permitido observar, reconocer y reflexionar respecto a inquietudes y necesidades asociadas con el conocimiento profesional de los profesores (Ponte, 2012); este se constituye en un objeto de análisis emergente en mi labor derivada de la interacción con los docentes, pues en el campo de la educación matemática es recurrente encontrar que los objetos de investigación se originan en la propia práctica profesional del investigador (Borba y Araújo, 2008).

En esta línea, las reflexiones logradas con los profesores dan cuenta de una preocupación que puede asociarse con el conocimiento de la enseñanza, referenciado por Ponte (2012) como conocimiento profesional del profesor. Este se enmarca en cuatro dimensiones, el conocimiento de las matemáticas, del currículo, de los estudiantes y de los procesos de trabajo en el aula. La manifestación de este conocimiento, en lo referido al pensamiento algebraico, me ha permitido reconocer que en los niveles de la educación básica primaria se develan inquietudes asociadas con la estructura de dicho pensamiento, su incursión en el currículo y las posibilidades para promoverlo en grados iniciales de escolaridad.

Dichas inquietudes, permiten que los profesores de la educación básica primaria con los que he interaccionado, reconozcan impedimentos frente al pensamiento algebraico; así, es una responsabilidad manifestada por ellos, la promoción del pensamiento algebraico. Al respecto, Vergel (2016) manifiesta que "una introducción progresiva al álgebra en la escuela primaria puede facilitar más adelante el acceso de los estudiantes a los conceptos algebraicos más avanzados" (p. 15). Es precisamente en el marco de la idea de enseñar tópicos de álgebra a los estudiantes de la educación básica primaria, que se propone el "Álgebra Temprana" ("Early Algebra") como una posibilidad de "integrar el pensamiento algebraico en todas las asignaturas de las matemáticas escolares" (Vergel, 2016, p. 12).

Acercamiento teórico a una interpretación de la naturaleza del problema

Con la intención de interpretar, a la luz de la teoría, los objetos de reflexión en mi práctica profesional, y que han suscitado mayores inquietudes en los profesores, inicié el estudio de algunas investigaciones (Kieran, 2004; Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012; Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schlieman, 2007; Derry, Wilsman y Hackbarth, 2007), las cuales me permitieron comprender que el fenómeno estudiado tiene matices que pueden interpretarse en el marco del conocimiento profesional del profesor , asociado con el conocimiento de las matemáticas, el currículo, los estudiantes y los procesos de trabajo en el aula (Ponte, 2012).

En esta línea, autores como Koellner, Jacobs, Borko, Roberts y Schneider (2011) aluden a que mejorar el conocimiento profesional de los maestros sobre el álgebra y la enseñanza de la misma, es considerado un componente clave para apoyar el pensamiento algebraico de los estudiantes. En este sentido, Ponte (2014) percibe en esta `mejora` un desafío propio de los profesores e investigadores, en tanto que ellos deben fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico en la educación básica primaria.

Es así como, en términos de lo que el profesor sabe y cómo enseña lo que sabe, Ponte (2014) estima que la articulación entre el contenido matemático y el conocimiento pedagógico contribuye al desarrollo del conocimiento profesional y, para el caso del álgebra, este aspecto es particularmente importante debido a que su incursión implica cambios curriculares y en la práctica docente.

En la perspectiva anterior, Ball, Thames y Phelps (2008) argumentan la importancia y necesidad de que los profesores conozcan el tema que enseñan; es decir:

> […] no puede haber nada más fundamental para la competencia del maestro. La razón es simple: los maestros que no conocen bien un contenido no tienen probabilidades de tener el conocimiento que necesitan para ayudar a los estudiantes a aprender este contenido. (p. 404)

De lo anterior, se infiere que es necesario refinar el conocimiento matemático, referido al pensamiento algebraico de los profesores de primaria; de hecho, este refinamiento puede permitir reconocer formas de pensar y propiciar mejoras en la enseñanza.

Como se mencionó anteriormente, ha sido necesario buscar algunos referentes teóricos que posibiliten interpretar y fundamentar el problema dilucidado, puesto que las investigaciones referenciadas precisan la necesidad de lograr cambios en el conocimiento profesional de los profesores de primaria, con miras a que se vincule la enseñanza del álgebra en estos grados. Por lo tanto, el estudio procura responder la pregunta ¿cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del álgebra temprana? y tiene como objetivo analizar cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del álgebra temprana.

Horizonte teórico

Para llevar a cabo la investigación, el horizonte teórico considera aquellos estudios enfocados en asuntos asociados con el conocimiento profesional, en relación a la incursión del álgebra temprana, los cuales permiten un acercamiento a la comprensión de la naturaleza del problema, en cuanto al tipo de conocimiento que debe exhibir un profesor para lograr promover el pensamiento algebraico entre sus estudiantes y lo que significa pensar algebraicamente.

Acercamiento a una postura teórica

El conocimiento profesional no es sinónimo de dominio de contenidos disciplinares, ni didácticos (Martínez, Rodríguez y Gómez, 2017); se trata más bien de un "conjunto de informaciones, habilidades y valores que los profesores poseen procedentes, tanto de su participación en procesos de formación (inicial y en ejercicio), cuanto del análisis de su experiencia práctica" (Montero, 2001, p. 202). Pero este conjunto de saberes debe ser rico y flexible, para fomentar la comprensión de los estudiantes y permitir al profesor comprender la naturaleza de la disciplina y la construcción de nuevos conocimientos, permeados por la experiencia, las interacciones con los pares y la práctica misma.

El conocimiento profesional no se vincula solamente con la capacidad para aprender de la participación en procesos formativos con objetivos y finalidades enmarcadas en la disciplina, la pedagogía o la didáctica (Prieto y Contreras, 2008), también podría ser un constructo susceptible de transformación a través de la investigación. Es por esto que, es reconocido como un campo complejo, en permanente construcción, en el que están presentes procesos progresivos y regresivos (Hernández y Pérez, 2017), flexibles y dinámicos, expuesto a los cambios de los contextos, de la cultura, de la sociedad, de la identidad del profesor, de la experiencia, de las prácticas mismas, de la reflexión y de la investigación, como elementos que a su vez podrían ser constitutivos del mismo conocimiento.

Referirse al conocimiento profesional del profesor, implica para muchos investigadores, clasificar los conocimientos que se circunscriben en la labor profesional y lograr una postura crítica e interpretativa sobre las prácticas de enseñanza; lo anterior permite "una mirada profesional" (Llinares, 2013) sobre las decisiones que se deben tomar frente a lo que los profesores saben y necesitan aprender en las distintas dimensiones de su conocimiento profesional.

Ponte (2012) manifiesta que el conocimiento se compone de cuatro dimensiones, las cuales, para la presente investigación, ofrecen la posibilidad de determinar una postura teórica frente al conocimiento profesional del profesor, gracias a las características que se explicitan a continuación. Para Ponte (2012), la primera dimensión está asociada con la disciplina y trasciende los conceptos y procedimientos fundamentales hasta las formas de representación; la segunda está determinada por el conocimiento de los estudiantes y de sus procesos de aprendizaje; la tercera se relaciona con el conocimiento del currículo e implica el reconocimiento de las finalidades y objetivos de la enseñanza de las matemáticas y la toma de decisiones para orientarla. Finalmente, la dimensión relativa a la práctica educativa, constituye un núcleo fundamental que incluye "planificaciones a largo o medio plazo, tales como el plan pensado para cada sesión de clase, la elaboración de las tareas a realizar, y todas aquellas cuestiones relativas a la conducción de la actividad en el aula de matemáticas" (p. 6).

A la luz de lo anterior, es posible inferir de la postura de Ponte (2012), algunos objetos de análisis, fundamentales para la investigación. Además, Las anteriores dimensiones son analizadas y descritas en detalle en el estudio, como categorías que se ponen de manifiesto con el conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

Horizonte metodológico

La metodología propuesta tiene un enfoque cualitativo; en esta, a través de la teoría fundamentada, se busca elaborar una postura explicativa acerca del proceso de transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria, en el contexto del álgebra temprana; es por ello que se ponen en consideración el desarrollo de tareas de formación, las cuales constituyen una posibilidad para poner de manifiesto las distintas dimensiones del conocimiento profesional y propiciar datos que serán analizados e interpretados con miras a definir una perspectiva teórica sobre cómo este se transforma.

Enfoque de la investigación

La investigación se enmarca en un enfoque cualitativo, en el cual, tanto la indagación por las cualidades del objeto de estudio, como el análisis detallado de sus características y de las relaciones entre ellas, posibilitan la construcción de conocimiento. Para Hernández, Fernández y

Baptista (2014), "la acción indagatoria se mueve de manera dinámica en ambos sentidos: entre los hechos y su interpretación, y resulta un proceso más bien "circular" en el que la secuencia no siempre es la misma, pues varía con cada estudio" (p. 7); además, requiere un acercamiento a la particularidad de la realidad objeto de interpretación.

Diseño de la investigación

La elección del diseño de la investigación está determinada por las características del problema planteado. Si consideramos que este se enfoca en la transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria, entonces la teoría fundamentada ofrece posibilidades para elaborar una perspectiva teórica que permita explicar cómo ocurre este proceso; dicha explicación, según Hernández et al. (2014), está dotada de riqueza interpretativa y aporta nuevas visiones al fenómeno estudiado.

Teoría fundamentada. La teoría fundamentada fue definida por sus autores Barney Glaser y Anselm Strauss (1967, 2017) como una de las tradiciones de investigación cualitativa que permite formular una teoría subyacente en los datos obtenidos de la realidad investigada. Para Strauss y Corbin (1990):

> La teoría fundamentada es una teoría derivada inductivamente del estudio del fenómeno que representa. Es descubierta, desarrollada y provisoriamente verificada a través de la recolección y análisis sistemáticos de datos pertenecientes al fenómeno. Por lo tanto, la recolección de datos, el análisis y la teoría se hallan en una relación recíproca. Uno no comienza con una teoría y luego la prueba. Más bien se comienza con un área de estudio y se permite que emerja lo que es relevante para esa área. (p. 23)

Consecuentemente, la teoría fundamentada consiste en una codificación dada por el investigador a los sucesos, incidentes u ocurrencias expresados por entrevistados o situaciones observadas, para ser posteriormente agrupadas en categorías, conceptos o constructos. De este modo, utiliza procedimientos que, por inducción, generan explicaciones teóricas a un fenómeno estudiado; este proceso, para Vasilachis et al. (2006), permite en forma inductiva, "generar conceptos e interrelacionarlos, siguiendo un conjunto de rígidas y detalladas reglas formuladas por los autores" (p. 81).

Participantes

Para el desarrollo del trabajo de campo, se cuenta con la participación de tres profesores pertenecientes a instituciones educativas del departamento de Antioquia, quienes han decidido participar de manera activa y voluntaria en el desarrollo del estudio; por lo tanto, de manera conjunta, se ha convenido realizar reuniones periódicas quincenales, en las que se consolidarán espacios académicos a través del desarrollo de tareas de formación, definidas en la perspectiva de Ponte et al. (2009) como tareas profesionales.

Métodos de recolección y análisis de la información

El diseño de la teoría fundamentada sugiere el análisis y la interpretación de los datos desde el inicio de la recolección de los mismos. Para Vasilachis et al. (2006):

> […] recolección, grabado, transcripción, lectura, codificación –abierta, axial y selectiva–, memos, matrices y creación de la teoría incipiente, se darán en una secuencia ininterrumpida y recurrente, como un "zig-zag" (Creswell, 1998) desde los datos a las primeras reflexiones teóricas, hasta que finalice el trabajo de campo". (p. 89)

En consecuencia, es necesario destacar que el proceso de recolección y análisis ocurren prácticamente de manera paralela. De este modo, los episodios asociados con el conocimiento profesional, que se presenten en el desarrollo de las tareas de formación en el aula de clase y en los ambientes cotidianos de los profesores, ofrecen datos que generan categorías, los cuales deben ser analizados permanentemente en busca del establecimiento de relaciones y la selección de conceptos, que permitan fundamentar una postura teórica frente a la transformación de dicho conocimiento. La recolección de datos se realiza a través de herramientas como: observaciones, bitácoras de campo, entrevistas individuales y grupales, anotaciones de episodios registros en videos y audios.

Tareas de formación en el trabajo de campo. Las tareas de formación, que bien podrían referenciarse como tareas de aprendizaje profesional, "son tareas complejas que crean oportunidades para que los maestros reflexionen sobre los problemas pedagógicos y sus posibles soluciones a través de procesos de reflexión, intercambio de conocimientos y construcción de conocimiento" (Ponte et al., 2009, p. 193). En el estudio doctoral constituyen el motivo central de los encuentros con los profesores, dado que "estas tareas están en el centro de la formación de maestros de matemáticas y determinan lo que los maestros están aprendiendo, junto con varias formas de trabajo, dinámicas y contextos" (Ponte et al., 2009, p. 185).

A continuación, se presenta la estructura de una de las tareas de formación y posteriormente un análisis preliminar del desarrollo de la misma.

Tabla 4

Estructura de la tarea de formación titulada: reconocimiento de operaciones no convencionales y su incidencia en el desarrollo del pensamiento algebraico.

Momento de la tarea	**Procesos**	**Componentes**
Exploración de operaciones no convencionales en conjuntos finitos	Abstracción Codificación Decodificación	Operaciones abstractas en conjuntos finitos. El sentido del signo igual (=). Operaciones referidas a acciones. Operaciones binarias. El sentido de la propiedad clausurativa en los conjuntos finitos.
Conceptualización a través de la representación de estructuras algebraicas finitas	Representación Abstracción Visualización Modelación Generalización	Representaciones de estructuras finitas en tablas. El sentido de la existencia de un elemento neutro en una estructura. El sentido de la existencia de un elemento inverso, para todo elemento de una estructura. Secuencias y patrones
Reflexión sobre la práctica: elaboración de propuestas para el aula	Representación Abstracción Visualización Modelación	Estructuras finitas para trabajar en el aula. Conjeturas sobre resultados en secuencias y patrones numéricos. Exploración del signo igual. Exploración de referentes curriculares.
Reflexiones del encuentro	Síntesis	Registro de reflexiones en instrumentos. Conversatorio. Elaboración de la bitácora reflexiva.

Fuente: elaboración propia. 2018.

La tarea se asocia con procesos de representación, abstracción y reconocimiento de una estructura y sus propiedades. “La representación, está vinculada con otros procesos como simbolizar, codificar, decodificar, visualizar, modelar, y no se presenta de manera aislada, sino que habitualmente aparece junto con los procesos de abstraer, clasificar, sintetizar, conjeturar y generalizar” (Luque, Jiménez y Ángel, 2009). A partir de esta, se busca comprender la estructura mediante la abstracción de las propiedades que la caracterizan, con miras a lograr que los profesores piensen en relaciones y estructuras, que doten de sentido las propiedades que cumplen las operaciones y que no solo enfaticen en el componente algorítmico de estas.

Resultados preliminares

Las tareas de formación diseñadas se desarrollan en diferentes momentos, cabe mencionar que a partir de estas se ha logrado identificar un ´estado inicial´ del conocimiento profesional de los profesores, develado a través de sus reflexiones y el registro en diferentes instrumentos. Dado que el trabajo está en curso, se presentan unas familias de códigos preliminares que han sido objeto de análisis y que permiten puntualizar algunos resultados parciales.

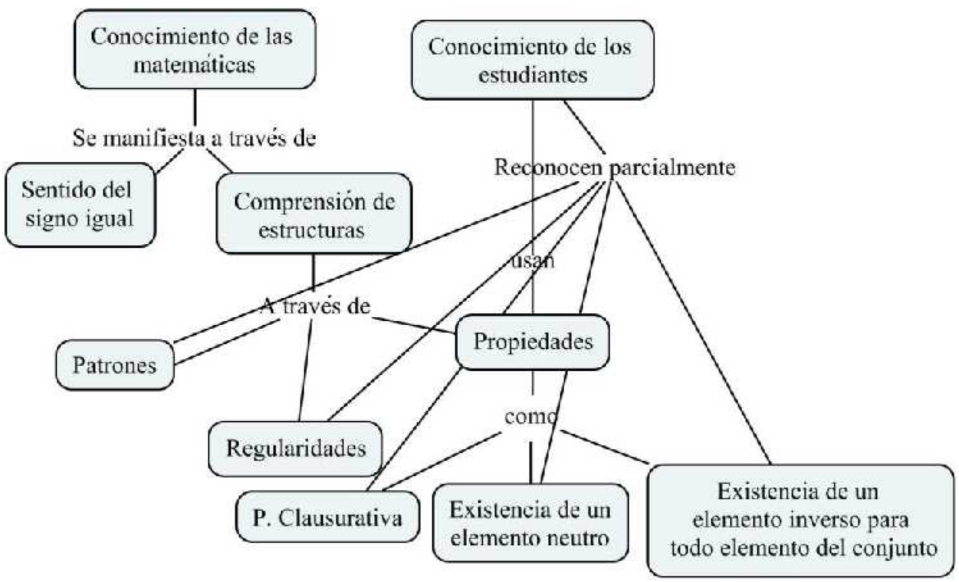


Figura 1. Familia de códigos emergentes a partir de la tarea de formación.

El análisis de algunas familias de códigos emergentes, posibilita precisar resultados parciales que dan cuenta de que los profesores empiezan a evidenciar cambios, a reconocer que la abstracción de regularidades, patrones y propiedades en una operación binaria permite comprender una estructura y dotar de sentido sus propiedades. Este reconocimiento pone de manifiesto indicios de una transformación en su conocimiento de las matemáticas. En consecuencia, el estudio pretende registrar y analizar episodios que lleven a un proceso de codificación, que inicialmente es abierto, pero facilita el establecimiento de relaciones para la elaboración de una codificación axial y selectiva (Strauss y Corbin, 2002), que permita, además, mediante un proceso analítico, la definición de una postura teórica que busca dar respuesta a la pregunta de investigación. Por lo pronto, es posible afirmar que una tarea de formación en la que emergen reflexiones, tanto de carácter metodológico, didáctico y pedagógico como de la disciplina y la práctica, puede constituir un elemento fundamental a la luz del marco de la transformación del conocimiento del profesor.

Referencias y bibliografía

Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, 389-407.

Borba, M., y Araújo, J. (2008). Construyendo investigaciones colectivamente en educación matemática. En M. Borba, J. Araújo, D. Fiorentini, A. Marafioti, y M. Viggiani, *Investigación cualitativa en educación matemática* (p. 110). México: Limusa.

Cai, J., y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives.* Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Carraher, D., y Schlieman, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. L. Jr., *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, págs. 669-706). NCTM, NC. Recuperado el Abril de 2017, de https://goo.gl/cf1G4u

Derry, S., Wilsman, M., y Hackbarth, A. (2007). Using contrasting case activities to deepen teacher understanding of algebraic thinking and teaching. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 305-329.

Glaser, B., y Strauss, A. (1967). *Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research.* New York: Aldine de Gruyter.

Glaser, B., y Strauss, A. (2017). *Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research.* New York: Routledge.

Godino, J., Castro, W., Aké, L., y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 26*(42B), 483-511.

Hernández, B., y Pérez, L. (2017). Conocimiento profesional de profesores en ejercicio al abordar cuestiones sociocientíficas. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación.* México: McGraw Hill.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 18*(1), 139-151.

Koellner, K., Jacobs, J., Borko, H., Roberts, S., y Schneider, C. (2011). Professional development to support students' algebraic reasoning: An example from the Problem-Solving Cycle Model. En *Early Algebraization* (pp. 429-452).

Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista*, (50), 117–133. https://doi.org/10.1590/S0104-40602013000400009

Luque, C., Jiménez, H., y Ángel, J. (2009). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: representar estructuras algebraicas finitas y enumerables.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Martínez, M., Rodríguez, I., y Gómez, P. (2017). La resolución de problemas profesionales como referente para la formación inicial del profesorado de física y química. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 14*(1).

Montero, L. (2001). *La construcción del conocimiento profesional docente.* Rosario (Argentina): Homo Sapiens.

Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas, *Crítica y Práctica de la Educación Matemática* (págs. 83-98). Barcelona: Graó.

Ponte, J. (2014). Articulação entre pedagogia e conteúdo na formação inicial de professores dos primeiros anos: Uma experiência em Álgebra. En N. Branco, y J. Ponte, *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (p. 377).

Ponte, J., Zaslavsky, O., Silver, E., Borba, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Gal, H., y Chapman, O. (2009). Tools and Settings Supporting Mathematics Teachers' Learning in. (R. Even, y D. Ball , Edits.) *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics,* 185 - 209. doi:10.1007/978-0-387-09601-8 17

Prieto, M., y Contreras, G. (2008). Las concepciones que orientan las prácticas evaluativas de los profesores: un problema a develar. *Estudios pedagógicos (Valdivia), 34*(2), 245-262.

Strauss, A., y Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: grounded theory - procedures and techniques.* California: Sage Publication.

Strauss, A., y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada.* (2da Edición ed.). Medellín, Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.

Vasilachis de Gialdino, I., Ameigeiras, A., Chernobilsky, L., Giménez, V., Mallimaci, F., Mendizábal, N., . . . Soneira, A. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa.* Barcelona: Gedisa.

Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

A formação de professores de Matemática da Educação Superior em Comunidades de Prática Online e a construção do TPACK: Algumas Reflexões

Andriceli **Richit**
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia
Brasil
andricelirichit@gmail.com
Rosana Giaretta Sguerra **Miskulin**
Universidade Estadual Paulista – *Campus* Rio Claro
Brasil
misk@rc.unesp.br

Resumo

O presente artigo, recorte de uma pesquisa de doutorado, discute alguns aspectos subjacentes à Formação de Professores de Matemática da Educação Superior no que tange a construção do TPACK (Mishra; Koehler, 2006) em uma comunidade de prática online (Wenger, 2001). Seguindo uma abordagem qualitativa de pesquisa engajamos professores de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria e Álgebra Linear, em um Curso de Extensão Online (Plataforma Moodle) que articulou as referidas disciplinas a questões de cunho pedagógico e tecnológico (software GeoGebra). A análise segue alguns elementos da Análise de Conteúdo (Bardin, 1977). Os resultados denotam a constituição e consolidação de uma comunidade de prática online ancorada na colaboração e indicam que os docentes vêem sua participação neste processo impulsionada pela troca e compartilhamento sendo este um fator relevante para a construção do TPACK de modo a integrar as Tecnologias Digitais em suas práticas pedagógicas.

Palavras Chave: formação de professores, matemática, educação superior, comunidades de prática, TPACK

Introdução

Apresentamos, neste artigo, uma discussão voltada à Formação do Professor de Matemática da Educação Superior no que diz respeito ao conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo – TPACK (Mishra; Koehler, 2006). As compreensões aqui apresentadas estão ancoradas em perspectivas da formação do docente universitário discutidas por Zabalza (2004) e Almeida (2012) e de comunidades de prática (Wenger, 2001). Para tanto, o presente texto, assim está estruturado: primeiramente, apresentamos algumas características da pesquisa. Em um segundo momento, discutimos a formação do professor da Educação Superior. Na sequência, apresentamos a processualidade metodológica e encerrando o texto, apresentamos algumas compreensões acerca do estudo desenvolvido.

A construção do conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo em comunidades de prática: possibilidades para à formação do professor de Matemática da Educação Superior

A docência na Educação Superior se inscreve em um cenário, cuja tessitura evidencia possibilidades e necessidades advindas do movimento de inserção das Tecnologias Digitais. Embora existam investimentos em aparatos tecnológicos, a aquisição e incorporação de tecnologias não se articulou às mudanças estruturais relacionadas aos processos de ensino, propostas curriculares e, tampouco, na formação dos professores universitários.

Nessa perspectiva, ao olharmos para a formação de professores de Matemática da Educação Superior, um processo formativo particular, corroboramos a Almeida (2012) que este requer a "[…] mobilização das compreensões e dos saberes teóricos e práticos capazes de propiciar o desenvolvimento das bases para que os professores compreendam e investiguem sua própria atividade e, a partir dela, constituam os seus saberes, num processo contínuo (p. 75)". Ademais, contextualizar a formação do professor da Educação Superior é de extrema importância no sentido de que a formação deva estar relacionada às situações reais que este enfrenta no âmbito da sala de aula, requer conhecimentos e habilidades bastante específicos e "[...] fortalece-os como sujeitos capazes de discutir, analisar e reconfigurar a própria prática (Almeida, 2012, p. 75-76)". No que tange a formação, acrescentamos ainda, fundamentadas em Zabalza (2004) que as universidades devem propor formação que seja interessante por si mesmas e que simultaneamente tragam vantagens aos docentes e que os cursos "[…] nos permitam melhorar como docentes e estar em condições mais favoráveis para ajudar os alunos" (p. 151). Além disso, no bojo dessa formação deve estar presente a compreensão de como os alunos aprendem, de modo a facilitar, orientar e melhorar, os processos de aprendizagem.

Pautadas em Almeida (2012), acreditamos em uma formação que tenha a prática pedagógica, a ação de ensinar e as perspectivas teóricas como objeto de análise, trazendo aos docentes elementos que possibilitem modificar suas atuações no campo específico e a desenvolver a atitude de pesquisar também no movimento de aprender, com as tecnologias.

Neto, Pêssoa e Mendes (2014) enfatizam que a integração das tecnologias digitais na Educação Superior constituem um processo de inovação tecnológica, possibilitando flexibilizar tempos e espaços de sala de aula presencial de forma integrada, bem como criar "[...] espaços de interação e comunicação que fomentam a partilha de experiências, o pensamento crítico, o trabalho colaborativo e a criatividade (p. 35)". Ademais, uma forma coerente de pensar a articulação entre tecnologia e ensino produz uma transformação na prática pedagógica dos professores e em seus processos de formação.

Nesse sentido, pensar o ensino de Matemática em nível universitário caracteriza-se como um processo complexo que demanda vários tipos de conhecimento. Assim, atuar neste nível de ensino requer muito mais do que saber Matemática (Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica, Álgebra Linear, etc.). A este respeito, Carlos, Pombo e Loureiro (2014) ressaltam que "as relações entre o conteúdo (o assunto atual que deve ser aprendido e ensinado), pedagogia (o processo e a prática ou métodos de ensino e aprendizagem) e tecnologia (ambos comuns, como quadro negros, e avançadas, tais como computadores digitais) são complexas (p. 1025)". Sobre isso, acrescentam ainda que "[...] a qualidade do ensino requer o desenvolvimento de uma compreensão diferenciada das complexas relações entre tecnologia, conteúdo e pedagogia, no sentido de se desenvolverem estratégias específicas para um certo contexto de ensino (p. 95)".

Considerando então, os conhecimentos pedagógicos, de conteúdo e tecnológico, Mishra e Koehler (2006) propuseram um referencial teórico ao qual denominaram de conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo – TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge). Este referencial teórico representa, entre outros fatores, o que os professores necessitam saber sobre a tecnologia para ensinar pedagogicamente os conteúdos. Assim, em um contexto atual, a tecnologia constitui um dos conhecimentos relativos à formação do professor. Transcendendo a proposição de Shulman (1986) que considerava inicialmente o conhecimento do conteúdo como salutar para a formação do professor, e recentemente passou a considerar também as práticas de sala de aula – conhecimento pedagógico, Mishra e Koehler (2006) reconhecem uma terceira dimensão, o conhecimento tecnológico, sendo os três conhecimentos articulados e inter-relacionados.

Mishra e Koehler (2006) pontuam que os conhecimentos integrantes do TPACK podem ser vistos separadamente: conhecimento pedagógico (PK), conhecimento tecnológico (TK), conhecimento de conteúdo (CK) e ainda observá-los em pares: conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK), conhecimento tecnológico do conteúdo (TCK), conhecimento pedagógico da tecnologia (TPK), e para os três tomados em conjunto: conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo (TPACK), semelhante ao movimento feito por Shulman, quando analisou a relação entre pedagogia e conteúdo e rotulou conhecimento pedagógico do conteúdo - CPK.

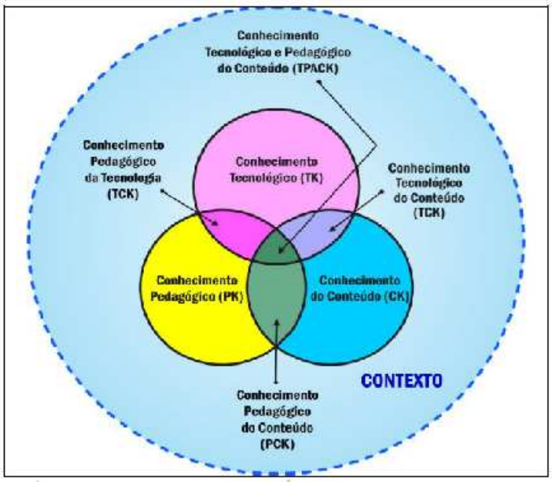


Figura 1. Quadro TPACK.

O TPACK relaciona-se a um conhecimento que vai além dos três componentes (conteúdo, pedagogia e tecnologia). Ele envolve a compreensão das inter-relações dos três e caminha para o entendimento da complexidade que envolve as relações entre estudantes, docentes, conteúdos, práticas e tecnologias. Pensar a conexão da tecnologia ao currículo requer necessariamente que se valorize o TPACK no âmbito da formação do professor. Nesse sentido, o desenvolvimento do TPACK possibilita aos docentes conforme Coutinho (2011) "[...] uma compreensão das técnicas pedagógicas que possibilitam que as tecnologias sejam usadas para a construção do saber por parte do aluno e não apenas como um apoio para ensinar (p. 4)".

Ademais, integrar de fato as tecnologias no âmbito educacional suscita a constituição de comunidades de professores que incentivam o (re) pensar, re (criar), comunicar, interagir e intervir em distintas situações práticas e que partilhem e compartilhem informações e experiências pedagógicas, de conteúdo e tecnológicas (Wilson, 2008). Para Wilson (2008), embora os professores aprendem com sua prática, dificilmente integrarão em seu fazer pedagógico as tecnologias digitais sem uma comunidade profissional que o apoie. A referência Baldini (2014) ancorada em Coutinho (2011) diz que pouco se sabe sobre os conhecimentos que um professor necessita para inserir as tecnologias na sala de aula. Para Baldini (2014, p. 52) "[...] a importância de pesquisas que evidenciem tais conhecimentos, que organizem e/ou descrevam modelos de formação em TDIC capazes de desenvolver atitudes positivas e competências de utilização das tecnologias como ferramentas cognitivas nos processos didáticos".

Considerando o exposto, nosso argumento principal está assente na ideia de que a formação do professor da Educação Superior configura-se num elemento emergente das práticas em que estão imersos e das quais participam e que reunidos em um grupo partilhando experiências sobre a prática pedagógica e interagindo possam desenvolver o TPACK.

Assim como preconizam Lave e Wenger (1991), assumimos a perspectiva de que as aprendizagens são elementos integrantes das práticas sociais, ou seja, a aprendizagem pode resultar da participação em comunidades de prática. Portanto, com o intuito de investigar e compreender dimensões do conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo de professores de Matemática da Educação Superior, constituímos um espaço, via plataforma online configurando uma Comunidade de Prática Online. De acordo com Wenger (2009) comunidade de prática é "[...] um grupo de pessoas que compartilham uma preocupação ou uma paixão por algo que elas fazem, e aprendem como fazê-lo melhor conforme elas interagem regularmente" (p. 02). Reconhecemos o potencial das comunidades de prática para a Formação do Professor de Matemática da Educação Superior, pois conforme preconizam Carlos, Pombo e Loureiro (2014, p.582) estas "[...] contribuem para diminuir o isolamento, aumentar o compromisso com a missão e os objetivos da escola, contribuir para um melhor acesso a informação, bem como para a renovação profissional, facilitando uma mudança significativa nas suas práticas no sentido da inovação nas estratégias de ensino e aprendizagem".

Características metodológicas da investigação

O recorte de pesquisa apresentado segue os pressupostos da pesquisa qualitativa. O contexto prático-investigativo foi um Curso de Extensão *Online* que abrangeu 16 encontros e foi viabilizado pela Plataforma Moodle. Compreendeu três módulos: Articulação das Tecnologias Digitais aos Processos de Ensino-Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria e Álgebra Linear e fomentou a discussão em torno da inserção, apropriação e utilização das Tecnologias Digitais no contexto das práticas pedagógicas dos professores da Educação Superior bem como trouxe subsídios relacionados a manipulação do software GeoGebra através da discussão e elaboração de roteiros de atividades de alguns conceitos pilares destas disciplinas.

Os dados constituídos ao longo do Curso de Extensão, compõem o que chamamos de *corpus* da pesquisa e representa "Uma coleção finita de materiais (textos, imagens ou sons) determinada de antemão pelo analista, com inevitável arbitrariedade, e com a qual se irá trabalhar (p. 44)" conforme as perspectivas de Bauer e Aarts (2002). Assim, na Figura 2 apresentamos os elementos constituintes do *corpus* da pesquisa:

Figura 2. Corpus da Pesquisa

Buscando compreender *elementos do conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo em um processo formativo de professores de Matemática da Educação Superior no contexto de uma comunidade de prática online*, tomamos alguns elementos da Análise de Conteúdo de acordo com Bardin (1977), para orientar a análise dos dados. Entretanto, apresentamos aqui apenas algumas reflexões parciais.

Análise dos dados: algumas considerações

Em sua gênese, o Curso de Extensão *Online* com vistas à Formação do Professor de Matemática da Educação Superior, foi planejado e desenvolvido na busca de promover a atualização de práticas pedagógicas e metodológicas dos docentes e mobilizá-los a integrar as tecnologias digitais nos processos de ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria e Álgebra Linear. Da análise do *corpus* da pesquisa, muitos elementos foram evidenciados. Entretanto, devido ao pequeno espaço, aqui apresentamos apenas alguns deles. As falas dos professores trouxeram muitas evidências. Uma delas diz respeito à *relação de experiências em sala de aula com leituras realizadas* no âmbito do Curso. Sobre isto, os docentes destacam que:

Acredito que encontrei e compartilhei histórias que são comuns e desafiadoras em sala de aula. Os fóruns de discussão após as leituras foram muito proveitosos, além do mais discutimos com pessoas que pensam constantemente na realidade da sala de aula que encontramos no Brasil. A leitura de ótimos textos permitiu ampliar minha visão sobre o assunto envolvendo as tecnologias para o ensino de assuntos ligados à matemática (Professor RS – Ficha de Avaliação).

Esse estudo chega em momento oportuno, estou repensando minha prática pedagógica no ensino de Geometria Analítica a distância (UAB/UNEMAT-Física) e efetuando estudo particular em Álgebra Linear, disciplina que ministro (Professor ES – Resenha Encontro 13).

Por outro lado, a literatura usada, especialmente a tese da Karrer foi muito instrutiva para mim sobre as dificuldades que podem surgir no ensino das transformações lineares quando estamos a usar um software dinâmico. Foi instrutiva também na qualidade da informação produzida, as interpretações que os alunos foram dando à medida que iam resolvendo as questões. A Álgebra linear é uma disciplina desafiadora e que foi tema de estudo no terceiro módulo no curso. As leituras realizadas nessa etapa do curso conduziram reflexões importantes sobre o tema. Os autores estudados refletem que muitas vezes os alunos executam algoritmos sem compreender os conceitos envolvidos no processo. […] (Professor PM – Memorial Reflexivo).

A partir dos excertos, inferimos que os professores do Curso de Extensão estavam construindo conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo ao engajaram-se nas discussões por meio de relacionamentos e interações, sendo este engajamento fundamental para a aprendizagem segundo Wenger (1998). Ademais, compreendemos que o contato dos professores com perspectivas teóricas propiciou a construção da TPACK, uma vez que repensaram suas salas de aula pela perspectiva das tecnologias. Um outro elemento ficou evidente durante o Curso – *a colaboração.*

Tenho lido várias pesquisas [...]. Acredito que este tipo de pesquisa poderá contribuir muito com a formação dos formadores de professores. Andrade (2010) afirma que a maioria dos livros prioriza o tratamento de um mesmo registro, apenas algébrico, e subutilizam atividades de conversão entre eles. Neste sentido, foi muito interessante entrar em contato com o livro de Lay, sugerido por um dos colegas durante o chat. Se for ministrar essa disciplina, certamente será um material de estudos para mim, que buscarei trabalhar nesta perspectiva da conversão entre registros, a qual, acredito, é essencial para a compreensão do aluno. A leitura despertou meu interesse por materiais e propostas assim, no ensino superior, e, durante o ENEM, em Curitiba, me vi mais uma vez buscando um minicurso que focava justamente o uso das tecnologias e da visualização no ensino de conteúdos do nível superior. Fui fazer o minicurso do professor, João Bosco Laudares (Minicurso: -1140- - **"TRABALHANDO COM PLANOS, CILINDROS E QUÁDRICAS NO WINPLOT").** (Professora EM – Resenha Encontro13).

Os comentários sublinhados evidenciam que a docente encontra-se em um movimento de construção do TPACK, ao refletir sobre modos de se trabalhar conteúdos de Matemática da Educação Superior, transpondo o nível apenas do conhecimento do conteúdo (CK) ou do conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK), considerando a colaboração entre os participantes do Curso de Extensão. Ademais, a participação da docente no Curso *Online*, engajada num processo de diálogo, permitiu que a aprendizagem acontecesse com a troca de experiência (Wenger, 2001). Outro aspecto identificado diz da *Criação de representações adequadas para os conceitos.* As falas apresentadas na sequência evidenciam o exposto:

Por exemplo, com relação à atividade sobre vetores, relativas ao 15º encontro, apesar de saber que um mesmo vetor possui diversas representações, o significado geométrico disso não era tão claro para mim. Ao lidar com a soma de vetores no GeoGebra e verificar que o vetor resultante aparecia na origem, não era óbvio, para mim, como interpretar geometricamente esse resultado. Senti-me instigada a transportar os vetores que havia construído, formando o paralelogramo para verificar que aquele vetor resultante tinha algo a ver com a ideia que eu havia construído intuitivamente. Isso me fez pensar em qual seria a reação do aluno que não soubesse a regra do paralelogramo e a descobrisse fazendo tentativas. Realmente, mesmo com as limitações da visualização, poder explorar ideias geométricas relacionadas aos vetores, dá muito mais sentido ao estudo da AL. (Professora EM – Memorial Reflexivo)

17:52 AS: Vivenciei algo semelhante ontem...: em uma atividade do Excel pedi aos alunos que calculassem pares ordenados de uma função dada e, ao final traçassem o gráfico da função e houve unanimidade em produzir os gráficos sem se preocuparem como eles realmente são. Aí fui a lousa mostrei como seria o comportamento do gráfico....
17:53 Pesquisadora: Como assim AS?
17:53 AS: Ficaram surpresos e eu disse se a função é assim o gráfico se comporta assim...
17:54 Pesquisadora: Mas então eles fizeram o gráfico errado?
17:54 Pesquisadora: Foi isso?
17:54 EM: Mas da forma como você conduziu a atividade eles não conseguiriam perceber por si só?
17:54 AS: se eles fizerem (3,7) (-1,3) (2,6) o Excel não irá produzir o gráfico de dispersão (x,y) da reta y=x+4
17:55 AS: exatamente EM... ou seja, a ideia de gráfico de funções não está formalizada para eles... (Chat 13 - 26/06/2013)

Observa-se, que as discussões dos professores no *Chat* e em outras fontes de registro, mostram o repensar de suas práticas, considerando as potencialidades das tecnologias digitais para a *criação de representações adequadas para os conceitos.* Também, evidenciaram que trabalhar na perspectiva de atividades exploratório-investigativas com tecnologias leva os alunos a compreensão de ideias matemáticas e os mobilizam a utilizar distintos procedimentos que não são tão usuais e comuns no âmbito das salas de aula, visto que o importante na atual conjuntura, é o modo como os conceitos são apreendidos e entendidos, e "organizados e integrados em um conjunto significativo de conhecimentos e habilidades novas (Zabalza, 2004, p. 157)".

Considerações Finais

No decorrer deste artigo, discutimos o processo de Formação de Professores da Educação Superior, dizendo da necessidade de espaços formativos que tomem recursos da Internet para sua viabilização bem como da incorporação de recursos tecnológicos no âmbito das salas de aula da Educação Superior, por meio do desenvolvimento do TPACK dos professores. As considerações apresentadas, não tem a pretensão de imediatizar respostas, mas de gerar reflexões e questionamentos outros no tocante a processos formativos de professores de Matemática da Educação Superior, em especial, professores de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria e Álgebra Linear. Assim, considerando problemas e perspectivas da própria prática pedagógica de docentes desta área da Matemática, podemos desconstruir e reconstruir dialogicamente práticas pedagógicas, saberes específicos e ações próprias de situações de sala de aula, na perspectiva de uma necessidade formativa deste docente, por meio das *comunidades de prática online*.

Ademais, vemos nas *comunidades de prática* potencialidades que permitem compartilhar experiências e conhecimentos e discutir modos de motivar os alunos, ensinar-lhes a trabalhar em grupo ou ampliar a dinâmica das aulas. Estes espaços compartilhados caracterizam-se como formativos os quais tem sido potencializados pela *Internet*. Igualmente, a emergência de formas *online* de comunicação "incentivam discussões desinibidas" de acordo com Castells (2006) e reúnem pessoas ao redor de valores e interesses comuns culminando na geração da virtualidade, a qual pode ser entendida como um espaço formativo. E, assim surgem as comunidades de prática *online*, comunidades propícias e necessárias quando se fala de formação de professores da Educação Superior, os quais encontram-se distantes de centros urbanos e, consequentemente, distantes de universidades que oferecem formação.

Referências

Almeida, M.I. (2012). Formação do Professor do Ensino Superior: desafios e políticas institucionais. São Paulo: Cortez.

Baldini, L. A. (2014). Elementos de uma Comunidade de Prática que permitem o Desenvolvimento Profissional de Professores e Futuros Professores de Matemática na utilização do Software GeoGebra. Doutoramento em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Paraná, Brasil.

Bardin, L. (1977). Análise de Conteúdo. Lisboa: Edições 70.

Bauer, M. W. & Aarts, B. (2002). A construção do corpus: um princípio para a coleta de dados qualitativos. In: Bauer, M. & Gaskell, G. (org.). Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som. Petrópolis: Vozes.

Carlos, V. & Pombo, L & Loureiro, M. J. (2014). Desenvolvimento Profissional Docente e comunidades online: Conceção de uma Oficina de Formação no EduLab do AEGN (projeto AGIRE). In: Miranda, G. L, Monteiro, M. E. & Brás. P. (Orgs.), *Atas do III Congresso Internacional das TIC na Educação* (pp. 578-589). Lisboa. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Castells, M. (2006). A Sociedade em Rede. São Paulo, SP: Paz e Terra.

Coutinho, C. P. (2011). TPACK: Em Busca de um Referencial Teórico para a Formação de Professores em Tecnologia Educativa. Revista Paidéi@. UNIMES VIRTUAL, 2 (4). Disponível em: <http://revistapaideia.unimesvirtual.com.br>. Acesso em 12/02/2015.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation. Cambridge: Cambridge University Press.

Mishra, P. & Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. Teachers College Record, 108(6), 1017-1054.

Neto, J. & Pessôa, T. & Mendes, A. J. (2014). Sala de professores Online. Reflexões em torno de uma estratégia de formação de professores universitários. In Flores, M. A. & Coutinho, C. (Orgs). Formação e Trabalho Docente: Diversidade e Convergências (pp. 61-72).Portugal. De Facto Editores.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15 (2), 4-14.

Wenger, E. (1998). Comunidades de práctica: aprendizaje, significado e identidad. Barcelona: Paidós.

Wenger, E. (2001). Comunidades de Prática: Aprendizaje, significado e identidad – cognición e desarrollo humano. Barcelona: Paidós.

Wenger, E. (2009). Communities of Practice: a few frequently asked questions. Disponível em: < http://www.ewenger.com/theory>. Acesso em 12/02/2015.

Wilson, P. S. (2008). Teacher Education: a conduct to the classroom. In: Heid, M. Kathleen e Blume, Glendon W. (orgs). Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: cases, and Perspectives. 2. Pennsylvania State University.

Zabalza, M.A.A. (2004). O ensino universitário: seu cenário e seus protagonistas. Porto Alegre: Artmed.

Produção do Conhecimento em Pesquisas sobre a Formação de Professores; Publicadas no VI SIPEM

Sibeli Mallmann **Pacheco**
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Campus Cascavel
Brasil
sibelimallmann@hotmail.com

Gabriele de Sousa Lins **Mutti**
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Campus Cascavel
Brasil
gabi_mutti@hotmail.com

Tiago Emanuel **Klüber**
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Campus Cascavel
Brasil
tiagokluber@gmail.com

Resumo

A pesquisa sobre a formação do professor é uma das vertentes que mais vem sendo discutida no campo da Educação Matemática. Visando lançar um olhar sobre a produção do conhecimento nas pesquisas sobre a formação de professores publicada no VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEM (2015) interrogamos: O que se mostra da produção do conhecimento em pesquisas sobre a formação de professores publicadas no VI SIPEM? estabelecendo uma abordagem qualitativa, segundo uma perspectiva fenomenológica. Foram considerados no estudo 15 trabalhos apresentados no Grupo de Trabalho de Formação de Professores e os resultados revelaram ser que essa é uma área múltipla, pode-se solicitar diferentes modos de se interrogar e de produzir pesquisa.

Palavras- chave: Formação de Profesores, Produção do Conhecimento, Educação Matemática, Pesquisa Qualitativa, Fenomenologia.

Introdução

Ao longo da história da Filosofia e da Ciência diferentes estudiosos empenharam-se em buscar compreender filosófica e epistemologicamente como se dá a produção do conhecimento científico; Hessen (1980) foi um deles. Referindo-se a origem do conhecimento Hessen (1980, p. 31) menciona que ela "pode ter tanto um sentido *psicológico* como um sentido *lógico*" uma vez que aquele que concebe o pensamento humano como pautado na razão admite o pensamento como psicologicamente independente diferente daquele que o concebe como pautado na experiência.

Dizer da produção do conhecimento, entretanto, implica, inicialmente, dizer do conhecimento. França (1994, p. 140) diz que a atividade de conhecer “ultrapassa o mero 'dar-se conta de', e significa a apreensão, a interpretação. Conhecer supõe […] o uso de instrumentos de apreensão; um trabalho de debruçar-se sobre […] O conhecimento produz, assim, modelos de apreensão - que por sua vez vão instruir conhecimentos futuros”.

A produção do conhecimento emerge da relação estabelecida entre sujeito e objeto. Hessen (1980, p. 26) diz que “a função do sujeito consiste em apreender o objeto, a do objeto em ser apreendido pelo sujeito”. No entanto, há diferentes respostas para o modo como essa relação se estabelece, sendo assim, é necessário explicitar distintas compreensões sobre aquilo se entende a essência do conhecimento[1].

Referindo-se à produção do conhecimento no contexto educacional Lima, Faria e Toschi (2014, p. 386) são taxativos ao dizer “todo esse processo histórico da produção do conhecimento, contextualizando com a história da pesquisa educacional reflete no processo e nas formas de se fazer ciência e, consequentemente, na produção do conhecimento científico em Educação”.

Alinhado a eles Monteiro (2000, p. 12, inserção nossa) diz que “[acha] difícil sustentar a ideia (sic) de que a constituição do modo de ser docente, a pesquisa e a produção do conhecimento sejam conceitos que operem separadamente um do outro”.

Levando em consideração o que foi dito por Lima, Faria e Toschi (1994) e Monteiro (2000) e a nossa atuação como docentes da Educação Básica e membros de um grupo de Formação Continuada[2], voltamos nossa atenção para a Formação de Professores, tomada como objeto de estudo de inúmeras pesquisas no contexto da Educação Matemática (Fiorentini, 2012); (Nacarato, Oliveira e Fernandes, 2017) e campo ao qual temos nos dedicado a estudar desde o ingresso no mestrado.

Voltamo-nos especificamente para os trabalhos apresentados no grupo de trabalho sobre a formação de professores do VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), interrogando: *O que se mostra da produção do conhecimento das pesquisas sobre a formação de professores publicadas no VI SIPEM?* procurando mapear o *que* e *como* estão sendo elaboradas as pesquisas e *quais caminhos* os pesquisadores estão buscando para compreender esse processo da produção do conhecimento.

Sendo assim, este trabalho traz uma abordagem buscando compreender o processo da produção do conhecimento. Apresenta a trajetória da investigação e os trabalhos analisados. Na sequência descreve as categorias que foram analisadas e interpretadas faz uma síntese compreensiva e desenvolve considerações sobre as análises apresentadas.

Visando esclarecer ao leitor o caminho que percorremos durante a realização dessa investigação, explicitaremos, no próximo subtítulo, a trajetória de pesquisa que foi orientada pela interrogação supracitada.

Trajetória investigação percorrida

[1] Para Hessen (1980, p. 87) a *essência do conhecimento* “é o resultado da relação entre o sujeito e o objeto. A questão relativa ao conhecimento pode ter uma resposta pré-metafísica e metafísica”.

[2] A Formação Continuada de professores em Modelagem Matemática na Educação Matemática está vinculada a Universidade Estadual do Oeste do Paraná e ocorre, no município de Foz do Iguaçu, Brasil.

Na investigação científica é pertinente que sejam expostos os procedimentos de pesquisa delineados de modo a buscar conferir-lhe graus de confiança, Bicudo (2011). Alinhados a esse entendimento damos o primeiro passo em direção a essa explicitação esclarecendo que adotamos a pesquisa como qualitativa segundo a perspectiva fenomenológica.

Adotar a perspectiva fenomenológica significa não deixar-se conduzir por referenciais teóricos prévios e tampouco estabelecer hipóteses a priori e sim "[...] trabalhar com sentidos e significados que não se dão em si, [mas que] vão se constituindo e se mostrando em diferentes modos, [...] olhar na temporalidade histórica, de suas durações e respectivas expressões mediadas pelas linguagem e por ela transportadas" (Bicudo, 2011, p. 41).

Assumindo essa postura de investigação e compreendendo que a assumir implica em ser orientado por uma interrogação, a saber: *o que se mostra da produção do conhecimento em pesquisas sobre a formação de professores publicadas no VI SIPEM?* dirigimos nossa atenção para os artigos sobre formação de professores publicados no sétimo grupo de trabalho (GT7), do VI SIPEM.

O nosso interesse em nos voltarmo-nos especificamente para a formação de professores advém do fato de atuarmos como professores da Educação Básica, por estarmos inseridos no contexto de um grupo de pesquisa em cujas discussões e investigações têm tomado a formação de professores como foco e, notadamente, por concordarmos com Oliveira, D' Ambrósio e Grando (2015) quando destacam a relevância do desenvolvimento de pesquisas sobre a formação de professores no campo da Educação Matemática.

Para além disso, a escolha pelo Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM) em sua última edição, se deve ao fato de esse evento se "mostrar como uma das atividades mais importantes da SBEM ao possibilitar que a produção brasileira seja mais conhecida [...] por promover o intercâmbio entre os grupos que, em diferentes países, se dedicam às pesquisas na área da Educação Matemática" (Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018, p.1).

Buscando compreender o que se mostra da produção do conhecimento em pesquisas sobre formação de professores publicadas no VI SIPEM fizemos o levantamento dos artigos do GT7. Desse levantamento emergiu um quantitativo de 15 artigos[3], os quais apresentamos no tabela 1:

Tabela 1

Artigos do GT7 publicados no VI SIPEM

Cód.	Título do artigo	Autores
A1	A formação de professores dos anos iniciais em um curso de pedagogia: Contribuições das disciplinas de matemática	Reginaldo F. Carneiro
A2	A Pesquisa com e pelas Professoras que Ensinam Matemática	Adair M. Nacarato, Regina C. Grando
A3	Aprendizagens a Respeito do Raciocínio Proporcional em uma Comunidade de Prática de Professores Matemática	Laís M. C. P. Oliveira, Márcia C. T. Cyrino
A4	Conhecimentos Matemáticos dos Professores e o	Alessandro J. Ribeiro, Felipe A.

[3] Consideramos para essa pesquisa apenas os artigos que estavam disponíveis no sítio do VI SIPEM. Ressaltamos, entretanto, que alguns dos trabalhos do G7 não estavam disponíveis para *download*.

	Ensino de Equações: Uma Investigação Acerca do Planejamento de Aulas para a Educação Básica	P. V. S. Vasconcelos
A5	Das Negatividades Usuais da Formação às Práticas Diferenciadas: Análise de Narrativas de Professoras que Ensinam Matemática	Viviane C. da Silva
A6	Desenvolvimento da Identidade Profissional de Professores em Comunidades de Prática: Elementos da Prática	Márcia C. C. T. Cyrino
A7	Efeitos que Induzem e Produzem uma Ferramenta Pedagógica na Formação de uma Professora e de seus Alunos	Deise M. X. B. Souza, Marcio A. da Silva, Dilza Côco, Sandra A. F. da Silva
A8	Estágio Supervisionado e Aprendizagem da Docência: Ações e Reflexões de Licenciandos de	Dilza Côco, Sandra
A9	Formação Continuada e Professores da Escola Básica: Movimentos de Parceria Universidade-Escola	Ieda M. Giongo, Marcia J. H. Rehfeldt, Teresinha Quartieri, Maria M. da Silva, Wellington L.
A10	Formação de Professores que Ensinam Matemática: O Estágio Supervisionado como um dos Espaços de Constituição da Práxis Docente	Cedro
A11	Formação Inicial/Continuada de Professores dos Anos Iniciais: Tecnologias Informáticas e Matemática	Cármen L. B. Passos, Ana Paula G. de Souza
A12	História do Conceito culturalmente significada e a Organização da Atividade de Ensino de Matemática	Vanessa D. M., Luis Radford
A13	Interações Entre os Integrantes da Universidade-Escola em um Projeto Colaborativo	Juliana F. S. Pardim, Patrícia S. Pereira
A14	Matemática Elementar e Investigação De Conceito: Estabelecendo Relações	Victor Girald, Letícia Rangel, Wellerson Q., Diego Matos
A15	Desafio a ser vencido: o desencanto dos egressos com a profissão e a escassez de Professores de Matemática	Lélia de Oliveira Cruz, Arno Bayer

Fonte: Os autores

Orientados por nossa interrogação de pesquisa buscamos ler na íntegra um por um dos artigos levantados. Fizemos isso, vez após vez, com o auxílio do *software*[4] Atlas.ti, que é uma ferramenta que agiliza o trabalho realizado pelo pesquisador (Klüber, 2014).

Essa leitura atenta permitiu que destacássemos dos artigos trechos que se mostravam convergentes a nossa interrogação. Esses trechos foram expressos por nós visando o estabelecimento de unidades de significado. As unidades de significado são: "uma primeira redução, *epoché* efetuada sobre os significados que emergiram do diálogo entre a questão estabelecida e os textos interrogados" (Klüber, 2014, p. 13). As unidades de significado estabelecidas foram então exaustivamente consideradas e essa consideração permitiu que encontrássemos convergências entre elas levando ao estabelecimento das seguintes categorias: *1) Sobre os focos, objetivos e sujeitos das pesquisas; 2) Sobre o tipo de pesquisa e 3) Sobre a Produção e Análise dos dados*.

As categorias constituídas foram descritas na perspectiva fenomenológica de investigação

[4] Possuímos a licença para a utilização do *software*.

que visa apenas expressar, sem inferências ou extrapolações, aquilo que emerge do sentido que entrelaça as unidades de significado que constituem as categorias, portanto, sem empreender sobre elas interpretações ou preenchimentos "[...] confluências que poderiam ser estabelecidas entre as asserções presentes" (Mutti, 2016, p. 50) intencionando construir "grandes categorias ou Núcleos de Ideias" (Bicudo & Klüber, 2011, p. 5).

O passo seguinte envolveu a busca pela explicitação dos sentidos do que se mostrou do fenômeno "produção do conhecimento nas pesquisas sobre formação de professores". Para tanto, envolvemo-nos no movimento hermenêutico de compreensão, no qual as compreensões primeiras articuladas vão dando origem a novas compreensões e interpretações (Bicudo, 2011).

As compreensões que se explicitaram desse movimento evidenciaremos no próximo subtítulo.

Categorias constituídas: descrição e compreensões

Nesse subtítulo apresentaremos o que se mostrou das categorias constituídas nessa investigação, bem como as compreensões que se explicitaram do movimento fenomenológico hermenêutico de interpretação que empreendemos.

A categoria C1 intitulada *Sobre os focos, objetivos e sujeitos das pesquisas*, é constituída de 45 unidades de significado que estão associadas aos documentos primários, que são os arquivos que contêm o texto, imagem, áudio, mapas e / ou vídeo a ser analisado. A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15. No que diz respeito aos focos das pesquisas, as unidades mostram que eles incidem sobre a formação inicial e continuada de professores e os próprios professores, suas experiências e o modo como ensinam. Sobre os objetivos as unidades explicitam: 1) busca pela compreensão dos recursos tecnológicos para aprender e ensinar a matemática; 2) a investigação na própria prática; 3) conhecer os modelos de formação; 4) busca de metodologias novas para motivação e que valorizem o conhecimento proveniente da relação entre professores e alunos; 5) a filogênese e a ontogênese na organização do ensino. Já no que concerne aos sujeitos às unidades mostram ser os professores dos anos iniciais, geralmente licenciados de pedagogia, mas também licenciando de matemática e alunos do ciclo de alfabetização.

A categoria C2 intitulada *Sobre o tipo de pesquisa,* é constituída de 7 unidades de significado que estão associadas aos documentos primários A1, A4, A6, A8, A13. As unidades de significado pertencentes a essa categoria mencionam que as pesquisas consideradas como sendo qualitativas, cujos métodos escolhidos são a abordagem de investigação documental, a pesquisa com intervenção e análises de narrativas escritas, numa perspectiva teórico interpretativa baseada em pressupostos de pesquisa colaborativa.

A categoria C3 intitulada *Sobre a Produção e analise dos dados* é constituída de 47 unidades de significado que estão associadas aos documentos primários A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15. As unidades de significado pertencentes a essa categoria relatam que a produção dos dados da pesquisa ocorreu de diversas maneiras: 1) leitura de atas de colação de grau e questionários respondidos pelos alunos egressos; 2) gravações em áudio e vídeo dos encontros dos grupos pesquisados e 3) entrevistas narrativas dos sujeitos, demonstrando os dados empíricos através da experiência em sala de aula e registros reflexivos. As unidades mostram também pesquisas teórico-metodológicas que possibilitaram um modo singular de produzir e constituir pesquisa na contemporaneidade, articulando metodologias de pesquisas pós-modernas, teóricos da avaliação e análise do discurso.

Quanto à análise dos dados os autores se voltaram para os escritos dos licenciandos dos cursos de pedagogia e de matemática, identificando aprendizagens dos participantes. Os dados são analisados através de narrativas dos estudantes, outros indicam vivências dialógicas, alguns utilizaram legenda para facilitar a interpretação dos dados, foram analisados também dados empíricos e vindos da natureza.

Síntese Compreensiva

Ao analisarmos o que se mostra das unidades que dizem sobre os *focos, objetivos e sujeitos* da pesquisa nos trabalhos sobre formação de professores, publicados no VI SIPEM vemos que, predominantemente, os focos e objetivos da pesquisa acabam se voltando para à formação de professores e aos próprios professores e as relações que constituem com outros professores e com seus alunos. Há um cuidado de compreender como ocorre o processo de aprendizagem da matemática e de buscar por instrumentos que possam aprimorá-lo.

Quando consideramos esses aspectos vemos que diferentemente do modo como o Movimento da Matemática Moderna "pretendia solucionar os problemas do ensino e da aprendizagem da Matemática por meio de uma visão internalista" (Klüber & Burak, 2008, p. 1), vinculada "a um projeto maior [...] *racionalista*, [...] [fundamentado] numa concepção estrutural - formalista com supremacia nas estruturas algébricas e na linguagem formal da Matemática" (Flores, 2007, p.52) que, como tal modo, entendia que "um conhecimento só merece na realidade este nome quando é logicamente necessário e universalmente válido" (Hessen, 1980, p.60) as categorias indicam uma preocupação que parece ir além das questões estritamente matemáticas, lançando olhares para *o professor, o aluno e modo como se dá a aprendizagem da Matemática*.

Parece haver, portanto, uma preocupação alinhada àquela instaurada pelo Movimento da Educação Matemática, no sentido de "considerar outros aspectos envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, aspectos como, por exemplo, a capacidade cognitiva do sujeito que aprende, a sua cultura, os fatores sociais e econômicos, a língua materna e outros" (Burak & Klüber, 2008, p. 2).

Para, além disso, quando as categorias mostram *os focos e objetivos* das pesquisas vinculados aos *professores, alunos*, ao modo *como ensinam e aprendem* e *as relações que estabelecem nesse processo,* elas explicitam uma compreensão do sujeito como aquele que "coloca-se simultaneamente em relação com o outro, com o contexto e consigo mesmo, em um processo que favorece a compreensão dos eventos vividos e a construção de conhecimentos e significados acerca de suas experiências" (Araújo, Oliveira & Rossato, 2018, p. 4). Vê-se que parece haver, do ponto de vista da pesquisa, um distanciamento da perspectiva positivista do *sujeito cartesiano*[5] e o reconhecimento dele como ser "complexo, concebido como múltiplo, descentrado e em desenvolvimento dialógico" (Araújo, Oliveira & Rossato, 2018, p. 4), evidenciando, de certo modo, a iniciativa de superar uma concepção idealista do sujeito, como aquele que determina o objeto e valorizando uma compreensão do conhecimento como resultado da relação dialógica estabelecida entre professores e alunos.

Ao analisarmos o que se mostra das unidades que dizem sobre *o tipo de pesquisa* nos trabalhos considerados, vemos que eles explicitam em *sua totalidade*, a opção pela *pesquisa qualitativa*, que segundo Bicudo (2012, p.17) "[...] busca é pela qualidade, tomada como já dada

[5] Sujeito entendido como fonte absoluta de conhecimento e verdade (Descartes, 1993).

e pertinente ao objeto. É como se a qualidade fosse do objeto e se mostrasse passível de ser observada". Seguindo a ideia a mesma autora, Bicudo (2011, p. 14) diz que "o qualitativo da pesquisa informa que se está buscando trabalhar com qualidade dos dados à espera de análise". Isso expressa que não se tem por objetivo apenas o quantitativo, os números, a razão. Já é uma compreensão de conhecimento na pesquisa que diferente de alguns autores que, conforme Hessen (1980, p. 60), entendiam como o "[...] verdadeiro conhecimento, [...] o racionalismo". Em suma, há uma visão historicista em Bombassaro (1992) do conhecimento permeando as investigações sobre formação de professores.

Ao analisarmos o que se mostra das unidades que dizem da *produção e análise dos dados* nos trabalhos sobre formação de professores, publicados no VI SIPEM um dos aspectos que se destacam é a valorização de instrumentos de produção de dados *empíricos*. Isso pode revelar, dentre outras coisas, indicativos do modo como os autores dos trabalhos analisados entendem que se dá produção do conhecimento. Parece haver uma compreensão de que a produção do conhecimento está predominantemente, pautada na *experiência*. Sobre a compreensão *empirista* da origem do conhecimento Hessen (1980, p. 68) menciona que o "[...] espírito humano está por natureza vazio; é uma tábua rasa, [...] todos os nossos conceitos, incluindo os mais gerais e abstratos, procedem da experiência".

Embora o tema de fundo dessas pesquisas seja a "*Formação de professores*" as unidades mostram que existe um leque de opções quanto ao modo como esses autores estão constituindo a pesquisa. Não se produz pesquisa sobre formação de professores, a partir desses textos, de modo hegemônico. Severino (2007, p. 9) diz que "pesquisas na área das ciências humanas, [...] e da educação em particular, envolvem-se necessariamente com essas perspectivas epistemológicas, vinculando-se a diferentes paradigmas".Isso certifica o desafio de se fazer pesquisa na área de educação, por não ser uma área dura e sim uma área múltipla, talvez justifique o fato das unidades de significado evidenciarem uma variedade de tipos de pesquisa. Por tratar-se de uma área múltipla, as pesquisas educacionais podem solicitar diferentes modos de interrogar, constituir e analisar dados. Severino (2007) diz que o conhecimento e sua área não podem ser tratados como produto, como algo acabado.

Sobre *a análise dos dados*, explicitamos que são baseados em *referencial teórico prévio* e para analisar os dados coletados e eles foram analisados através de repertórios compartilhados e discussões de práticas. Como na produção dos dados, explicitamos que os dados são empíricos e condizem provenientes da experiência. Segundo Hessen (1980, p. 68) "não há qualquer patrimônio *a priori* da razão. [...] A qual o espírito humano está por natureza vazio; uma tábua rasa [...] onde a experiência escreve". Parece haver uma tradição no contexto das pesquisas, notadamente, as educacionais, no sentido de tomar a adoção de referenciais teóricos prévios como um critério que atesta a seriedade e validade da pesquisa.

Considerações

Ao interrogarmos: O que se mostra da produção do conhecimento em pesquisas sobre a formação de professores publicadas no VI SIPEM? vimos as pesquisas acabam voltando-se para conhecer a formação de professores, o próprio professor e a relação entre professores, alunos e a Matemática. Há um cuidado de compreender como ocorre o processo da aprendizagem, da assimilação dos conteúdos da matemática e a busca por instrumentos que possam aprimorá-lo. Elas tomam o sujeito não como fonte absoluta de verdade. Valorizam, por outro lado, a compreensão de que a produção do conhecimento se dá de forma dialógica, situada e histórica.

A opção, unânime, nos trabalhos pela pesquisa qualitativa parece mostrar indicativos de um *distanciamento* do entendimento de que a origem do conhecimento se dá exclusivamente na razão destacando a valorização de aspectos que extrapolam aquilo que pode ser expresso em uma análise quantitativa como o sujeito (o professor) e sua subjetividade. Por fim, os indicativos do modo como os autores dos trabalhos analisados entendem que se dá produção do conhecimento e acaba por mostrar que por ser essa área múltipla, pode-se solicitar diferentes modos de se interrogar e de produzir pesquisa.

Referências

Araújo, C. M. de, Oliveira, M. C. S. L. de, & Rossato, M. (2016.) O *Sujeito na Pesquisa Qualitativa: Desafios da Investigação dos Processos de Desenvolvimento*. Psic.: Teor. e Pesq., Brasília, Vol. 33, 1-7.

Bombassaro, L. C. (1992) *As Fronterias da Epistemologia: uma introdução ao problema da racionalidade e da historicidade do conhecimento*. Petrópolis, RJ: Vozes.

Bicudo, M. A. V.(2011) Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica. São Paulo: Cortez.

Bicudo, M. A. V. (2012) A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. R. B. E. C. T., vol 5, núm. 2, mai-ago.

Bicudo, M. A. V & Klüber, T. E. (2011) *Pesquisa em modelagem matemática no Brasil: a caminho de uma metacompreensão*. Cadernos de Pesquisa, v. 41, n. 144, 904-927.

Burak, D. & Klüber, T. E. (2008) *Educação Matemática: contribuições para a compreensão da sua natureza*. Acta Scientiae Canoas v. 10 2. 93-106 jul./dez.

Cruz, L. de O. (2016.) *Professor de Matemática: Expectativas do Licenciando e o Processo de Formação*. XII ENEM: Encontro Nacional de Educação Matemática. - São Paulo.

Fiorentini, D. (2012) A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. Revista de Educação PUC-Campinas, n. 18.

França, V. R. V. (1994). *Teoria(s) da comunicação: busca de identidade e de caminhos*. Rev. Esc. Biblioteconomia UFMG, Belo Horizonte, v. 23, n. 2: 138-152.

Hessen, J. (1980) *A Origem do Conheciment*o. In: HESSEN, J. Teoria do Conhecimento. 7 ed. Coimbra/ Portugal; Armênio Amado. Cap. I. 37-57.

Klüber, T. E. (2014*) Atlas.ti como instrumento de análise me pesquisa qualitativa de abordagem fenomenológica*. ETD- Educação Temática Digital, Campinas - SP, v. 16, n.1, 5-23, jan.

Monteiro, S.B.(2000) Pesquisa e produção de conhecimento na formação de professores. Revista de Educação Pública, Cuiabá: EdUFMT, v. 9, n. 15, 71-86,.

Mutti, G. S. L.(2016) Práticas Pedagógicas da Educação Básica num Contexto de Formação Continuada em Modelagem Matemática na Educação Matemática. 2016. 236f. Dissertação– Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu..

Nacarato, A. M.; Oliveira, A. M. P. & Fernandes, D. N. (2017) Histórias da formação e de professores que ensinam Matemática: possíveis aproximações teórico-metodológicas. Zetetike, v. 25, n. 1, p. 46-74.

Severino, A. J. (2007) *A pesquisa na pós-graduação em educação*. Revista Eletrônica de Educação. São Carlos, SP: UFSCar, v.1, no. 1, 31-49, set.

Sociedade Brasileira De Educação Matemática (Brasília) (2018) (Org.). Histórico SIPEM. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/grupo-de-trabalho/historico-sipem>.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Reconceptualización de la geometría escolar como medio para la profesionalización docente en matemáticas de educación básica

Karla **Gómez** Osalde
Facultad de Matemática, Universidad Autónoma de Yucatán
México
karla.gomez@correo.uady.mx
Leslie **Torres** Burgos
Facultad de Matemática, Universidad Autónoma de Yucatán
México
leslie.torres@correo.uady.mx

Resumen

Se plantea una propuesta para la profesionalización docente en matemáticas (PDM), particularmente en educación básica (12-16 años de edad). La propuesta consiste en favorecer espacios de reconceptualización de saberes escolares y las prácticas educativas como medio para el cuestionamiento y reconstrucción colectiva de los conocimientos y significados de saberes escolares y disciplinares. En particular, se estudia el papel de los procesos de reconceptualización geométrica y su relación con el grado de conciencia del docente sobre los alcances y limitaciones de su práctica para el desarrollo del pensamiento geométrico espacial en sus estudiantes. Las experiencias obtenidas hasta el momento, indican que la reconceptualización didáctica de saberes geométricos favorecen aspectos de la práctica docente como la ampliación de los conocimientos geométricos, el reconocimiento de formas didácticas alternativas orientadas al desarrollo del pensamiento geométrico, como referente para diseñar actividades en dicha dirección, así como en el incremento de la autonomía respecto a su práctica.

Palabras clave: reconceptualización de las matemáticas, profesionalización docente en matemáticas, pensamiento geométrico espacial.

Introducción

En las últimas décadas, las crecientes demandas hacia la docencia en matemáticas para favorecer la mejora educativa en el área en los distintos niveles educativos, ha orillado a posicionar la actividad docente en el ámbito de la profesionalización. Ejemplo de ello se evidencia en el desarrollo del trabajo investigativo sobre el tema en el seno de la Matemática Educativa, el cual ha transitado de un plano individual sobre el docente de matemáticas y derivó hacia un plano colectivo, enfocándose en la docencia en matemáticas como campo profesional.

Ciertamente, en la década de los años ochenta prevalecía el interés por el estudio de la práctica educativa a partir de las caracterizaciones y relaciones entre las creencias, concepciones y representaciones de los docentes, tanto respecto a su conocimiento matemático y didáctico, así como sobre la manera en que éstos determinan su comportamiento, conocimiento, habilidades y decisiones del aula (Thompson, 1992; Pajares, 1992; Contreras, 1998). En un sentido estricto, esta perspectiva obvia el papel del saber matemático y las relaciones complejas que surgen al relacionarse con los actores didácticos en un aula de clase.

En consecuencia, el estudio de los procesos de formación y desarrollo profesional docente en matemáticas se posiciona en el tipo de conocimientos del profesor de matemáticas, en palabras más específicas, se precisa sobre el tipo de conocimiento pedagógico del contenido en la formación de profesores y el conocimiento del contenido matemático para su enseñanza (Shulman y Shulman, 2007), así también los conocimientos sobre los pensamientos de los estudiantes, de los métodos o recursos didácticos y del currículo que el profesor logre asumir (Ponte y Chapman, 2008). Por medio de esta perspectiva se retoma fuertemente el papel de la matemática, sin embargo, se soslayan aspectos de carácter sociocultural y contextual que enmarcan la práctica docente como característica fundamental.

Más recientemente, el tema de la profesionalización docente en matemáticas (PDM) se centra en aspectos más amplios, múltiples y sistémicos que incorporan lo cognitivo y epistemológico del saber con aspectos relacionados a lo didáctico y sociocultural para proveer explicaciones de las interacciones entre los componentes del sistema didáctico (profesor-alumno-saber) que permitan entender con mayor profundidad y precisión los fenómenos que ocurren tanto en los procesos de enseñanza y aprendizaje como en los procesos formativos de profesores de matemáticas. En este sentido, adquiere un papel relevante los contextos de profesionalización, las cuestiones relacionadas con las prácticas comunicativas en el aula, la cultura del aprendizaje, así como el papel del trabajo en comunidad (Lewis, Perry y Murata, 2006; Lee, 2008; Parada, 2011; Reyes-Gasperini, 2016; Sosa, Aparicio, Jarero y Tuyub, 2014).

Con base en los planteamientos previos, se considera que el estudio y desarrollo de la PDM va más allá de un enfoque individual y cognitivo sobre la actividad docente en matemáticas, pues sitúa a ésta en el terreno de la ejecución de ciertas prácticas y por ende, al saber matemático escolar un carácter estático y modificable sólo en términos de forma, más inalterable en términos conceptuales. Contrariamente, se requiere situar a la docencia en matemáticas como una actividad social y holística que sea capaz de generar mecanismos de construcción y consenso de sus saberes disciplinares. Lo anterior, implica un cuestionamiento y reconstrucción de los entendimientos y significados de los saberes matemáticos escolares, su sentido social, así como su organización y difusión en ámbitos escolares.

Con la idea de contribuir en esta última dirección, se presenta una propuesta orientada hacia el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas en educación básica (secundaria), como una forma de coadyuvar en las problemáticas de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, en particular para la enseñanza aprendizaje del pensamiento geométrico espacial, y a su vez, para la construcción de los saberes disciplinares.

Por tanto, esta propuesta se basa en situar la PDM en contextos de reconceptualización tanto del saber disciplinar como de la práctica didáctica como mecanismo para la reorganización de las prácticas educativas que integren a la matemática desde su perspectiva conceptual, procedimental y estructural, con su especificidad didáctica y sociocultural.

Marco Conceptual

Profesionalización docente y reconceptualización de saberes matemáticos

Como se mencionó previamente, la comunidad de matemáticos educativos se ha preocupado por atender la PDM desde enfoques que atienden tanto los aspectos cognitivos, contextuales y formativos, mismos que posicionan a la docencia en matemáticas como un campo profesional. Precisamente, esta propuesta se sitúa en el entendido de desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como un proceso continuo asociado a los mecanismos de construcción y difusión social de saberes profesionales que se construyen tanto en ámbitos escolares como fuera de ellos, esto es, profesionalizar implica más que propiciar o ampliar conocimientos, demanda otorgar a la actividad o práctica del profesor de matemáticas, referentes teóricos-metodológicos propios de un campo disciplinar que no segregue, por el contrario, que integre lo matemático en dicha actividad con su especificidad didáctica y los aspectos socioculturales que le son inherentes (Sosa, Aparicio, Jarero y Tuyub, 2014, p. 37).

En este entendido, el asunto de la formación de profesores y el desarrollo profesional conviene enmarcarlo en escenarios que propicien la ampliación y consenso de conocimientos tanto a nivel personal como profesional. Así, se reconoce a la reconceptualización de saberes como un proceso de construcción de significados matemáticos más amplios o ampliados por la toma de conciencia durante una experiencia de aprendizaje (Aparicio, Sosa, Torres y Gómez, 2018). En otras palabras, la reconceptualización es una transformación de lo que se conoce, el cómo y el por qué se conoce de un objeto matemático. Tal proceso de reconceptualización no podría devenir en lo individual, sino en lo colectivo, en donde se precisa reconocer que el pensamiento del profesor está asociado a un conjunto de vivencias desde y en su realidad (Sosa y Aparicio, 2017, p. 804)

Así y en relación con lo anterior, se plantean los procesos de la reconceptualización como una forma o medio para favorecer procesos de profesionalización docente. Por una parte, se busca situar a los docentes en la posibilidad de desarrollar y compartir continuamente experiencias colectivas de su profesión y de su saber disciplinar (Aparico y Sosa, 2013). Por otra parte, promover una variedad de experiencias de aprendizaje docente relacionadas con la autorreflexión y reorganización de los saberes propios e inherentes de la profesión, en el sentido que señalan Parada y Pluvinage (2014). De manera particular, interesan los conocimientos y explicaciones de los profesores respecto a la naturaleza y función social de los saberes matemáticos, así como en la lógica de organización de sus prácticas al interior del aula de clases.

Reconceptualización de la geometría escolar

Con base en los planteamientos previos, el proceso de reconceptualización de saberes busca promover en los profesores el reconocer, argumentar y reorganizar dichos saberes con base en su naturaleza epistémica (conceptual, procedimental y estructural) y su función social que aporten sentido y funcionalidad tanto a los saberes escolares como a las prácticas de enseñanza-aprendizaje. A continuación, se plantearán aspectos a considerar para la reconceptualización de la geometría escolar, en específico para la educación básica.

Se reconoce que, actualmente la geometría escolar se ha centrado en el estudio de las figuras y objetos geométricos, sus propiedades, clasificaciones y medidas, aun cuando el desarrollar un pensamiento geométrico requiere de experiencias de uso y transformación del espacio. Lo anterior, obstaculiza que los procesos de comunicación en el aula proporcionen sentido a la geometría como una herramienta para visualizar y modelar el espacio (Aparicio et. al., 2018).

Prueba de ello es que distintas investigaciones señalan dificultades, tanto cognitivas como didácticas, para una adecuada conceptualización de los contenidos geométricos por parte de los niños y jóvenes en educación básica. Por un lado, destacan dificultades para apropiarse de ideas geométricas que involucran más de una dimensión, por ejemplo la noción de superficie. Y más aún si se pone en juego la relación entre forma y medida esto es, se ha puesto en evidencia cómo al presentar situaciones que involucran la variación en cuanto a la forma, los estudiantes tienden a no aceptar la posible inmutabilidad de la medida de superficie (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1960).

Por otro lado, trabajos como el de D’Amore y Fandiño (2007) exponen el papel de las convicciones y elecciones de profesores, y cómo éstas pueden convertirse en obstáculos de naturaleza didáctica para la adecuada construcción de conocimiento geométrico, en particular, de las relaciones entre perímetro y área de una figura plana. Por ejemplo, la concepción recurrente en cuanto al concepto de área en relación con el empleo de las fórmulas para calcularla, más que en un concepto de dicho saber.

De lo anterior, se desprende la necesidad de favorecer procesos de reconceptualización de los saberes geométricos con el fin de enfatizar aspectos como la percepción y visualización de las formas espaciales, primordiales para el desarrollo del pensamiento geométrico. Por tanto, conviene un acercamiento donde lo empírico y la observación sean medios para el desarrollo de la perspectiva espacial (Alsina, 1997). Siendo así primordial, el favorecimiento de ideas relacionadas con el espacio, su forma, generación y medición; así como procesos del pensamiento como la generalización geométrica a partir del desarrollo de habilidades para establecer relaciones geométricas, analizar patrones de figuras y abstraer generalizaciones (Aparicio et. al., 2018).

Así, favorecer la reconceptualización de saberes geométricos escolares consiste en confrontar entendimientos y establecer interrelaciones en tres direcciones: en torno a los significados asociados a los objetos geométricos, incluso más allá del escenario en el que originalmente fueron presentados o tratados, la naturaleza operativa de dichos objetos, es decir, los procesos, métodos o algoritmos asociados y finalmente, las estructuras generales y abstractas como las fórmulas para el cálculo de medidas espaciales. De esta manera se generan mecanismos de análisis sistémicos que posibiliten construir referentes tanto teóricos como prácticos para la reorganización de las prácticas docentes en las aulas de matemáticas incorporando una perspectiva geométrica espacial dinámica y funcional.

Metodología del taller

La dinámica de actividades del presente taller consta de cuatro momentos, mismos que se describen a continuación:

- Momento 1. Discusión colectiva sobre el proceso de reconceptualización de saberes, en particular de la geometría escolar.

  Estrategia: Reflexión guiada sobre qué se entiende y porqué se propone la reconceptualización de saberes geométricos como medio para el desarrollo profesional docente. Ejemplificación.

- Momento 2. Análisis de actividades que permitan una confrontación entre tratamientos didácticos sobre el estudio de la medida y su papel en la construcción de formas geométricas en educación básica.

  Estrategia: discusión guiada sobre los tratamientos didácticos que se favorecen en la geometría escolar, así como sus implicaciones respecto al desarrollo del pensamiento geométrico espacial de forma transversal en la educación básica (nivel secundaria).

- Momento 3. Resolución y análisis colectivo de algunos diseños de experiencias de aprendizaje para el favorecimiento del pensamiento geométrico espacial.

  Estrategia: Con base en el análisis de las tareas propuestas en los diseños de las experiencias de aprendizaje, se reconocerán las consideraciones didácticas asociadas, así como consideraciones sobre adaptaciones de la práctica docente que se consideran para su implementación.

- Momento 4. Reflexiones sobre el tránsito o modificación de las prácticas educativas a partir de contextos de reconceptualización escolar.

  Estrategia: Ejemplificación del tipo de reflexión y argumentos por parte de los profesores de educación básica, para evidenciar el grado de sensibilización sobre su saber disciplinar y con ello concluir respecto al desarrollo y alcance del programa en cuanto a la profesionalización docente en matemáticas.

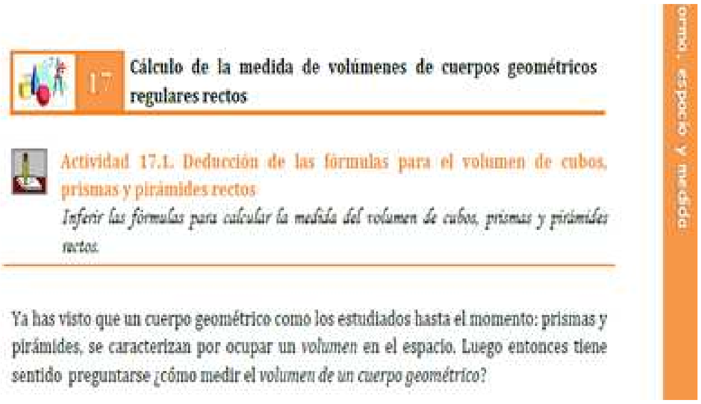
Cabe señalar que los diseños de experiencias de aprendizajes que se emplearán forman parte del material para la Educación Matemática en Secundaria “Actividades de aprendizaje para el aula. Primer, segundo y tercer grado”, (Aparicio, Sosa y Jarero; 2014 y 2015; Aparicio, Sosa y Gómez; 2016).

Ejemplo de un diseño de experiencia de aprendizaje en la geometría espacial

Para ganar en contextualización, se plantea un ejemplo de tareas (Figuras 1 a 3) que conforman un diseño de experiencia de aprendizaje para la educación secundaria y se acompañan con las consideraciones prácticas propias del tratamiento didáctico.

Título del diseño: Deducción de las fórmulas para el volumen de cubos, prismas y pirámides rectos.

Aprendizaje esperado: Inferir las fórmulas para calcular la medida del volumen de cubos, primas y pirámides rectos.


Forma, espacio y medida

17 Cálculo de la medida de volúmenes de cuerpos geométricos regulares rectos

Actividad 17.1. Deducción de las fórmulas para el volumen de cubos, prismas y pirámides rectos

Inferir las fórmulas para calcular la medida del volumen de cubos, prismas y pirámides rectos.

Ya has visto que un cuerpo geométrico como los estudiados hasta el momento: prismas y pirámides, se caracterizan por ocupar un *volumen* en el espacio. Luego entonces tiene sentido preguntarse ¿cómo medir el *volumen de un cuerpo geométrico*?

Figura 1. Introducción de la experiencia de aprendizaje.

Consideraciones didácticas: Se establece la relación entre el saber (S), aprendizaje esperado (AE) y forma de pensamiento geométrico (PM), en este caso: medición del volumen (S), inferir la fórmula para calcular su medida (AE) y la visualización de un patrón (PM). De esta manera se precisa sobre la naturaleza procedimental del saber matemático a tratar y se hace corresponder con el proceso de pensamiento geométrico que el estudiante requiere desarrollar, todo ello con la finalidad de apoyar su aprendizaje.

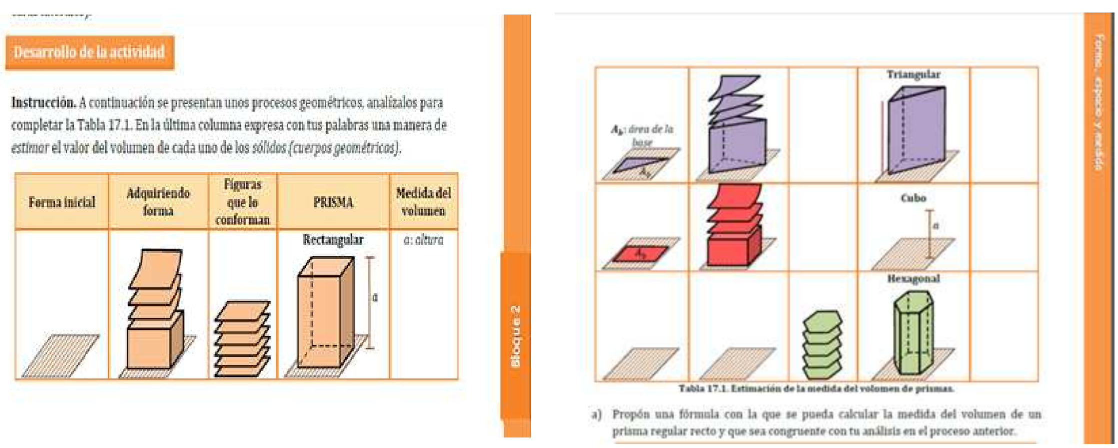


Figura 2. Desarrollo de la experiencia de aprendizaje.

Consideraciones didácticas: En el desarrollo se busca propiciar que el estudiante sea partícipe de la construcción de relaciones entre los elementos que constituyen a un prisma, el espacio que ocupa y la medida de su volumen, al establecer un patrón de comportamiento geométrico a través de observar los elementos invariantes de las formas geométricas presentadas. Además, se favorece la relación entre dimensiones, es decir, se parte de lo bidimensional hacia lo tridimensional. Lo anterior pretende contribuir hacia la conceptualización de las unidades de medida asociadas, pues en situaciones contextualizadas que involucran volumen, área o perímetro, en su mayoría, los alumnos centran su atención a la cantidad numérica, y se obvia la naturaleza geométrica de las unidades de medida según la dimensión del objeto geométrico (D'Amore y Fandiño, 2007).

Otro aspecto se asocia al proceso cognitivo de visualización (análisis de características, observación, comparación y abstracción), ya que se propone como recurso para construir la relación matemática que permite medir el volumen de un cuerpo geométrico.

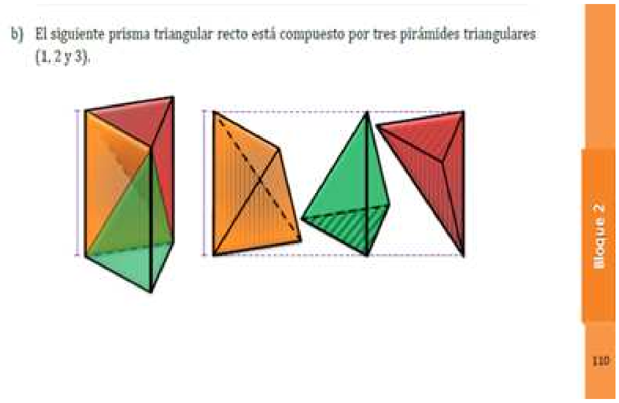


Figura 3. Cierre de la experiencia de aprendizaje

Consideraciones didácticas: Finalmente, se requiere retomar lo previamente construido en las tareas anteriores para emplearlos en la situación propuesta. En particular, se emplea como referente el entendimiento conceptual del prisma y el proceso para medir su volumen con la finalidad de conceptualizar la relación matemática que expresa el proceso para medir el volumen de las pirámides.

Reflexiones finales

La propuesta de PDM previamente expuesta se ha llevado a cabo con distintos colectivos docentes en matemáticas de educación básica (6-16 años) en Yucatán, México. A partir de dicha experiencia, se reconoce que la reconceptualización didáctica de saberes matemáticos ha favorecido en algunos aspectos que contribuyen a la profesionalización docente, en específico destacan los siguientes:

Por un lado, la reconceptualización posibilita la ampliación de los conocimientos matemáticos y didácticos que el profesor posee sobre los saberes matemáticos escolares, así como de las explicaciones sobre sus formas de comunicarlos en el aula. Particularmente, se ha destacado mayor conocimiento sobre una perspectiva de la geometría en relación con el espacio.

Por otra parte, se reconoce el aporte hacia el reconocimiento de formas didácticas-pedagógicas alternativas para incorporar a su práctica de aula orientadas hacia el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes, en particular del pensamiento geométrico.

También, destaca el papel de la reconceptualización como un referente para diseñar actividades que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. Lo anterior, a partir del proceso de análisis y reflexión colectiva sobre los saberes, así como de las intencionalidades didácticas que involucran las actividades.

Por último, se logra percibir mayor grado de autonomía del docente para reorganizar su práctica e incluso, adaptar las actividades matemáticas para favorecer experiencias de aprendizaje acordes con las demandas cognitivas, educativas y socioculturales propias de su región e institución.

Referencias y bibliografía

Alsina, C., Brugués, C. y Fortuny, J. (1997). *Invitación a la didáctica de la geometría.* España: Síntesis.

Aparicio, E., Sosa, L., Torres, L. y Gómez, K. (2018). *Reconceptualización del saber matemático en educación básica.* Mérida, Yucatán: Universidad Autónoma de Yucatán. ISBN: 978-607-8527-55-7.

Aparicio, E. y Sosa, L. (2013). Contenidos matemáticos en secundaria. Una propuesta para su tratamiento escolar. En Sosa, L., Hernández, J. y Aparicio, E. (Eds.). *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa,* (154 - 159). México: Red Cimates.

Aparicio, E., Sosa, L. y Jarero, M. (Eds.) (2014). *Educación matemática en secundaria. Actividades de aprendizaje para el aula. Primer grado*. Yucatán, México: UADY-SEGEY.

Aparicio, E., Sosa, L. y Jarero, M. (Eds.) (2015). *Educación matemática en secundaria. Actividades de aprendizaje para el aula. Segundo grado.* Yucatán, México: UADY-SEGEY.

Aparicio, E., Sosa, L. y Gómez, K. (Eds.) (2016). *Educación matemática en secundaria. Actividades de aprendizaje para el aula. Tercer grado.* Yucatán, México: UADY-SEGEY.

Contreras, L. (1998). Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula. Tesis doctoral. España, Universidad de Huelva.

D'Amore, B. y Fandiño, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10*(1), 39-68.

Lee, J. (2008). A Hong Kong Case of Lesson Study –Benefits and Concerns. *Teaching and Teacher Education, 24*(5), 1115-1124.

Lewis, C., Perry, R. y Murata, A. (2006). How Should Research Contribute to Instructional Improvement? The Case of Lesson Study. *Educational Researcher, 35*(3), 3-14.

Pajares, M.F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research. 62*(3), 307-332.

Parada, S. & Pluvinage, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 83 – 113.

Parada, S. (2011). *Reflexión sobre la práctica profesional: actividad matemática promovida por el profesor en su salón de clases*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *Child's conception of geometry*. Routledge. ISBN 0415-20999-4

Ponte, P. y Chapman, O. (2008). Preservice Mathematics Teachers' knowledge and development. En L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2da ed., 225-263). Nueva York: Routledge.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Shulman, L. y Shulman, J. (2007). How and what teachers learn: A shifting perspective. *Journal of Curriculum Studies 36*(2), 257-271.

Sosa, L. y Aparicio, E. (2017). Profesionalización docente en matemáticas. Reflexiones desde una forma de pensar didácticamente. *Primer Congreso Internacional de Investigación Educativa y Formación Docente.* Guerrero, México.

Sosa, L., Aparicio, E., Jarero, M. y Tuyub, I. (2014). Matemática Educativa y Profesionalización Docente en Matemáticas. El caso de Yucatán. En Dolores, C., García, M., Hernández, J. y Sosa, L. (Eds), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 31 – 47), México: Díaz de Santos. ISBN: 978.84.9969.664.5.

Thompson, A.G. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). Nueva York: MacMillan.

Reconceptualización de la transformación geométrica en profesores de matemáticas

Eddie **Aparicio** Landa
Universidad Autónoma de Guerrero
México
eeddie16@gmail.com
Guadalupe **Cabañas** Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero
México
gcabanas.sanchez@gmail.com
Landy **Sosa** Moguel
Universidad Autónoma de Guerrero
México
landy.sosa@gmail.com

Resumen

Este trabajo consistió analizar la conceptualización que tienen profesores de matemáticas sobre el concepto de transformación geométrica. Para ello, se implementó un cuestionario de forma individual y a partir de las respuestas dadas, se inició una conversación reflexiva centrada en sus respuestas. Se pudo observar que los profesores poseen una débil conceptualización de la transformación así como de las razones de su enseñanza. Se concluye la necesidad de situar a los profesores en un proceso de reconceptualización tanto de sus saberes matemáticos como didácticos.

Palabras clave: reconceptualización, transformación geométrica, profesores

1. Presentación

Diversas han sido las investigaciones que han dado cuenta de la importancia e implicaciones favorables que tiene para el aprendizaje matemático de los estudiantes el que los profesores posean un conocimiento profundo de las matemáticas (Hill, Rowan & Ball, 2005; Darling-Hammond, 2000; Ma, 1999; Grossman, Hammerness & McDonald, 2009; Silverman & Thompson, 2008; Tirosh, 2000), pues se ha observado que el conocimiento matemático de ellos, particularmente en educación básica, es más de tipo operativo y con poca profundidad conceptual, mermando con ello un adecuado aprendizaje en los estudiantes (Hill, Rowan, & Ball, 2005; Ernest, 1989; Tzur & Timmerman, 1997), cabe decir que esto no es exclusivo de los profesores en ejercicio, sino también de profesores en formación, pues como se reporta en Thaqi, Giménez, & Rosich (2011), los estudiantes para profesores en secundaria, muestran un bajo nivel de aprendizaje sobre las transformaciones.

En sus estudios, Silverman, (2004); Silverman & Thompson, (2008), observaron que las comprensiones abstractas no son suficientes para que los profesores tengan la capacidad de presentar a los estudiantes oportunidades que los coloquen en una comprensión similar y consistente. Asimismo, puntualizan que la mayoría de los profesores que logran cambiar sus prácticas docentes, lo hacen de manera superficial (Stigler y Hiebert, 1999), y concluyen que los cambios en la práctica de enseñanza resultan de las conceptualizaciones pedagógicas de las matemáticas, tanto en el sentido de las matemáticas como de la conciencia de su desarrollo conceptual.

Bajo el entendido anterior, consideramos se precisa indagar sobre cómo lograr que un profesor de matemáticas se sitúe en forma reflexiva y autocrítica, en relación con su quehacer profesional, y en ello, suponemos que lo personal y lo colectivo tienen un papel fundamental en la producción de una forma específica de reconceptualizar, pensar y enseñar la matemática en el contexto escolar.

2. Reconceptualización y pensamiento didáctico

En este trabajo ubicamos el estudio de la reconceptualización y desarrollo de una forma didáctica de pensar la matemática desde un enfoque sociocultural, pues reconocemos que el aprendizaje y el desarrollo de los profesores no solo se apoyan en lo colectivo, sino que se ve fortalecido en la medida que ellos participan y colaboran en un intercambio de conocimientos, contextos y experiencias (Campbell & Stohl, 2017; Lave & Wenger, 1991, Kolb & Kolb, 2017). Por ejemplo, Preciado-Babb, et al, (2015) mencionan que la comunicación en un espacio de diálogo e interacción entre profesores, fortalece sus hábitos de trabajo matemático y su idea de comunidad, además, dicen que en esas condiciones, el mostrar un trabajo y el compartir ideas, se valora no solo por su propio beneficio, sino también por su papel en la profundización de la comprensión matemática de los profesores. Ketelaar, et al, (2014), por su parte, señalan que los profesores expresan sentimientos de propiedad al participar en experiencias de aprendizaje, principalmente a través del intercambio de éstas y cuando dichas experiencias se ajustaban a la forma en que ellos conocen y aprenden.

Dicho así, a diferencia de algunos investigadores que caracterizan al pensamiento didáctico del profesor (de matemáticas), como “el conjunto de ideas, creencias, concepciones, opiniones, principios y teorías implícitas de vida y profesional que posee el docente sobre su quehacer didáctico durante la práctica pedagógica” (Figueroa & Páez, 2008), o ese pensamiento que está en relación con las creencias y conocimientos acerca de la enseñanza de las matemáticas, la planeación de clase, las expectativas del grupo, y de su propia eficacia docente (García-Cabrero, Loredo & Carranza, 2008), más bien lo caracterizamos en los términos que plantean Parada & Pluvinage (2014), quienes lo refieren como ese pensamiento que está en relación con el conocimiento de la matemática con el fin de enseñarla y a éste, en combinación con la aplicación de la didáctica, pero añadimos la idea de que dicho pensamiento se va desarrollando y conformando a partir de un continuo proceso reflexivo de las experiencias.

Con base en los planteamientos expuestos sobre la importancia e implicaciones que representan la noción de colectividad (reflexiva), experiencias profesionales (y de aprendizaje), y la conceptualización y reconceptualización de saberes matemáticos para el desarrollo de una forma didáctica (profesional) en los profesores de matemáticas, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo contribuye el intercambio de experiencias profesionales en un espacio de conversación reflexiva, al desarrollo de una forma didáctica de pensar las matemáticas?, en particular, relativo al concepto de transformación geométrica.

3. Marco teórico

Para desarrollar y enmarcar el objeto de estudio en esta investigación, se ha recurrido a la Teoría del Aprendizaje Experiencial (ELT, por sus siglas en inglés), teoría mayormente empleada en estudios relacionados con la educación de personas adultas. En esta, el aprendizaje es entendido como un proceso mediante el cual se construye conocimiento a partir de la transformación continua de la experiencia. Por experiencia se entiende "lo que es debido a una transacción que tiene lugar entre el individuo y lo que en ese momento constituye el medio ambiente" (Dewey, 1938, p.43).

De este modo y como se ilustra en la figura 1, el aprendizaje resulta ser un proceso dialéctico y holístico de adaptación al mundo en el que se dan transacciones entre la persona y el entorno. Así, advertimos que las experiencias de los docentes tendrían un papel determinante no solo en su propio aprendizaje y desarrollo, sino también en sus pensamientos.

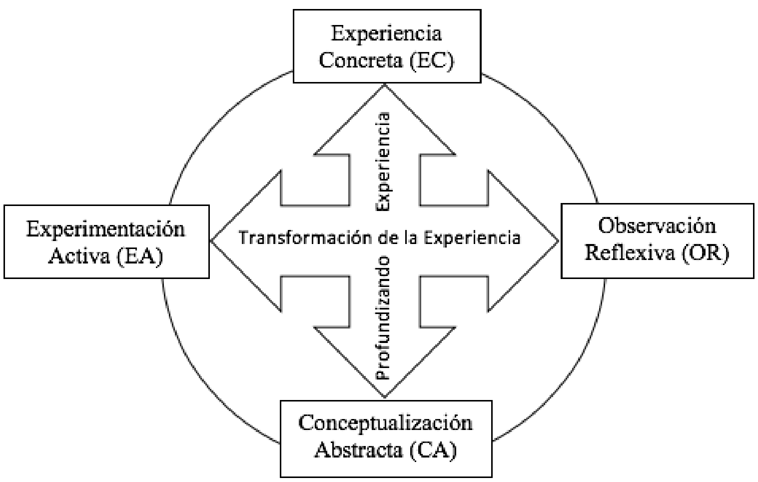


Figura 1. Ciclo de aprendizaje experiencial (Kolb y Kolb, 2017, p.32).

Las experiencias inmediatas o concretas (EC) son la base de las observaciones y reflexiones (OR). Estas reflexiones se asimilan y destilan en conceptos abstractos (CA), a partir de los cuales se pueden extraer nuevas implicaciones para la acción. Estas implicaciones pueden ser activamente probadas (EA) y servir como guías para crear nuevas experiencias (Kolb & Kolb, 2009, p. 298 – 299). La EC tiene que ver con lo experimentado (el hacer) en el momento, con una especie de experimentación sensorial (aprender experimentando/sintiendo), la OR tiene que ver con la observación y reflexión sobre lo realizado/experimentado en la EC (aprender procesando), la CA tiene que ver con teorizar o generalizar la experiencia a partir de la OR (aprender generalizando), y EA, tiene que ver con aplicar o probar una teoría para una próxima experiencia (aprender haciendo).

En el sentido anterior, es posible reconocer un espacio de conversación reflexiva (figura 2), como un espacio de aprendizaje de modo que, al escuchar, la persona experimenta al otro y reflexiona sobre lo que dice. De igual manera, al hablar, la persona piensa y formula intenciones sobre cómo responder y actuar para expresarlas. Es decir, que cuando una persona está "leyendo", recibiendo comentarios (EC) y formulando percepciones (OR), la otra persona está flexionando, creando intenciones basadas en esas percepciones (CA) y actuando sobre ellas (EA). A medida que el intercambio continúa, ambas partes alternan sus roles en la conversación (Kolb & Kolb, 2017).

Visto así, un espacio de conversación reflexiva ofrece la posibilidad de organizar experiencias y es en ese proceso de organización en donde pueden suscitarse aprendizajes a partir de la significación de dichas experiencias. Por tanto, representa un espacio para indagar y coadyuvar a los profesores a comprender y desarrollar su propio pensamiento, su propia práctica y la relación entre estas, pues la experiencia es primariamente un asunto activo-pasivo; no es primariamente cognoscitiva, comprende conocimiento en el grado en que se acumula o se suma a algo que tiene sentido, cuyos generales son: "el sentido de un problema; la observación de las condiciones; la formación y la elaboración racional de una conclusión sugerida y la comprobación experimental activa" (Dewey, 1998. pp. 133 - 134).

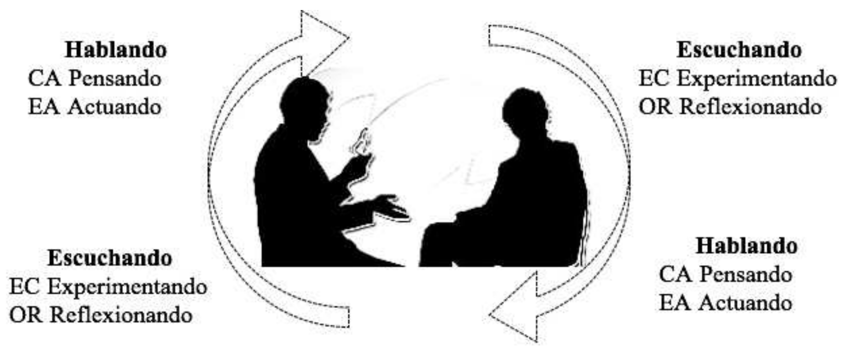


Figura 2. Ciclo de aprendizaje conversacional (Kolb & Kolb, 2017, p. 191).

4. Método y resultados de estudio

Como parte del espacio de conversación reflexiva se usó la "Entrevista grupal fenomenológica" que se caracteriza por suscitar un intercambio de experiencias en relación con un tema propuesto por el entrevistador (investigador), apoyando el crecimiento del conocimiento de los participantes a través de la reflexión colectiva sobre la experiencia (Gellert, 2008). Las características del tema o fenómeno quedan determinadas por las personas que lo "viven" y no por el investigador, son ellas quienes sacan dicho fenómeno de su conciencia y le dan expresión (Guerrero-Castañeda et al, 2017).

4.1. Participantes

En el estudio participaron cuatro profesores (dos hombres y dos mujeres) de matemáticas de educación básica en México, quienes dijeron no desconocer el concepto de transformación geométrica.

4.2. Instrumento

Para que inicie un proceso de reconceptualización, debe haber una confrontación entre el concepto que se tiene y el que se producirá como parte de una experiencia de aprendizaje. Así, se consideró emplear un instrumento el cuál tuviera tres preguntas relacionadas con el concepto de transformación geométrica, tal cual se muestra a continuación.

1. Indique, ¿Qué es transformación geométrica? Si le es posible, ofrezca un ejemplo de ello.

2. Indique si identifica algún tipo de relación geométrica entre el triángulo I y los etiquetados con los números II, III, IV, V y VI. Si fuera el caso, explíquela(s).

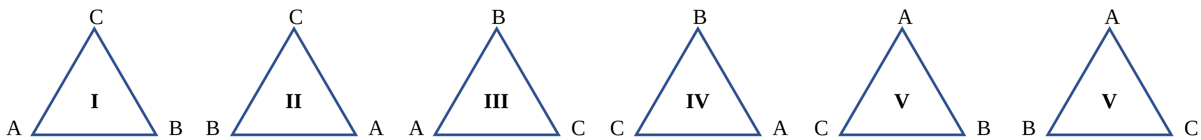


Figura 3. Segunda pregunta del instrumento planteada a los profesores.

3. Explique si es posible establecer algún tipo de relación geométrica de los puntos A, B y C con los puntos A_1, B_1 y C_1 en el plano cartesiano x, y.

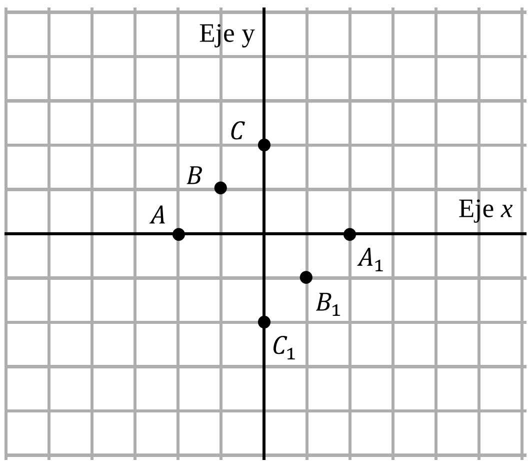


Figura 4. Tercera pregunta del instrumento planteada a los profesores.

4.3. Recolección y análisis de datos

La implementación del instrumento estuvo organizada de la manera siguiente: Primeramente, se solicitó atenderlo en su totalidad de manera individual, anotando sus respuestas en hojas. Segundamente, se les pidió reunirse en binas mixtas (hombre y mujer), para analizar sus respuestas y en su caso, generar una tercera en cada caso. Finalmente, el entrevistador realizó un cuestionamiento colectivo respecto a lo respondido individual y colectivamente.

Para la presentación de los datos obtenidos se hace uso de los siguientes códigos: PM1, PM2: para referir a las respuestas de las dos profesoras y PH1, PH2: para aludir a las respuestas de los dos profesores.

Las respuestas dadas por los profesores de manera individual a la primera pregunta fueron:

PM1: Es un proceso que se realiza para cambiar de posición cierta figura.

PM2: Es una operación que se le aplica a una figura para obtener otra, de tal forma que los puntos de la figura inicial correspondan con los de la figura final u obtenida.

PH1: Cuando tenemos una figura geométrica y tenemos rotar, trasladar, invertir o variar las proporciones de sus lados manteniendo sus ángulos correspondientes iguales, hablamos de una transformación geométrica.

PH2: Las transformaciones geométricas son aquellas que de una figura dada, obtenemos otra. Puede ser traslación, rotación, simetría y homotecia.

Las respuestas dadas de manera individual a la segunda pregunta fueron:

PM1: Todos giran ciertos grados y cambian de posición. Del I al IV se rotó 60 grados. Del IV al VI se rotó 60 grados, del I al VI se rotó 120 grados y del VI al I se rotó 60 grados.

PM2: II es simétrico del I respecto a una recta vertical. III se obtiene rotando II. V es simétrico del VI. VI es una rotación del I. IV es una rotación del VI.

PH1: I fue rotado 180 grados, dando como resultado II. VI resulta de girar 90 grados el I.

PH2: El IV es rotación del I en el punto B. V es rotación del II en el punto A. VI es rotación del III en el punto C. II es simétrico de I con el punto B o A. IV es simétrico de III en el punto C o A.

Las respuestas dadas de manera individual a la tercera pregunta del instrumento fueron:

PM1: Los puntos A, B y C, unidos forman un segmento paralelo al segmento $\overline{C_1A_1}$, además, el punto C con el punto C_1, son simétricos respecto al origen, así como también los otros puntos. Además, son simétricos respecto a la gráfica $y = x$.

PM2: Los puntos $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1$ y C_1 se obtienen mediante una rotación de los puntos A, B y C, respectivamente con centro en $(0,0)$ y ángulo de 180 grados.

PH1: Es posible establecer la relación de A con A_1, B con B_1 y C con C_1, al intercambiar las coordenadas x y y del punto $A(x, y)$ con sus simétricos al punto $A_1(x_1, y_1)$.

PH2: Son opuestos por el vértice u origen. Simétricos con respecto al origen.

Como puede verse, en las respuestas individuales dadas por los profesores a la primera pregunta, no se hace alusión al concepto de relación funcional o aplicación del plano al plano mismo, para decir qué es una transformación geométrica. Además, se deja ver que su conceptualización de la transformación es un sentido “manipulativo”. Es decir, la posibilidad de “manipular físicamente” una figura para modificarla o cambiarla en algo. Esta idea queda más evidenciada en sus respuestas dadas a las siguientes dos preguntas del instrumento.

De las respuestas dadas a la segunda pregunta, se identifica que los profesores si bien reconocen las transformaciones isométricas (reflexión y rotación), el sentido dado a ellas es igualmente manipulativo, pues no se hace referencia a los triángulos del II al VI, como “triángulos imágenes” del I.

Finalmente, se ve por las respuestas dadas a la tercera pregunta, que se sigue haciendo alusión a la simetría y rotación en un sentido de “operaciones geométricas”, más que de relaciones, a pesar de que el plano cartesiano pudiera sugerir evocar la idea de relación funcional, como se puede notar en PM1 y PH1.

Al solicitarles a los profesores analizaran en binas sus respuestas y en su caso, generan una tercera o indicaran si no harían ajustes a las mismas, las dos binas indicaron que sus respuestas eran equivalentes.

Para el tercer momento de trabajo colectivo (profesores y entrevistador), se solicitó a los profesores que reflexionaran e indicaran si al quitar etiquetas de número y vértices, a todos los triángulos, ellos dirían que son seis triángulos (equiláteros) o es un mismo triángulo (equilátero). Todos respondieron que se trata de seis triángulos, porque eso es lo que ven. Pero dando un espacio de silencio, luego dos de ellos dijeron que podría ser un solo triángulo, pero en diferentes posiciones. Es decir, un triángulo trasladado.

Posterior a su reflexión, se les pidió que observaran dos hojas del mismo tamaño, forma y color, en el escritorio. Una puesta verticalmente y la otra horizontalmente. Y que reflexionaran respecto a que uno de sus estudiantes les dijera: Yo veo que son dos hojas diferentes, aunque tengan la misma forma, tamaño y color. ¿Le dirían está en lo correcto? Todos dijeron que sí. Al dar su respuesta se les preguntó ¿por qué? A lo que respondieron que por en efecto son dos hojas. Por tanto, se aprovechó esta afirmación para discutir sobre qué pasa si ahora se deja una sola hoja y primeramente se muestra dispuesta verticalmente y luego horizontalmente, como era el caso cuando se tenían las dos hojas. Se les cuestionó sobre ¿Si la hoja horizontal es la misma que la vertical, solo que rotada y traslada? En este caso, todos entraron en duda de qué decir, e incluso algunos decían que el sentido físico y manipulativo de las hojas, podían causar problemas de entendimiento a los estudiantes sobre el concepto de transformación geométrica.

Respecto de la reflexión anterior realizada por los profesores, se les cuestionó si ellos considerarían que sería mejor el aprendizaje de la transformación tratarla desde un punto de vista de relación funcional, es decir, como una función que aplica puntos del plano al plano mismo, en lugar de uno manipulativo y operativo, a lo que ellos dijeron que sí, pero solo para estudiantes bachillerato, porque en primaria y secundaria, los estudiantes no lograrían entender. Ante ello, se les interrogó sobre la dificultad que tendría un estudiante de primaria o secundaria para entender que por ejemplo, una simetría o reflexión y una rotación, son formas de relacionar geométricamente dos figuras. Respondieron que en eso no veían que hubiera mucho problema o dificultad, ¡pues es muy claro!

5. Conclusiones

Se ha descrito una forma de situar a profesores en un proceso de reconceptualización individual y colectiva del concepto de transformación geométrica, con especial énfasis en las transformaciones isométricas de rotación y simetría, vistas como casos particulares del concepto de función biyectiva. La lógica detrás de esta propuesta consiste en considerar a la conceptualización presente en los docentes, para de ahí ampliar sus experiencias respecto a dicha conceptualización y finalmente, generar conciencia didáctica sobre las implicaciones de su conceptualización para una mejor práctica de enseñanza y aprendizaje asociada a las isometrías.

Ciertamente, llevar a una reconceptualización adecuada y conducida por los mismos profesores, detectamos, resulta complicado con solo un primer acercamiento a la problematización de los saberes, sin embargo, con una adecuada planeación, ejecución y continuo trabajo en espacios de conversación reflexiva, se podría lograr una ampliación de sus experiencias y conocimientos que les provea de una mayor autonomía para desarrollar una forma didáctica de pensar las matemáticas, más cercana a las demandas y retos que plantea una educación matemática de calidad. Esto se deriva de las valoraciones que los mismos profesores realizaron y expresaron tanto por escrito como verbalmente, sobre la necesidad de que ellos deben vivir más experiencias en donde sus conocimientos y prácticas docentes, entren en conflicto.

Referencias y bibliografía

Campbell, M. & Stohl, H. (2017). Examining Secondary Mathematics Teachers' Opportunities to Develop Mathematically in Professional Learning Communities. *School Science and Mathematics, 117* (3 – 4), 115 – 126.

Darling-Hammond, L. (2000). Teacher Quality and Student Achievement: A Review of State Policy Evidence. *Education Policy Analysis Archives*, *8*(1), 1 – 44.

Dewey, J. (1938). *Education and Experience*. New York, NY: Horace Liveright.

Dewey, J. (1998). Democracia y Educación. Una introducción a la filosofía de la educación. Madrid: Ediciones Morata, S. L.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. *Mathematics Teaching: the state of the art.* Recuperado de: http://people.exeter.ac.uk/PErnest/impact.htm

Figueroa, N. & Páez, H. (2008). Pensamiento didáctico del docente universitario. Una perspectiva desde la reflexión sobre su práctica pedagógica. *Fundamentos en humanidades*, *2*, 111 – 136.

García-Cabrero, B., Loredo, J. & Carranza, G. (2008). Análisis de la práctica educativa de los docentes: pensamiento, interacción y reflexión. *Revista electrónica de Investigación Educativa, Especial*, consultado el 15 de marzo de 2017 en http://redie.uabc.mx/redie/article/view/200/345

Gellert, U. (2008). Routines and collective orientations in mathematics teachers' professional development. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 93 – 110.

Grossman, P., Hammernness, K. & McDonald, M. (2009). Redefining teaching, re-imagining teacher education, *Teachers and Teaching: theory and practice*, *15*(2), 273 – 289.

Guerrero-Castañeda, RF., Menezes, TMO., & Ojeda-Vargas, MG. (2017). Características de la entrevista fenomenológica en investigación en enfermería. *Revista Gaúcha de Enfermagen*, *38*(2), 1 – 5.

Hill, H., Rowan, B. & Ball, D. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371- 406.

Ketelaar, E., Koopman, M., Den Brok, P., Beijaard, D., & Boshuizen, H. (2014). Teachers' learning experiences in relation to their ownership, sense-making and agency. *Teachers and Teaching*, *20*(3), 314 – 337.

Kolb, A. & Kolb, D. (2017). The Experiential Educator. Principles and Practices of Experiential Learning. San Bernardino, CA.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Nueva York: Cambridge University Press

Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Parada, S. & Pluvinage, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(1), 83 – 113.

Preciado Babb, A., Metz, M., & Marcotte, C. (2015). Awareness as an enactivist framework for the learning of teachers, mentors and institutions. *ZDM Mathematics Education*, *47*, 257 – 268.

Silverman, J. (2004). *Comparing aspects of constructivist research methodologies in mathematics education: Modeling, Intersubjectivity, and Tool Use*. Escrito presentado en el annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.

Silverman, J., & Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*, 499 – 511.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York: Free Press.

Thaqi, X., Gimenez, J., & Rosich, N. (2011). Geometrical transformation as viewed by prospective teahers. In Pytlak, M., Rowland, T., & Swoboda, E. (Eds.), *Proceedings of CERME8* (pp. 578-587). Rszeszów, Poland: ERME.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knoledge of children's conceptions: the case of división of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5 – 25.

Tzur, R., & Timmerman, M. (1997). Why do we invert and multiply? Elementary teachers' struggle to conceptualize division of fractions. En J. A. Dossey, J. O. Swafford, M. Parmantie & A. E. Dossey (eds.), *Proceedings of the 19th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 553 - 559). Bloomington-Normal, IL: Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Apropiación de la metodología de la indagación en la práctica docente de matemáticas

Vivian Libeth **Uzuriaga** López
Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
vuzuriaga@utp.edu.co
Héctor Gerardo **Sánchez** Bedoya
Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
hgsanche@utp.edu.co

Resumen

Se presentan resultados de una investigación realizada con ocho docentes de la Maestría en Educación de la Universidad Tecnológica de Pereira, becados por el Ministerio de Educación Nacional Colombiano, integrantes del macroproyecto "La metodología de la indagación en la enseñanza y aprendizaje de la matemática". Estudio cualitativo en marco del objetivo "interpretar la apropiación de la metodología de la indagación en la práctica docente mediada por la planeación e implementación de una unidad didáctica para la enseñanza de un objeto matemático". Con un diseño desde la teoría fundamentada, apoyado en la auto observación con registro videográfico de las sesiones de clase intervenidas, con una planeación previa de una unidad didáctica estructurada desde la metodología de la indagación y las situaciones didácticas de Brousseau. Se finalizó con la descripción de la práctica de los maestrantes investigados en la apropiación de dicha metodología, desde tres categorías: secuencia didáctica, competencia científica e interactividad.

Palabras clave: enseñanza matemática, metodología de la indagación, práctica docente, situaciones didácticas, unidad didáctica.

Introducción

Los bajos desempeños encontrados en las pruebas internacionales como en el Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos (PISA), la Evaluación Internacional de Conocimientos de Matemáticas y Ciencias (TIMSS), y en las pruebas SABER para el caso colombiano en el área de matemática, han generado constantes debates que focalizan su atención en los conocimientos, competencias, actitudes y capacidades de los estudiantes; y en las formas de enseñar de los maestros.

Conclusiones que son ratificadas por el MEN (2013), cuando afirma que las evaluaciones realizadas a maestros muestran falencias importantes tanto en el conocimiento disciplinar como en el conocimiento didáctico inherente a la propia disciplina, lo cual explica parte de las dificultades que tienen los estudiantes; ante lo cual Rico (2007) expresa que “los docentes no disponen de herramientas conceptuales adecuadas y suficientes desarrolladas, a partir de las cuales realizar una buena planificación” (p.53).

La discusión de Rico (2007) lleva a preguntar por las estrategias de los docentes al enseñar una disciplina del currículo, ante lo cual Gil y Vilches (2001. Citados en González-Weil, et al., 2012), manifiestan que si bien es cierto la enseñanza de las ciencias desde una postura crítica y participativa del estudiante debiera abordarse en todos los niveles educativos, la educación básica y media es “la etapa fundamental para plantear la alfabetización científica de los futuros ciudadanos y ciudadanas” (p.86), y razón de ello se requieren estrategias de aula que permitan que el sistema colombiano esté a la altura de este desafío, y la metodología de la indagación es una opción.

La problemática anterior llevó a la necesidad de reflexionar sobre la práctica docente, de los profesores participantes de la investigación, quienes fueron becados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia en el marco del programa “Becas para la excelencia docente”, surgiendo como pregunta de investigación: ¿cómo contribuye la metodología de la indagación en la práctica docente, al implementar una unidad didáctica para la enseñanza de un objeto matemático? Los objetos matemáticos asumidos para las investigaciones fueron: concepto de fracción en grado séptimo (Muriel, 2016) y (Jaramillo, 2016), sistema de numeración decimal en grado segundo (López, 2016), construcción del número en grado primero (Cuartas, 2016) y (Serna, 2016), estructura multiplicativa en grado tercero (Flórez, 2016), figuras geométricas en grado segundo (Ardila, 2016) y construcción y clasificación de los poliedros en grado octavo (Mosquera, 2016).

Pregunta que permitió a los maestros investigados a reflexionar sobre sus actuaciones en el aula de clase, la planeación de la misma, llevando a caracterizar su práctica docente antes de su formación posgradual y durante la maestría, al volver al aula una vez diseñada y planeada una unidad didáctica fundamentada en la metodología de la indagación y las situaciones didácticas de Brousseau.

Por lo anterior, se hace necesario pensar la *práctica docente* desde la intencionalidad de la secuencia de actividades, la cotidianidad en el aula y sus relaciones con el saber (González-Weil, et al., 2012); reflexión que los investigadores se plantearon al interpretar su *práctica docente* mediada por una unidad didáctica fundamentada en la metodología de la indagación desde las categorías secuencia didáctica, competencia científica e interactividad.

Práctica docente que es concebida como “todas aquellas actuaciones que el docente realiza en el aula con el propósito de enseñar” De Lella (1999, p.13), la manera como él trabaja, se expresa, actúa y se relaciona. Es decir, la caracterización de sus hábitos, acciones y estilos en el contexto educativo; y que es interpretada desde las categorías: *secuencia didáctica*, la cual está relacionada con las actividades que se realizaron en el aula de clase y cómo se estructuraron. *Competencia científica,* entendida desde (González-Weil, et al., 2012) como un conjunto de conocimientos, capacidades y actitudes científicas del docente que permiten generar en el aula un conjunto de saberes, capacidades y disposiciones. Es decir, corresponde con la formación docente tanto desde la epistemología del objeto matemático, como desde su didáctica; y la *interactividad*, definida como “la articulación de las actuaciones del profesor y los estudiantes en torno a una tarea o contenido de aprendizaje determinado” (Coll, Colomina, Onrubia & Rochera, 1992, p.204).

La metodología de la indagación entendida desde la reflexión que hace el docente, en donde se mira así mismo como aprendiz permanente, capacitado para mejorar su quehacer en aula (González-Weil, 2012, p. 87).

La unidad didáctica definida como una unidad de trabajo para enseñanza y aprendizaje, que tiene duración, objetivos, contenidos, actividades de aprendizaje y evaluación (Coll, 1991).

Metodología

La investigación fue cualitativa, de corte descriptivo e interpretativo (Yin, 1994. Citado por Castro, 2010. p. 39), que permitió caracterizar la práctica de los docentes. El diseño se enmarcó en la Teoría Fundamentada (Strauss & Corbin, 2002). Este diseño consideró tres momentos: El primero, la visión retrospectiva, considerado como un antecedente primario, y correspondió a la caracterización de la práctica de los docentes investigados antes de iniciar su proceso de formación tanto teórica como de intervención intencionada desde la metodología de la indagación. El segundo momento, posterior a la revisión documental y en paralelo al desarrollo de los seminarios de la maestría, se diseñaron y planearon siete unidades didácticas, fundamentadas en la metodología de la indagación y las situaciones didácticas de Brousseau,, como estrategia pedagógica para regresar al aula. El tercer momento, fue la observación y sistematización de la práctica de cada uno de los docentes participantes de la investigación durante la implementación de las unidades didácticas; las cuales se hicieron teniendo en cuenta los instrumentos diseñados para tal fin, la rejilla de observación y la matriz de análisis y que permitieron describir la apropiación que cada uno hizo de la metodología de la indagación.

Hallazgos y resultados

De los hallazgos y el análisis de las transcripciones realizadas por los ocho maestrantes en sus investigaciones individuales, se resalta que las acciones de aula fueron clasificadas de la siguiente manera: El 36% de las acciones de los docentes se enmarcaron en los ítems de la categoría *secuencia didáctica*, el 43% en la *competencia científica del docente*, y para las acciones asociadas con la *interactividad,* fue el 21%. Lo que muestra que los docentes, a pesar que su formación de base no es en matemáticas, fortalecieron sus conocimientos matemáticos, epistemológicos y didácticos, por lo menos del objeto matemático seleccionado para su enseñanza desde la planeación e implementación de la unidad didáctica.

Secuencia didáctica

Al observar, sistematizar e interpretar la apropiación de la metodología de la indagación en la práctica docente desde la categoría *secuencia didáctica*, la cual está relacionada con la pregunta ¿qué actividades se realizan en el salón de clase y cómo se estructura? se pudo encontrar que, en la subcategoría actividad medular el 12.5%, fue el ítem más representativo y mostró que “*el docente utiliza variados recursos para la construcción del conocimiento*”, construcción que se hizo para cada uno de los objetos matemáticos de las unidades didácticas; lo que indicó que los ocho docentes usaron los recursos como mediadores cognitivos, lo que demandó de los maestrantes un alto componente creativo, para aprovechar lo disponible en el medio; y no fueron usados los recursos para jugar o "entretener" a los estudiantes, como se observó en la visión retrospectiva.

Por otro lado, el ítem con menor registro fue "*desarrolla las temáticas a través de situaciones problemas basados en contextos reales*", con el 4.29%. Aunque la situación de acción motivó el inicio de la temática desde una situación problema, situaciones cercanas al contexto de interés de los estudiantes, la misma no se desarrolló durante todas las sesiones de clase observadas. Es decir, no se evidenció que esta conexión con el contexto fuera recurrente durante la clase.

Con respecto a la subcategoría *momentos de clase flexible* se pudieron encontró que las acciones más recurrentes de los docentes participantes de la investigación estuvieron en el ítem "*el docente acompaña los estudiantes en los procesos que se realizan en la construcción de nuevos conocimientos*", con 16.62%, característica que resalta la importancia del rol del profesor como guía del proceso involucrando a los estudiantes con su aprendizaje, fortaleciendo competencias de aprender a aprender, argumentar, validar. El más bajo estuvo en "e*l docente flexibiliza su estrategia de acuerdo con las necesidades de aprendizaje de sus estudiantes*", con el 8.58%.

Competencia científica

En esta categoría se ubicaron las acciones de aula relacionadas con la pregunta "¿qué ámbitos de competencia científica aborda el docente en su clase?" (González-Weil, et al., 2012). Se encontró que el 57.11% de acciones de los docentes correspondieron a los ítems de la subcategoría *promoción de conocimientos y actitudes*; entre tanto el 42.89% estuvieron asociadas a la *enseñanza de las competencias disciplinares*.

Frente a la *subcategoría promoción de conocimientos, capacidades y actitudes*, se encontró que el 9.75% de las intervenciones correspondieron al ítem "*el docente responde a las inquietudes de los estudiantes con preguntas orientadoras y retadoras*", implicó reconocer en los docentes su preocupación por no formular preguntas cerradas, fácticas o de respuesta inmediata, sino preguntas centradas en la "forma" ya que estas incidente positivamente en el pensamiento lógico, matemático y abstracto del estudiante.

Con respecto a la observación, sistematización e interpretación de la práctica docente desde la subcategoría *enseñanza de las competencias disciplinares* se encontró que el 10.23% correspondió con el ítem "*el docente promueve en los estudiantes el interés por la clase, la atención y la participación, a través de la formulación de preguntas*", aspecto que reafirma el principio de la metodología de la indagación de darle la mayor participación posible en el aprendizaje como factor motivacional que contribuirá a sostener el interés por aprender.

A partir de las transcripciones se pudo observar que el docente promovió en los estudiantes el interés por la clase, la atención y la participación, no solamente a través de la formulación de preguntas, sino también a través de las expresiones positivas, de reconocimiento a lo que hicieron, al darle participación en la evaluación y desde la confrontación entre pares.

Interactividad

Frente a la interactividad las acciones en el aula estuvieron relacionadas con la pregunta ¿qué características tiene la interacción profesor-alumno y de qué manera apoya el aprendizaje?, se encontró que el 56.10% estuvieron enmarcadas en la subcategoría *proceso de negociación y construcción*, entre tanto el 43.90% estuvieron identificadas como el *andamiaje* brindado por el docente o los propios compañeros de curso.

Una de las características de la metodología de la indagación que mostró mayor apropiación por parte de los maestrantes estuvo representada en el ítem *"el docente favorece el trabajo colaborativo a través de las actividades que propone en el aula"* con un 20.21%, lo que permitió inferir que existió gran interés por realizar estrategias en las cuales el estudiante junto con sus pares aprendieran conjuntamente, reconociendo la acción dialógica como herramienta mediante la cual se construyen de manera conjunta los nuevos conocimientos, conceptuándose de esta manera el aprendizaje como producto de las interacciones entre el estudiante y el entorno social (Vygotsky, 1978. Citado en Sadovsky, 2005).

Conclusiones

La metodología de la indagación permeó la práctica de los docentes, desde la planeación de la clase hasta el desarrollo de la misma, lo que permitió observar que promovieron en los estudiantes el interés por la clase, la atención y la participación, haciendo de estos sujetos activos de su proceso de aprendizaje.

Asimismo, la planeación, diseño e implementación de unidades didácticas construidas desde las bases teóricas de la metodología de la indagación y las situaciones didácticas de Brousseau para la enseñanza de objetos matemáticos, permitió a los docentes participantes de la investigación apropiar en su rol características de dicha metodología que les permitió de manera gradual pasar la responsabilidad del aprendizaje a los estudiantes, convirtiéndose en guías del proceso, lo que los llevó a cambiar la concepción de enseñanza que tenían como una transmisión de conocimientos, como poseedores del mismo, en espacios de diálogo y construcción compartida de significados.

Referencias y bibliografía

Ardila Ortiz, L. M. (2016). Transcripción de la práctica docente durante la implementación de la unidad didáctica. Universidad Tecnológica de Pereira. Maestría en Educación. Pereira.

Castro Monge, E. (2010). El estudio de casos como metodología de investigación y su importancia en la dirección y administración de empresas. *Revista Nacional de Administración*. Recuperado el 18 julio de 2017. http://biblioteca.icap.ac.cr/BLIVI/COLECCION_UNPAN/BOL_MARZO_2013_60/UNED/2010/estudio_casos.pdf

Cerda Gutiérrez, H. (1.991). *Los elementos de la investigación,* capítulo 7. Medios, instrumentos, técnicas y métodos en la recolección de datos e información. Recuperado de https://drive.google.com/file/d/0ByJKdYF9NkPwaDhXb1ZRYmpSakE/view.

Coll, C., Colomina, R., Onrubia, J. & Rochera, M. J. (1992, p.204). *Actividad conjunta y habla: una aproximación al estudio de los mecanismos de influencia educativa.* Madrid: Infancia y aprendizaje, 189-232.

Cuartas Palacio, L. (2016). Transcripción de la práctica docente durante la implementación de la unidad didáctica. Universidad Tecnológica de Pereira. Maestría en Educación. Pereira.

De Lella, C. (1999). I Seminario Taller sobre Perfil del Docente y Estrategias de Formación. *Modelos y tendencias de la Formación Docente*. Lima, Perú: Organización de estados iberoamericanos.

Flórez Correa, S. (2016). Transcripción de la práctica docente durante la implementación de la unidad didáctica. Universidad Tecnológica de Pereira. Maestría en Educación. Pereira.

González-Weil, C., Cortéz, M., Bravo, P., Ibaceta, Y., Cuevas, K., Quiñones, P., Maturana, Y & Abarca, A. (2012). *La Indagación científica con enfoque pedagógico: estudio sobre las prácticas innovadoras de docentes de ciencias en EM*. Estudios Pedagógicos XXXVIII, 86-102.

González-Weil, C., Martínez, M., Galax, C., Cuevas, K. & Muñoz, L. (2009). La educación científica como apoyo a la movilidad social: desafíos en torno al rol del profesor secundario en la implementación de la indagación científica como enfoque pedagógico. (Valdivia, Ed.) Estudios

Jaramillo Valbuena, G. P. (2016). Transcripción de la práctica docente durante la implementación de la unidad didáctica. Universidad Tecnológica de Pereira. Maestría en Educación. Pereira.

López Zuluaga, S. M. (2016). Transcripción de la práctica docente durante la implementación de la unidad didáctica. Universidad Tecnológica de Pereira. Maestría en Educación. Pereira.

MEN. (2013). Sistema colombiano de formación de educadores y lineamientos de política. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

Muriel Henao, N. (2016). Transcripción de la práctica docente durante la implementación de la unidad didáctica. Universidad Tecnológica de Pereira. Maestría en Educación. Pereira.

Mosquera Arango, S. P. (2016). Transcripción de la práctica docente durante la implementación de la unidad didáctica. Universidad Tecnológica de Pereira. Maestría en Educación. Pereira.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. PNA, 47-66.

Ruíz, A., Chavarría, J. y Alpízar, M. (2006). *La escuela francesa de didáctica de las matemáticas y la construcción de una nueva disciplina científica*. Cuadernos de investigación y formación en educación, 1-17.

Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. Reflexiones teóricas para la educación matemática, 5, 2-4.

Serna Calderon, A. P. (2016). Transcripción de la práctica docente durante la implementación de la unidad didáctica. Universidad Tecnológica de Pereira. Maestría en Educación. Pereira.

Strauss, A. & Corbin, J. (2002). Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. Medellín: Universidad de Antioquia.

Extensión del modelo MTSK al dominio estadístico

Pedro **Vidal-Szabó**
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
pedro.vidal@pucv.cl
Soledad **Estrella**
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
soledad.estrella@pucv.cl

Resumen

¿Qué conocimiento especializado ha de tener un profesor de matemática que enseña estadística en el contexto escolar? Las evidencias investigativas sobre la enseñanza de la estadística muestran que persiste un énfasis en el conocimiento procedimental en desmedro del conocimiento conceptual de las ideas fundamentales de la estadística. Con base en una revisión teórica en el área de la *Didáctica-de-la-Estadística* y algunos antecedentes empíricos en escuelas de la V región de Chile, se vinculan las ideas del análisis exploratorio de datos y del ciclo investigativo PPDAC (problema, plan, datos, análisis y conclusiones) para proponer una extensión del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) a uno que se ajuste a la enseñanza y al aprendizaje de la estadística escolar; con el fin de contribuir a la exploración analítica del conocimiento del profesor de matemática que enseña estadística.

Palabras claves: educación estadística, formación de profesores en estadística escolar.

Introducción

La estadística como disciplina ha ganado un espacio en los currículos escolares (Cf., Ben-Zvi & Garfield, 2004; Cobb & Moore, 1997; del Pino & Estrella, 2012; Moore, 1997), asimismo, la didáctica de la estadística ha desarrollado autonomía e independencia (Cf., Zieffler, Garfield & Fry, 2018) con las que ha obtenido resultados investigativos útiles para la formación de profesores. Al respecto nos preguntamos ¿qué conocimiento estadístico y qué conocimiento didáctico del contenido estadístico podrían desarrollarse en la formación del profesor de matemática? A partir del modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Carrillo et al., 2013; Carrillo, Contreras & Flores, 2013), pretendemos levantar una propuesta que entregue directrices sobre ¿qué conocimiento especializado podría considerarse para la formación del profesorado de matemática que enseña estadística en el contexto de la educación primaria?

Aunque algunas comunidades de investigación acrecientan y progresan en el conocimiento especializado referido a la enseñanza para el aprendizaje de la estadística (Cf., Petocz, Reid & Gal, 2018), aún faltan modelos referenciales para la formación de profesores de matemática que enseñan tempranamente la estadística, en cuanto al conocimiento especializado requerido para abarcar la alfabetización estadística y promover el razonamiento estadístico en aprendices que inician su formación escolar. Algunas propuestas de enseñanza y estudios en el área, permiten identificar algunos elementos requeridos en la formación docente; a nivel internacional (e.g., English, 2010, 2012), a nivel nacional y como antecedentes empíricos, se reconocen algunas implementaciones de diseños de enseñanza estadística en algunas escuelas chilenas (e.g., Estrella, 2017, 2018; Estrella, Olfos, Morales y Vidal-Szabó, 2018; Estrella & Vidal-Szabó, 2017; Estrella, Zakaryan, Olfos, Espinoza, 2019).

El modelo MTSK

El modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge)*, en adelante MTSK, ha sido ideado en concordancia teórica y práctica a una especificidad del conocimiento que manifiesta el profesor de matemática en su desempeño docente, ver Figura 1, (Carrillo et al., 2013; Carrillo, Contreras & Flores, 2013).

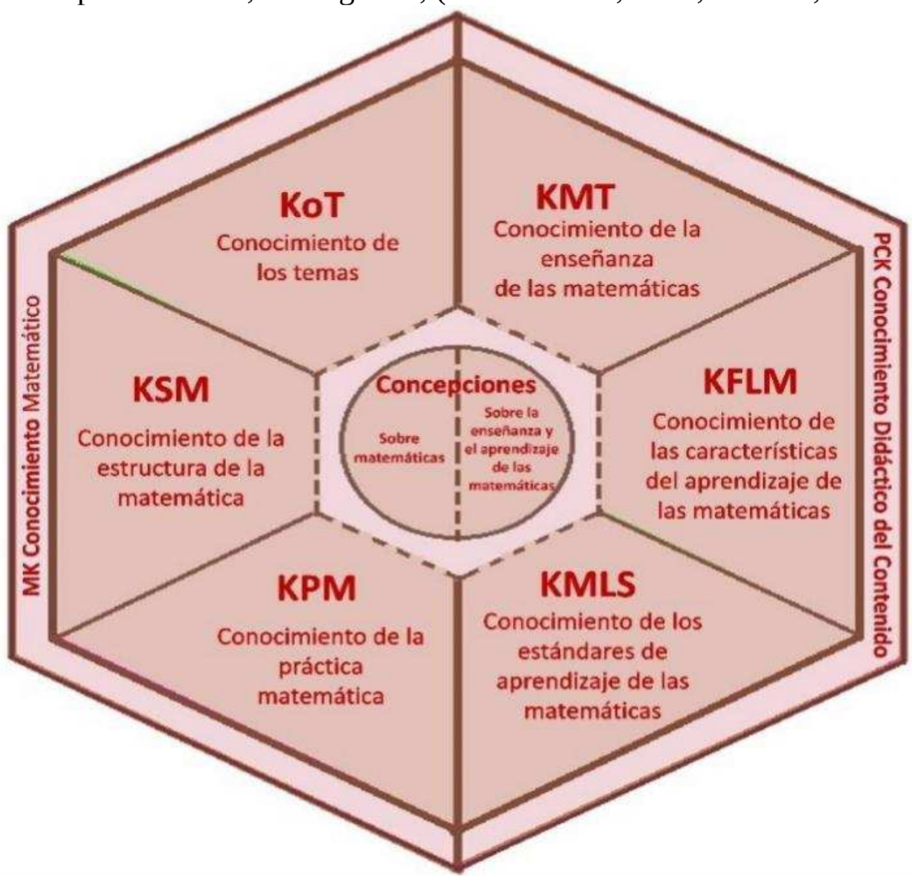


Figura 1. Modelo MTSK (Carrillo et al., 2013).

Se distinguen dos dominios, el dominio MK (conocimiento matemático) y PCK (conocimiento didáctico del contenido), los cuales contienen seis subdominios, tres del dominio

MK —el KoT (conocimiento de los temas), el KSM (conocimiento de la estructura matemática) y el KPM (conocimiento de la práctica de la matemática)— y otros tres del dominio PCK —el KFLM (conocimiento de las características de aprendizaje de matemáticas), el KMT (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas) y el KMLS (conocimiento de los estándares de aprendizaje de matemáticas)—. El modelo MTSK incluye las concepciones (creencias, originalmente), tanto de la matemática como de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

El análisis exploratorio de datos y el ciclo investigativo PPDAC

El análisis exploratorio de datos (EDA) permite explorar el comportamiento de los datos, esto es, pensar, conjeturar y aprender desde los datos, impulsando un análisis inicial, cuya principal característica es ser exploratorio, lo que supone un tratamiento más flexible y un uso más amplio de distintas representaciones. El EDA promueve la búsqueda de regularidades interesantes a través de la exploración de los datos sin restricciones, cuyo análisis resultante está basado únicamente en lo que se ve en los datos y sólo aplica a los individuos y circunstancias para los cuales fueron recolectados, por lo que las conclusiones son informales, sin todavía hacer inferencias formales sobre alguna población (Cf., Tukey, 1977, 1980). Por su parte, Ben-Zvi (2016) propone tres paradigmas en la disciplina estadística, uno de los cuales es EDA.

El ciclo investigativo PPDAC (i.e., *problema*, *plan*, *datos*, *análisis* y *conclusiones*) es un proceso estadístico y como metodología de enseñanza permite estructurar una clase estadística (e.g., Estrella, 2017, 2018; Estrella & Vidal-Szabó, 2017; Franklin et al., 2015; Makar & Fielding-Wells, 2011). El PPDAC contempla un *problema* que requiere un *plan* que permita obtener los *datos* reales para ser respondido, dando inicio al EDA, mediante la elaboración de representaciones y/o la obtención de distintas medidas de resumen, lo que permite *analizar* los datos, se consiguen las *conclusiones* dando respuesta al problema inicial, e incluso, pueden generarse nuevas interrogantes (ver Figura 2).

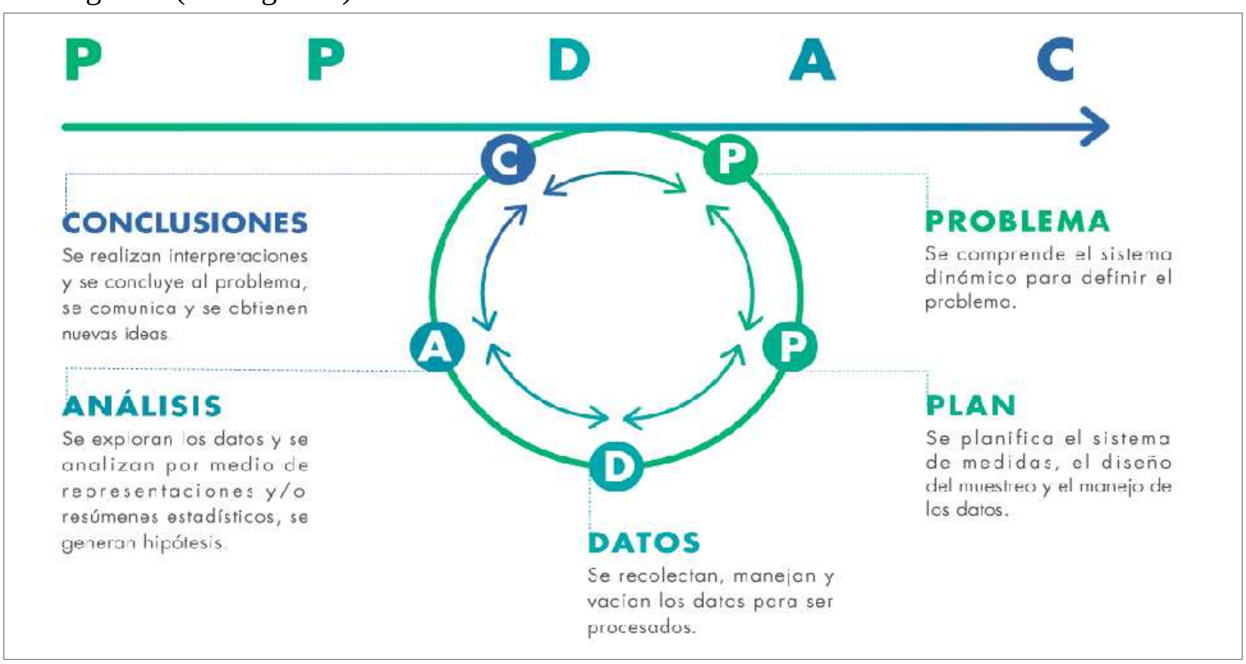


Figura 2. Ciclo PPDAC.

Razonar con datos es complejo y requiere de la imaginación de los sujetos para producir una red de conexiones entre el conocimiento contextual y el estadístico (Pfannkuch & Rubick, 2002). Así, el EDA en diálogo con el ciclo PPDAC permite contrastar las ideas iniciales del estudiante sobre el problema de interés (en un rol de investigador) y el comportamiento real de los datos, lo cual provoca un progreso en la comprensión inicial, e incluso, puede cambiar la forma de cómo se entendían los datos, acentuando algunos atributos y generando nuevas preguntas en concordancia al problema inicial.

Enfoque metodológico

Mediante una revisión de la literatura referida a la *Didáctica-de-la-Estadística*, hemos recabado información para ajustar el modelo MTSK al dominio de la estadística. A continuación, presentamos la propuesta preliminar levantada.

Propuesta de extensión del modelo MTSK al dominio estadístico

Desde el modelo MTSK, consideramos los dominios SK (conocimiento estadístico) y PCK (conocimiento didáctico del contenido). El dominio SK contiene los subdominios KoT estadístico (conocimiento de los temas estadísticos), el KSS (conocimiento de la estructura estadística) y el KPS (conocimiento de la práctica de la estadística). En tanto, el dominio PCK abarca los subdominios: KST (conocimiento de la enseñanza de la estadística), KFLS (conocimiento de las características de aprendizaje de la estadística) y KSLS (conocimiento de los estándares de aprendizaje de la estadística). A continuación, caracterizamos cada uno de los subdominios:

KoT estadístico. El conocimiento de los temas estadísticos considera aspectos fenomenológicos, significados de conceptos o ejemplos específicos que caracterizan a un tema estadístico en particular. La variabilidad, la incertidumbre y el contexto de los datos han de ser considerados transversales a cualquier tema estadístico. Wild, Utts y Horton (2018) indican que la estadística es esencialmente interdisciplinaria, pues los estadísticos o los usuarios de la estadística requieren pensar de forma estadística, matemática y computacional.

KSS. El conocimiento de la estructura estadística abarca la conexión conceptual, en el que han de considerarse las distintas medidas (centro, dispersión, forma, entre otras) y las distintas representaciones de datos con las respectivas conexiones, bajo un cierto contexto específico. Activar este tipo de conocimiento, requiere de un razonamiento estadístico, el cual permite que un sujeto pueda conectar un concepto a otro (e.g., ideas de centro con la dispersión de los datos), o puede combinar ideas acerca de los datos y el azar, también comprender y ser capaz de explicar e interpretar cabalmente los procesos y los resultados estadísticos, según Ben-Zvi y Garfield (2004).

KPS. El conocimiento de la práctica de la estadística precisa sobre el quehacer estadístico, el cual puede reflejarse en el ciclo PPDAC para una investigación empírica con datos. Por ejemplo, Pfannkuch y Wild (2000) realizan una investigación en el que reportan sobre el quehacer estadístico de distintos sujetos (profesionales o usuarios de la estadística), y precisan al ciclo PPDAC como una dimensión del modelo 4-dimensional del pensamiento estadístico.

KST. El conocimiento de la enseñanza de la estadística ha de tener en cuenta los paradigmas EDA, estadística inferencial informal y modelación con sus relaciones (Cf., Ben-Zvi, 2016), también las sugerencias del informe GAISE (Franklin et al., 2007; Aliaga et al., 2012). Este tipo de conocimiento puede tomar al ciclo PPDAC como un referente de diseño de enseñanza para distintos propósitos formativos, en que el trabajo sea con datos reales.

KFLS. El conocimiento de las características de aprendizaje de la estadística refiere al proceso de comprensión de los estudiantes de los distintos contenidos, los errores, dificultades y obstáculos asociados a cada concepto y/o el lenguaje que habitualmente es usado por los estudiantes para expresar ideas estadísticas. Por ejemplo, Ben-Zvi y Garfield (2004) reportan que los estudiantes vinculan la estadística con la matemática y se enfocan en números, cálculos, fórmulas y una única respuesta correcta (i.e., énfasis en el conocimiento procedimental), por lo que se sienten incómodos con el desorden de los datos, las diferentes interpretaciones posibles en función de diferentes supuestos, y el uso de escritura y habilidades de comunicación.

***KSLS*.** El conocimiento de los estándares de aprendizaje de la estadística busca prolongar el conocimiento de los objetivos y estándares de aprendizaje de lo local a lo global, dando acceso a la mejora de la práctica del profesor de matemática que enseña estadística. Así por ejemplo, consultar Franklin et al. (2007, 2015) y Aliaga et al. (2012), entre otros, da la oportunidad de revisar algunas recomendaciones útiles a la hora de crear un diseño de enseñanza estadístico que responda a las necesidades propias de los aprendizajes locales.

Reflexiones finales

Dar respuesta a la pregunta inicial —¿qué conocimiento especializado podría considerarse para la formación del profesorado de matemática que enseña estadística en el contexto de la educación primaria?— requiere considerar los dominios referidos al conocimiento estadístico y al conocimiento didáctico del contenido estadístico, los cuales desglosados en subdominios permiten operacionalizar y especificar cada dominio, pudiendo permitir, por ejemplo, una interconexión entre tales subdominios al diseñar una propuesta de enseñanza para el profesorado en formación, y realizar una exploración del conocimiento del profesor que enseña estadística.

La propuesta de modelo que extiende el modelo MTSK al dominio estadístico, permite precisar los conocimientos que requiere el profesorado que enseña estadística a nivel escolar en primaria —lo cual podría actuar como un referente para el formador de profesores— y contribuir a la enseñanza de la estadística, diferenciándola de la enseñanza de la matemática, permitiendo mayores oportunidades de aprendizaje estadístico.

Proyectamos que la extensión del modelo MTSK al dominio estadístico podría considerar las concepciones que posee el profesorado, respecto a la estadística, a su enseñanza y su aprendizaje en el ámbito de la educación primaria, pues esto permitiría progresar en el conocimiento especializado del profesorado en el área de la estadística escolar en tanto se aborden ciertas dificultades de índole epistemológica, cognitiva o didáctica.

Referencias y bibliografía

Aliaga, M., Cobb, G., Cuff, C., Garfield, J., Gould, R., Lock, R., ..., Velleman, P. (2012). *Guidelines for assesment and instruction in statistics education (GAISE) college report*. Alexandria, VA: American Statistical Association. Recuperado de http://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/2005GaiseCollege_Full.pdf#page=4

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: goals, definitions, and challenges. En Autores (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 3–15). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, Springer.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2985–2994). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

Carrillo, J., Contreras, L.C., y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.), *Investigacion* *en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193–200). Granada: Editorial Comares.

Cobb, G., & Moore, D. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly*, *104*(9), 801–823.

English, L. (2010). Young children’s early modelling with data. Mathematics Education Research Journal, *22*(2), 24–47. doi: 10.1007/BF03217564

English, L. (2012). Data modeling with first-grade students. Educational Studies in Mathematics, *81*(1), 15–30. doi: 10.1007/s10649-011-9377-3

Estrella S. (2018) Data Representations in Early Statistics: Data Sense, Meta-Representational Competence and Transnumeration. En A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris & E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in Early Childhood and Primary Education. Early Mathematics Learning and Development* (pp. 239–256). Singapore: Springer. doi: 10.1007/978-981-13-1044-7_14

Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En A. Salcedo (Ed.), Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI (pp. 173–194). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.

Estrella, S., y Vidal-Szabó, P. (2017). Alfabetización estadística a través del Estudio de Clase: representaciones de datos en primaria. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *78*, 12–17.

Estrella, S, Olfos, R., Morales, S., y Vidal-Szabó, P. (2018). ETM en el dominio de la estadística temprana: dos casos de estudiantes de grado 2 y sus representaciones de datos. MENON: Journal of Educational Research, 4, 93–109. Recuperada de http://www.edu.uowm.gr/site/content/menon-journal-educational-research-4th-thematic-issue-november-2018

Estrella, S., Zakaryan, D., Olfos, R., & Espinoza, G. (2019). How teachers learn to maintain the cognitive demand of tasks through Lesson Study. *Journal of Mathematics Teacher Education*. Recuperado de https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-018-09423-y

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assesment and instruction in statistics education (GAISE) report: a preK-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association. Recuperado de http://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEPreK-12_Full.pdf#page=5

Franklin, C., Bargagliotti, A., Case, C., Kader, G., Scheaffer, R., & Spangler, D. (2015). *The statistical education of teachers*. Alexandria, VA: The American Statistical Association.

Moore, D. S. (1997). New pedagogy and new content. The case of statistics. *International Statistical Review*, *65*(2), 123–165. Recuperado de https://iase-web.org/documents/intstatreview/97.Moore.pdf

Petocz, P., Reid, A., & Gal, I. (2018). Statistics Education Research. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 71–99). doi:10.1007/978-3-319-66195-7

Pfannkuch, M., & Rubick, A. (2002). An exploration of students’ statistical thinking with given data. *Statistics Education Research Journal*, *1*(2), 4–21. Recuperado de https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ1(2).pdf#page=6

Pfannkuch, M., & Wild, C. (2000). Statistical thinking and statistical practice: Themes gleaned from professional statisticians. *Statistical science*, *15*(2), 132–152. doi:10.1214/ss/10092 12754

Tukey, J. W. (1977). *Exploratory data analysis*. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Co.

Tukey, J. (1980). We Need Both Exploratory and Confirmatory. *The American Statistician, 34*(1), 23–25. doi: 10.2307/2682991

Wild, C., Utts, J., & Horton, N. (2018). What Is Statistics? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 5–36). doi:10.1007/978-3-319-66195-7

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223–248. Recuperado de http://www.mty.itesm.mx/dtie/deptos/m/ma00-835/Articulos-otros/Wild-y-Pfannkuch-1999-Stadistical-Thinking.pdf#page=2

Zieffler, A., Garfield, J., & Fry, E. (2018). What Is Statistics Education? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 37–70). doi:10.1007/978-3-319-66195-7.

Mapas conceituais como ferramenta para reflexão do professor de matemática

Mapas conceptuales como herramienta para la reflexión del profesor de matemáticas

Claudete **Cargnin**
Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
cargnin@utfpr.edu.br

Adriele Carolini **Waideman**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (PPGMAT)
Brasil
adrielecarolini@hotmail.com

Silvia Teresinha Frizzarini
Universidade do Estado de Santa Catarina
Brasil
stfrizzarini@hotmail.com

Resumo

Esse artigo tem por objetivo apresentar reflexões de professores ao elaborarem um mapa conceitual durante o preparo de uma aula, visando divulgar a importância de o docente refletir para a ação, na ação e sobre a ação pedagógica, ou seja, ter uma prática reflexiva. Essa atividade foi um desafio proposto a alunos, professores em exercício, da disciplina Introdução à Didática da Matemática do Programa de Mestrado Profissional em ensino de Matemática, no primeiro semestre de 2017, cujas reflexões e análises compuseram um relatório entregue no final do curso. Nesse contexto, o mapa conceitual foi utilizado como ferramenta de avaliação da prática. Os professores assinalaram a necessidade de maior reflexão sobre o assunto para a construção do mapa, além de maior análise sobre as ligações entre os conteúdos abordados, acarretando aulas com maior qualidade e profundidade, deixando de ser uma cópia fiel do livro texto utilizado em sala de aula.

Palabras clave: formação continuada de professores; mapa conceitual; matemática; didática; prática reflexiva.

Introdução

Em dicionários da língua portuguesa, a palavra “formação” se refere ao ato ou efeito de formar, de constituir. Ao ajuntarmos a palavra “continuada” nos referimos ao ato de formar-se continuamente. No magistério, assim como em outras profissões, a formação continuada é imprescindível, seja para aprender a lidar com os discentes que a cada dia chegam com novos conhecimentos e habilidades, seja para atualizar-se em relação às ferramentas metodológicas e didáticas para utilização em sala de aula.

Apesar dessa importância, no Brasil, ainda há muito a ser feito, principalmente pensando que essa formação deve trazer benefícios para a sala de aula, em prol da qualidade da educação. Segundo Ribas (2000), são poucos os efeitos surtidos pela formação continuada oferecida pelos órgãos do Estado aos professores da rede pública; apesar de algumas mudanças positivas, existe a descontinuidade das propostas implementadas pelos governos, sem atender às necessidades da escola e dos professores, pois falta uma política séria de capacitação. No entanto, o ato do professor ter que refletir sobre suas ações em sala de aula, na ação, para a ação e sobre a ação, contribui para o seu desenvolvimento profissional e pessoal. Sendo assim, este artigo tem por objetivo apresentar reflexões sobre as mudanças comportamentais de professores, em sala de aula, a partir da utilização de mapas conceituais no processo de elaboração e organização dessas aulas.

Os dados utilizados nesse artigo foram obtidos no ano letivo de 2017, com uma turma de 15 alunos de um programa de pós-graduação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, destinado a professores que efetivamente atuam em sala, na disciplina de Introdução à Didática da Matemática. Foi usada a seguinte questão norteadora: quais as percepções de um professor sobre sua prática profissional ao se defrontar com a elaboração de um mapa conceitual?

Divulgar as reflexões de tais professores, mesmo com recortes, pode fazer com que outros docentes se sintam impelidos a trilhar por novos caminhos, em prol da qualidade na educação matemática, pois, como afirmam Oliveira e Serrazina (2002, p. 32):

> Quando se pensa em ensino da Matemática, a reflexão pode partir de diversos aspectos, uns relativos à organização e gestão da sala de aula, outros relativos à compreensão matemática, isto é, à medida que se ‘conversa reflexivamente com a situação’ vai-se sendo capaz de tornar explícito o seu conhecimento matemático—falar sobre os procedimentos e não apenas descrevê-los (OLIVEIRA & SERRAZINA, 2002, p.32).

Durante a disciplina, como o grupo participante não conhecia os mapas conceituais, um mapa foi elaborado e discutido coletivamente, após isso, para cada teoria estudada (a saber: Teoria de Situações Didáticas, Teoria de Registro de Representação Semiótica e Teoria dos Campos Conceituais) os professores-cursistas estudavam-na previamente e apresentavam sua síntese em um mapa conceitual no dia da aula. Em paralelo, os cursistas foram convidados a utilizarem os mapas conceituais para preparar as aulas que ministravam e compartilhar suas percepções e reflexões num texto coletivo, elaborado na ferramenta wiki do MOODLE (acrônimo de "Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment”, software livre executado em ambiente virtual). São os mapas apresentados neste texto que são retratados nesse artigo.

A utilização de mapas conceituais na Educação Matemática

Os mapas conceituais (MC) são ferramentas bidimensionais cuja finalidade é organizar e representar o conhecimento que está sendo construído por um indivíduo em um dado momento. Isso é feito por meio da apresentação de conceitos-chave e relações entre tais conceitos, escritos em proposições chamadas de frases de ligação, as quais unem dois conceitos quaisquer do mapa (CARGNIN, 2013).

A utilização dessa ferramenta em Educação Matemática ainda está em um processo de desenvolvimento, entretanto, pesquisas como as de Waideman e Cargnin (2018), Cargnin e Dias (2017), Pivatto e Silva (2014), Cargnin (2013), Cargnin e Barros (2013), Souza e Burovitch (2010), entre outros, indicam sua potencialidade para acompanhamento da construção do conhecimento discente, bem como para avaliação. Em áreas como Física e Química a utilização de mapas conceituais como uma ferramenta tanto de ensino quanto de aprendizagem parece estar mais avançada.

Um mapa conceitual tem como característica a hierarquização, na qual os conceitos mais gerais ficam dispostos no topo, seguido por desdobramentos, indicando uma diferenciação progressiva. È interessante notar que o MC elaborado por um indivíduo é único, pois retrata a forma e ligações que esse indivíduo faz em relação a um determinado tema. Contudo, as ligações cruzadas e a reconciliação integrativa que se apresentam, ou não, em um MC, desvelam o modo de apropriação do conhecimento pelo sujeito que o elabora. Nesse sentido, o MC pode agir como uma ferramenta de aprendizagem, ou de acompanhamento de uma conceitualização, ou ainda, como auxiliar na elaboração de uma aula.

Na diferenciação progressiva "um determinado conceito é desdobrado em outros conceitos que estão contidos (em parte ou integralmente) em si" (TAVARES, 2007, p.73), enquanto que na reconciliação integrativa

um determinado conceito é relacionado a outro aparentemente díspar. Um mapa conceitual hierárquico se ramifica em diversos ramos de uma raiz central. Na reconciliação integrativa um conceito de um ramo da raiz é relacionado a um outro conceito de outro ramo da raiz, propiciando uma reconciliação, uma conexão entre conceitos que não era claramente perceptível (TAVARES, 2007, p.74).

O ponto de vista dos professores investigados

Para o presente artigo, apresentamos algumas reflexões motivadas pela utilização de mapas conceituais para a preparação de uma aula, bem como nas implicações positivas que a análise de um mapa conceitual feita por uma colega de curso pode trazer. Para manter o anonimato, os autores serão nomeados simplesmente por P com um índice para diferenciar cada professor.

O mapa da Figura 1, por exemplo, foi feito pela professora P_1 tendo como base o livro didático adotado em sua escola.

A própria autora do mapa, quando foi analisar sua construção, disse "[…]percebi que fiquei muito presa no livro ao construir o mapa e isso fez com que meu mapa ficasse pequeno e com poucas informações. Após concluir, pensei que poderia buscar conceitos e informações em outros lugares, pois assim, construiria um mapa mais completo […], a maior dificuldade foi nas frases de ligação".

Perceba que nesse processo construtivo, a professora sentiu necessidade de aprofundar seus conhecimentos sobre o tema, e mesmo tendo formação em matemática, relatou dificuldades em escrever as frases de ligação entre os conceitos, indicando que a construção de um mapa conceitual por professores pode sim se tornar uma ferramenta útil para reflexão e formação continuada. Nesse momento, entram em cena a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa ajudando o docente a refletir sobre o conteúdo que ensina. O depoimento de P_1 corrobora Oliveira e Serrazina (2002, p.29) quando as autoras afirmam que: "O conceito de **prática reflexiva** surge como um modo possível dos professores interrogarem as suas práticas de ensino. A reflexão fornece oportunidades para **voltar atrás e rever** acontecimentos e práticas" (grifo nosso). Defendemos que o uso de mapas conceituais proporciona a reflexão sobre a prática, como pode ser observado no depoimento de P_1.

Em relação à questão do livro didático, esse depoimento vai de encontro às conclusões da pesquisa de Frison et al (2009) sobre a relação que o professor tem com ele: "A pesquisa mostra que o livro didático é utilizado pela maioria dos professores como instrumento principal que orienta os conteúdos que devem ser desenvolvidos, a seqüência desses conteúdos, as atividades de aprendizagem e a avaliação para o ensino" (FRISON et al, 2009, s/p). Com isso, cabe a pergunta: será que em uma década a relação dos professores com o livro mudou e P_1 é um caso isolado? Talvez não. Nesse contexto, o fato de o professor ter que pensar para fazer um mapa conceitual sobre um assunto/conteúdo favorece confrontos de ideias e uma maior reflexão sobre as relações envolvidas, consequentemente proporcionando uma aprendizagem mais efetiva, pois como afirma Carabetta Junior (2-13, p.442):

que a aprendizagem de conceitos seja efetiva, é necessária a conscientização do professor de que ele é o elemento responsável por conduzir o aluno na estruturação do conhecimento. E que, para isto, deve dispor de uma prática pedagógica que torne significativos os conteúdos trabalhados e que realize a interação entre o que vai ser aprendido com a estrutura cognitiva do indivíduo por um processo de assimilação entre antigos e novos significados, visando possibilitar a diferenciação cognitiva.

Na disciplina em que o desafio de criar mapas ao planejar uma aula foi proposto, com autorização dos participantes do curso, os mapas construídos foram disponibilizados[1] para avaliação dos demais colegas de turma, visando incentivar o desenvolvimento do senso crítico e reflexões mais aprofundadas sobre os temas. Sobre o mapa da Figura 1, a professora P_2 analisou "*poderíamos propor algumas mudanças [...] acrescentar os símbolos que os representam como: N, Z, Q, I [...] fazer um conectivo ligando o conjunto dos números naturais, inteiro, racional e irracional ao único conceito "conjunto reais" para os alunos entender que todos esses conjuntos formam o único conjunto dos números Reais"*.

Por meio desse confronto de ideias e reflexões, os professores, acreditamos, estavam efetiva e continuamente em formação. O fato de analisar a produção do outro fez com que cada participante refletisse os conteúdos em tela e sobre a maneira pela qual o abordavam em sala, ou seja, estavam refletindo para a ação ao mesmo tempo em que refletiam sobre a ação. Segundo Oliveira e Serrazina (2002, p.31), "É ao reflectir sobre a acção que se consciencializa o conhecimento tácito, se procuram crenças erróneas e se reformula o pensamento".

[1] Os arquivos foram disponibilizados a todos os cursistas por meio da ferramenta Wiki, do MOODLE institucional.

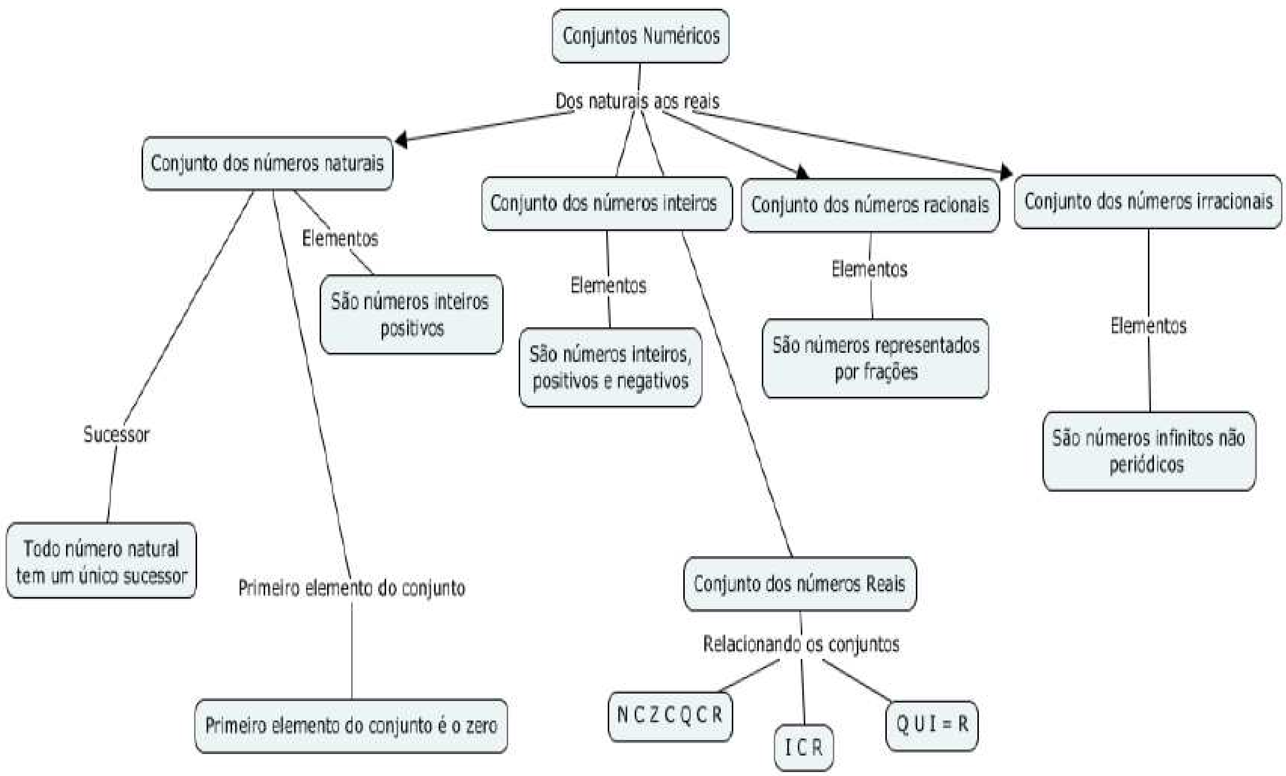


Figura 1. mapa conceitual sobre conjuntos numéricos da professora P_1.

A professora P2 relatou que a construção de um mapa conceitual permite "*conhecer a fundo tal conteúdo*", o que acarreta em questionamentos como "*quais conceitos estão interligados? Como estão ligados?*". Relata ainda que desenvolveu um mapa sobre formas geométricas, porém teve dificuldades quanto aos conectivos e em relação a alguns conceitos propriamente. Note que a partir desse movimento de construção do mapa ao preparar uma aula, a professora manifestou reflexões para a ação, o que, provavelmente, promoverá um tratamento teórico mais consistente em sala de aula.

Nesse mesmo sentido, comenta a professora P_3: "Essa experiência, sendo o meu primeiro mapa conceitual sozinha, foi estranha, escolhi um conteúdo que eu iria dar aula, derivadas de funções de duas variáveis, e embora conceitos estivessem claro na minha cabeça, ao realizar o mapa, percebi que talvez não estivesse tanto assim, sabendo mais o processo mecânico, mas não o real significado, ou até mesmo, as ligações entre os conceitos. Portanto o meu MC[mapa conceitual] ficou mais um esquema, sem entrelaçamentos entre os conceitos".

Esses depoimentos apresentados, a nosso ver, ressaltam que, por melhor que tenha sido a graduação do professor, ele sempre está em formação e precisa buscar novos conhecimentos ou compreensões, e a elaboração de um mapa conceitual favorece essa revisão por, justamente, incitar reflexões que nem sempre são realizadas durante a prática efetiva.

A Figura 2 retrata a apresentação final de um mapa conceitual sobre potenciação, elaborado por P_4, após discussão coletiva sobre como os expoentes positivos e negativos relacionavam-se com as propriedades de multiplicação e divisão.

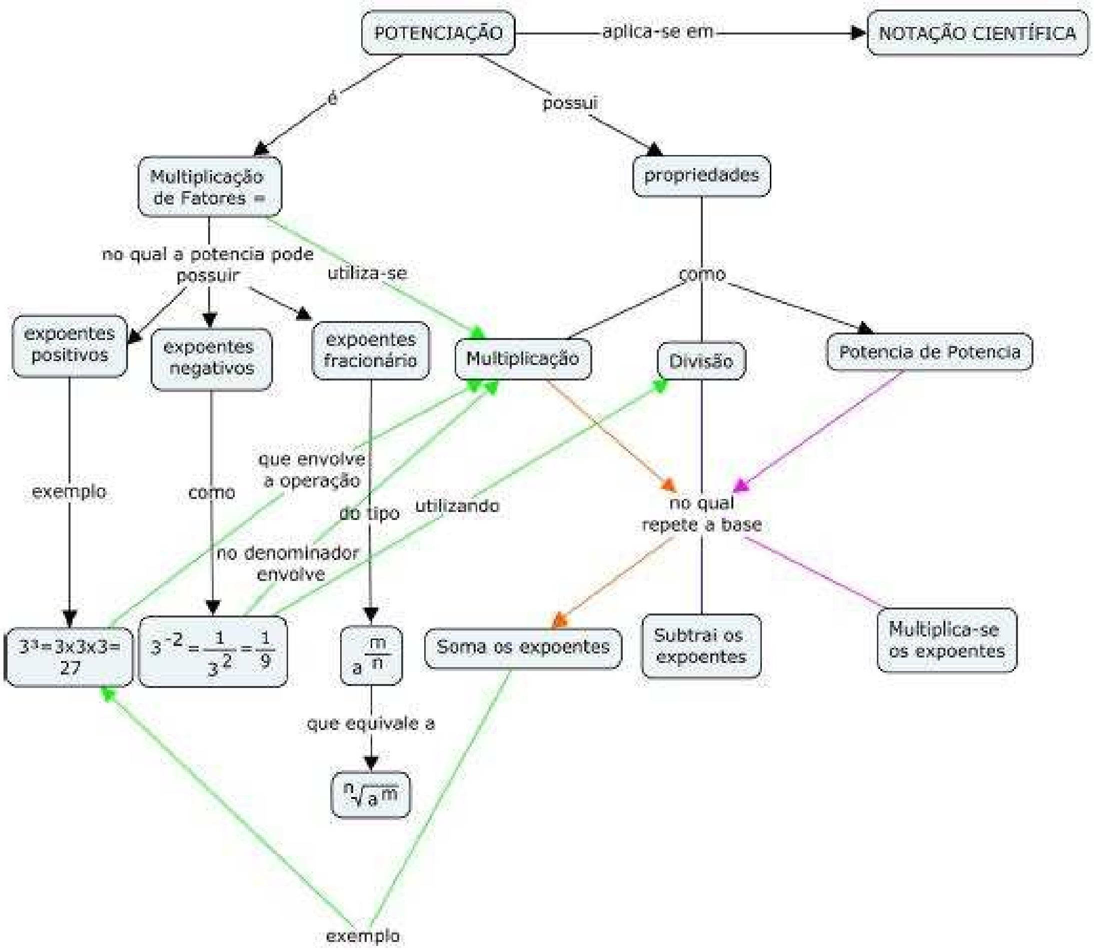


Figura 2. Versão final do Mapa sobre potenciação elaborado por P_4

Sobre a contribuição dos mapas, o professor P_5 afirmou: "O mapa conceitual e uma maneira eficaz de verificar se a aprendizagem ocorreu de maneira efetiva. É um instrumento didático rico que aborda conceitos, relações entre conceitos e contribui para a organização dos conteúdos". P_6 complementa: "Na elaboração de um mapa conceitual, o mesmo leva a pesquisar além do que foi abordado, sendo que para relacionar um conceito ao outro o aluno sempre deve ter atenção ao conectivo (palavra que serve de elo entre um conceito e outro) aumentando ainda mais o conhecimento adquirido pelo aluno". P_7 e P_8 corroboram P_6 quando comentam que tiveram que pesqusiar muito para montarem um mapa sobre figuras planas, já que o livro didático usado como base apresentava o conteúdo de forma muito sucinta.

A professora P_9 relatou a utilização de mapas conceituais com um aluno sobre as equações polinomiais, destacando o aumento do interesse discente em compreender como os conceitos se relacionavam. Segundo a professora, trabalhar com os mapas facilitou explorar aspectos que ainda não estavam suficientemente claros para o estudante e observar quais novas ligações entre os conceitos poderiam ser efetuadas.

Em relatório conjunto produzido pelas professoras P_9, P_{10} e P_{11}, elas afirmam: "Ao construir o mapa conceitual na aula, foi possível verificar claramente seu caráter epistemológico uma vez que obtém-se maior clareza do conteúdo trabalhado, percebemos que as ideias se organizam e isto fica muito claro visualmente. Construir em colaboração também enriqueceu o trabalho uma vez que as visões se confrontaram e passamos a perceber o outro, como ele pensou o assunto”. Mais adiante no relatório, as autoras reforçam: “construir mapas coletivamente ou em duplas pode se tornar uma atividade enriquecedora uma vez que proporciona trocas enriquecedoras entre os participantes, instigando o aprofundamento de conceitos”.

Por fim, concordamos com Carabetta Junior (2013, p.443) quando ele diz que o mapa conceitual “constitui uma estratégia pedagógica de grande relevância no ensino para a construção de conceitos científicos pelos alunos, ajudando-os a integrar e relacionar informações, atribuindo, assim, significado ao que estão estudando”.

Considerações Finais

Esse artigo teve por objetivo apresentar reflexões de professores acerca das atitudes em sala de aula a partir da construção de um mapa conceitual sobre um determinado conteúdo (escolhido pelo professor), antes de ministrá-lo.

Percebeu-se, pelos relatos docentes, que a necessidade de criação de um mapa conceitual favoreceu a prática reflexiva, já que, a partir disso, alguns professores mencionaram consultar outras fontes antes de ministrar uma aula. Além disso, algumas perguntas essenciais como “como esses conceitos se relacionam?” foram feitas, talvez pela primeira vez. Alguns dos professores investigados nessa pesquisa indicaram surpresa ao não conseguirem fazer o mapa rapidamente. Foi nesse processo de construção que perceberam que muitos “detalhes” importantes dos conteúdos estavam sendo deixados de lado (isso foi mencionado especialmente por docentes que há muito tempo trabalhavam a mesma disciplina).

Os professores indicaram dúvidas e dificuldades ao elaborarem as frases de ligação entre dois conceitos no mapa conceitual, entretanto, é salutar afirmar que esse pode ter sido um movimento inicial de repensar as aulas e o conteúdo que a envolve. Ao final do curso, diversos professores afirmaram já terem mudado seu modo de “enxergar” os conteúdos matemáticos e que já estavam utilizando estratégias diferentes para trabalhá-los, porque começaram a perceber relações diferentes entre os conceitos presentes em cada conteúdo. De modo geral, os professores que fizeram essa disciplina atestaram aumento na qualidade das suas aulas, a partir do momento que começaram a usar mapas conceituais para sua elaboração e preparação.

Finalizamos reconhecendo os atuais desafios docentes para a sala de aula, entretanto, ressaltamos a importância de reflexão sobre a prática, de uma prática docente reflexiva, a que a elaboração de um mapa conceitual pode proporcionar.

No curso citado neste artigo, muitos professores terminaram dizendo que as aulas não seriam mais as mesmas, que o próprio agir frente às dificuldades dos alunos recebeu um outro olhar e que puderam perceber suas limitações, inclusive em relação aos conteúdos que ensinavam. Esperamos que essa ferramenta chamada “mapa conceitual” possa ser útil a outros professores, e, a partir dela, muitos outros estudantes tenham acesso a uma educação matemática de maior qualidade.

Referências

Carabetta Junior, V. (2013) A utilização de mapas conceituais como recurso didático para a construção e inter-relação de conceitos. *Revista Brasileira de Educação Médica, 37(3), 441-447.*

Cargnin, C. (2013). *Ensino e aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real*:

possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a teoria dos Registros de Representações Semióticas. 2013. 416 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

Cargnin, C., & Barros, R.M.O. (2013). O uso de mapas conceituais em aulas de Cálculo. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia.*, 6,1,117-128.

Cargnin, C., & Dias, B.C. (2017). Reflexões sobre o ensino de matemática numa cidade do interior do Estado do Paraná – Brasil. *Interacções, 46, 131-145.* Disponível em http://www.eses.pt/interaccoes.

Frison, M.D. et al. (2009). Livro didático como instrumento de apoio para construção de propostas de ensino de ciências naturais. *Anais do VII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências*, Florianópolis, Brasil. Disponível em http://posgrad.fae.ufmg.br/posgrad/viienpec/pdfs/425.pdf Acesso em 24 out. 2018.

Oliveira, I., & Serrazina, L. (2002). *A reflexão e o professor como investigador*. Disponível em http://apm.pt/files/127552_gti2002_art_pp29-42_49c770d5d8245.pdf Acesso em 28 out. 2018.

Pivatto, W. & Silva, S.C.R. (2014). Mapas conceituais: estratégias pedagógicas para a construção de conceitos históricos na disciplina de matemática. *Zetetiké*, 22, 1, 115-141.

Ribas, M.H. (2000). *Construindo a competência*: processo de formação de professores. São Paulo: Olho d'água.

Souza, N.A., & Boruchovitch, E. (2010). Mapas Conceituais: estratégias de ensino/ aprendizagem e ferramenta avaliativa. *Educação em Revista*, 26,3, 195-218.

Tavares, R. Construindo Mapas Conceituais. (2007). *Ciência & Cognição*, 12, 72-85.

Waideman, A. C. & Trevisan, A. L., & Cargnin, C. *Reflexões sobre o uso de Mapas Conceituais no Ensino de Derivadas nas Aulas de Cálculo Diferencial e Integral*. 2018. (No Prelo).

XV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Reflexões sobre a formação de professores na perspectiva do ensino de matemática para uma aluna com Síndrome de Jacobsen

Ana Paula de Souza **Colling**
Universidade Feevale
Brasil
apcolling1@gmail.com
Marlise **Geller**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
marlise.geller@gmail.com

Resumo

Este artigo é um recorte de uma tese de Doutorado com o objetivo de investigar o processo de aprendizagem de uma aluna diagnosticada com Síndrome de Jacobsen na perspectiva da educação matemática e mediado por diferentes sujeitos. A pesquisa qualitativa, do tipo estudo de caso, tem como participante central a aluna que, entre as limitações decorrentes da síndrome, apresenta comprometimentos cognitivos que dificultam a aprendizagem de conceitos matemáticos. Neste recorte trazemos a discussão sobre o ensino de matemática para alunos com deficiência, buscando sua inclusão escolar, de modo que os resultados apontam para a importância de professores preparados, com formação adequada e contínua, que contribuam na construção de uma escola que respeite as diferenças e busque o desenvolvimento das potencialidades de todos.

Palavras chave: ensino de matemática, formação de professores, síndrome de jacobsen, inclusão escolar, educação matemática inclusiva, estudo de caso.

Introdução

Todos têm direito à educação e, deste modo, a inclusão escolar possibilita o desenvolvimento dos alunos, por meio de atividades que busquem enfatizar as potencialidades, respeitando as dificuldades e limitações, estas observadas de maneira individual, com o objetivo de propor práticas pedagógicas que oportunizem a aprendizagem de todos.

O recorte da investigação origina-se da tese de Doutorado “Olhares da inclusão: estudo sobre o processo de aprendizagem matemática de uma aluna com Síndrome de Jacobsen”, com foco na formação de professores para o trabalho com classes inclusivas, em especial os professores de matemática, buscando a construção de conceitos matemáticos e as habilidades necessárias para sua aprendizagem, visando identificar as limitações nos processos de formação voltados para o ensino para alunos com deficiência.

A inclusão escolar, de acordo com Machado (2008), vem romper com o paradigma educacional que privilegia o conhecimento científico e classifica os alunos em níveis de desenvolvimento, propondo maneiras de pensar a escola a partir de novas formas de concepção do conhecimento escolar, das avaliações e dos alunos. Desse modo, a inclusão escolar pode ser vista como um desafio, principalmente para os professores, sendo uma tarefa que exige dedicação, planejamento diferenciado, pesquisa, entre outros fatores que trazem a importância de estudos sobre a temática, que sirvam como ferramenta de apoio aos professores e comunidade escolar para o cotidiano nas escolas. No Brasil, as mudanças relacionadas a educação inclusiva geraram a busca por métodos de ensino que auxiliem na aprendizagem dos alunos, com modelos eficazes, renovados e flexíveis, abertos as necessidade educativas de todos.

Contudo, neste trabalho, trazemos considerações sobre a necessidade de professores com formação adequada, que estejam preparados para os desafios das salas de aulas inclusivas, a partir das análises realizadas com os professores que trabalham com a aluna, diagnosticada com uma síndrome rara, buscando uma escola que assuma a diversidade e reconheça o direito à diferença como enriquecimento a comunidade escolar.

Os desafios da escola inclusiva brasileira

A Política Nacional de Educação, na perspectiva da Educação Inclusiva, trouxe consigo um novo cenário para as escolas brasileiras, criando novos espaços que impulsionaram as práticas inclusivas nas escolas públicas e propondo novos programas de formação continuada para professores da Educação Básica.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), Brasil (1996), traz que os sistemas de ensino devem assegurar aos alunos com deficiência currículos, métodos, técnicas, recursos educativos e organização específica que atendam suas necessidades. Entende-se por inclusão a garantia de acesso contínuo ao espaço comum da vida em sociedade, por todos, sendo esta orientada por relações de acolhimento à diversidade humana e aceitação das diferenças entre os indivíduos, sendo a inclusão escolar e a garantia de acesso aos conteúdos básicos que a escolarização deve proporcionar a todos, parte integrante deste processo.

A escola inclusiva, consciente de sua função, deve se colocar a disposição do aluno, tornando-se um espaço que permita que os alunos com deficiência atinjam os objetivos da educação geral. Assim, são necessárias melhorias contínuas na estrutura e funcionamento dos sistemas de ensino, com qualificação crescente do processo pedagógico para educação na diversidade. Entre as ações necessárias está a formação de professores para o trabalho em salas de aulas inclusivas, sendo que estes devem ser capazes de lidar com a diferença, sabendo trabalhar em equipe e estando em constante busca por métodos diferenciados de ensino.

Machado (2008) traz que a escola privilegia o conhecimento científico e, de acordo com a autora, a escola inclusiva rompe com esse paradigma educacional, apontando outras maneiras de pensar dentro da escola, observando novas formas de concepção do conhecimento escolar, das avaliações e, principalmente, dos alunos. Todo aluno é capaz de aprender, com diferentes tempos e caminhos, desse modo, exigindo dos professores a reflexão quanto as suas práticas e fazendo com que estes acreditem nas possibilidades de aprendizagem de todos os alunos, proporcionando melhores práticas e considerando a liberdade de aprender de cada indivíduo, fazendo emergir a complexidade nas escolas e trazendo novas e diferentes formas de manifestação da aprendizagem.

Dentre os desafios da inclusão escolar está a nova postura que se deve assumir dentro dos sistemas de ensino, com currículos, avaliações, métodos e estratégias que promovam a inclusão de todos em suas salas de aula e comunidade escolar, valorizando a diferença, de modo a oferecer uma educação de qualidade para todos, percebendo que o ensino aos alunos com deficiência deva ser concebido como um conjunto de recursos e ações que a escola deve dispor para atender a todos, contrastando com a visão anterior de um sistema de ensino paralelo e segredado (GLAT; FERNANDES, 2005).

A inclusão escolar não tem se mostrado um processo fácil e muitos alunos com deficiência permanecem nas escolas sem que sejam oferecidas condições de aprendizagem iguais a todos e, desse modo, há a necessidade de mudanças que vão além das escolas e salas de aula, redefinido práticas pedagógicas e educacionais que sejam compatíveis com a inclusão escolar, entre elas está a formação de professores para o trabalho em classes inclusivas, com reconstrução das práticas e reestruturação curricular, repensando esta prática a cada momento, encontrando meios de promover um ensino de qualidade para todos.

A formação de professores de matemática no contexto da escola inclusiva

Os alunos aprendem de formas diferentes e os professores devem estar preparados para o desafio da diversidade em sala de aula promovendo a adequada adaptação das atividades e avaliações, respeitando o tempo e o limite de cala aluno, oferecendo condições para que todos atinjam os objetivos traçados. Nas classes inclusivas os professores tem papel fundamental, sendo necessário que estes aceitem o aluno com deficiência, enxergando suas limitações e promovendo a efetiva inclusão na sua turma.

Canepa (2012) traz que o medo do desconhecido, daquilo que não fomos preparados para enfrentar, torna a inclusão um desafio para todos e, no caso dos professores, estes são levados a repensar sua prática e vivenciar uma realidade diferente daquelas conhecidas, enfrentando seus medos, buscando novas formas de ensinar e aprender com seus alunos e enxergar a todos, procurando desenvolver capacidades individuais.

A formação de professores de Matemática no Brasil, de acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática (BRASIL, 2001), trazem que os cursos de licenciatura têm como objetivo principal formar professores para a Educação Básica, assim, espera-se que o egresso destes cursos tenha visão quanto ao seu papel social de educador, sendo capaz de se inserir em qualquer realidade e contribuindo para a aprendizagem da Matemática, oferecendo aos seus alunos, além de formação para o exercício da cidadania, oportunidades de conhecimento acessível à todos, com consciência do seu papel frente a superação dos preconceitos relacionados ao ensino-aprendizagem da disciplina.

A formação de professores de Matemática deve contemplar uma parte comum, com conteúdos presentes na Educação Básica, tais como Álgebra, Geometria e Análise, além de conteúdos afins à Matemática, como Ciências da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática. Ainda, devem ser incluídos conteúdos profissionais, com estudos de diretrizes nacionais para a educação e formação de professores, com incentivo ao uso de tecnologias que contribuam para o ensino, sendo os conteúdos relacionados a educação inclusiva estudados dentro da parte comum, nos conteúdos considerados profissionais.

Ramos (2010) afirma que é fundamental que os professores que trabalham em classes inclusivas sejam especialistas em Educação Especial, de modo que estes estejam cientes de seu papel em oferecer planejamentos ricos em recursos didáticos, promovendo trocas com a equipe pedagógica e estudando sobre o tema da inclusão.

O professor tem papel fundamental no contexto inclusivo das escolas; porém, observamos que a formação deve ser contínua e, de acordo com a LDBEN (BRASIL, 1996), são considerados dois perfis de professores para o trabalho em classes inclusivas: professor de classe comum capacitado, que comprove que em sua formação, de nível médio ou superior, foram incluídos conteúdos ou disciplinas sobre educação especial, e professor especializado em educação especial, que desenvolveu competências para identificar as necessidades educacionais dos alunos com deficiência, seja por formação em licenciatura em educação especial ou complementação de estudos ou pó-graduação em áreas específicas da educação especial.

Por fim, levando em consideração os desafios dos professores de Matemática em relação à inclusão na escola regular, bem como aspectos relacionados a formação deste professor, destacamos que devem ser oferecidas oportunidades de formação continuada, inclusive em nível de especialização, pelas instancias educacionais da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, sendo que o sucesso da inclusão escolar depende, de acordo com Veltrone e Mendes (2007), em grande parte do professor de classe comum capacitado, o qual deve estar capacitado para responder as diferentes necessidades de seus alunos, sendo capaz de propor situações de ensino-aprendizagem que favoreçam à todos.

Metodologia

A investigação consiste em uma pesquisa qualitativa, do tipo estudo de caso, visto que, de acordo com Yin (2010), permite investigar a realidade preservando suas características a partir do conhecimento de eventos da vida real sem, contudo, manipulá-los.

A metodologia do estudo de caso nos permitirá desvelar e intervir na realidade escolar da aluna, visto que esta é uma metodologia em educação que, de acordo com Carvalho (2012), é adequada para se examinar criticamente o estado da arte de aspectos relacionados a inclusão escolar, permitindo retratar uma determinada realidade e contextualizando-a.

A pesquisa teve seu início em uma escola inclusiva e, devido a troca de escolas pela aluna, participante central, no decorrer da mesma, a fim de investigação, foram consideradas outras duas escolas. A aluna em 2014, no início da pesquisa, estava matriculada no 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola regular inclusiva.

As etapas da pesquisa envolveram autorizações, sondagem, estudos sobre a síndrome, observações e intervenções, visitas, entrevistas, análise de material e análise de dados , estes observando-se além da participante central, outros participantes, como pais, professores em diferentes contextos, auxiliar e psicóloga.

No presente artigo apresentamos um recorte da tese, por meio dos dados obtidos com a análise quanto à formação dos professores envolvidos na investigação, destacando aqueles que trabalharam na disciplina de Matemática com a aluna na sala de aula inclusiva, no 5º ano do Ensino Fundamental.

Análise de dados

Apresentamos nessa seção a análise descritiva dos dados obtidos na investigação, começando pela caracterização de nosso sujeito principal da pesquisa.

Nosso sujeito principal da pesquisa nasceu em novembro de 2002 e, em janeiro de 2003, após encaminhamento do pediatra para um geneticista, obteve o diagnóstico de deleção no braço longo do cromossomo 11 na região q24, que caracteriza a deleção cromossômica denominada Síndrome de Jacobsen. Desde então possui acompanhamentos constantes de cardiologista, pediatra, neurologista, oftalmologista, pneumologista, entre outros e, as avaliações neurológicas realizadas, destacaram atraso no desenvolvimento neuropsicomotor.

A Síndrome de Jacobsen é uma síndrome rara que apresenta anomalias congênitas múltiplas e atraso mental, sendo as características clínicas mais comuns o atraso no crescimento pré e pós-natal e atraso no desenvolvimento neuropsicomotor, com diagnóstico baseado em achados clínicos e confirmado por análise citogenética (GROSSFELD; MATTINA; PEROTTA, 2009).

O *Genetic and Rare Diseases Information Center*[1] (GARD) traz que os sintomas variam entre os indivíduos, apontando para o desenvolvimento atrasado de habilidades motoras e de fala e deficiência cognitiva, que gera dificuldades de aprendizagem acompanhadas por comportamentos compulsivos e diagnósticos de transtorno de déficit de atenção e hiperatividade (TDAH). Grossfeld, Mattina e Perotta (2009) relatam cerca de 200 casos na literatura referentes a Síndrome de Jacobsen, sendo que os tratamentos concentram-se nos sinais e sintomas específicos de cada indivíduo, exigindo deste modo, esforço de vários especialistas. No Brasil, de acordo com Colling e Geller (2018), há relatos de dezenove famílias com diagnóstico da síndrome, sendo a aluna considerada na investigação a segunda mais velha entre estes.

A pesquisa iniciou no ano de 2014 com acompanhamento escolar da aluna até o ano de 2016, sendo que no período ocorreu troca de escolas e, deste modo, são caracterizados três locais na pesquisa, sendo que neste artigo são consideradas duas escolas inclusivas denominadas Escolas 1 e 3, ambas privadas, sendo a primeira frequentada até maio de 2015 e a segunda, a partir de fevereiro de 2016.

A aluna em maio de 2015 foi transferida para uma escola especial, retornando no início de 2016 para a escola inclusiva. Cabe salientar que a aluna foi transferida da Escola 1 quando frequentava o 6º ano do Ensino Fundamental; porém, ao retornar para a Escola 3, decidiram pela matrícula no 5º ano do Ensino Fundamental e, conforme apontado por Colling e Geller (2018), esta decisão foi pautada no desenvolvimento da aluna, na recepção desta pelos colegas e pela professora ser especialista em educação especial. Os dados utilizados neste artigo retomam o 5º ano do Ensino Fundamental, sendo consideramos as professoras P4, P5, P6 e P8, além da PESQUISADORA, denominadas na investigação por letras maiúsculas seguidas por número. A escolha se deu, por estas em algum momento da investigação, trabalharem conceitos matemáticos com a aluna.

Colling e Geller (2015) trazem que em Matemática, o início da investigação se deu com a sondagem em relação aos registros do 4º ano do Ensino Fundamental, na Escola 1, e estes indicavam que a aluna compreendia noções de maior e menor relacionada a objetos, realizava correspondência entre número e quantidade e fazia agrupamentos até 10 utilizando material concreto. As análises das autoras das primeiras atividades realizadas apontavam noção da contagem até 7, sem compreensão do significado dos numerais e suas quantidades representativas e limitações de aprendizagem, entre elas dificuldade na fala, na motricidade fina e de concentração durante a realização das atividades propostas.

Com foco na formação dos professores que trabalharam com a aluna na busca da construção de conceitos matemáticos, a fim de compreender as impressões dos professores participantes da pesquisa, analisamos neste artigo as entrevistas realizadas com os mesmos. A

---

[1] Centro de informações sobre doenças genéticas e raras dos Estados Unidos, vinculado ao National Center for Advancing Traslational Sciences, financiado pelo U.S. Departament of Health Human Services e National Institutes of Heatlh, que fornece acesso público a informações sobre doenças genéticas ou raras em inglês e espanhol. Disponível em: <http://rarediseases.info.nih.gov/diseases/307/index#explanation>. Acesso em 30 maio 2017.

LDBEN (1996) traz que os professores que trabalham com classes inclusivas devem ser capacitados, comprovando que em sua formação, de nível médio ou superior, foram incluídos conteúdos ou disciplinas sobre Educação Especial. Em relação à formação dos professores que trabalhavam com a aluna na Escola 1, de acordo com Colling e Geller (2018), mesmo todos apresentando formação universitária completa, apenas a P5 afirmou ter realizado um curso sobre deficientes, este de apenas um encontro.

Quando questionada sobre a maior dificuldade relacionada ao trabalho diário a P5 relatou:

> A maior dificuldade foi a falta de contato com os especialistas que atendem ela. Muitas vezes me sentia no escuro, tateando, tudo era uma experimentação, meio sem propósito,..., no fim das contas, fiquei no trabalho com a motricidade fina.

Para Ramos (2010) as trocas entre equipes pedagógicas e estudos sobre o tema da inclusão são fundamentais na busca por planejamentos ricos em recursos didáticos que favoreçam o desenvolvimento dos alunos com deficiência. Ainda, de acordo com o GARD (2017), são necessários vários especialistas no tratamento de sinais e sintomas específicos dos indivíduos diagnosticados com a síndrome e pudemos verificar que a P5 trouxe em seu relato o sentimento quanto a falta de contato com os especialistas que trabalham com a aluna fora do ambiente escolar, como psicopedagoga, médicos e fonoaudióloga.

Ramos (2016) afirma ser fundamental que os professores que trabalham em classes incusivas sejam especialistas em Educação Especial e, em relação ao processo de inclusão nas escolas e classes regulares de ensino, quando questionada a P6 relatou que:

> Na minha opinião, precisamos avançar muito nestas questões, por enquanto, apenas abrimos as portas das escolas, mas não estamos capacitados para desenvolver um trabalho de qualidade.

Desse modo, podemos observar a importância de professores cientes de seu papel frente ao processo de aprendizagem dos alunos com deficiência, oferecendo planejamentos com recursos didáticos que promovam o desenvolvimento das habilidades dos alunos, respeitando suas limitações. Ainda, no caso da ALUNA, observamos a importância de meos de ensino que promovam o desenvolvimento de sua aprendizagem, visto que o diagnóstico da síndrome compromete sua capacidade cognitiva.

Em relação à disciplina de Matemática, durante o ano de 2014 a PESQUISADORA utilizou atividades em folhas brancas e coloridas, material concreto para contagem, como botões, palitos de picolés e grãos, além de jogos de memória, quebra-cabeça e atividades realizadas utilizando computador ou Tablet. Na Figura 1 temos uma das atividades realizadas em 2014 que tinha como objetivo o reconhecimento dos números e suas respectivas quantidades.

Figura 1. Adaptada de Colling e Geller (2018)

Em 2016 a P8, professora do 5º ano do Ensino Fundamental da Escola 3 priorizou, nas atividades propostas em Matemática, o reconhecimento dos números e seu traçado, realizando os registros das atividades em portfólios, sendo um em cada trimestre letivo. Na Figura 2 podemos observar um dos registros, com o objetivo de reconhecimento da letra E e números até 4. Salientamos que neste ano letivo foi priorizado, pelas observações de Colling e Geller (2018), o ensino e reconhecimento das letras.

Figura 2. Adaptada de Colling e Geller (2018)

Para finalizar esta análise destacamos a afirmação da P8, que em Colling e Geller (2018), afirma que durante o ano letivo buscou o desenvolvimento da aprendizagem da aluna, concomitante com sua autonomia, propondo atividades lúdicas, trazendo que a maior dificuldade estava relacionada com a concentração, uma barreira devido à retomada constante das atividades, mas que as conquistas, mesmo que pequenas, devem sempre ser comemoradas.

Assim, as observações apontam para a dificuldade de evolução dos conteúdos e verificação da aprendizagem, decorrentes do atraso mental e cognitivo da aluna, estes descritos por Grossfeld, Mattina e Perotta (2009), bem como, confirmam o que afirma Machado (2008) quando traz que a escola inclusiva exige dos professores reflexão quanto as suas práticas e faz com que estes acreditem nas possibilidades de aprendizagem de todos os alunos, propiciando novas e diferentes formas de aprendizagem, bem como rompendo com o paradigma educacional que privilegia o conhecimento científico.

Considerações finais

A inclusão escolar enfrenta muitas barreiras, cabe à escola a busca por respostas e instrumentos diferentes e adequados às singularidades e ao professor tornar sua sala de aula um ambiente de trocas, auxílio, apoio, incentivo e aceitação ao aluno com deficiência, desse modo, estando à formação de professores diretamente ligada a busca por uma escola inclusiva de qualidade e que respeite as potencialidades de todos.

Verificamos que a política de formação de professores é um dos pilares da inclusão escolar e que requer de recursos humanos para ser efetivada. Discussões dentro do ambiente escolar, cursos para trocas de experiências, estudos sobre a temática, novos métodos de ensino e tecnologias, são necessários para que o professor se sinta preparado para enfrentar os desafios do cotidiano.

Como professores, sabemos que a disciplina de Matemática exige, no desenvolvimento da aprendizagem, uma complexidade de habilidades e, no caso de alunos com deficiência, esta deve ser conduzida gradualmente, respeitando tempo e limitações individuais do aluno. A ALUNA apresenta diagnóstico de uma síndrome rara, com inúmeras limitações de aprendizagem e percebemos, ao longo da pesquisa, a importância de professores capacitados no auxílio e enfrentamento das dificuldades relacionadas ao seu cotidiano escolar.

As escolas regulares precisam ter professores capacitados, que sejam capazes de auxiliar no desenvolvimento das potencialidades de todos os alunos, principalmente aqueles com deficiência e, sendo assim, os sistemas educacionais devem estar preparados, com profissionais que possam efetivamente colocar a inclusão escolar em prática, buscando o desnevolvimento das habilidades de todos. A síndrome que acomete a ALUNA traz consigo enormes dificuldades em seu acompanhamento escolar e professores capazes de transpor essas dificuldades do dia a dia podem auxiliar sua inclusão escolar, fazendo com que ocorra a aprendizagem de acordo com suas possibilidades de desenvolvimento, respeitando as limitações decorrentes do diagnóstico complexo relacionado à síndrome.

Contudo, em relação a pesquisa apresentada, este recorte nos da ciência de que o caminho a percorrer é longo, repleto de desafios e possibilidades. Acreditamos que as políticas públicas de formação de professores voltados para inclusão escolar devam sair do papel, visando a valorização da educação para a diversidade e oferecendo condições iguais de desenvolvimento da aprendizagem a todos os alunos, respeitando suas limitações e favorecendo suas potencialidades, independentemente de sua deficiência, sendo a escola o ambiente de acolhimento e, esta, sendo capaz de fornecer meios eficazes de ensino e aprendizagem à todos os alunos.

Referências e bibliografia

Brasil. (1996). Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília: MEC.

_____. (2001). Diretrizes Curriculares Nacionais para Cursos de Matemática – Resolução CNE/CES nº 1302/2001. Brasília: MEC.

Canepa, L. (2012). As barreiras da inclusão. In: Revista da ANEC. São Paulo: Zeppelin. p. 46–51.

Carvalho, R. E. (2012). Escola Inclusiva: a reorganização do trabalho pedagógico. Porto Alegre: Editora Mediação.

Colling, A. P. S.; Geller, M. (2018). Olhares da inlcusão: estudo sobre o processo de aprendizagem matemática de uma aluna com Síndrome de Jacobsen. Trabalho de conclusão de curso (Tese) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Canoas.

Colling, A. P. S.; Geller, M. (2015). Intervenções no ensino de Matemática com uma aluna com Síndrome de Jacobsen. In: XIV CIAEM-IACME. Chiapas, México.

Glat, R.; Fernandes, E. M. (2005). Da Educação Segregada à Educação Inlcusiva: uma breve reflexão sobre os paradigmas educacionais no contexto da Educação Especial brasileira. In: Inclusão – Revista da Educação 1, 35-39. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/revistainclusao1.pdf.

Grossfeld, P.; Mattina, T.; Perotta, C. S. (2009). Síndrome de Jacobsen. Disponível em: http://www.orpha.net/consor/cgi-bin/OC_Exp.php?lng=pt&Expert=2308.

Machado, R. (2008). Educação inclusiva: revisar e refazer a cultura escolar. In: Mantoan, Maria Teresa Eglér (Org). O desafio das diferenças nas escolas. Campinas: Editora Vozes, p. 69-76.

Ramos, R. (2010). Passos para a inclusão. São Paulo: Cortez.

Veltrone, A.A.; Mendes, E. G. (2007). Diretrizes e desafios na formação inicial e continuada de professores para a inclusão escolar. In: IX Congresso Estadual Paulista sobre formação de educadores. São Paulo.

Yin, R. K. (2010). Estudo de caso: planejamento e métodos. Bookman: Porto Alegre. 4ªedição.

O trabalho matemático e o autismo temático institucional

Silvia Teresinha Frizzarini
Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, Joinville
Brasil
stfrizzarini@hotmail.com
Claudete Cargnin
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
Brasil
cargnin@utfpr.edu.br
Cristiane Schlagenhaufer
Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, Joinville
Brasil
cristianeschlag@yahoo.com.br

Resumo

O objetivo deste trabalho é discutir as características do trabalho matemático que se constituem nas instituições durante o processo de inclusão de alunos com Transtorno do Espectro do Autismo - TEA. Para atingir esse objetivo, a metodologia utilizada foi de cunho qualitativo com a realização de pesquisas bibliográficas desenvolvidas a partir de materiais já elaborados e, principalmente, de livros e artigos científicos que permitirão fazer análises de práticas inclusivas realizadas numa pesquisa cooperativa em andamento entre duas Universidades do Estado do Paraná e de Santa Catarina - Brasil. A teoria utilizada foi Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard que permitiu analisar o trabalho matemático nesse processo de inclusão. Concluímos que nem todo o déficit, tanto institucional quanto da pessoa com TEA, devem ser compensados, pois as particularidades de processamento especializado e em detalhes é o que garante a diferença de ser, onde surgem muitos talentos e habilidades especiais.

Palavras chave: Educação Matemática, Inclusão, Transtorno do Espectro Autista, Autismo Institucional, Teoria Antropológica do Didático.

Introdução

O acesso de pessoas com algum tipo de deficiência nas escolas é garantido em todo território nacional brasileiro com as políticas educacionais vigentes. Com isso, Salas de Recursos Multifuncionais (SRM) com Atendimento Educacional Especializado (AEE) têm sido criadas para suprir a demanda do número de matrículas da Educação Especial no ensino regular que, em 2017, apresentava-se com um déficit de 40% no atendimento desse público (SANTOS, et al., 2017).

A criação dessas SRM gerou um novo trabalho ao professor da turma, que requer uma nova especialização, para que aluno tenha as condições específicas de realizar determinadas tarefas fundamentadas nas suas habilidades e competências. Para isso, o professor deve avaliar aluno, não somente ao iniciar o trabalho pedagógico especializado, mas também durante todo o processo de escolarização. Adequações e ajustes nos diferentes âmbitos, que interferem diretamente no processo de ensino e de aprendizagem do aluno, dependerá dessa avaliação "de conhecer o aluno e suas condições de inserção e participação na escola, na família e na sala de aula regular" (POKER, et al., 2013, p.11).

No Manual de Orientação destinado ao Programa de Implantação de Sala de Recursos Multifuncionais (BRASIL, 2010), o professor do AEE tem como função realizar esse atendimento de forma complementar ou suplementar à escolarização, considerando as habilidades e as Necessidades Educacionais Especiais dos alunos, público alvo da educação especial. Na inexistência deste professor especialista e até mesmo da inexistência das SRM, quem fica encarregado dessas funções e criação de dispositivos didáticos são os próprios professores regentes da turma que devem atender uma demanda de alunos com necessidades especiais e que vem crescendo a cada ano.

Além das diferenças que existem entre a gama de pessoas com necessidades especiais, como em relação a um surdo, cego, com Síndrome de Down, entre outras, existem as diferenças em relação às pessoas que tem a mesma deficiência, apresentando variações desde os níveis mais brandos aos mais severos e que influenciam diretamente no processo de ensino e de aprendizagem. Quando se trata de um aluno com transtorno do espectro autista (TEA), por exemplo, segundo Chequetto e Gonçalves (2015) "é possível observar que vários indivíduos diagnosticados com o mesmo tipo de autismo podem ter perfis e características próprios, diferentes uns dos outros" (p. 210).

Com respeito às aulas de matemática e ao processo de inclusão, o ensino e aprendizagem se tornam cada vez mais complexos neste contexto. A questão que se apresenta é "quais as características do trabalho matemático durante a inclusão escolar de alunos com TEA?"

Uma das teorias da Didática da Matemática que pode contribuir para esclarecer esse processo do trabalho matemático é a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (2009), caracterizada por um sistema didático como S (P, A, O) que une relações distintas entre professor P, alunos A e o saber O. De acordo com esta teoria, toda atividade humana, situada no interior de instituições concretas constituem o ensino e a aprendizagem do conhecimento matemático dotada de uma "razão de ser" ou de um "tipo de racionalidade" que lhe dá sentido. Isso inclui as condições visíveis ou invisíveis impostas por essas instituições, podendo, inclusive, limitar o ensino e a aprendizagem do conhecimento matemático.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é apresentar algumas características do trabalho matemático que se constituem nas instituições durante o processo de ensino e aprendizagem dos alunos com TEA.

Para responder a questão inicial, a metodologia utilizada foi de cunho qualitativo com a realização de pesquisas bibliográficas, que segundo Gil (2008, p.50), "é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos" e que permitirão fazer as análises de práticas inclusivas realizadas nos trabalhos de Frizzarini, Cargnin & Aguiar (2018), Frizzarini, Cargnin, Aguiar & Souza (2017), Bertão et all. (2017), Cargnin, Frizzarini & Ferreira (2017) e Cargnin, Frizzarini & Aguiar (2018).

Referencial teórico

O trabalho matemático, segundo Parra e Otero (2011), é composto por três aspectos inseparáveis que estão diretamente ligados aos elementos da TAD e têm contribuído com a Didática da Matemática, a saber: processo de estudo, organização matemática (OM) e de organização didática (OD), "El proceso de estudio puede ser entendido como el proceso de construcción matemática. El resultado de esa construcción es una OM y, finalmente, la manera en que esa organización se construye, una OD" (p. 720).

Para Chevallard (2001), existe uma hierarquia entre as OM e as correspondentes das OD com as formas de organizar as questões matemáticas estudadas e a maneira de organizar o estudo, colocadas de cima para baixo: civilização ↔ sociedade ↔ escola ↔ pedagogia ↔ disciplina ↔ área ↔ setor ↔ tema ↔questões. Esta hierarquia é interpretada para estudar o conhecimento de certas questões e reconhecer um caminho começado pela civilização e que continua na sociedade, bem como na escola, na pedagogia, em certa área dentro de uma disciplina, por certo setor da área e por certo tema.

Quando o professor se fecha nos temas, como do currículo oficial que propõem as sucessivas reformas, dos documentos de administração educativa e dos livros textos, Gascón (2003) considera como fenômeno chamado "autismo temático da instituição" ou "autismo institucional", que além do nível de organização os temas são considerados transparentes e inquestionáveis. Assim, é frequente que se acredite que o Ensino Médio seja inadequado, porque os estudantes não se adaptam às exigências e requisitos do nível seguinte, o da Universidade. Para essas instituições, o Ensino Médio tem como principal objetivo preparar os estudantes para seguir com seus estudos universitários, como se fosse sua única razão de ensino.

Para Chevallard (2001), existe outro tipo de autismo que é o "autismo disciplinar[1]" que, em longo prazo, cada disciplina define seus conteúdos emblemáticas, excluindo o estudo dos conteúdos das demais disciplinas. Ao considerar que a Matemática existe por si mesma e para si mesma, o "autismo disciplinar", neste caso, proíbe inclusive que outras disciplinas se interessem por seus conteúdos que, de certa forma, podem monopolizá-la.

A relação das ideias de Chevallard (2001) e de Gascón (2003) pode descrever um retraimento da ação do professor ao nível das questões que, neste trabalho, são analisadas em

[1] Autismo didático é um dos níveis de codeterminação entre as Organizações Matemáticas (OM) e as Organizações Didáticas (OD). Cada disciplina pode estar mais ou menos abertas para o estudo de questões que não lhe pertencem diretamente (Parra & Otero, 2011).

práticas educativas a nível de Ensino Técnico em Informática. Mas, antes é necessário compreender o sistema cognitivo dos alunos com TEA.

Análise de dados

As teorias psicológicas para o autismo

Uma das principais características de alunos com TEA que agrava o trabalho da matemática é a dificuldade na interação social, a falta de expressão facial, a dificuldade de o aluno permanecer sentado por muito tempo. Essas e outras dificuldades podem estar relacionadas com as seguintes teorias.

Três importantes teorias psicológicas, segundo Dourado (2012), que tentam explicar o autismo são a Teoria da Mente, a Teoria do Déficit nas Funções Executivas e a Teoria da Coerência Central Fraca. Na primeira teoria, a pessoa com autismo é incapaz de atribuir estados mentais às outras pessoas. Por exemplo, quando uma criança usa o artifício de apontar para um objeto e espera que essa outra pessoa volte sua atenção a esse objeto, isto seria um precursor da Teoria da Mente. Para Dourado (2012), a pessoa autista que tem essa dificuldade é chamada de cegueira da mente, fazendo uma analogia com os daltônicos que percebem o mundo de maneira diferente, ao contrário das que veem cheio de cores.

Na segunda teoria, a Teoria do Déficit nas Funções Executivas, a pessoa com autismo é incapaz de controlar voluntariamente as suas ações, atenção e pensamento. Segundo Dourado (2012), os três componentes: i) a capacidade de inibição, ii) a memória de trabalho e iii) a habilidade de gerar novas estratégias são fundamentais quando não se pode deixar que um processo ou uma ação seja guiado automaticamente e quando estamos diante de um novo desafio ou quando não temos resposta pronta para o desafio em questão. Apesar de possuir elevada capacidade intelectual, o autista apresenta déficit nesses componentes que estão associados com anomalias dos lobos frontais do cérebro confirmadas por exames.

Já a Teoria da Coerência Central Fraca faz com que o autista se saia melhor que pessoas típicas em testes como para encontrar figuras ocultas ou em montar um quebra cabeça que não forma figura alguma. No entanto, a pessoa autista tem a dificuldade de interagir diversas informações do ambiente de forma coerente e com significado. Segundo Dourado (2012), isso se deve ao fato que a coerência central, inata do sistema cognitivo de juntar as diversas formas disponíveis num ‘todo’ coerente é fraca para o autista. Em contrapartida, essa disfunção faz com que ele tenha a atenção aos detalhes, a insistência em rotina, as obsessões e até algumas habilidades especiais.

O elo que falta para unir essas três teorias, segundo Dourado (2012), seria o ‘eu consciente de si mesmo’ e que está dormindo nos autistas, enquanto que os outros “eus” executivos podem ser produtivos, autodisciplinados e aprender com o tempo a controlar impulsos. Acreditava-se que o autismo fosse o resultado de um desajuste emocional e de uma manifestação de desajuste mental de adultos, mas está comprovado que o autismo é causa de uma série de anomalias sutis no desenvolvimento cerebral, circunscritas a apenas algumas funções cerebrais e, às vezes, somente a alguns aspectos delas.

O trabalho matemático inclusivo no Ensino Técnico

A pesquisa que está sendo realizada no Ensino Técnico de Informática, com um aluno autista, mostra que as necessidades do processo de inclusão vão além das oferecidas pelas instituições que tem seus currículos oficiais fortalecidos por um ensino de qualidade, mas sem nenhuma preparação para a inclusão de alunos com necessidades especiais. Segundo Gascón (2003), o fenômeno chamado "autismo temático da instituição" ou "autismo institucional" faz parte de muitas instituições como esta, que além do nível de organização, os temas são considerados transparentes e inquestionáveis.

A base é sólida de uma Educação Profissional que surgiu a partir de 1809, com a criação do Colégio das Fábricas de outras instituições criadas durante o século XIX, no âmbito da sociedade civil, voltadas para o ensino das primeiras letras e a iniciação em ofícios (BRASIL, 2007). Hoje conhecida como Rede Federal de Educação Profissional, entre outras instituições que oferecem cursos técnicos surgiram com as mudanças ocorridas na economia brasileira do final do século XIX, com o aumento das atividades agrárias, industriais e comerciais. Seus estudantes eram pessoas que representavam um potencial para garantir a mão de obra às indústrias emergentes na recém constituída República Federativa do Brasil (KUNKE, 2009).

Nessa fase, o Ensino Profissionalizante não tinha nenhuma proximidade ou vinculação com a Educação Básica que se iniciou em 1941, através da Reforma Capanema (BRASIL, 2007). Somente em 1961, com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB houve a equivalência entre o Ensino Profissional e o Ensino Médio, possibilitando ao aluno realizar transferência entre ambos.

A instituição em que se realiza a pesquisa faz parte dessa Rede Federal de Educação Profissional e que possui mais de cem anos de história. Apesar de ser conhecida por sua excelência na formação profissional, ainda está engatinhando no que diz respeito à inclusão. Políticas de inclusão, no âmbito institucional, estão sendo estudadas e implementadas mais fortemente nesse ano de 2018. Possui vários cursos de engenharia, uma licenciatura e um curso técnico integrado, na área de Informática, do qual faz parte o estudante que é acompanhado pelo projeto de pesquisa referente ao acordo de cooperação entre as instituições, mencionado anteriormente.

O curso Técnico Integrado em Informática ocorre há 10 anos e apenas no ano de 2016 recebeu um aluno diagnosticado com Síndrome de Asperger[2], situação que afligiu alguns professores, devido às peculiaridades do caso. Em particular, no que se refere à Matemática, a preocupação foi grande, especialmente porque não existem trabalhos na área da educação matemática que se refira a estudantes autistas em nível médio, como é o caso desse curso, ou em nível superior. Os relatos existentes referem-se a crianças no início da escolarização, e não mencionam diretamente a matemática.

A natureza não-ostensiva dos objetos matemáticos é um agravante no caso de pessoas com Transtorno do Espectro do Autismo (TEA), que possuem um entendimento muito literal das palavras. Como fazer compreender um objeto que não pode ser visto, tocado? Nesse sentido, os diferentes registros de representação semiótica, especialmente o gráfico, torna-se a parte

[2] Este diagnóstico está englobado no TEA de acordo com DSM-5

ostensiva dos objetos não-ostensivos3 Por meio das representações semióticas a pessoa com TEA pode acessar os objetos abstratos, mesmo que com certa dificuldade.

Os registros são sistemas semióticos criadores de novos conhecimentos que propiciam o acesso dos objetos não-ostensivos. Para ser um registro, um sistema semiótico deve cumprir duas condições. Primeiramente, poder produzir representações que permitem tanto ter acesso a objetos perceptivamente ou instrumentalmente inacessíveis, quanto explorar tudo o que é possível. Em seguida, e sobretudo, abrir um campo de operações específicas que permitem transformar as representações produzidas em novas representações (DUVAL, 2011b, p. 97)". Os registros considerados por Duval (2011b) são as línguas, figuras, gráficos etc.

Para isso, a dicotomia rigidez X flexibilidade na praxeologia matemática, da qual citam Lucas et al (2014), deve ser superada. Conforme esses autores,

> As instituições educativas deveriam ter, sob a sua responsabilidade, o trabalho de possibilitar e capacitar a articulação de vários registros de representação e as diferentes interpretações dos objetos matemáticos, uma vez que, quando esta articulação é deixada para o trabalho privado do aluno, as possibilidades de insucesso são elevadas (LUCAS et al, 2014, p.1329).

Para o caso específico em discussão neste artigo, a articulação entre registros de representação, segundo Cargnin, Frizzarini & Aguiar (2018), a articulação entre registros de representação semiótica foi proporcionada em sala de aula, porém priorizava-se o uso de registros gráficos, ou materiais concretos, para tratar de conceitos em estudo, como no caso de funções ou trigonometria. Nesses momentos, o estudante com TEA parecia conseguir "enxergar" as relações pretendidas pela docente.

Contudo, ressalte-se que ainda é precária a estruturação institucional disponível para atendimento das expectativas docentes em relação ao processo de inclusão de alunos com TEA. No presente contexto, teve que haver interesse e busca docente por alternativas possíveis para o tratamento diferenciado que o estudante requeria, em termos de ensino e aprendizagem de matemática. Embora a equipe pedagógica da instituição tivesse se colocado à disposição, não tinham Know-how suficiente para dar o suporte necessário aos docentes.

[3] Chevallard (1994) chama de ostensivos àqueles objetos que possuem uma forma material, sensível, manipulável. Podem ser gestuais, discursivos, gráficos ou escriturais (que usam uma simbologia específica como na matemática), enquanto que os não-ostensivos são as noções, os conceitos, as ideias, aquilo que apenas pode ser evocado mediante a manipulação dos objetos ostensivos associados.

Considerações finais

As pesquisas com TEA, voltados para o ensino de Matemática, ainda são incipientes e estão iniciando no Brasil, como destacam Bruniera e Fontanini (2016), o que dificulta os avanços na área de estudos e pesquisa sobre o trabalho matemático durante o processo de inclusão dos alunos com TEA.

Os trabalhos de Frizzarini et al (2017), Cargnin, Frizzarini e Ferreira (2017) e Frizzarini, Cargnin e Aguiar (2018) relatam a experiência do trabalho matemático com estudante diagnosticado com Síndrome de Asperger e destacam ainda a falta de propostas de material concreto para sua abordagem de alguns conteúdos matemáticos que são mais abstratos.

Vale ressaltar que, mesmo com a contribuição de *softwares* dinâmicos como o GeoGebra, para o estudante em tela, a utilização de materiais concretos mostrou-se mais eficaz, justamente por sua característica ostensiva. Manipular os objetos (no mundo físico) favoreceu melhor a percepção de relações trigonométricas ou funcionais.

A partir da pesquisa realizada com este estudante com TEA alguns encaminhamentos foram dados às aulas de matemática, a fim de proporcionar a sua inclusão:

- priorizar utilização de materiais manipuláveis e/ou recursos gráficos;
- elaborar tarefas com enunciados simples e objetivos;
- para tarefas individuais, estabelecer roteiros com instruções diretas;
- levar em consideração o interesse do estudante para propor atividades.

Apesar desses encaminhamentos, ainda há pontos obscuros em relação à aprendizagem matemática de alunos com TEA, como o ensino de números complexos e equações algébricas, assuntos bastante abstratos e sem, ainda, uma proposta de material concreto para sua abordagem.

Ambientes estruturados e previsíveis são fundamentais para as pessoas autistas compensar seus déficits, além de instrumentos fundamentais como agendas, lembretes, esquemas visuais, rotinas. Mesmo não sendo possível e nem indicado tentar compensar o déficit da coerência central, o mundo de particularidades dos autistas e o processamento especializado em detalhes é o que lhes garantem a diferença de ser e ver o mundo, onde surgem muitos talentos e habilidades especiais.

Agradecimentos

FAPESC - Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina

Referências

Brasil. (2010). *Manual de Orientação:* Programa de Implantação de Sala de Recursos Multifuncionais. Ministério da Educação Secretaria de Educação Especial, Brasília.

Bruniera, B.; Fontanini, M.L.C. (2016). Pontes entre portadores de Síndromes do Espectro Autista e Educação Matemática: entre o que já existe e o que pode ser construído. In *Anais do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática*, São Paulo. Disponível em http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6592_2730_ID.pdf Acesso em 06 mar, 2017.

Cargnin, C.; Frizzarini, S.T.; Aguiar, R. (2018) Trajetória de um aluno autista no Ensino Técnico em Informática. *ENSINO EM RE-VISTA.*

Cargnin, C.; Frizzarini, S.T.; Ferreira, G.C.C. (2017). Um enfoque da Educação MAtemática Crítica para portador da Síndrome de Asperger. In: *Anais do Encontro Paranaense de Educação Matemática*, Cascavel, Paraná.

Chequetto, J. J.; Gonçalves, A. F. S. (2015). Possibilidades no Ensino de Matemática para um aluno com autismo. *Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica*, ISSN 2236-2150 – V. 05, N. 02, p. 206-222, Outubro. Disponível em: http://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/view/427. Última visita em: 12/04/2016.

Chevallard, Y. (1994). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*,. Disponível em : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Ostensifs_et_non-ostensifs.pdf, Acesso em 06 jun. 2018.

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER : problèmes et avancées*. Toulouse: UMF/ADER.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación em Didáctica de las Matemáticas. Huesca.

Dourado, F. (2012). *Autismo e o cérebro social*: compreensão e ação. São Paulo: Casa da Esperança.

Duval (2011). *Ver e ensinar a Matemática de outra forma*: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas, - São Paulo: PROEM.

Frizzarini, S.T. ; Cargnin, C.; Aguiar, R. ; Souza, S.R.O. (2017). Uma análise das aulas de matemática no primeiro ano do ensino técnico para um aprendiz com transtorno do espectro autista. In: *Anais do Simpósio Nacional "Por uma Escola Inovadora e Inclusiva"*, Poços de Caldas, MG, Universidade Federal de Alfenas, p.968-986. Disponível em https://lepaicontato.wixsite.com/simposio/publicacoes-do-simpósio. Acesso em 20 abr, 2017.

Frizzarini, S.T, Cargnin, C. Aguiar, R. (2018). Recursos didáticos para a acessibilidade de aluno com espectro autista nas aulas de matemática. *Anais Colóquio Luso Brasileiro de Educação - COLBEDUCA*, Braga.

Gascón, J. (2003). *Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria* I. Desaparición escolar de la razón de ser de la geometría. SUMA, 44, 25-34.

Gil, A.C. (2008). *Métodos e Técnicas em Pesquisa Social*. São Paulo: Atlas.

Lucas, C.; Fonseca, C.; Gascón, J.; Casas, J. O (2014). Fenômeno Didático institucional da Rigidez e a Automação das Organizações Matemáticas Escolares. *Bolema*, Rio Claro, v.28, n.50, p.1327-1344.

Parra, V.E. y Otero, M.R. (2011). Praxeologías didácticas en la universidad y el fenómeno del «encierro»: un estudio de caso relativo al límite y continuidad de funciones. In: Bosch, M. et al. *Un panorama de la TAD.* Barcelona: CRM Documents, vol. 10, pp. 719-741.

Poker, R.B. et al. (2013). *Plano de desenvolvimento individual para o atendimento educacional especializado*. São Paulo: Cultura Acadêmica. Marília: Oficina Universitária.

Santos, J.O.L. et al. (2017). Atendimento Educacional Especializado: Reflexões sobre a Demanda de Alunos Matriculados e a Oferta de Salas de Recursos Multifuncionais na Rede Municipal de Manaus-AM. *Rev. Brasileira de Educação Especial*, Marília, v.23, n.3, p.409-422, Jul.-Set.

Características recomendables para propuestas de actualización en Educación Matemática para docentes de 1.° a 6.° grado.

Gabriela **Gomez** Pasquali
gabriela@omapa.org.py
Verónica **Rojas**
ingvero@gmail.com
Joel **Prieto**
joelprieto@gmail.com
Organización Multidisciplinaria de Apoyo a Profesores y Alumnos (OMAPA)
Paraguay

Resumen

Esta investigación tuvo como objetivo proponer y evaluar características innovadoras para propuestas de actualización en educación matemática para docentes en ejercicio en Paraguay. El proyecto abarcó el diseño de una propuesta que incorporó las características innovadoras a estudiar, así como su aplicación, evaluación y ajuste final, con base en la retroalimentación de los instructores del programa, de los docentes participantes del curso y en los resultados de la evaluación. El efecto en las competencias matemáticas se evaluó aplicando la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI) con docentes y sus estudiantes de 3.° y de 6.° grado, además del enfoque clásico. Los resultados indican que la propuesta revela un impacto positivo, demostrado con el mejor desempeño de los docentes, así como de sus estudiantes, y que por lo tanto, la incorporación en futuras propuestas de actualización docente de las características estudiadas es recomendable.

Palabras clave: actualización docente, educación matemática, evaluación TRI.

Introducción

Atendiendo que existen sobradas evidencias que muestran la centralidad del docente en la obtención de resultados en los aprendizajes de los estudiantes, los nuevos desafíos en educación exigen de las políticas públicas, que aseguren la profesionalización docente y la formación y actualización permanente (Baumert, y otros, 2010; Hill, Rowan, & Ball, 2005).

Un docente de matemática debe ser capaz de aplicar algoritmos, entender su funcionamiento, prever errores, detectar conocimientos previos de sus estudiantes. Estudios del BID (Näslund-Hadley, Martínez, Loera Varela, & Hernández Agramonte, 2012) reportan resultados que muestran lejos de tales objetivos a los docentes paraguayos. Además, la baja calidad de los Institutos de Formación Docente (IFD) resalta en las pocas evaluaciones publicadas. Por ejemplo en 2001 los futuros docentes de 73 IFD tuvieron en Matemática un promedio menor al 70% mínimo para aprobar y, en 2003/2004 en 103 IFD tuvieron un rendimiento promedio menor al 45% (Elías, Molinas, & Misiego, 2013). Con respecto a los estudiantes, más de la mitad de los de 3.°grado se clasificaron en los niveles más bajos en el Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE); lo mismo sucedió con el 32% de los de 6.° grado. Además, los estudiantes de 6.° grado de Paraguay fueron los únicos que, estando en Matemática por debajo de la media regional, empeoraron con respecto al Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo.

Con base en la relevancia del conocimiento matemático y pedagógico que debe tener el docente, -fundada en las investigaciones citadas previamente-, y en el análisis del contexto paraguayo relacionado, la Organización Multidisciplinaria de Apoyo a Profesores y Alumnos (OMAPA), propuso este proyecto de investigación con el propósito de contribuir a desarrollar propuestas de actualización docente capaces de disminuir la brecha existente entre los conocimientos matemáticos y pedagógicos actuales y los conocimientos deseables de los docentes, en Paraguay.

Método

A partir del desarrollo del concepto de Conocimiento Matemático para Enseñar (MKT en inglés), se ha acumulado suficiente evidencia científica sobre la existencia de un conocimiento matemático específico de la tarea de enseñar (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Varas, Lacourly, López, & Giaconi, 2012) que impacta en el aprendizaje de los alumnos (Baumert, y otros, 2010; Hill, Rowan, & Ball, 2005). Para este conocimiento, la experiencia práctica en el aula escolar y su reflexión sistemática resultan cruciales. Se ha demostrado que los esfuerzos de formación docente son débiles cuando están desconectados de la intervención en aula. Además, en los últimos años, los currículos internacionales han cambiado su foco hacia habilidades superiores del razonamiento dando relevancia a la capacidad de resolver problemas (OCDE, 2003).

Sin embargo, la formación en servicio de los docentes en el país se viene realizando a través de talleres, seminarios y encuentros ocasionales, de corta duración; y también en círculos de aprendizaje entre pares, en los que se reflexiona sólo sobre las teorías y principios educativos (PREAL,2013; Saravia, Flores, 2005). La modalidad prioritaria en estos encuentros ha sido por años la “formación en cascada”, en la cual grupos de docentes (50, 100, 500) escuchan exposiciones, con escasa posibilidad de interacción y participación (Buttice y otros, 2017), y con muy baja preparación de los instructores, quienes normalmente han tenido como única formación la previa participación en una actividad similar (de ahí el nombre de formación en cascada). En general estas propuestas de actualización son muy criticadas por los docentes destinatarios quienes consideran los temas poco interesantes, repetidos, con metodologías que no son participativas, ni motivante, y además reclaman la falta de participación que ellos tienen en el diseño de sus procesos de aprendizaje. (Buttice y otros, 2017)

Atendiendo las recomendaciones de las últimas investigaciones en educación matemática citadas anteriormente, las falencias detectadas en las prácticas tradicionales de formación en servicio, y la interpretación de las sugerencias de los docentes, recolectadas por OMAPA en diversas actividades e instancias previas de actualización, se seleccionaron las características innovadoras que debían orientar el diseño de la propuesta, para ser luego aplicadas y evaluadas. Atendiendo estas características se diseñó y aplicó la propuesta según los siguientes lineamientos.

- Se involucró a expertos internacionales en educación matemática en el proceso de diseño y en la formación de los instructores para asegurar la actualidad de los temas y enfoques abordados y la formación apropiada de los instructores.

- Se puso énfasis en el desarrollo del Conocimiento Matemático para Enseñar y por tanto los ejes temáticos priorizados fueron tanto de conocimientos matemáticos como de estrategias didácticas específicas para la enseñanza de la matemática.
- Se incluyeron módulos actualizados, producto de investigaciones internacionales de educación matemática de sólo un año atrás.
- Se seleccionaron los temas en función a la demanda de los docentes y las falencias detectadas en los estudiantes en las pruebas estandarizadas, además de la pertinencia de los mismos en los programas de estudio del Ministerio de Educación y Ciencias (MEC).
- Se contemplaron instancias intermedias de consulta con los docentes sobre la metodología y contenidos de las actividades en curso, para reorientarlas según sus recomendaciones.
- Se realizaron las clases presenciales los sábados y en periodos de vacaciones cuidando de tener periodos de año lectivo entremedio de modo a permitir la realización de las prácticas de aplicación con los estudiantes.
- Se establecieron 300 horas totales de formación, 200 horas presenciales y 100 de aplicación en aula. En cada jornada presencial se planificaron 8 horas de clase.
- En las horas de aplicación en aula, es decir la tercera parte del tiempo, los docentes debían realizar prácticas en el aula con sus estudiantes, las que luego eran objeto principal de estudio y reflexión colectiva en las siguientes clases presenciales.
- Se tuvo especial cuidado en incorporar dinámicas participativas en todas las clases y diversas actividades orientadas hacia el estudio y reflexión de la propia práctica docente incluidas Estudio de Casos y Observaciones de Clase entre pares.

Sintetizando, el carácter innovador de la propuesta de actualización está determinado por sus diferencias con respecto a las ofertas tradicionales de educación continua de docentes en servicio en Paraguay, tanto en sus enfoques y estrategias de diseño como en las de aplicación.

Con base en lo mencionado anteriormente, la intervención en Actualización en Educación Matemática propuesta en este proyecto tuvo dos grandes componentes: el diseño, la aplicación y la corrección de la propuesta del Curso de Actualización en Educación Matemática; y la investigación de los resultados por medio de un estudio de impacto. El desarrollo del proyecto fue realizado en cuatro etapas, las que se presentan a continuación.

a) Diseño de la propuesta de actualización en Educación Matemática

La propuesta de Actualización en Educación Matemática para docentes en ejercicio puso el énfasis en el conocimiento matemático y en el conocimiento de la tarea de enseñar, en la habilidad de reflexionar sobre la propia práctica a través de estudios de caso, y en la aplicación de la resolución de problemas como estrategia en el aula. El diseño se desarrolló en dos etapas bien diferenciadas: la capacitación del equipo académico encargado, y el diseño de los contenidos, didácticas específicas y metodología de aplicación.

La capacitación del equipo académico se realizó en el Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile (CMM).

El diseño inicial se ajustó a las características innovadoras identificadas previamente. Los contenidos matemáticos fueron seleccionados atendiendo las recomendaciones de las últimas investigaciones en educación matemática, la demanda de los docentes y las falencias de los estudiantes, detectadas en las pruebas estandarizadas; además de la pertinencia de los mismos en los programas de estudio del MEC. Luego, se elaboraron materiales y guías didácticas, estableciendo la bibliografía de apoyo y la metodología a ser aplicada. Los materiales en los que se basaron los contenidos y las didácticas específicas para cada uno de ellos fueron proporcionados por tres fuentes diferentes: el CMM, OMAPA, y School of Education de Boston University. Con respecto al contenido temático del curso, los ejes desarrollados fueron: Números, Álgebra, Geometría, Datos y Azar, Didáctica de las Matemáticas, Resolución de Problemas, Estudio de Clases y de Casos y Educación Matemática en Paraguay.

b) Aplicación piloto de la propuesta innovadora de actualización en Educación Matemática

Con la colaboración de técnicos del MEC, la Secretaría de Educación de la Gobernación del Departamento Central, la Fundación Fe y Alegría, y delegados de OMAPA, se invitó a participar de la investigación y de la actualización docentes, a directores de instituciones educativas públicas, subvencionadas y privadas del Área Metropolitana. Se expuso a los directores los objetivos, actividades y cronogramas del curso y se logró la inscripción de 26 instituciones.

Los seis instructores previamente formados en el CMM de la Universidad de Chile, impartieron el curso de Actualización en Educación Matemática.

La carga horaria del curso fue de 300 horas (cada una de 60 minutos), de las cuales 200 fueron presenciales y 100 de trabajo a distancia. Fueron desarrolladas 25 jornadas de 8 horas diarias del modo siguiente: tres semanas intensivas, no correlativas, de lunes a viernes en el horario de 8 a 17 horas, en periodos de vacaciones. La primera en diciembre de 2015; la segunda en febrero de 2016 y la tercera julio de 2016; las 10 jornadas de clases restantes fueron distribuidas los sábados, de marzo a octubre de 2016.

La metodología durante las horas presenciales consistió en trabajos individuales y grupales, exposiciones, plenarias, y diversas actividades que fueron gestionadas por los instructores, promoviendo en cada caso el trabajo autónomo y la reflexión colectiva de los participantes. Se destacó la preparación de prácticas para el aula.

Al inicio del curso, en diciembre de 2015, se contó con 140 docentes participantes. En la semana de febrero de 2016, asistieron 90 docentes y entre marzo y noviembre asistieron 70 docentes. Se llegó al cierre del curso con 66 participantes, que son los que conforman el grupo identificado como de “alta participación”, para la interpretación de los resultados de la evaluación. Según información colectada a través de encuestas y entrevistas, la razón principal del alto grado de deserción de la primera etapa se debió a que muchos docentes recibieron la información de que el curso sería de sólo una semana y no de 300 horas, lo que sumado a la dificultad del test de línea de base hizo desistir a instituciones enteras a partir de la segunda jornada.

Durante el curso se realizaron estrategias de retroalimentación, como ser consultas entre docentes e instructores, dos entrevistas con los docentes y una con los que dejaron el curso. Como resultados de esas consultas se aplicaron modificaciones a las clases en desarrollo, entre las que se destacan la eliminación de tareas con ejercicios de fijación para la casa y la disminución de las horas de clase de cada jornada sabatina.

Además, se levantaron las siguientes recomendaciones para próximas ediciones del curso. Mantener las características principales como ser la modalidad mixta presencial y a distancia, la metodología de las clases, los ejes temáticos y sus contenidos, el sistema de evaluación y las clases prácticas a distancia. Las modificaciones recomendadas fueron: máximo 5 horas de clase por día: no utilizar sábados, sino excepcionalmente; aumentar horas de Números y Geometría; realizar las tareas de fijación durante las clases presenciales; desarrollar los contenidos más complejos de Números y Geometría entre los últimos, ya que son difíciles y preferentemente acompañarlos en el mismo día por contenidos de Didáctica y Resolución de Problemas.

c) Corrección y ajustes del diseño inicial

Teniendo en cuenta los resultados de la evaluación de impacto y los aportes de los docentes, se identificaron las siguientes como las características innovadoras que deberían orientar el diseño y aplicación de propuestas exitosas de actualización en Educación Matemática.

Asegurar el involucramiento de expertos en el área, reconocidos nacional e internacionalmente, en el diseño y formación adecuada de los instructores para garantizar la apropiada actualización a los docentes a través de módulos sobre temas actualizados basados en investigaciones recientes. Poner énfasis en el desarrollo de conocimiento matemático y de las estrategias didácticas correspondientes; realizando la selección de temas con criterios específicos como demanda de docentes, falencias detectadas en estudiantes a partir de pruebas estandarizadas y en correspondencia con programas del MEC. Incluir horas presenciales de curso con los docentes, y también horas prácticas en aula, de dichos docentes con sus alumnos, en las que apliquen y revisen los conocimientos adquiridos, haciéndolos así actores activos de su propio mejoramiento profesional. Determinar el tiempo contemplado para las jornadas presenciales de modo a que sea suficiente para permitir el desarrollo profundo de cada concepto y el de los ejercicios de fijación correspondientes; además en cada jornada es conveniente intercalar contenidos complejos con contenidos simples. Contemplar la realimentación continua por parte de los docentes participantes de los cursos, tanto en relación a metodología como a contenido.

También debe tenerse en cuenta en cada aplicación, la flexibilidad necesaria para adecuarla a la disponibilidad de cada grupo específico de docentes destinatarios, en cuanto a los periodos de clases presenciales y de aplicación, y las horas de clase de cada jornada, cuidando de respetar en la medida de lo posible los tiempos de descanso de los mismos.

d) Evaluación de la propuesta

El estudio de evaluación de impacto tuvo como hipótesis la siguiente:

“Los docentes de Educación Escolar Básica de 1.° a 6.° grado, que participan de esta propuesta innovadora de Actualización en Educación Matemática de manera regular, activa y con disposición al aprendizaje, y sus estudiantes, desarrollan un mayor nivel de competencias específicas en las áreas de matemáticas que son trabajadas en el aula, siguiendo los lineamientos de la actualización metodológica.”

La evaluación se diseñó con la técnica de valor agregado (Tymms & Dean, 2004; Hanushek & Rivkin, 2010) para estimar el progreso alcanzado por dos universos: primero, el grupo de docentes que participó en forma permanente y activa en el proyecto; y segundo, los grupos de estudiantes de tercero y sexto grado asignados a los docentes participantes. El estudio consideró a los estudiantes, ya que constituyen una evidencia fuerte del impacto de las actividades, es decir, si finalmente los estudiantes mejoran su aprendizaje de manera significativa, el proyecto demuestra su trascendencia. El valor agregado resulta de calcular la variación del desempeño de docentes y estudiantes, que se observa al aplicar instrumentos estandarizados y validados en dos momentos: al inicio del proyecto, como línea de base, tanto en 2015 como en 2016; y al cierre de las actividades, al finalizar el año 2016. El desempeño se tomó como promedio de nota asignada en las pruebas. Un total de 40 variables fueron estudiadas para estudiantes de tercer grado, 64 para sexto grado y 68 para docentes. El valor agregado se exploró para dos grupos de docentes (y sus estudiantes): alto y bajo grado de participación en el curso de actualización.

Se aplicaron los instrumentos de evaluación elaborados a las tres poblaciones participantes, docentes, estudiantes de tercer grado y de sexto grado. Los instrumentos utilizados, que incluyeron una prueba de comprensión matemática y un cuestionario de contexto, cumplieron con los criterios de validez de contenido, mediante juicio de expertos durante el proceso de elaboración y ensamble. Consolidadas las respuestas halladas en las aplicaciones mencionadas, se procesaron los datos con el modelo de Rasch de la teoría de respuesta al ítem con un parámetro, para validar el desempeño estadístico de los ítems y los constructos configurados en las pruebas, y luego generar escalas de habilidad de estudiantes y docentes (Rasch, 1961). El valor de la habilidad, como posición relativa dentro de la escala generada, se transformó en una nota que fluctúa entre 0 y 5 puntos. Seguidamente, se analizaron las frecuencias de respuestas a las opciones de los ítems del cuestionario y después se asociaron las características indagadas con el nivel de desarrollo cognitivo observado a través las notas asignadas.

A los docentes se les aplicó los test de competencia matemática a fines del 2015 y a fines del 2016. La aplicación a fines del 2015 se realizó el primer día del curso, con todos los asistentes a la presentación del curso. La aplicación a fines del 2016 se realizó de dos modos distintos: a los docentes que permanecieron en el curso, es decir de alta participación, durante el último día de clase presencial del mismo; y a los docentes que no permanecieron en el mismo, que se retiraron y pasaron a ser el grupo de control o de baja participación, en sus propias escuelas.

En el 2015 se aplicaron los test de competencia matemática a los estudiantes de tercer grado y a los de sexto grado de esa cohorte. Esos test sólo se utilizaron para validar los instrumentos. Luego, a principio y fin de 2016 se aplicaron los instrumentos a los estudiantes de tercer y sexto grado de esa cohorte. Estos resultados fueron los utilizados para realizar las comparaciones. Los instrumentos fueron aplicados en las escuelas de los estudiantes. Los datos provenientes de las tres aplicaciones, fueron procesados manteniendo fija la escala generada en la aplicación del 2015, para garantizar la comparabilidad de las notas asignadas en cada caso.

Para caracterizar las poblaciones evaluadas se asociaron variables de contexto con desempeño cognitivo, en la aplicación realizada al final del proyecto. Las variables aludieron a información personal, entorno del hogar, hábitos de estudio y actitud hacia la matemática, en el caso de estudiantes, y formación académica y prácticas de aula en el caso de docentes.

Resultados

En primer lugar, se analizó la validez estadística de los ítems propuestos basados en la teoría de respuesta al ítem. Los indicadores hallados para constatarla fueron satisfactorios para aceptar los 45 ítems propuestos para la prueba de tercer grado, los 51 ítems de la prueba de sexto grado y los 30 ítems de la prueba de docentes. Respecto de la distribución de dificultad, en términos de porcentaje de respuestas correctas, se obtuvo un comportamiento próximo al normal al final de los años 2015 y 2016, y mayor concentración en la zona de bajo desempeño al inicio del año escolar 2016. Los valores encontrados otorgan validez a los resultados mostrados, y seguridad a las inferencias y decisiones que se deriven del análisis (Linacre, 2008).

La Teoría de Respuesta al Ítem clasifica a las personas en función de la habilidad que tienen en el área de estudio, asignando una nota relativa dentro de la escala entre 0 y 5. Basados en estas notas, se evaluó la variación del desempeño como la diferencia del promedio de notas asignadas a cada grupo de personas. Es así que, para el caso a los docentes, entre las aplicaciones del instrumento en los años 2015 y 2016, se verificó un aumento en 0,19 para los docentes de alto grado de participación, y una disminución de 0,07 para los de bajo grado de participación. En el caso del promedio de notas correspondientes a los estudiantes de tercer grado, los del grupo relacionado a alto grado de participación del docente mostraron un aumento en 0,46, mientras los del grupo relacionado a bajo grado de participación del docente arrojaron un aumento en 0,44. Finalmente, el promedio de las notas asignadas a los estudiantes de 6. ° grado mostró un aumento en 0,42 para los del grupo de alto grado de participación del docente, y un aumento en 0,26 para el grupo correspondiente a docentes de bajo grado de participación. Estos resultados se muestran en la Figura 1. Se puede apreciar que en todos los casos donde el docente tuvo alta participación, se constataron mayores variaciones en las habilidades matemáticas, tanto en los docentes, como en sus alumnos. Cabe destacar que cualquier variación según la teoría de respuesta el ítem es significativa, ya que mide la habilidad en el área de estudio de las personas en sí, no la respuesta aislada de un ítem.

Luego se evaluó la diferencia de desempeño al iniciar y terminar la intervención según la teoría clásica, que evalúa el porcentaje de respuestas correctas. Esta diferencia fue calculada con el porcentaje de respuestas correctas aportadas a cada uno de los ítems de la prueba, al final del año escolar 2016, para los grupos de docentes con alto compromiso y de bajo compromiso con el proyecto, extendiendo tal condición a sus estudiantes. Para tercer grado, el grupo de estudiantes con docentes de alto compromiso logró mejor desempeño en 40 de los 45 ítems aplicados. Por su parte, los estudiantes de sexto grado cuyos docentes tuvieron alto compromiso con el proyecto aportaron mayor porcentaje de respuestas correctas en 42 de los 51 ítems aplicados. Y en relación con los docentes, el grupo de alto compromiso con el proyecto aportó mayor porcentaje de respuestas correctas en 26 de los 30 ítems. Estos resultados se muestran en la Figura 2.

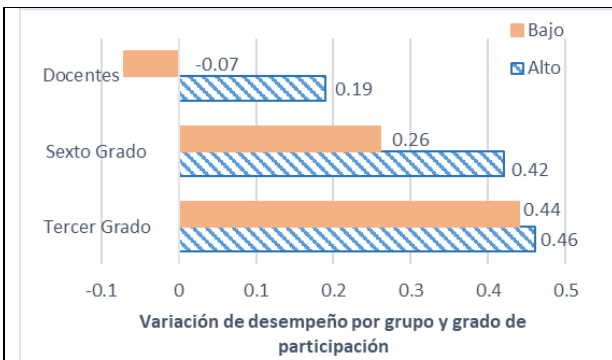


Figura 1. Variación del promedio de nota obtenida por los estudiantes de 3. ° y 6. ° grados y de los docentes entre inicio y fin de 2016, según grado de participación de docentes. Enfoque TRI.

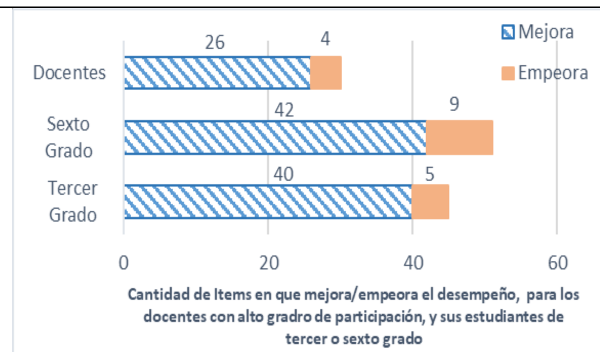


Figura 2. Variación de desempeño según porcentaje de respuestas correctas por ítem, para docentes con alto grado de participación y sus estudiantes de tercer/sexto grado. Enfoque clásico

Hay que remarcar que los resultados alcanzados suponen que se mantuvieron aproximadamente constantes las condiciones del contexto social, entorno de las familias y los hogares, prácticas de aula y vida institucional, es decir, que el cambio más notorio fue la implementación del proyecto, aunque con distintos grados de compromiso por parte de los docentes.

En suma, la propuesta de actualización revela un impacto positivo, demostrado con el mejor desempeño cognitivo de docentes con alto compromiso con el proyecto, así como sus estudiantes de tercero y sexto grados, frente al desempeño de docentes con bajo compromiso con las actividades realizadas. El mejoramiento de la comprensión matemática de los docentes y la forma eficaz de transmitirla a los estudiantes confirman el éxito de la propuesta.

Conclusión

Con base en la evaluación de esta propuesta de actualización en Educación Matemática, puede afirmarse que los docentes comprometidos en su participación alcanzaron una formación más profunda tanto en lo disciplinar como en lo pedagógico. Y que sus estudiantes mostraron mayor nivel de aprendizaje de los conceptos desarrollados, comparados a los del grupo de control.

Estos resultados indican que los lineamientos presentados en este estudio, en cuanto a características innovadoras para propuestas de actualización en Educación Matemática, podrían potenciar los beneficios de futuras capacitaciones dirigidas a docentes en ejercicio en Paraguay.

Referencias y bibliografía

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (November/December de 2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes it Special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Tsai, Y. (2010). Teacher's Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Education Research Journal,* 1(47), 133-180.

Buttice, N y otros. (2017). *Prácticas didáctico-pedagógicas innovadoras en escuelas públicas.* Investigación para el Desarrollo. Proyecto de Investigación Institucional: 14-INV-423. Ed. Anandurâ. Asunción. Paraguay.

Elías, R., Molinas, M., & Misiego, P. (2013). *Informe de Progreso Educativo Paraguay. El desafío es la equidad*. Asunción, Paraguay: Preal, Instituto Desarrollo.

Hanushek, E., & Rivkin, S. (2010). Generalizations about Using Value-Added Measures of Teacher Quality. *American Economic Review: Papers & Proceedings* (267-271).

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers 'Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.

Linacre, J. (2008). *A User´s Guide to Winsteps-Ministeps Rasch-Model Computer Programs*.

Näslund-Hadley, E., Martínez, E., Loera Varela, A., & Hernández Agramonte, J. M. (2012). Leading the Way to Math and Science Success: Challenges and Triumphs in Paraguay: *New research from the Inter-American Development Bank on the promotion of critical thinking in preprimary and primary education*. Inter-American Development Bank.

OCDE (2003). The PISA 2003 Assessment Framework. *Mahtematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OCDE.

PREAL, Instituto Desarrollo PARAGUAY, (2013). Informe de progreso educativo. Asunción, Paraguay.

Rasch, G. (1961). *On general laws and the meaning of measurement in phsychology*. Fourth Berkeley Simposium: 321-333.

Saravia, Luis y Flores, Isabel (2005). La formación de Maestros en América Latina. Estudio Realizado en Diez Países. Lima:PROEDUCA-GTZ.

Tymms, P., & Dean, C. (2004). Value Added in the Primary School League Tables. *A Report for the National Association of Head Teachers.* Durham: University of Durham.

UNESCO. (2014). Comparación de Resultados del Segundo y Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo SERCE y TERCE 2206-2013. Santiago: UNESCO.

Varas, L., Lacourly, N., López, A., & Giaconi, V. (2012). Evaluación del Conocimiento Pedagógico del Contenido para enseñar matemáticas elementales, *Enseñanza de las Ciencias*. 1(31), 171-187

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

La gestión del docente de matemáticas cuando usa las herramientas computacionales, como recurso pedagógico en el aula para el aprendizaje de sus estudiantes.

Alisson Dayan **Rodríguez** Carlosama
Universidad del Valle
Colombia
alisson.rodriguez@correounivalle.edu.co
Alison Vanessa **Martínez** Sarria
Universidad del Valle
Colombia
alison.martinez@correounivalle.edu.co
Ronald Andrés **Grueso**
Universidad del Valle
Colombia
ronald.grueso@correounivalle.edu.co

Resumen

La presente investigación, pretende estudiar la manera en la que los profesores están haciendo uso de las herramientas computacionales como recurso pedagógico y las decisiones que toma en relación con dichos recursos para la enseñanza de un objeto matemático, en particular el sistema de numeración decimal. Para caracterizar la gestión didáctica de los profesores se hará un estudio de caso en los distintos momentos de la práctica docente, la planeación y planificación, la puesta en acto y la sistematización de experiencias enmarcándose este en la teoría de la Orquestación Instrumental de Trouche, L. (2004) y las decisiones didácticas del docente que desarrolla Lima, I. (2006)

Palabras clave: Sistema de Numeración Decimal, Orquestación Instrumental (OI), Recurso Pedagógico, Práctica Docente, Herramientas Computacionales; Decisiones Didácticas.

Abstract

The present research aims to study the way in which teachers are making use of the computational tools as a pedagogical resource and the decisions to be made in relation to the resources for the teaching of a mathematical object, in particular, the decimal numbering system. To characterize the use of teachers, the planning and planning, the implementation and the systematization of experiences, framed in the theory of Trouche, L. Instrumental Orchestration, and the teaching decisions developed by Lima, I.

Key words: Decimal numbering system, Instrumental Orchestration (OI), pedagogical resource, teaching practice, Computational tools.

Introducción y contextualización de la problemática

Durante el primer semestre de este año, se desarrolló el curso de seminario de trabajo de grado orientado al diseño de un proyecto que aportará a nuestra formación como profesionales, en el cual nuestro interés se orientó a analizar al docente de matemáticas en su práctica. La mayoría de investigaciones que preceden el problema que se desarrolla en este trabajo, elaboran secuencias didácticas en el aula, además las investigaciones que analizan el uso de herramientas computacionales, arrojan conclusiones que califican y cuantifican el uso de estos recursos pedagógicos. Sin embargo, la problemática que se pretende atender en este trabajo, obedece a la siguiente pregunta orientadora ¿Cómo caracterizar la gestión del docente de matemáticas cuando usa las herramientas computacionales, como recurso pedagógico en el aula para el aprendizaje de sus estudiantes de grado segundo en la Institución Educativa Técnica Industrial Pedro Antonio Molina sobre el Sistema de Numeración Decimal?

El docente que se pretende analizar, cumple con algunas características, por ejemplo, es competente en el uso de las herramientas computacionales. En este trabajo el sujeto de análisis será el docente y el aspecto que se analiza dentro de su práctica, son las decisiones que toma dentro y fuera del aula de clases en torno a los recursos pedagógicos, particularmente las herramientas computacionales. En el transcurso de la investigación y desarrollo de este trabajo, se pretende hacer un estudio de caso para profundizar en las macrodecisiones y microdecisiones que el profesor toma dentro y fuera del aula, esto entendiéndolo como Lima (2006) y evidenciando estas decisiones en los momentos considerados por la Orquestación Instrumental de Trouche.

Adicionalmente, la investigación permite experimentar y trabajar en la consolidación de comunidades de práctica y aprendizaje en la medida en que se espera que las reflexiones aquí generadas estén dirigidas a la comunidad educativa, especialmente a los profesores en ejercicio y aquellos que aún están en la formación gradual.

Objetivos

General

Caracterizar la gestión didáctica del docente de matemáticas cuando usa herramientas computacionales, como recurso pedagógico en el aula para el aprendizaje de sus estudiantes de grado segundo en la Institución Educativa Técnica Industrial Pedro Antonio Molina sobre el Sistema de Numeración Decimal.

Especificos

Definir los criterios que orienten la caracterización del diseño y aplicación de una propuesta desde la perspectiva de la Orquestación Instrumental.

Analizar la gestión didáctica del docente desde la configuración de un recurso hasta la puesta en escena de un diseño desde la perspectiva de la Orquestación Instrumental y la relación entre la planificación y los niveles de la actividad docente.

Identificar posibles reflexiones acerca de la gestión didáctica del docente cuando implementa las herramientas computaciones en el aula, en relación con el SND, como un aporte a los estudios en formación docente.

Marco Conceptual

En este apartado se encuentran los referentes teóricos que sirven para consolidar diferentes criterios que aportarán para el análisis de la gestión docente. Estos referentes teóricos son: la orquestación instrumental, las decisiones didácticas, y el sistema de numeración decimal (cabe resaltar que será el objeto matemático que se trabajará en clase mediado por las herramientas computacionales)

En la *figura 1* se presentan los referentes que hacen parte del marco conceptual.

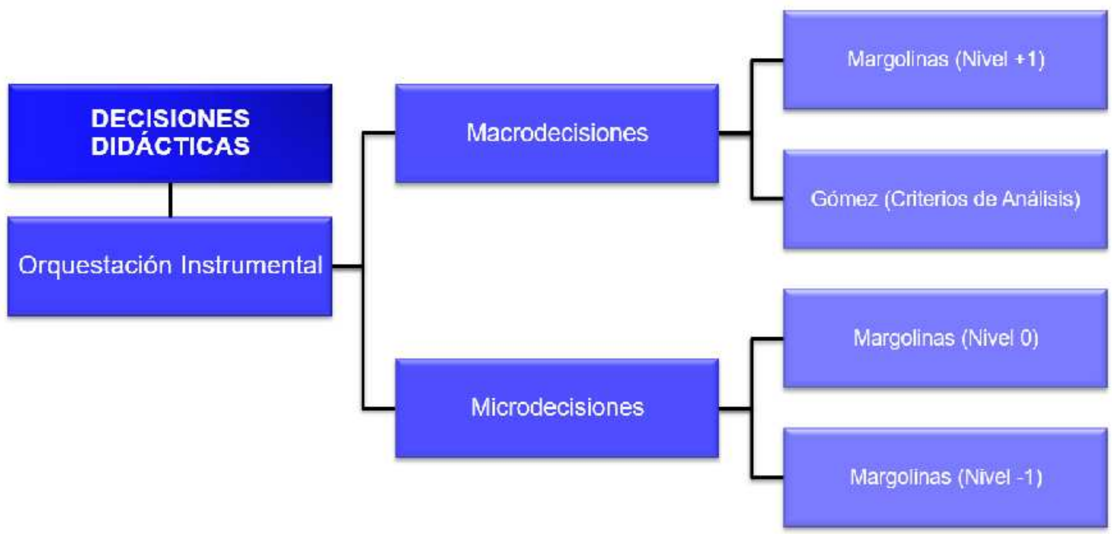


Figura 1. Articulación Conceptual

En él se destacan las decisiones didácticas desde Lima (2006), ya que es el interés global de la presente investigación, en ella se contemplan las *macro-decisiones* y *micro-decisiones* que plantea Margolinas (1995); estas decisiones son tomadas por el docente en la preparación de clase y durante la clase, respectivamente. Las macro-decisiones, se definen en la planificación del docente, por lo que se requerirá criterios que permitan analizar esas decisiones a-priori. Dentro de estos criterios, se tiene el Nivel +1 de Margolinas (2002), el cual nos habla de la actuación del docente en la planificación a modo general y con los criterios de análisis didáctico de Gómez (2002) se puede realizar un análisis más específico de dicha actuación. Para efectos de esta investigación se tendrán en cuenta tres tipos de análisis: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción, los cuales están propuestos por Gómez (2002) el primero está relacionado al contenido matemático escolar; el análisis cognitivo está orientado a las hipótesis que realiza el profesor acerca del progreso cognitivo de cada uno de sus estudiantes; finalmente, se aborda el diseño de actividades que favorecen el aprendizaje matemático, lo inmediatamente dicho se destaca desde el análisis de instrucción. Los análisis anteriormente mencionados pueden ser vinculados con la actividad del docente en el nivel +1 propuesta por Margolinas (2002).

Con el análisis didáctico propuesto por Gómez (2002) y los niveles de la actividad del docente que propone Margolinas (2002) se pretende una relación entre ambos autores que servirá para la elaboración de una rejilla de análisis para esta investigación.

Por otro lado, las micro-decisiones también serán de interés específico de esta investigación, pues se quiere observar esas decisiones que el docente toma en el acto. En este sentido, Margolinas (2002) plantea el Nivel 0, el cual caracteriza la acción del docente en el aula, es decir, aquellas decisiones que no se planean con anticipación a la clase. Así mismo, se pretende observar la manera en que esas decisiones (las micro) generan oportunidades de aprendizaje (en estudiantes) y de enseñanza (para el docente) en la clase. Estas oprtunidades van en correspondencia con el Nivel -1 que plantea Margolinas, desde donde se pretende analizar las devoluciones por parte del docente teniendo en cuenta las retroacciones del medio, es decir, la manera en que la gestión didáctica del docente ayuda a los estudiantes a comprender el recurso que se esta llevando acabo en el aula.

La Orquestación Instrumental (OI) de Trouche (2004) estará presenta durante las decisiones mencionadas anteriormente, es decir, el docente de matemáticas debe planear la clase con las herramientas disponibles en el aula, con el objetivo de integrarlos y así lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes, en este sentido, se piensa al docente como el director de una orquesta sinfónica cuyo propósito es que los músicos toquen una obra en la cual se integren todos los instrumentos, y para lograrlo, el director ya tiene estructurada una idea de cómo hacer esa integración, es decir, que requirió de una planeación para lograr el propósito mencionado.

En otras palabras la orquestación instrumental se está pensando en dos momentos, antes y durante la clase, en el antes se tiene a consideración una *configuración didáctica*, un arreglo de artefactos en el ambiente, es decir, una configuración de la ambientación de la enseñanza y los artefactos involucrados en ella; en el segundo momento, o sea, durante la clase, se evidencia una *actuación didáctica* la cual implica las decisiones *ad hoc* tomadas durante la enseñanza sobre cómo realizar la enseñanza promulgada en la configuración didáctica además del modo de explotación seleccionados (Pérez, 2014). No obstante en ambos momentos, el docente debe interesarse por el modo de aprovechamiento, el cual consiste en cómo el profesor decide explotar el recurso para beneficio de sus intenciones didácticas. Estos momentos incluyen las decisiones del docente con respecto al recurso que se trabajará en clase y los roles que tomarán los diferentes artefactos en pro del aprendizaje de los estudiantes, sobre el objeto matemático. Durante la clase, se desarrollarán diversos esquemas y técnicas por parte de los estudiantes, puesto que cada uno tendrá una manera diferente de realizarlo.

Posteriormente, se realiza el análisis de lo que se había planificado y lo que realmente sucedió en la clase, cabe resaltar que esta investigación no se enfocará en los estudiantes pero se tendrán en cuenta cuando haya una interacción del estudiante y el docente, debido a que pueden surgir diferentes oportunidades (aprendizaje o enseñanza) mediante las micro-decisiones

Metodología

Esta investigación se llevará a cabo bajo el enfoque cualitativo de investigación, tal y como lo plantea Hernández, R. Collado, C. Baptista, M. Méndez, S. y Mendoza, C. (2014). “El enfoque cualitativo utiliza la recolección y análisis de los datos para afinar las preguntas de investigación o revelar nuevas interrogantes en el proceso de interpretación” (p. 7). Las preguntas se puedan construir basándose en los antecedentes, ya que al tener definido un tema de interés, se busca bibliografía referente a él y se pueden encontrar en las conclusiones o en las recomendaciones, futuras investigaciones que pueden ser de interés para el investigador.

Es necesario resaltar que el enfoque cualitativo va de lo particular a lo general, pero para efectos de esta investigación, se realizará un análisis únicamente de lo particular, además, las hipótesis son generadas dentro del estudio y se estudian dentro del mismo proceso llegando a un resultado y en el caso de los métodos de recolección de datos, en este enfoque los instrumentos que se usen pueden tener preguntas abiertas para luego realizar una revisión de esos documentos y generar una sistematización de experiencias, además de poderlas analizar críticamente y del mismo será una evidencia de la investigación.

De esta manera, este trabajo de investigación se fundamenta en el enfoque cualitativo puesto que se basa en investigaciones previas para plantear el problema, en nuestros objetivos se hace evidente el caracterizar la gestión del docente de matemáticas teniendo en cuenta la orquestación instrumental para la planeación de la clase, en ellos hay una realidad que será observada y analizada desde un proceso particular, sin hacer generalizaciones sobre los conceptos estudiados.

Por otro lado, se realizará un estudio de caso con dos estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, las cuales orientan su trabajo de grado en integrar una secuencia didáctica en el aula de clase para el aprendizaje del SND en estudiantes de segundo grado de primaria, esto se hará teniendo en cuenta el enfoque cualitativo, con el cual se comprenderá la particularidad del caso.

El docente de matemáticas que se observará bajo el estudio de caso, deberá tener las siguientes características:

- Ser un docente de matemáticas en formación (formación gradual)
- Tener interés en la educación básica primaria
- Tener una formación en el uso de las herramientas computacionales
- En su planeación, debe incluir las herramientas computacionales para el desarrollo de su clase
- Desarrollar una clase en la que se promueva el conocimiento del SND

En nuestra investigación, se tendrá en cuenta un docente de matemáticas en formación, debido a que en algunas investigaciones, son ellos quienes diseñan y analizan lo que sucede con el estudiante y el applet (mediación instrumental), como es el caso de Pechené y Yela (2016), pero ¿quién analiza a los docentes de matemáticas? Por lo que en esta investigación nos centraremos en analizar la orquestación instrumental que realiza el docente de matemáticas cuando implementa los recursos computacionales en el aula.

El instrumento de medición que se trabajará en esta investigación será una entrevista no estructurada con la cual se quiere realizar una entrevista a priori y posteriori, esta última será diseñada desde la observación que se le realice al docente de matemáticas.

Ahora bien, de acuerdo con el marco conceptual se hará una rejilla de análisis con el propósito de analizar la gestión didáctica del docente, involucrando los criterios de Gómez (2002) y Margolinas (2002).

El siguiente aspecto corresponde a las fases que se llevarán a cabo en la investigación y las maneras en que se desarrollarán.

- Fase 1 (Documentación del problema de investigación): Se realiza una búsqueda de los antecedentes tanto local como internacional. Se tuvo en cuenta tres criterios para dicha búsqueda:

La gestión del docente de matemáticas cuando usa las herramientas computacionales, como recurso pedagógico en el aula para el aprendizaje de sus estudiantes.

1. La gestión del docente entorno a las decisiones que toma en clase
2. La orquestación instrumental en relación al papel del docente al configurar el recurso
3. El sistema de numeración decimal y su enseñanza

La idea es evidenciar lo que se ha hecho hasta el momento con cada uno de los criterios y así tener un punto de partida para esta investigación. En el marco conceptual se redactan diferentes referentes teóricos pero que se relacionan con la gestión didáctica del docente en torno a la orquestación instrumental de Trouche (2004) y las decisiones didácticas de Lima (2006).

- Fase 2 (Consolidación de la rejilla de análisis): De acuerdo con los referentes teóricos que se mencionan en el capítulo II, se pretende hacer una articulación de las categorías de análisis de Gómez (2002) y los niveles de la actividad del docente de Margolinas (2002), en este sentido, se establecerán unos criterios con ambas teorías que permitan analizar la gestión del docente en el aula cuando implementa herramientas computacionales. Por lo tanto, se intentará consolidar e involucrar aspectos como la planeación, las macro y micro decisiones, la articulación de los recursos pedagógicos con el objeto matemático y la puesta en acto del mismo.
- Fase 3 (Observación de la gestión docente en el aula): En esta fase se llevará a cabo la observación de la población (en este caso, las profesoras) y para ello se hará énfasis en observar los criterios relacionados con lo que se establece en la rejilla de análisis mencionada en la fase anterior.
  Los instrumentos para la recolección de información serán: los insumos que las profesoras utilicen para realizar la planeación, los análisis a priori, el diseño del recurso, las entrevistas (tanto la a priori como la posteriori) serán semi-estructuradas, es decir, serán entrevistas con preguntas abiertas con énfasis en los temas que son de interés para esta investigación, también se harán algunas observaciones a las docentes de matemáticas en el aula, en ese momento se llevará un registro de notas y audiovisuales, las cuales serán el objeto de análisis.
- Fase 4 (Análisis de los resultados): Teniendo en cuenta el marco conceptual y la rejilla propuesta, se analizarán los datos que fueron recolectados por medio de los instrumentos y a partir de ahí se darán los resultados con base a lo documentado anteriormente.
- Fase 5 (Conclusiones): En esta fase, de acuerdo a los hallazgos de la observación y la teoría implícita en las rejillas de análisis, se propondrán reflexiones y aspectos concluyentes sobre las características de la gestión docente en el aula cuando se involucran herramientas computacionales. Así mismo, se espera que mediante los resultados, se puedan explicitar elementos o criterios que permitan establecer la importancia de que un profesor pueda reflexionar sobre su propia práctica pedagógica y sea un aspecto clave en su formación como docente.
  También se tendrán en cuenta aspectos que permitan dejar cuestiones discutibles para posibles investigaciones futuras.

Algunas Conclusiones

Esta investigación es una propuesta de trabajo de grado que se está desarrollando en el momento, por lo tanto, a continuación se enuncian algunas conclusiones preliminares desde lo que se ha documentado en los antecedentes, en la problemática y algunos de los referentes teóricos abordados. Entre ellas estan las siguientes:

Proponer una investigación que estudie al docente en su práctica posibilita indagar de manera teórica y práctica sobre su quehacer y todo lo que implica ser un docente dentro y fuera del aula.

La teoría de la orquestación instrumental (OI) enmarca en distintos momentos y tipos la práctica docente, lo que nos permite observar de manera específica y delimitada al docente en la planeación y planificación de clase. La OI también nos permitió hacer una analogía entre un orquestador y el profesor, el profesor como orquestador, se prepara para la presentación; durante la clase, cuando desarrolla la clase el profesor trata de ejercer todo lo que orquestó, teniendo disponibilidad para el cambio de orquesta o melodía (Recursos pedagógicos y la manera en la que los presenta para que los estudiantes los empleen) y finalmente lo que sucede después de la clase, en la que el docente recoge conclusiones sobre su misma práctica y se aproxima a sugerencias para mejorar la presentación.

Las decisiones del docente y sobre todo las que toma en acto (dentro del aula) determinan el desarrollo de la clase, es decir todos los aspectos que se relacionan en una clase de matemáticas y los comportamientos que tienen los estudiantes frente a su proceso de aprendizaje.

Desde los antecedentes, se puede inferir que las instituciones educativas también han dejado de ser sistemas cerrados, para convertirse en grupos colaborativos y de intercambio que buscan aprovechar eficientemente los recursos disponibles a nivel mundial. Por lo tanto, los profesores también se ven inmersos en estos cambios y, por consiguiente, es indispensable que desarrollen las habilidades necesarias para aprender a realizar su tarea educativa en las condiciones actuales, aprovechar las potencialidades de las innovaciones tecnológicas y escalar en sus niveles de apropiación.

Bibliografía y referencias

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en Matemáticas. Revista EMA. 7(3), 251- 292.

Hernández, R. Collado, C. Baptista, M. Méndez, S. y Mendoza, C. (2014). Metodología de la Investigación. Ed 6. México: McGraw-Hill Interamericana.

Latorre, A., et al (1996). Bases metodológicas de la investigación educativa. En: Barcelona-Hurtado. (p.237)

Lima, I. (2006). De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs. Étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, Français. <tel-00119448>

Lerner, D. y Sadovsky, P. (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En: Parra, C. y Saiz, J. (comp.). Didáctica de las matemáticas. Buenos Aires, Paidós.

Margolinas, C. (2002). *Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur.* In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques (pp. 141-156). Grenoble La Pensée Sauvage.

Pérez, C. (2014, junio). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática. *Perspectiva Educacional: formación de profesores*. 53 (2), 129-150.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. International Journal of Computers for Mathematical

Learning, 9(3), 281–307.

Vega, M. y Garzón, D. (2014). *Los recursos pedagógicos en la enseñanza de la geometría: estudio de casos*. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali Colombia, recuperado de: https://campusvirtual.univalle.edu.co/moodle/pluginfile.php/551816/mod_resource/content/1/Recursos%20Pedag%C3%B3gicos.pdf

Usando el cuerpo para aprender matemática, diseño de tareas enactivas

Paula Fernández Padilla
Colegio Sagrados Corazones
Chile
pfernandez@colegiosscc.cl

Elisabeth Ramos Rodríguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
elisabeth.ramos@pucv.cl

Patricia Vásquez Saldías
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
patricia.vasquez@pucv.cl

Resumen

Este taller pretende sensibilizar en los participantes su mirada sobre el rol que puede tener lo enactivo en las aulas de matemática, a partir de la vivencia de una situación de enseñanza enactiva para la enseñanza de figuras y cuerpos geométricos y de la generación de propuestas de enseñanza desde este constructo. Se dará a conocer elementos teórico-prácticos de la experiencia, el diseño del plan de clases, que trae consigo, la puesta en escena de la clase: donde se encuentran, la descripción, objetivos, las tareas, las devoluciones, la evaluación de la clase, los tiempos, el rol del profesor. Esta experiencia logra dar cuenta sobre los aprendizajes significativos que tienen los estudiantes de esa edad, en torno a la geometría y de las habilidades que han desarrollado los alumnos.

Palabras clave: enactivo, cuerpo, conocimiento, aprendizaje significativo, tareas matemáticas.

Introducción

Durante el siglo pasado, el campo de la psicología emergió como sustento para nuevos paradigmas educativos, que según el contexto social e histórico conducían los métodos de enseñanza en una sala de clases. Corrientes como el conductismo, el constructivismo entre otras, avalaban la forma de aprender y también la de enseñar. Es en este contexto y en la década de los años 60, que Jerome Bruner surge con sus estudios acerca de la percepción y la representación, otorgándole a esta última un rol activo en el aprendizaje (Leahey, 1998).

Uno de los principios postulados por Bruner (1984) sobre el desarrollo del conocimiento, y por ende para su concepto de enacción, era el innegable y determinante vínculo que debe existir entre la cultura del individuo y la naturaleza de esta con el desarrollo de sus capacidades cognitivas. Existe entonces, una validación del entorno cultural y el desarrollo del propio conocimiento. Esta concepción, se convierte en un complemento de lo que Varela Thompson y Rosch (1992) en el contexto de las ciencias cognitivas, han desarrollado como el enfoque enactivo. Este nuevo concepto, evolucionado; es determinado por dos factores: la percepción como acción y las estructuras cognitivas derivadas de los modelos sensoriomotores del individuo. Según Varela, Thompson y Rosch (1992):

El punto de partida del enfoque enactivo es el estudio de cómo el perceptor puede guiar sus acciones en su situación local. Como estas situaciones locales cambian constantemente como resultado de la actividad del perceptor según su propia estructura sensorio motriz (p.203).

De esta manera, la propia estructura del individuo y su corporización, determinan cómo realiza su acción y a su vez, esta acción se vincula con sus propias situaciones ambientales.

Diversas experiencias exitosas involucran el cuerpo en el aprendizaje de las matemáticas, el uso de gestos con las manos, el movimiento y la corporalidad son desencadenantes de conceptualización matemática en saberes diversos. Es así como Delgado (2016) despliega una serie de tareas enactivas para la adquisición y consolidación del concepto de función real de variable real. Así mismo, lo hacen Fernández y Arias (2013) para el desarrollo de nociones matemáticas espaciales en educación infantil, o en la enseñanza de estrategias para resolución de problemas de equivalencias matemáticas de Novack, Congdon, Hemani-Lopez y Goldin-Meadow (2014) para un tercer grado. Es posible también evidenciar las prácticas enactivas interdisciplinariamente, así lo demuestra Hutto, Kirchoff, y Abrahamson (2015) ampliando el enfoque enactivo a dominios de la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas (STEM) demostrando de esta manera, la versatilidad del mismo.

En este contexto, dentro del proyecto ProMatEnactiva[1] nos planteamos aprovechar el constructo enactivo de manera de que estudiantes de pregrado se empoderen de él para su futura práctica docente. Es así como llevamos a cabo una Clase Pública para futuros profesores de las distintas universidades chilenas donde se realizó una clase enactiva sobre figuras y cuerpos geométricos. En este taller nos proponemos sensibilizar la mirada a los asistentes sobre el rol que puede tener lo enactivo en las aulas de matemática a partir de dos puntos de vista: la generación de propuestas de enseñanza enactivas y la vivencia de la situación de enseñanza enactiva trabajada en la Clase Pública.

Marco de referencia

Centramos nuestro estudio desde un marco de referencia centrado en lo enactivo. Bruner (1966) define el sistema enactivo como la representación hecha mediante la acción justificándola de la siguiente manera: "sabemos muchas cosas de las que no tenemos imágenes ni palabras para

[1] Proyecto ProMatEnactiva, 57335022, "Fortalecimiento de la formación inicial desde la conexión entre la teoría y la práctica", financiado por DAAD (Servicio Alemán de Intercambio Académico) desde la Universidad de Bielefeld.

explicarlas; y que resultan muy difíciles de enseñar a otro mediante términos, diagramas o ilustraciones" (p.14). De esta manera, diferencia a las imágenes y dibujos sintetizadores, pertenecientes al sistema icónico; a los símbolos y el lenguaje del tercer sistema; de la representación hecha acción o enactiva. Nace de esta manera, el concepto de enacción, alusivo a las representaciones, carentes de imágenes y/o símbolos, utilizadas como recurso del individuo para expresar conocimiento y para aprender, mediante la acción. Aquí un ejemplo clarificador del mismo autor:

"Si tomamos como ejemplo un nudo, lo primero es aprender la acción de anudarlo y cuando decimos que conocemos el nudo nos referimos a un acto habitual que hemos dominado y que podemos repetir. El hábito está organizado secuencialmente en un esquema que mantiene unidos a sus componentes secuenciales, y que además guarda una estrecha relación con otros actos habituales que facilitan o interfieren, tanto en su aprendizaje como en su ejecución" (Bruner, 1984, p.122).

Bruner (1966) dedicado a la solución de problemas, la determinación de conceptos, el pensamiento y el reconocimiento perceptivo, se diferencia respecto a las ideas piagetanas, regidoras de la naturaleza del conocimiento de esa época y estructuradas en sus estadios de desarrollo infantil; estableciendo procesos y profundizando en la representación como factor determinante en el desarrollo intelectual de los seres humanos, acuñando de esta manera, nuevos conceptos en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Existe en Bruner (1966) una búsqueda constante por significar la representación como parte del conocimiento. Entendiéndola como la aplicación de un modelo basado en las experiencias personales del individuo; la representación es un conjunto de reglas mediante las cuales se conserva lo experimentado en diferentes acontecimientos (Bruner, 1966; 1984). En estos modelos de representación, se categorizan tres subtipos conocidos como el enactivo, icónico y simbólico. Estos sistemas son los medios que determinan el conocimiento: "el desarrollo intelectual parece seguir el curso de tres sistemas de representación hasta que el ser humano es capaz de dominarlos" (Bruner, 1966, p. 16). Esta representación, posee a su vez un principio de selectividad, no todo debe ser necesariamente representado en los tres sistemas; existiendo una dependencia determinada por el objetivo de la representación inicial, es decir; el tipo de sistema seleccionado para representar está sujeto a la intencionalidad de lo que se quiere lograr con dicha representación (Bruner, 1984).

Si bien es posible establecer ciertas diferencias entre el concepto de enacción planteado por Bruner (1966) y el enfoque de Varela et al. (1992), estas no son excluyentes. Ambos planteamientos tienen por objetivo comprender y lograr aprendizaje mediante la acción, el cuerpo, lo sensorio motriz, la percepción; entendiendo que aquel que aprende lo hace desde su experiencia y según cómo entiende su entorno; para luego estructurar cognitivamente los conceptos matemáticos.

Desde una mirada constructivista, la enacción en matemáticas se hace visible exitosamente en diversas propuestas metodológicas. Así, podemos nombrar la metodología CPA (Concrete-Pictorial-Abstract) en Singapur, el método EIS Prinzip (Enaktiv-Ikonisch-Symbolisch) en Alemania y el método COPISI en Chile, con sus tránsitos entre lo concreto, pictórico y simbólico (Soto, 2015). En todas ellas, se considera una intervención manipulativa de parte del estudiante, generando en él imágenes mentales que lo harán a futuro prescindir de la acción para finalmente operar únicamente con símbolos. Esta tarea de manipular material concreto, desde un enfoque enactivo y en el marco de las ciencias cognitivas, se convierte en un complemento al considerar que la enacción involucra un proceso perceptivo y sensorio motriz de parte del estudiante al momento de consolidar conceptos matemáticos; generando conocimiento al utilizar el propio cuerpo. De esta manera es posible establecer que, desde lo sensorio motriz, el estudiante crea conceptos matemáticos; el aprendizaje motor se une con la conceptualización (Abrahamson y Trninic, 2015).

Marco metodológico

Este taller se desarrollará considerando tres momentos claves:

Momento 1: Una enseñanza enactiva (40 minutos). Se presentará una propuesta de aula para trabajar en grupos las figuras y cuerpos geométricos desde lo enactivo (figura 1), en donde a cada grupo se le entregará una caja con elementos de la vida cotidiana con forma de figuras o cuerpos geométricos.

Geometría silenciosa y cuerpo

Cada grupo ha recibido una caja con un objeto. Obsérvenlo en silencio para que sólo su grupo lo conozca. Acuerden entre ustedes de qué manera la pueden representan usando solo su cuerpo, sin hablar. Para ello, todos los integrantes del grupo deben participar, ya sea haciendo la figura individualmente con su cuerpo, sus manos, o bien representando una parte de la figura en conjunto con el cuerpo o parte de ellos, entre todos o algunos integrantes del grupo.

Figura 1: Situación de aula para trabajar enactivismo en matemática

Esta propuesta será trabajada por los participantes del taller, de manera que “vivan” la experiencia de usar su cuerpo para el aprendizaje. Se realizará la puesta en común de manera de reflexionar sobre el uso del cuerpo como medio para el aprendizaje.

Momento 2: Profundización (30 minutos). Se entregarán herramientas teóricas referentes a la enacción con propósito de que el asistente pueda incorporar este constructo en su quehacer docente.

Momento 3: Creando con enacción (50 minutos). Considerando que en la práctica cotidiana del profesor cobra la relevancia el diseño de situaciones de aprendizaje de la matemática (Ponte, 2004), se desafía a los participantes diseñar en grupos una situación de aprendizaje desde lo enactivo para la enseñanza de un concepto matemático a elección. Se realiza puesta en común y reflexiona en torno a las fortalezas y complejidades que este trabajo involucra.

Conclusiones

Se espera que a partir del taller se sensibilice a los participantes sobre la importancia de considerar el enactivismo como una herramienta que permite avanzar hacia una enseñanza de la matemática de calidad.

Dado el tipo de clase que se lleva a cabo, esta logra que los alumnos den cuenta de sus aprendizajes en torno a la geometría, dando ejemplos y definiciones sobre la diferencia de figuras en 2d y 3d. Además, de las habilidades y actitudes sobre las matemáticas, como es el trabajo en equipo, la argumentación y el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas en el grupo curso.

El enfoque enactivo idea el aprendizaje en la interacción del ser que aprende con su medio y cómo dicha acción modifica el conocimiento del entorno. Estamos de acuerdo con Hutto, Kirchoff, y Abrahamson (2015) en que esta interrelación aplicada conscientemente desde la enseñanza de la matemática genera cambios en las concepciones tradicionales de aprendizaje, permitiendo de esta manera concebir la construcción del conocimiento matemático de una forma distinta a la experimentada tradicionalmente.

Referencias y bibliografía

Abrahamson, D., Trninic, D. (2015). Bringing forth mathematical concepts: signifying sensorimotor enactment in fields of promoted action. *ZDM*, *47*(2), 295–306.

Bruner, J. (1966). *Hacia una teoría de la instrucción*. Harvard, MA: Belknap Press of Harvard University Press.

Bruner, J. (1984). *Acción, Pensamiento y Lenguaje*. Madrid: Alianza.

Delgado, M. (2016). *Comunicación icónica y gestual en Análisis Matemático*. Pi-InnovaMath, (1)

Fernández, B. y Arias J. (2013) La expresión corporal como fuente de aprendizaje de nociones matemáticas espaciales en educación infantil. *Retos: nuevas tendencias en educación física, deporte y recreación*, *24*, 158-164

Hutto, D., Kirchoff, M., & Abrahamson, D. (2015). The enactive roots of STEM: rethinking educational design in mathematics. *Educational Psychology Review, 27*(3), 371-389.

Leahey, T. (1998). *Historia de la psicología: principales corrientes del pensamiento psicológico*. Madrid, España: Prentice Hall Iberia.

Novack, M., Congdon, E., Hemani-Lopez, N., & Goldin-Meadow, S. (2014). Psychological science. *Psychological Science, 1*, 8.

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En: Giménez, J., Santos, L. y Ponte, J. P. (Coord.). *La actividad matemática en el aula* (25-34). Barcelona: Graó.

Soto, J. (2015). La didáctica de la matemática vista desde la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile. *Anales de la Universidad de Chile*, *8*, 95-117.

Varela, F., Thompson, E., & Rosch, E. (1992). *De cuerpo presente: Las ciencias cognitivas y la experiencia humana*. Barcelona, España: Gedisa.

A abordagem TPACK para a integração da calculadora científica na prática docente através da metodologia Lesson Study

Jalman **Lima**
Université Catholique de Louvain
Bélgica
jalmanlima@gmail.com

Yuriko Yamamoto **Baldin**
Universidade Federal de São Carlos
Brasil
yuriko@dm.ufscar.br

Resumo

Considerando a questão “Como integrar a calculadora científica em sala de aula como um instrumento de aprendizado, sob perspectiva de formação de professores?” o objetivo deste trabalho é apresentar uma discussão sobre a integração da calculadora científica na prática docente, para além da inserção, fundamentada no Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo – TPACK. A pesquisa conta com a parceria das escolas públicas do estado de São Paulo, Brasil, em cursos de formação continuada que trabalham articulações do conteúdo curricular com a prática efetiva nas salas de aula. O planejamento, elaboração e execução dos roteiros didáticos com uso da calculadora científica foram fundamentados na metodologia Lesson Study como um processo de desenvolvimento profissional. Os resultados obtidos nos primeiros módulos possibilitam a interdisciplinaridade com outras áreas de conhecimento, indicando apropriação pelo professor do papel integrador da calculadora científica como uma alternativa de prática docente reflexiva para efetiva aprendizagem dos alunos.

Palavras chave: integração de tecnologia, calculadora científica, TPACK, Lesson Study, formação de professores, desenvolvimento profissional de professores, aprendizagem participativa.

Introdução

Há mais de três décadas a tecnologia digital tem feito parte de estudos de pesquisadores em Educação Matemática no Brasil e no exterior. Dentre as tecnologias digitais, encontra-se a calculadora científica, uma das peças controversas de tecnologia educacional e de sua presença em sala de aula.

O mecanismo para especificar vários tipos de uso da calculadora no ensino básico e superior pode tomar diversas formas. Nos documentos curriculares oficiais é possível encontrar referências ao uso (ou não) da calculadora, bem como aos tipos específicos de calculadoras: básicas, científicas, gráficas e calculadoras com CAS (Computer Algebra System).

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1997) para o Ensino Fundamental e Médio permitem e encorajam o uso de calculadoras e as trazem como uma ferramenta que "No tratamento desses temas, a mídia, as calculadoras e o computadores adquirem importância natural como recursos que permitem a abordagem de problemas com dados reais e requerem habilidades de seleção e análise de informações. " (Brasil, 1997, p. 45).

Além disso, a Base Nacional Comum Curricular- BNCC (Brasil, 2017) para o Ensino Fundamental, recém aprovada e em elaboração para o Ensino Médio, traz, na página 96, como importante o uso de calculadoras "para avaliar e comparar resultados", sem, contudo, fazer referência sobre os tipos de calculadoras para os ensinos fundamental e médio. No entanto, não são apenas os tipos de calculadoras que estarão no foco da educação de professores atualizados para a realidade do século 21.

Neste trabalho, argumentamos que a simples menção à importância do papel das tecnologias na sala de aula, em particular das calculadoras científicas, não orienta os professores em exercício ou os cursos que estão a formar os futuros professores, sobre o que significa efetivamente trabalhar o conteúdo curricular das disciplinas específicas com o uso das tecnologias que impliquem na aprendizagem efetiva e consolidada do conteúdo curricular, com vistas à educação do cidadão inserido no mundo que convive com a tecnologia.

Kissane (2012) afirma que *"*... na prática é muito improvável que (os professores) usem materiais que não sejam oficialmente aprovados ... por essa razão, é bastante incomum que os professores de qualquer país usem calculadoras … em sala de aula se o currículo oficial e seu exame associado não sancionarem tal uso."

No Brasil, a situação é similar à descrita, com agravante dos documentos PCN ou BNCC não oferecerem aos professores a segurança e a confiança em mudar seus hábitos de métodos no ensino e aprendizagem na sala de aula, além de não haver orientações sobre "como mudar".

Isso coloca um desafio para motivar o uso de calculadoras no ensino básico para efetivamente cumprir as recomendações oficiais de integração da tecnologia no ensino e aprendizagem. Pelas nossas experiências, os professores carecem de formação para utilizar a calculadora científica como instrumento de aprendizado em sala de aula e, por conseguinte, poder desmistificar o seu papel de ser apenas um instrumento de cálculo e que não proporciona o desenvolvimento da compreensão da matemática na aprendizagem durante uma aula. O projeto do nosso trabalho tem como objetivo exatamente a formação continuada de professores que se tornem capazes de incorporar a mudança de concepção do papel de uma calculadora científica.

Nesta direção, apoiamos em Neves e Bittar (2015) que fazem uma importante observação sobre a carência de formações para o uso de tecnologias nos cursos de licenciatura do Brasil que podem contribuir para fomentar as discussões sobre o tema.

"Observávamos que os demais professores [...] careciam de formação para utilizar as tecnologias, pois muitos diziam que durante o processo de formação inicial, os cursos de licenciatura não haviam contemplado discussões e desenvolvimento de práticas para o uso das atuais tecnologias disponíveis na escola. Alguns professores afirmavam que ... ao preparar os planejamentos, incluíam as tecnologias como recursos a serem utilizados no desenvolvimento de suas aulas, porém, na prática pedagógica, isso não acontecia." (Neves & Bittar, 2015)

É possível perceber que o trabalho do professor na educação básica se dá mediante desafios (Purificação, Neves e Brito, 2010). Neste contexto, as formações continuadas figuram-se como uma ferramenta essencial no processo constante e permanente de aperfeiçoamento dos professores, uma vez que permitem que estes agreguem conhecimento capaz de gerar transformação e impacto em suas práticas pedagógicas em sala de aula. Acreditamos que pesquisar, investigar, discutir e refletir representam, e isso requer, a busca permanente por formações continuadas que propiciem melhoria da prática pedagógica em sala de aula.

O objetivo deste trabalho é, portanto, trazer a discussão sobre a integração da calculadora científica na prática docente dentro do contexto de formações de professores, e para isso a metodologia de Pesquisa de Aula - Lesson Study norteia as propostas de atividades de formação do nosso projeto, como ferramenta de melhoria da prática na sala de aula, como apontada em Baldin e Felix, (2011).

A estrutura deste artigo apresenta a seguir tópicos de discussão sobre o quadro teórico de TPACK – Conhecimento tecnológico e pedagógico de conteúdo, em que se fundamenta a proposta das atividades do curso de formação continuada do projeto, o potencial da calculadora científica como promotor da interdisciplinaridade da nova base curricular, e da análise do potencial pedagógico das fases da Lesson Study em promover a capacitação do professor em alternativas didáticas com uso de tecnologia.

Conhecimento Pedagógico, Tecnológico de Conteúdo (TPACK)

No contexto de integração de tecnologias em sala de aula, Mishra e Koehler (2006) introduziram o conceito de Conhecimento Tecnológico e Pedagógico de Conteúdo, conhecido como TPACK, que deriva do Conhecimento Pedagógico de Conteúdo - PCK de Shulman (1986), que é o conhecimento requerido do professor para ensinar determinada disciplina dentro do currículo. O TPACK identifica a natureza do conhecimento requerido pelos professores para a integração da tecnologia em sua prática, ao mesmo tempo em que aborda a natureza complexa, multifacetada e situada do conhecimento do professor. O TPACK suporta um quadro teórico que combina três áreas de conhecimento: conhecimento tecnológico, conhecimento pedagógico e conhecimento de conteúdo, e estuda como estes conhecimentos se conectam entre si, levando ao contexto de ambiente escolar, gestão da sala de aula e das características sociais dos alunos envolvidos. Esse conhecimento é diferente do conhecimento de um especialista em tecnologia ou disciplinar e também do conhecimento pedagógico geral compartilhado pelos professores em todas as disciplinas. O TPACK é a base do ensino eficiente com tecnologia, e requer uma compreensão do professor da representação de conceitos que usam as tecnologias e de técnicas pedagógicas que usam tecnologias de maneira construtiva no ensino de disciplinas específicas. Isto requer conhecimento do que torna os conceitos difíceis ou fáceis de aprender, assim como saber como a tecnologia pode ajudar os alunos a enfrentar problemas com suas dificuldades, considerando o conhecimento prévio dos alunos. Ainda o TPACK pode ser analisado dentro das teorias da epistemologia, e do conhecimento de como as tecnologias podem ser usadas para construir o conhecimento existente e desenvolver novas epistemologias ou fortalecer as antigas. Estes aprofundamentos não são tratados neste artigo, por fugir do escopo.

No nosso trabalho a calculadora científica é a tecnologia que utilizamos para potencializar as atividades didáticas que possam trazer alternativas para o ensino e aprimoramento da aprendizagem significativa dos problemas de matemática e ciências (física, química, biologia), e de outras ciências dentro do contexto de atualização curricular. E o conceito de TPACK embasa as nossas propostas de roteiros didáticos.

A calculadora científica como ferramenta que possibilita a interdisciplinaridade

Um ponto importante do nosso trabalho é destacar a calculadora muito além de um dispositivo para manipulação aritmética. As calculadoras científicas evoluíram desde a primeira calculadora científica nos anos 70. Nessa época, a calculadora era usada principalmente para realizar cálculos longos, incluindo os cálculos de interesse de cientistas e engenheiros.

Segundo Kissane (2015), a calculadora científica foi aperfeiçoada nos últimos quarenta anos. Em vez de ser uma ferramenta para cientistas e engenheiros, ela tem sido aprimorada para servir como ferramenta para educação matemática.

A calculadora no contexto educacional é usada para representação de objetos matemáticos e conceitos, realizar conexão de significados, aumentar o entendimento sobre o significado do conceito numérico e promover o letramento matemático. Por exemplo, para estudantes do ensino fundamental anos finais, a calculadora científica surge como uma importante ferramenta para provocar curiosidade e interesse de usuários, como ilustrado na Figura 1 abaixo.

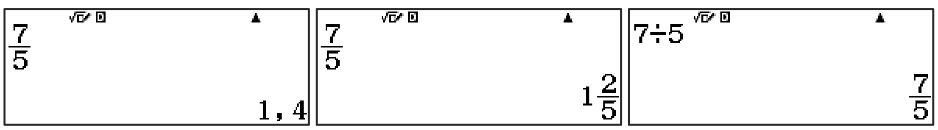


Figura 1. Reapresentando diferentes representações de frações, decimais e divisão.

A calculadora científica demonstra sua função mais promissora para o ganho educacional, quando é utilizada como dispositivo de exploração. Para ilustrar, consideremos estudantes aprendendo potenciação. Uma calculadora científica permite a exploração do significado de potências, especialmente quando os fatores dos números podem ser revelados.

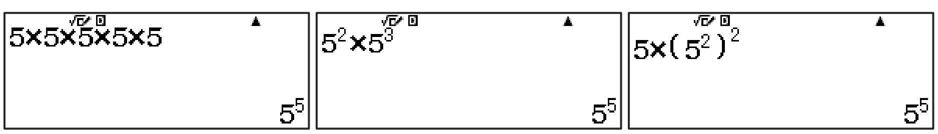


Figura 2. Explorando e entendendo potências.

Esta ferramenta possibilita a interdisciplinaridade preconizada pela nova Base Nacional Comum Curricular e já apontada pelos PCN e que ainda não está assimilada nas salas de aulas, a não ser em programas prontos de computadores. O domínio de linguagem matemática por meio da exploração de propriedades e de comparações de resultados numa calculadora abre as portas para trabalhar problemas de outras áreas de conhecimento que usam a linguagem matemática e notações científicas para seus conteúdos. Por exemplo, em um módulo para aulas de biologia do Ensino Médio, em execução no nosso projeto, a calculadora científica surge como uma valiosa ferramenta para conectar conceitos biológicos e matemáticos, tal qual para investigar o Gasto Energético Basal (GEB) de cada indivíduo para os próximos 20 anos, bem como o GEB quando estiver com 50 anos.

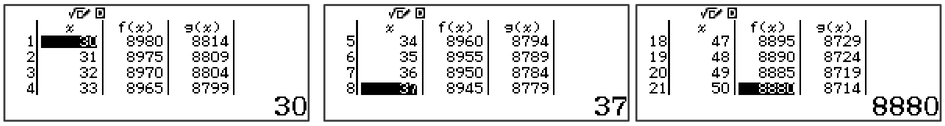


Figura 3. Ilustrações de telas da calculadora presentes no Roteiro de Aula sobre Nutrição: "Quanto necessitamos comer diariamente?".

Ao integrar a calculadora científica no roteiro de aula “Quanto necessitamos comer diariamente?”, é necessário entender: as funções da calculadora científica (Conhecimento Tecnológico), entender a maneira pela qual o assunto (conteúdo específico, Nutrição) pode ser mudado pela aplicação da calculadora científica[1] (Conhecimento Tecnológico de Conteúdo) e como a calculadora científica pode ser incorporado dentro da metodologia de resolução de problemas, bem como considerar a problemática do planejamento apropriado de aulas (Conhecimento Pedagógico de Conteúdo). Para elaborar propostas de roteiros de aula integrada nesse sentido, a pesquisa leva em consideração questões que se levantam naturalmente: “Como os professores adquirem uma compreensão das relações complexas entre conteúdo, pedagogia e calculadora científica?” A abordagem padrão sugere que os professores simplesmente precisam ser treinados para manipular a calculadora científica. Partindo da necessidade de criar cursos de aperfeiçoamento especiais para professores na integração da tecnologia na sua prática docente, a pergunta natural surge: “Que metodologia é indicada para mudança de paradigma e integrar a calculadora científica na prática pedagógica do professor?”

A metodologia Lesson Study oferece um caminho para nortear o planejamento e execução das atividades e a reflexão sobre os resultados das mesmas e está presente no nosso projeto.

A Metodologia Lesson Study

No sentido de apontar uma mudança de paradigma para as formas de ensino da Matemática básica, como previstas nos PCN, a Lesson Study vem contribuir para capacitar os professores, de modo a promover melhorias na qualidade de aprendizagem de seus alunos (Baldin & Guimarães, 2012), (Baldin, 2010).

A Lesson Study é uma forma de desenvolvimento profissional realizado por ações colaborativas de professores que aprendem a pesquisar a aula. O Lesson Study é reconhecido internacionalmente como sendo uma forma extremamente eficaz de desenvolvimento profissional na mudança de práticas de sala de aula. (Isoda et al. 2007). Da mesma forma, ensinar através da resolução de problemas estruturados é amplamente reconhecido para desenvolver a capacidade dos alunos de pensar matematicamente e resolver problemas. O foco deste trabalho não é discutir a metodologia como estratégia para melhorar a prática do professor e a aprendizagem do aluno dentro da sala de aula (Baldin, 2009), mas sim fundamentar com esta metodologia a elaboração da proposta dos roteiros de aulas dos módulos do projeto. Para maiores detalhes da adequação necessária para impactar a prática na sala de aula referimo-nos a (Baldin & Felix, 2011).

Na próxima seção apresentamos os princípios básicos da metodologia Lesson Study em que se baseia o nosso projeto.

[1] O modelo usado foi a calculadora científica CASIO ClassWiz fx-991 LAX.

Os Princípios da Lesson Study

A Metodologia da Lesson Study consiste em atividade de pesquisa de uma aula (ou uma sequência de aulas) por professores, sendo uma atividade de grupo formado por pesquisadores, professores, coordenadores pedagógicos e até dirigentes. Em outras palavras, o Lesson Study é uma forma de investigação de uma aula-pesquisa sobre um tópico selecionado dentro do currículo escolar. O grupo pesquisa o planejamento (*conteúdo específico, estratégias de encaminhamento dentro da sala de aula, questionamentos adequados para estimular a aprendizagem participativa dos alunos*, *e previsão de possíveis soluções dos alunos*), para assim elaborar uma sequência didática a ser executada. Durante a execução do plano por um professor, o grupo observa a eficácia do plano elaborado de acordo com as evidências de aprendizagem dos alunos e analisando as expectativas iniciais. Após a realização da aula, o grupo se reúne para reflexão e avaliação do plano de aula como um todo, reunindo a auto-avaliação do professor com as contribuições críticas do grupo. A aula, assim analisada, pode retomar o ciclo com planejamento aperfeiçoado. (Isoda et al, 2007), (Fernandez & Yoshida, 2004), (Isoda, Arcavi, & Mena-Lorca, 2012).

Dentre todos as etapas do ciclo de uma Lesson Study o planejamento de uma aula com os ingredientes como citados acima constitui a pedra fundamental de todo o processo. Portanto, nos cursos de educação continuada de professores que almejam introduzir a Lesson Study como estratégia para promover mudança de paradigmas nas ações do professor na sala de aula, deve-se focar especialmente na aprendizagem do professor em "planejar uma aula" sob uma perspectiva diferente, mais completa e com dimensões que permitam a avaliação em si da aula durante a observação da mesma durante sua realização, assim como rever os seus olhares sobre a aprendizagem participativa do aluno através da execução do plano. (Baldin, 2010).

Tendo em vista que o nosso projeto está em execução com diversos módulos realizados e outras por realizar, notamos que o processo gradual de aprendizagem dos professores do grupo começa com a participação no plano de aula que é trabalhado inicialmente pelos pesquisadores para ser proposta para que o grupo a vivencie, para assim o grupo consiga acompanhar e compreender os itens do plano de aula, como parte da sua aprendizagem. É uma adaptação do ciclo da LS fundamentada por TPACK, dado que a inclusão da ferramenta tecnológica no plano de uma aula requer uma atenção redobrada na pesquisa.

Portanto, como Baldin (2009) afirma da necessidade de adaptar a metodologia de Lesson Study como Pesquisa de Aula, aos contextos da realidade brasileira nos cursos de educação de professores, o nosso projeto foca com prioridade o roteiro de aulas em que a integração da calculadora científica é realizada como uma aula inédita de resolução de problema-tema enaltecendo o significado do conhecimento de disciplinas específicas pelas facilidades que a calculadora traz para instigar a curiosidade, a exploração pela descoberta, a compreensão das possibilidades de generalizações e também da análise das limitações da calculadora.

Os passos da Lesson Study permitem a observação da eficácia de uma aula por meio de um planejamento cuidadoso, para então poder avaliar os resultados da aprendizagem dos alunos, que é o objetivo principal de uma aula.

Exemplo do projeto em escolas da rede estadual de ensino

A parceria do nosso projeto com a rede estadual de ensino básico, por meio da Diretoria de Ensino Regional de José Bonifácio, no estado de São Paulo, Brasil, está permitindo realizar a médio e longo prazo as capacitações de professores no uso de calculadora científica, usando a metodologia Lesson Study para efetivamente levar os professores participantes a compreender a importância do planejamento criterioso de uma aula com integração da tecnologia, e trabalhando o conteúdo do currículo oficial em contexto ampliado de conectar os tópicos com dimensões de competências e habilidades preconizados em documentos oficiais, por exemplo, incluindo a educação financeira, educação pela cidadania, interdisciplinaridade com outras áreas como Física, Biologia, estando a Geografia e Química em planos imediatamente futuros. Além disso, o roteiro foi planejado para mudar a dinâmica de participação dos alunos para engaja-los na produção de suas respostas.

Um dos exemplos recentes do nosso projeto foi realizado por meio do roteiro pesquisado, testado por simulações pelos participantes antes de levar a sala de aula dos participantes, e depois analisado através de registros, fotos e questionários de avaliação. O tema foi a probabilidade de acerto no sorteio de loteria, a Mega Sena, que consiste em apostas em 6 escolhas entre os números de dois dígitos, de 01 a 60. Um texto motivador e explicativo foi colocado no início do roteiro com as regras da loteria, e a aula foi planejada com uma proposta de inclusão dos participantes vivenciando inicialmente as possibilidades dentro da sua turma de alguém acertar o prêmio. As primeiras atividades foram para que os professores identificassem o objetivo de trabalhar o pensamento de análise combinatória dentro de uma situação problema do cotidiano, por meio do questionamento "Qual é a melhor aposta?" e vivenciar as reações que ocorreriam dentro da sua sala de aula. O roteiro é cuidadosamente elaborado por meio de atividades, no início lúdicas, mas inquisidoras à medida que se exploram as probabilidades, as técnicas de elaborar a árvore de possibilidades e os cálculos mediados pela calculadora. A calculadora se mostra especialmente útil ao promover o senso numérico ao explorar a ordem de grandeza dos números que surgem nas diversas possibilidades de aposta e dos preços que se pagam pelas mesmas, assim como analisar as limitações próprias da tecnologia e, portanto, descobrir o potencial do conhecimento matemático para solucionar problemas. Enfim, a educação cidadã de promover o gasto responsável e tomada de decisões foram resultados implícitos na atividade.

Cerca de 45 professores da rede trabalharam o roteiro descobrindo novas formas de ensinar conteúdo com significados e com a tecnologia. Até o momento dois professores conseguiram levar a aula-pesquisa para suas salas de aula com registros da realização, e a análise dos relatos pós-aula são promissores em mostrar a superação do temor de deixar a zona de conforto, como também uma apreciação crítica do como os alunos podem aprender com nova ferramenta didática. Os professores do nosso projeto que ainda não testaram a aula-pesquisa são esperados que se sintam motivados a executar o roteiro e participar da análise coletiva a ocorrer.

Conclusões

Diante da resistência compreensível dos professores em enfrentar desafios de mudança no paradigma de ensino com vistas a aprendizagem participativa e significativa dos alunos, acreditamos que o projeto de integração da calculadora científica no contexto escolar, fundamentado pelo quadro teórico TPACK e realizado dentro da metodologia Lesson Study está trazendo respostas promissoras a questões de investigação que motivaram o projeto, na direção de alternativas para os cursos de formação de professores nos tempos atuais. Finalmente, este projeto contribuirá para o desenho de atividades de acordo com a Base Nacional Comum Curricular.

Bibliografia e referências

Baldin, Y. Y. (2009). O significado da introdução da metodologia japonesa de Lesson Study nos cursos de capacitação de professores de matemática no Brasil. *XVIII ENCONTRO ANUAL DA SBPN.* São Paulo, 26 a 28 de setembro de 2009.

Baldin, Y.Y. (2010). The Lesson Study as a strategy to change the paradigm of teaching Mathematics: a Brazilian case. In *Proceedings of 4th APEC Tsukuba International Conference.* Tokyo: U. Tsukuba. Recuperado de http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2009/doc/pdf_20-21/YurikoYamamotoBaldin-paper.pdf

Baldin, Y. Y., & Felix, T. (2011). A Pesquisa de Aula (Lesson Study) como ferramenta de melhoria da prática na sala de aula. *XIII CIAEM-IACME*. Recife.

Baldin, Y.Y., & Guimarães, L. (2012). El proceso de introducción de Estudio de Clases en Brasil (versão ampliada em espanhol do original The process of introducing Lesson Study in Brazil). Em *Isoda, Arcavi & Mena Lorca (Eds), El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas, Su importância para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global. Tercera edición. Valparaíso: Ediciones Universitárias de Valparaíso*, pp. 306 – 315.

Brasil. (1997). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais, parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (2017). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular- BNCC.* Brasília.

Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson Study: A Japanese approach to improving Mathematics teaching and learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Isoda, M., Arcavi, A., & Mena-Lorca, A. (2012). *El estudio de clases japonés en Matemáticas, Su importância para el mejoramiento de los aprendizajes em el escenario global*. Tercera edición. Valparaíso: Ediciones Universitárias de Valparaíso.

Isoda, M., Stephens.M., Ohara, Y. & Miyakawa, T. (2007). *Japanese Lesson Study in Mathematics: Its impact, diversity and potential for educational improvement*. Singapore: World Scientific.

Kissane, B. (2015). Learning with calculators: Doing more with less. *In: 25th Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers: Mathematics: Learn, Lead, Link, 6 - 8 July 2015*. Adelaide, Austrália.

Kissane, B. & Kemp, M. (2012). Calculators and the mathematics curriculum. *In W.-C. Yang, M. Majewski, T. de Alwis & K. Khairiree (Eds.) Creative and Critical Thinking in Mathematics Through Technology: Proceedings of the 17th Annual Conference of the Asian Technology Conference on Mathematics*. (pp. 178-187) Bangkok, Thailand: ATCM Inc.

Mishra, P., & Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record,* Volume 108, Number 6, June 2006, pp. 1017-1054.

Neves, T., & Bittar, M. (2015). Análise da prática de um professor no ensino da Matemática: Possíveis reflexões em um processo de integração de tecnologia. *EM TEIA Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana, 5,* número 3.

Purificação, I., Neves, T., & Brito, G. (2010). Professores de matemática e as tecnologias: medo e sedução. Em *Educação Matemática, Tecnologia e Formação de Professores: Algumas reflexões* (pp. 31-57). Campo Mourão: FECILCAM.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 4-14.*

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

El profesor que enseña matemáticas en la inclusión escolar de niños con Trastorno de Espectro Autista (TEA)

Claudia **Franceschette**
Universidad de Antioquia
Colombia
claudia.franceschette@udea.edu.co
Lucía **Zapata-Cardona**
Universidad de Antioquia
Colombia
lucia.zapata1@udea.edu.co

Resumen

En esta ponencia discutimos la importancia del profesor que enseña matemáticas en el proceso de inclusión del niño con Trastorno del Espectro Autista (TEA). Presentamos inicialmente las principales normas de las entidades gubernamentales colombianas que buscan la protección de los niños que presentan este trastorno y que aportan los lineamientos para la inclusión en el sistema educativo convencional. Luego, se presenta una discusión sobre el Trastorno del Espectro Autista y sus principales características y se continúa con el papel que cumple el profesor que enseña matemáticas en el proceso de inclusión. Terminamos resaltando algunas conclusiones sobre el rol del profesor que enseña matemáticas en el éxito de la inclusión.

Palabras clave: educación inclusiva, Trastorno del Espectro Autista, matemática escolar, profesor que enseña matemáticas.

Introducción

La inclusión escolar de niños con discapacidad en los sistemas educativos convencionales además de ser un tema muy novedoso y reciente es también pertinente para el momento que vive nuestro sistema educativo y es de alto interés para la política pública. Ese proceso de vinculación de los niños con discapacidad en las escuelas regulares empezó cuando se pasó a exigir por ley la inclusión de estos niños en los sistemas educativos, atendiendo al marco de la Convención de las Naciones Unidas sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad (CDPD) en el que se reconoce el derecho de todos los niños con discapacidad a ser incluidos en los sistemas educativos generales y a recibir apoyo individual cuando lo necesiten (Organización Mundial de la Salud, 2011, p.231).

En Colombia, la matrícula y la permanencia de personas con algún tipo de discapacidad en los sistemas educativos se han incrementado cada año de acuerdo con los datos del Ministerio de Salud y Seguridad Social (2014, p. 20). Según El Ministerio de Educación Nacional, la atención educativa a la población con discapacidad se enmarca en los principios de la educación inclusiva: calidad, diversidad, pertinencia, participación, equidad e interculturalidad, conforme es establecido por la Ley 1618 de 2013 (Ministerio de Salud y Seguridad Social). De igual forma, se acogen los principios de la Convención de los Derechos de las Personas con Discapacidad, que en Colombia tiene fuerza de Ley desde 2009 registrada bajo número 1346 (Ministerio de Salud y Seguridad Social) la cual se enfoca en el favorecimiento de las trayectorias de niñas, niños, adolescentes y jóvenes para su ingreso, permanencia, promoción y egreso en el sistema educativo. Reforzando y direccionando el cumplimento de las leyes de inclusión está el Decreto 1421 de 29 de agosto de 2017 (Ministerio de Educación Nacional), por el cual se reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad enfatizando que se hagan los ajustes necesarios buscando hacer efectiva la inclusión educativa en Colombia.

Teniendo en cuenta la obligatoriedad de la inclusión educativa en nuestro país, presentamos en esta ponencia algunas consideraciones sobre el trabajo del profesor en la inclusión de niños con el Trastorno del Espectro Autista (TEA), que es una discapacidad cuyo diagnóstico se ha incrementado en los últimos años en todo el mundo. Según el Protocolo Clínico para el Diagnóstico, Tratamiento y Ruta de Atención Integral de Niños y Niñas con Trastorno de Espectro Autista del Ministerio de Salud y Protección Social de Colombia (2017), se estima que aproximadamente un 16% de la población menor de 15 años en Colombia padece algún tipo de trastorno del desarrollo, entre ellos los trastornos del espectro autista (TEA).

El Trastorno del Espectro Autista (TEA)

El autismo es un trastorno complejo del desarrollo, definido desde un punto de vista comportamental, de etiologías múltiples y con grados variados de severidad. La gran variabilidad en el grado de habilidades sociales y de comunicación y en los patrones de comportamiento que ocurren en autistas hizo más apropiado el uso del término Trastorno del Espectro Autista (TEA), conforme explica el documento de Protocolo Clínico del Ministerio de Salud Protección Social de Colombia,

> El TEA comprende una gama de trastornos complejos del neurodesarrollo caracterizados por impedimentos sociales, dificultades en la comunicación y patrones de conducta repetitivos, restringidos y estereotípicos, sin que se presenten estas características o patrones en todos los casos. El trastorno del espectro autista varia ampliamente en gravedad y síntomas, incluso puede pasar sin ser reconocido, especialmente en los niños levemente afectados o cuando se enmascara por problemas físicos más debilitantes. (Ministerio de Salud y Protección Social, 2017, p.13)

Es importante resaltar que las características del autismo generalmente afectan a la persona durante toda su vida, aunque puedan cambiar considerablemente a lo largo del tiempo y en respuesta a las intervenciones recibidas. Una de las posibilidades para desarrollar en esos niños competencias sociales y académicas que posibiliten su desarrollo y autonomía es la inclusión escolar, visto que en el ambiente escolar se puede trabajar esas competencias.

El papel del profesor de matemáticas en el proceso de inclusión

La multiplicidad de patrones es un punto crítico para la inclusión de personas con TEA en los sistemas educativos convencionales, por la diversidad de comportamientos y comprometimientos que puede presentar un niño con ese trastorno. Proveer la inclusión escolar de un niño con TEA, más que garantizar un cupo en el sistema educativo, es establecer prácticas de enseñanza que logren, efectivamente, concretizar esa posibilidad. Solamente la legislación no es suficiente para garantizar una práctica inclusiva en las escuelas porque solo hay inclusión escolar si hay aprendizaje. Calvo (2013), corroborando esa idea, afirma que "se podría definir la educación inclusiva como el proceso para tratar de garantizar el aprendizaje y la participación de todos los estudiantes en la vida escolar de las instituciones educativas" (p. 5). Por tal motivo, la misma autora resalta la importancia del trabajo del profesor como punto central de la inclusión escolar,

> Existe consenso en que la inclusión educativa de estudiantes no puede realizarse sin una decidida intervención de los docentes. Para que esto sea posible, es necesario ubicar su centralidad en la educación y demostrar que no se puede avanzar en este plano sin mejorar, al mismo tiempo, en la comprensión de lo que cree, puede hacer y hace el docente. (Calvo, 2013, p.6)

Reforzando la importancia del trabajo docente para la inclusión escolar, Martinic (1999) resalta que "todos los estudios que han analizado los factores asociados a los aprendizajes destacan la importancia que tiene la forma en que los profesores perciben los aprendizajes de sus alumnos, y su capacidad reflexiva sobre sus propias prácticas" (p.4), es decir que las perspectivas que tienen los profesores en relación a su práctica pedagógica y en relación a la forma como aprenden sus alumnos influye en el aprendizaje. Por supuesto que el éxito de la educación inclusiva depende del empeño y compromiso de todo el sistema educativo, incluso del sistema de formación inicial y permanente de los docentes, asimismo Martinic citado por Calvo (2013) resalta el profesor como la persona que ejerce mayor influencia directa sobre esos niños, según él:

> La teoría y la práctica de la inclusión educativa indican que uno de los elementos que más incide en el proceso de aprendizaje de los estudiantes tiene que ver con lo que creen, pueden y están dispuestos a hacer los docentes y con las expectativas sobre los logros de sus alumnos. (Citado en Calvo, 2013, p.6)

Calvo (2009) también enfatiza que la inclusión no es un proceso aislado, "la inclusión es un proceso que implica la formación de maestros, la adecuación del currículo, la normatividad, la vinculación de la familia, la vinculación de la comunidad educativa: las interacciones deben fortalecer la inclusión" (p.25). En relación a la formación docente, Guajardo (2008) afirma que los procesos de formación inicial de los docentes en América Latina no evolucionan a la misma velocidad que los modelos educativos propuestos y exigidos en las políticas de Estado; de esta manera, la formación de los docentes de educación especial se centra en el entrenamiento para atender discapacidades específicas y, por otro lado, los docentes de la educación regular se han formado en modelos homogenizantes. Todo ello ocasiona que los profesores experimenten dudas e incertidumbres sobre su hacer cotidiano.

Sabemos que la inclusión es un desafío para los sistemas educativos porque rompe con los paradigmas que sostienen el conservadurismo en las escuelas. De esa forma contesta a los sistemas educativos en sus fundamentos básicos como la fijación de modelos ideales, la normalización de perfiles específicos de alumnos y la selección de "los elegidos" para frecuentar las escuelas, produciendo, así, identidades y diferencias, inserción y/o exclusión (Ropoli, et al. 2010), pero también es un derecho que corresponde a esos niños. Por otro lado, si la escuela no está preparada para recibir a ese niño, puede que él permanezca aislado, aunque esté en un ambiente escolar. Para que esto no ocurra, Chiote alerta que:

> La inclusión del niño con autismo va más allá de colocarlo en una escuela regular, es necesario proporcionar a ese niño aprendizajes significativos, invirtiendo en sus potencialidades, constituyendo, así, el sujeto como un ser que aprende, piensa, siente, participa de un grupo social y se desarrolla con él y a partir de él, con toda su singularidad. (Chiote, 2013, p. 12)[1]

En especial, para el profesor que enseña matemáticas, propiciar la inclusión de un estudiante con Trastorno del Espectro Autista (TEA) en una clase regular, puede ser realmente muy complejo, requiriendo una adecuación en su trabajo debido a las dificultades específicas de ese alumno. Esas adecuaciones pasan necesariamente por lo que él entiende al respecto del autismo y de la inclusión, del currículo y del planeamiento de las acciones pedagógicas necesarias para el desarrollo de las potencialidades de ese alumno. Cunha (2012) señala la práctica escolar como una gran oportunidad para que profesionales y familiares construyan un repertorio de acciones inclusivas para el autista, dentro de una concepción de aprendizaje que incluye desafíos y superación, siempre con el propósito de propiciar la autonomía. Por esta razón, direcciona nuestra mirada hacia la fuerza que tiene el trabajo del profesor para el desarrollo de su alumno autista afirmando que,

> No hay cómo hablar de inclusión sin mencionar el papel del profesor. [...] Cuando creemos en el individuo, en su potencial humano y en su capacidad de reconstruir su futuro, lo incluimos, y nuestra actitud se convierte en el movimiento que dará inicio a su proceso de emancipación. En realidad, la inclusión escolar se inicia por el profesor. (Cunha 2012, p.101)[2]

Considerando la importancia del profesor en el proceso de aprendizaje del alumno con TEA, uno de los puntos clave para la inclusión sería procurar una mejor comprensión de cómo el aprendizaje efectivamente ocurre en un niño con TEA, para así construir un repertorio de acciones inclusivas, dentro de una concepción de aprendizaje que incluye desafíos y superación, siempre con el propósito de propiciar la autonomía del alumno (Marco, 2011).

Las matemáticas, por su representatividad en innumerables situaciones del cotidiano, debe ser trabajada de forma que ese niño adquiera habilidades formales que lo ayuden en la adquisición de la autonomía, tan importante para esas personas. Actividades comunes como leer las horas, encontrar direcciones y números telefónicos, hacer compras en supermercados, porcionar o fraccionar cantidades, requieren sistemas de conteo y habilidades para usar y reconocer los numerales (Goyos & Rossit, 2009, p. 214). Según Gomes (2007), se puede percibir también que, mejorando las estrategias de enseñanza que posibilitan la adquisición de habilidades básicas, como por ejemplo los conocimientos matemáticos de uso cotidiano, "niños con autismo han mostrado una ganancia en el repertorio general y, consecuentemente, se tornan

[1] Traducción de las autoras
[2] Traducción de las autoras

hábiles a aprender comportamientos más complejos como aquellos que son necesarios para los contenidos académicos" (p. 346).

La educación inclusiva debe estar planeada de acuerdo con la necesidad de cada niño, prevaleciendo siempre sus fortalezas y no sus dificultades y el profesor como siendo la persona del entorno escolar más cercana a sus alumnos será ciertamente la que más tiene evidencias en relación con sus necesidades. Los niños con autismo tienen condiciones para aprender, afirma Lago (2007), aunque presentan diferencias con respecto al desarrollo cognitivo normal, que pueden producir efectos peculiares en el proceso de aprendizaje. Siendo que esta manera diferente del autista de aprender refleja la manera en cómo enseñarles. La mayoría de las personas con autismo son *pensadores visuales* o *visual thinkers* y, según Grandin (1995), procesan el pensamiento en imágenes, tienen dificultades para cambiar sus rutinas diarias, necesitan ambientes estructurados y organizados para aprender y demuestran una inhabilidad en la percepción, la comprensión y la comunicación. Datos como estos, por ejemplo, son muy importantes cuando el profesor está pensando en las estrategias que va a utilizar para facilitar el aprendizaje de la persona con autismo, respetando la manera de pensar y aprender de ese alumno, presentando materiales que muestran de forma concreta los conceptos matemáticos.

El alumno autista también puede demostrar muchas habilidades que pueden ser explotadas por el profesor que enseña matemáticas para desarrollar estrategias de enseñanza y motivar la inclusión y el aprendizaje. Entre estas habilidades podemos destacar la memoria a largo plazo, intensa concentración y focalización (principalmente en las áreas preferidas), habilidades artísticas, habilidades matemáticas, habilidad en decodificar lenguaje escrito (incluso sin entender el sentido literal de las palabras), habilidad en resolver problemas y capacidad en informática y tecnologías. Identificando esas fortalezas se pueden adaptar los contenidos matemáticos a los intereses de los niños, ajustado con las habilidades y repertorios que se quiere desarrollar en ellos.

Conclusiones

Todos estos retos de conocer y adaptarse a nuevas exigencias, leyes, métodos, conocimientos y tecnologías, relacionados, con el Trastorno del Espectro Autista, hacen o deberían hacer parte de la formación y actualización de la profesión docente. En particular, el profesor que enseña matemáticas a niños con esta discapacidad tiene un doble reto: gestionar el currículo de matemáticas y garantizar el aprendizaje. Por supuesto esta no es una tarea fácil y en consecuencia la formación permanente del profesor es fundamental.

Mirando hacia el pasado, no hay duda de que Colombia camina en dirección a la inclusión. Todavía hay un largo camino por recorrer hasta que se cumpla el reto de garantizar la escolarización y la inclusión de los niños con Trastorno del Espectro Autista. Para el profesor que enseña matemáticas, queda el desafío de acoger ese alumno, respectando sus diferencias y necesidades, haciendo el ejercicio de enfocar en sus fortalezas y no su discapacidad.

Referencias y bibliografía

Calvo, G. (2013). La Formación de Docentes para la Inclusión Educativa. *Páginas de Educación [online], 6*(1),19–35.

Calvo, G. (2009). Inclusión y Formación de Maestros. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 7*(4), 78–94.

Chiote, F. A. B. (2013). *Inclusão da Criança com Autismo na Educação Infantil: Trabalhando a mediação pedagógica*. Rio de Janeiro: Wak Editora.

Cunha, E. (2012). *Autismo e Inclusão: Psicopedagogia e práticas educativas na escola e na família*. (4. Ed). Rio de Janeiro: Wak.

Gomes, C. G. S. (2007). Autismo e ensino de habilidades acadêmicas: adição e subtração. *Revista Brasileira de Educação Especial 13,* (3), 345–364.

Goyos, C. & Rossit, R. A. S. (2009). Deficiência intelectual e aquisição matemática: currículo como rede de relações condicionais. *Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional (ABRAPEE), 13* (2), 213–225.

Grandin, T. (1995). *Thinking in Pictures*. New York: Doubleday.

Guajardo, E. (2008). La desprofesionalización docente en educación especial. *Revista latinoamericana de inclusión educativa, 4* (1), 3–11.

Lago, M. (2007). *Autismo na escolar: Ação e reflexão do professor*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Porto Alegre.

Marco, C.L.S.T. (2011). O aluno com síndrome de asperger em sala de aula. *Temas sobre Desenvolvimento, 18* (102), 63–65.

Martinic, S. (1999) Las representaciones de la desigualdad y la cultura escolar en Chile. *Proposiciones.* Santiago de Chile, Chile. (43) 1–10.

Ministerio de Educación Nacional – MEN (2017). Decreto 1421 de 29 de agosto de 2017. Por el cual se reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad. MEN. Colombia, Bogotá.

Ministerio de Salud y Seguridad Social. (2009). Ley Estatutaria 1346 de 2009, Por medio de la cual se aprueba la "Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad", adoptada por la Asamblea General de las Naciones Unidas el 13 de diciembre de 2006. Colombia. Publicada en el Diario Oficial número 47427 de 31 de julio de 2009.

Ministerio de Salud y Seguridad Social. (2013). Ley Estatutaria 1618 de 2013, Por medio de la cual se establecen las disposiciones para garantizar el pleno ejercicio de los derechos de las personas con discapacidad. Colombia. Publicada en el Diario Oficial número 48717 de 27 de febrero de 2013.

Ministerio de Salud y Seguridad Social. (2014). *Línea de Base Observatorio Nacional de Discapacidad. Análisis Descriptivo de Indicadores.* Bogotá, Colombia.

Ministerio de Salud y Protección Social. (2017). *Protocolo Clínico para el Diagnóstico, Tratamiento y Ruta de Atención Integral de Niños y Niñas con Trastorno del Espectro Autista.* Ministerio de Salud y Protección Social. Instituto de Evaluación Tecnológica en Salud. Colombia. Bogotá.

Organización Mundial de la Salud – OMS. (2011). *Informe mundial sobre la discapacidad.* Organización Mundial de la Salud, Ginebra, Suiza.

Ropoli, E. A., Mantoan, M. T. E., Santos, M. T. C., & Machado, R. (2010). *A Educação Especial na Perspectiva da Inclusão Escolar: A Escola Comum Inclusiva*. Ministério da Educacão, Brasília, Brasil.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Dos experiencias de formación de maestros en la perspectiva de la etnomatemática

Carolina **Tamayo**
Universidade Estadual de Campinas
Colombia/Brasil
carolina.tamayo36@gmail.com

Hilbert **Blanco-Álvarez**
Universidad de Nariño
Colombia
hilbla@udenar.edu.co

Resumen

La presente comunicación tiene como objetivo presentar dos experiencias de formación de maestros enmarcadas en la perspectiva de la etnomatemática, como posibilidad de ampliar las reflexiones sobre el ser/hacer en la clase de matemáticas cuestionando las diversas formas en las que se manifiestan las tensiones entre el conocimiento matemático escolar y extraescolar. De un lado, presentamos la experiencia de dos profesores indígenas Guna y, por otro lado, un curso desarrollado para maestros afrodescendientes. Concluimos que en la formación de maestros –inicial y continuada- desde una perspectiva Etnomatemática es fundamental estudiar las relaciones de poder entre el conocimiento matemático escolar y extraescolar abriendo margen para currículos más incluyentes y apropiados a los contextos socioculturales de las poblaciones con una perspectiva decolonial.

Palabras clave: currículo escolar, educación indígena; educación afrodescendiente, educación matemática; enseñanza de las matemáticas.

La problemática

En la década de los 80 surgió en Colombia la etnoeducación como una propuesta para las comunidades indígenas y afrocolombianas, siendo uno de sus objetivos desarrollar experiencias educativas propias para defender y fortalecer sus culturas (Ministerio de Educación Nacional, 1994). En la búsqueda de caminos y de posibilidades de dar respuesta a estas preguntas, diversas universidades en Colombia – Universidad de Antioquia, Universidad del Cauca, Universidad de la Amazonía, Universidad de Nariño, Universidad del Valle, Universidad Nacional de Colombia, Universidad de la Guajira, entre otras – han abierto programas de formación de maestros, intentando responder no solo a la carencia de profesionales indígenas y afrodescendientes, sino también a las demandas educativas de los movimientos sociales y políticos en el país, sin embargo,

> En estas instituciones todavía se asume el currículo de manera homogénea y hegemónica, confundiéndose la igualdad (en el acceso a los centros educativos, sin cuestionar objetivos y contenidos de programas) con la equidad (el reconocimiento en el currículo de saberes y prácticas de diversos grupos poblacionales, cuyos derechos han sido y siguen siendo vulnerados). De esta manera, las universidades y las facultades de educación han venido contribuyendo, consciente o inconscientemente, con la violencia que ha caracterizado nuestra historia desde la conquista europea, en particular, la violencia epistémica (Castro-Gómez, 2000), al ignorar, invisibilizar o negar otras maneras de ser, pensar y habitar el mundo, privilegiando y legitimando aquellos conocimientos que benefician a quienes detentan el poder político, económico y social (Sierra, 2010, p. 158).

Los estudiantes indígenas y afrodescendientes - en diferentes campos de conocimiento-, pese a ser crecientes en número en su ingreso a la educación superior, se enfrentan a variados problemas en ese entorno, tanto en la formación inicial como en la continuada. Algunos de esos problemas van desde la falta de oferta de programas apropiados, dificultades de adaptación al medio cultural universitario, discriminación y exclusión, hasta dificultades en la apropiación del conocimiento. Vemos que estos problemas están relacionados con los efectos del quehacer autoritario de la academia y la ciencia, heredadas de una tradición colonial impositiva. Lo anterior es denominado por Boaventura Santos de Sousa (2010) como una relación *epistemicida*.

Buscando aportar elementos para repensar la formación de maestros que enseñan matemáticas en el marco de este contexto, nos proponemos desde una perspectiva etnomatemática, mostrar dos experiencias educativas, una con maestros indígenas y otra con maestros afrodescendientes, donde abordamos diversas reflexiones en la búsqueda de pedagogías otras desde y para la diversidad cultural.

Experiencia de formación con maestros indígenas

A partir de una experiencia de investigación desarrollada en 2012 con dos maestros indígenas en ejercicio de la comunidad Gunadule de Alto Caimán (Colombia)[1], quienes al mismo tiempo eran en ese momento, estudiantes del programa Licenciatura en Pedagogía de la Madre Tierra (LPMT) de la Universidad de Antioquia (Medellín-Colombia). Durante los últimos 3 semestres de la licenciatura, los dos maestros debían elaborar sus proyectos de grado acompañados de una docente de la universidad, en calidad de orientadora, para ello fue planeado un seminario de acompañamiento en el que fueron desarrolladas diversas actividades, tanto dentro de la propia comunidad como en la universidad. Sobre lo anterior uno de los maestros participantes planteó lo siguiente:

> Para mí la experiencia en la LPMT fue excelente, porque teníamos la oportunidad de ir a la universidad y escuchar otros discursos, pero también hacíamos trabajos comunitarios y visitar otras comunidades, y pasar por todos estos espacios, nos permitió darnos cuenta de que nuestra cultura posee otros conocimientos, que no tienen que ser vistos teniendo como parámetro los conocimientos de la matemática occidental. Para mí fue un avance muy muy positivo, la Etnomatemática me permitió ver que nosotros tenemos otras formas de producir conocimiento. [...] (Entrevista concedida a la investigadora por Olo Wintiyape el 20-02-2014).

[1] El pueblo Gunadule vive en el Golfo de Urabá, al noroccidente de la República de Colombia, en el departamento de Antioquia, en un territorio ancestral conocido como Resguardo *Ibgigundiwala*.

Es importante señalar, que en este seminario de acompañamiento el objetivo era identificar en la práctica del cultivo del plátano los *conocimientos [matemáticos]*[2] asociados a ella. El cultivo del plátano fue seleccionado por los dos maestros, debido a la problemática alimentaria en la comunidad, pues por el monocultivo de una única variedad de plátano se venían perdiendo las demás. De ese modo, se realizó inicialmente un recorrido por la comunidad en el que encontramos 25 variedades de plátano, con ello daríamos inicio a nuestro estudio.

Por otro lado, es importante señalar que se hicieron lecturas de diversos textos y experiencias en Etnomatemática (Green, 2007, 2011; Green *et al*. 1995; Higuita, 2011; Jaramillo, 2011; Monteiro, *et al.* 2007), se realizaron visitas a los sabios[3] y líderes de la comunidad.
A partir de esos encuentros, desarrollado durante 8 meses, diez *actividades orientadoras de enseñanza –AOE*[4]- fueron planeadas y desarrolladas en la escuela con el acompañamiento de una de las investigadoras de la universidad. En la tabla 1 se presenta una de las *AOE*, titulada la huerta comunitaria de la escuela:

Tabla 1:
La huerta comunitaria de la escuela, retomada de Tamayo-Osorio (2012)

Intencionalidad	Identificar la importancia del control de las cantidades en las prácticas sociales de la cestería y del cultivo del plátano.
Motivo	Control y sostenimiento de la alimentación de los niños de la escuela.
Necesidad	Manejo de las cantidades para el control de la huerta escolar y la alimentación sostenible para la escuela.
Acciones	Visitar con los niños y algunos padres de familia las huertas escolares para realizar el proceso de limpieza de los colinos que ya fueron sembrados. A partir de las indicaciones que los maestros indígenas y los padres de familia expertos, los niños van a formular preguntas en torno a la recolección de los colinos para investigar con los más viejos de la comunidad diferentes métodos de registrar y controlar las cantidades (¿cómo se hace el control? ¿se usa los dedos como referencia?) Diseño de preguntas para la visita a los miembros mayores de la comunidad. Dibujar en equipos las diferentes formas y significados ancestrales en las que sería posible controlar las cantidades según los relatos de los viejos.

Fuente: producción propia. 2012

2 En vista de lo problemática que se tornó la discusión acerca de los hallazgos encontrados, optamos (tras innúmeras discusiones con los profesores) por asumir esta connotación [matemáticas] con la finalidad de problematizar los sentidos y usos de dicha palabra (TAMAYO-OSORIO, 2012).
3 Para el pueblo indígena Guna, un sabio, cacique o en lengua Guna *sagla*, es una persona sabedora de los conocimientos e historias ancestrales, guía espiritual y líder político.
4 Entendidas en el sentido propuesto por Moura, *et al* (2010, p. 220) la "*Actividad Orientadora de Enseñanz*a se constituye un modo general de organización de la enseñanza, en el que su contenido principal es el conocimiento teórico y su objeto es la constitución del pensamiento teórico del individuo en el movimiento de la apropiación del conocimiento. Así, el maestro, al organizar las acciones que objetivan el enseñar, también recualifica sus conocimientos, y es ese proceso que se caracteriza la *Actividad Orientadora de Enseñanza* como unidad de formación del maestro y del estudiante".

Iniciamos la implementación en la escuela con la presentación de dos videos que posibilitaron que los dos maestros y sus estudiantes reflexionaran conjuntamente sobre la importancia de la historia ancestral y de origen en la forma en que los Dule ven y dialogan con la Madre Tierra y los demás seres que en ella viven. Posteriormente, con algunos padres de familia y algunos de los *saglas* se realizó una visita a la huerta escolar, con la finalidad de entender cómo se dio la recolección de las 25 variedades de plátano y cómo realizar el proceso de cultivo, además para iniciar la preparación del terreno.

Es importante resaltar que se buscó generar reflexiones e indagaciones que posibilitaran que los niños y niñas se aproximaran al conocimiento de su propia comunidad, además, la producción del trabajo de investigación de pregrado de los profesores Guna – Cuellar-Lemos & Martínez (2013) - aprendimos cómo el cultivo del plátano y la necesidad del conteo posibilitaron que estudiáramos el número, esto es, los números utilizados en la cultura Dule. Mediante el estudio del control de las cantidades nos deparamos también con la *práctica de medir*[5] tiene una fuerte relación con los significados de los números. Formas de cuantificación que se constituyeron como base de lo que ellos mismos han denominado como la numeración Dule, por ejemplo:

> La cantidad de huecos que se hace por hilera en el terreno para cultivar los colinos de plátano siempre es número par, por ejemplo 20 huecos, o como los días de encierro que se le hace a la niña en la fiesta de la pubertad. ¿por qué? Por ejemplo, porque el número Bogwa, número dos (2), significa la paz del corazón, significa dos personas unidas en un solo corazón. Esto tiene que ver con la complementariedad perfecta de lo masculino y lo femenino. En el cultivo también debe verse esta complementariedad. Durgwen, "número veinte (20), una persona" Éste viene de las palabras dule "persona con sabiduría" y gwen "ser"; es decir, ser que en su totalidad tiene 20 dedos. Es la perfección del ser. (Reflexión realizada en el trabajo de aula, Olo Wintiyape, agosto 2011).

Para hacer la medición y el señalamiento del terreno, se utilizó una medida propia de su cultura adoptada como la "vara Dule", la cual, como se verificó en indagaciones anteriores (Berrio, 2009), mide 2,50 metros en relación a la cultura occidental aproximadamente, que se calculó en el terreno del siguiente modo:

> escogimos una de las personas que ayudó a tumbar el monte y él tomó la medida del largo de su cuerpo desde los pies hasta llegar a la punta de los dedos con un brazo extendido hacia arriba. Luego completo la medida con el largo del brazo hasta el codo más dos dedos de longitud, y ahí tenemos 1 vara. (Reflexión realizada en el trabajo de aula, Martínez Montoya, 20 de octubre 2011).

Así, fue posible que aprendiéramos que dentro de la cultura Dule, al comprender el medir como acción corporal y no como un contenido meramente cognitivo, se quiebra con la idea de entender esta práctica como algo meramente disciplinar, es decir, como un contenido exterior a las prácticas socioculturales.

---

[5] Entendemos el concepto de medida basados en Caraça (1984) que dice, para referirse al problema de medir, que este requiere de: 1º– Establecer un estándar único de comparación para todas las grandezas de la misma especie; ese estándar se llama unidad de la grandeza de la que se trata —es, por ejemplo, el centímetro para las longitudes, el gramo de peso para los pesos, el segundo para los tiempos, etc.2º – Responder a la pregunta –¿cuántas veces? –poner, lo que se hace dando un número que exprese el resultado de la comparación de la unidad. Ese número se llama la medida de la grandeza en relación a esa unidad. (p. 30).

Experiencia de formación con maestros afrodescendientes

El curso de formación de maestros desde la etnomatemática se llevó a cabo en el municipio de Tumaco, ubicado en el Departamento de Nariño en la zona sur occidental de Colombia. El grupo que participó en el curso fue de 28 maestros: 23 de ellos laboran en la educación básica primaria, y 5 en la educación básica secundaria del municipio de Tumaco. Su formación profesional es muy diversa, lo cual enriqueció las discusiones y las perspectivas frente a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El Curso se organizó en tres fases: Planeación, Implementación y Resultados. En adelante se explica en detalle la dinámica del trabajo en la fase de implementación, por medio de sus tres etapas:

Etapa teórica-conceptual

Se buscó reflexionar sobre la naturaleza de las matemáticas, los saberes matemáticos extraescolares, el currículo de matemáticas y la cultura (Blanco-Álvarez, 2011; 2012), y se realizaron indagaciones sobre las prácticas matemáticas de la cultura tumaqueña, utilizando como metodología las actividades universales: contar, medir, diseñar, jugar, localizar y explicar (Bishop, 1999; 2005).
Los hallazgos de las prácticas matemáticas de la cultura tumaqueña se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2
Prácticas matemáticas encontradas por los maestros en la cultura tumaqueña

Contar	Medir	Diseñar	Localizar	Jugar	Explicar
La racción El ciento La docena La sarta La carga	*Longitudes* La yarda La guasca El paso La cuarta La braza El codo El geme La vara *Peso* Balanza humana Totumado El puño Pizca Balanza de mate	La rampira El abanico La catanga Petate de tetera La cobija La canoa El canalete El calabazo Tagua	Los linderos La manga Sanja Churo de guadua humo	Chapacajón	Práctica Observación

Fuente: tomado de Blanco-Álvarez (2016).

Etapa diseño de actividades

Se inició dividiendo el grupo de participantes en tres subgrupos, los maestros que trabajaban entre primero y tercero de primaria, entre cuarto y quinto, y los que trabajaban entre sexto y séptimo de la educación básica secundaria. Luego, cada grupo realizó la lectura reflexiva del apartado sobre pensamiento métrico y sistemas de medidas de los Lineamientos curriculares de matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 1998) y se revisaron los Estándares de competencias básicas en matemáticas, en particular para el pensamiento métrico y los sistemas de medidas; de allí reconocieron y clasificaron los niveles de construcción de la idea de magnitud y su asignación numérica. Con los elementos teóricos mencionados anteriormente y teniendo en cuenta las prácticas matemáticas que cada grupo había investigado en la comunidad tumaqueña, y provistos de los libros de texto que usualmente utilizan los maestros para la preparación de clase se dio inicio a la construcción de las actividades.

Etapa aplicación

Esta etapa consistió en acompañar y evaluar la implementación y rediseño de algunas situaciones de enseñanza desarrolladas con estudiantes de tercero (niños entre los 8 y 9 años) y quinto grado (niños entre los 10 y 11 años) de la educación primaria y de grado sexto (niños entre los 11 y 12 años) de la educación básica. Para la implementación de las actividades, un maestro de cada subgrupo desarrolló la actividad con los estudiantes para la cual había sido diseñada, mientras los docentes restantes observaron la clase y siguieron la actividad por medio del plan de clase. Finalizada la clase, se realizó una mesa redonda donde se llevó a cabo, primero, una autoevaluación del desarrollo de la actividad por parte del maestro que la ejecutó y luego los maestros observadores hicieron sus aportes constructivos para el mejoramiento de ésta.

Conclusiones

Considerando las dos experiencias en formación de maestros, un seminario con maestros indígenas y un curso con maestros afrodescendientes, resaltamos algunos aspectos que identificamos como puntos de encuentro sobre la importancia de incluir la Etnomatemática como elemento para discutir otras formas de ser/estar en el mundo y con ello problematizar la Educación Matemática desde una perspectiva sociocultural.

En primer lugar, evidenciamos que se posibilitó que los maestros ampliaran su comprensión de las matemáticas de un conjunto de saberes lógico-deductivos para entenderlas desde las prácticas sociales como una construcción humana que tienen unas significaciones diferentes al variar de un contexto para otro.

Por otro lado, fue posible repensar críticamente el currículo considerando a quién enseñamos como pregunta fundamental, donde los contenidos pasan a un segundo plano y las prácticas matemáticas autóctonas de estas regiones son las que nos posibilitan el estudio de los saberes culturales en relación con los escolares y de esa forma así enriquecer el proceso de resignificación del currículo en el marco del proceso de construcción de Proyectos Educativos Comunitarios (PEC).

En este sentido, concordamos con la propuesta de Oliveras y Blanco-Álvarez (2016) en que al incluir la Etnomatemática al aula de clase, se posibilita ampliar la concepción de las matemáticas de los maestros , y de esta forma pasar de utilizar la Etnomatemática solo como elemento motivador para introducir el tema de matemáticas escolar a estudiar - un interés cognitivo-, fomentando en el maestro en ejercicio y en formación un interés amplificador, donde además de aprender las matemáticas escolares se trabaje paralelamente en el aula las matemáticas producidas, legitimadas y validadas en las prácticas socioculturales. Luego, consideramos, que el fin último de la Etnomatemática en la escuela, debe ser la reivindicación de dichos saberes en los diversos contextos, estudiándolos, fortaleciéndolos, y divulgándolos, lo que corresponde con el interés político Blanco-Álvarez y Oliveras (2016).

En tercero lugar, se manifiesta la importancia de la relación entre los maestros y los sabios de las comunidades indígenas para desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje de prácticas [matemáticas] que se dan en la comunidad. La interacción entre los niños, las niñas y los sabios permitió identificar que fuera de la escuela hay unas realidades y necesidades relacionadas con la comunidad en las que son movilizados conocimientos que poseen otras significaciones diferentes a los de las prácticas matemáticas escolares.

Por último, planteamos que la escuela debe cumplir con el papel de preservación cultural, donde los maestros interactúen en compañía de los estudiantes con los elementos que constituyen su cultura. Se deja ver, una disociación entre teoría y práctica, es decir, se deja ver la disociación entre las prácticas sociales y los conocimientos [matemáticos] que son producidos, validados y legitimados desde y para las prácticas sociales.

Referencias y bibliografía

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós Ibérica.

Bishop, A. (2005). Retos críticos de la investigación de temas sociales, culturales y lingüísticos en la educación en ciencias, matemáticas y tecnología. En: A, Bishop. (Ed.). *Aproximación sociocultural hacia la educación matemática*. (pp. 149-165). Cali: Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

Blanco-Álvarez, H. (2011). La postura sociocultural de la educación matemática y sus implicaciones en la escuela. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59), 59–66.

Blanco-Álvarez, H. (2012). Estudio de las actitudes hacia una postura sociocultural y política de la educación matemática en maestros en formación inicial. *REDIMAT: Journal of Research in Mathematics Education*, 1(1), 57–78.

Blanco-Álvarez, H. (2016). Diseño de actividades para la enseñanza de la magnitud longitud y capacidad en la educación primaria y básica desde la Etnomatemática. In Fundación Save the Children Colombia (Ed.), Introducción al desarrollo de pensamiento métrico y los sistemas de medida en la educación básica primaria (pp. 9–26). Pasto: Graficolor.

Blanco-Álvarez, H., & Oliveras, M. L. (2016). Ethnomathematics: A political tool for Latin America. *RIPEM-International Journal for Research in Mathematics Education*, 6(1), 112–126.

Berrio, K. (2008). "La medida" en un contexto de escuela indígena: el caso del pueblo Tule y el caso del pueblo Embera-Chami. Universidad de Antioquia, investigación de pregrado.

Boaventura Santos, S., & Meneses, M. P. (2010). *Epistemologías do Sul*. São Paulo: Editora Cortez.

Caraça, B. J. (1984). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Livraria Sá da Costa.

Cuellar-Lemos, R.; Martínez, F. (2013). La revitalización del lenguaje de la medicina ancestral a partir de las veinticuatro variedades de plátano: una posibilidad para pensar una otra educación Gunadule dese la pedagogía de la Madre Tierra. Trabajo de pregrado. Universidad de Antioquia, Medellín.

Green, A., Cardozo, M., & Ochoa, R. (1995). *Currículo Tule*. Medellín: Organización Indígena de Antioquia -OIA- y Secretaría de Educación y Cultura de Antioquia.

Green, A. (2007). La lucha de los siete hermanos y su hermana Olowaili en defensa de la madre tierra: hacia la pervivencia cultural del pueblo Kuna Tule. *Revista Educación y Pedagogía*, 49, 227-237.

Green, A. (2011). *Significados de Vida*. Tesis de doctorado. Universidad de Antioquia, Medellín.

Higuita, C. (2011). *La medida desde la medicina tradicional: el caso de una comunidad Embera Chamí*. Trabajo de pregrado. Universidad de Antioquia, Medellín.

Jaramillo, D. (2011). La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones, utopías, futuros posibles. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59),13-36.

Ministerio de Educación Nacional. (1994). *Ley General de Educación 115*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares: matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Monteiro, A., Sena. E., & Santos. J. (2007). Etnomatemática e prática social: considerações curriculares. En: *R. C. Grando., & J. Rodrigues Mendes*. *Múltiplos olhares: matemática e produção de conocimento*. (pp. 49-63). São Paulo: Musa Editora.

Moura, M, Sampaio, E., Dias, F., Pannosian, M. L., & Dias, V. A. (2010). Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. *Revista Diálogo Educacional*, 10(29), 205-229.

Oliveras, M. L., & Blanco-Álvarez, H. (2016). Integración de las etnomatemáticas en el aula de matemáticas: posibilidades y limitaciones. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 30(55), 455–480.

Sierra, Z. (2010). Pedagogías desde la diversidad cultural: una invitación a la investigación colaborativa intercultural. *Revista Perspectiva*, 28(1), 157-190.

Tamayo-Osorio, C. (2012). (*Re)significación del currículo escolar indígena, relativo al conocimiento matemático, desde y para las prácticas sociales: el caso de la Comunidad Dule de Alto Caimán*. Investigación de maestría. Universidad de Antioquia. Medellín.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Herramienta desmos en la creación de tareas o actividades matemáticas

Resumen

El trabajo siguiente presenta una alternativa viable para complementar la dinámica tradicional en el campo de la didáctica de la matemática que se lleva en el salón de clases, esto a partir de la utilización de la aplicación gratuita DESMOS. Dicha aplicación es posible integrarla al computador, así como a cualquier dispositivo móvil inteligente, sin importar si su sistema operativo es ANDROID o IOS. En el trabajo mostrado se desarrolla la temática, en torno al uso que se le puede dar a este ambiente, así como la creación de tareas, asignaciones o exámenes creados desde DESMOS. Los temas que podrían ser abordados van desde ejercicios correspondientes a contenidos de secundaria, así como de cursos de matemática general en educación superior, esto complementado la enseñanza tradicional con la verificación a partir de la graficación de funciones.

Palabras clave: educación, matemática, didáctica, tecnología, aprendizaje, tareas.

Introducción

Este trabajo consiste en la presentación de la aplicación DESMOS como una herramienta tecnológica que le permita a los docentes trabajar en clases los contenidos matemáticos de una forma en la que además de visualizar interactivamente los mismos, puedan sus estudiantes manipularlos en la interfaz que proporciona la aplicación. Por otra parte, se convierte en una herramienta útil al docente puesto que la aplicación presenta una utilidad para la creación de tareas, mismas que los estudiantes pueden desarrollar desde sus hogares, es posible generar las respuestas de las mismas de modo que los estudiantes vayan trabajando y a la vez realimentado lo aprendido en clases. Dicha temática podría resultar de interés para estudiantes de secundaria, aquellos que cursen matemática general, asimismo para profesores de secundaria o profesores en algunos cursos de matemática básica

Objetivos

- Aportar tanto a docentes en el campo de la enseñanza de la matemática como estudiantes en su proceso de formación en el área de la docencia en matemática, una herramienta versátil que puede convertirse en un aliado en las experiencias de aula para el desarrollo y evaluación de diversos contenidos en el programa de matemática costarricense vigente.
- Promover espacios de reflexión docente acerca del uso de la tecnología como punta de lanza en el desarrollo de contenidos matemáticos y en aras de dar un abordaje diferente y atractivo al aprendizaje de esta ciencia.

Marco teórico

Con respecto a la implementación de la tecnología como recurso didáctico, puntualmente es posible señalar que“las tecnologías móviles han redibujado el panorama educativo, aportando a la educación no sólo movilidad sino también conectividad, ubicuidad y permanencia, características propias de los dispositivos móviles tan necesarias en los sistemas de educación” (Cantillo, Roura y Sanchéz, 2012, p.3), de esta forma el uso de dispositivos móviles en educación es un elemento fundamental en la construcción del conocimiento, ya que con la utilización de estas tecnologías se incrementan las posibilidades de interactuar con los miembros del grupo, se mejora la comunicación; por lo tanto, se difumina la barrera que separa a docentes y discentes.

La tendencia actual hacia el uso de dispositivos móviles y el computador en educación está enfocada a que, en el futuro, cada vez más se utilicen estos aparatos en las aulas y en los centros educativos. Creemos importante aprovechar los recursos tecnológicos que están a la mano de los estudiantes y tratar de convertir un distractor en un aliado en el proceso formativos de los mismos, es posible utilizar los dispositivos móviles y el computador para representar diversos problemas matemáticos que continuamente se desarrollan en los cursos, esto a partir de una gran cantidad de aplicaciones gratuitas y que quizás en ambientes de “papel y lápiz” no es posible visualizar de una forma interactiva y que le resulte más atractiva al estudiante. La versatilidad, el fácil uso, así como la interfaz que ofrecen una gran cantidad de aplicaciones móviles ya sea para sistemas IOS o ANDROID, las convierten en herramientas útiles para el aprendizaje de los estudiantes, corresponde a los docentes encauzar estos esfuerzos y liderar estas iniciativas en nuestro campo.

Metodología: guía didáctica

Debe tener instalado en su celular la aplicación DESMOS, la cual es gratuita y es posible descargarla desde cualquier tienda celular. También es posible acceder desde su computadora Cuando tenga instalada la aplicación en su celular, aparecerá el ícono siguiente:

Figura 1: Logo desmos.

Al ingresar a desmos tendrá la siguiente interfaz por visualizar:

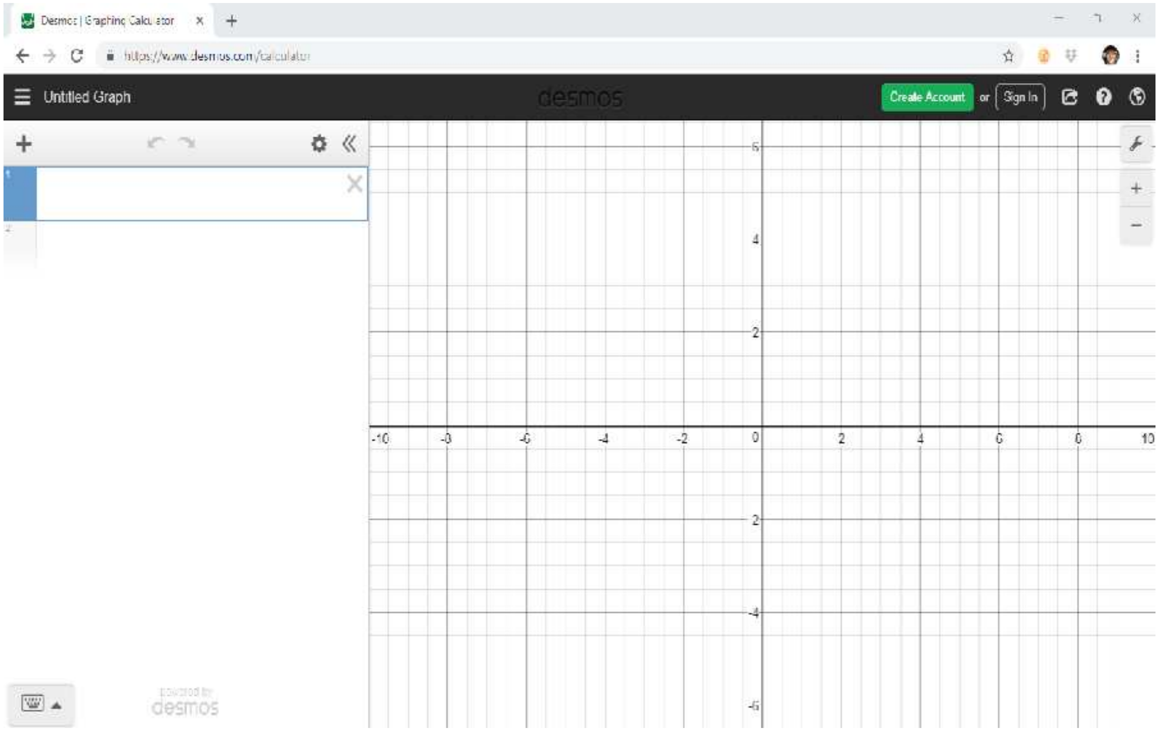


Figura 2: Interfaz desmos.

Como es posible observar, por default la aplicación ingresa al modo de graficación en el plano cartesiano, donde se tiene a disposición los diferentes botones con variables y constantes para el ingreso de ecuaciones, con el objetivo de graficar en 2D. En el botón **funcs**, es posible hallar algunas funciones

Guía desmos

La idea principal de esta guía es presentarle al estudiante los ejercicios de forma visual, de manera que estos cobren sentido para el mismo a partir de su representación gráfica. Por lo tanto, la herramienta no se convoca como un instrumento colaborativo paso a paso en la resolución del problema planteado, sino más bien se busca que el docente desarrolle los ejercicios en ambiente de papel y lápiz como comúnmente se efectúa, para luego que dicho ejercicio sea interiorizado a través de la visualización de su gráfica. Permitiendo esto relacionar la capacidad de generalización del algebra con el poder visualizador de la geometría. Podría darse el caso que los estudiantes no logran comprender el ejercicio en ambientes de papel y lápiz, pero si lo consiguen de forma visual. Los ejercicios también pueden abordarse primero a partir de la aplicación móvil o la computadora y luego mediante la resolución tradicional, dependerá de la práctica que vaya haciendo el estudiante y del conocimiento que adquiera para utilizar la aplicación como apoyo resolviendo paso a paso los ejercicios planteados. En el caso del uso de la aplicación como una herramienta docente se desarrollará un pequeño apartado a continuación en el cual se dará un guía que será ampliada por completo en el desarrollo del taller.

Creación de Tareas en desmos

Dentro de las utilidades de desmos es posible la creación de tareas mediante fichas por parte del docente, en estas el profesor puede elegir el tipo de ítem que puede utilizar para los ejercicios asignados. Entre las posibilidades se encuentran la selección única, el asocie, la respuesta breve entre otros. Para ingresar a la creación de tareas se requiere abrir una cuenta en desmos o también existe la posibilidad de ingresar desde Facebook o mediante la cuenta de google en el computador se ingresa a www.desmos.com y a la opción mostrada a continuación:

Figura 4: Ingreso a creación de actividades.

Al ingresar a classrom activities se selecciona en el menú de la izquierda la opción custom en la que es posible crear tareas para los estudiantes, se muestra a continuación dicha opción:

Figura 5: Opción Custom.

Posteriormente la aplicación abrirá un menú para creación de tareas, en figura 6 es posible observar algunas actividades creadas, mismas a las que el docente les asigna un nombre acorde con la temática a tratar, en el margen superior derecho se observa la opción New Activity que precisamente permitirá la creación de nuevas actividades.

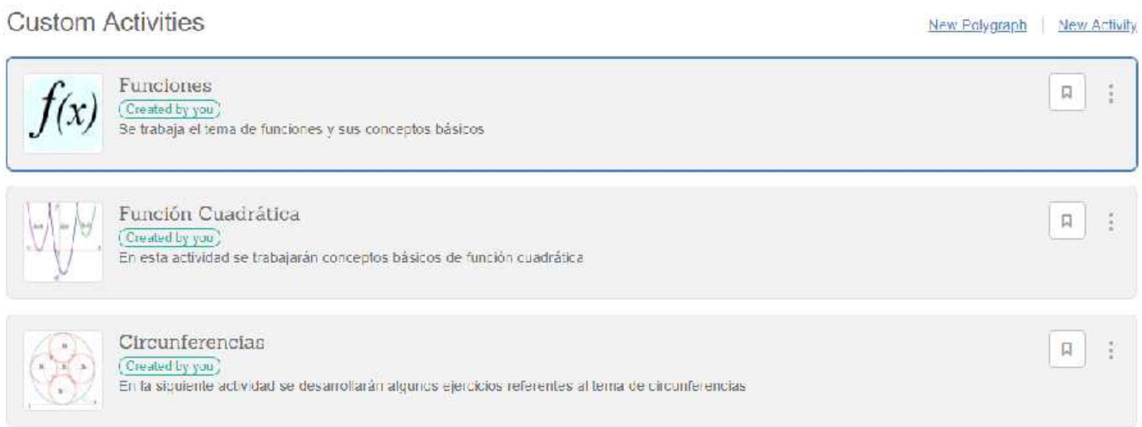


Figura 6: Actividades ya elaboradas.

Ingresando en nueva actividad lo que primero se mostrara será la opción para darle nombre a la actividad a desarrollar, así como un código para que los estudiantes ingresen. También existen ya una serie de actividades realizadas dentro de la misma aplicación, únicamente la barrera es el idioma en este caso. Luego de dar nombre a la actividad (figura 7) se iniciará en start building, para empezar a desarrollar dicha actividad.

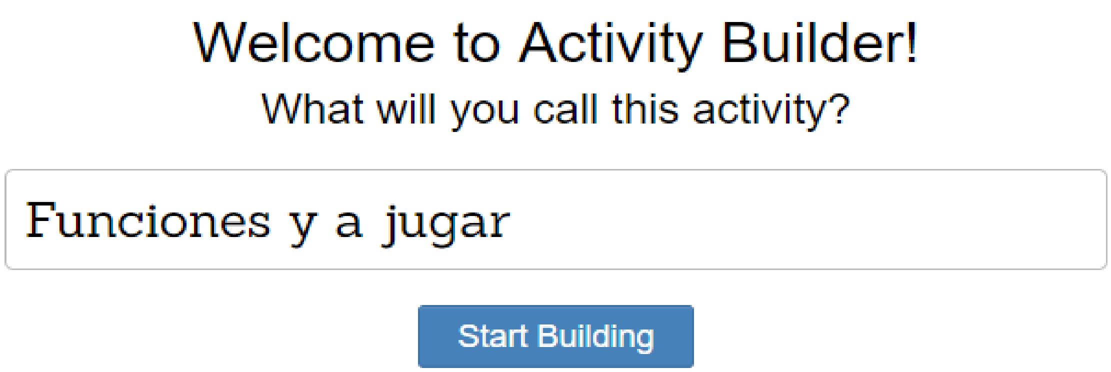


Figura 7: Darle nombre a la actividad.

Luego de asignarle un nombre a la actividad se iniciará con la construcción de la misma en la opción star building donde la interfaz de construcción será la mostrada en la figura 8.

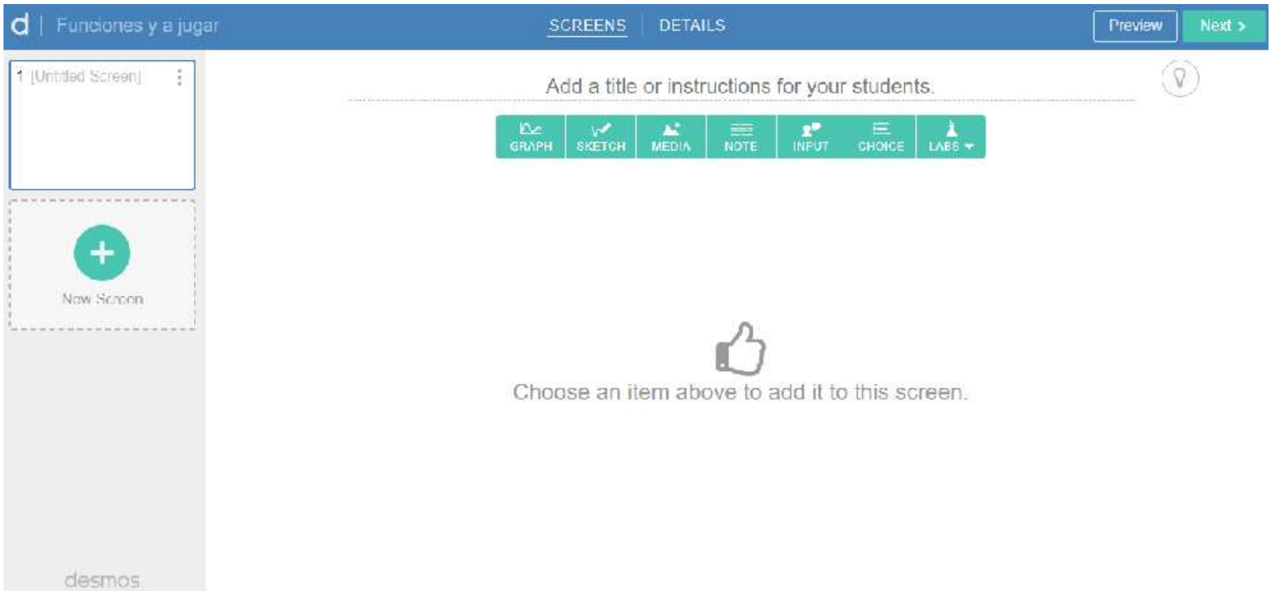


Figura 8: Interfaz de construcción de actividades o tareas

Como es posible observar en el margen izquierdo aparecen las fichas tarjetas para donde se construirán los ejercicios a desarrollar, en la parte central aparecen diferentes combos como graph que permite descargar una gráfica creada desde la calculadora graficadora de desmos, sketch permite a los estudiantes crear una pizarra interactiva para dibujar y probar algunos cuestionamientos con base en el dibujo, media es una opción que permite descargar algunos archivos ya desarrollados asi como imágenes que sirvan en algún ítem, note es una opción que permite escribir alguna nota particular en el ítem creado, input da la opción de utilizar lenguaje escrito convencional y trae una opción a la vez para la simbología matemática, choice permite escoger el tipo de ítem a crear ya sea de selección única, respuesta breve, desarrollo entre otros y para finalizar labs trae una opción llamada card sort que consiste en tarjetas de asocie.

Cuando la actividad ya está creada pueden visualizarse las distintas tarjetas que se le presentarán a los estudiantes, en la opción view dashboard es posible dar un seguimiento a los estudiantes que han contestado y las respuestas de estos. A los estudiantes se les brindará un código para que ingresen a trabajar desde sus hogares en las actividades previamente desarrolladas por el docente.

Figura 9: Código de actividad y tarjetas realizadas.

Podemos observar el caso de una tarjeta de selección única y la vista que tendrá en estudiante de dicha tarjeta en la figura 10.

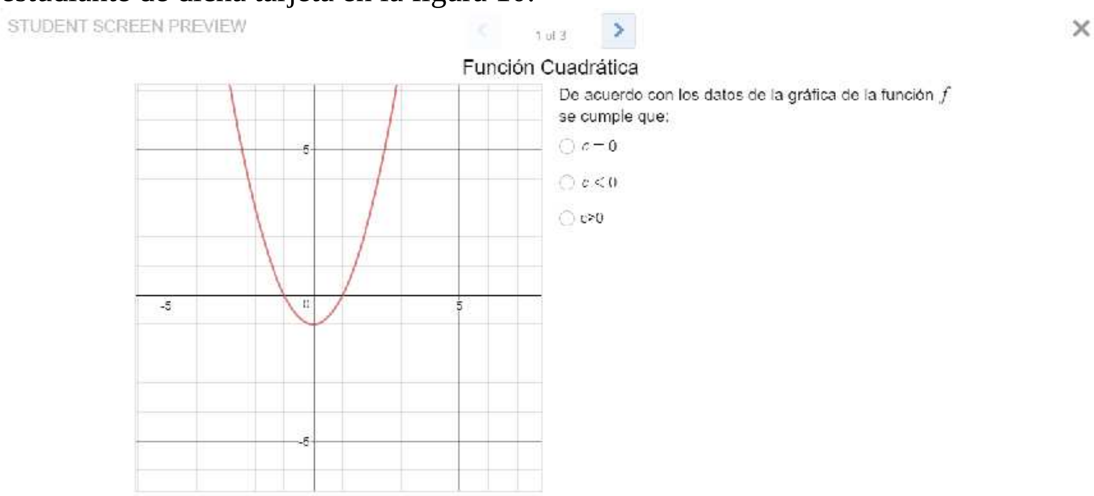


Figura 10: vista del estudiante de una tarjeta.

En el menú de dashboard es posible ver el avance de los estudiantes y contabilizar los aciertos y lo errores en las distintas tarjetas hechas como se observa en la figura 11.

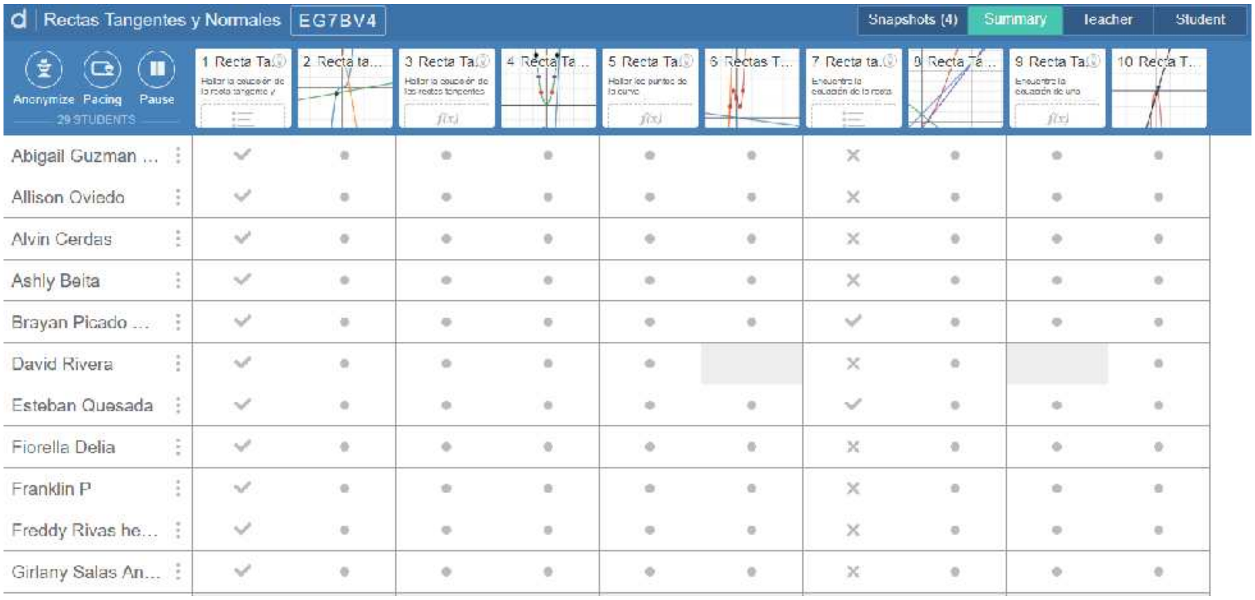


Figura 11: Menú dashboard.

Conclusiones

La idea primordial de este trabajo es convertir un distractor como lo ha sido en los últimos años la tecnología en un aliado en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática. La versatilidad de estas herramientas les permite a los estudiantes ver de una forma dinámica algún tema que en el desarrollo de la teoría quizás no será tan atractivo como al ejemplificarlo mediante algún recurso, en este caso que se propone el uso de la aplicación DESMOS.

Valorando lo anterior, nos parece importante motivar el deseo en los docentes por buscar continuamente estrategias de algún tipo, que le permitan a sus estudiantes interesarse por las temáticas desarrolladas en el salón de clase, hoy en día existe una gran cantidad de recursos que tenemos al alcance de las manos y que con un cambio en la perspectiva del uso que se les da podría convertirse como bien apuntábamos con anterioridad en un aliado estratégico en la enseñanza.

Referencias y bibliografía

Cantillo, C. , Roura, M. y Sánchez, A. (2012). Tendencias uso de dispositivos móviles en educación. *La educación digital magazine*, 147 (1), 1-21.

Paéz, C (2015). *Prácticas, soluciones y exámenes resueltos de Matemática General*. Cartago, Costa Rica: Editorial Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Swokowski, E. (2009). *Álgebra y Trigonometria con Geometria Analítica*. Santa Mónica, Estados Unidos: Editorial Brooks and Cole.

UNESCO. (2013). Enfoques Estratégicos de las TIC´s en la Educación en América Latina y el Caribe. Oficina Regional de Educación, Santiago Chile.

Conocimiento del profesor con ayuda de Geogebra

Fernando **Mejía** Rodríguez
Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México
México
fernando.mejia@isceem.edu.mx

Resumen

La cultura de la evaluación no dejó escapar a la educación, ahora se crean organizaciones que aplican exámenes internacionales. Los resultados de PISA 2015 evidencian la posición del sistema educativo mexicano. El objetivo de esta comunicación es analizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas cuando resuelve tareas con la ayuda de Geogebra. El enfoque metodológico es estudio de caso, se trabajó con seis profesores, cuatro de educación básica y dos de educación media superior. Se muestra una tarea resuelta por caminos diferentes. Entre las conclusiones, podemos destacar: el profesor de matemáticas, antes de exponer una tarea, debe al menos conocer tres caminos para encontrar el mismo resultado; el MTSK es complejo; una herramienta digital, que permitió la transición a una mejor comprensión y a la resolución de tareas, fue Geogebra, que, a partir de un bosquejo inicial o refuerzo, puede ser utilizado a favor de la matemática escolar.

Palabras clave: conocimiento, profesor, MTSK, tareas, Geogebra, estrategias.

Contexto del profesor de matemáticas mexicano

Los países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), se organizaron para formar el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés). México ha participado desde el 2000 en estos programas, el más reciente fue el aplicado en el 2015. En la *Figura 1* (OCDE, 2016, p. 194), se puede apreciar el lugar que ocupa el sistema educativo mexicano en cuanto a matemáticas, con respecto a los países miembros de la OCDE. Estamos en último lugar, tomando en cuenta sólo los miembros de la OCDE que están en letras de color negro. Por otro lado, la OCDE hace la invitación a otras economías alrededor del mundo y están identificados con letras en color azul, entonces, alcanzamos el lugar 55 de 69. En la zona latina, estamos por encima de Costa Rica, Perú, Colombia y Brasil; pero debajo de Argentina, Chile y Uruguay.

En México, las autoridades educativas aseguran, que se debe *evaluar para mejorar*; los profesores si quieren seguir trabajando tienen que participar en evaluaciones, que como premio les dejarán seguir laborando en las escuelas; de lo contrario, perderán su empleo.

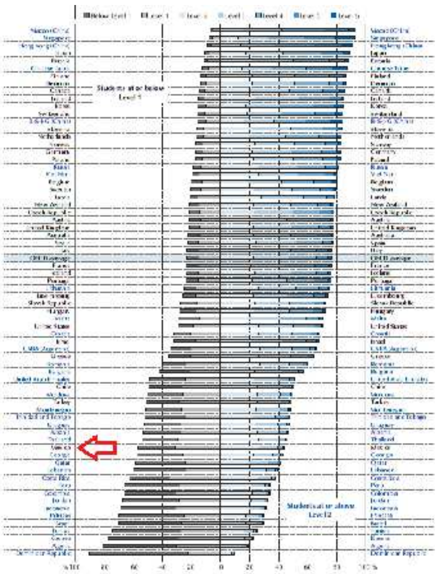


Figura 1. Resultados de matemáticas en PISA 2015

Resolución de tareas

Para Lester & Cai (2016, p. 8) la actividad principal en el salón de clases es "una tarea que se presenta a los estudiantes en un entorno de instrucción que plantea una pregunta para ser respondida, pero para la cual los estudiantes no tienen un procedimiento o estrategia disponible para responderla". El profesor debe tener un cierto conocimiento para poder explicar las ideas matemáticas a sus alumnos cuando resuelven tareas.

En la *Figura 2* se muestra el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés), expuesto por Aguilar et al. (2013), donde el dominio del Conocimiento Matemático (MK) está dividido en tres subdominios: Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) y Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM); al igual el dominio del Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) en otros tres subdominios: Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS).

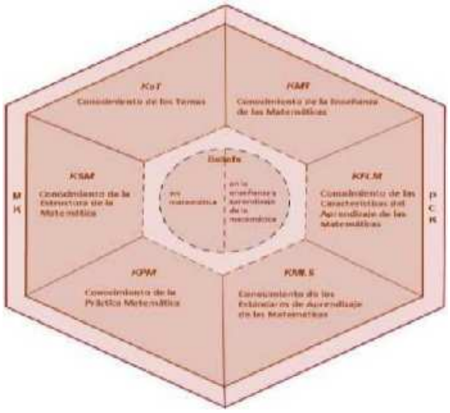


Figura 2. Modelo MTSK

El efecto de tomar la decisión de que los alumnos interactúen con un software dinámico para la construcción de figuras geométricas, las señalan Gutiérrez, Prieto & Ortiz Buitrago (2017, p.39) como "bondades de integrar tecnologías digitales en las experiencias de resolución de problemas matemáticos con cierto realismo". El software Geogebra, tiene ventajas sobre otros paquetes informáticos porque: es gratuito, es multiplataforma, es intuitivo y no demanda tanta cantidad de memoria y operaciones del microprocesador:

> Con el desarrollo de software gratuito basado en Internet, como Geogebra, es posible que se superen estas barreras. El mayor acceso a los estudiantes, y la disponibilidad de proyectores digitales, presenta el inconveniente de quién debería estar a cargo: el maestro dirigiendo una discusión de toda la clase o el estudiante involucrado en una 're-invención guiada' individual (Little, 2018, p. 9).

Fan & Zhu (2007) señalan las estrategias que se pueden utilizar para resolver tareas: (1) Actúalo, (2) Cambia tu punto de vista, (3) Dibuja un diagrama, (4) Adivina y revisa, (5) Razonamiento lógico, (6) Busca un patrón, (7) Elabora suposiciones, (8) Elabora una lista, (9) Elabora una tabla, (10) Replantea el problema, (11) Simplifica el problema, (12) Resuelve parte del problema, (13) Piensa en un problema relacionado, (14) Usa un modelo, (15) Usa una ecuación, (16) Usa concepto antes-después, (17) Trabaja de reversa.

Diseño

La mirada de esta investigación es cualitativa, con estudio de caso (Stake, 1999). El caso para esta investigación, fueron los profesores que estudiaron el programa de la maestría en investigación de la educación de la generación 2016-2018 en Toluca, Estado de México, cuyos temas de tesis estaban inscritos en educación matemática. Se trabajó con seis profesores de educación básica y media superior, que tomaron dos talleres de resolución de tareas, donde básicamente se llevaban a cabo dos actividades: la resolución de tareas con papel y lápiz, y la utilización de Geogebra. Cinco profesoras y un profesor, una profesora de educación preescolar (Araceli), dos profesoras de primaria (Lupita y Carmen), una de secundaria (Rocío), una de media superior (Edith) y un profesor de media superior (Sergio). Araceli tiene 11 años de servicio en la docencia, Lupita 11, Carmen 20, Rocío 5, Edith 4 y Sergio 11.

Se resolvieron diversas tareas, pero por el espacio para esta comunicación sólo se muestra una de ellas, que se tomó del calendario del mes de enero de 2018, del día 19 (NCTM, 2018): *Un triángulo isósceles tiene los vértices de sus ángulos base sobre la gráfica de* $x^2 + y^2 = 16$*. La coordenada del tercer vértice es (0,10). Encuentra las coordenadas de los vértices en los ángulos base que maximicen el área del triángulo.*

La tarea pide graficar una circunferencia con centro en el origen y de radio 4, después poner alineados y paralelos al eje x dos puntos del triángulo cuyo tercer vértice tiene la coordenada $(0,10)$, los dos vértices base se pueden mover a lo largo de la circunferencia y lo que se pide es encontrar el área máxima y la ubicación de los dos vértices base. Resolver esta tarea con lápiz y papel está en desventaja con Geogebra, primero porque no se puede apreciar el movimiento en el papel, pero sí en la pantalla de la computadora, tableta o celular.

Resultados

La tarea fue resuelta por tres caminos diferentes que llegan al mismo resultado de 42.7 como área máxima y los vértices base $(-3.8, -1.3)$ y $(3.8, -1.3)$: el primero, en plenaria; el segundo, por Araceli, Lupita y Carmen; y el tercero, por Rocío, Edith y Sergio. En el primer camino, todos los profesores con la ayuda de Geogebra[1], construyeron los siguientes comandos:

c=Circunferencia ((0,0),4)
A=Punto(c)
f=Recta (A,Ejex)
Interseca(c,f)
D=(0,10)
Polígono(B,C,D)

El resultado se puede ver al cambiar el punto B desde la parte alta del círculo hasta la parte baja y observar cómo el área del triángulo va teniendo incrementos hasta llegar a un tope y después empezar a disminuir hasta cero. En la *Figura 3* se aprecia el área máxima de 42.7 y las coordenadas de B y C son $(-3.8, -1.3)$ y $(3.8, -1.3)$ respectivamente. Cabe hacer mención, que lo encontrado es el valor aproximado, tanto de los valores de B, C y el área máxima del triángulo. Pudiera decirse que está resuelto parcialmente, que se tiene un buen acercamiento, pero el valor preciso no. En estudiantes de educación básica sería suficiente con estos números, pero en media superior, creemos que tenemos que seguir buscando el valor exacto. Las estrategias de solución empleadas, fueron: Actúalo, Dibuja un diagrama, Adivina y revisa, y Elabora suposiciones.

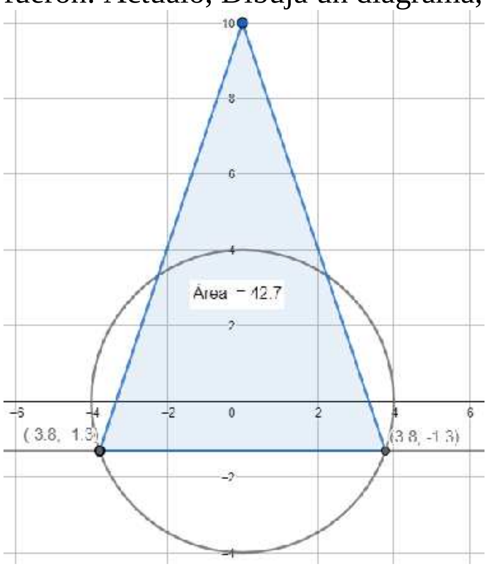


Figura 3. Primer camino.

[1] https://www.geogebra.org/m/uGncX53x

El segundo camino es por Araceli, Lupita y Carmen, que pensaron en construir una expresión para el área del triángulo, nombraron (a, b) y $(-a, b)$ a los vértices base del triángulo, el otro vértice es (0,10), así que la altura del triángulo la expresaron en términos de b.

$$h = 10 - b$$

Como el valor de b está dentro de la función $b = \pm\sqrt{16 - a^2}$, se tomó la función negativa porque es donde se encuentra el área mayor. La altura queda definida como.

$$h = 10 - \left(-\sqrt{16 - a^2}\right) = 10 + \sqrt{16 - a^2}$$

Para el área del triángulo escribieron.

$$A_{(a)} = \frac{(2a)\left(10 + \sqrt{16 - a^2}\right)}{2} = a\left(10 + \sqrt{16 - a^2}\right)$$

Graficaron la función en sus cuadernos, pero les costó trabajo, así que decidieron hacerlo con Geogebra, tal como lo muestra la *Figura 4*. La función de $A_{(a)}$ tiene un máximo en el primer cuadrante con las coordenadas $(3.84, 42.7)$; esto quiere decir, que el valor de los vértices bases tendrían las coordenadas de.

$$b = -\sqrt{16 - (3.84)^2} = -1.12$$
$$(-3.84, -1.12) \text{ y } (3.84, -1.12)$$

Por lo tanto, el área máxima del triángulo sería 42.7, con las estrategias de solución: Dibuja un diagrama, Adivina y revisa, Razonamiento lógico, Usa un modelo, y Usa una ecuación.

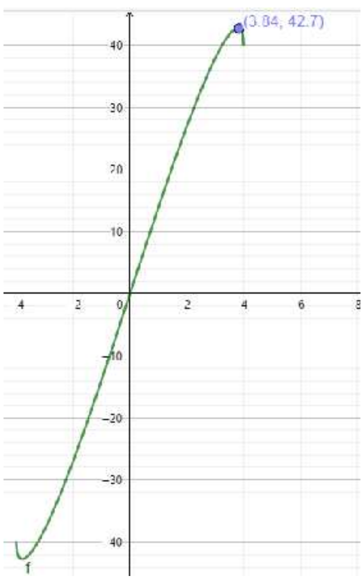


Figura 4. Segundo camino.

El tercer camino, expuesto por Rocío, Edith y Sergio, donde pensaron en resolver la tarea con la expresión del camino anterior, pero derivarla e igualarla a cero para encontrar el punto de inflexión.

$$A_{(a)} = a\left(10 + \sqrt{16 - a^2}\right)$$
$$A'_{(a)} = a\left(\frac{-2a}{2\sqrt{16 - a^2}}\right) + 10 + \sqrt{16 - a^2} = 0$$
$$4a^4 + 36a^2 - 1344 = 0$$
$$a^4 + 9a^2 - 336 = 0$$

Hicieron un cambio de variables.

$$x = a^2$$

Reescribieron la ecuación.

$$x^2 + 9x - 336 = 0$$

La resolvieron con la fórmula general.

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 1344}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{25}\sqrt{57}}{2} = \frac{-9 \pm 5\sqrt{57}}{2}$$

Buscaron los valores de a.

$$a = \sqrt{x}$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}$$

Que los valores aproximados son 3.791383137 y -3.791383137.

Para encontrar el valor de los vértices base, se tomó el valor de a para la siguiente ecuación.

$$a^2 + b^2 = 16$$

$$b = \pm\sqrt{16 - a^2}$$

$$b = \pm\sqrt{16 - \frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}$$

$$b = -\sqrt{\frac{41 - 5\sqrt{57}}{2}}$$

Los vértices base están dados por las coordenadas.

$$\left(-\sqrt{\frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}, -\sqrt{\frac{41 - 5\sqrt{57}}{2}}\right) y \left(\sqrt{\frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}, -\sqrt{\frac{41 - 5\sqrt{57}}{2}}\right)$$

Que en valor aproximado son.

$$(-3.79, -1.27)\ y\ (3.79, -1.27)$$

El valor del área máxima es.

$$A_{\left(\sqrt{\frac{-9+5\sqrt{57}}{2}}\right)} = \sqrt{\frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}\left(10 + \sqrt{16 - \frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}\right)$$

$$A_{\left(\sqrt{\frac{-9+5\sqrt{57}}{2}}\right)} = \sqrt{\frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}\left(10 + \sqrt{\frac{41 - 5\sqrt{57}}{2}}\right)$$

Cuyo valor aproximado es 42.747531, gracias a las estrategias de solución: Razonamiento lógico, Replantea el problema, Simplifica el problema, Resuelve parte del problema, Usa un modelo, Usa una ecuación, y Usa concepto antes-después.

Conclusiones

Existen diferentes caminos para resolver tareas, de la tarea propuesta en esta comunicación, se expusieron tres caminos diferentes; esto lo podemos trasladar a, que un profesor de matemáticas, antes de llegar al salón de clases y exponer una tarea, debe por lo menos conocer tres caminos para encontrar el mismo resultado.

Cada profesor tenía sus estrategias de solución favoritas, lo que nos lleva a pensar que, cada profesor y cada estudiante pueden desarrollar más unas estrategias de solución que otras, podrán mejorar cierta destreza sobre el uso de unas estrategias con respecto a otras, cada quien lo hace de manera personal, lo importante es conocer más estrategias.

La ventaja de conocer más estrategias de solución por parte de los alumnos, en una clase de matemáticas, es que pueden construir más caminos diferentes para llegar a resolver la tarea matemática; la bondad de que el profesor de matemáticas amplíe su abanico de estrategias de solución, provocará que reconozca más caminos para resolver la misma tarea y llegar al mismo resultado, esto le ayudará a asesorar mejor a sus estudiantes, porque cuando vea el trazado de un camino, no será necesario esperar hasta el final, porque el profesor podrá adelantar al proceso que llevan y evitar una trayectoria que guiará a los alumnos al fracaso, por el contrario, alentará el camino que anticipa que terminará en éxito. Todo lo anterior se da en el contexto de trabajo en equipos por parte de los estudiantes.

Aunque existe consenso dentro de la comunidad de educación matemática, que el desarrollo de las habilidades de los estudiantes para resolver tareas es el objetivo principal de la enseñanza, no hay un consenso de qué tendrían que hacer los profesores para alcanzar dicho objetivo (Lester & Cai, 2016). Estamos de acuerdo los profesores de matemáticas, en que la actividad principal en las clases de matemáticas es la resolución de tareas, pero verla como un medio o como un fin, puede estar a discusión.

La resolución de tareas como una finalidad, muestra una postura donde el actor principal es el conocimiento y el profesor, porque quien lleva el conocimiento enseña, expone en clases tipo cátedra y mediante ejemplos deja más claro el tema a desarrollar, para después dar ejercicios de práctica, desarrollar la mecanización del algoritmo; que es buena, pero no suficiente.

Las tendencias internacionales de cómo enseñar matemáticas, está mayormente inclinada con la resolución de tareas como medio, ahora el centro de la educación es el estudiante, porque a través de ensayos, intentos y en ocasiones de errores, esboza un camino para poder encontrar la solución a las tareas. No se tiene un método eficiente para resolver esa tarea inicial, cuenta con elementos que le permiten acercarse a la solución, ha resuelto tareas similares, puede descomponerla para poder contestar parte de ella; el profesor, a partir de la necesidad, puede exponer un método más eficiente, nuevo, pero no mejor.

¿Qué método es mejor a otro? Depende, cada persona tiene a través de los años estrategias favoritas, atajos, artilugios, técnicas propias, que va desarrollando, perfeccionando, hasta que puede decir “para mí, este método es mejor que aquel”; pero eso se cumple exclusivamente para esa persona, no hay métodos universales que sean mejores que otros, pueden existir métodos más cortos, más rápidos, más abstractos, más complicados, pero no mejores para todos.

Los profesores de matemáticas no necesitan ser expertos para resolver tareas, deben ser serios estudiosos de la resolución de tareas (Lester, 2013). El profesor de matemáticas no requiere ser un matemático, un experto en la matemática, necesita ser una personas dedicada, comprometida, estudiosa y responsable con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, debe preocuparse por cómo aprenden sus estudiantes, por cómo está organizado el currículum escolar, de cómo comunicar las ideas matemáticas con sus estudiantes, de saber resolver tareas por diferentes caminos, usando diversas estrategias de solución, debe saber las bases de las matemáticas del siguiente nivel educativo; pero sobre todo, de tener la disposición para aprender, de buscar la información cuando no tenga la respuesta.

El MTSK del profesor de matemáticas es complejo, ya lo explicamos a lo largo de este documento; una herramienta digital, que permitió la transición a una mejor comprensión y a la resolución de tareas, fue Geogebra, que no sólo abonó en favor del MK, sino también del PCK porque podrá permitir tener una mejor comunicación con los nativos digitales, que en la mayoría son nuestros niños o jóvenes, alumnos de educación básica o media superior. Ya lo hemos resaltado, pero vale la pena volver a remarcar, no pensamos que la tecnología o que Geogebra sea la panacea de la educación matemática, el abuso puede provocar que no se aprenda a reflexionar, que se crea que las computadoras, el software, las aplicaciones, podrán sustituir los temas de matemáticas y aplicarlos directamente a la resolución de tareas; creemos que, como bosquejo inicial o refuerzo, puede ser utilizado a favor de un mejor aprendizaje y enseñanza de la matemática escolar.

Cierro este escrito, mencionando que me he divertido haciendo esta comunicación, considero que el mayor objetivo de una persona en este mundo, es buscar la felicidad, Walsh (2011) asegura que para lograr una salud mental, se requieren de ocho TLC (Cambios de Estilo de vida Terapéuticos): ejercicio, nutrición y dieta, tiempo en la naturaleza, relaciones, recreación, relajación y manejo del estrés, participación religiosa y espiritual, y contribución y servicio a los demás. Salir a disfrutar de la naturaleza con la bicicleta, me ayuda con el ejercicio, el tiempo en la naturaleza, la recreación y la relajación; en el Instituto donde laboro, puedo hacer lo que más me gusta, las matemáticas, con ello logro las relaciones, la recreación y el servicio con los demás, así que comparto este documento esperando que haga feliz a más personas.

Referencias

Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., … Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. In *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 5063–5069). Uruguay: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.

Fan, L., & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 61–75.

Gutiérrez A., R. E., Prieto G., J. L., & Ortiz Buitrago, J. (2017). Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educacion Matematica*, *29*(2), 37–68. https://doi.org/10.24844/EM2902.02

Lester, F., & Cai, J. (2016). Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from Thirty Years of Research. In P. Felmer, J. Kilpatrick, & E. Pehkonnen (Eds.), *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives*. Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3

Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1&2), 245–277.

Little, C. (2018). Interactive Geometry in the Classroom: Old Barriers & New Opportunities. *Mathematics in School*, *38*(2), 9–11.

NCTM. (2018). January 2018 Calendar. *The Mathematics Teacher*, *111*(4), 280–282. https://doi.org/10.5951/mathteacher.111.4.0280

OCDE. (2016). *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education*. Paris: OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/9789264266490-en

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.

Walsh, R. (2011). Lifestyle and mental health. *American Psychologist*, *66*(7), 579–592. https://doi.org/10.1037/a0021769

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Formação para a docência em matemática na Educação Básica no Brasil: experiência na formação inicial e continuada

Janaína Mendes Pereira **da Silva**
Universidade de Brasília
Brasil
Jana.mendes.ps@gmail.com
Regina da Silva Pina **Neves**
Universidade de Brasília
Brasil
reginapina@gmail.com
Wesley Pereira **da Silva**
Universidade de Brasília
Brasil
wesleynh3@gmail.com
Maria Luísa Piantamar **de Oliveira**
Universidade de Brasília
Brasil
maria2006luisa@hotmail.com

Jenifer de Sousa **Sales**
Universidade de Brasília
Brasil
lajenifer.sousa@hotmail.com

Resumo

Esta pesquisa procura contribuir com a Educação Matemática e a formação de professores. O estudo visa investigar as contribuições e os desafios de ensinar e aprender Matemática na escola básica, a partir da participação de licenciandos e licenciados no Circuito de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal, Brasil. Desde novembro de 2004, os Circuitos de Vivências se apresentam como um espaço de formação para a docência em Matemática, em uma ação voluntária, que visa à prática docente. Metodologicamente, é uma pesquisa qualitativa, tendo como instrumentos de coleta de dados a análise documental. Os resultados parciais revelam que há significativo envolvimento dos participantes nas vivências; que a investigação e o aprimoramento profissional são importantes para o desenvolvimento da Educação

Matemática e que, ao envolver distintas instituições de ensino superior, é possível realizar trocas pedagógicas importantes que geram motivação pela Matemática.

Palavras chave: Circuitos de Vivências, formação de professores, Educação Matemática, formação inicial e formação continuada.

Introdução

A Educação Matemática é um campo do conhecimento que se dedica a estudar questões relativas ao ensino e à aprendizagem de matemática. É um campo interdisciplinar que faz uso de teorias de outros campos teóricos, como a sociologia, a psicologia, a filosofia, para a construção de seu conhecimento, além de construir suas próprias teorias (Passos, 2008). Este trabalho tem como proposta apresentar a participação e a aprendizagem profissional de professores experientes e futuros professores da Licenciatura em Matemática e Pedagogia (no âmbito disciplinar da Educação Matemática), que atuam em ação colaborativa, intitulada Circuito de Vivências[1] em Educação Matemática do Distrito Federal, Brasil.

O Circuito de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal, Brasil se consolidou ao longo dos anos em espaço de formação inicial e continuada para os professores e futuros professores que ensinam este componente curricular no Distrito Federal (licenciados em Pedagogia e Matemática), na medida em que integra profissionais da escola e da universidade, e utiliza a investigação matemática como princípio no planejamento e na mediação das vivências.

Desenvolvidos desde novembro do ano de 2004 até a presente data, esses circuitos surgiram a partir do trabalho colaborativo e voluntário de seus membros, que intevêm socialmente com estudantes e professores de Escolas Públicas, por meio da oferta de vivências em matemática, conforme defendem Muniz (2008, 2010), Bertoni (2003, 2008) e Skovsmose (2000). Eles têm atendido grande quantitativo de estudantes da educação básica, distribuídos em escolas públicas de diferentes regiões do Distrito Federal. O processo de constituição e execução dos Circuitos pode ser observado na tabela 1, apresentada a seguir, com destaque para as fases, os participantes, as ações, entre outros aspectos.

Tabela 1

Circuitos de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal

Título	Circuito de Vivências em Matemática
Datas importantes	2003 – discussão/planejamento; 2004 – início das atividades; Situação atual: em desenvolvimento
Instituições envolvidas	Universidade de Brasília (Departamento de Matemática e Faculdade de Educação); Instituto Federal de Brasília; Universidade Católica de Brasília; Faculdade Projeção de Taguatinga (Antiga Faculdade Jesus Maria José)

1 Mais informações podem ser acessadas em: www.sbemdf.com.br

	Faculdade Estácio de Sá (Antiga Facitec de Taguatinga)
Programas de pós-graduação e/ou iniciação científica envolvida	Programa de Mestrado Profissional (ProfMat), Departamento de Matemática, UnB Programa de Mestrado em Educação, Faculdade de Educação, UnB Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Católica de Brasília Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), Departamento de Matemática, UnB Programa de Educação Tutorial (PET), Departamento de Matemática, UnB Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), Faculdade Projeção
Objetivos	1/ promover o pensar e o fazer matemática de maneira investigativa e criativa junto a estudantes da Educação Básica de Escolas Públicas da SEEDF; 2/ promover a produção de vivências em matemática por estudantes de graduação, pós-graduação, professores e pesquisadores da área de ensino de matemática, vinculados aos cursos de licenciatura em matemática e pedagogia de instituições públicas e particulares; 3/ desenvolver e avaliar as vivências em matemática produzidas; 4/ instituir a pesquisa colaborativa como ferramenta de formação inicial e continuada para o professor e/ou futuro professor que ensina matemática, assim como defende Fiorentini (2005), em todas as instâncias de produção, organização, avaliação, execução e socialização das vivências.
Princípios teórico-metodológicos	Produção de vivências em matemática tendo como referência o currículo de matemática da SEEDF em consonância com os aspectos teórico-metodológicos defendidos por Muniz (2010), Bertoni (2003, 2008) e Skovsmose (2000).
Metodologia	Eles são realizados em escolas públicas, previamente agendadas; cada vivência em matemática é desenvolvida por dois ou mais responsáveis, durante 40 minutos, em regime de circuito. Com isso os participantes têm a oportunidade de vivenciar até 5 vivências.
Demanda	A busca por agendamentos cresce a cada ano e o calendário anual é organizado com bastante antecedência. Para atender a demanda das escolas – sem lista de espera – o número de circuitos e pessoas envolvidas deveria triplicar.
Avaliação	As vivências em matemática são avaliadas tanto pelos estudantes das escolas atendidas quanto pelos que oferecem as vivências por meio de formulários de avaliação construídos para esse fim pela equipe. As avaliações têm auxiliado nos processos de reelaboração e adequação das vivências aos princípios teórico-metodológicos.

Fonte: SBEM/DF

Desse modo, interessa-nos, neste texto, compreender se as práticas coletivas que ocorrem no Circuito de Vivências proporcionam reflexão e investigação, na construção de novos modos de ensinar e aprender matemática na escola. Ademais, buscamos investigar quais são as contribuições e os desafios de ensinar e aprender matemática na escola básica, a partir dos dados documentais do Circuito de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal, Brasil.

Para a concretização desta pesquisa, inicialmente, levantamos os aspectos teóricos que embasam a problemática do estudo, destacando aspectos da formação continuada, as características da fase inicial da carreira docente (em formação e recém-formados), a socialização de forma coletiva dos conhecimentos por parte de professores experientes e os aspectos relacionados à aprendizagem do professor nestas fases, pela colaboração, pela reflexão e pela investigação da própria prática.

Formação inicial e continuada de professores de Matemática: algumas reflexões

Os estudos relativos ao campo de formação de professores, atualmente, têm reconhecido a complexidade da prática docente, o que leva à necessidade do aprender contínuo em um mundo em constantes mudanças. A formação inicial e continuada, em especial a dos professores que ensinam matemática[2], tem sido amplamente investigada, gerando debates e muitas publicações tanto no Brasil quanto em outros países.

A literatura acadêmica tem contribuído para a melhoria da formação inicial e continuada do professor que ensina matemática e registra as experiências exitosas, vivenciadas em diferentes instituições, com públicos também diversos. Algumas podem ser conhecidas, recriadas e/ou ampliadas e são, em sua maioria, divulgadas pelas sociedades, organizações e/ou grupos da área de Educação, Matemática, Educação Matemática e Psicologia da Educação Matemática, no Brasil[3] e no Exterior[4]. Nesse sentido, para Gama e Fiorentini (2009, p. 444):

> Da perspectiva do conhecimento "da" prática, os pesquisadores sugerem, para favorecer o desenvolvimento profissional, oportunidades para que os professores explorem e questionem suas (e dos outros) ideologias, suas interpretações e suas práticas. Isto significa que os professores aprendem: ao desafiar suas próprias suposições; ao identificar questões importantes da prática; ao propor problemas; ao estudar seus próprios estudantes, salas de aula e escolas; ao construir e reconstruir o currículo; e ao assumir papéis de liderança e de protagonismo na busca da transformação da prática de sala de aula e, por decorrência, das práticas escolares e sociais.

Além de uma formação inicial adequada, de um currículo atualizado, Moreira (2015, p. 11) salienta que o professor "dê conta dos fundamentos básicos da educação", além de uma formação continuada, Moreira (2015, p. 12) nos diz: "Consentaneamente, venho insistindo na priorização da formação continuada como um dos grandes pilares para a correção das lacunas deixadas pela formação inicial".

As vivências que ocorrem de forma coletiva e voluntária entre diferentes profissionais têm se constituído em uma instância estimuladora do desenvolvimento de um tipo de profissionalidade, que consiste no desenvolvimento da capacidade dos profissionais trabalharem colaborativamente num ambiente de diálogo e interação. Nesse ambiente, esses profissionais discutem, analisam, refletem e investigam sobre seu trabalho, buscando compreendê-lo e transformá-lo. Desse modo, é possível observar o desenvolvimento de uma ação que visa à

2 Termo usado por Fiorentini (2005) para se referir aos professores licenciados em Pedagogia e Matemática, docentes de Matemática na e educação básica.

3 Para mais informações acesse, por exemplo: http://www.sbembrasil.org.br/files/v_sipem/, http://www.sbm.org.br/pt/, http://www.sbemdf.com/, http://www.mat.unb.br/pibid/.

4 Informações podem ser obtidas em: http://www.fisem.org/www/index.php; http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem>; http://www.mathunion.org/ICMI, < http://www.apm.pt/portal/index.php>

formação inicial e continuada em que a proposta dialogue com as expectativas, realidades e desafios do ensino matemático, e que, por meios das práticas coletivas, pode-se manifestar de vários modos. Assim, realiza-se a reflexão sobre as novas necessidades e demandas do currículo, os diálogos com o mundo do trabalho e com a educação geral; as práticas pedagógicas interdisciplinares e interculturais, o que permite vislumbrar os enlaces entre tecnologia, ciência e cultura.

Metodologia

O método adotado para esta pesquisa é o estudo documental, em uma abordagem qualitativa, por se desenvolver em um ambiente que possibilita coletar dados descritivos com um plano aberto e flexível, que converge para a realidade do objeto de estudo de forma complexa e contextualizada (Lüdke & André, 2015). Isto significa examinar o contexto e os fenômenos que envolvem o processo a ser estudado.

Para esta análise documental, foram utilizados documentos obtidos no acervo da Sociedade Brasileira de Educação Matemática SBEM/DF. O acervo contém documentos digitais, arquivados ao longo de 14 anos, repassados a cada diretoria desta sociedade. Parafraseando Lüdke e André (2015), a análise documental constitui uma técnica de abordagem e dados qualitativos, seja como complementação a outras técnicas ou como forma de revelar novas pesquisas. Estas etapas da pesquisa consistem na imersão no ambiente investigado para conhecer o ambiente e os participantes envolvidos.

Como a análise documental se constitui em uma técnica de abordagem de dados qualitativos, que complementa as informações obtidas, o uso de documentos na pesquisa estabelece-se como uma fonte da qual se podem retirar evidências que fundamentem afirmações e declarações pesquisadas (Lüdke & André, 2015). Os documentos analisados da pesquisa são os registros desde o primeiro Circuito de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal, realizado em 2004 até o último circuito do ano de 2017. O acervo é composto por documentos digitais, tais como: materiais produzidos em editores de texto e/ou planilhas, nos formatos .doc, .docx, PDF etc., imagens, cartazes e fotografias. O acesso ao material deu-se por meio de pedido formal à diretoria da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Resultados Parciais

Considerando que estamos em processo de catalogação das vivências, apresentaremos parte da pesquisa. Assim, neste trabalho, trazemos resultados parciais dessa investigação em desenvolvimento. Para tanto, fizemos a análise dos dados do I Circuito de Vivências do ano de 2017, que ocorreu em 06 de maio de 2017 no Departamento de Matemática na Universidade de Brasília, sendo esse um evento especial, comemorando o Dia da Matemática e voltado para os anos finais dos ensinos fundamental e médio das escolas públicas da Secretaria de Estado e Educação do Distrito Federal (SEEDF).

Participaram das vivências professores dos ensinos fundamental e médio (de três escolas públicas e oito particulares) e do ensino superior (estudantes de graduação e pós-graduação de nove instituições de nível superior do Distrito Federal e uma do Maranhão). Entre as instituições de ensino superior, estiveram presentes: Universidade de Brasília (UnB); Instituto Federal de Brasília (Campus Estrutural); Instituto Federal do Maranhão (IFMA); Universidade Católica

(UCB); Centro Universitário Projeção (UniProjeção); Universidade Estácio de Sá; Universidade Paulista (UNIP); Faculdade Anhanguera; Universidade do Distrito Federal (UDF-Cruzeiro do Sul); Universidade Norte do Paraná (UNOPAR) e Faculdade Educacional da Lapa (FAEL).

As vivências aplicadas foram produzidas de modo voluntário entre os professores de nível superior e licenciandos em matemática. O circuito foi composto por 16 oficinas, distribuídas nas dependências do Departamento de Matemática e corredor do ICC Norte da UnB. Os sujeitos desse Circuito foram os professores e estudantes que ofertaram vivências, além dos estudantes do ensino médio e demais ouvintes. Ao todo, contabilizamos 122 pessoas (profissionais da educação, comunidade, estudantes de graduação e pós-graduação), 86 oficineiros (professores, estudantes de graduação e calouros) e aproximadamente 156 alunos do ensino médio das escolas da SEEDF e rede particular. Segue apresentação dos dados e resultados parciais:

Tabela 2

Vivências em Educação Matemática

Vivências	
Adicionando e Subtraindo na Trilha dos Inteiros	Construção dos números com 4 quatros
Expressões Algébricas	Geometria No Tangram
Geoplano E Teorema De Pick	Jogando Dominós Com Números Inteiros
Jogo De Nim	Jogos Com Tangram
Jogos Matemáticos	Multiplano
O Laboratório De Ensino De Matemática Do Departamento De Matemática Da Universidade De Brasília: Atividades Lúdicas E Criativas Para O Ensino E Aprendizagem Da Matemática	Operando Frações
Poliedros	Poliedros Divertidos
Truques E Puzzles Matemáticos Com Palitos De Fósforos	Volumes De Sólidos

Fonte: SBEM-DF (2017)

Pelo que se observa, foram feitas 16 vivências, que envolveram distintos oficineiros. Essas vivências envolveram diversos conteúdos matemáticos, desde a adição e subtração aos poliedros. Foram variadas instituições de ensino participantes, conforme detalhamento apresentado na Tabela 3, a seguir.

Tabela 3

Oficineiros

Instituição de Ensino Superior	Quantitativo de Vivências	Professores (as)	Oficineiros (as)
UnB	5	3	29

IFB (Campus Estrutural) [5]	3	1	9
UCB	1	1	?
Universidade Estácio de Sá	4	3	31
UNIP	1	1	6
UniProjeção	2	-	2
Totais	**16**	**9**	**77**

Fonte: Arquivo próprio.

Conforme detalhamento apresentado na Tabela 3, a instituição com o maior número de oficinas foi a UnB, que envolveu cinco oficinais, três docentes e 29 oficineiros. Ao todo, podemos ver que as atividades envolveram16 oficinais, nove professores e 77 oficineiros, o que demostra a boa adesão às oficinas.

Por sua vez, a Tabela 4 traz as informações detalhadas dos participantes. Vejamos:

Tabela 4

Participantes das Vivências

Instituição de Ensino Superior	Professores (as)	Estudantes de Pós-Graduação	Estudantes de Graduação	Estudantes do Ensino Básico
SEEDF	9	-	-	152
UnB	5	7	31	-
IFB (Campus Estrutural)	1	-	-	-
UCB	1	-	5	-
Universidade Estácio de Sá	4	1	33	-
UNIP	1	-	10	-
UniProjeção	-	-	2	-
UNOPAR	-	-	7	-
ICESP	-	-	1	-
ITEB	1		1	
Curso Preparatório	-	-	‘1	-
Colégio Vital Brasil	1	-	-	-
Colégios da rede privada	-	-	-	3
Colégio Coletivo	-	-	-	1
Totais	23	8	91	156

Fonte: Arquivo próprio.

Em consonância com a Tabela 4, tivemos 23 professores de instituições de ensino superior envolvidas; oito alunos de pós-graduação; 91 estudantes de graduação e 156 alunos da educação básica. Esses números revelaram a importância dos Circuitos, denotando a imprescindibilidade de sua continuação, sobretudo quando levamos aos alunos de educação básica, base do sistema de ensino, maneiras distintas de conceber e aprender Matemática.

5 O Campus da Estrutural oferece o curso superior em Licenciatura em Matemática.

Percebem-se três pontos importantes quando se analisam essas tabelas: o envolvimento; a investigação e as possibilidades de desenvolvimento profissional. O envolvimento de muitos grupos e instituições, que, em sua maioria, participam frequentemente dos Circuitos de Vivências, demonstra que a investigação, em todas as propostas de vivências, encontra elementos que provocam a pesquisa e o desenvolvimento profissional – a formação para a docência.

A frequência e o planejamento dos Circuitos ocorrem de forma voluntária e não obrigatória. Isso, de um lado, tem contribuído para uma prática colaborativa voluntária e espontânea e que evolui a partir dos interesses dos professores e estudantes de graduação. Por outro lado, a colaboração, geralmente, marcada pela socialização e aprendizagem mútua nas ofertas das oficinas, permite que se compartilhe as experiências, os saberes, as sugestões, as ideias e as expectativas de todos os envolvidos.

Considerações finais

Nossa investigação busca compreender os processos de constituição dos Circuitos de Vivências e se suas práticas proporcionam reflexão e investigação na construção e/ou contribuições e desafios de ensinar e aprender Matemática na escola básica para apreciação da possível construção do espaço de formação para a docência dos Circuitos de Vivências em Matemática na prática docente. Pelo que constatamos até o momento, uma vez que nossa pesquisa apresenta três fases e este texto apresenta os resultados parciais deste Circuito, que culmina com a primeira fase, os achados da pesquisa evidenciaram a participação da maioria das instituições de nível superior que oferecem graduação em Licenciatura em Matemática. Os sujeitos dos circuitos atuam no planejamento (composição e organização) do evento em conjunto com a SBEM/DF. Durante o período, muitos professores e estudantes socializam seus projetos. Assim, consideramos que esses encontros provocam os desenvolvimentos profissionais e acadêmicos de todos os envolvidos nas vivências.

Os desenvolvimentos das atividades acontecem no planejamento, desde a preparação das vivências (aprender a planejar, a executar, a avaliar se a vivência deu certo ou não), do estudante de graduação que assiste a vivência e se vê enquanto futuro professor, ao estudante de ensino médio que participa da vivência e ajuda quem preparou (a entender se ela deu certo ou não), ao aprender os conceitos que foram abordados, possibilitando ver e observar suas dificuldades. Há um longo caminho a trilhar para se perceber o aprofundar das análises na composição dos Circuitos e os validar como espaço de formação para a reflexão e a investigação na construção de novos modos de ensino e aprendizagem da Matemática.

Referências

Bertoni, N. E. (2008). A construção do conhecimento sobre número fracionário. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, *21*(1-31), . Universidade Estadual Paulista.

Bertoni, N. E. (2003). Entrevista concedida à Educação Matemática em Revista – *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, *10*(14). São Paulo: SBEM.

Fiorentini, D. (2012). *Investigar e aprender em comunidades colaborativas de docentes da escola e da universidade.* In Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, 16. Campinas. Anais... São Paulo: Junqueira & Marin, 239-252

Fiorentini, D. (2005, jun.). A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da Licenciatura em Matemática. *Revista de Educação PUC-Campina*s, *18,* 107-115.

Gama, R. P., & Fiorentini, D. (2009). *Formação continuada em grupos colaborativos*: professores de matemática iniciantes e as aprendizagens da prática profissional. *EMP*, *11*, 441-461.

Gatti, B. A., Barreto, E. S. de S., & André, M. E. D. de A. (2011). *Políticas docentes no Brasil: um estado da arte.* Brasília: UNESCO.

Lüdke, M., & André, M. E. D. A. (2015). *Pesquisa em educação*: *abordagens qualitativas.* [2. Ed]. – [Reimpr.] - Rio de Janeiro: E.P.U.

Moreira, G. E. (2015). *O ensino de Matemática para alunos surdos: dentro e fora do texto em contexto.* Texto elaborado especialmente para o Seminário do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP).

Muniz, C. A. (2008). Políticas públicas e formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática. GT-19: Educação Matemática. In 31ª Reunião Anual da ANPEd: Constituição Brasileira, Direitos Humanos e Educação, Caxambu, MG, *Anais*....

Muniz, C. A. (2010). *Brincar e Jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática*. 1. ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica.

Passos, C. M. (2008). *Conexões Teóricas e Práticas entre Etnomatemática e Educação Matemática Crítica.* EBRAPEM, UNESP, Anais... 01-17.

Silva, A. J. N. da, Souza, I. S. de, Barros, S. S., & Almeida, J. D. S. (2014). A formação do professor de matemática em questão: reflexões para um Ensino com Significado. In A. J. N. da Silva & I. S. Souza (Orgs.). (pp. 53-75). Jundiaí: Paco Editorial.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, *14*, 66-91.

Estudio de clase en la formación de maestros reflexivos

María Teresa **Castellanos** Sánchez
Universidad de los Llanos
Colombia
mcastellanos@unillanos.edu.co

Hilbert **Blanco** Álvarez
Universidad de Nariño
Colombia
hilbla@udenar.edu.co

Resumen

El propósito del estudio se centra en analizar la implicación del *Estudio de Clase* para generar procesos de reflexión para y sobre la práctica docente de profesores en formación. Se conjetura que: el estudio de clase es una herramienta útil para generar procesos reflexivos sobre las propias prácticas de aula de maestros y por ende sobre su desarrollo profesional. Para argumentar esta conjetura exponemos una experiencia de formación continua con maestros de matemáticas afrodescendientes realizada en Tumaco, Colombia, donde el estudio de clase jugó un papel protagónico como metodología que guiaba cada fase del curso. Concluimos mostrando cómo el Estudio de Clase brinda elementos para el desarrollo de una mejor formación docente, en la línea de los desafíos que plantean proyectos y tendencias actuales.

Palabras clave: reflexión, estudio de clase, práctica docente, formación de profesores, autoevaluación

Antecedentes

La formación de maestros críticos reflexivos es un tema que ha venido ocupando a los investigadores en educación matemática a nivel internacional desde hace varias décadas. En particular, Schöenfeld y Kilpatrick (2008), en el Handbook Internacional de Educación de Profesores, incluyen la reflexión sistemática como una competencia del profesor de matemáticas. Recientemente, los estudios reportados en el Third International Handbook of Mathematics Education, otorgan relevancia a la reflexión sobre la práctica (Kieran, Krainer, Shaughnessy, 2013).

Por otra parte, estudios en la formación inicial, han valorado la reflexión sobre la propia experiencia como medio para promover una visión amplia del aprendizaje de las matemáticas; ofrecer una perspectiva sobre la enseñanza y proporcionar información sobre los cambios en la planeación de las lecciones (Llinares y Krainer, 2006). En la formación continua, la reflexión del profesor sobre su práctica se considera un elemento fundamental en su desarrollo profesional y un medio para la progresiva comprensión de la práctica dentro de un proceso de aprendizaje continuo (Climennt y Carrillo, 2003).

En los procesos de formación de maestros se ha utilizado con más frecuencia el Estudio de clase como metodología (Isosa y Olfos, 2009) para valorar las clases y para el mejoramiento de los procesos de enseñanza (Doig Y Groves, 2011). Así mismo, el Estudio de clase se ha usado en otras investigaciones para promover procesos reflexivos en formación inicial y continua de maestros (Hart, Alston Y Murata, 2011; Marmolejo, Blanco y Fernández, 2009; Unesco, 2016). En adelante intentamos ejemplificar cómo el Estudio de clase permite procesos de reflexión sobre la integración de la Etnomatemática en el currículo escolar y en el diseño de actividades.

Siguiendo los presupuestos anteriores la investigación centra objetivo en analizar la implicación del Estudio de Clase en la reflexión sobre la práctica docente de profesores que participan en un curso de formación continua.

Referentes Teóricos

Los principales referentes que orientan esta comunicación se soportan en los constructos: Reflexión y estudio de clase; en el primero se aborda con precisión en la idea de profesor reflexivo y el otro constructo es el Estudio de clase, ideas que se desarrollan a continuación.

La noción de reflexión y de profesor reflexivo

La idea de reflexión dada por Dewey (1989), “implica la consideración activa, persistente y cuidadosa de cualquier creencia o práctica a la luz de las razones que la sustentan y de las consecuencias a las que conduce” (p. 6). Esto es, un proceso cognitivo que tiene en cuenta el conocimiento subyacente. Por otra parte, Schön (1987) concibió la reflexión como “una continua interacción entre el pensamiento y la acción” (p. 281); y describió al práctico reflexivo, como el individuo que “reflexiona sobre las comprensiones implícitas en la propia acción, que las hace explícitas, las critica, reestructura y aplica en la acción futura” (p. 50). De este modo, Schön concretó su teoría en la práctica reflexiva, la cual busca que un profesional, en este caso el docente, reflexione de modo permanente sobre su práctica de enseñanza con el fin de transformarla.

Como indican Castellanos, Flores y Moreno (2017), la reflexión sobre las situaciones de la práctica docente puede configurarse como estrategia para estimular el aprendizaje reflexivo y el desarrollo profesional. En consecuencia, consideramos la reflexión como un proceso de pensamiento responsable y sistemático que surge de una situación problemática que requiere disposición para analizar, comprender y actuar ante las situaciones de dicha práctica. Por tanto, la reflexión en la formación de maestros permite al aprendiz la comprensión de la propia experiencia. El proceso reflexivo, implica una representación activa de la realidad, que incluye la mirada retrospectiva sobre las acciones en dichas experiencias, el reconocimiento de las concepciones implicadas, confrontar con otros y tomar en consideración las consecuencias de tales acciones, culminando con la exploración de posibles alternativas o decisiones fundamentadas sobre futuras lecciones.

En síntesis, el maestro debe estar dispuesto a volver sobre su práctica, para analizarla a fin de significar sus concepciones y conocimientos que le llevan a comprenderla o mejorarla; es decir, la reflexión busca la transformación consciente de los aspectos de la enseñanza (Korthagen, 2010).

Entendemos que profesor práctico reflexivo es aquel que tiene disposición para: a) percibir la práctica como problemática, identifica situaciones problemáticas en su actuación docente; b) tomar distancia de ellas, con el fin de analizar los elementos de dichas situaciones; c) identificar, explicitar y eliminar elementos que le condicionan la forma en que él considera las situaciones, incluidas sus propias creencias y d) buscar otras fuentes a fin de interpretar y responder a las mismas situaciones y responder a ellas (Castellanos et al., 2017). También se considera necesario tener apertura hacia las matemáticas y su disposición a transformar sus concepciones sobre ella, al tiempo que se debe tomar conciencia de la complejidad del conocimiento matemático para su enseñanza.

El Estudio de clase

El *Estudio de Clase*, entendido como “la investigación que tiene por objeto la clase, permite a un docente con el apoyo de sus compañeros involucrarse en procesos de investigación pedagógica, a partir de experiencias propias, para pensar sobre métodos y recursos de enseñanza más eficientes y pertinentes a cada contexto, con el fin esencial de mejorar las clases. Dada esta naturaleza, la implementación del ‘*Estudio de Clase’* requiere la *reflexión educativa continua*, la sistematización de la información recolectada, la innovación en el uso de recursos y materiales, la adaptación a condiciones específicas del contexto y la formación permanente de docentes en competencias pedagógicas y didácticas” (Torres y Vergara, 2009, p. 31).

Esta metodología busca por parte de los maestros una cualificación permanente, un trabajo reflexivo y crítico sobre su práctica. El estudio de clase permite abrir el aula de clase a la mirada crítica de los colegas, lo que permite un enriquecimiento mutuo con las experiencias y especialidades de cada uno. En adelante pasamos a describir cada de una de las etapas. Esta metodología debe mirarse siempre como un proceso de mejoramiento y no de evaluación descalificadora.

Esta metodología contempla cuatro etapas a saber: a) la planeación en grupo de las actividades; b) la implementación de la actividad y observación de la clase; c) la auto-evaluación y la co-evaluación y d) el rediseño de las actividades. Las etapas configuran un proceso cíclico, que garantiza la mejora permanente de la calidad de las actividades y de las clases.

Primera etapa: La planeación en grupo de las actividades. En esta etapa el *grupo de maestros*, de la educación básica o media, se reúnen a planear una clase alrededor del interés en la enseñanza de un objeto matemático, seleccionado. Este es el punto de partida en el proceso de reflexión, implícitamente los maestros identificaran una situación de la práctica docente, ellos discuten sobre el objetivo que se persigue con la actividad, sobre la gestión del aula de clase por parte del profesor, las consignas que se darán al estudiante, la organización de los niños: individual o en grupo, los materiales a utilizar en el desarrollo de la actividad, el tiempo que se considera necesario, que puede variar entre 1 hora o varias horas durante varios días. Los maestros al considerar el origen, las cualidades y los presupuestos de la planeación de la enseñanza, configuran su problemática.

Luego, sintetizan los resultados de la planeación en el guion de clase. Los apartados del guion (Figura 1) son: Nombre de la Institución, Fecha, Grado escolar, Número de estudiantes, Nombre del profesor, Nombre de la Unidad, Estándares movilizados, Logro a desarrollar, Indicadores de logro, Gestión del profesor, Consignas, Dificultades esperadas de los estudiantes, Ayuda del profesor, Material, Tiempo.

Save the Children

INSTITUCION EDUCATIVA CIUDADELA MIXTA COLOMBIA
PLAN DE ENSEÑANZA

Fecha: 5 de octubre de 2012 Hora: Grado: 3° Número total de alumnos: Profesora: Cielo Angulo

1. **Nombre de la unidad:** Medidas arbitrarias de longitud
2. **Estándares movilizados:** Realizo y describo procesos de medidas con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto
3. **Logro a desarrollar:** Utilizo patrones arbitrarios para determinar la medida de una longitud.
4. **Indicadores de logro:** Utilizo partes del cuerpo para poder establecer diferentes medidas.

ACTIVIDADES	CONSIGNAS	DIFICULTADES ESPERADAS DE LOS ESTUDIANTES	AYUDA DEL PROFESOR	MATERIAL	TIEMPO
Motivación Se pide a los estudiantes que salgan al patio y se organicen en grupos de 5 personas. Luego: cada grupo escogerá 2 estudiantes, el más pequeño y el más grande del grupo, para que registren los saltos y 3 estudiantes para realizar saltos largos a partir de un punto de punto de partida seleccionado por ellos. Finalmente, los dos estudiantes que no saltaron medirán con sus pies, uno seguido del otro, la distancia recorrida con los saltos de sus compañeros y anotaran las medidas.	Observo los datos recogidos por mis compañeros y respondo las siguientes preguntas: • ¿Cuantos pasos midió el niño pequeño? • ¿Cuántos pasos midió el niño más grande? • ¿De qué otra manera podemos medir estos saltos?	• Para hacer el salto no se ubicaban bien en el punto de partida • Después del salto querían adelantarse para llegar a la misma medida del compañero	• Ubicarlos en el punto de partida	Cuaderno y lápiz	15 minutos

Figura 1. Guion de clase

Segunda etapa: La implementación de la actividad y observación de la clase. La siguiente etapa del estudio de clase es la implementación de la actividad con los estudiantes, aquí uno de los profesores que participó en el diseño gestiona la clase, intentando seguir a cabalidad lo planeado en el guion, por supuesto *el guion no es una camisa de fuerza*, pero se sugiere que su desarrollo sea lo más fiel posible.

Con el fin de garantizar un distanciamiento de la propia acción y de las situaciones contempladas, mientras se está ejecutando la actividad, los otros maestros se sientan en la parte de atrás del salón o a los lados a observar: a) el apegado seguimiento del guion que haga el profesor; b) si las consignas son suficientes para desarrollar la actividad; c) si los niños las entienden o son ambiguas; d) se presta especial atención en la presencia o no de las dificultades esperadas propuestas a priori o si hay dificultades nuevas que expresan los niños; e) se observa si las ayudas del profesor son suficientes en relación a las dificultades presentadas por los niños; f) se presta atención a la pertinencia y suficiencia de los materiales, y finalmente, g) se evalúa si el tiempo fue suficiente y se cumplió cada una de las actividades en el lapso estipulado.

Así entonces, la observación de la clase es un elemento que permite a los maestros, reflexionar *in situ* sobre la práctica para analizar y comprender el proceso de enseñanza y aprendizaje puesto en juego en el aula, mediado por la actividad matemática diseñada en la primera etapa, apoyados en el guion de clase, con el cual van haciendo el seguimiento a la actividad. Estos maestros, no intervienen en la clase.

La amplitud y precisión con que los maestros identifican las situaciones problemáticas y las condiciones en las que se desarrolla la actividad, da cuenta del proceso reflexivo de éstos. Con la observación de la clase, los maestros van tomando nuevas formas de concebir su actuación y les permite adoptar una visión sistemática y fundamentada al respecto.

Tercera etapa: La auto-evaluación y la co-evaluación. Finalizada la clase, preferentemente de forma inmediata, se realiza una mesa redonda donde se lleva a cabo, primero, una auto-evaluación del desarrollo de la actividad por parte del profesor que gestionó la clase, y luego los maestros observadores hacen sus aportes constructivos para el mejoramiento de ésta. En este momento, los maestros reconocen algunas concepciones implicadas en el análisis de las situaciones registradas en el guion. La co-evaluación, permite confrontar con otros y considerar nuevas opciones.

Los indicadores a valorar, más comunes teniendo en cuenta el guion, son: La relación de los estándares de competencias y la actividad, el cumplimiento de lo propuesto en el guion, la claridad de las actividades propuestas, la concordancia de las dificultades esperadas a priori de los estudiantes y lo sucedido en el aula, la concordancia de las ayudas del profesor en el aula y las planeadas en el guion, la utilización del material y su pertinencia, el cumplimiento del tiempo propuesto. Otros indicadores, generales, son el tono de voz, el manejo del grupo, uso del tablero, forma de trabajo con los estudiantes, claridad en las respuestas por parte de profesor, motivación y participación de los estudiantes generada por la actividad, etc.

Cuarta etapa: El rediseño de las actividades. Esta última fase se forma a partir de los resultados de la auto y co-evaluación realizada anteriormente. El rediseño de la actividad es lo que permitirá su mejoramiento. Este es el fin último del estudio de clase, pues solo de esta forma las experiencias de enseñanza serán enriquecidas, ampliadas y las actividades estarán más cerca de cumplir con los objetivos propuestos.

Aspectos Metodológicos

Este estudio sigue el enfoque cualitativo de tipo descriptivo, la toma de datos procede de las producciones de los participantes (tareas formativas) y de los registros del grupo investigador. Para analizar la implicación del Estudio de Clase en la reflexión sobre la práctica docente, se planificó y desarrollo un curso de formación continua. La descripción sistemática del curso consiste en la revisión y análisis secuencial a cada etapa formativa la cual permite identificar las características del profesor reflexivo (Blanco-Álvarez, 2017).

El curso de formación continua

Esta experiencia, tuvo lugar en Tumaco, Colombia, con 28 maestros de la educación básica, de 9 instituciones educativas, entre julio y octubre de 2012. Estos maestros se dividieron en tres subgrupos, aquellos que laboraban entre primero y tercero de primaria, entre cuarto y quinto, y los que trabajaban entre sexto y séptimo de la educación básica secundaria. Luego se inició la construcción de las actividades alrededor del pensamiento métrico. Pero además, por ser Tumaco un municipio que está en la tarea de fortalecer su proceso de etnoeducación se vio la pertinencia de incorporar al proceso de formación de maestros la Etnomatemática, definida por el profesor de matemáticas e investigador en Educación Matemática Ubiratan D'Ambrosio (1997) como "[…] la matemática que se practica entre grupos culturales identificables, tales como sociedades de tribus nacionales, grupos laborales, niños de cierto rango de edades, clases profesionales, entre otros" (p. 16), teniendo en cuenta "[…] las capacidades de clasificar, ordenar, inferir y modelar" (p. 17).

Dicha perspectiva sociocultural de la educación matemática aportó al menos dos elementos valiosos al diseño de las actividades: a) pensar las matemáticas como una actividad humana, social y cultural y b) reconocer y valorar en la cultura tumaqueña la existencia de ideas matemáticas extraescolares o etnomatemáticas.

En este primer momento, los maestros, dan cuenta de su disposición para abordar las situaciones de la práctica docente, sin ser explicita la formulación de una cuestión, ellos exhiben su interés y la necesidad de abordar la planeación para la enseñanza de las medidas de longitud en el grado tercero. Para los maestros ha sido relevante prestar atención al diseño de las actividades para la enseñanza, en las cuales reflejaban implícitamente tanto su problemática, como la forma en que han ido incorporando su conocimiento y su experiencia.

Posteriormente, las actividades diseñadas se llevaron al aula de clase con los estudiantes, por una de las profesoras que participó en su diseño

Los maestros al observar la actuación de su colega, reconocen en la realidad, situaciones que ocurren en su propia práctica y aquellas que no concebían. Diligenciar y seguir el guion les permitió analizar hechos que ocurren en la implementación de la actividad desde sus propios fundamentos. Entendemos que, de forma inicial, toman distancia de sus propias formas de concebir las situaciones de enseñanza y aprendizaje.

Finalmente, se realizó el proceso de auto y co-evaluación y el posterior rediseño de las actividades. La estrategia de la autoevaluación, da origen a la explicitación de ideas y razones que justifican la actuación de los maestros; lo cual, conllevó a retomar la clase y hacer conciencia de los propios presupuestos. Con los aportes del grupo, los maestros logran identificar sus formas de ver la enseñanza de las matemáticas. Aunque no fueron profundizadas las creencias de los maestros en este momento, sí se explicitan algunas concepciones en relación al currículo, la gestión de la clase y la actuación de los estudiantes.

En este momento, identificamos en la mirada retrospectiva de la práctica que hacen los maestros, algunos comentarios como los siguientes: a) las instrucciones del maestro coincidían con el guion; b) La actividad motivadora planeada al inicio de la clase cumplió su propósito; c) Los estudiantes manifestaron dificultades en la escogencia y uso de patrones de medidas arbitrarios, esta dificultad no se había previsto; d) La actividad tomó más tiempo del planeado. Finalmente, éstos y otros comentarios fueron utilizados a continuación para el rediseño del guion de la actividad.

La co-evaluación, ha encaminado a los maestros a examinar los elementos que le condicionan la forma en que se habían concebido las actividades. Aunque no se profundizó en las creencias particulares de los maestros, de manera colectiva, mostraron disposición para interpretar las dificultades enfrentadas y responder a estas en el rediseño de las actividades.

Resultados

Los resultados sintetizan en cada etapa del estudio de clase las disposiciones y características que dan cuenta de la formación como profesores reflexivos. Entre ellos:

La planeación de actividades para la enseñanza de la medida, integrando medidas no convencionales o etnomatemáticas utilizadas en la cultura tumaqueña, se constituyó en el principal interés que configuró la tarea de enseñar como problemática. Es decir, percibieron en su propia práctica acciones que requerían de su actuación.

La implementación y observación de la actividad permitió analizar la gestión de la clase y las formas de concebir la enseñanza del tema. Por su parte, la auto-evaluación afloró explicaciones y creencias que definían las actividades para la enseñanza y que de manera implícita sostenían hasta ese momento los maestros. Esto se corresponde con la condición del profesor reflexivo de distanciarse de las situaciones.

La auto-evaluación y la Co-evaluación permitió considerar aquellos elementos de las actividades y de la implementación de la clase que es necesario re-diseñar ha contribuido desde la coevaluación a dar cuenta de la tercera condición del profesor reflexivo. Por tanto, confrontar con pares y expertos permite eliminar aquellos elementos que condicionan la forma de concebir la práctica docente.

El rediseño de actividades, es la condición que concreta el proceso reflexivo y da cuenta de la formación de maestro reflexivo. Ello se nota, cuando los maestros han interpretado su actuación y han recurrido a otras fuentes para comprender su práctica y buscar nuevas alternativas.

Conclusiones

A manera de conclusión destacamos el éxito de un proceso reflexivo mediado por el estudio de clase el cual se atribuye: al diseño de la instrucción; al análisis sistemático al que se somete el curso y a la pertinencia del enfoque metodológico asumido. Los participantes han reflexionando sobre el diseño de actividades para la enseñanza de la medida y la integración de la Etnomatemática en el currículo escolar.

En segunda instancia, respecto a la pertinencia del estudio de clase se concluye:

Al iniciar la aplicación del estudio de clase, los maestros experimentaban incomodidad por la presencia de otros colegas en el aula, pero durante el proceso está indisposición cambió y se convirtió en un estímulo; la evaluación no es vista como algo negativo o sancionador, sino como algo constructivo y positivo para el mejoramiento de la calidad educativa.

El trabajo en grupo, colaborativo, hace que la programación de las actividades se enriquezca con la experiencia de cada uno, y las dificultades encontradas se discuten y se buscan soluciones. Esto les permite pensar la actividad docente como un trabajo colectivo más que individual.

Se destaca la metodologia también utilizada por distintos centros educativos en países como: Japón, Estados Unidos, Colombia, Chile, etc.

Finalmente, la formación inicial y continua de maestros de matemáticas debe buscar maestros reflexivos sobre su propia práctica, usando el estudio de clase como metodología. En este sentido la UNESCO menciona que:

> "El contenido y el plan de estudios de los programas educativos para docentes deben ser específicos para el contexto local; [...] y orientar a los docentes en formación, para que lleguen a convertirse en 'practicantes reflexivos'" (UNESCO, 2015, p. 21); y "el dispositivo de estudio de clase y las reflexiones y estudios que ella motiva nos parece […] ilustrar la importancia de pensar sobre la evolución de las prácticas en términos parcialmente renovados, así como sobre los modos de formación continuada de los profesores, al colocar énfasis en las tareas profesionales de enseñanza" (UNESCO, 2016, p. 77).

Queda así, abierta la invitación a estudiar y utilizar el estudio de clase y la reflexión sobre la práctica docente, buscando la calidad educativa y el aprendizaje de las matemáticas

Referencias

Blanco-Álvarez, H. (2017). Elementos para la formación de maestros de matemáticas desde la Etnomatemática. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. España.

Castellanos, M. T., Flores, P y Moreno, A. (2017). La. Reflexión de futuros profesores de matemáticas sobre problemas profesionales relacionados con la enseñanza del álgebra escolar. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 408-429

Climennt, N y Carrillo, J. (2013). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en Matemáticas con maestras. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(3), 387–404

D'Ambrosio, U. (1997). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. In: Powell, A & Frankenstein, M. (Eds.), Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in Mathematics Education (pp. 13–24). Albany: Suny Press.

Dewey, J. (1989). Cómo pensamos. Barcelona: Paidós.

Doig, B & Groves, S. (2011). Japanese lesson study: Teacher professional development through communities of inquiry. *Mathematics Teacher Education and Development*, *13*(1), 77–93

Hart, L. C., Alston, A & Murata, A. (Eds.). Lesson study Research and Practice in Mathematics Education: Learning together. New York: Springer

Isosa, M & Olfos, R (2009). El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases. Valparaiso: Ediciones Universitarias de Valparaiso.

Kieran, C., Krainer, K & Shaughnessy, J. M (2013). Linking research to practice: teachers as a key stakeholders in mathematics education research. In: Clements, M. et al. (Eds.). Third International Handbook of Mathematics Education (pp. 361–392). New York: Springer.

Korthagen, F. (2010). La práctica, la teoría y la persona en la formación del profesorado. Revista interuniversitaria de formación del profesorado, *68*(24), 83–102

Llinares, S. & Krainer, K (2006). Mathematics (students) teachers and teacher educators as learners. In:

Gutiérrez, A & Boero, P. (Eds.). . Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future (pp. 429–459). Rotterdam: Sense Publishers.

Marmolejo, G.-A., Blanco-Álvarez, H y Fernández, E. (2009). El estudio de clase y la formación de licenciados en matemáticas en la Universidad de Nariño. In: Torres, J & Vergara, L. (Eds.). Estudio de clase: una experiencia en Colombia para el mejoramiento de las prácticas educativas (pp. 93–104). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Schöenfeld, A & Kilpatrick, J. (2008). Toward a Theory of Proficiency in Teaching Mathematics. In: Tirosh, D & Wood, T. (Eds.). The International Handbook of Mathematics Teacher Education (pp. 321–354). Rotterdam: Sense Publishers.

Schön, D. (1987). Educating a Reflexive Practitioner. Toward a New Design for Teaching and Learning in the Professions. São Francisco: Jossey Bass.

Torres, J., y Vergara, L. (2009). Estudio de clase: una experiencia en Colombia para el mejoramiento de las prácticas educativas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional,

UNESCO. (2015). Guía para el desarrollo de políticas docentes. París: UNESCO,

UNESCO. (2016).Os desafios do ensino de matemática na educação básica. São Carlos: EdUFSCar - Editora da Universidad Federal de São Carlos – SP.