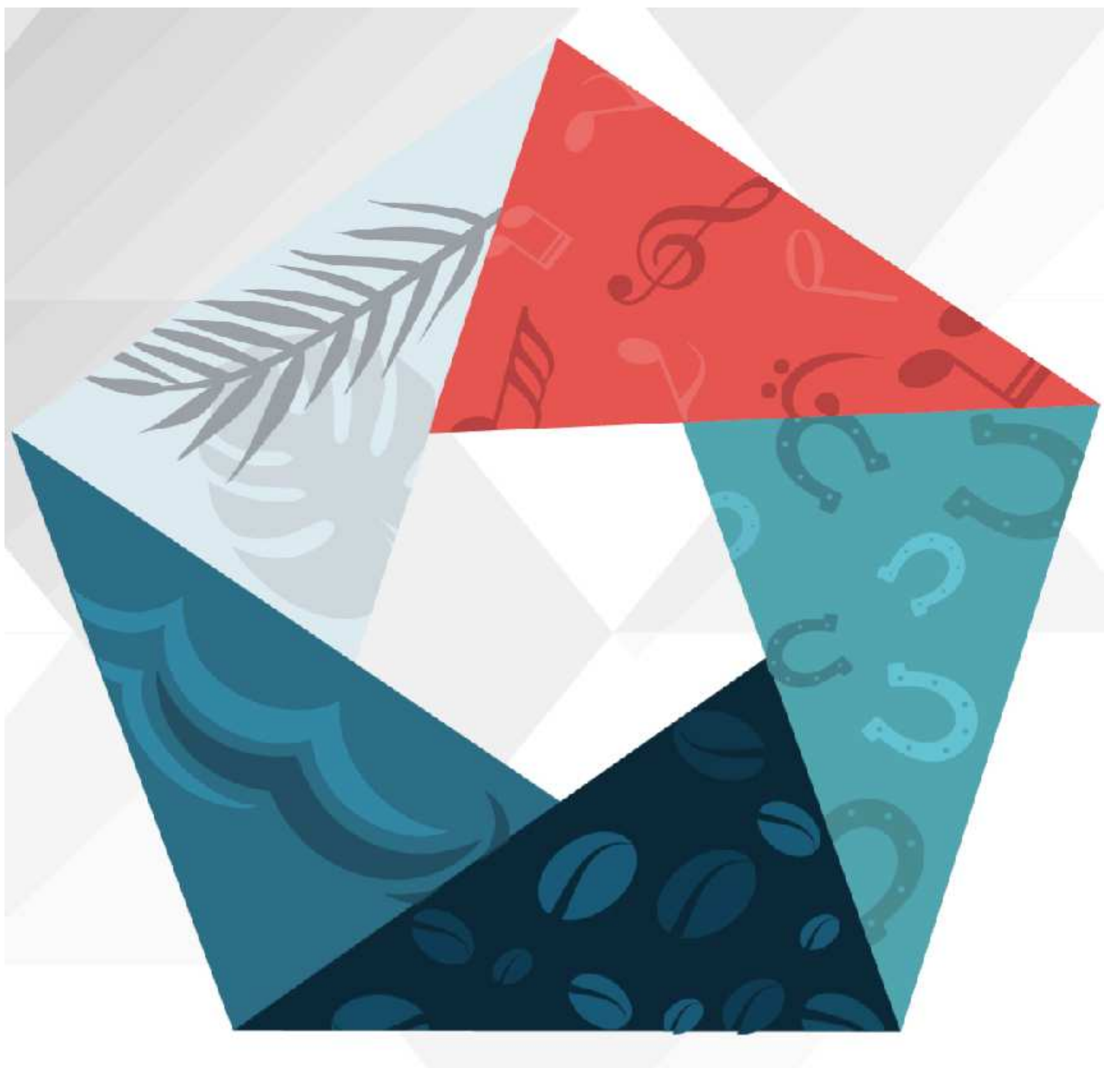
Educación Matemática en las Américas 2019

Volumen 6: Formación inicial de profesores



CIAEM IACME

desde - since 1961

Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO
www.ciaem-iacme.org

Educación Matemática en las Américas 2019
Volumen 1: Formación inicial de profesores
Editado por Yuri Morales-López y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN: 978-9945-09-413-8

El *Comité Interamericano de Educación Matemática* (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la *International Commission on Mathematical Instruction*. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera al CIAEM y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no fue previamente publicado en otro medio; y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Se respetaron los metadatos (nombres, apellidos, títulos, entre otros) que los autores proporcionaron cuando postularon su trabajo en la plataforma del evento.

Para citar este libro:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2020). *Educación Matemática en las Américas 2019.* Editores: Yuri Morales-López y Ángel Ruíz. República Dominicana: Autor.

ISBN: 978-9945-09-413-8
9 789945 094138

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LAS AMÉRICAS 2019

Presentación

Para el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es un placer y un honor ofrecer a la comunidad educativa este Volumen de *Educación Matemática en las Américas 2019*, en donde se pueden encontrar muy importantes insumos para comprender el momento histórico que atraviesa la Educación Matemática desde la perspectiva de las Américas.

La *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática* se realizó entre el 5 y 10 de mayo del 2019 en Medellín, Colombia. La Universidad de Medellín y la Universidad de Antioquia fueron las organizaciones académicas anfitrionas del evento. Las sesiones fueron realizadas en el campus de la Universidad de Medellín. Participaron 700 personas provenientes de 25 países de cuatro continentes: Europa, Asia, África y las Américas. Participaron centenares de docentes en servicio de la ciudad de Medellín y del Departamento de Antioquia.

Alrededor de 400 trabajos fueron presentados: conferencias plenarias y paralelas, mesas plenarias, minicursos, sesiones temáticas, comunicaciones cortas, talleres y posters. Unas 50 personalidades del mayor nivel en la comunidad internacional de Educación Matemática expusieron sobre sus investigaciones. Entre ellas Jill Adler (Suráfrica), Ferdinando Arzarello (Italia), Salvador Llinares (España), Yoshinori Shimizu (Japón), Michael Shaughnessy (EUA), Luis Rico (España), Fidel Oteiza (Chile), Carlos Vasco (Colombia), Carlos Sánchez (Cuba), Luis Carlos Arboleda (Colombia), Edwin Chaves (Costa Rica), Nelly León (Venezuela), Vilma Mesa (EUA). Aunque físicamente no pudo estar presente envió su contribución en forma de video Ubiratan D'Ambrosio (Brasil). Los trabajos dentro de la plataforma del congreso se pueden consultar en https://ciaem-redumate.org/conferencia/index.php/xvciaem/xv/schedConf/presentations

La revisión científica de todos los trabajos fue responsabilidad de un Comité Asesor Internacional, un Comité Internacional del Programa y el Comité Ejecutivo del CIAEM. Se contó con la coordinación central de Directores de tema y la Dirección de la plataforma científica realizada por el académico Yuri Morales con el apoyo de la profesora Johanna Mena (ambos de Costa Rica) y con la participación voluntaria de muchísimos revisores científicos de muchos países.

Este volumen incluye trabajos que fueron efectivamente presentados en ese congreso.

Expreso mi agradecimiento a todos los miembros de los comités científicos, directores de tema, revisores científicos, y directores de la plataforma científica. También deseo agradecer por su apoyo en el registro de este libro a Sarah González y a la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra en República Dominicana. Agradezco mucho a todos los autores que decidieron compartir su trabajo en las instancias que abrimos

mediante la XV CIAEM. También a Yuri Morales quien técnica y formalmente generó este volumen para su registro.

En las diversas dimensiones del congreso, de cuya realización este libro es producto, quiero aprovechar esta ocasión para reconocer la valiosa contribución de las Universidades de Medellín y de Antioquia y al Comité Organizador Local de la XV CIAEM, y, además, agradecer al equipo humano del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* que ha sido durante muchos años un sostén crucial en la organización de todos los eventos del CIAEM y de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*; y en particular de este libro que hoy sacamos a la luz pública.

Este volumen es una parte del libro de *Memorias* completo (son 15 volúmenes que se pueden ver/descargar). Se ha respetado aquí la paginación del libro completo. Y las referencias *deben hacerse con base en el libro y su paginación*. No es necesario indicar el volumen específico donde se cita pues esta es una versión funcional al servicio de una mejor visualización o descarga de este valioso material.

Invitamos a los lectores de este libro a promoverlo en sus diversas actividades de docencia, investigación, extensión y divulgación en todos sus países.

Con afecto

Ángel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática
Presentación del 17 de julio de 2024
Costa Rica

Índice

Basado en la información suministrada durante la postulación de cada trabajo

1. Formación inicial de profesores

ANÁLISE DE ATIVIDADES MATEMÁTICAS NA PERSPECTIVA DA BNCC E NÍVEIS DE DEMANDAS COGNITIVAS

Charlâni Ferreira Batista Rafael – Mestre – charlanibatista@gmail.com
Claudia Lisete Oliveira Groenwald – Doutora - claudiag@ulbra.br

RESUMO

Este artigo é um recorte da tese de Doutorado do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), referente ao tema Formação inicial de Professores de Matemática. Objetiva investigar como acontece a relação entre as atividades do 6º ano selecionadas no livro didático adotado nas escolas municipais da cidade de Barreiras, Bahia, dentro da unidade temática Números, e as habilidades apresentadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com enfoque nos níveis de demanda cognitiva exigidas em cada atividade. Para tanto, foi utilizada uma pesquisa bibliográfica com abordagem qualitativa, analisando atividades didáticas com a temática em questão. Os resultados encontrados mostraram a necessidade de um planejamento embasado nas orientações da BNCC e que não deve se limitar apenas ao uso do livro didático.

Palavras Chave – Formação Inicial; Educação Matemática; Números; Livro Didático; Demanda Cognitiva.

1 FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Diante da atual realidade em que o ensino de Matemática vêm enfrentando obstáculos por vários motivos, como a falta de pré-requisitos dos estudantes, desmotivação por parte dos alunos e ainda, professores sem habitação adequada na área específica, é importante que todos se conscientizem que o conhecimento matemático é importante para a formação integral dos alunos da Educação Básica, seja por sua aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais (BNCC, 2017).

Zabalza (2004) afirma ser necessário insistir em uma formação que sirva para qualificar as pessoas, a fim de que atinja o desenvolvimento pessoal, com conhecimento e desenvolvimento de competências, com uma visão ampla de mundo, de modo a agir nele com autonomia e criticidade. Seguindo a mesma linha de pensamento, Pimenta (2002a) afirma que é da natureza da atividade docente proceder à mediação reflexiva e crítica entre as transformações sociais concretas e a formação humana dos alunos, questionando modos de pensar, sentir, agir e de produzir e distribuir conhecimentos. Somente a partir de reflexões é possível aprimorar a prática pedagógica, deixando para trás atitudes e ações que não trouxeram resultados benéficos substituindo-os por procedimentos e práticas favoráveis ao desenvolvimento, tanto do professor, quanto do aluno, na disciplina em questão.

Para Llinares (2015) a competência docente do professor de Matemática de *Olhar Profissionalmente* o processo de ensino e aprendizagem é caracterizada pelo fato de que o professor é capaz de reconhecer os fatos que podem ser relevantes na sala de aula para explicar a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

2 A TEMÁTICA NÚMEROS NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Atualmente, a temática Números alcança um conjunto de conteúdos que se organizam formando uma das cinco unidades temáticas que integram a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) implantada no Brasil no ano de 2018. A unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, implica no conhecimento de maneiras à quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades (Brasil, 2017, p. 266).

A BNCC traz orientações que norteiam e facilitam o trabalho do professor, mas, para isso é necessário que este, se disponha a realizar um estudo detalhado buscando compreender as habilidades e competências que o aluno deve desenvolver em cada etapa de ensino. Para tanto, nos anos finais do Ensino Fundamental, a expectativa em relação a essa temática é que: os alunos resolvam problemas com números Naturais e números Racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados (Brasil, 2017, p. 266).

Além disso, é importante que os alunos não fiquem limitados a atividades que, para serem resolvidas, necessitem apenas de cálculos simples, impossibilitando-os de aprofundarem a noção de Número e suas aplicações, para isso a BNCC sugere que o professor deve colocar os seus alunos "diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária" (Brasil, 2017). Outra atribuição inclusa nesta unidade temática que deve ser levada em consideração é a forma como favorece estudos interdisciplinares, envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, assim como a econômica, em relação a questões do consumo, trabalho e dinheiro. A BNCC traz na temática Números, para o 6º ano do Ensino Fundamental, os objetos de conhecimentos apresentados na Figura 1:

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO
NÚMEROS	1. Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal
	2. Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais
	3. Divisão Euclidiana
	4. Fluxograma para determinar a paridade de um número natural
	5. Múltiplos e divisores de um Número Natural
	6. Números primos e compostos
	7. Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações
	8. Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais
	9. Aproximação de números para múltiplos de potências de 10
	10. Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da "regra de três"

Figura 1: Matemática 6º ano do Ensino Fundamental conforme a BNCC
Fonte: Retirado da BNCC (Brasil, 2017, p. 298).

3 MÉTODO

Na pesquisa foi realizada uma investigação que dependeu de um "conjunto de procedimentos intelectuais e técnicos" (GIL, 1999, p.26). Aconteceu por meio de uma pesquisa bibliográfica com abordagem qualitativa, que analisou 10 atividades do livro didático *Matemática Bianchini,* do 6º ano do Ensino Fundamental, do ano de 2015, utilizado nas escolas municipais de Barreiras, no estado da Bahia, no Brasil.

Para Gil (2002 pg. 44), a pesquisa bibliográfica "é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos". Minayo (2001) defende que a pesquisa qualitativa trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis.

Para tanto, foi estudado a BNCC, textos referentes à Formação Inicial de Professores e níveis de demanda cognitiva para o planejamento de atividades didáticas. Após as leituras foi realizado a análise de 10 (dez) atividades relacionadas ao objeto de conhecimento Números Naturais, especificamente envolvendo adição, encontradas no livro didático investigado, buscando estabelecer relações com os objetos de conhecimento e habilidades vigentes na BNCC.

4 DEMANDA COGNITIVA DE ATIVIDADES DIDÁTICAS

Para Penalva e Llinares (2011) ao planejar suas aulas o professor deve ter em mente o que pretende que os alunos atinjam ou aprendam ao término de determinada etapa, a escolha, seleção e a concepção das *tarefas Matemáticas* se apresentam desde a perspectiva de considerá-las como instrumentos para a aprendizagem dos estudantes. Ainda, para os autores, esta perspectiva conduz a introdução da ideia de *demanda cognitiva* e como utilizá-la para analisar as tarefas (atividades) em função dos objetivos de aprendizagem pretendidos.

Para os autores um dos elementos importante para a aprendizagem da Matemática são os problemas, as atividades e os exercícios que o professor propõe aos seus estudantes (*tarefa*). Os autores definem o termo *tarefa* como sendo as propostas de ação que os professores apresentam, pensam ou expõem aos seus alunos para a aprendizagem da Matemática. Definem a *atividade* como o conjunto formado pelas *tarefas* e o sistema de atividades cognitivas individuais e/ou sociais desenvolvidas pelo resolvedor (aluno), sendo ela real ou hipotética e o *procedimento* o método de realização de algumas coisas.

Penalva e Llinares (2011) consideram a *tarefa matemática* importante, pois é ela que determina o que os alunos podem chegar a aprender e qual o caminho para isto, neste sentido as *tarefas*, segundo os autores, são os instrumentos que o professor utiliza para que os alunos aprendam **matemática**, portanto, existe um vínculo entre a aprendizagem e a gestão ou gerenciamento das *tarefas* em sala de aula. Quer dizer que não é só a tarefa que condicionará a aprendizagem dos alunos, mas o que eles farão com ela e, como o professor a conduz, pois se os alunos realizam somente atividades de reprodução de procedimentos previamente introduzidos, com o objetivo de memorizar algoritmos, dificilmente eles poderão atingir outros objetivos.

Os autores destacam que o mais importante a analisar é que as *tarefas* por si só não são suficientes para potencializar um determinado tipo de aprendizado, mas que podem ser consideradas como elemento chave neste processo. As *tarefas matemáticas* são importantes no processo de ensino porque representam as oportunidades que o professor de matemática proporciona aos seus alunos para aprenderem matemática e, portanto, vinculam o ensino e a aprendizagem.

Segundo Penalva e Llinares (2011) a ideia de *demanda cognitiva* de uma *tarefa* permite centrar a atenção no que ela exige do resolvedor (aluno), desta maneira, o foco se situa no que o aluno tem que fazer: Reproduzir/memorizar; Aplicar procedimentos sem conexão; Considerar o significado dos procedimentos e os conceitos; Estabelecer relações e coordenar significados (fazer matemática). Smith e Stein (1998) citados em Penalva e Llinares (2011) utilizam o nível de *demanda cognitiva* das *tarefas* para diferenciá-las segundo o potencial que podem ter para desenvolver diferentes aspectos da aprendizagem: Nível 1: tarefas de memorização; Nível 2:

tarefas de procedimentos sem conexão; Nível 3: tarefas de procedimentos com conexão; Nível 4: tarefas que requerem “fazer matemática”.

Smith e Stein (1998) definem os níveis 1 e 2 como *demandas de nível baixo*, e os níveis 3 e 4 como *demandas de níveis* alto, as quais são caracterizadas por: As tarefas de nível 1 são tarefas/atividades de memorização, que: Envolvem reproduzir fórmulas, regras, fatos ou definições previamente aprendidos ou dirigidos a memorizar fórmulas; Não são ambíguas, essas tarefas envolvem reproduzir exatamente algo visto anteriormente e o que tem de ser reproduzido está de forma clara e diretamente estabelecida; Não coloca em evidência os conceitos ou significados subjacentes aos fatos, regras, fórmulas ou definições que estão sendo aprendidas ou reproduzidas.

As tarefas de nível 2 são tarefas/atividades de procedimentos sem conexão, que: São algorítmicas, a utilização do procedimento é especificamente reivindicada ou seu uso é óbvio com base na informação anterior, experiência no lugar da atividade/tarefa planejada; Requer uma demanda cognitiva limitada para realiza-la com êxito. Há pouca ambiguidade do que precisa ser feito e como fazê-lo; Não têm nenhuma conexão com conceitos ou significados subjacentes ao procedimento que está sendo utilizado; Estão focados em produzir respostas corretas em vez de desenvolver compreensão matemática; Não necessitam de explicações, ou somente explicações centradas em descrever o procedimento utilizado.

E as tarefas de nível 3 e 4 são *demandas de nível alto*, as quais apresentam as seguintes características: As tarefas de nível 3 são atividades/tarefas de procedimentos com conexão que: Estão centradas no significado do conceito ou procedimento. Focando a atenção do aluno na utilização dos procedimentos, a fim de desenvolver uma compreensão de conceitos e ideias matemáticas; Sugere formas (explícita ou implicitamente) que são procedimentos gerais que têm conexões estreitas com as ideias conceituais ao invés de algoritmos que são opacas relativamente aos conceitos subjacentes; De maneira usual, representados em várias formas (por exemplo, diagramas visuais, material concreto, símbolos, situações problemáticas). Fazendo conexões entre múltiplas representações ajuda a desenvolver significado; Requer algum grau de esforço cognitivo. Embora você possa utilizar procedimentos gerais, não podem ser usados sem pensar. Os alunos precisam se envolver com as ideias conceituais por trás dos procedimentos para realizar com êxito a tarefa/atividade.

As tarefas de nível 4 são atividades/tarefas que exijam "fazer matemática" que: Requer um pensamento complexo e não algorítmico (por exemplo, não existe uma aproximação na realização da atividade/tarefa bem definida com antecedência que pode ser lembrado ou um caminho que seja explicitamente sugerido pela atividade/tarefa ou instrução prévia); Requer que os alunos a explorem e compreendam os conceitos, processos ou relações matemáticas; Demandam a autorregulação da aprendizagem. Exige dos alunos (i) gerar uma resposta que requer uma compreensão conceitual da noção matemática, e (ii) verificar e explicar a resposta produzida; Requer que os alunos acessem um conhecimento ou experiências relevantes, e fazem uso adequado dos mesmos quando se trabalha ao longo da tarefa; Requer considerável esforço cognitivo, e pode implicar certo nível de ansiedade para o aluno devido à natureza não previsível do processo de resolução requerido.

5 ANÁLISE DAS ATIVIDADES DO LIVRO DIDÁTICO EM RELAÇÃO AOS OBJETOS DE CONHECIMENTOS E HABILIDADES DA BNCC

Na Figura 2, apresenta-se as habilidades referentes ao objeto de conhecimento Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com Números Naturais.

Objetos de conhecimento – 6º ano	**Habilidades**
Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com Números Naturais	(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com Números Naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

Figura 2: Quadro com objetos de conhecimento e habilidades do 6º ano do Ensino Fundamental
Fonte: Dados retirados da BNCC (Brasil, 2017, p. 298).

Na primeira apreciação das questões, foi possível afirmar que, para solucioná-las, requerem dos alunos a habilidade de resolverem problemas que envolvam cálculos com Números Naturais por meios de diferentes estratégias, mas, não foi possível concluir que demandam a compreensão dos processos neles envolvidos.

No livro didático adotado no município verifica-se, com base na Figura 1, que o Sistema de Numeração Decimal incluindo porcentagem, objetos de conhecimento 1, 3, 8 e 10 da BNCC são desenvolvidos nos capítulos 7º e 8º por meio dos tópicos: Operações com Números Racionais na forma de fração e Números racionais na forma decimal e operações, no entanto, em nenhum dos subtemas dos citados tópicos há o estabelecimento de relações com Números Naturais.

Os objetos de conhecimento 2, 5, 6 e 9 relacionados a operações de Números Naturais e divisibilidade se encontram distribuídos em 02 (dois) capítulos: Operações com números Naturais e Divisibilidade. O objeto 7 não alcança, no livro, a sequência de estudos orientada, haja vista que o estudo de frações vem sempre atrelado ao estudo de Números Racionais. Ademais, o objeto 4 não é abordado no livro didático analisado.

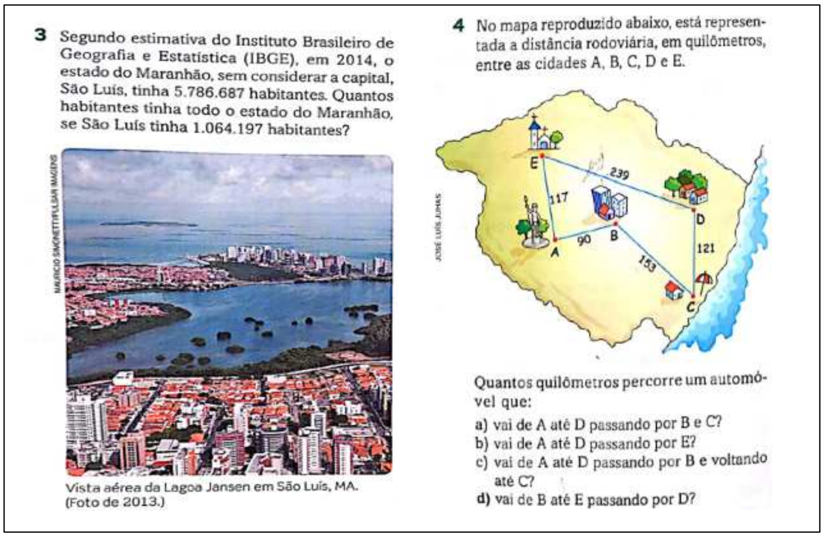
Com base nos resultados apresentados entende-se que o professor não deve limitar o planejamento de suas aulas ao livro didático adotado na escola, assim como segui-lo sem uma análise prévia, isso porque "nenhuma outra decisão que o professor toma tem um impacto tão grande nas oportunidades de aprendizagem do aluno e na sua percepção acerca do que é a Matemática, como a seleção ou criação de tarefas" (STEELE, 2001, p. 42).

4.2 ANÁLISE DAS ATIVIDADES DO LIVRO DIDÁTICO DO 6º ANO EM RELAÇÃO AOS NÍVEIS DE DEMANDAS COGNITIVAS

Apresentam-se a seguir as atividades e, posteriormente as suas classificações em relação ao nível de demanda cognitiva.

Figura 3: Atividades 1 e 2
Fonte: Bianchini (2015, p. 31)

As questões 01 e 02 requerem baixo nível de demanda cognitiva, na categoria de Procedimento sem conexão com significados, sendo a questão 1 considerada algorítmica, de modo que o uso do procedimento está evidente de uma instrução prévia, experiência, ou localização da questão e a de número 02 requer uma demanda cognitiva limitada para uma conclusão bem sucedida existindo uma pequena ambiguidade sobre o que necessita ser feito e como fazê-lo (STEIN et al., 2009).



3 Segundo estimativa do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2014, o estado do Maranhão, sem considerar a capital, São Luís, tinha 5.786.687 habitantes. Quantos habitantes tinha todo o estado do Maranhão, se São Luís tinha 1.064.197 habitantes?

Vista aérea da Lagoa Jansen em São Luís, MA. (Foto de 2013.)

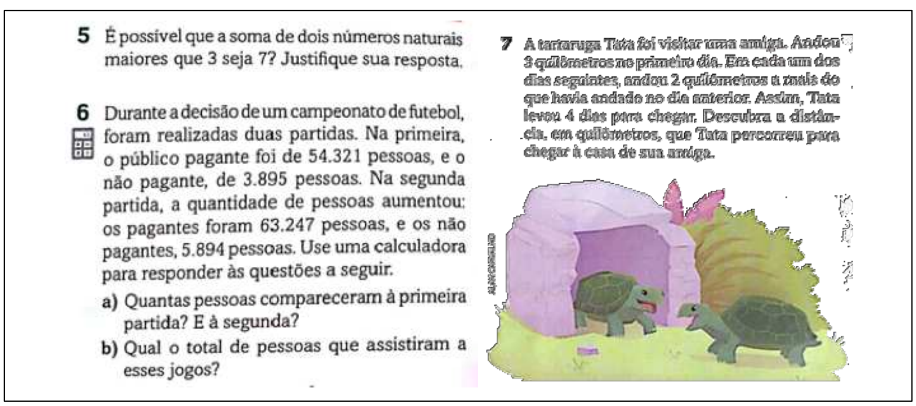
4 No mapa reproduzido abaixo, está representada a distância rodoviária, em quilômetros, entre as cidades A, B, C, D e E.

Quantos quilômetros percorre um automóvel que:

a) vai de A até D passando por B e C?
b) vai de A até D passando por E?
c) vai de A até D passando por B e voltando até C?
d) vai de B até E passando por D?

Figura 3: Atividades 3 e 4
Fonte: Bianchini (2015, p. 32)

É possível identificar que as questões 03 e 04 requerem, também, baixo nível de demanda cognitiva na categoria de Procedimentos sem conexão com significados, por serem ambas, algorítmicas, com o uso de procedimentos, especificamente com solicitações que estão evidentes de uma instrução prévia, experiência, ou localização da questão e também da categoria de Memorização, uma vez que não são ambíguas: é uma questão que envolve uma reprodução exata do material visto previamente, em relação ao que é para ser reproduzido está claro e diretamente apresentado; (STEIN et al., 2009).



5 É possível que a soma de dois números naturais maiores que 3 seja 7? Justifique sua resposta.

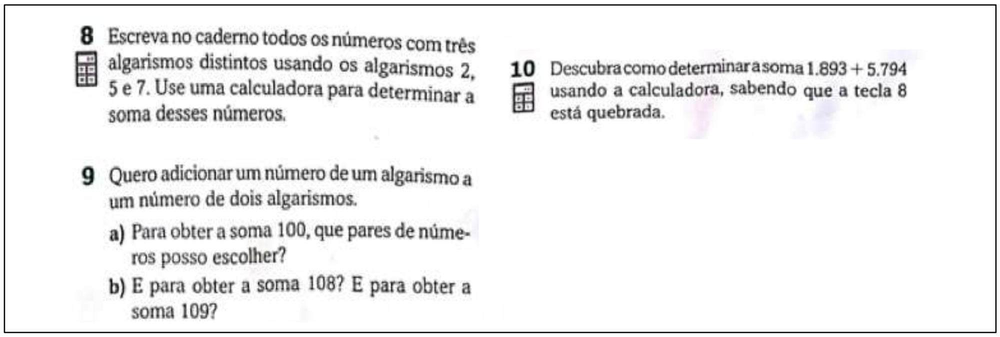
6 Durante a decisão de um campeonato de futebol, foram realizadas duas partidas. Na primeira, o público pagante foi de 54.321 pessoas, e o não pagante, de 3.895 pessoas. Na segunda partida, a quantidade de pessoas aumentou: os pagantes foram 63.247 pessoas, e os não pagantes, 5.894 pessoas. Use uma calculadora para responder às questões a seguir.

a) Quantas pessoas compareceram à primeira partida? E à segunda?
b) Qual o total de pessoas que assistiram a esses jogos?

7 A tartaruga Tata foi visitar uma amiga. Andou 3 quilômetros no primeiro dia. Em cada um dos dias seguintes, andou 2 quilômetros a mais do que havia andado no dia anterior. Assim, Tata levou 4 dias para chegar. Descubra a distância, em quilômetros, que Tata percorreu para chegar à casa de sua amiga.

Figura 3: Atividades 5, 6 e 7
Fonte: Bianchini (2015, p. 32)

As questões 05, 06 e 07, como as anteriores exigem baixo nível de demanda cognitiva. Pertencem à categoria de Memorização por envolverem a reprodução dos fatos aprendidos previamente, e de Procedimento sem conexão com significados, isso porque requerem uma demanda cognitiva limitada para uma conclusão bem sucedida e existe pequena ambiguidade sobre o que necessita ser feito e como fazê-lo. A questão 5 inclui, também, explicações que focam unicamente na descrição do procedimento que foi usado. (STEIN et al., 2009)



8 Escreva no caderno todos os números com três algarismos distintos usando os algarismos 2, 5 e 7. Use uma calculadora para determinar a soma desses números.

9 Quero adicionar um número de um algarismo a um número de dois algarismos.

a) Para obter a soma 100, que pares de números posso escolher?

b) E para obter a soma 108? E para obter a soma 109?

10 Descubra como determinar a soma 1.893 + 5.794 usando a calculadora, sabendo que a tecla 8 está quebrada.

Figura 3: Atividades 8, 9 e 10
Fonte: Bianchini (2015, p. 32)

As questões apresentadas na sequência se diferem entre si. A questão 08 requer baixo nível de demanda na categoria Memorização, uma vez que, envolve a reprodução dos fatos aprendidos previamente; enquanto as questões 09 e 10 requerem um elevado nível de demanda cognitiva na categoria de Procedimentos com conexão com significados isso porque focam a atenção dos alunos sobre o uso de procedimentos a fim de desenvolverem mais profundamente os níveis de entendimento dos conceitos e ideias matemáticas (STEIN et al., 2009).

CONSIDERAÇÕES

O estudo realizado permitiu observar que o livro didático adotado no município de Barreiras não está muito distante do que pede a BNCC, apesar de ter sido editado no ano de 2015, antes da publicação da BNCC. Esta afirmação se refere aos objetos de conhecimentos determinados para aquela etapa de ensino específica e das habilidades que devem ser desenvolvidas a partir do ensino dos objetos listados.

Quanto à análise das atividades em relação aos níveis de demandas cognitivas, percebeu-se que as questões propostas estão aquém do esperado para um ensino que contribua para o desenvolvimento intelectual e cognitivo dos alunos, visto que das questões apresentadas apenas duas possuíam um elevado nível de demanda cognitiva. Diante do exposto, sugere-se que os professores ao planejarem suas aulas utilizem o livro didático, porém, não como única ferramenta para utilizar em sala de aula, mas como um suporte ao planejamento docente.

REFERÊNCIAS

Asmad, U. Cruz, G. (2004). *Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil*. Informe pedagógico de resultados. Formación matemática- Tercer grado de Secundaria- Quinto grado de Secundaria,.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica (2017). *Fundamentos pedagógicos e estrutura geral da BNCC.* Brasília, DF. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/download-da-bncc. Acesso em: Agosto de 2018.

Bianchini, Edwaldo (2015). *Matemática Bianchini*. 8. Ed. – São Paulo: Moderna.

Gil, Antônio Carlos (1999). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 5. ed. São Paulo: Atlas.

______ (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa*, 4. ed. São Paulo: Atlas.

Llinares, S. (2015). Cómo dar sentido a las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas? Algunos aspectos de la competencia docente del profesor. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Chiapas, México: [s.n.].

Minayo, M. C. S. (Org.) (2001). *Pesquisa social: teoria, método e criatividade*. Petrópolis: Vozes.

Penalva, M. C.; Llinares, S. (2011). *Tareas Matemáticas en la Educación Secundaria*. In:GOÑI, Jesus María (coord) et al. Didáctica de las Matemáticas. Colección: Formación del Profesorado. Educación Secundaria. Barcelona: Editora GRAÓ. Vol 12. p. 27-51.

Pimenta, Selma Garrido (2002a). *Professor reflexivo no Brasil: gênese e crítica de um conceito.* São Paulo: Cortez.

Portugal (2005). Associação de Professores de Matemática. *Tarefas e atividades como elementos do currículo de matemática*. In: O PROFESSOR e o desenvolvimento curricular. Lisboa: APM. p. 39-72.

Steele, D. F. (2001). *Vozes entusiastas de jovens matemáticos***.** Educação e Matemática, n. 62, p. 39-42, mar./abr.

Stein, M. K. et al. (2009). *Implementing standards-based mathemaics instruction: a casebook for professional development***.** New York: Teachers College Press.

Zabalza, Miguel (2004). *O ensino universitário: seus cenários e seus protagonistas.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Design de enunciados de problemas abertos para propiciar a (re)formulação e resolução desses problemas com o uso de tecnologias digitais na formação de futuros professores de Matemática

Fabiane Fischer **Figueiredo**
E.E.E.M. João Habekost, Universidade Luterana do Brasil
Brasil
fabianefischerfigueiredo@gmail.com
Claudia Lisete Oliveira **Groenwald**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
claudiag@ulbra.br

Resumo

Neste trabalho apresentam-se os resultados obtidos com uma investigação, em que um grupo de futuras professoras de Matemática realizaram o *design* de um problema, utilizando as tecnologias digitais, para que esse pudesse favorecer a sua (re)formulação no processo de resolução, com o uso de tais recursos. O objetivo pretendido era que adquirissem a experiência como *designer* de problemas e refletissem sobre a mesma. O problema produzido apresentou características e aspectos que permitem depreender que, ao ser (re)formulado e resolvido, pode contribuir para a Educação Matemática Crítica e a Educação Financeira Escolar. Quanto ao processo formativo das futuras professoras, constatou-se que (re)construíram as suas concepções acerca do *design* de problemas abertos, em que as tecnologias digitais são utilizadas, para propiciar a (re)formulação e resolução de problemas com o uso desses recursos, bem como sobre a abordagem de temas de relevância social, que possam favorecer o ensino de conhecimentos matemáticos.

Palavras-chave: Design de problemas abertos, (Re)formulação e resolução de problemas, Tecnologias Digitais, Formação inicial de professores, Matemática.

Comunicação

Introdução

A formação inicial de professores de Matemática, de acordo com as necessidades requeridas pela sociedade, na contemporaneidade, vem exigindo o estudo de novas perspectivas metodológicas, por parte dos futuros professores, que os capacitem para o planejamento e a realização de práticas pedagógicas, com os alunos da Educação Básica. Entre as perspectivas, destaca-se o *design* de enunciados de problemas do tipo aberto[1] e que podem abordar temas de relevância social, em que tecnologias digitais são utilizadas, com a finalidade de que tais problemas propiciem a sua (re)formulação e resolução com o uso desses recursos (Figueiredo, 2017).

Essa perspectiva, por dinamizar a resolução de problemas, pode contribuir para que os futuros professores adquiram a experiência como *designer* de problemas, que os permitam produzir conhecimentos, no que se refere a aspectos matemáticos, metodológicos, tecnológicos e acerca da abordagem de temas de relevância social, com uma abordagem da Educação Matemática Crítica (Figueiredo, 2017) e para a Educação Financeira Escolar. Também, possibilita a apresentação e/ou o desenvolvimento de competências e habilidades, como a tomada de decisões, a discussão e a reflexão sobre a atividade realizada.

Desse modo, optou-se por apresentar, neste artigo, os principais resultados obtidos com a proposta desse *design*, que foi realizado por um grupo de futuras professoras de Matemática, denominadas D, E e F. Tais resultados fazem parte de uma investigação, de cunho qualitativo, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM)/Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)-Canoas-RS-Brasil.

O *design* de problemas com o uso de tecnologias digitais e a (re)formulação e resolução desses problemas

Conforme Figueiredo e Dalla Vecchia (2015), o *design* de problemas com o uso de tecnologias digitais é uma atividade, que requer a elaboração de problemas abertos, para serem resolvidos com o uso dessas tecnologias. Nesse *design*, também, podem ser valorizados os interesses, os conhecimentos prévios e os níveis de desenvolvimento cognitivo dos alunos, bem como serem atribuídos um ou mais aspectos, como a visualização, a simulação, a investigação, a reflexão crítica, a (re)formulação de problemas, entre outros (Figueiredo, 2017).

Para realizá-lo, o(s) *designer(s)* é/são o(s) professor(es) e/ou o(s) aluno(s) que podem executar as etapas propostas por Figueiredo (2017), que foram identificadas a partir das fases mencionadas por Filatro (2008) para o *Design* de Sistemas Instrucionais ou *ISD*[2] (análise da necessidade, projeto, desenvolvimento e implementação da solução e avaliação da solução obtida): *formação do grupo de trabalho (designers); análise das necessidades; projeto/planejamento, desenvolvimento e implementação*; *avaliação da primeira versão do problema*; *discussão e reflexão por parte dos designers*; e *realização de modificações ou do re-design, para obter a segunda versão do problema*. Também, pode ser utilizado o recurso *storyboard*, "[...] na fase de pré-produção, [...] [que] funciona como uma série de esquetes (cenas) e anotações que mostram visualmente como a seqüência (sic) de ações deve se desenrolar" (Filatro, 2008, p.60).

Entre os aspectos, que podem ser atribuídos ao *design* e a resolução dos problemas, entende-se que (re)formulação apresenta potencialidades, que podem contribuir para a produção de conhecimentos matemáticos. De acordo com Brown e Walter (2009), a (re)formulação associada à resolução de problemas, possibilita que os alunos elaborem os seus próprios questionamentos e apresentem um ou mais problemas, ao reconstruírem o problema proposto pelo professor, de modo que os orientem nas suas decisões, ações, no uso de recursos, nas explorações e estratégias no processo de resolução.

[1]Para Allevato (2008), tais problemas oportunizam aos alunos a tomada de decisões, a valorização de suas próprias ideias e a exploração dos conteúdos matemáticos no processo de resolução.
[2]*"Instructional System Design"*.

Bravo e Sánchez (2012) salientam que a (re)formulação de problemas é uma competência que pode ser desenvolvida, visto que possibilita a melhoria da relação entre a forma como surgiu um problema (completo ou incompleto) e a sua resolução. Essa atividade ou competência pode possibilitar o desenvolvimento de outras competências matemáticas específicas, como por exemplos: pensar, formular e resolver problemas, argumentar, representar entidades e comunicar, com e sobre a Matemática.

Para Jurado (2017), a (re)formulação pode favorecer o desenvolvimento das capacidades de análise de situações problemáticas, de identificar ou a criar problemas, de resolver problemas e de elaborar de questionamentos, que permitam refletir criticamente sobre a realidade. Como sugestões, menciona que o professor deve criar ou orientar os alunos para que criem problemas por: *variação*, em que um novo problema é produzido ao modificar um ou mais elementos fundamentais do problema proposto; ou *elaboração,* que a produção de um novo problema ocorre de forma livre, a partir de uma situação problemática.

Abramovich (2015) salienta que, nessa atividade, podem ser utilizadas os recursos tecnológicos, como os computacionais. No entanto, declara que os professores precisam ter a oportunidade de discutir e refletir criticamente sobre os problemas matemáticos, com e sem o uso desses recursos e ambientes computacionais, e como esses podem ser utilizados para desenvolvê-los. Ademais, torna-se necessário a compreensão da coerência didática de um problema e dos resultados que podem ser gerados por tais recursos.

Diante do exposto, entende-se que o *design* de enunciados de problemas abertos, que abordam temas de relevância social, pode ser um meio para propiciar as atividades de reformulação e/ou de formulação e resolução de outros problemas, subsidiários, com o uso de tecnologias digitais. Além disso, essas atividades associadas favorecem a produção de conhecimentos matemáticos, tecnológicos e acerca de temas de relevância social, que podem promover a Educação Matemática Crítica, por parte dos alunos da Educação Básica, assim como o desenvolvimento de competências e habilidades, sendo elas: tomar decisões, criar, inovar, explorar, investigar, interagir, refletir criticamente e trocar ideias. Todavia, é necessário que os futuros professores de Matemática sejam preparados para utilizar essa perspectiva em sala de aula.

Metodologia

Os resultados aqui apresentados foram obtidos por meio de uma investigação, de cunho qualitativo, cujo objetivo era investigar, por meio das atividades de *design* e de (re)formulação e resolução de problemas, quais são os conhecimentos produzidos por futuros professores, no que se refere a aspectos matemáticos, metodológicos, tecnológicos e relativos à abordagem de temas de relevância social, que podem promover a Educação Matemática Crítica. Para realizá-la, optou-se pelo método *estudo de caso,* uma vez que buscou-se planejar um experimento, que consistiu em ofertar e ministrar um curso de extensão semipresencial, em 2018, denominado *Design de problemas matemáticos com o uso das tecnologias digitais, sob o enfoque da (re)formulação de problemas na Educação Matemática*, que teve 60 horas de duração.

Os participantes foram 10 alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da ULBRA, que estavam cursando entre o 5º e 8º semestres e tiveram como professoras formadoras as pesquisadoras. Para coletar os dados, houve a utilização dos instrumentos: observações participantes, por parte das pesquisadoras e que foram registradas em documentos de *word*; e registros dos alunos no Ambiente Virtual de Aprendizagem *Moodle* (ULBRA, 2018), onde as atividades foram propostas e realizadas.

Neste artigo, apresenta-se o recorte dos resultados obtidos entre o 5º e 8º encontros do curso, que são referentes a atividade em que os futuros professores de Matemática realizaram o *design* de um problema do tipo aberto, utilizando as tecnologias digitais, com o objetivo de que esse favorecesse a sua (re)formulação no processo de resolução, com o uso de tais recursos, e para que os futuros professores adquirissem a experiência como *designer* de problemas e refletissem sobre a atividade realizada. A seguir apresenta-se as etapas realizadas no *design* de um dos problemas, que foi planejado, desenvolvido e implementado pelas alunas D, E e F.

O problema produzido

Como atividade, as futuras professoras D, E e F realizaram o *design*, utilizando as tecnologias digitais e abordaram um tema de relevância social, que pudesse promover a Educação Matemática Crítica, na (re)formulação e resolução dos problemas. Também, discutiram e refletiram sobre a atividade, que ocorreu em etapas, como as descritas por Figueiredo (2017).

Na etapa *formação do grupo de trabalho*, as alunas D, E e F formaram o grupo de trabalho, pelo critério de afinidade. Elas discutiram, na etapa de *análise das necessidades*, e decidiram produzir o problema para ser proposto a alunos de um terceiro ano do Ensino Médio, já que a aluna E era a professora e queria propô-lo aos mesmos, juntamente com as demais colegas.

O tema de relevância social escolhido foi o planejamento das compras de móveis para a residência escolhida, observando o orçamento, a poupança e as formas de pagamento determinados para o personagem. A aluna E alegou que esse tema vinha ao encontro dos interesses e das expectivas futuras de seus alunos, pois acredita que a maioria pretende ter a sua independência e residir sozinho. Dessa forma, as alunas D, E e F almejavam que a (re)formulação e a resolução do problema favorecesse, também, a Educação Matemática Crítica.

No que diz respeito ao conhecimentos matemáticos, reconheceram que o tema contribuía para o emprego e/ou ensino das quatro operações com os números racionais, valores monetários, porcentagem, juros, medidas de comprimento e áreas de figuras geométricas planas e espaciais através da resolução do problemas, cujo tema e conhecimentos poderiam contribuir para a Educação Financeira, no ambiente escolar. Em relação às tecnologias digitais, optaram por pesquisar na *Internet* as imagens de plantas baixas de residências com um, dois e três dormitórios e utilizar os recursos do *site Toondoo*[3], para produzir uma história em quadrinhos, na forma de um *book online*.

Nas etapas de *projeto/planejamento*, de *desenvolvimento* e de *implementação*, as alunas D, E e F decidiram elaborar um *storyboard*, com o uso de um documento de *word*, onde esboçaram cada parte da história em quadrinhos e utilizaram as plantas baixas pesquisadas (atribuição de *aspectos estéticos* e a *visualização*). Nessas, verificou-se, também, que escolheram produzir duas opções para o problema, uma com o personagem principal sendo uma mulher e outra sendo um homem, para que os alunos do 3º ano pudessem escolher o personagem e tomar as decisões como se estivessem vivenciando a mesma situação (*aspectos estéticos* e *simulação*).

A história em quadrinhos foi produzida para que apresentasse informações incompletas, que os alunos deveriam completá-las para resolvê-lo (*características de um problema do tipo aberto* e da *(re)formulação e resolução de problemas* e a *exploração*), assim como para que propiciasse a realização de pesquisas em *sites* de Lojas, para escolherem os móveis conforme as medidas de largura, comprimento e altura, os melhores preços e condições de pagamento fornecidas, e das

[3]Disponível em: http://www.toondoo.com

condições financeiras determinadas para o personagens e registrá-las (*investigação*, *produção escrita* e *reflexão crítica*). As alunas D e E fizeram as duas opções no *site Toondoo* e a aluna F apenas as auxiliou na escolha dos cenários, personagens e objetos.

Na etapa de *avaliação da primeira versão do problema*, as pesquisadoras analisaram os aspectos estéticos e o enunciado do problema, nas duas opções, para fornecer o *feedback* às alunas D, E e F (*designers*). Para as opções feminina e masculina do problema, foram sugeridas a revisão da ortografia das palavras e o uso de sinais de pontuação, a alteração do tamanho dos objetos e do personagem principal, para serem proporcionais aos cenários escolhidos, e que as imagens das plantas baixas das residências deveriam ser nítidas, já que estavam fora de foco.

Na etapa de *discussão e reflexão por parte dos designers*, as alunas D, E e F discutiram e decidiram realizar as modificações que julgaram necessárias, conforme com os comentários feitos pelas pesquisadoras. Na etapa de *realização de modificações ou do re-design*, *para obter a segunda versão do problema*, obtiveram a segunda versão do problema, em que se verifica as alterações solicitadas.

Das opções do problema, que se diferem apenas pelo personagem, apresenta-se o enunciado do problema produzido, que foi denominado como "Mobiliando a casa - versão masculina" (Figuras 1 e 2). O problema produzido pode ser proposto a alunos de um terceiro ano do Ensino Médio, pois pode propiciar a (re)formulação e a resolução do problema por *variação*, caso tomem a decisão de modificar um ou mais elementos do mesmo e/ou por *elaboração*, se optarem por produzir de um novo enunciado para o problema, a partir do mesmo (Jurado, 2017).

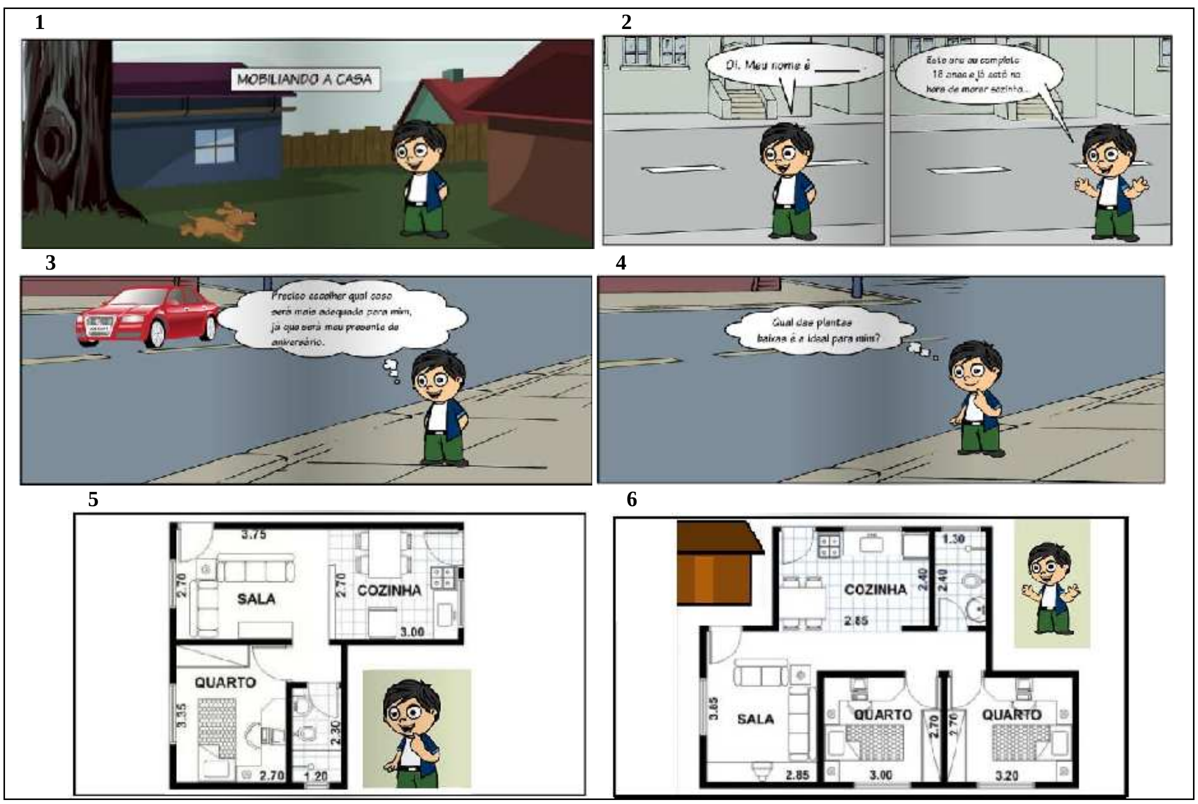


Figura 1. Páginas 1 a 6 da versão masculina do problema, disponível em: http://www.toondoo.com/ViewBook.toon?bookid=696307

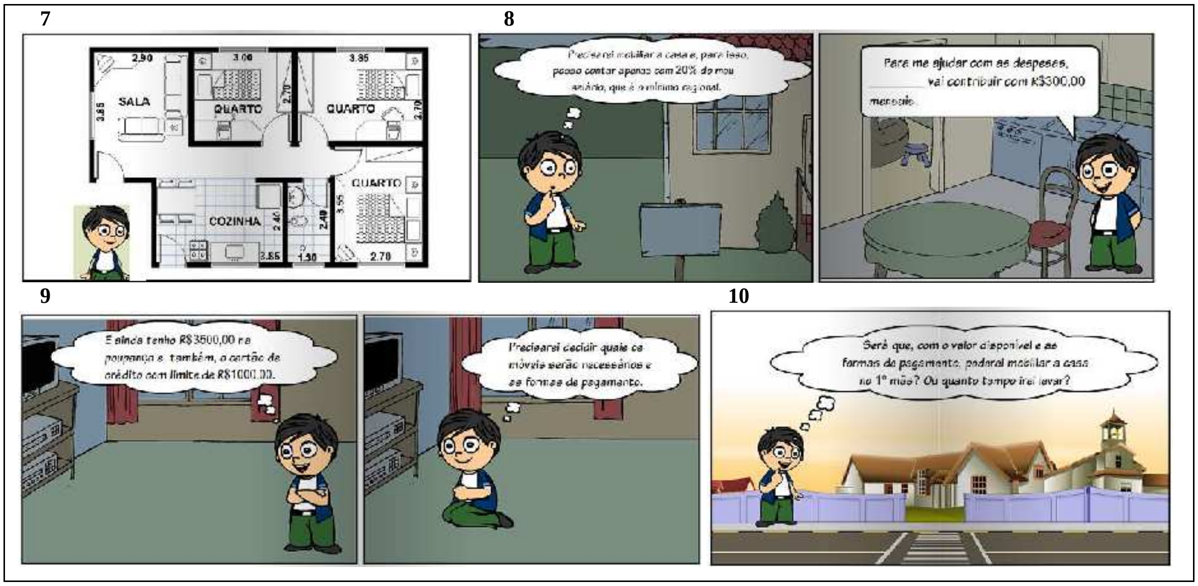


Figura 2. Páginas 7 a 10 da versão masculina do problema, disponível em: http://www.toondoo.com/ViewBook.toon?bookid=696307

No problema, verifica-se que, da página 1 a 4 do *book online*, são expostas informações sobre o personagem, que, na página 2, é solicitado que seja nomeado o mesmo e na página 4 há um questionamento que instiga a escolha de umas das plantas baixas das residências. Nas páginas 5 a 7, são apresentadas as plantas baixas das residências, de um (página 5), dois (página 6) e três (página 7) dormitórios, respectivamente, que possuem a representação de como os móveis podem ser dispostos nos cômodos, que podem ou não interferir nas decisões dos alunos. Nas páginas 8 e 9, são fornecidas as informações quanto às condições financeiras e de pagamento que o personagem possui e, ainda, é necessário determinar o nome do outro personagem, que poderia ajudar na compra e no pagamento. Na página 10, há questionamentos que suscitam a busca por uma solução para o problema, visto que é necessário que respondam se o personagem poderá efetuar ou não as compras, no primeiro mês em que já estiver morando sozinho.

Ao término do *design* do problema, as alunas D, E e F participaram do Fórum "Refletindo sobre o *design* dos problemas com a utilização das tecnologias digitais", que foi proposto no Ambiente Virtual de Aprendizagem *Moodle* (ULBRA, 2018). Nele, as alunas D e F escreveram que a experiência como *designer* foi inovadora, uma vez que lhes permitiu a aprendizagem de uma nova perspectiva metodológica, diferenciada e enriquecedora, que exige a reflexão sobre como deve ser produzido o enunciado de um problema para que os alunos o resolvam, sejam autônomos na tomada de decisões e aprendam conhecimentos matemáticos. A aluna D, ainda, mencionou que a resolução do problema "*[...] poderá desenvolver as capacidades de tentar, supor, testar e provar o que é proposto [...]".*

A aluna E afirmou que "[...] o *design de problema é uma metodologia [...], que possibilita trabalhar com inúmeras situações com os alunos e, a partir dessas situações, torná-los mais críticos e independentes na tomada de suas decisões"*. Pela resposta da aluna, depreende-se que ela compreendeu que a perspectiva evidenciada pode viabilizar o desenvolvimento de competências e habilidades, como a reflexão crítica e a tomada de decisões.

Pelas respostas das alunas D, E e F, nota-se que identificaram as potencialidades que o *design* de problemas com o uso de tecnologias digitais, cuja pretensão é que ocorra a sua (re)formulação e resolução com o uso desses recursos, por parte dos alunos. Também, a experiência como *designers* e a posterior reflexão sobre a atividade realizada, foram oportunidades para que aprendessem a produzir enunciados de problemas, considerando os objetivos pretendidos e as competências e habilidades a serem desenvolvidas, bem como para que compreendessem os resultados que poderiam ser gerados pela resolução do problema (Abramovich, 2015).

Considerações finais

O *design* de enunciados de problemas abertos, com o uso de tecnologias digitais, sob a associação das perspectivas da (re)formulação e da resolução de problemas, com o uso desses recursos, pode contribuir para que os futuros professores aprendam a utilizar essa perspectiva no planejamento de suas práticas pedagógicas, de modo que possibilite o ensino da Matemática e a Educação Financeira Escolar de seus alunos. Também, essa experiência adquirida pelos futuros professores pode favorecer o entendimento de como os temas de relevância social, para uma abordagem da Educação Matemática Crítica, podem ser abordados através da (re)formulação e resolução de problemas, com o uso de tecnologias digitais, e para a aprendizagem de conhecimentos matemáticos e tecnológicos.

Para isso, entende-se que essa perspectiva metodológica deve ser estudada, discutida e refletida na formação inicial de professores de Matemática. Por meio das etapas realizadas, os futuros professores podem produzir conhecimentos quanto a realização de *designs* de problemas matemáticos do tipo aberto, utilizando as tecnologias digitais, e como tais problemas podem ser propostos aos alunos da Educação Básica, para propiciarem a sua (re)formulação e resolução, de forma articulada, com o uso desses recursos.

Desse modo, afirma-se a necessidade de que os futuros professores sejam orientados, nesse processo, pelos professores formadores, para que os enunciados dos problemas sejam pré-determinados e apresentem informações incompletas, mas que, ao serem interpretadas, possam instigar os alunos a completá-las e a solucioná-los. Além disso, precisam, por meio do *design*, apresentar e/ou desenvolver competências e habilidades profissionais, como de trabalhar colaborativamente, de tomar decisões pedagógicas, de refletir, de criar, de inovar e de escolher e utilizar as tecnologias digitais e os conhecimentos matemáticos que serão empregados ou ensinados, e de abordar temas de relevância social e de como ensinar.

Referências bibliográficas

Abramovich, S. (2015). Educating teachers to pose Mathematical problems in the digital age: toward alternative ways of curriculum design. *IMVI OMEN*, 5(2), pp.115-136.

Allevato, N. S. G. (2008). *O Computador e a Aprendizagem Matemática: reflexões sob a perspectiva da Resolução de Problemas.* Rio Claro, SP: UNESP. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_alevato.pdf

Bravo, J. A. F. e Sánchez, J. J. B. (2012). Incidencia de la invención y reconstrucción de problemas en la competencia matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1(32), pp.29-43.

Brown, S. I. & Walter, M. I. (2009). *The art of problem posing* (3.ed). London: Psychology Press-Taylor & Francis.

Figueiredo, F. F., & Dalla Vecchia, R. (2015). O design de problemas com as Tecnologias Digitais no ensino da Matemática. *CIAEM-IACME, 1(14)*, Tuxtla Gutiérrez, México. Disponível em: http://xiv.ciaem-edumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1298/509

Figueiredo, F. F. (2017). *Design de problemas com a utilização das Tecnologias Digitais na formação inicial de professores de Matemática* (Tese de Doutorado). Universidade Luterana do Brasil, Canoas, Brasil.

Filatro, A. C. (2008). *Design instrucional na prática.* São Paulo: Pearson Education do Brasil.

Jurado, U. M. (2017). *La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas.* Disponível em: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/malaspina.pdf

Problema. (2018). *Mobiliando a casa – versão masculina.* il. color. Canoas: PPGECIM/ULBRA. Disponível em: http://www.toondoo.com/ViewBook.toon?bookid=696307

Toondoo. (2018). *Site.* Pleasanton, CA, USA: JAMBAV. Disponível em: http://www.toondoo.com/

ULBRA. (2018). *Ambiente de Aprendizagem Moodle do Curso de Extensão de Design de problemas com a utilização das Tecnologias Digitais, sob o enfoque da (re)formulação e resolução de problemas na Educação Matemática.* Canoas: PPGECIM/ULBRA. Disponível em: http://www.ppgecimulbra.br/moodle/user/view.php?id=128&course=40

Ruta crítica en la construcción del MTSK. Meta-análisis del análisis didáctico de los docentes en formación inicial.

Eugenio **Lizarde** Flores
Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos"
San Marcos, Loreto, Zacatecas, México
life_genio@yahoo.com.mx
Francisco Javier **Hernández** Gutiérrez
Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos"
San Marcos, Loreto, Zacatecas, México
frajaher_79@hotmail.com
Ana María **Reyes** Camacho
Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos"
San Marcos, Loreto, Zacatecas, México
anyreca0712@hotmail.com

Resumen

Con el propósito de focalizar los indicios, evidencias y oportunidades en la construcción del MTSK, a partir de la revisión comparativa al diseño de situaciones didácticas en matemáticas y su análisis posterior, de 7 estudiantes de la Licenciatura en educación primaria de una Escuela Normal Rural, elegidos como informantes clave, se plantea la posibilidad de construir una ruta crítica (en tres momentos básicos: construcción, consolidación y extensión del MTSK) que permita tanto a los formadores de docentes como a los estudiantes, tomar conciencia de los problemas de enseñanza que se les presentan en sus prácticas profesionales, pero a la vez el reconocimiento de las potencialidades que puede tener el MTSK como herramienta analítica para la formación docente inicial en matemáticas, tanto como para la estructuración de propuestas formativas en este mismo ámbito.

Palabras clave: matemática, enseñanza, formación de profesores, conocimiento.

Introducción

Uno de los intereses de investigación de nuestro Cuerpo Académico se dirige a responder la pregunta ¿cómo contribuir en el proceso de construcción del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK- Carrillo, et al, 2013)?, con énfasis en la formación inicial de profesores de educación primaria, a partir de la consideración de que en su desempeño profesional no sólo enseñan matemáticas, sino que se forman como maestros generalistas.

Bajo esta idea, en esta ponencia se presentan los resultados del seguimiento a un mismo proceso de formación docente inicial en matemáticas: diseño de situaciones didácticas (Brousseau, 2007), aplicación en la escuela primaria (práctica docente) y su posterior análisis, considerando un mismo momento temporal (2º periodo de práctica docente de un semestre) y una muestra intencionada de estudiantes de los diferentes semestres de la Licenciatura en educación primaria (II, IV y V semestres).

El propósito fundamental de la investigación es documentar las evidencias, indicios y oportunidades que se manifiestan en el proceso de construcción del conocimiento especializado en matemáticas, con la posibilidad de encontrar pautas de actuación desde la Escuela Normal que nos permitan, como formadores de profesores, contribuir a su concreción, así como en el rediseño de las propuestas oficiales de formación docente inicial (SEP, 2018) a partir de la documentación de las áreas de oportunidad encontradas.

Fundamentación teórica

El conocimiento del profesor de matemáticas o que enseña matemáticas se ha convertido en objeto de estudio de diferentes investigadores. En 2013, Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán presentan el modelo Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* -MTSK). Desde este modelo se asume que todo el conocimiento del profesor es especializado.

De acuerdo a su integración se divide en dos dominios: conocimiento matemático (*Mathematical Knowledge* - MK) y conocimiento didáctico del contenido (*Pedagogical Content Knowledge* -PCK); en el primero resulta un elemento fundamental el conocimiento que el profesor tiene de la disciplina que enseña, en este caso, matemáticas. De ahí que se plantean como objeto de investigación saber qué y cómo conoce/debe conocer matemáticas un profesor de matemáticas. En el segundo dominio de conocimiento, se hace referencia a una parte de lo que el profesor requiere para su trabajo docente, es decir, para su enseñanza, el cual se complementa con el MK, además, ambos dan sentido y orientación a las decisiones y acciones del profesor de matemáticas (Escudero-Ávila, 2015).

Cada uno de estos dominios está conformado por tres subdominios, tal como aparecen en la Figura 1 donde se presentan los componentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas a través de la representación gráfica del modelo MTSK. Es conveniente mencionar que las concepciones en matemática y en la enseñanza y aprendizaje de la matemática se ubican en el centro de la figura. A partir de este diagrama y siguiendo a Carrillo et al. (2013), Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo (2014) y Escudero-Ávila (2015), citamos algunas categorías e indicadores que integran los subdominios del conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido.

El dominio del conocimiento matemático está constituido por el subdominio conocimiento de los temas matemáticos, el cual incluye conocimientos de definiciones, propiedades, fundamentos, procedimientos, registros de representación, fenomenología y aplicaciones. El subdominio conocimiento de la estructura de las matemáticas integra conocimientos de conexiones de complejización, conexiones de simplificación, conexiones transversales y conexiones auxiliares. Por último, en el dominio matemático, ubicamos el conocimiento de la práctica matemática, es decir, conocimientos sobre jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos, formas de validación, papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas, prácticas particulares del quehacer matemático y condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

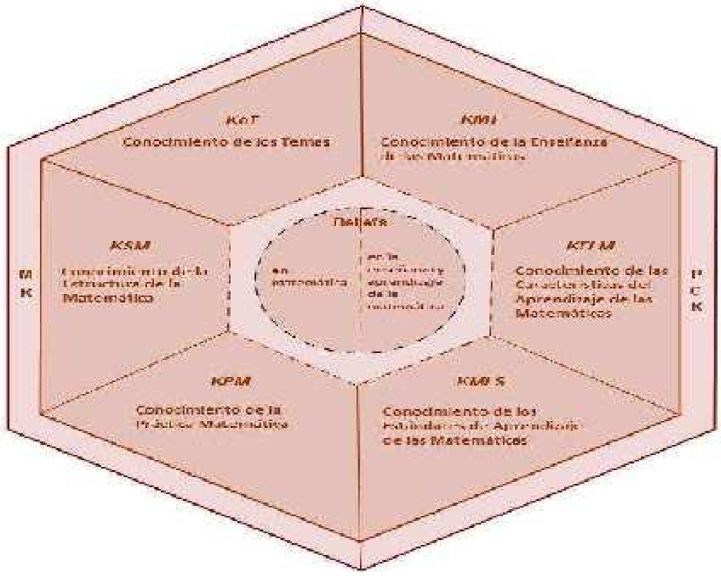


Figura 1. Diagrama del Mathematics Teacher's Specialized Knowledge-MTSK (Carrillo et. al, 2013).

Por su parte, en el dominio del conocimiento didáctico del contenido, identificamos el subdominio conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas, mismo que aborda conocimientos de las teorías de aprendizaje, fortalezas y dificultades, formas de interacción con un contenido matemático, intereses y expectativas. El subdominio de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas integra conocimientos de las teorías de enseñanza, recursos materiales y virtuales, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Como tercer subdominio, el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas, involucra conocimientos de expectativas de aprendizaje, nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado, así como conocimientos de secuenciación con temas anteriores y posteriores.

Por lo anterior, en este trabajo de investigación, el MTSK se convierte en la perspectiva teórica que establece una visión amplia y profunda sobre los conocimientos que el profesor de matemáticas y el que enseña matemáticas debe poseer.

Metodología

El desarrollo de este trabajo de investigación se instrumentó desde un paradigma de investigación cualitativo, considerando la comprensión, interpretación y análisis a profundidad del objeto de estudio. Para ello, se tuvo un acercamiento con un grupo focal de 5 futuros licenciados en educación primaria de primer grado (aunque por la relevancia de los datos sólo damos cuenta de 1, para ejemplificar), 1 estudiante de segundo grado y 1 estudiante del tercer grado, de la Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos" de San Marcos, Loreto, Zacatecas. Se realizó una entrevista a un grupo focal, además se realizaron videograbaciones de las sesiones de clases de matemáticas de los estudiantes de los tres grados mencionados y se revisaron documentos (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2010) en dos momentos: 1. Previo a la observación con las planificaciones de clases de los estudiantes y, 2. Posterior a la observación, con el informe de práctica profesional, en el que el estudiante analiza su desempeño en el aula de clase.

El análisis de los análisis (Meta-análisis) en los dos momentos previstos, a partir de la triangulación de datos de 3 documentos básicos: transcripción de entrevista al grupo focal, transcripción de la observación de clase y planeaciones, así como los informes de análisis, a partir de aplicar los lentes conceptuales del MTSK (el análisis de los análisis se hace a partir de las categorías del MTSK, observando en qué medida se manifiesta cada subdominio) nos permite observar de manera longitudinal y global en los tres grados la construcción del conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas en educación primaria con la finalidad de ver la factibilidad de construir una ruta crítica para lograrlo.

Resultados

1º Dificultades en los primeros acercamientos al MTSK - construcción: evidencias, indicios y oportunidades.

Cuando los alumnos cursan los primeros semestres de la Licenciatura en Educación primaria, al momento de realizar sus primeras prácticas profesionales nos resulta natural que tengan ciertas dificultades para comprender el proceso de planeación (parte del KMT), la comprensión de algún contenido (KoT), etc., sin embargo, en el mismo proceso de formación, los formadores de profesores tenemos responsabilidad didáctica para contribuir a construir el conocimiento especializado, en tal sentido, es muy importante que reconozcamos los indicios (entendidos como “sospechas inteligentes”), las oportunidades y las evidencias de que se está construyendo, así como las dificultades, para capitalizarlas como una oportunidad de mejora a partir de una retroalimentación adecuada. Con la intención de ir encontrando esos indicios, oportunidades y/o evidencias, se realizó a un grupo focal, una entrevista previa a su práctica profesional en el 2º semestre de la Licenciatura en educación primaria, y una de las primeras preguntas que se les planteó fue la siguiente: ¿Cuando ya les asignaron los contenidos, qué dificultades anticipan? Algunas de las respuestas fueron las siguientes:

> si desconocemos el tema, el generar actividades se complica todavía más
>
> porque nosotros lo entendemos, pero no sabemos cómo explicarlo, o las palabras que debemos usar para que los niños lo entiendan

Evidentemente, este primer reconocimiento es una oportunidad para el trabajo en el curso de matemáticas de la Escuela Normal y profundizar en el KoT y su relación con el KMT.

Los estudiantes reconocen tres tipos de dificultades al momento de planear: la dificultad del contenido, el cómo enseñarlo y cómo ponerlo en un formato de planeación; bajo esta lógica a continuación se presentan las relaciones entre estos tres aspectos y las complicaciones que se presentan, derivados del análisis de un caso, como evidencia a tener en cuenta en la construcción del MTSK

Tabla 1

Dificultades, procesos y prácticas. Oportunidades para el MTSK.

DIFICULTAD DEL CONTENIDO	**COMPRENSIÓN DEL PROCESO DE PLANEACIÓN**
E: ¿Cuál es un ejemplo de un contenido? “El de reparto, está sencillo llevarlo, porque pues sabemos qué es un reparto (KoT)” E: ¿por ejemplo?	E: ¿cómo organizaron la planeación?

Ao. El ejemplo que viene en el libro de las canicas, nosotros pusimos ciertos problemas en la planeación sobre lo que es un reparto, pusimos haga de cuenta que “Omar tiene como 400 canicas, tiene 8 hermanos y se las tiene que repartir a cada uno de forma equitativa, igual”, y ya pues pusimos ese	Lorenzo: primeramente conocer los contenidos (KoT[1]), ya después tener las herramientas necesarias para hacer la planeación, como el libro del maestro tanto como el libro del alumno, para saber los temas que se van a abordar (KMLS), pues si, darles a entender a los niños lo que vamos a llevar en la clase, como la consigna (KMT), preguntar a los alumnos si la captaron, sino para de nuevo repetir lo que vamos a hacer… tener en mente los materiales que se van a ocupar, ya sea como, si vamos a trabajar por ejemplo, sumas o restas, se puede trabajar con piedritas o frijoles, algo así…
EL MOMENTO DE LA ENSEÑANZA: 2º de educación primaria. 8:09 Profesor 1: inicia preguntándoles que vieron el día anterior y les dice que el día de hoy van a trabajar inventando un problema. Profesor 1. Saquen su libreta. ¿Qué día es hoy? Escribe la fecha en el pintarrón Profesor 1. Ya empiecen (se refiere a la invención del problema) 8:30 Profesor 1. A ver levante la mano quien ya acabó. ¿Quién nos quiere decir su problema? Ao. Adrián tiene 20 pesos y los quiere repartir entre sus dos hermanos. ¿Cuánto le da a cada uno? Profesor 1. A ver como ya terminaron su problema ahora hay que contestarlos (varios alumnos se levantan) como ya algunos los contestaron ¿quién me puede dar las respuestas? (Otro alumno lee el problema y lo resuelve) A ver alguien más que nos quiera dar su respuesta. A ver dinos el problema y la respuesta (El ritmo de trabajo es muy lento, algunos niños ya manifiestan estar aburridos) 8:34 Mo. Bueno pues ya todos entendimos que es un reparto, no. (Se hace el silencio) Ya como todos acabamos el problema era como un repaso. Ahora vamos a hacer otra actividad. Profesor 2: a ver ahora todos saquen su libro de matemáticas en la página 111 y 112 Ahí nos dice que en parejas, ¿en parejas o solos? As. En parejas (casi al unísono) Profesor 1, retoma lo que dice el libro. Vamos a contestarlo en parejas (los alumnos comienzan a leer) 8:52 Los alumnos comienzan a inquietarse y levantarse de sus lugares	

En el recuadro de la dificultad del contenido, cuando están en los primeros semestres de la Licenciatura, éste les parece como obvio y sencillo, por ejemplo en el caso del reparto, dice “está muy sencillo, todos sabemos qué es un reparto”, sin embargo, al no analizarse en términos del conocimiento didáctico del contenido, las dificultades se presentan al momento de la enseñanza; veamos dos circunstancias en este fragmento de registro: 1ª Cuando el profesor hace alusión a “ya empiecen” refiriéndose a la invención de los problemas, tenemos evidencia de las dificultades para articular el KoT con el KPM, ya que si bien la invención de problemas tiene un lugar muy relevante en la práctica de hacer matemáticas, en grados inferiores es muy importante cuidar el proceso para hacerlo. 2ª El uso de materiales educativos (libro de texto) exige su revisión previa para gestionar de manera adecuada su uso; aquí tenemos una oportunidad para analizar su intervención didáctica y generar reflexiones (algunas obvias: la necesidad de comprender los planteamientos de los libros de texto; y otras con mayor profundidad: tipos de problemas que se plantean, el papel de las preguntas en un problema matemático, etc.) que nos permitan que los estudiantes tomen conciencia y comprendan los diferentes componentes del MTSK al hacerlos objeto de análisis desde las evidencias de su propia práctica.

[1] Se han agregado las referencias a cada uno de los subdominios del MTSK, como elementos de análisis.

2º Consolidando el MTSK, la práctica docente y su análisis como espacios de reflexión y toma de conciencia.

El trayecto de preparación para la enseñanza y el aprendizaje, en el caso de las matemáticas, se fortalece y consolida en tercer y cuarto semestre porque se avanza en el estudio del curso de geometría: su aprendizaje y enseñanza y el curso procesamiento de información estadística; estos escenarios demandan a los profesores en formación inicial trabajar en la planificación, ejecución y análisis de algunos contenidos en diferentes grados de educación primaria. Así, en estos contextos los jóvenes ponen en juego conocimientos matemáticos y didácticos; en el caso de los primeros se encuentran conocimientos de los temas que van a enseñar, conocimientos de la estructura de la matemática y conocimientos de la práctica matemática, en lo que respecta a los conocimientos didácticos emergen conocimientos de la enseñanza de las matemáticas, conocimientos de las características del aprendizaje de las matemáticas y conocimientos de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. Enseguida presentamos un fragmento de planificación de Diana, una profesora en formación inicial de cuarto semestre:

Tabla 2
Elementos que contextualizan el diseño de una planificación de matemáticas.

Asignatura: Matemáticas **Enfoque**: Uso de secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos, que permitan reflexionar y construir formas diferenciadas para la solución de problemas usando el razonamiento como herramienta fundamental. **Campo formativo**: Pensamiento matemático **Bloque**: I **Lección 30**: “En busca del entero” **Contenido**: Representación de fracciones de magnitudes continuas (longitudes, superficies de figuras). Identificación de la unidad, dada una fracción de la misma. **Intención didáctica**: Que los alumnos establezcan la relación entre una fracción (unitaria o no unitaria) que se representa gráficamente y la unidad de referencia al dibujar esta última.

En la tabla 2, identificamos que Diana evidencia conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas en relación con la enseñanza de las fracciones (KMLS), en particular, sobre el nivel de desarrollo conceptual esperado en quinto grado de educación primaria, en la descripción del contenido y la intención didáctica, así como también evidencia conocimiento de las expectativas de aprendizaje cuando expresa el enfoque de las matemáticas. Por último, presentamos un fragmento de la planificación anterior, misma que corresponde a la preparación del medio (Brousseau, 2007):

Tabla 3

Preparación del medio de una planificación de matemáticas.

Preparación del medio. a) Valoración de conocimientos previos: Plantear a los alumnos problemas en donde tengan que hacer repartos utilizando las fracciones. Ejemplo: Andrea tiene una naranja y quiere darle la cuarta parte de la naranja a su amiga Julieta ¿qué fracción de la naranja será la que tiene que darle a su amiga? Si Julieta quiere completar el entero, ¿cuánto le falta si tiene sólo ¼ de naranja que le dio Andrea? ¿Cómo lo representarías con la naranja que se te proporcionó?

En la tabla 3, Diana muestra conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), al plantear un problema donde se rescatan conocimientos de los alumnos en relación con el estudio de la fracción como parte-todo en contextos continuos; lo anterior, coincide con el contenido y la intención didáctica que Diana manifiesta en la tabla 2, en los elementos que contextualizan su planificación de matemáticas. Así, en las tablas 2 y 3, presentamos evidencias del conocimiento didáctico de fracciones que una profesora en formación inicial pone en juego en algunos fragmentos de su planificación. Con lo cual, de manera comparativa a lo presentado en el apartado anterior, apreciamos un avance en la consolidación del conocimiento especializado de los futuros profesores.

3º Extensión del MTSK hacia su proceso de formación generalista

El estudiante que se aborda para este punto, es de quinto semestre de licenciatura en educación primaria, para este momento, ya se han desarrollado los cuatro cursos que conforman la preparación para la enseñanza de las matemáticas, con ello, se podría mencionar que se tiene un dominio con cierta profundidad sobre el conocimiento matemático y sobre el conocimiento didáctico del contenido.

Empero, en quinto semestre en las escuelas normales para el plan de estudios 2012, los jóvenes estudiantes realizan sus prácticas profesionales en escuelas primarias de organización multigrado, por lo que aprenden estrategias de planificación globalizadas para poder atender a niños desde dos hasta los seis grados en un solo grupo.

Así que además del dominio que ya se ha desarrollado en los anteriores semestres sobre los temas matemáticos (KoT), este semestre fortalece su conocimiento con el desarrollo de paquetes de conocimiento (Lizarde, 2016) de los grados en los que se practicará, lo que posibilita el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM). Situación que se muestra en la siguiente actividad de planificación de los contenidos en una escuela bidocente:

Matemáticas Primer Grado

Contenidos	Problemas aditivos. Resolución de distintos tipos de problemas de multiplicación (relación proporcional entre medidas, arreglos rectangulares.

Matemáticas Segundo Grado

Contenidos	Problemas multiplicativos. Resolución de multiplicaciones cuyo producto sea hasta del orden de las centenas, mediante diversos procedimientos (como una de multiplicaciones parciales, multiplicaciones por 10, 20, 30, etcétera.

Matemáticas Tercer Grado

Contenidos	Problemas multiplicativos. Análisis de la información que se registra al resolver problemas de suma o resta.

Como se puede observar en los cuadros anteriores, el estudiante planifica los contenidos que abordará en su práctica profesional, pero además en este aprendizaje de la estructura de las matemáticas, busca esa relación creciente en la complejidad de los temas matemáticos, acorde a un diagnóstico que se realizó previamente y de los grados escolares que atenderá.

> La enseñanza de la multiplicación es un contenido muy amplio que no necesariamente comienza en segundo grado ni tampoco termina en sexto de primaria. Es por ello que, la enseñanza de la multiplicación se va dando paso a paso y en cada grado se va enseñando algo. Sin embargo, el dilema está aquí, en el ¿qué enseñar en cada grado? (Registro del informe de prácticas profesionales del estudiante)

En el registro anterior queda patente el conflicto que significa relacionar cualquier contenido (multiplicación para este ejemplo) en su estructura matemática, en este caso para tres grados de educación primaria, sin embargo, la posibilidad de planificación previa, utilizando paquetes de conocimiento para relacionar el conocimiento de los temas matemáticos con la estructura de las matemáticas, permite un nivel importante de consolidación del conocimiento especializado del profesor de educación primaria que enseña matemáticas.

> Nuestra perspectiva es comenzar el proceso de aprendizaje de la multiplicación en primer grado, pero, a partir de problemas, problemas que involucren primeramente la suma, luego la suma de manera repetida o iterada… se diseñaron problemas de igual contextualización para los tres grados, pero con algunas variables didácticas entre sí (Registro del informe de prácticas profesionales del estudiante)

Conclusiones

A partir del análisis de tres momentos coyunturales en el proceso de formación docente inicial, asumimos que la ruta crítica en la construcción del MTSK es un proceso continuo y dialéctico, en el que al tener un mejor dominio de los temas matemáticos y analizando este saber como paquetes de saberes de complejidad creciente, permite un mejor conocimiento de la estructura de las matemáticas y viceversa, pero a la vez, ambos tipos de conocimiento: de los temas y de su estructura, les posibilitan el diseño de situaciones didácticas congruentes y articuladas a las características de aprendizaje de los alumnos y a los estándares de aprendizaje que se quieran lograr.

En el escenario de la formación docente inicial, eso abre un panorama muy importante a los formadores de docentes dado que la revisión y análisis de nuestra práctica profesional se resignifica en un doble sentido, en primer término al articularla desde un modelo explícito del conocimiento del profesor de matemáticas, y en segundo término, al retomar los problemas de enseñanza que enfrentan nuestros estudiantes, tanto a partir de los indicios, como de las evidencias, para convertirlas en oportunidades de desarrollo profesional. La mirada analítica de los formadores de profesores posibilitará a su vez el reconocimiento de esos momentos críticos: primeros acercamientos (toma de conciencias de las problemáticas), consolidación de elementos del MTSK y extensión a escenarios más complejos (grupos multigrado, por ejemplo).

Referencias y bibliografía

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.). *Actas del CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, Ankara, Turquía: CERME.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Argentina: Libros del zorzal.

Escudero-Ávila, D. I. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11456.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A., Aguilar, A. y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano y M. A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Huelva: Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Lizarde, E. (2016). La construcción del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) desde el escenario normalista. *Entre Maestros No. 57*, 82-93.

SEP. (2018). *Aritmética. Números naturales. Programa de estudios. Primer semestre.* México: Autor.

Formación profesoral para atender población diversa desde una educación matemática inclusiva

Eliécer **Aldana** Bermúdez
Universidad del Quindío
Colombia
eliecerab@uniquindio.edu.co
Heiller **Gutiérrez** Zuluaga
Universidad del Quindío
Colombia
hgutierrez@uniquindio.edu.co
Graciela **Wagner** Osorio
Universidad del Quindío
Colombia
gwagner@uniquindio.edu.co
Jhon Darwin **Erazo** Hurtado
Universidad del Quindío
Colombia
jderazo@uniquindio.edu.co

Resumen

Esta comunicación corresponde al tema formación continuada de profesores para la atención a poblaciones con capacidades diferenciadas de tipo sensorial y/o cognitivo. El objetivo es facilitar instrumentos teóricos y metodológicos en didáctica de las matemáticas a profesores no licenciados en matemáticas, que requieren de conocimientos disciplinares del área para atender poblaciones con déficit cognitivo, limitación auditiva y limitación visual. Teóricamente el estudio se apoya en el conocimiento didáctico del contenido matemático a enseñar, la metodología utilizada es de tipo cualitativo y el método utilizado es la investigación acción. Los hallazgos encontrados en los resultados permiten concluir que la formación disciplinar profesoral es la base de una transposición didáctica, el diseño de ambientes didácticos privilegian condiciones de enseñanza de las matemáticas y los recursos tecnológicos ofrecen multiplicidad de formas de exploración con las matemáticas, para lograr que estos docentes posibiliten en estas poblaciones la construcción de nociones básicas de las matemáticas.

Palabras clave: Formación continuada de profesores, capacidades diferenciadas, situaciones de aprendizaje, Didáctica de las matemáticas, desarrollo de pensamiento matemático.

Introducción

Esta investigación tiene que ver con un proceso de formación profesoral, actualización y perfeccionamiento a profesionales y docentes de apoyo en Colombia, que atienden poblaciones en condición de discapacidad y en especial aquellas personas que tienen capacidades diferenciadas a nivel cognitivo y/o sensorial, para que estos facilitadores puedan generar ambientes didácticos que privilegien las condiciones favorables a estas poblaciones y logren potenciar en ellos el aprendizaje de las matemáticas, mediante la asistencia de recursos tecnológicos necesarios como instrumentos para el desarrollo del pensamiento matemático en el contexto de las políticas de Estado (MEN, 2017) en el marco de una educación inclusiva.

El objetivo es facilitar instrumentos teóricos y metodológicos en Didáctica de las Matemáticas a profesionales y docentes de apoyo que no cuentan con la formación disciplinar, porque no son Licenciados en Matemáticas, pero que demandan de conocimientos disciplinares propios de unas Matemáticas incluyentes para la atención a personas en condición de déficit cognitivo (Síndrome Down), limitación auditiva (hipoacúsicos, sordos) y limitación visual (baja visión y ciegos), de instituciones educativas. En este sentido, Bruno & Noda (2010) citado en Aldana, Gutiérrez, & Wagner (2018) aseveran que: "Los profesores que atienden estudiantes especiales tienen una fuerte formación en aspectos psicológicos y pedagógicos, pero no han recibido formación en contenidos didácticos de áreas curriculares, lo que les lleva a tener inseguridades en el tratamiento de los diferentes contenidos" (p. 146-147); lo que hace que estudios como este tengan impacto en la comunidad académica.

Los propósitos específicos particulares de esta ponencia hacen parte de un estudio más amplio de un Proyecto de Investigación y están orientados en función de aspectos teóricos sobre el conocimiento didáctico matemático a enseñar y en lo metodológico la investigación acción: En particular en esta ponencia interesa dar a conocer a partir de un diagnóstico previo y de las necesidades y expectativas de los profesionales y docentes de apoyo, cómo mediante precisiones conceptuales emerge una secuencia didáctica (ver figura 1) que se le presenta a los profesionales y docentes de apoyo para que la desarrollen, luego hacen las reflexiones posteriores y los aportes, para dar paso a una secuencia que ellos mismos construyen y transfieren a sus estudiantes en sus propios escenarios naturales de enseñanza y de aprendizaje y que finalmente regresan a socializar sus experiencias en las comunidades de práctica.

Referentes teóricos

La formación de profesores se considera desde el marco propuesto como el conjunto de referentes curriculares para la formación de profesores de matemáticas en contextos de diversidad para la atención en el caso particular, a poblaciones vulnerables desde los aspectos cognitivos y de limitaciones sensoriales de acuerdo con León y otros (2012). Asimismo, el reconocimiento de los planteamientos teóricos de Ball, Thames & Phelps (2008) y retomando a Shulman (1986), todos coinciden en que el conocimiento necesario para realizar la práctica de enseñar matemáticas debe incorporar el conocimiento del entorno cultural del aula y de las condiciones de las poblaciones en su contexto.

En este sentido, abordar una visión constructivista del aprendizaje requiere que la instrucción tenga en cuenta las actuaciones de los escolares, y haga ajustes razonables a la planificación de esa instrucción, advierta la búsqueda de unos objetivos predeterminados y el diseño de unas tareas para lograrlo, tal como lo plantea la Teoría de las Situaciones Didácticas iniciada por Brousseau (2007) cuya evolución se ha visto caracterizada por el desarrollo teórico, y la teoría de Chevallard (1997), muestra que el aprendizaje sufre una transformación para ser enseñado.

Además, la Matemática Inclusiva en el contexto de la atención a la diversidad de acuerdo con Alsina & Planas (2008; p. 113), entiende la Educación Matemática "como una iniciación a una comunidad de significados y prácticas sociales", es decir, la diversidad de intereses, conocimientos experiencias, necesidades y por tanto, a una variedad de prácticas matemáticas. En cuanto a las poblaciones que en esta investigación configuraran las comunidades de práctica (déficit cognitivo, limitación auditiva y baja visión), en particular, en el aspecto social cognitivo el estudio se apoya en los postulados de Vygotsky (1979), sobre la zona de desarrollo próximo para la mediación desde las manifestaciones de una competencia cognitiva y cultural de las personas con limitaciones cognitivas, planteadas por López Melero (1997; 1999). En relación con la comunidad sorda, es fundamental la conexión que ellos tienen con el mundo a través de la visión y el uso de una lengua de signos que les confiere rasgos de identidad propios, planteados en Díaz-Estébanez, Salvador, Serna, Vázquez, Ferrer, & Valmaseda (1996), y en lo que corresponde, al conjunto de personas con baja visión que tienen desarrollado el sentido del oído, la educación ha de ponerse a tono y servirse de las ventajas que los sistemas cibernéticos y la inteligencia artificial le pueden proporcionar como aparece en Blázquez & Lucero (2002).

Metodología

La investigación tiene enfoque cualitativo de acuerdo con Bisquerra & Sabariego (2009), porque utiliza un método apropiado para mirar los matices de comportamiento de los profesores, genera afirmaciones e interrogantes reflexivos con base en las evidencias a partir del análisis y de los objetivos de la investigación. La investigación se realizó con un grupo de 25 profesionales (ofrecen asesoría) y docentes de apoyo (están en las aulas) de instituciones educativas de una región céntrica de Colombia, para dotarlos de instrumentos de enseñanza y de esta manera lograr una inclusión en el sistema educativo convencional de estas poblaciones con capacidades diferenciadas, de acuerdo con la investigación realizada por Aldana, López, & Alonso (2014).

La metodología fue la investigación acción de acuerdo con Latorre (2007) en cuatro fases: 1. *Diagnóstico*, acercamiento a las Instituciones Educativas a través de las Secretarías de Educación para determinar que los profesores en ejercicio necesitan actualización en este ámbito de formación, organizar un directorio, presentar el proyecto a los profesionales de apoyo, diseñar, validar y aplicar un instrumento diagnóstico, y a partir de ello, *planear* quince sesiones de encuentros presenciales. En la fase 2. *Acción*, de acuerdo con las políticas de Estado, se activan las sesiones presenciales orientadas a: conocer necesidades, y expectativas, reflexionar sobre algunos marcos teóricos y metodológicos para el diseño de secuencias didácticas, elaborar talleres, unidades didácticas, entrevistas, realizar material tecnológico, diarios de campo, videos, y objetos virtuales de aprendizaje. En la fase 3. *Observación*, validación de los instrumentos anteriores, y acompañamiento personalizado en cuanto a lo disciplinar y didáctico, visitas a las instituciones educativas para confrontar la transferencia de conocimiento, y en la fase 4. *Reflexión,* sobre el trabajo en las sesiones orientadas a la formación *y* la apropiación social del conocimiento, compartiendo las experiencias de las aplicaciones que ellos realizaron en los escenarios naturales de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas.

Análisis

En la primera sesión del seminario de formación, para conocer las expectativas de los profesionales y docentes de apoyo se propuso una actividad en seis equipos, en la cual los episodios registrados en las historias de vida muestran una tendencia que se configura en las siguientes unidades de análisis:

Tabla 1

Concepciones y expectativas de los profesores sobre las prácticas docentes inclusivas

Grupo	**Categorías de análisis**	**Tendencias encontradas en la discusión**
1	Sensibilización	Experiencia Educativa, Lúdica, Inequidad, Didáctica de las matemáticas, Formación docente, Ambiente Escolar, Sensibilización del docente, Lenguaje.
2	Procesos Didácticos	Calidad Educativa, Investigación, Procesos de Aprendizaje, Evaluación, Requerimientos legales, Lúdica, Valores, Experiencias, Expertos, Derechos Básicos de Aprendizaje, Metodologías, Servicios, Aportes interdisciplinarios, Didáctica, Acompañamiento.
3	Reconocimiento de la diversidad	Monotonía, Retos, Exigencia, Limitaciones, Recursos didácticos, Enseñar, Procesos de aprendizaje, Procesos didácticos, Etapas, Política educativa, Secuencias, Necesidades Educativas Especiales, Roles, Falencias docentes, Desempeños, Barreras, Aprendizaje, Reconocimiento a la diversidad.
4	Identidad del Maestro	Aprendizaje, Experiencias significativas, Metodologías Novedosas, Motivación, Experiencias de Apoyo, Tics, Resistencia, Igualdad, Integralidad, Relación docente-estudiante, Sensibilización, Colaboración, Políticas Educativas, Lúdica, Comunidad Educativa, Didáctica, Vocación, Innovación, Aprendizaje Colaborativo, Rol de la familia, Identidad del maestro.

Fuente. Elaboración propia de los autores

Las categorías de análisis extraídas de los segmentos de los episodios ponen en evidencia las concepciones que tienen los profesionales y docentes de apoyo y las reflejan por la emotividad que causa trabajar en estos contextos, las expectativas de tener un conocimiento necesario y suficiente del contenido didáctico matemático como disciplina a enseñar, como también, el reconocimiento a la diversidad en los ritmos de aprendizaje, estilos, contextos, medios, mediaciones, formación teórica y metodológica, la necesidad de apoyar la enseñanza en el uso de material tecnológico para generar nuevos ambientes y estilos de aprendizaje que vinculan el saber, el saber hacer, el saber ser, en asociación con la misión y la vocación de un docente que asume el reto de una educación inclusiva.

En segundo lugar, a partir del diagnóstico realizado a los docentes en otra sesión del seminario y de acuerdo con la planeación previa, se le propuso a los profesionales y docentes de apoyo que desarrollaran la siguiente secuencia didáctica de aprendizaje.

Secuencia didáctica

Objetivo: Lograr que los profesionales y docentes de apoyo identifiquen el color, la forma, el tamaño y realicen procesos de asociación, correspondencia y conteo de objetos para la construcción del concepto de número, mediante manipulación de material como el pentominó.

Variable Didáctica: El valor numérico como una composición y descomposición geométrica (relación entre perímetro y área) y conteo (Relación uno a uno, uno a muchos, muchos a uno).

Gestión de la clase: Entrega a los docentes de apoyo de un material compuesto por fichas de plástico o de madera de diversas formas, cada forma es regular en su conformación interna, es decir, está basada en cuadrados y cada ficha es una agrupación de 5 cuadrados ubicados en diferentes formas que simulan una estructura lingüística por la distribución de los cuadrados, estos se agrupan formando doce (12) pentominó diferentes.

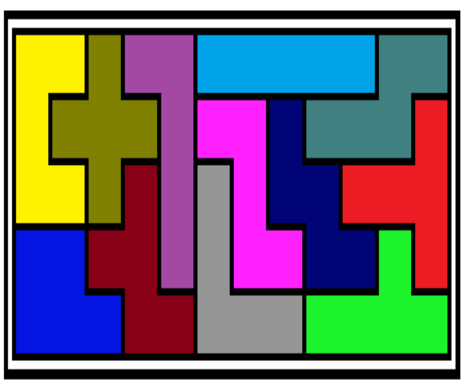


Figura 1. Pentominó

Procedimiento:

1. El facilitador entrega el pentominó a los profesores por equipos.
2. El material es observado por los participantes con el fin de reconocer algunas características básicas.
3. A partir de la cantidad entregada a cada equipo, 12 fichas por paquete, ellos establecen las características que tiene cada pieza como la forma, composición y el número de lados y de cuadrados en su interior.
4. Después se orienta al docente para que haga representación del número en forma oral y en correspondencia con su conteo, es decir, los elementos que determinan la construcción de cada pieza, lado – cuadrado, y luego compartir su hallazgo con los compañeros.
5. Luego deben reconocer en cada una de las piezas el número de lados y calcular su perímetro, como también calcular la medida interna de la ficha.
6. Seguidamente se les invita a formar figuras con las fichas para que repitan el proceso anterior y se les pregunta cuánto mide el perímetro cada vez y cuánto el área.
7. Finalmente qué conclusión pueden obtener despues de encapsular ese proceso en el objeto matemático relación entre el área y el perímetro.

Análisis de la secuencia: finalizada la sesión de ese día los profesionales y docentes de apoyo habían recibido instrucciones previas sobre algunas nociones básicas de matemáticas escolares y aspectos teóricos y metodológicos en didáctica de las matemáticas, que les permitió realizar algunas precisiones conceptuales de orden numérico, espacial geométrico, métrico y de variación para establecer la relación entre perímetro y área, lo que los llevó a concluir que mientras el área permanece constante el perímetro puede variar.

Resultados

El proceso de formación continuada de docentes, además de ofrecerles los instrumentos teóricos y metodológicos en Didáctica de las Matemáticas permitió reflexionar en torno a la motivación que mostraron los participantes de una parte, por el aprendizaje de las nociones matemáticas básicas y de otra, las estrategias de enseñanza que les permitió poner en práctica las reflexiones y construcciones realizadas durante las sesiones programadas en escenarios naturales de enseñanza y de aprendizaje, para generar en sus poblaciones diversos ambientes y estilos de aprendizaje en el contexto de una educación matemática incluyente.

Conclusiones

La motivación constituye la fuente del saber para que los docentes tengan disposición por el saber disciplinar, diseñen material tecnológico para la enseñanza de conceptos matemáticos a estudiantes con capacidades diferenciadas como dificultades cognitivas, sensoriales, altas capacidades, grupos étnicos, entre otros, en el marco de una educación matemática inclusiva.

Los profesionales y docentes de apoyo que orientan espacios del área de las matemáticas requiere de una formación constante en lo disciplinar para poder hablar de didáctica y realizar ajustes razonables en el proceso enseñanza-aprendizaje de estudiantes diversos.

El aprendizaje se hace más dinámico cuando se utiliza la interacción y la mediación utilizando secuencias didácticas de enseñanza y de aprendizaje con material de apoyo tecnológico para tal fin.

Los docentes de apoyo que en sus aulas de clase tienen estudiantes con alguna capacidad diferenciada, pero muchas veces no están habilitados para atenderlos, por tanto, espacios como este sirven para que ellos puedan encontrar instrumentos o herramientas para ayudar a sus estudiantes a mejorar los niveles de aprendizaje atendiendo a ritmos diferentes. Esta investigación constituye un factor motivacional continuo de formación profesoral, con sentido de vocación para atender población diversa en el contexto de una educación matemática incluyente.

Referencias y bibliografía

Aldana, E., Gutiérrez, H., Wagner, G. (2018) Formación de profesores para una educación matemática en y para la diversidad. *Sophia*, 14(1) 65-74. DOI: https://doi.org/10.18634/sophiaj.14v.1i.823

Aldana, E., López, J. H., & Alonso, A. (2014). Una didáctica de la matemática para la formación en diversidad: síndrome Down. Proyecto de investigación 668 financiado por la Universidad del Quindío: Armenia. Universidad del Quindío.

Alsina, A., & Planas, N. (2008). *Matemática Inclusiva. Propuesta para una educación matemática accesible*: Madrid. Narcea.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes. It Special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407.

Bisquerra, R. y Sabariego, M. (2009). *El Proceso de Investigación* (Parte 1). En R. Bisquerra (Coord.). Metodología de la Investigación Educativa (2ª ed.). (89-125). Madrid: La Muralla.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoria de las situaciones didácticas.* (Diilma Fregona, trad.). Argentina: Libros del Zorzal.

Blázquez & Lucero. (2002). Los medios y recursos en el proceso didáctico. En Medina/Salvador. Didáctica general.(Ed.). Madrid: Prentice.

Bruno, A., & Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con síndrome de down. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (141-162). Lleida: SEIEM.

Chevallard (1997). *La transposición didáctica del saber sabio al saber ensenado*. Aique Grupo editor. Argentina.

Díaz-Estébanez, E., Salvador, D., Serna, M.J., Vázquez, A., Ferrer, J.C. y Valmaseda, M. (1996). Las personas sordas y su realidad social. Un estudio descriptivo. Ministerio de Educación y Ciencia (M.E.C.). Madrid.Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* , 37-65.

Latorre, A. (2007). La investigación-acción.Conocer y cambiar la práctica educativa. España: Graó.

León, O. L., Saiz, M.L., Rojas, P.J., Bonilla, M., Romero, J.H., Gil, D., Correal, M., Flórez, W. O., Peralta, M.A., Márquez, H.A. (2012). Referentes curriculares con incorporación de tecnologías para la formación del profesorado de matemáticas en y para la diversidad. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

López, Melero, M. (1997). La escuela un lugar para pensar y para descubrir la cultura. En la diversidad y la diferencia en la educación secundaria: Retos para el siglo XXI. Málaga: Aljibe.

López, Melero, M. (1999). Aprendiendo a conocer a las personas con síndrome de down: Málaga: Aljibe.

MEN (2017). Enfoque de educación inclusiva en la actualización pedagógica de los educadores.

Shulman, L.S. (1986). Paradigms and research programs for the study of teaching. In M.C. Wittrock (Ed.), Handbook of research on teaching (3rd ed.). New York: Macmillan.

Vygotsky, L.S. (1979). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Barcelona: Crítica.

Reconocimiento

Esta investigación hace parte de la Convocatoria 661 de *Colciencias* en el marco de las políticas del gobierno nacional Colombiano, en la línea de *"Educación, Paz y Equidad";* mediante la "*Alianza de Instituciones para el Desarrollo de la Educación y la Tecnología en Colombia* "**AIDETC**", Programa financiado por Colciencias, con la participación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, la Corporación Universitaria Iberoamericana, la Universidad del Quindío y la Corporación Universitaria Rafael Núñez, en el marco de un

Programa de investigación denominado "*Arquitectura pedagógica, didáctica y tecnológica para la formación de profesores en y para la diversidad"*. En particular la universidad del Quindío, participa con el Proyecto 739, titulado "*Una didáctica para la formación de profesores de matemáticas en contextos de educación inicial, con poblaciones en condición de discapacidad sensorial y/o cognitiva*".

Análisis de los planes de estudio (1997, 2012 y 2018) para la formación docente inicial en México desde el modelo MTSK.

Eugenio Lizarde Flores
Escuela Normal Rural “Gral. Matías Ramos Santos”
San Marcos, Loreto, Zacatecas, México
life_genio@yahoo.com.mx

Resumen

Con motivo de la reciente implementación, en México, de un nuevo programa de Aritmética para la formación docente inicial, revisamos de manera comparativa tres planes de estudio que hasta el momento se han implementado: 1997, 2012 y 2018 (por el año de inicio); esta revisión la centramos en el contenido del primer curso en ambos casos, sobre todo porque es el único que se dispone del último de los planes de estudio. El propósito principal es determinar, a la luz del modelo MTSK, cuáles de sus componentes han estado o están presentes como opción de formación en matemáticas. Los resultados nos permiten apreciar un efecto pendular producto de decisiones políticas, más que académicas, que llevan a centrar la mirada en el enfoque de “situaciones problemáticas” o en el “enfoque de competencias”, incluso en un intento de combinarlos, pero muy poco logrado (plan 2018).

Palabras clave: matemática, enseñanza, formación de profesores, conocimiento.

Introducción

La formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria en México, por ley está en manos del Estado, quien a través de las escuelas Normales y de la elaboración de planes y programas de estudio, de carácter y aplicación nacional, la ha estado concretando.

Una de las características principales de esta formación es que tiene un carácter generalista, es decir, el profesor que enseñará matemáticas en la escuela primaria, también tiene la obligación de enseñar el resto de las asignaturas que contempla el currículo oficial de la educación primaria (SEP, 2011; SEP, 2017); bajo esta premisa, la formación en las Escuelas Normales, reviste esa misma complejidad, el profesor se forma con esa visión, una formación generalista, la cual en ocasiones queda limitada ante la dificultad que los tiempos le marcan para profundizar en la complejidad que los avances en las diferentes perspectivas didácticas le demandan.

Cuando uno revisa la literatura teórica, sobre el campo de la educación matemática (Dreyfus, Artigue, Potari, Prediger, & Ruthven, 2018), es fácil percatarse de los avances en la investigación al respecto[1];

Las investigaciones sobre el profesor de matemáticas están vinculadas a la necesidad reconocida en diferentes ámbitos por comprender mejor el papel del profesor en las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y sus procesos de aprendizaje y desarrollo profesional. Las aproximaciones a esta problemática y los focos de atención que los investigadores hemos planteado muestran una diversidad conceptual y metodológica que hace entrever la complejidad de los fenómenos estudiados (Llinares, 2018, pág. 1).

En el plano de la concreción de estas investigaciones, la complejidad se presenta cuando se hace la pregunta ¿cuánto de ello está realmente impactando en los procesos de formación inicial de profesores para la enseñanza de las matemáticas? ¿de qué manera los diferentes planes de estudio los han incluido en los programas específicos de matemáticas? ¿cómo se puede lograr la construcción de un conocimiento especializado necesario para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria? Bajo la consideración de que la especialización del conocimiento del profesor radica en su uso en contextos profesionales (Carrillo, Montes, Contreras, & Climent, 2017), e incluso, la pregunta que da lugar a esta comunicación ¿cuál es el modelo de profesor de matemáticas que subyace a los diseños curriculares que se han propuesto en México para la formación inicial? ¿qué elementos del conocimiento especializado se manifiestan explícitamente en los planteamientos curriculares? Si les aplicamos un criterio de análisis explícito, desde un modelo teórico de los conocimientos que deben tener los profesores, por ejemplo, el MTSK (Carrillo, Montes, Contreras, & Climent, 2017) ¿cuáles subdominios de conocimiento se aprecian explícitamente?

Con esas preguntas nos hemos acercado a tres de los últimos planes de estudio propuestos oficialmente para la formación inicial de profesores en México: 1997, 2012 y los programas aún en construcción, pero ya en implementación los del primer semestre de la Licenciatura en educación primaria 2018, para hacer una revisión de los elementos constitutivos de los programas de matemáticas a la luz del modelo MTSK, sobre todo a partir de la primera evidencia que tenemos al revisar el programa del curso “Aritmética. Números naturales” (SEP, 2018) y notar que en éste se recuperan de manera textual actividades contempladas en los dos programas anteriores. Esta evidencia nos lleva a sospechar que no se cuenta con una definición clara sobre los componentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

El modelo MTSK como herramienta para el análisis y diseño de cursos de matemáticas para la formación inicial.

El modelo MTSK se configura en la Universidad de Huelva, España, siguiendo las ideas de Shulman, (1987) y cuestionando el MKT propuesto por Ball, Hill, & Bass, (2005); en esencia es un modelo analítico que se propone con la finalidad de caracterizar los componentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Es muy importante precisar que en las intenciones pioneras para la estructuración del modelo, está presente la idea de la formación del profesor de matemáticas, a ello obedece la marcada precisión de que en éste sólo se consideran, en cada uno de sus subdominios, lo específico a matemáticas, no porque se desconozca o se descalifique el resto del conocimiento del profesor (por ejemplo, conocimientos de pedagogía en

[1] Véase, por ejemplo, algunos repositorios internacionales: ZDM, Universidad de los andes; o las diferentes revistas especializadas: *Journal of Mathematics Teacher Education;* todas las que publica el National Council of Teachers of Mathematics, dentro de ellas “Journal for research in mathematics education”, así como revistas nacionales e internacionales, Educación matemática, RELIME, Suma, UNO, etc., pero sobre todo los Handbook of mathematics

general o de psicología en general), sino sobre todo por el énfasis en lo especializado para la formación del profesor de matemáticas.

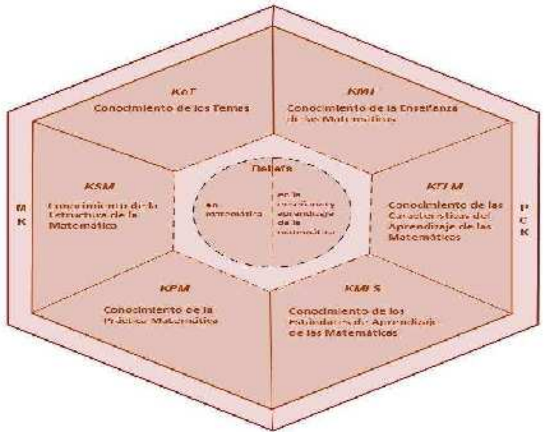


Figura 1. Modelo MTSK

Ahora bien, considerando que, en el caso de la Licenciatura en educación primaria de México, el maestro no sólo es maestro de matemáticas, como ya comentábamos en líneas anteriores, ¿en qué medida nos sirve este modelo para analizar críticamente los elementos de conocimiento del profesor presentes en los programas de estudio de matemáticas? De entrada, consideramos que sí es un buen referente sobre todo por los aspectos que en éste se contemplan y dado que sus mismos autores le han visto potencialidades cuando menos en tres escenarios: herramienta para reflexionar sobre el conocimiento propio, herramienta para investigar el conocimiento del profesor y herramienta para estructurar el contenido de la formación de profesores de matemáticas [es en este último sentido en que lo vamos a usar en esta ponencia; además de que coincidimos con Quiroga & Gamboa, (2017) en la utilidad que puede tener el modelo para actualizar los programas de formación de profesores de matemáticas].

¿En qué consiste el conocimiento especializado del profesor de matemáticas? ¿Qué componentes, dominios y subdominios puede/debe contener? De manera semejante a como lo precisaba (Shulman, 1987), el MTSK, como marco teórico para caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo, Montes, Contreras, & Climent, 2017), considera dos grandes dominios (figura 1): el Conocimiento matemático (MK), como disciplina científica que se utiliza por parte del docente en un contexto escolar; y el Conocimiento didáctico del contenido (PCK), que se refiere a los aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Estos dos dominios cuentan, a su vez, con subdominios. El MK se subdivide en Conocimiento de los temas matemáticos (KoT), se relaciona con el conocimiento que el docente tiene sobre los contenidos que desarrolla con sus alumnos, así como las relaciones intraconceptuales, por ejemplo, generalizar mediante la vinculación aritmética-álgebra; en este subdominio se consideran 4 categorías: Procedimientos (¿cómo se hace? ¿cuándo se puede hacer? ¿por qué se hace así? Y características del resultado); Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación; Fenomenología y aplicaciones. (Vasco, Moriel, & Contreras, 2017)

Conocimiento de la estructura matemática (KSM), contempla el conocimiento que le posibilita al profesor enseñar los temas matemáticos como fundamentación para su complejización posterior, es decir las conexiones con contenidos anteriores y posteriores. Se distinguen cuatro categorías: conexiones de complejización, conexiones de simplificación, conexiones transversales y conexiones auxiliares.

El tercer subdominio del dominio de conocimiento matemático es denominado *Conocimiento de la práctica matemática* (KPM), establece la relación entre el conocimiento de los temas matemáticos y los procedimientos y prácticas que se realizan para su construcción. Para este subdominio se han propuesto seis categorías: Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos; Formas de validación y demostración; Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal; Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas; Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación); y Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

En el dominio PCK se establecieron los subdominios: Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), respecto a las características de aprendizaje de los contenidos específicos de las matemáticas; Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT), se refiere a los recursos, materiales, estrategias didácticas y metodológicas respecto a cómo se presenta el contenido; y Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), que se enfoca a la intencionalidad y conocimiento del profesor sobre los niveles de logro y de desarrollo conceptual en los aprendizajes de los alumnos considerando el momento escolar determinado y su grado de desarrollo.

Metodología para el análisis

Como metodología para el análisis usamos el análisis de documentos en la tercera acepción utilizada por (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2010) como "documentos preparados por razones profesionales (reportes, libros, artículos periodísticos, correos electrónicos, etc.), cuya difusión es generalmente pública" dado que ese es el carácter que adquieren los programas de estudio oficiales, en el entendido que "sirven como sustitutos de registros de actividades que el investigador no puede observar directamente" (Stake, 1999, p.66).

Complementario a lo anterior usaremos tablas comparativas construidas a partir de dos de los elementos básicos de los cursos: unidades de aprendizaje y propósitos o competencias según corresponda, resaltando los dominios, subdominios y categorías del MTSK, a partir de la cual recuperaremos la información desde los programas de estudio ya mencionados.

Primer nivel de análisis: énfasis y coincidencias entre programas.

Al observar la tabla 1, correspondiente al primer curso de cada programa de estudios podemos notar algunas coincidencias pero a la vez algunas diferencias atribuidas principalmente al énfasis e importancia que a los cursos de matemáticas se le ha dado en éstos; hemos de aclarar que en el caso del Plan 1997 sólo se impartieron 2 cursos (Matemáticas y su enseñanza I y II) en toda la Licenciatura, mientras que en el 2012 se propusieron 4 cursos (Aritmética, su enseñanza y aprendizaje; Álgebra, su enseñanza y aprendizaje; Geometría, su enseñanza y aprendizaje; y Procesamiento de información estadística), y en el 2018 se están proponiendo 5 cursos (Aritmética, números naturales; Aritmética, números decimales y fracciones; Álgebra; Geometría; Probabilidad y estadística). En primera instancia parece un acierto el énfasis en la formación matemática, sobre todo porque, como podemos ver en los anteriores cursos, ante el reconocimiento de la cantidad de temas que puede requerir un profesor de matemáticas, se intentó ponerlos lo más apretados posibles con consecuencias poco afortunadas porque generalmente no se alcanzaron a cubrir los programas.

Tabla 1

Bloques de aprendizaje y/o unidades de aprendizaje de cada programa

Plan 1997: Matemáticas y su enseñanza I (SEP, 1997)	Plan 2012: Aritmética, su aprendizaje y enseñanza (SEP, 2012)	Plan 2018: Aritmética. Números naturales (SEP, 2018)
I. Aprender matemáticas al resolver problemas. II. Los números naturales y el sistema decimal de numeración. III. Las cuatro operaciones básicas con números naturales IV. La geometría.	I. De los números en contexto a su fundamentación conceptual II. Problemas de enseñanza relacionados con las operaciones aritméticas III. Aspectos didácticos y conceptuales de los números racionales y los números decimales IV. Desarrollo del razonamiento proporcional	I. La aritmética, su enseñanza y aprendizaje en el Plan y programas de estudio de educación primaria II. Estrategias de enseñanza y aprendizaje para el desarrollo del concepto de número y el sistema numérico decimal III. Estrategias de enseñanza y aprendizaje para el desarrollo del sentido numérico al resolver problemas de suma y resta con números naturales IV Estrategias de enseñanza y aprendizaje para el desarrollo del sentido numérico al resolver problemas de multiplicación y división con números naturales

En términos del KoT, podríamos decir que la principal coincidencia recae en dos temas: número y operaciones básicas; sobresale además el hecho de que aparece articulado el KoT con el KMT, sobre todo en el Plan 2018 con la denominación “Estrategias de enseñanza y aprendizaje para…”, al menos en la denominación, aunque de la propia experiencia hemos de decir que la articulación KoT – KPM siempre ha estado presente, sin embargo en las sugerencias explícitas de los programas esto no queda claro, es decir, es una tarea que se la dejan a los formadores de profesores.

Derivado de esa coincidencia, al revisar las sugerencias de actividades de los tres programas llama la atención el hecho de que en el Plan 2018 hicieron una recuperación de actividades de los planes anteriores, lo cual confirma la sospecha respecto a la falta de una visión específica sobre la formación inicial de profesores, e incluso nos atrevemos a decir que, al parecer, se intentan articular dos visiones que han estado en pugna: el enfoque de “situaciones problemáticas” y el “enfoque por competencias” (Cfr Tabla 3), con lo cual da la impresión que es más una decisión política, al término de un sexenio presidencial (los programas 2018 se publicaron en agosto de 2018 y el gobierno termina su periodo en diciembre del mismo año), que una decisión académica que recupere los avances de la investigación didáctica.

En la siguiente tabla presentamos un ejemplo de cómo se recuperaron actividades de los dos programas de estudio anteriores, para trabajarlas en el actual:

Tabla 2

Combinación de actividades entre programas de estudio

Plan 1997: Matemáticas y su enseñanza I (SEP, 1997)	Plan 2012: Aritmética, su aprendizaje y enseñanza (SEP, 2012)	Plan 2018: Aritmética. Números naturales (SEP, 2018)

	Revisar: Las propuestas de Cedillo, T,, Isoda, M,, Chalini, A., Cruz, V., Ramírez, M. E. y Vega, E. (2012): El 3: primer número natural para analizar pp. 38, 39 y 40. Conceptos de conteo, orden y números ordinales en Tomo I. pp. 8-25, 33. 64 -73. Tomo II, vol 1, pp. 18-19	
Resolver en equipos la actividad *"Aprendiendo a contar" (*pp. 34-39), del texto La *enseñanza de las matemáticas en la escuela primarla.* Taller para maestros. Primera parte, México, SEP.	Forma parte de… →	Analizar las propiedades de sistemas de numeración posicionales con diferentes bases y resuelva las actividades sugeridas en: Block, D. et. al. (1995). *Taller para maestros-. La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* Taller para maestros. Primera parte, México, SEP, pp. 33-61.

Lamentablemente no se recuperaron todas las actividades que dan cuenta del proceso de comprensión de una noción o concepto matemático (por ejemplo "número") en un intento por articular dos posicionamientos formativos.

2º nivel de análisis: Indicios y oportunidades para la construcción del MTSK.

Flores-Medrano (2015) menciona que los indicios de conocimiento permiten reconocer que se requiere de información amplia para convertirse en evidencia de conocimiento, por lo cual, se pueden traducir como sospechas; de igual manera, las oportunidades son las posibilidades que el diseño brinda para la construcción del conocimiento especializado.

De tal manera que, a partir de la consideración de que los propósitos o competencias específicas del curso definen su sentido, veamos cuáles elementos del MTSK se pueden apreciar:

Tabla 3

Propósitos o competencias en los diferentes programas de estudio

Plan 1997: Matemáticas y su enseñanza I. Propósitos	Plan 2012: Aritmética, su aprendizaje y enseñanza. Competencias	Plan 2018: Aritmética. Números naturales. Competencias
1. Consoliden el **conocimiento de los contenidos matemáticos** (KoT) fundamentales que se enseñan en la escuela primaria y **comprendan los distintos significados que adquieren** al aplicarlos a distintas situaciones y en la resolución de problemas. 2. Conozcan las **características del enfoque didáctico** para la enseñanza de las	1. Distingue las características de las propuestas teóricas metodológicas para la enseñanza de la aritmética en la escuela primaria con la finalidad de aplicarlas críticamente en su práctica profesional (KMT). 2. Identifica los principales obstáculos que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética (KFLM) en la escuela primaria y aplica este conocimiento en el diseño de ambientes	1. Conoce y analiza los conceptos y contenidos (KoT) del Programa de estudios de la educación básica de matemáticas (KMLS); crea actividades contextualizadas y pertinentes para asegurar el logro del aprendizaje de sus alumnos, la coherencia y la continuidad entre los distintos grados y niveles educativos (KSM). 2. Diseña escenarios (KPM) y experiencias de aprendizaje de

matemáticas (KMT) que enfatiza la **construcción de significados** a partir de la **resolución de situaciones problemáticas** (KPM) y lo comparen con el enfoque por "competencias". 3. Conozcan y apliquen elementos de **didáctica de las matemáticas** (KMT) para analizar situaciones de enseñanza y su relación con los procesos de aprendizaje de conocimientos matemáticos en los niños (KFLM).	de aprendizaje (KMT). 3. Relaciona los saberes aritméticos formales (KoT) con los contenidos del eje sentido numérico y pensamiento algebraico (KMLS) del plan y programas de estudio de educación primaria para diseñar ambientes de aprendizaje. 4. Usa las Tecnologías de la Información y la Comunicación (tic) como herramientas para la enseñanza y aprendizaje (KMT) en ambientes de resolución de problemas aritméticos (KPM). 5. Emplea la evaluación como instrumento para mejorar los niveles de desempeño de los alumnos de la escuela primaria en la resolución de problemas (KMT).	<u>las matemáticas</u> utilizando diversos recursos metodológicos y tecnológicos para favorecer la <u>educación inclusiva (KMT).</u> 3. Diseña y utiliza recursos y medios didácticos pertinentes para desarrollar el <u>sentido numérico en el aprendizaje de las matemáticas</u>, <u>acorde con los procesos de desarrollo cognitivo y socioemocional de los alumnos (KFLM)</u>. <u>4. Evalúa el aprendizaje de sus alumnos</u> empleando distintos enfoques, métodos e instrumentos considerando las áreas, campos y ámbitos de conocimiento, así como los saberes correspondientes al grado y nivel educativo (KMT). <u>5. Utiliza los resultados de la investigación</u> para profundizar en el conocimiento y los procesos de aprendizaje de sus alumnos (KFLM).

Si hacemos una síntesis de los subdominios del MTSK, a partir de la categorización que le aplicamos a los propósitos y/o competencias según el programa, encontramos que el Plan 1997 puso mayor énfasis en las estrategias de enseñanza (KMT), pero no hizo objeto de estudio el KSM, es decir, el conocimiento de la estructura de la matemática. Lo paradójico es que éste (KSM) se hace objeto de estudio en las actividades del Plan 2012, pero no aparece explicitado en las competencias a lograr.

El KoT presente con diferentes énfasis, en el Plan 97 centrado en el conocimiento de los contenidos de la educación básica; en el 2012 fue el centro de la atención (incluso a ello obedece la impartición del curso de Álgebra); y en el Plan 2018 aparece más equilibrado su conocimiento. El KMT también innegablemente está presente y en general, consideramos que cada uno de los subdominios va adquiriendo un lugar en las intencionalidades de los programas, sin embargo, el problema es que las orientaciones didácticas para los formadores de profesores no están claras, de tal manera que, para ejemplificar, el KSM está discursivamente presente en el plan 2018 cuando se firma "conoce y analiza los diferentes contenidos…asegurar el logro del aprendizaje de sus alumnos, la coherencia y la continuidad entre los <u>distintos grados y niveles educativos"</u> pero en la propuesta de actividades incluso retira bibliografía que desde el plan 2012 permitía lograr ese propósito.

Conclusiones

La formación inicial de profesores no puede estar librada sólo a las decisiones de política nacional, debe recuperar con seriedad los avances de la investigación didáctica, en concreto modelos de formación y desarrollo profesional (uno de los cuales es el MTSK) que contribuyan a consolidar el conocimiento especializado que mucha falta les está haciendo a los profesores; los efectos pendulares que se han estado presentando en México, no sólo dañan a la formación matemática de los nuevos profesores, sino que contribuyen a su descrédito.

Es innegable que el MTSK no resuelve todo el ámbito de la formación inicial de profesores de matemáticas para la educación primaria, sobre todo por el carácter generalista, pero sí contribuye a centrar la atención en aspectos muy puntuales: conocimiento disciplinario, conocimiento de la estructura de la matemática (aspecto muy poco considerado para la formación inicial), conocimientos para la enseñanza y de los procesos de aprendizaje de los niños, conocimiento curricular y por supuestos el conocimiento de las características de la práctica en matemáticas; la integración de estos elementos contribuirá a lograr una sólida formación docente inicial.

Referencias y bibliografía

Ball, D. L., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for teaching. *American educator*, 14-43.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. C., & Climent, N. (2017). El conocimiento del profesor desde una perspectiva basada en su especialización: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 22*, 185-206.

Courant, R., & Robbins, H. (1979). *¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos.* España: Aguilar.

Dreyfus, T., Artigue, M., Potari, D., Prediger, S., & Ruthven, K. (2018). *Developing Research in Mathematics Education. Twenty years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe.* England: Routledge-ERME.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).* Huelva: Tesis doctoral.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación.* México: McGraw Hill.

Llinares, S. (2018). Conocimiento, competencia docente del profesor de matemáticas y llegar a ser un formador de profesores. *Avances de Investigación en Educación Matemática. No. 13*, 1-121.

Quiroga, F., & Gamboa, M. (2017). Contribución del MTSK en la elaboración del plan de formación de profesores de matemática. En J. Carrillo, & L. C. Contreras, *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (págs. 125-130). Huelva: CGSE.

SEP. (1997). *Matemáticas y su enseñanza I* . México: Autor.

SEP. (2012). *Aritmética. Su aprendizaje y enseñanza.* México: Autor.

SEP. (2018). *Aritmética. Números naturales.* México: Autor.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard educational review No 57*, 1-22.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.

Vasco, D., Moriel, J., & Contreras, L. C. (2017). Subdominios del MTSK. KoT y KSM: definición, categorías y ejemplos. En J. Carrillo, & L. C. Contreras, *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la matemática de la Universidad de Huelva* (págs. 29-37). Huelva: CGSE.

Aprendiendo Topología como profesores de matemáticas en formación

Angie Lizeth **Galán** Cipagauta
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia – Bogotá
dma_algalanc834@pedagogica.edu.co
María Andrea del Pilar **Patiño** Cifuentes
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia – Bogotá
dma_mapatinoc954@pedagogica.edu.co
María Nubia **Soler** Álvarez
Universidad Pedagógica Nacional de Colombia
Colombia – Bogotá
nsoler@pedagogica.edu.co

Resumen

El póster que se presenta describe una ruta que dos estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional han seguido para aprender conceptos asociados a la topología. Debido a que la Topología tiene es un área de las matemáticas que resulta difícil de comprender para muchos estudiantes, por lo tanto, esta ruta contempla tres instancias, el estudio de objetos y conceptos matemáticos, el conocimiento de herramientas de GeoGebra -Software de Geometría Dinámica - y la socialización en eventos académicos de los avances en la comprensión.

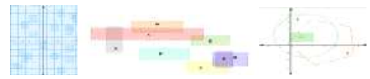
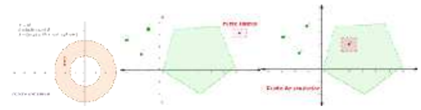
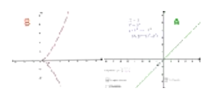
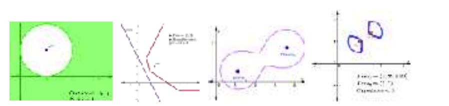
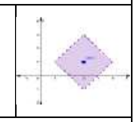
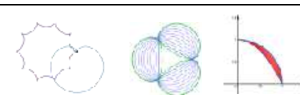
Palabras clave: Topología, GeoGebra, visualización, objetos matemáticos, ruta.

Introducción

En el póster se presenta una ruta seguida por dos estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional para comprender objetos matemáticos de topología (ver Tabla 1). En la medida en que se han estudiado objetos de la topología desde textos de matemáticas (Munkres (1975), Neira (2012), Rubiano (2002)), se han explorado y estudiado herramientas de GeoGebra, con el propósito de presentar ejemplos, haciendo énfasis en la visualización, que permitan la comprensión. La preparación de ponencias para participar en eventos ha logrado que se consolide el conocimiento sobre los objetos estudiados.

Tabla 1

Ruta seguida por estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas para aprender Topología

Ruta de conceptos	**Actividad / evento**	**Uso de GeoGebra**
Un vistazo a los elementos de una Topología	Taller / XXXIX Jornada del educador matemático en la UPN	 Los archivos permitían verificas las condiciones que requiere una colección para ser Topología
Un vistazo a puntos y conjuntos especiales de una topología	Ponencia / VII Simposio de matemática y educación matemática y VI congreso internacional de matemática asistida por computador en la UAN	 Los archivos permitían visualizar los puntos especiales de una Topología en distintos conjuntos
Un vistazo a imágenes directa y reciproca de funciones	Taller / XL Jornada del educador matemático en la UPN	  Reconocer la imagen directa y reciproca para la conceptualización de función continua
Un vistazo a las secciones cónicas	Poster / IV encuentro distrital de educación matemática en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas	  Observar la forma de bolas abiertas, si se cambia de la definición de distancia
Apoyo de GeoGebra para la conceptualización de Topología	Taller virtual en Moodle / 3^{er} Congreso internacional de matemática educativa	 Se recopilo el trabajo realizado por el momento
Conceptos básicos de Topología Algebraica ejemplos usando GeoGebra	Taller / XLI Jornada del educador matemático en la UPN	 Visualizar las transformaciones de funciones
Topología algebraica: Homotopías, caminos y multiplicación de caminos	Trabajo de grado	 Los archivos permiten una mayor compresión de los conceptos que aborda la Topología Algebraica

Bibliografía y referencias

Munkres, J. R. (1975). *Topology: a first course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.

Neira, C. M. (2012) *Topología General*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Hohenwarter. M., & Preiner, J. (March 2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra, *Journal of online mathematics and its aplications*, (7). Recuperado de https://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html

Rubiano, G. (2002). *Topología*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Rubiano, G. N. (2007). *Topología Algebraica*. Bogotá, Colombia: Univirsidad Nacional de Colombia.

Límites de funciones en una variable y principales dificultades conceptuales de estudiantes en formación inicial

Cristian **Quesada** Fernández
Universidad Estatal A Distancia
Costa Rica
cquesadaf@uned.ac.cr
Eric **Padilla** Mora
Universidad Estatal A Distancia
Costa Rica
epadilla@uned.ac.cr

Resumen

Estudios realizados en el contexto de educación presencial, y relacionados con el aprendizaje de la teoría de límites de funciones, señalan que los estudiantes enfrentan diversos obstáculos; sin embargo, hay una carencia de información entorno a esta temática en educación a distancia, en particular con estudiantes de carreras de formación docente. Este trabajo muestra una síntesis de un estudio realizado con el propósito de determinar y analizar las dificultades conceptuales que afrontan los estudiantes, en formación inicial de Enseñanza de la Matemática, en las pruebas escritas de cálculo diferencial en la UNED, Costa Rica. Se realizó una categorización y análisis detallado de las dificultades encontradas y los resultados evidencian dificultades conceptuales así como con el uso incorrecto de simbología matemática. Con este estudio se pretende mejorar los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje de los contenidos y buscar la mejora en el rendimiento académico de los estudiantes.

Palabras clave: obstáculo, dificultades de aprendizaje, cálculo, educación a distancia, límites de una función.

Introducción

Un tema fundamental en el análisis matemático y cimiento sobre el cual se sostiene toda una estructura que da pie al desarrollo de contenidos como: continuidad, derivación e integración, corresponde a la teoría de límites de funciones. No obstante, el desarrollo y comprensión de dicho concepto, desde sus orígenes, produjo mucha dificultad, tal como lo señala Mira (2016) al indicar que

> El proceso de refinamiento del concepto de límite fue difícil para los científicos de la época dada la profundidad del mismo por su auténtica naturaleza y porque

requiere una precisión de pensamiento y una percepción del sistema de los números reales que no era fácil de conseguir (p.7).

Por su parte, Blázquez y Ortega (2000) señalan que dicha temática acarrea quizá la mayor cantidad de dificultades en su aprendizaje, las cuales están ligadas propiamente al concepto, el cual para muchos de los estudiantes, según los autores, es "árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que olvidan totalmente con demasiada facilidad y, en suma, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender" (p.1).

Los diversos estudios realizados con el fin de analizar las dificultades y errores en torno al tema límites de funciones, generalmente, se han realizado con estudiantes de carreras universitarias no matemáticas y en contextos en los cuales los procesos de enseñanza y de aprendizaje son presenciales, como los de Claros (2010), García (2013), Neira (2013), Pons, Valls y Llinares (2012), Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas (2006), entre otros; y señalan que las dificultades podrían estar relacionadas con obstáculos de origen didáctico, producto de la forma en la cual se enseña, o quizá porque la comprensión de este concepto implica procesos poco utilizados por los estudiantes como: el uso consciente y adecuado de simbolismo, la abstracción, el análisis y en algunos casos la demostración, aunado a los problemas generados con el término límite y su poca relación con los contextos coloquiales, lo cual provoca que cuando el estudiante debe afrontar la solución de situaciones que requieran un mayor manejo conceptual cometa más errores (Selden, Mason y Selden, 1994).

Ahora bien ¿Qué sucede cuando dichos procesos se dan en una educación a distancia? con estudiantes en formación de enseñanza de la Matemática, tal como ocurre en la Universidad Estatal a Distancia (UNED), de Costa Rica, con la asignatura: Cálculo Diferencial.

En dicha asignatura se aborda los temas: límites, continuidad, derivación y aplicaciones de la derivada; se imparte bajo un modelo de educación a distancia, donde se mezclan actividades presenciales con actividades en línea. Como parte de la evaluación, el estudiante debe realizar dos pruebas escritas de manera presencial, así como actividades obligatorias mediante la plataforma de aprendizaje Moodle (pruebas cortas en línea, tareas y un taller de aplicación con software especializado). El estudiante puede asistir a tutorías presenciales no obligatorias, además tiene acceso a un foro de consultas a través del entorno virtual del estudiante.

En los últimos años, la asignatura ha presentado un número elevado de estudiantes que la pierden o la retiran. Por ejemplo en el III cuatrimestre del 2017, perdió 41,9% y se retiró 19,4%, lo cual da una aprobación de 38,7%.

Además, durante el proceso de revisión o calificación de los instrumentos de evaluación se nota que los estudiantes evidencian diversas dificultades, los cuales están relacionados con: conocimientos previos, el uso inapropiado de simbología y con la naturaleza del contenido (obstáculos epistemológicos). Esto condujo al desarrollo de un proceso investigativo cuyo objetivo principal fue analizar las dificultades conceptuales en las que incurren los estudiantes en las pruebas escritas de dicha asignatura y relacionados con el tema: límite de una función en una variable.

Con los resultados obtenidos se pretende contribuir con la toma de decisiones que permitan favorecer los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje de dichos contenidos, al proponer alternativas para solucionarlos y por ende lograr que los estudiantes puedan comprenderlos y así mejorar el rendimiento académico.

Marco referencial

La teoría relacionada a obstáculos ha sido ampliamente abordada por diversos autores. Brousseau (1983, citado por Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos, s.f.) indica:

- Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento. El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas a un cierto contexto que encuentra con frecuencia. Cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigirá un punto de vista diferente.
- El alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
- Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo, de forma esporádica (pp.2-3).

Además, Brousseau identifica tres tipos de obstáculos: ontogénicos, didácticos y epistemológicos. En relación a estos últimos, Bachelard (1976) los define como las limitaciones o impedimentos que afectan la capacidad de los individuos para construir su conocimiento. Al respecto, este autor identifica cinco obstáculos principales: los conocimientos previos, el verbal, el peligro de la explicación por la utilidad, el conocimiento general y el animista. Cabe señalar que los epistemológicos se presentan en diversos campos del quehacer matemático; el cálculo no es la excepción. Se muestra a continuación algunas posturas entorno a las dificultades relacionadas con el estudio de límites.

Primero, resulta pertinente destacar que la noción de límite fue abordada por distintas culturas en diversos sitios del planeta. Se tienen registros de civilizaciones egipcias y griegas. El método de exhausión, fue utilizado para calcular longitud de curvas, áreas y volúmenes de figuras geométricas, procesos en los cuales la noción de límite era tácita (Volveras, 2015). Grandes matemáticos como Kepler, Cavalieri y Fermat, entre otros, hicieron grandes aportes al desarrollo del concepto de límite, y por ende al desarrollo del análisis infinitesimal. Entre los más destacados están los aportes de Isaac Newton en el desarrollo de series infinitas, así como el aporte de Leibniz al introducir una notación y terminología más formal la cual permitió una mejor lectura en la resolución de problemas.

Lo anterior pone en manifiesto que históricamente el estudio del concepto de límites ha revertido distintos obstáculos, ligados estrechamente a su concepto y sus representaciones. Se coincide con Volveras (2015) en que tanto el lenguaje matemático, como el contexto y las distintas representaciones tienen una fuerte influencia sobre la concepción del infinito y los razonamientos alrededor de este concepto.

Con el estudio de límites, se hace pertinente que los estudiantes logren determinarlos, reconocerlos tanto de forma gráfica como algebraica, haciendo uso de tablas, representaciones en el plano cartesiano, así como de manera verbal. En todos estos escenarios, es recurrente la aparición de errores por parte de los estudiantes. Cornu (1983, citado por Vrancken, Gregorini, Engler, Müller y Hecklein, s.f.) señala algunos obstáculos epistemológicos que afrontan los estudiantes. El primero, relacionado al sentido común de la palabra límite, que induce a concepciones relacionadas a muro o barrera insuperable. Segundo, la sobregeneralización que se hace de las propiedades de procesos finitos a los infinitos. Además, un aspecto ligado a la noción de infinito, que induce a una nueva manera de razonamiento. Finalmente, en esta misma línea, los conceptos infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas.

En cuanto a las dificultades que presenta el concepto de límite Tall (s.f., citado por Claros, 2010) señala: dificultades producidas por el lenguaje, la imposibilidad de transformar el cálculo de cualquier límite en una simple operación algebraica o aritmética y la idea de si el límite es alcanzado o no genera dificultades, así como el paso de lo finito a lo infinito tiende a confundir. Por su parte Fernández (2010, citado por La Plata, 2014) señala

- Dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto.
- Dificultades para reconocer los límites laterales.
- Dificultades para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución.
- Problemas con el uso de diferentes representaciones de las funciones.
- Dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario (p.8).

En suma, durante las últimas décadas, el estudio de obstáculos ha sido ampliamente abordado por diversos estudiosos. No obstante, todos ellos hacen mención al modelo de educación presencial tradicional. La bibliografía en torno a esta temática en el modelo a distancia es prácticamente nula, por ello, resulta pertinente el estudio bajo la modalidad a distancia.

En esta línea, se destaca que la asignatura Cálculo Diferencial, atiende al modelo pedagógico de la UNED el cual busca aplicar didácticas flexibles donde el estudiante sea el principal protagonista del proceso de aprendizaje, al respecto se indica que

> debe permitirle, a éste, la libertad de aprovechar al máximo los recursos que se le ofrecen, de planificar el progreso de su aprendizaje y de regular, él mismo, el ritmo y la calidad de sus avances. Esto implica que todos los elementos del modelo pedagógico se piensen para ponerlos a disposición de los estudiantes, de manera que ellos puedan gestionar su propio proceso de formación (UNED, 2005, p.13).

Metodología

El estudio realizado es de carácter descriptivo, y se tomó como referencia los estudiantes de la asignatura cálculo diferencial de la carrera enseñanza de la matemática en la UNED, que aplicaron la primera prueba escrita ordinaria del III cuatrimestre del 2017. La muestra estuvo conformada por 20 estudiantes con la misma cantidad de hombres que mujeres. La edad promedio de la muestra fue de 33 años con una desviación estándar de 7,68 años.

En este estudio se analizaron tres categorías: la dificultad de formalismo simbólico, la dificultad de argumentación y la dificultad conceptual. Por tanto, con el fin de evitar ambigüedades, se procedió a definirlos, lo cual se muestra en la tabla 1:

Tabla 1

Tipo de dificultad y su definición

Dificultad	**Definición**

Conceptual.	Las dificultades conceptuales corresponden a • Aplicar el procedimiento tal como es requerido por el concepto, pero comete errores al ejecutar los pasos necesarios. Por ejemplo, evalúa o realiza el análisis correcto del límite pero los procedimientos empleados son incorrectos. • No justificar de forma clara, en caso de existir, el tipo de indeterminación que se presenta. • Confundir una indeterminación con la forma indefinida. • Interpretar de forma incorrecta expresiones como $\infty-\infty$ y $\frac{0}{0}$, entre otras. • Plantear de forma incorrecta e incompleta las condiciones iniciales de la definición.
De argumentación.	Cuando en el proceso de solución los argumentos empleados no son claros, el razonamiento no conlleva una lógica o la explicación carece de sentido.
En el uso de simbología.	Cuando en el proceso de solución se omite o se emplea de forma incorrecta algún símbolo o expresión matemática.

Fuente: elaboración propia.

Al trabajar con los objetivos relacionados con el cálculo de límites; se consideraron las soluciones dadas a los ejercicios tanto en la parte de respuesta breve como en la de desarrollo. En la tabla 2 se muestra la relación entre objetivo e ítem. En total se analizaron 6 ejercicios.

Tabla 2
Relación objetivo-ítem respecto a los instrumentos

Objetivo	**Ítem en la prueba**
Calcular límites de funciones que presenten indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ o $\infty-\infty$ usando factorización, simplificación o racionalización.	RB (1a) RB (1b)
Aplicar los teoremas básicos de límites en la resolución de ejercicios y problemas.	RB3
Demostrar, usando la definición formal, que $\lim_{x\to a} f(x)=l$ existe.	D1
Aplicar los límites trigonométricos especiales en el cálculo de límites de funciones trigonométricas que producen formas indeterminadas del tipo $\frac{0}{0}$.	RB (1c) D2
Simbología **RB**: corresponde a los ítems de respuesta breve de la prueba escrita. **D**: corresponde a los ítems de desarrollo.	

Fuente: instrumento de evaluación aplicado a estudiantes y diseño curricular de curso.

Análisis y discusión de resultados

Tomando como referencia el objetivo propuesto, para el análisis de los instrumentos, se diseñó lo mostrado en la tabla 3 y posteriormente se procedió a completarla.

Tabla 3

Frecuencia relativa de los ítems analizados respecto a los criterios

Criterio	RB(1a)	RB(1b)	RB(1c)	RB3	D1	D2
1. Hay evidencia que permita asegurar que intentó resolver el ejercicio.	1,00	1,00	0,85	0,80	1,00	0,95
2. Resuelve solo algunos pasos del ejercicio.	0,15	0,05	0,25	0,00	0,30	0,10
3. Se evidencia que tiene claro el procedimiento que debe realizar.	0,65	0,50	0,45	0,25	0,80	0,65
4. Justifica de forma clara, en caso de existir, el tipo de indeterminación generada.	0,35	0,10	0,25	na	na	0,20
5. Resuelve el ejercicio hasta obtener el resultado final.	0,85	0,95	0,30	0,55	0,65	0,50
6. El resultado final es correcto.	0,45	0,35	0,30	0,25	0,60	0,35
7. Utiliza el teorema de intercalación.	na	na	na	0,30	na	na
8. En la solución sus argumentos conllevan errores de razonamiento, justificaciones inadecuadas o explicaciones sin sentido.	0,85	0,60	0,45	0,65	0,55	0,70
9. Omite o confunde el uso de la simbología correspondiente durante la resolución del ejercicio.	0,50	0,45	0,30	0,25	0,50	0,35
10. Se evidencia una estructura de orden en la solución del ejercicio.	0,80	0,80	0,25	0,45	0,70	0,20
11. Plantea, de forma correcta y completa, las condiciones iniciales de la definición de límite.	na	na	na	na	0,55	na
12. Encuentra el delta y es correcto.	na	na	na	na	0,60	na
13. Prueba que el delta obtenido funciona.	na	na	na	na	0,60	na

Simbología

RB: corresponde a los ítems de respuesta breve en la prueba escrita.

D: corresponde a los ítems de desarrollo en la prueba escita.

na: no aplica.

Fuente: solución brindada por los estudiantes en el instrumento de evaluación. III cuatrimestre 2017.

De acuerdo con los resultados de la tabla anterior se puede inferir que

a) Por lo general, los estudiantes intentan resolver el ejercicio aunque no tengan claro que es lo que deben hacer.
b) En el cálculo de límites, cuando existe alguna indeterminación, los estudiantes no justifican ni brindan argumentos claros que permita concluir que comprenden el tipo de indeterminación que se presenta. Además, de forma mecánica el estudiante realiza algún procedimiento (racionaliza, factoriza, sustituye, etc.) según la forma que tiene el criterio de la función, sin saber si es requerido o no dicho procedimiento.
c) Respeto al cálculo de límites haciendo uso del teorema de intercalación, aunque en el ejercicio se les indicó que era a partir de su uso solo 30% de los estudiantes lo utilizó. Además, no tienen claro el porqué es necesario emplear dicho teorema y su relación con el

criterio de la función y el valor al cual tiende la variable, lo cual puede denotar dificultad en la comprensión de la teoría estudiada y su aplicación en la resolución de ejercicios y problemas. En este mismo ítem, algunos estudiantes trataron de calcular límites laterales, cuando esto no se podía aplicar ya que la variable tendía a infinito. Cabe destacar que en la resolución de este ítem se requiere ser muy metódico, ordenado y estructurado, algo que solo el 35% de los estudiantes evidencia, y el 25% tiene una idea clara de lo que debe realizar.

d) En cuanto al cálculo de límites por definición (cálculo de $\delta-\varepsilon$), de los ítems analizados, es el que mejor aprobación tiene, con un 60%; esto hace pensar que se debe a una buena comprensión de la definición formal de límite por parte de los estudiantes, o bien, por preparación para resolver este tipo de preguntas (repetición dado que es un ejercicio que se incluye en la mayoría de las pruebas escritas). No obstante, al contrastar el rendimiento mostrado en este ítem con otros donde se deben calcular límites específicos, se nota poca comprensión del concepto, lo cual inclina la balanza hacia que el estudiante presume que practican con regularidad la resolución de este tipo de problemas.
Además, en este ítem se evidencia la importancia de una estructura de orden, y 90% trabajó de esa manera.

e) Los estudiantes omiten o confunden el uso de la simbología correspondiente, es común que no escriban la expresión $\lim\limits_{x\to a}$ o bien utilizan el igual cuando en realidad lo de que deben emplear es el implica o el sí y solo sí. Algunos ejemplos de lo realizado por los estudiantes se muestra a continuación

▪ $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x=\sqrt{x^2+3x}-x\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+3x}+x}{\sqrt{x^2+3x}+x}$	Olvida la expresión $\lim\limits_{x\to\infty}$.
▪ $\left\|x^2+3x+1-55\right\|<\varepsilon=\left\|x^2+3x+54\right\|<\varepsilon$	Uso incorrecto del igual.
▪ $-1<\dfrac{senx}{x+2}<1$ $\lim\dfrac{-1}{x+2}<senx<\lim\dfrac{1}{x+2}$	No hay claridad en el procedimiento por falta de la simbología respectiva.

f) En la solución sus argumentos conllevan errores de razonamiento, justificaciones inadecuadas o explicaciones sin sentido. Ejemplos de lo realizado por estudiantes, en ciertos cálculos, se muestra a continuación

▪ $\lim\limits_{x\to\infty}\infty(0)=\infty$	▪ $\lim\limits_{x\to\infty}\underbrace{x-x}_{\infty-\infty}=0$
▪ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}}{x+2+\sqrt[3]{x}}=\dfrac{0}{\infty}=0$	▪ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{3}{x}-1\right)}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+1}=\dfrac{\infty\cdot 0}{2}=\dfrac{0}{2}=0$

Conclusiones y recomendaciones

El objetivo planteado para este estudio fue alcanzado; fue posible determinar y analizar las principales dificultades conceptuales en que incurren los estudiantes, en formación de Enseñanza de la Matemática, en las pruebas escritas de cálculo diferencial. Los resultados evidencian además de errores de tipo simbólico y algebraico, dificultades relacionadas estrechamente al concepto de límite; al comparar los desarrollos de los estudiantes, parece indicar que ellos aplican la definición de límite de manera mecánica, sin embargo, la misma no es interiorizada o comprendida correctamente, ya que en ejercicios donde deben calcular un límite no se evidencia esta comprensión, dado los errores de argumentación encontrados. Además, se denota dificultades en el uso de teoremas específicos del área.

Se considera importante realizar un estudio en el cual se apliquen técnicas más de corte cualitativo para así analizar otros aspectos relacionados con el accionar de los estudiantes durante el proceso de resolución de los ejercicios. Para ello sería conveniente, con base en los resultados obtenidos en este estudio, focalizar el tipo de dificultar por analizar a profundidad y por tanto seleccionar y adecuar el tipo de ejercicio que se estudiará.

Es oportuno en los cursos iniciales establecer mecanismos para reconocer los errores en que están incurriendo los estudiantes, detectar las posibles causas y se logre crear estrategias de solución a los mismos, de manera que las dificultades presentadas sean subsanadas y no se arrastren a cursos de corte superior. Cabe destacar que el Modelo Pedagógico de la UNED, está centrado en el estudiante al cual le da la libertad de aprovechar al máximo los recursos, de planificar el progreso de su aprendizaje y de regular su ritmo y la calidad de sus avances (UNED, 2005). Por tanto, se visualiza al estudiante como un sujeto activo y participativo, capaz de autorregular y autoevaluar su propio aprendizaje; ante esto, la metodología de las asignaturas debe propiciar que el estudiante sea capaz de construir su propio conocimiento.

Finalmente, es pertinente que los estudiantes puedan conocer los resultados de este tipo de investigaciones con el fin que intenten conocer los tipos de errores más frecuentes y así evitar que se sigan presentado, con ellos se pretende mejorar los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje de dichos contenidos y por ende lograr que los estudiantes puedan comprenderlos y mejorar su rendimiento académico.

Bibliografía y referencias

Batanero, C. Godino, J. Green, R. Holmes, P. Vallecillos, A. (s.f.). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. **Recuperado de www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/erroresestadis.doc**

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). *El concepto de límite en la educación secundaria. En El futuro del cálculo infinitesimal*. Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V. ISBN: 970-625-246-0. México.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S y Benegas, J. (2006). *Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad*. Recuperado de: **http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362006000200002**

Claros, F. (2010). Límite Finito de un Sucesión: Fenómeno que organiza. Tesis Doctoral. Recuperado de: **http://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/5663/18909772.pdf?sequence=1&isAllowed=y**

García, J. (2013). *La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería*. Recuperado de: **http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44028564002**

La Plata, C. (2014). *Errores entorno a la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real*. Tesis de maestría. Pontificia Universidad de Perú

Mira, M. (2016). *Desarrollo de la comprensión del concepto de límite de una función. Características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje*. Tesis doctoral. Universidad de Alicante.

Neira, G. (2013). *Dificultades detectadas al pasar del álgebra al cálculo en educación Matemática*. Recuperado de: **https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4817228**

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). *Características de la tematización del esquema de límite de una función*. Recuperado de: **https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5065976**

Selden, J., Mason, A. y Selden, A. (1994). *Even good calculus students can´t solve non-routine problems* [Incluso los buenos estudiantes de cálculo no pueden resolver problemas no rutinarios]. Recuperado de **https://www.researchgate.net/publication/313667340_Even_good_calculus_students_can%27t_solve_nonroutine_problems**

UNED. (2005). *Modelo Pedagógico*. Recuperado de **https://www.uned.ac.cr/academica/images/igesca/materiales/24.pdf**

Volveras, A. (2015). *Propuesta didáctica para la enseñanza de límites de funciones en el grado de undécimo de la I.E. El Rosario integrando Geogebra*. Trabajo de grado para optar por el título Magister en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia.

Vrancken, S, Gregorini, M, Engler, A, Müller, D y Hecklein, M. (s.f.). *Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite*. Recuperado de **http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf**

Formación de docentes sordos para una Educación Matemática Especialmente Inclusiva (EMEI)

Angélica María **Martínez**
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Venezuela
angelicmar5@gmail.com
Fredy **González**
Universidade Federal De Rio Grande Do Norte, Brasil
fredygonzalezdem@gmail.com

Resumen

Gracias a la visión de una Educación Inclusiva, el acceso de personas sordas a la escolaridad constituye la posibilidad de culminar estudios superiores como ocurre con quienes ingresan a la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), núcleo Maracay de Venezuela para graduarse como docentes. Como parte de un estudio cualitativo de carácter doctoral emergió la posibilidad de desarrollar actividades con futuros docentes sordos para socializar, conceptualizar y comunicar contenidos matemáticos desde la concepción de una Educación Matemática Especialmente Inclusiva (EMEI) con el propósito de encaminar alternativas en los procesos de su formación docente. Para esto se realizaron entrevistas a dos estudiantes sordos quienes durante dos jornadas participaron y fueron asesorados por la docente-investigadora llegando a conceptualizar y conformar señas en torno a la multiplicación y al uso de las regletas de Napier.

Palabras clave: formación docente, sordo, educación matemática, educación especial, educación inclusiva.

Introducción

Como parte de un estudio de carácter doctoral, cuya evolución puede sintetizarse como una visión integradora entre tres componentes: la formación docente (ya sea porque se gradúa como profesor de matemática o porque es profesor de Educación Especial), el requerimiento de un contenido matemático adaptado, y la especificidad de unos procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática (cónsonos con las necesidades de sus educandos en aulas inclusivas), se presenta a través de esta comunicación la experiencia desarrollada con futuros docentes sordos al socializar, conceptualizar y comunicar contenidos matemáticos desde la concepción de una Educación Matemática Especialmente Inclusiva (EMEI), entendida como un campo disciplinar de convergencia sinérgica entre Educación Inclusiva (EI), Educación Especial (EE) y Educación

Matemática (EM), en cuyo contexto los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática han de ser gestionados por un docente que posea una formación específica que incluya cuestiones generales de la Educación Inclusiva y la Educación Especial, así como las vinculadas con los ámbitos de saberes del profesor que enseña Matemática

La experiencia surge con el propósito de encaminar alternativas en los procesos de formación docente de aquellos estudiantes universitarios sordos que deberán enseñar contenidos matemáticos, tal como sucede con los egresados de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), núcleo Maracay de Venezuela, donde su título profesional no les exime de trabajar sólo dentro de su comunidad y que desde las asignaturas de Matemática recibidas durante su carrera no necesariamente ahondan los temas propios de esta área del conocimiento.

Como la investigación fue de carácter cualitativo, se realizaron entrevistas a dos estudiantes universitarios próximos a graduarse en la Especialidad de Educación Especial de tal manera que se pudieran acuñar señas para contenidos matemáticos a partir del intercambio y reflexión de la concepción que tienen de ellos, pero para presentar la comunicación se tomará en cuenta la discapacidad auditiva, la comunidad sorda, la lengua de señas, lo metodológico, la información recabada y las conclusiones.

Una breve caracterización de la discapacidad auditiva y Comunidad Sorda

En consideración a lo dicho por la OMS (2001), la discapacidad auditiva físico sensorial se vincula con el sentido del oído en cuanto a verse afectada su función sensorial de percepción de los sonidos, de discriminar la localización de fuentes sonoras, su tono, volumen o calidad; es decir, al presentarse dificultades o pérdida de la captación de sensaciones asociadas con la audición o posibilidad de escuchar, lo cual influye en la comunicación, en procesos de aprendizaje, interacciones socioculturales diferenciadas y en el tipo de información que percibe.

Para determinar la capacidad auditiva de una persona, se debe considerar cómo se da la recepción del sonido, lo cual implica conocer la anatomía de cada oído (y hacer un estudio audiológico detallado para evaluar sus partes, como también del discernimiento de la persona al escuchar palabras o discriminar variadas fuentes emisoras de sonido, realizando métodos como la logoaudiometría y la audiometría. Todos estos métodos se consideran de orden clínico, pero tomando la discapacidad en relación a las situaciones extrínsecas del individuo, a cómo se relaciona socialmente, interesa asumir esta condición desde el punto de vista comunicativo, por lo poco o nada que puede escuchar, teniéndose el caso de hipoacúsico y sordo, pero enfatizando que las personas sordas conforman un grupo social, con su propia cultura y que se encuentra inmerso geográficamente en un país; en el caso de Venezuela, como en muchas otros países conforma un grupo minoritario si le compara con el resto de personas que lo rodean.

Por lo anterior, se puede hablar de cultura sorda, manifestada según Morales (2008) “durante todo el tiempo en que las personas Sordas han formado comunidades” (p. 19), y que refleja una forma particular de relacionarse, de entender el mundo, porque son los mismos sordos quienes conforman vivencias, sentimientos, maneras de encarar la vida, en tal caso diferente a como lo hacen los oyentes; pero que además poseen una lengua cuyo código “ofrece todas las posibilidades de expresión tales como: contar chistes, discutir, narrar, argumentar, persuadir, informar, enamorar, describir y exhibir todos los matices lingüísticos de cualquier lengua natural” (ob. cit., p. 17).

Algunas características de la lengua de señas y su uso en contenidos matemáticos

Entre las características de la lengua de señas está el hecho de que no es universal porque se desarrolla de modo independiente conforme a los códigos asignados por los grupos o comunidades sordas de cada país; agregado, se le da el carácter de lengua y no de lenguaje, porque como lo dice Oviedo (2009), el lenguaje es la capacidad que tiene el ser humano para comunicarse a través de sistemas lingüísticos que son las lenguas (o en tal caso idiomas). Mientras que el calificativo de seña está dado como adjetivo que le designa su característica viso-espacial, pero además por el modo en el cual los mismos sordos la califican como “señar o hacer señas” (Oviedo, Rumbos y Pérez, 2004). En Venezuela, la conjugación de lengua y seña, llevó a nombrar al sistema de comunicación viso-espacial utilizado por la comunidad de Sordos venezolanos como Lengua de Señas Venezolana (de acá en adelante LSV).

Como parte de los estudios lingüísticos sobre la lengua de señas, el trabajo de William Stokoe permitió la posibilidad de analizar lingüísticamente las señas de los sordos, reconociendo en ellas partes constitutivas que no poseen significado en sí mismas, tal como ocurre por ejemplo en el español cuando deletreamos una palabra. Pero además, como lo afirma Oviedo (2001) se comprobó que seguían patrones de organización cuyo esquema de análisis se fue perfeccionando con los estudios de otros lingüistas como S.K. Lindell a partir de 1984.

Se destaca además, que la lengua de señas usa como canal de expresión y comprensión respectivamente cuerpo, manos y lugar por una parte y la visión por otra, considerándola una lengua tridimensional porque se articula ya sea secuencial, simultánea y espacialmente. En cuanto a la configuración manual, en ella intervienen tanto movimiento como uso del espacio que generan matices diferenciadores como ocurre con cualquier otra lengua, permitiendo la descripción de sus componentes fonológico, morfológico, sintáctico, semántico y pragmático, que a su vez difieren de la gramática del español, como también de la glosa o español señado.

Con el propósito de resumir la descripción lingüística de la seña, se toma en especial las referencias de Oviedo (2001), Pérez (2008) y, Barojas y Garnica (2017), para conformar su estructura en tres componentes mayores que se dividen en segmentos secuenciales y luego en rasgos, considerando: Postura de la mano (PM): relacionada al modo en que se coloca y acciona cada mano y expresada en una matriz articulatoria (posee como componentes Configuración de la Mano (CM), Ubicación (UM), Orientación (OR)), Actividad de la mano (AM): relacionada con si hay movimiento o no de la mano, si se da algún contacto o la trayectoria del movimiento, y descrita en una matriz segmental (compuesta por Movimiento (M), Detención (D) y Transición (T)), y Actividad no manual (ANM) o Rasgos no manuales: formada por rasgos que describen “la actividad significativa de los articuladores de la cara (boca, cejas, ojos), los movimientos de la cabeza y del cuerpo” (Oviedo, 2001, p. 64).

En cuanto al uso de las manos, vale destacar que en la articulación de la seña puede intervenir una sola (por lo que se le dirá seña unimanual) o ambas (seña bimanual). Del tipo de señas unimanuales se encuentran las que forman las letras del abecedario, por tal razón al conformar el alfabeto de este modo se le llama alfabeto unimanual o dactilología figurativa (esto por su similitud con la grafía de las letras).

Para uso de señas en contenidos matemáticos, se tienen aquellas relacionadas con aspectos básicos como la conformación numérica donde intervienen una o dos manos, como en el caso de la LSV los dígitos del cero al cinco se hacen con la mano derecha y luego del seis al nueve con ambas, como puede notarse a través de la Figura 1.

Figura 1. Señas para los números del 0 al 9. Imágenes tomadas de Centeno, 2011

Muchas de estas señas no han tenido en Venezuela un registro sistematizado, sobre todo causa curiosidad porque al encontrar algún referente al respecto se tiene el trabajo de Alejandro Oviedo titulado *Apuntes para una gramática de la Lengua de Señas Colombiana*, donde se describen los segmentos y rasgos que hacen parte del aspecto fonológico de las señas y en particular aparece ejemplificada con su transcripción de códigos visuales el caso de la seña de los números dos, cinco y veinticinco expresadas en su convención secuencial como se muestra en la Figura 2, pero no hay ningún otro caso presente ni mucho menos se cuenta con un texto similar para nuestro país, lo cual indica cuánto falta por hacer para seguir su estudio y registro. Esto constituyó un agregado adicional para tratar el tema que se presenta en este comunicado y aportar algún avance en su conformación.

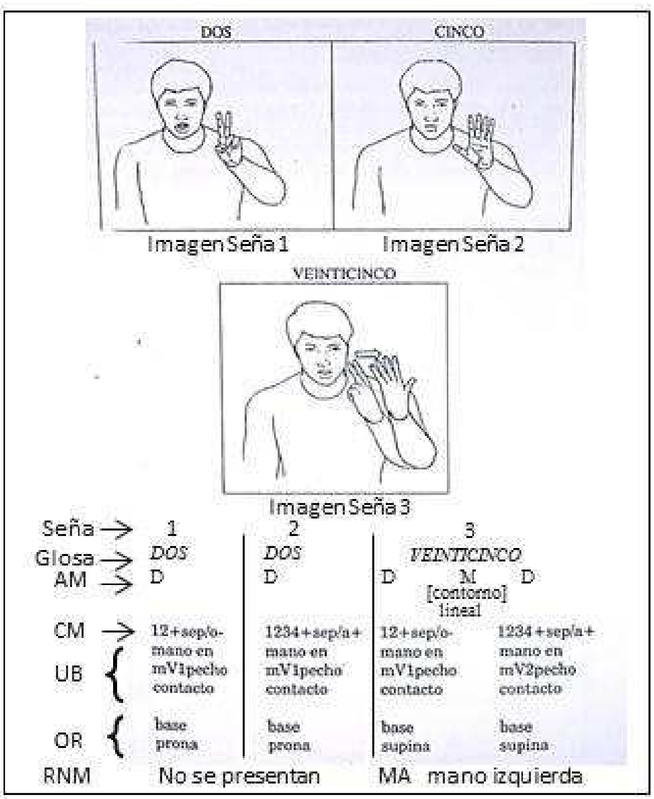


Figura 2. Descripción en rasgos fonológicos de las señas para los números 2, 5 y 25. Elaborado a partir de imágenes tomadas de Apuntes para una gramática de la Lengua de Señas Colombiana por Oviedo (2001)

Sobre el proceso metodológico

Metodológicamente la información se obtuvo a partir de entrevistas realizadas a dos estudiantes sordos próximos a graduarse como profesores de Educación Especial, con la finalidad por una parte de tomar testimonio oral sobre sus vidas y experiencias escolares, en particular sobre los contenidos matemáticos que llegaron a estudiar en años escolares previo a su ingreso a la universidad; y por otra, hacer el registro de señas para las propiedades de la multiplicación y el uso de materiales didácticos como las regletas de Napier.

Las entrevistas como tal se dan en dos jornadas dentro de las instalaciones de la UPEL Maracay, planificadas para desarrollar actividades de reforzamiento en cuanto al modo como los estudiantes participantes comprendían la multiplicación y por su desempeño como futuros docentes para comunicar lo que sabían al respecto. Los dos estudiantes sordos elegidos en esta actividad, nombrados por sus iniciales DV y YR, eran estudiantes avanzados de la especialidad de Dificultades de Aprendizaje, habían cursado la asignatura de Matemática para EE, eran jóvenes comprometidos y de excelente participación en clases, usuarios de la LSV, requerían de intérprete por no tener dominio del español; todos estos factores motivaron considerarlos como informantes clave y ambos aceptaron colaborar con la investigación.

Para los encuentros, se concertaba la cita con anterioridad buscando el día adecuado para ambos y aún para una tercera persona, en este caso el intérprete de lengua de señas. El primer encuentro, fue pautado en la mañana del sábado 7/10/2017 y duró cuatro horas, mientras que el segundo encuentro se dio en la tarde del martes 17/10/2017 por una hora y cuarto. Durante los dos encuentros se realizaron un total de 26 videos (13 en cada caso) y se tomaron fotos a fin de registrar las señas creadas entre ambos estudiantes durante el proceso de explicación que ellos realizaban en torno a las propiedades de la multiplicación. De acuerdo a lo explicado sobre la conformación fonológica de las señas, se optó por hacer su registro siguiendo el formato elaborado por Pérez (2008) donde se colocan las fotos sucesivas para visibilizar la configuración manual de la seña, descripción de su articulación en lo que refiere a la actividad, ubicación y orientación de la mano, junto con los rasgos no manuales, pero se acompaña de la interacción y observaciones realizadas al tener el acuñamiento de la seña.

La información recabada.

Considerando lo expresado por DV y YR, se pone de manifiesto que para ambos, el aprendizaje de los contenidos matemáticos vistos en primaria o secundaria, no tuvo en ningún momento el apoyo de materiales didácticos como el ábaco o las regletas; por lo general las explicaciones se regían por la copia de ejercicios en la pizarra donde se notaba la repetición de procesos, así que ellos tenían la idea de cómo multiplicar primero porque se aprendieron de memoria las tablas de multiplicar y luego por hacer los pasos correspondientes, sin hacer alusión de que existiera alguna propiedad en lo que hacían.

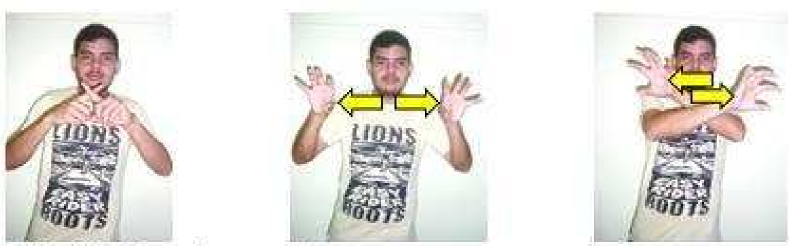
En contraste, una vez ingresan a la universidad se sorprenden de ver en el curso de Matemática para EE el desarrollo de las clases con aspectos teóricos más detallados, más amplias las definiciones por el uso de símbolos, de propiedades, de conceptos que desconocían, como por ejemplo el desarrollo de la propiedad distributiva en forma horizontal, la caracterización de ciertos productos según los factores que intervengan como en el caso del 5 o el 8, o la existencia del recursos didácticos alternos para su enseñanza como el caso de las regletas de Napier. Esto había marcado un mayor interés por la Matemática y les animaba indagar más alternativas para enseñarla sobre todo porque eran conscientes de la dificultad que acarrea para las personas sordas partir de conocimientos que se transmiten de manera oral o escrita, omitiendo el uso de lengua de señas para la concepción de símbolos, contenidos y aplicaciones matemáticas.

En lo referente a la construcción conceptual matemática que un sordo va consolidando, tanto las lecturas de diversos documentos y las conversaciones sostenidas con docentes de la especialidad de EE, explican que los procesos cognitivos resultaban similares al de cualquier otro estudiante siempre y cuando no estuviera comprometida la capacidad intelectual que conduce al razonamiento, el discernimiento y otros manifestaciones necesarias para la comprensión Matemática; de hecho, estas capacidades eran notorias tanto en DV y YR por lo que abogaban a que el trato educativo fuera ecuánime al grupo pero considerando las adaptaciones curriculares apropiadas para ellos y la presencia de un intérprete si el docente no era usuario de LS.

En la medida que se sigue la interacción entre docente-investigadora, intérprete de LSV y los sordos sobre la multiplicación y el uso de las regletas de Napier, fueron surgiendo señas para acuñar expresiones matemáticas como también para nombrar a las regletas. Acorde con lo descrito teóricamente, estas señas fueron parte de una conversación consensuada para llegar a acuerdos en crear las señas desde convenios entre los sordos. A continuación se presentan dos señas registradas y sistematizadas siguiendo el esquema de Pérez (2008), donde además se advierte el proceso de análisis entre formar la seña y su relación con el concepto matemático.

Glosa: ***PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA MULTIPLICACIÓN***

Seña: Inicio Intermedio Final



Seña registrada en video 10 (del segundo encuentro)

Descripción de la seña: bimanual simétrica, inicia en detención de ambas manos cerradas con palma hacia abajo y teniendo extendidos los dedos índices que forman una equis a la altura de la barbilla. En intermedio, se abren ambas manos, con palma hacia afuera mientras se mueven linealmente alejándose una de otra para hacer detención a la altura de los hombros; luego, sin cambiar CM se vuelven a mover ambas manos linealmente en sentido contario para intercambiar su posición y quedar en detención con roce de antebrazos.

Interacción: Esta seña se conforma en correspondencia al debate consensuado dado entre DV y YR al presentar las razones para su conformación, este momento queda captado en el video 9, donde ambos determinan por qué el movimiento de las manos debe hacerse de el modo planteado. Para esto colocan objetos en una mesa simulando que ellos son números y tal como ocurre cuando se multiplican concluyen que al cambiarlos de lugar no se altera el resultado, de allí que justifican el movimiento de manos acentuando el cambio de posición de derecha a izquierda y de izquierda a derecha mientras se tienen las manos abiertas con los dedos ligeramente plegados hacia dentro para referirse a los números como objetos que no cambian de forma solo cambian de posición., mientras se asume que el producto es el mismo al no agregar o dar una seña adicional que lo mencione, es decir, el resultado no se menciona porque este no se altera

Observaciones: Se percibió un completo acoplamiento entre los sordos para llegar a la seña descrita, el intérprete estuvo muy atento en comunicar y dar testimonio del significado de la seña como de los diálogos realizados por los estudiantes, esto fortaleció mucho la comprensión de lo que representaba para ellos esta dinámica y su concepción matemática de la propiedad, esto último se resalta en la manera como se observó que para ellos a través de esta propiedad cualquiera sean los números con los cuales se multiplique se mantiene el producto independientemente de quien va primero o quien va después.

Figura 3. Descripción de la seña para la propiedad conmutativa de la multiplicación

Glosa: ***PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN***

Seña: Inicio Intermedio 1 Intermedio 2 Intermedio 3 Final

Seña registrada en video 5 (del segundo encuentro)

Descripción de la seña: bimanual asimétrica, Mano pasiva (MP): izquierda, en detención con palma prona, dedos extendidos y brazo doblado a nivel de pecho a una distancia media. Mano activa: derecha ubicada detrás y un poco más arriba de la MP. Su movimiento inicia teniendo como CM base prono, palma hacia adelante, yema de los dedos unificados y apilados con pulgar, se trasladan diagonalmente hacia a un lateral de la cara a nivel de los ojos, para bajar nuevamente en diagonal hasta aproximarse a la MP y subir nuevamente esta vez al frente de la cara a nivel de los ojos; seguidamente se repite este movimiento en "v" para dejar mano en detención al lado izquierdo de la cara a nivel de los ojos; por último, la mano se traslada debajo de la MP mientras cambia CM con giro de muñeca, quedando palma hacia atrás, dedos 1, 2 y 3 un poco separados, extendidos horizontalmente y se une pulgar con meñique. No se generan RNM.

Interacción: Esta seña se conforma gradualmente en el primer encuentro. Primero DV realiza todos los movimientos indicados anteriormente menos el último y es aceptada por YR quien lo ratifica aunque trata de incorporar la configuración de la mano derecha en "d"; luego esto cambia ligeramente cuando la investigadora-docente los cuestiona con respecto a la propiedad a modo de que justifiquen lo que hacen. Al principio ellos explican que se basan en lo realizado con las regletas de Napier y por lo aprendido en la escuela; luego YR hace mención que se toman diferencialmente las cifras del primer múltiplo para repartirlas con el segundo pues esto también sucede en las regletas, de lo cual DV toma la iniciativa para enfatizar que se multiplica en orden tomando la primera cifra que aparece a la derecha del factor inferior para multiplicarla por cada una de las cifras colocadas en el otro múltiplo o número superior (indicado en la seña de esta manera) y así se sigue el mismo proceso con la segunda cifra hasta terminar con todas las cifras del primer factor. Dada esta interacción (registrada en el video 12) se produce la necesidad de agregar a la seña la acción de que aparecen resultados al distribuir y que dichos resultados se colocan debajo de los factores; es decir, que dan a entender lo que ocurre en el proceso de multiplicar con polidígitos, al generar el movimiento zigzagueante y extender tres dedos al final como parte de los tres productos que se pueden obtener. Ellos reconocen que si el número posee más dígitos (concepto de polidígito dado en señas y visible en video 13) entonces más productos obtendrán, como lo expresa YR al preguntar sobre estos casos y demostrar su preocupación para enseñarlo a un niño (situación registrada nuevamente en el video 13). La seña queda conformada finalmente como se expresa en las imágenes pero más adelante se incorporan otras señas en respuesta a otras inquietudes dadas para multiplicar horizontal o verticalmente.

Observaciones: El trabajo de esta seña permitió el debate sobre los procesos matemáticos vistos en clase y el uso de las regletas de Napier, de hecho DV relaciona la propiedad a partir de lo que ella aprendió convencionalmente desde su educación primaria y preguntó si el otro proceso horizontal que se vio en clase debía llamarse de otra forma (registro dado en video 13 del primer encuentro). Es decir, lo visual para ellos marca diferencia, si ven un proceso y luego otro piensan que se trata de propiedades diferentes o cosas diferentes, tal como lo indica la pregunta de DV. Gracias a esta y otras interrogantes, la docente-investigadora hizo todo lo posible por explicar la propiedad desde la descomposición sumativa que tiene un número y que puede representarse de forma horizontal o vertical, esta última considerada algoritmo de la multiplicación; sin embargo, queda mucho por trabajar pues desde lo conceptual no se especifica que tal propiedad debe cumplirse a la derecha y a la izquierda, ni se expresa su forma simbólica. Finalmente, se establece la seña en consideración a los procesos que ellos ven; es decir, lo observado y estructurado procedimentalmente, queda sin registrarse la adición como parte de este proceso o agregar el símbolo de más para decir que por último los resultados se suman, se da por sentado que hay una suma aunque en la seña no se le especifica como tal; no obstante, los sordos lo hacen notar al explicar el tema. En general se observa ganancia en avances alcanzados, ante el esfuerzo por describir los contenidos matemáticos implicados en esta operación matemática.

Figura 4.. Descripción de la seña para la propiedad distributiva.

Conclusiones

A la par de otros estudiantes, los sordos pueden sentirse aislados de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática si no se replantean adaptaciones curriculares acordes a sus requerimientos, cuestión que tiene repercusión si se trata de futuros docentes.

Es relevante dar la posibilidad de este tipo de prácticas donde el sordo explica desde su lengua un concepto matemático pues se pueden detectar distorsiones, omisiones o generalizaciones tal como sucede con algún estudiante regular, la diferencia es que se está haciendo desde su contexto, tomando en consideración la conformación conceptual desde su propio modo de expresión, las formas cómo se da la Matemática en los contextos de culturas específicas y dentro de la comunidad sorda una seña puede quedar acuñada una vez que interactúan en su conformación dos o más sordos. Tanto DV como YR, dijeron en repetidas ocasiones que veían muy importante hacer este tipo de actividades y darlas a conocer en otras instituciones, aún en su lugar de trabajo o por otros medios como internet o en la universidad a través de los grupos que están intentando hacer el registro de señas para los cursos de formación. Era notorio para ellos que faltaba mucho por hacer al respecto, que se descuida la buena concepción de la Matemática y por otra parte el modo de especificarla, de comunicarla a través de su lengua. En el caso de DV, ya tiene diez años trabajando como docente en una escuela de sordos, pero llegó a decir que ella ha enseñado la multiplicación repitiendo los algoritmos que conoce pero no se había puesto a reflexionar cómo contextualizarlo en detalle dentro de su comunidad. En el acuñamiento de señas se puede constatar que ellos ponen en juego el uso de las propiedades y existe además una estrecha relación con el impacto visual que les genera, pues transfieren a la seña parte de lo que representan físicamente o de lo que hacen.

Referencias y bibliografía

Barojas G., A. & Garnica D., I. (2017). Comprensión De Nociones Del Sistema Métrico Decimal Mediada Por La Lsm En El Aula De Sordos [17-21]: Estudio De Casos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *20*(3), 317-344.

Morales G., A. M. & Pérez, Y. (2010). *La Educación del Sordo en Venezuela: Una visión crítica*. Disponible en: http://www.cultura-sorda.org/wp-content/uploads/2015/03/Morales-y-Perez-La_educacion_del_sordo_Venezuela_2010.pdf. (2018, 10 de marzo)

Morales G., A. M. (2008) *La comunidad sorda de caracas: una narrativa sobre su mundo* (Tesis Doctoral). Venezuela: Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Disponible en: http://www.cultura-sorda.eu/resources/ Tesis_Morales_2008.pdf. (2008, 8 de febrero)

OMS (2001). Clasificación internacional del funcionamiento, de la discapacidad y de la salud. CIF. Disponible: http://www.imserso.es/InterPresent2/groups/imserso/documents/binario/435cif.pdf. (2018, 10 de marzo)

Oviedo, A. (2001). *Apuntes para una gramática de la Lengua de Señas Colombiana*. Cali, Universidad del Valle: INSOR.

Oviedo, A. (2009). *Lecturas sobre la historia de las personas sordas, su educación y sus lenguas de señas*. Berlín.

Oviedo, A., Rumbos, H. & Pérez H., Y. (2004). El estudio de la Lengua de Señas Venezolana. En: F. Freites & F.J. Pérez (Eds.) *Las disciplinas lingüísticas en Venezuela*. (pp. 201-233) Maracaibo: Universidad Católica Cecilio Acosta.

Pérez, Y. (2008). *Marcadores en conversaciones entre sordos en lengua de señas venezolana* (Tesis Doctoral). Venezuela: Universidad de Los Andes. Disponible en: http://www.cultura-sorda.org/wp-content/uploads/2015/05/Tesis-Marcadores-en-Conversaciones1.pdf. (2008, 14 de marzo)

La discusión grupal con futuros maestros como herramienta en la transición de un pensamiento absoluto a uno relativo

Javier **Monje** Parrilla
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España
monjejavier@ua.es
Patricia **Pérez-Tyteca**
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España
patricia.perez@ua.es

Resumen

Los estudiantes para maestro utilizan a menudo un pensamiento absoluto en ciertas situaciones que implican el manejo de razones. Por este motivo nos hemos planteado llevar a cabo una actividad en el aula que les ayude a superar sus dificultades y lo hemos hecho mediante una discusión grupal en torno a varias resoluciones a una tarea de comparación de razones. La discusión grupal promueve el pensamiento crítico de los estudiantes haciéndoles confrontar sus ideas con las de sus compañeros. Para evaluar la eficacia de la discusión grupal, un grupo de 36 futuros maestros han resuelto una tarea de comparación de razones antes y después de llevar a cabo la discusión en gran grupo. Los resultados apuntan a que la discusión ha sido efectiva en tanto que ha disminuido el número de estudiantes que ponen en juego un pensamiento absoluto y ha dado muestras explícitas del pensamiento crítico de los mismos.

Palabras clave: razón, pensamiento absoluto, pensamiento relativo, futuros maestros, pensamiento crítico.

Introducción

Aunque el trabajo con razones se inicia en la etapa de Educación Primaria, como reportan trabajos precedentes (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2012; Buforn y Fernández, 2014), los maestros, tanto en formación como en ejercicio, muestran serios problemas para abordarlo de manera satisfactoria. Así, en ciertas situaciones que involucran el manejo de cantidades relativas hacen uso de un pensamiento absoluto en lugar de utilizar un pensamiento relativo (Sowder et al., 1998; Valverde y Castro, 2012). Como afirma Lamon (2012), esto puede deberse a que pensar en términos relativos o comparativos requiere de una mayor abstracción que pensar en una adición o diferencia de cantidades (términos absolutos); esta forma de pensar permite crear cantidades más complejas (Lamon, 2012).

Consideramos, pues, fundamental que desde los programas de formación de futuros maestros se lleven a cabo prácticas de aula que ayuden a que estos estudiantes que hacen uso de un pensamiento absoluto, sean capaces de ser críticos con sus actuaciones y desarrollen criterios para distinguir la conveniencia o no del uso de este tipo de pensamiento.

Como indica Montoya (2007), para contribuir a desarrollar el pensamiento crítico en los estudiantes hay que inducirlos a asumir otros puntos de vista, y esto se puede hacer planteando diferentes soluciones a los problemas y a partir de ellas permitir las discusiones que posibiliten a los estudiantes evaluar sus argumentaciones a la luz de las razones de los demás.

Es por todo ello que el presente trabajo tiene como objetivo generar una discusión grupal con futuros maestros en torno a una tarea de comparación de razones que les ayude a transitar de un pensamiento absoluto a uno relativo.

Fundamentación teórica

Pensamiento absoluto/relativo

Existen situaciones en las que una persona puede relacionar dos cantidades aditivamente creando una diferencia o relacionar dos cantidades multiplicativamente para formar una razón (Thompson, 1994). Proceder de la primera manera conduce a un tratamiento absoluto de las cantidades y proceder de la segunda manera a un tratamiento relativo de las cantidades.

Algunas investigaciones ligadas al estudio del razonamiento proporcional recogen algunas respuestas aditivas o absolutas de estudiantes cuando resuelven problemas de razón y proporción (Karplus, Pulos & Stage, 1983; Lamon, 1993; Valverde & Castro, 2012). Atendiendo a la estructura del problema, algunas variables que pueden influir en las actuaciones de los estudiantes son la presencia o ausencia de razones enteras, el tamaño de los datos usados y el orden en que se presentan los datos en el enunciado (Tourniaire & Pulos, 1985). En los problemas de comparación de razones, un aspecto a tener en cuenta es si las razones a comparar son iguales o no. La comparación de razones desiguales resulta más difícil que la comparación de razones iguales (Karplus et al., 1983).

Pensamiento crítico y discusión grupal

El objetivo de la educación matemática y de la educación en general debe ser formar a estudiantes reflexivos y con capacidad crítica para analizar sus estrategias y las de los demás. Como indican Paul & Elder (2005), para tener éxito en el aprendizaje, los estudiantes necesitan pensar críticamente ya que este pensamiento crítico lleva al dominio del contenido y al aprendizaje profundo.

De acuerdo con Torres, Tejada & Villabona (2013), denominamos pensamiento crítico a la capacidad del pensamiento para examinarse y evaluarse a sí mismo (el pensamiento propio o el de los otros), en términos de cinco dimensiones. Una de esas dimensiones es la dimensión dialógica del pensamiento, que es la capacidad para examinar el propio pensamiento con relación al de los otros. Esto permitirá a los estudiantes asumir diferentes puntos de vista y mediar otros pensamientos (Montoya, 2007). Es, pues, como apuntan Valera & Madriz (2002), mediante el proceso de comunicación como los estudiantes confrontan sus pensamientos con los de otros y pueden llegar a cambiarlos. Según estos autores, es necesario ofrecer oportunidades en el aula que ayuden a formar un pensamiento crítico. De este modo, las actividades propuestas deben orientarse hacia la resolución de problemas y hacia la confrontación y discusión en el aula de sus diferentes soluciones. Estas situaciones podrán mostrar el pensamiento crítico de los estudiantes en acción, ya que se les lleva a cuestionarse entre varios planteamientos analizados (Montoya, 2007).

Como afirman Darnaculleta, Iranzo & Planas (2009), las conversaciones generadas en torno a la resolución de una actividad son un momento clave en las secuencias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, donde el alumnado aprende en su relación con los otros, explicando sus razonamientos e intercambiando y contrastando ideas.

Metodología

Para poder comprobar la efectividad de la discusión grupal se ha administrado una tarea antes y después de la misma, analizando las estrategias de resolución puestas en juego por los estudiantes. El análisis se ha llevado a cabo mediante una metodología cualitativa de corte interpretativo que pretende identificar si la discusión grupal favorece en los futuros maestros un pensamiento crítico que les permita transitar de un uso absoluto de las cantidades implicadas en una tarea de comparación de razones a un uso relativo.

Participantes y contexto

En este trabajo participaron 36 estudiantes para maestro de tercer curso del Grado de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Valencia matriculados en la asignatura Didáctica de la Aritmética y la Resolución de Problemas. La experiencia se llevó a cabo en sesiones ordinarias de clase. Dado que la muestra fue no intencional, es decir, que participaban los estudiantes que habían acudido a clase, la primera resolución de la tarea la realizaron los 36 futuros maestros y la segunda 31 de ellos.

Instrumento

La tarea que se administró es una tarea del tipo "¿Cuál es la mejor compra?" (Ben-Chaim et al., 2012), que resulta de la unión de tres ofertas extraídas de folletos comerciales corrientes de los supermercados. La tarea, denominada "el descuento", consiste en tres ofertas que se enuncian por medio de razones expresadas de forma diferente: "3x2", "-70% en la 2ª unidad" y "2ª unidad a mitad de precio", en la que se pregunta qué descuento es el mejor (ver Figura 1).

La primera y tercera ofertas ("3x2" y "2ª unidad a mitad de precio") se acompañan del producto al que se aplican e incluyen los precios antes y después del descuento (5.58€ y 3.72€ la unidad; 9.74€ la unidad y 4.87€ la 2ª unidad). La segunda oferta: "-70% en la 2ª unidad", es genérica y no se menciona a qué producto se aplica ni de qué precio.

Figura 1. Tarea "el descuento".

Resoluciones mostradas en la discusión grupal

Posteriormente a que los futuros maestros resolvieran la tarea, se proyectaron dos resoluciones con el fin de que generar una discusión grupal sobre ellas. La primera de ellas muestra un pensamiento absoluto, ya que se compara en términos absolutos el ahorro total en cada oferta usando diferentes precios (Figura 2).

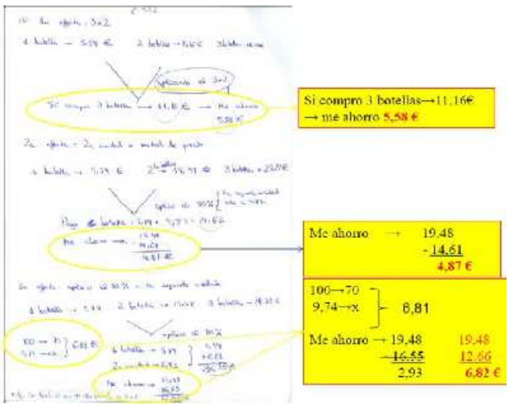


Figura 2. Estrategia de pensamiento absoluto.

En esta resolución el estudiante, en la oferta del "3x2", utiliza el precio de 5,58 € para calcular la diferencia de lo que se paga al comprar 3 botellas sin descuento (16.74 €) con lo que se paga con descuento al comprar las 3 botellas (11,16 €) obteniendo el ahorro absoluto (5,58 €). En el resto de ofertas procede de la misma manera. En estos casos utiliza el mismo precio (9,74 €) obteniendo en la oferta de "segunda a mitad de precio" el ahorro de 4,87 € y en la oferta de "segunda unidad al 70% de descuento" el ahorro de 2,93 €. Estas diferencias (5,58 €; 4,87 € y 2,93 €) son las que el estudiante utiliza para comparar afirmando que "por tanto el mejor descuento es 3 x 2".

La segunda resolución que se proyectó y sobre la que se discutió muestra una estrategia de comparación relativa (ver Figura 3). En ésta el resolutor relativiza el ahorro final en la compra con respecto al coste total sin descuento. La selección de este ejemplo se hizo bajo la premisa de que este último paso diera lugar a la discusión sobre la necesidad de relativizar las cantidades para de este modo poder compararlas. En particular, además de encontrar el ahorro total de la compra aplicando el descuento correspondiente en cada oferta, como sucede con la primera resolución proyectada, este estudiante lo relaciona con el coste total de la compra. Posteriormente, transforma las razones obtenidas para obtener el descuento relativo en tanto por cien de cada oferta y poder compararlas.

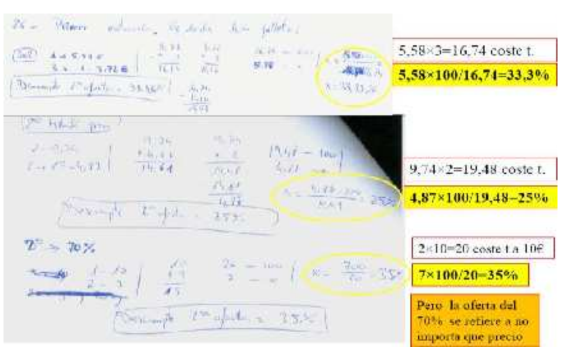


Figura 3. Estrategia de comparación relativa

Como se observa en la Figura 3, en la oferta del “3 x 2” el estudiante utiliza los precios del anuncio (5,58 €) calculando el coste de comprar tres botellas sin descuento (16,74 €). Este valor lo relaciona con el valor de 5,58 € (cantidad descontada) en tanto por cien utilizando la estrategia del producto cruzado, de este modo obtiene que el descuento es el 33,3%. En la oferta de “segunda unidad a mitad de precio” el estudiante procede de la misma manera, en este caso utiliza el valor de 9,74€ y calcula el coste al comprar dos botellas (19,48 €) y la cantidad descontada (4,87 €) en la oferta. Relacionando estas cantidades en tanto por cien mediante una regla de tres obtiene el porcentaje de descuento (25 %). Con la oferta de “70% de descuento en la segunda unidad” el estudiante emplea el valor de 10 € y calcula el coste de la compra sin descuento (20 €), la cantidad descontada en este caso es 7 €. Estos valores los relaciona en tanto por cien con una regla de tres obteniendo así el descuento del 35%.

Análisis de datos

Los datos de esta investigación son las resoluciones de los estudiantes para maestro participantes a la tarea “el descuento”, tanto en su primera como en su segunda aplicación. Estas resoluciones se han codificado atendiendo al tipo de pensamiento (absoluto o relativo) puesto en juego, para proceder a realizar un recuento de las mismas. Para analizar la efectividad de la discusión grupal en la generación de un pensamiento crítico que ayude a transitar a aquellos estudiantes que manejaban las cantidades de manera absoluta hacia un manejo relativo de las mismas, se han comparado estos recuentos.

Además, la discusión grupal fue grabada en vídeo y posteriormente transcrita. Los diferentes pasajes incluidos en dicha transcripción se han categorizado atendiendo a si muestran o no signos del pensamiento crítico de los estudiantes. De este modo, estos pasajes se han podido filtrar hasta conseguir evidencias de intervenciones que consideramos que constituyen momentos clave en la discusión grupal.

Resultados

Para observar el impacto de la intervención en el aula, se analizaron las resoluciones de los estudiantes tanto en la primera como en la segunda aplicación de la tarea atendiendo a si mostraban un pensamiento absoluto, un pensamiento relativo u otros (respuesta en blanco, respuestas cualitativas centradas en la calidad del vino…) En la Tabla 1 se recogen las frecuencias con las que aparece cada tipo de pensamiento (absoluto/relativo).

Tabla 1

Frecuencias de las respuestas relativas y absolutas en cada aplicación

	Pensamiento absoluto	Pensamiento relativo	Otros
Primera aplicación	10/36 (27.8%)	20/36 (55.6%)	6/36 (16.7%)
Segunda aplicación	1/31 (3.2%)	18/31 (58.1%)	12/31 (38.7%)

Como podemos observar en la Tabla 1, se produjo un descenso significativo en el número de respuestas absolutas y un incremento de las muestras de pensamiento relativo por parte de los estudiantes. El número de estudiantes que comparan diferencias en términos absolutos pasa de 10 estudiantes en el cuestionario inicial a 1 estudiante en el final. Pensamos que este es un efecto muy positivo de la discusión grupal, en la que pudimos comprobar como algunos estudiantes fueron capaces de argumentar sus estrategias y confrontarlas con las de sus compañeros, ayudando a estos a desarrollar un pensamiento crítico que les ayudó a transitar desde el pensamiento relativo al absoluto. Es por ejemplo el caso de Laura (véase próxima sección) que en su primera resolución compara diferencias en términos absolutos y en su segunda resolución relativiza.

Los resultados también muestran un aumento en el número de respuestas en blanco o cualitativas (sin hacer cálculos, hablando, por ejemplo de la calidad de los vinos que aparecen en los folletos), Esto puede ser debido a que, posiblemente, los estudiantes no estuvieron igual de motivados en la primera que en la segunda aplicación ya que ya conocían la tarea y habían estado trabajándola y discutiendo sobre ella largo y tendido.

Momentos clave de la discusión que han podido originar los cambios

Durante el proceso de discusión en el aula, se produjeron varios momentos clave que podemos suponer que ayudaron a que algunos de los estudiantes que mostraban un pensamiento absoluto pasaran a un pensamiento relativo. Estos momentos surgieron a partir tanto de la intervención del profesor como de la de los propios estudiantes.

Después de mostrar la primera de las resoluciones al gran grupo, se produce el siguiente diálogo:

Profesor: (…) Vamos a discutir el proceso. ¿Qué os parece el proceso?

María (Alumna8): Yo en cuanto al proceso creo que el proceso no es el adecuado para sobre este tipo de problema porque él ha supuesto precios de botellas le ha aplicado porcentaje a esos precios, entonces yo creo que no lo puede hacer sobre el precio porque simplemente está preguntando que si tú fueras a comprar qué descuento sería el mejor y si le aplicas al precio tú estás diciendo cuanto te costaría… que te costaría más barato en este supuesto, pero los precios tampoco son los mismos.

Los argumentos de María, parecen influenciar a otros estudiantes, como a Laura que, después de reconocer que ella había resuelto la tarea haciendo uso de un pensamiento relativo, admite que ahora se ha dado cuenta de su error y justifica por qué con el siguiente argumento:

Laura (Alumna37): el descuento también o sea cada imagen tenía un precio entonces el descuento también va a variar según el precio según de cada… de cada cosa, entonces eso pues está mal porque si tienes el precio más elevado a lo mejor, o sea en función del descuento te saldrá más económico o menos, o sea que no se puede…

Consideramos que Laura, en esta intervención, está mostrando un pensamiento crítico que le ha permitido, tras confrontar su resolución con los argumentos de otros, modificar su estrategia inicial. De hecho, esta alumna en su primera resolución mostró un pensamiento absoluto y en su segunda resolución relativizó.

La discusión sobre la primera resolución mostrada también propició la intervención de algunos alumnos, como Hugo, que defendió la necesidad de relativizar en este tipo de situaciones, como el defendido por Hugo, que afirmó:

Hugo (Alumno11): Ha escogido precios diferentes, entonces no es orientativo lo que está ahorrando… Es como si compras un coche y tres manzanas y dices: Yo he comprado dos coches y me he ahorrado 100000€ y compro 3 manzanas y me ahorro 1€, pues el de los coches es mejor…

Este es un momento clave del transcurso de la sesión ya surge en la discusión el pensamiento relativo espontáneamente en algunos estudiantes, que lo defienden confrontándolo con el pensamiento absoluto que mostraba la primera resolución.

Más adelante, cuando el profesor muestra la segunda resolución (en la que, recordemos, se comparan cantidades relativas) Luis espontáneamente argumenta por qué este método es correcto, lo que parece convencer a algunos compañeros.

Luis (Alumno9): Yo he hecho este y creo que es el bueno, que es el que está bien teniendo en cuenta que… a ver cómo lo digo…que no importa lo que pagues al final sino lo que te ahorres con respecto a lo que pagues

Consideramos que estos son ejemplos de momentos clave que se produjeron en el aula en torno a la resolución de la tarea. Estos momentos permitieron que algunos alumnos explicaran sus razonamientos, ayudando a otros a ver sus errores y que se contrastaran ideas que hicieron aflorar la conveniencia de tomar cantidades relativas para poder hacer una comparación entre descuentos.

Discusión y conclusiones

La discusión grupal generada en torno a la resolución de la tarea "el descuento" dio muestras del pensamiento crítico de los participantes, lo que ayudó a algunos de ellos a transitar desde un pensamiento absoluto a la hora de manejar razones, a un pensamiento relativo. Esta transición se ve reflejada en los tipos de estrategia utilizadas en la primera y segunda resolución de la tarea, que muestra un gran descenso del número de estudiantes que maneja las cantidades de manera absoluta y un aumento porcentual del número de ellos que relativiza. Estos resultados son congruentes con lo que apuntan Valera y Madriz (2002), cuando afirman que mediante el proceso de comunicación en el aula los estudiantes tienen la oportunidad de confrontar sus estrategias con las de sus compañeros y llegar a cambiarlas.

Pensamos que este es un efecto muy positivo de la discusión grupal, en la que pudimos comprobar como algunos estudiantes fueron capaces de argumentar sus estrategias y confrontarlas con las de sus compañeros, ayudando a estos a desarrollar un pensamiento crítico que les ayudó a transitar desde el pensamiento relativo al absoluto. Es por ejemplo el caso de Laura (véase sección anterior) que en su primera resolución compara diferencias en términos absolutos y en su segunda resolución relativiza.

Por este motivo consideramos muy aconsejable introducir este tipo de prácticas en los planes de formación de maestros ya que, como reportan los trabajos precedentes (Buforn & Fernández, 2014; Valverde & Castro, 2012), este colectivo es susceptible de presentar dificultades con el manejo de razones, contenido que tendrán que impartir en su futura práctica profesional.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido realizada con el apoyo del proyecto Prometeo/2017/135 de la Generalitat Valenciana.

Referencias y bibliografía

Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B. S. (2012). Ratio and proportion. Research and teaching in mathematics teachers' education (pre- and in-service mathematics teachers of elementary and middle school classes). Rotterdam: Sense Publishers.

Buforn, A., & Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *Bolema*, *28*(48), 21-41.

Darnaculleta, A., Iranzo, N., & Planas, N. (2009). *El pensamiento crítico en actividades de contexto real*. Comunicación presentada en las XIV Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM) celebrado en Girona del 1 al 14 de julio de 2009. Recuperado de: http://pagines.uab.cat/nuria_planas/sites/pagines.uab.cat.nuria_planas/files/El_pensamiento_critico_en_actividades_de_contexto_real_A*Darnaculleta*_PROTEGIDO_0.pdf

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E.K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 219-233.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(1), 41-61.

Lamon, S. J. (2012). Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. (3rd ed.) Nueva York: Routledge Taylor & Francis Group.

Montoya, J. (2007). Acercamiento al desarrollo del pensamiento crítico un reto para la educación actual. Santiago de Chile: Editorial FUCN

Paul, R., & Elder, L. (2005): Estándares de competencias para el pensamiento crítico. Estándares, principios, desempeño, indicadores y resultados con una rúbrica maestra en el pensamiento crítico. Dillon Beach: Fundación para el pensamiento crítico. Recuperado de http://www.criticalthinking.org/resources/PDF/SPComp_Standards.pdf

Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L., & Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education,1*(2), 127-155.

Thompson, P. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. En G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 179-234). Albany, NY: State University of New York Press.

Torres, R., Tejada, C., & Villabona, A. (2013). *Metacognición: herramienta para el desarrollo de pensamiento complejo como eje fundamental en la formación para la innovación*. Comunicación presentada en el World Engineering Education Forum (WEEF), celebrado en Cartagena de Indias, del 24 al 27 de septiembre de 2013. Recuperado de: https://www.acofipapers.org/index.php/acofipapers/2013/paper/viewFile/577/92

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning: A Review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(2), 181-204.

Valera, G., & Madriz, G. (2002). Las preguntas en la enseñanza de las Ciencias Humanas: Un estudio ecológico de aula universitaria. *Revista Investigación en la Escuela*, *48*, 81-94.

Valverde, G., & Castro, E. (2012). Prospective Elementary School Teachers Proportional Reasoning. *PNA*, *7*(1), 1-17.

De Ptolomeo a la formación inicial docente en matemáticas

Gerardo **Cruz-Márquez**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
gerardo.cruz@cinvestav.mx
Gisela **Montiel** Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

En el presente escrito esbozamos el proceso de construcción y estado actual de la problemática de una investigación en desarrollo. Para ello, partimos de una investigación previa –un estudio referente a la construcción social de las nociones trigonométricas– fruto de la cual nos planteamos algunas cuestiones de partida; presentamos una revisión bibliográfica inicial, llevada a cabo con la intención de robustecer dichas interrogantes; y finalmente reformulamos las preguntas de investigación, dentro de las que ahora podemos destacar: ¿cómo la problematización de las nociones trigonométricas 'dialoga' con los demás saberes docentes de los futuros profesores de matemáticas?

Palabras clave: Teoría Socioepistemológica, trigonometría, formación inicial docente.

Abstract

In this paper we outline the process of construction and current state of the problem of a research in development. With this in mind, we start from an antecedent investigation –a study referring to the social construction of trigonometric notions– based on which we pose some initial questions. We present an initial literature-review, carried out with the intention of strengthening these issues. Finally, we reformulated the research questions, within which we can now highlight: how the problematization of trigonometric notions 'dialogues' with the other «saberes docents» of mathematics teachers in initial training?

Keywords: Socioepistemological Theory, trigonometry, initial teacher training.

Con el afán de mostrar, grosso modo, el proceso de construcción de una propuesta de investigación –principal producto de este escrito–, enmarcada en la construcción social del conocimiento matemático y la formación inicial docente, nos planteamos algunas preguntas iniciales, fruto de una investigación previa. En el siguiente apartado damos cuenta de dicho estudio y presentamos las preguntas de partida formuladas a causa de este.

Una investigación de partida

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa sostiene que, en tanto el saber matemático se ha construido socialmente en ámbitos no escolares, su introducción en el sistema educativo –fruto de su valioso papel en la formación ciudadana– obliga a un proceso de transposición didáctica. Esto es, la matemática (en tanto saber humano) se somete a un conjunto progresivo de modificaciones que permiten seleccionar, organizar y estructurar los conocimientos que son incluidos en la Matemática (en tanto espacio escolar) (Reyes-Gasperini, 2016). Al sistema de razón que determina estas modificaciones –y, en consecuencia, la estructura y funcionamiento de la Matemática– es lo que, desde esta teoría, se denomina *discurso Matemático Escolar*.

Una de las características del discurso Matemático Escolar asociado a la trigonometría, que se manifiesta de forma natural a través de los distintos planos educativos, como ser el discurso escolar, los planes y programas de estudio, los libros de texto, y las creencias y concepciones de profesores, estudiantes y comunidad académica en general (Montiel y Jácome, 2014), es su centración en el dominio aritmético de las nociones trigonométricas y una marcada disociación entre la trigonometría escolar y la geometría –que históricamente le dio origen y además la precede de forma general en los programas y planes de estudio–. Consecuencia de este fenómeno, denominado *aritmetización de la trigonometría* (Montiel, 2011), se admite un significado lineal y se promueve un significado aritmético para las nociones trigonométricas, al mismo tiempo que se reduce su uso al de una técnica de cálculo de un valor faltante (Montiel y Jácome, 2014).

Ante esta problemática, y desde la perspectiva que ofrece la Teoría Socioepistemológica, en Cruz-Márquez (2018) se realizó un proyecto de investigación –titulado "De Sirio a Ptolomeo: Una Problematización de las Nociones Trigonométricas"– cuyo supuesto implícito de partida fue que al extender los usos de las nociones trigonométricas y aminorar la brecha existente entre el estudio de la trigonometría y las nociones y procedimientos geométricos, es posible confrontar la aritmetización de la trigonometría y sus fenómenos asociados.

Conjetura que orilla al autor, en primera instancia, a atender tres cuestiones: ¿qué usos le son propios a las nociones trigonométricas, en especial la razón?, ¿cómo acercar las nociones y procedimientos geométricos a la introducción y evolución de las nociones trigonométricas? y ¿qué nociones y procedimientos geométricos son pertinentes a la introducción de las nociones trigonométricas? Y, en segunda instancia, a confrontar dicho supuesto, llevando las respuestas esbozadas para las preguntas anteriores a un ambiente escolar.

Como principales resultados de la investigación –y atendiendo a la hipótesis y las preguntas planteadas–, el autor concluye que la *medición indirecta de distancias en el contexto del círculo* constituye un escenario apropiado para confrontar el significado lineal y aritmético asociado a la razón trigonométrica bajo el discurso Matemático Escolar vigente, así como para promover su resignificación mediante su uso. Además, reconoce la importancia del *trabajo geométrico* –en tanto sinergia de usos: como herramienta de construcción, como herramienta teórica y como herramienta aritmético-algebraica– sobre nociones como el *círculo*, el *triángulo rectángulo* y la *proporcionalidad*, para dicho proceso.

Posterior a dicho estudio, el autor realizó una segunda experiencia de aula en un centro de formación inicial docente –la Universidad Autónoma de Baja California, Campus Mexicali, Baja California, México–. El objetivo del estudio fue, además de enriquecer la información obtenida en la experiencia anterior, atender a una pregunta formulada producto de esta: ¿cambian notablemente las estrategias, argumentos y las reacciones entre los futuros profesores que cursan su formación disciplinar y los que transitan su formación didáctico-pedagógica al enfrentar la situación de medición indirecta de distancias construida?

Durante la aplicación y descripción de esta experiencia el autor se percata de algunas situaciones particulares. En primer lugar, que la situación de medición indirecta de distancias presentada a los estudiantes produjo –especialmente en el grupo que cursaba su formación didáctico-pedagógica–, no solo la problematización (confrontación y resignificación) de las nociones trigonométricas reportada en Cruz-Márquez (2018), si no cierto cuestionamiento respecto a la enseñanza y aprendizaje de la matemática puesta en juego. Si bien esta observación podría estar influenciada por el énfasis puesto en el porqué de la aplicabilidad y la funcionalidad de las herramientas matemáticas involucradas y por la instancia de formación en la que se encontraba el grupo aludido, consideramos que la actividad matemática trabajada también pudo jugar un papel determinante en tal hecho.

En consecuencia, y referente al estudio que aquí nos compete, nos planteamos las siguientes preguntas de partida: ¿problematizar las nociones trigonométricas permite –o propicia– la reflexión y análisis respecto a su enseñanza y aprendizaje?, esto es, ¿problematizar las nociones trigonométricas ‘moviliza’ otros conocimientos docentes no disciplinares?, ¿cómo?

Con el afán de informar y robustecer estas preguntas, y concretarlas en una propuesta de investigación –principal producto de este escrito–, comenzamos una revisión bibliográfica alrededor de la formación inicial docente, parte de la cual mostramos en la sección siguiente.

Sobre la formación docente

Las reformas educativas se producen de forma ineludible y periódica dada la necesidad de la sociedad por revisar y actualizar el sistema de enseñanza. “Se re-organizan los saberes, se examinan las prácticas, se modifican ciertos enfoques para evitar el fenómeno –estudiado por la didáctica– de obsolescencia del saber, de la enseñanza, de los resultados” (Fregona y Alagia, 2002, p. 141). Sin embargo, “los cambios en planes y programas de estudio no pueden ser efectivos en la medida que quien los opera no está preparado para hacerlo de manera creativa y dinámica” (Mancera, 2014, p. 228). Es así como, desde unas décadas a la fecha, adquiere gran importancia mejorar la formación, inicial y continua, de los docentes (Fregona y Alagia, 2002).

Desde entonces, los estudios sobre la formación de los profesores –en general y de matemáticas– se han llevado a cabo por profesionales de diversos ámbitos y desde una gran variedad de campos científicos. Respecto a la formación inicial en particular, aunque todos los estudios tienen como idea transversal el “posibilitar una formación completa y adecuada a futuros profesionales de la enseñanza, los puntos de partida, así como las aportaciones para la consecución de esta idea global, toman distintas formas” (García, 2005, p. 154). Así, es posible encontrar desde estudios de caso que analizan la relación entre las creencias de un profesor y su práctica, como el realizado por Lloyd (2005), hasta proyectos de investigación como “The

Teacher Education Study in Mathematics (TEDS-M)" (Tatto et al., 2012), un estudio comparativo sobre la formación de los profesores de matemáticas en el nivel de primaria y de primer ciclo de secundaria, llevado a cabo durante cinco años y abarcando 17 países.

Algunas tendencias de la investigación en formación docente en matemáticas

Dada esta diversidad de investigaciones, los estudios de Sánchez (2011) y Strutchens et al. (2017) consideran necesario el llevar a cabo revisiones bibliográficas amplias y sistemática alrededor de la formación inicial docente en matemáticas. Tomando como base dichos estudios, consideramos cinco como las principales tendencias de investigación en este campo: 1) las creencias y concepciones del profesor de matemáticas en formación, 2) la dualidad teoría-práctica, 3) el papel de la tecnología en la formación inicial docente, 4) la identidad del profesor de matemáticas en formación, y 5) el conocimiento y habilidades del profesor de matemáticas en formación.

Existe una vasta cantidad y variedad de estudios vinculados a la primera de estas tendencias, sin embargo, y pese a la presencia de algunas líneas predominantes (Philipp, 2007), todas las investigaciones adscritas a esta descansan en el hecho "que las creencias y concepciones de los profesores informan y definen sus prácticas de enseñanza [trad.]" (Skott, 2009, citado en Sánchez, 2011, p. 134), lo que las convierten en un potencial vehículo para la mejora de la formación inicial docente en matemáticas.

Por otro lado, las investigaciones sobre la relación teoría-práctica, especialmente las que indagan sobre el papel de las experiencias de campo en la formación inicial, han cobrado suma relevancia en los últimos años. Lo anterior debido a que diversos estudios, como los realizados por el Consejo Nacional de Investigación, evidencian que las experiencias de campo tienen uno de los mayores efectos en los resultados de los futuros profesores (NCR, 2010, citado en Strutchens et al., 2017). No obstante, en el marco de esta tendencia de investigación, también se ha reportado múltiples dificultades, entre ellas la de ubicar maestros cooperantes que estén preparados para fomentar el desarrollo de los futuros profesores de matemáticas, y el establecer relaciones bilaterales sólidas entre los programas de formación inicial docente y las escuelas en las que se llevan a cabo las experiencias de campo (Strutchens et al., 2017).

Respecto a la tercera tendencia mencionada, el papel de la tecnología en la formación inicial docente, Strutchens et al. (2017) la ramifican en tres direcciones principales: a) como herramientas interactivas y dinámicas para construir conocimientos disciplinares y desarrollar actitudes positivas hacia el uso de tecnologías en su enseñanza posterior; b) como herramientas en los cursos sobre 'métodos de enseñanza', donde pueden ayudar a cuestionar y planificar las lecciones, así como para anticipar, observar y motivar el pensamiento matemático de los estudiantes; y c) como herramientas de aula, que ayuden directamente a provocar el pensamiento, razonamiento y la resolución de problemas de los estudiantes.

Con relación a la cuarta tendencia, la identidad del profesor de matemáticas en formación inicial, Strutchens et al. (2017) consideran que dada la complejidad de la noción de identidad, en tanto "reúne aspectos personales y sociales, abarcando conocimientos y creencias, emociones y relaciones, y contexto y experiencias [trad.]" (Van Putten, Stols y Howie, 2014, citado en Strutchens et al., 2017, p. 25), es de vital importancia que los investigadores adscritos a esta tendencia expliquen cómo leen, entienden y ponen en práctica la identidad profesional en sus estudios. Además, si bien enfatizan los avances que esta corriente ha tenido en los últimos años, también aluden a las preguntas que aún quedan por resolver al respecto, entre ellas: qué papel juegan los maestros de escuela y los supervisores universitarios en el desarrollo de las identidades profesionales de los profesores de matemáticas en formación, y la relación entre los conocimientos del profesor en formación –especialmente el disciplinar y pedagógico– y el desarrollo de su identidad profesional.

Finalmente, dado que los estudios sobre el conocimiento del profesor en formación –que representan quizá el cúmulo más extenso de investigaciones en este campo– son la corriente de investigación que más nos interesa en el presente escrito, considerando la naturaleza de las preguntas de partida planteadas, dedicamos el próximo apartado a su descripción.

Sobre el conocimiento del profesor de matemáticas en formación

Las investigaciones realizadas en el marco de esta tendencia parecen partir de una misma cuestión: “¿qué tipo de conocimientos y habilidades necesita una persona para ser un ‘buen’ profesor de matemáticas? [trad.]” (Sánchez, 2011, p. 135). En este sentido, uno de los primeros y más representativos aportes al respecto es el de Shulman (1986). Estudio en el cual, desde una perspectiva más bien cognitiva-constructivista, parte de preguntarse cuáles son “las fuentes del conocimiento de los maestros” (Shulman, 1986, citado en Mercado, 2002, p. 18). Como respuesta, el autor presenta tres categorías de conocimiento: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento del currículum, a los que anexa algunos *dominios* importantes de conocimiento, entre ellos los métodos de organización y manejo del salón de clases (Mercado, 2002).

Con este como antecedente, comienzan a estructurarse diversas corrientes de investigación respecto al conocimiento del futuro profesor de matemáticas. Dentro de estas, Strutchens et al. (2017) destacan los estudios que intentan esclarecer la relación entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido. Al respecto mencionan que, aunque existen numerosas investigaciones sobre nexos positivos entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico de este, algunos estudios –como el realizado por Subramaniam (2014)– enfatizan que los conocimientos y competencias matemáticas no garantiza el conocimiento para la enseñanza ni la efectividad pedagógica.

Otra línea notable de la investigación en el marco de esta tendencia es la relación existente entre las experiencias de campo y el conocimiento del futuro profesor de matemáticas. Al respecto, y con base en diversos estudios a gran y pequeña escala, Strutchens et al. (2017) concluyen que las experiencias de campo influyen de forma positiva en sus conocimientos sobre la enseñanza de las matemáticas. No obstante, Fregona y Alagia (2002) acentúan que la inmersión en experiencias de campo también puede tener consecuencias peligrosas para la formación inicial docente, ya que:

> Por un lado, puede estabilizar prácticas escolares que aparecen como tradicionales pero que no proveen una buena relación de los alumnos con la matemática; y por otro, no asegura una buena preparación académica de los docentes, no da flexibilidad ni favorece las adaptaciones. (p. 148)

Aunque existen otras líneas de investigación referentes al conocimiento del profesor de matemáticas en formación, dadas nuestras preguntas de partida, hay un último par que son de nuestro especial interés: las que retoman una pieza de conocimiento matemático en particular y las que rescatan elementos histórico-epistemológicos en pro de la formación inicial docente.

Se ha llevado a cabo una amplia variedad de investigaciones sobre el conocimiento del futuro profesor de matemáticas alrededor de un tópico matemático específico. Strutchens et al. (2017), con base en más de 15 investigaciones de este tipo, concluyen que los estudios sobre las concepciones de los futuros profesores de matemáticas sobre nociones matemáticas específicas, en resolución de problemas y modelación, y razonamiento y prueba, parecen indicar que los profesores en formación "no han desarrollado un conocimiento matemático profundo que pueda informar su enseñanza hacia el desarrollo de la comprensión de los conceptos matemáticos y el razonamiento [trad.]" (Strutchens et al., 2017, p. 9).

Por otro lado, respecto a las investigaciones que presentan una discusión sobre la inclusión de elementos histórico-epistemológicos, Larios (2001) subraya la importancia de la incorporación de estos en la formación inicial en tanto proporcionan "elementos al docente para su práctica didáctica, para la interpretación de la investigación educativa y para su propia concepción de la ciencia matemática" (p. 64). Con esto en mente, Fregona y Alagia (2002) se preguntan: "¿significa esto que habría que introducir cursos de epistemología y/o filosofía de la ciencia o de la matemática?" (p. 147). Como una alternativa más *adecuada* –y acaso más práctica–, los autores proponen "profundizar directamente en las nociones matemáticas, estudiar la sucesión de dificultades y preguntas que provocaron su aparición" (p. 147).

Además de las tendencias y líneas de investigación aludidas, la revisión bibliográfica realizada alrededor de una propuesta teórica para el estudio del conocimiento del docente ha sido trascendental en la construcción de la propuesta de investigación que aquí desarrollamos. Damos cuenta de ella en el siguiente apartado.

Sobre los saberes docentes

En los últimos años, las investigaciones de corte social han comenzado a tomar cierto realce en nuestra disciplina, esto es especialmente cierto en la formación inicial docente en lo que al estudio del conocimiento del futuro docente de matemáticas de refiere. De manera general, los investigadores ubicados en esta perspectiva consideran que la "discusión sobre el conocimiento del profesor de matemáticas debería estar moldeada por el contexto en el que el profesor desarrolla su trabajo [trad.]" (Sánchez, 2011, p. 135).

En el marco de esta postura, y desde una óptica más bien etnográfica, destaca la propuesta de los *saberes docentes* de Mercado (1991, 1994, 2002). En ella, la autora plantea a los saberes docentes como *saberes cotidianos*, en tanto "conocimiento [énfasis agregado] sobre la realidad que *utilizamos* [énfasis agregado] de un modo efectivo en la vida cotidiana, del modo más heterogéneo (como guía para las acciones, como temas de conversación, etcétera)" (Heller, 1977, citado en Mercado, 2002, p. 13).

Bajo esta perspectiva, el docente solo se *apropia* de los saberes que estima necesarios para su labor. En el transcurso de este proceso de apropiación el docente genera nuevos saberes a la vez que integra o rechaza conocimientos provenientes de distintos ámbitos sociales y momentos históricos. En consecuencia, y como puede ser evidente en este punto, los saberes docentes son considerados –bajo esta perspectiva– de carácter *histórico*, *dialógicos* y *socialmente construidos* (Mercado, 2002).

El carácter histórico de los saberes docentes refiere a que, al tomar una decisión, los docentes ponen en juego *voces* provenientes de distintos momentos históricos, reformas educativas pasadas o vigentes, experiencias de formación inicial o de actualización docente, la experiencia docente en general, por ejemplo. Por otro lado, el carácter dialógico de los saberes docentes refiere a que –bajo esta postura– las acciones y expresiones de los docentes sobre su enseñanza no pueden verse únicamente desde una perspectiva individual, sino que deben entenderse como "producto de construcciones sociales, históricas, ya que representan huellas provenientes de distintas épocas y ámbitos sociales con las cuales *dialogan* [énfasis agregado] las percepciones individuales" (Mercado, 2002, p. 15).

Finalmente, es importante subrayar que, al considerar los saberes docentes como construcciones sociales, deviene natural postular que los maestros construyen "su conocimiento o su saber cotidiano sobre la enseñanza en determinados contextos definidos *situacionalmente* [énfasis agregado]" (Mercado, 2002, p. 16), así como caracterizar los procesos de construcción y desarrollo de dicho saber como *ilimitados o inacabados*.

En suma, las investigaciones aludidas nos dan una visión ligera –igual que panorámica– de la investigación que se ha realizado alrededor de los conocimientos de los futuros docentes de matemáticas. En particular, han resultado trascendentales las que versan sobre la multiplicidad de conocimientos y saberes –sus diversas naturalezas, orígenes, etc.– que interactúan en la toma de decisiones en el quehacer docente.

Algunas conclusiones

Con base en los elementos presentados y discutidos anteriormente, en especial los referentes al estudio del conocimiento docente y la postura teórica propuesta por Mercado (1991, 1994, 2002), nos replanteamos nuestras preguntas de partida. Así, en este punto de nuestra investigación, nos preguntamos: *¿cómo la problematización de las nociones trigonométricas 'dialoga' con los demás saberes docentes de los futuros profesores de matemáticas?, ¿cuáles son esos 'otros saberes', de qué naturaleza son?* y *¿qué rol –con relación a los demás saberes docentes– juega la problematización de las nociones trigonométricas al momento de tomar decisiones de diseño, implementación y análisis de actividades de aula?*

Además, la revisión bibliográfica esbozada, nos ha hecho consientes de que, dada la naturaleza de estas preguntas, nos es de interés un esquema metodológico que más que *diagnosticar* y *evaluar* los conocimientos de los futuros docentes nos permita acercarnos a los saberes que estos poseen, y sobre todo a la forma en como estos dialogan para la toma de decisiones respecto al diseño, implementación y análisis de actividades de aula.

Considerando que a la etnografía, en tanto metodología cualitativa, más que interesarle la *verdad* –aquello que es para el investigador– o la *moralidad* –lo que debería ser– de un determinado fenómeno, procura "aportar una *comprensión detallada* [énfasis agregado] de las distintas perspectivas" (Rodríguez-Gómez y Valldeoriola, 2012, p. 53); nos proponemos –en este punto de la investigación– un estudio de corte etnográfico que haga posible, mediante la observación, la descripción e interpretación, acercarnos a las prácticas y los conocimientos de nuestra comunidad de interés, los profesores de matemáticas en formación inicial.

Referencias y bibliografía

Cruz-Márquez, G. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: Una Problematización de las Nociones Trigonométricas*. Tesis de Maestría no publicada. Ciudad de México, México: Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados (Cinvestav). doi: 10.13140/RG.2.2.18095.64166

Fregona, D., y Alagia, H. (2002). Problemas nuevos –y otros no tanto– en la formación de profesores de matemáticas. *Cuadernos de Educación*, (2).

García, M. M. (2005). La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación. *Educación matemática*, 17(2).

Larios, V. (2001). Filosofía e historia de la matemática en la formación docente. *Educación Matemática*, 13(3), 64-74.

Lloyd, G. M. (2005). Beliefs about the teacher's role in the mathematics classroom: One student teacher's exploration in fiction and in practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 441–467.

Mancera, E. (2014). La otra matemática… la de enseñanza… la de los maestros…. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 9, Número 12, 221-235.

Mercado, R. (1991). Los saberes docentes en el trabajo cotidiano de los maestros. *Infancia y aprendizaje*, 14(55), 59-72.

Mercado, R. (1994). Saberes and social voices in teaching. *Education as cultural construction*, 61-70.

Mercado, R. (2002). *Los sabers docents como construcción social*. La enseñanza centrada en los niños. México: Fondo de Cultural Económica.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico*. Un estudio Socioepistemológico. México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G., y Jácome, G. (2014). Significados trigonométricos en el profesor. *Boletim de Educação Matemática*, 28(50), 1193-1216.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa* (Tesis de doctorado no publicada). Cinvestav–IPN, México.

Rodríguez-Gómez, D., y Valldeoriola, J. (2012). *Metodología de la investigación*. España: Universitat Oberta de Cataluña.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, 5(4), 129-145.

Strutchens, M., Huang, R., Losano, L., Potari, D., Ponte, J. P. D., Cyrino, M. C. D. C. T., y Zbiek, R. M. (2016). *The mathematics education of prospective secondary teachers around the world*. Springer Open.

Tatto, M. T., Peck, R., Schwille, J., Bankov, K., Senk, S. L., Rodriguez, M., Ingvarson, L., Reckase, M., y Rowley, G. (2012). *Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries: Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*. Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

La formación de profesores de estadística como ciudadanos críticos[1]

Cindy Alejandra **Martínez-Castro**
Universidad de Antioquia
Colombia
cindy.martinez@udea.edu.co
Lucía **Zapata-Cardona**
Universidad de Antioquia
Colombia
lucia.zapata1@udea.edu.co

Resumen

En esta ponencia se reporta un avance de una propuesta de investigación que busca aproximarse al análisis de la formación inicial de profesores de estadística como ciudadanos críticos, a partir de las *investigaciones estadísticas en el aula*. La investigación busca indagar ¿cómo se forma la ciudadanía crítica de futuros profesores de estadística, a partir de investigaciones estadísticas en el aula? Para dar respuesta a la pregunta planteada se asumirá un paradigma de investigación cualitativo y un enfoque crítico-dialéctico. La producción y registro de datos estarán apoyados en diversos instrumentos y técnicas tales como autobiografías, ideogramas, análisis de casos, entrevistas, investigaciones estadísticas, observación participante y diario reflexivo, con los cuales se dará cuenta de la formación de la ciudadanía crítica. Se espera que a través de esta investigación se puedan aportar elementos teóricos, prácticos y metodológicos para fortalecer el campo de la Educación Estadística, específicamente en la formación inicial de profesores.

Palabras clave: Educación Estadística, formación inicial de profesores, ciudadanía crítica, investigaciones estadísticas.

Introducción

La estadística ha cobrado importancia en las sociedades actuales donde existe una gran disponibilidad de información que se propaga rápidamente (Lebrun y Zapata-Cardona, 2017; Ben-Zvi y Makar, 2016). Esta característica de las sociedades de hoy requiere de ciudadanos capaces de evaluar críticamente afirmaciones basadas en datos y de argumentar con fundamento en la evidencia que entregan los datos (Estrella, 2017; Ben-Zvi y Makar, 2016). Por tanto, no es de sorprender que el estudio de la estadística alrededor del mundo en todos los niveles

[1] Esta investigación se llevó a cabo con el apoyo de Colciencias Contrato 438-2017.

educativos esté ganando cada vez mayor atención (Ben-Zvi y Makar, 2016; Batanero, Burrill y Reading, 2011), situación que trae consigo nuevos desafíos para la formación inicial de los profesores de estadística.

Entre los desafíos a los que se enfrenta la formación inicial se encuentra la necesidad de formar a los futuros profesores como ciudadanos activos y comprometidos (Lopes, 2008), capaces de realizar una lectura crítica de la estadística y de sus usos en el entorno social (Ernest, 2015). En este sentido, la formación inicial del profesor de estadística debería, en palabras de Gutstein (2007), enfocarse en las competencias académicas requeridas para su vida profesional y, simultáneamente, en las competencias críticas para leer y escribir el mundo por medio de la estadística. En otras palabras, en la formación inicial se debería cultivar simultanéate el saber y el ser del profesor.

No obstante, en relación a la formación de profesores de estadística, algunos autores han reconocido que ciertos programas de formación inicial siguen una perspectiva técnica y formalista (Zapata-Cardona y González-Gómez, 2017; Souza, Lopes y Pfannkuch, 2015; Costa y Nacarato, 2011). Es decir, que dichos programas se inscriben en un modelo de racionalidad técnica (Loya, 2008; Schön, 1992), donde la estadística se concibe como una ciencia abstracta, estática, formal y alejada de los entornos socioculturales de los profesores. La racionalidad técnica descansa en una concepción objetivista de la relación del profesor con la realidad que conoce, y por ende, el profesor se asume como un técnico que debe aplicar los conocimientos científicos, producidos por otros (Schön, 1992). Así, en dicho modelo de formación, el profesor es visto como un técnico y su formación se entiende como previa y necesaria para el desempeño profesional.

En un modelo de racionalidad técnica el dominio de la disciplina es lo más importante en la formación del profesor (Loya, 2008), es decir, el profesor debe conocer primero la disciplina para luego enseñarla. Pareciera que la formación allí responde a un modelo de causa-efecto (Jaramillo, 2003), en donde los “formadores” dicen lo que el profesor debe adquirir y el profesor “reproduce lo dicho” sin cuestionarlo ni problematizarlo. En esta mirada, muchos programas de formación de profesores se centran en refinar el saber disciplinar y el desarrollo de habilidades y procedimientos, desconociendo que esta es apenas una de las dimensiones en las que se debería formar el futuro profesor (Zapata-Cardona y González-Gómez, 2017).

A partir de la formación inicial del profesor de estadística se ha privilegiado la adquisición y el dominio del saber disciplinar por parte del profesor, y muy poco se ha enfatizado en desarrollar la capacidad crítica de los profesores (Zapata-Cardona y González-Gómez, 2017; Vanegas, Giménez y Font, 2015; Vanegas y Giménez, 2011). En otras palabras, se ha dejado de lado la formación de los profesores como ciudadanos críticos y transformadores de las crisis sociales que conforman su entorno (Lebrun y Zapata-Cardona, 2017). En esta perspectiva, se genera una dicotomía (separación) entre el saber disciplinar y el ser en la formación de los profesores (Radford, 2013; Contreras-Domingo, 2010), en donde, al centrarse la formación en un lenguaje formalizante e inexpresivo para abordar la estadística, se opaca al profesor como ser social, ético y político capaz de asumir posturas críticas frente a los problemas inmersos en sus contextos socioculturales.

En este orden de ideas, se considera importante cuestionarse sobre la formación inicial del profesor de estadística y empezar a desarrollar propuestas que permitan ir superando el modelo de racionalidad técnica en los programas de formación. Propuestas que ayuden a reducir la dicotomía existente entre el saber y el ser para darle cabida al profesor como un ciudadano crítico y político capaz de cuestionar, evaluar críticamente y reflexionar sobre el uso de la estadística en la sociedad (Weiland, 2016). En la formación inicial es necesario abordar la estadística como una herramienta poderosa para movilizar a los profesores en el estudio empírico de fenómenos sociales, económicos, políticos, y para desarrollar la conciencia social (Lebrun y Zapata-Cardona, 2017). De lo contrario se corre el riesgo de seguir fomentado el estudio de la estadística como una disciplina estática, objetiva, técnica e in-transformable (Zapata-Cardona y González-Gómez, 2017).

Una posibilidad para cultivar simultáneamente el saber y el ser en la formación inicial del profesor son las *investigaciones estadísticas en el aula*. En ellas se comprende al profesor como un sujeto crítico y político, y se asume la estadística como una herramienta para problematizar y solucionar problemas del mundo circundante. Las investigaciones estadísticas "son una manera de superar la enseñanza que tradicionalmente exalta el aprendizaje de conceptos y procedimientos estadísticos aislados del contexto en el que se han producido" (Zapata-Cardona, 2016, p. 76), y permiten estudiar empíricamente problemáticas del entorno sociocultural de las personas. En este sentido, las investigaciones estadísticas no se centran exclusivamente en la adquisición de conocimientos; también toman en cuenta la dimensión social de los seres (González-Gómez y Zapata-Cardona, 2018; Zapata-Cardona, 2016).

De esta forma, se busca propiciar ambientes en los cuales los futuros profesores puedan desarrollar y diseñar investigaciones estadísticas para mirar hacia sí y hacia el mundo que los rodea, para conocer y compartir los problemas sociales y políticos de la realidad en que viven, y para cuestionar esa realidad hasta llegar a transformarla (Campos et al, 2011). En coherencia con las ideas desarrolladas a lo largo de este apartado, se busca responder a la pregunta de investigación, *¿Cómo se forma la ciudadanía crítica de futuros profesores de estadística, a partir de las investigaciones estadísticas en el aula?*

Marco de referencia

A continuación, se desarrollarán algunos elementos teóricos con respecto a la ciudadanía crítica y su formación. Seguidamente se discutirán algunos aspectos teóricos sobre las investigaciones estadísticas en el aula y como éstas pueden convertirse en una posibilidad para la formación de la ciudadanía crítica de futuros profesores de estadística.

La ciudadanía crítica

Algunos autores tanto de Colombia (Lebrun y Zapata-Cardona, 2017; Clavijo, 2015; Arias, Clavijo y Torres, 2012) como de otros países (Engel, 2017; Weiland, 2016; Campos, 2016; Lesser, 2007) se han preocupado por el estudio de la ciudadanía crítica, dado el potencial que representa para la formación democrática y para la transformación de la sociedad (Lebrun y Zapata-Cardona, 2017). En el trabajo de Lebrun y Zapata-Cardona (2017) se entiende la ciudadanía crítica como la toma de consciencia de lo ambiental, social, político y económico, y como una disposición crítica hacia el mundo, donde se usa la estadística para la construcción de la democracia. De esta manera, se busca que las personas formen su conciencia ante ciertas situaciones críticas (así llamadas por Skovsmose, 1999) de la sociedad para reaccionar frente a ellas y transformarlas. Otros estudios como los de Engel (2017), Clavijo (2015) y Arias, Clavijo y Torres (2012) han asumido la ciudadanía crítica como la toma de consciencia y de postura con respecto a la información que abunda en el medio social y como la participación crítica de los ciudadanos en la sociedad mediante la discusión de asuntos políticos, económicos y ambientales en los cuales la estadística sirve de soporte tecnológico.

Para Campos (2016) la estadística debería permitir el trabajo con temas que faciliten la discusión de problemas socio-políticos que sean pertinentes en la realidad de las personas. El autor comprende la ciudadanía crítica como una postura que deben tener los ciudadanos para el logro de una sociedad democrática a partir de la lucha por la justicia social. En esta línea también se encuentran los aportes de Lesser (2007) quien asume la ciudadanía crítica como el desarrollo de una conciencia a partir del entendimiento de las diversas problemáticas contextuales para promover el cambio hacia sociedades más democráticas y justas. Finalmente, el trabajo de Weiland (2016) define la ciudadanía crítica como la participación activa y crítica de los sujetos en sus comunidades y/o gobiernos orientada a la justicia de la ciudadanía para la democracia.

A partir de las ideas encontradas en los trabajos mencionados, se resalta que la ciudadanía crítica tiene una estrecha relación con la idea de democracia. La democracia se puede entender como una acción política abierta y colectiva, con un propósito, emprendida por un grupo de personas (Skovsmose y Valero, 2012b). Es decir, la democracia se enfoca en la esfera de las interacciones sociales e incluye la colectividad, la deliberación, la transformación y la coflexión —reflexión conjunta— (Skovsmose y Valero, 2012a; 2012b). A partir de las ideas desarrolladas, en la presente investigación se asumirá la ciudadanía crítica como *la participación activa y crítica de los sujetos (futuros profesores) en sus comunidades y/o gobiernos, orientada a la justicia de la ciudadanía para la democracia que incluye la colectividad, la deliberación, la coflexión y la transformación.*

Las investigaciones estadísticas en el aula

Algunos estudios como los de González-Gómez y Zapata-Cardona (2018) y Zapata-Cardona (2016), han reconocido las investigaciones estadísticas en el aula como una herramienta para formar a los sujetos como ciudadanos críticos mediante el estudio crítico de diversos fenómenos sociales, políticos, ambientales y económicos presentes en sus contextos. Las investigaciones estadísticas son una manera holística de abordar la estadística puesto que permite a los participantes vincular conceptos, herramientas, procedimientos, razonamiento, habilidades y la inferencia estadística para resolver problemas del mundo (Zapata-Cardona, 2016). Se centran en una perspectiva que concibe la estadística como un modo de pensar sobre el mundo y como un campo integrado que es mucho más que un conjunto de conceptos y procedimientos abstractos, ya que permite la comprensión del mundo y la participación de los individuos en la sociedad (Zapata-Cardona, 2016; Santos y Ponte, 2014).

Las investigaciones estadísticas incluyen todo un proceso de investigación que va desde la identificación de un problema o asunto de interés en un contexto particular hasta la producción y presentación de un reporte con propuestas de intervención, es decir, involucra a los participantes en el manejo de datos, exploración, análisis, interpretación y presentación de informes en el contexto (Zapata-Cardona, 2016; MacGillivray y Pereira-Mendoza, 2011). Además, las investigaciones estadísticas son una estrategia que se caracteriza por su potencial contribución a la comprensión y al conocimiento crítico del mundo circundante, pues por ser una estrategia contextual apoya la formación del ciudadano crítico (Zapata-Cardona, 2016).

De acuerdo con lo anterior, las investigaciones estadísticas apoyadas en problemas sociales exigen a los participantes usar, producir o contrastar datos de diversos fenómenos del mundo (contaminación, índices de desempleo, crecimiento demográfico, producción de basuras, cambio climático, hábitos alimenticios, etc…) que pueden tener un impacto en el desarrollo de la conciencia social. En este sentido, las investigaciones estadísticas no se centran exclusivamente en la adquisición de conocimientos; también toma en cuenta la dimensión social de los seres (González-Gómez y Zapata-Cardona, 2018; Zapata-Cardona, 2016). Las investigaciones estadísticas como estrategia metodológica pueden ser usadas para promover el conocimiento estadístico y argumentos en un esfuerzo por desestabilizar y remodelar las estructuras de injusticia para una sociedad más justa (Weiland, 2016). De esta forma se reconoce su valor como una estrategia que podría posibilitar la formación de la ciudadanía crítica.

Aspectos metodológicos

La formación de la ciudadanía crítica es un fenómeno cualitativo, el cual es posible analizar mediante un ejercicio de comprensión de las ideas y concepciones de las personas producto de sus experiencias y sus interacciones sociales. Por esta razón, la presente investigación contempla los principios metodológicos del paradigma de investigación cualitativa que posibilitará asumir a los profesores en formación como seres humanos en sus dimensiones histórica y social (Denzin y Lincoln, 2012). En esta metodología, se asumirá el enfoque crítico-dialéctico (Sánchez, 1998), puesto que se comprende el profesor como un sujeto en permanente constitución inmerso en contextos políticos, económicos y culturales en los cuales puede ser a la vez transformado y transformador de tales contextos.

El trabajo de campo se pretende llevar a cabo en el primer semestre del año 2019, con profesores en formación de un curso de Didáctica de la Estadística ofrecido en un programa de licenciatura en matemáticas de una universidad al noroeste colombiano. Por tener el curso el formato de seminario, donde prima la discusión y el trabajo colaborativo, podría ser un espacio propicio para analizar la formación de la ciudadanía crítica de los profesores participantes del curso, a partir de investigaciones estadísticas en el aula. El trabajo de campo posibilitará, a través de instrumentos para la producción de registros y datos como autobiografías, ideogramas, análisis de casos, entrevistas, investigaciones estadísticas, entre otros, comprender la formación de los futuros profesores protagonistas como ciudadanos críticos, a partir de sus enunciados verbales y escritos como parte de sus discursos (Lerman, 2001).

Por medio de los ideogramas y las autobiografías se busca rastrear elementos clave que den cuenta de las experiencias e historia de los futuros profesores a lo largo de su vida en relación con la estadística. Los análisis de casos y las investigaciones estadísticas en el aula serán los instrumentos para apoyar la formación estadística al tiempo que conectan a los participantes con el estudio de fenómenos reales. Las entrevistas ayudarán a profundizar ideas que no queden lo suficientemente claras a través de los otros instrumentos. El análisis de los datos se llevará a cabo simultáneamente con el trabajo de campo, y para su realización se utilizará la técnica de análisis del discurso —como es entendido por Sayago (2014)— para identificar episodios cruciales que revelarán indicios sobre la formación de la ciudadanía crítica de los profesores participantes de la investigación.

Un ejemplo de una investigación estadística en el aula

La presente investigación estadística en el aula está relacionada con el cambio climático y surge a partir de la noticia denominada “2017 confirma tendencia al calentamiento global” (Velásquez Gómez, 2017). Después de la discusión y análisis de la noticia se plantea la pregunta estadística “¿Se está calentado nuestra ciudad (planeta)? ¿Por qué si o por qué no?”. Para resolver la pregunta estadística, los participantes reconocen la importancia de los datos reales, diseñan un plan de recolección de datos y lo gestionan, diseñan formas de organización de los datos para darle sentido a la información, y usan la evidencia empírica para dar una respuesta y establecer conclusiones. La investigación estadística no termina con la aplicación técnica de herramientas estadísticas, sino que los resultados orientan reflexiones y acciones posteriores de los participantes en relación a su contribución como ciudadanos del mundo al calentamiento global y sugieren acciones que pueden emprender para reducir su huella ambiental.

Las discusiones de los participantes al trabajar sobre una investigación estadística serán las unidades que se sometan a análisis. Se quiere mostrar que las investigaciones estadísticas no solo aportan elementos para el desarrollo técnico del saber estadístico, sino que contribuyen a la formación de la ciudadanía crítica de los participantes. También se quiere mostrar que las investigaciones estadísticas resaltan la conexión entre la estadística y el mundo real que posibilitan la comprensión crítica de los fenómenos sociales y ambientales, y la toma de decisiones informadas.

Resultados esperados

El análisis del discurso del profesor al trabajar con las investigaciones estadísticas será un punto de partida para comprender cómo los profesores en formación logran el dominio de herramientas y conceptos estadísticos, pero al mismo tiempo se posicionan críticamente frente al estudio de la estadística y sus usos en la sociedad. En otras palabras, la investigación mostrará cómo se atiende simultáneamente a la formación científica del futuro profesor y a su formación como un ciudadano crítico. Mediante el desarrollo de esta investigación, se espera hacer aportes a nivel teórico, práctico y metodológico para el campo de la Educación Estadística y específicamente, para poner en cuestión la formación inicial de los profesores de estadística, que no incluye únicamente el dominio de un saber disciplinar. Además, se espera que la investigación brinde elementos teóricos, prácticos y metodológicos para orientar futuras investigaciones en el campo de la Educación Estadística y en otros campos de investigación.

Finalmente, es importante considerar algunas limitaciones que pueden surgir con el desarrollo del presente estudio. Una limitación importante es el corto tiempo disponible para la formación de la ciudadanía crítica, pues ella es un estado de conciencia que se forma a lo largo de la vida. Además, el desarrollo del estudio dependerá de la voluntad y disponibilidad de los participantes. A medida que se avance en el desarrollo de la investigación se irán identificando otras limitaciones que hasta el momento no es posible preveer y estas serán consideradas en el reporte final de la investigación, ya que podrían convertirse en el punto de partida de nuevas investigaciones.

Referencias y bibliografía

Arias, C. M., Clavijo, M. C., & Torres, J. (2012). La enseñanza de la Estadística en la formación de ciudadanos críticos. *13º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa- ECME 13*. Medellín, Antioquia, Colombia.

Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (2011). *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study.* New York: Springer.

Ben-Zvi, D., & Makar, K. (2016). *The Teaching and Learning of Statistics. International Perspectives.* Switzerland: Springer International Publishing.

Campos, C. R. (2016). La educación estadística y la educación crítica. *Segundo Encuentro Colombiano de Educación Estocástica (2 ECEE).* Bogotá, Colombia.

Campos, C. R., Jacobini, O. R., Wodewotzki, M. L., & Ferreira, D. H. (2011). Educação Estatística no Contexto da Educação Crítica. *Boletim de Educação Matemática*, *24*(39), 473–494.

Clavijo, M. (2015). Posibilidades en la formación de ciudadanos críticos: una puesta en escena de la educación matemática crítica y la educación estadística. *Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM*. Bogotá, Colombia.

Contreras-Domingo, J. (2010). Ser y saber en la formación didáctica del profesorado: una visión personal. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 68*(2), 61–81.

Costa, A., & Nacarato, A. M. (2011). A Estocástica na Formação do Professor de Matemática: percepções de professores e de formadores. *Boletim de Educação Matemática*, *24*(39), 367–386.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. (2012). *El campo de la investigación cualitativa. Manual de investigación cualitativa* (Vol. 1). Barcelona, España: Gedisa.

Engel, J. (2017). Statistical literacy for active citizenship: A call for data science education. *Statistics Education Research Journal, 16*(1), 44–49.

Ernest, P. (2015). The Social Outcomes of Learning Mathematics: Standard, Unintended or Visionary? *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 3*(3), 187–192.

Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En A. Salcedo, *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI* (pp. 173–194). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.

González-Gómez, D., & Zapata-Cardona, L. (2018). Professional development programs for statistics teachers: the role of reflection. En M. A. Sorto, A. White, & L. Guyot, *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 10), Kyoto, Japan.* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Gutstein, E. (2007). Possibilities and Challenges in Teaching Mathematics for Social Justice. *Third Annual National Research Symposium of the Maryland Institute for Minority Achievement and Urban Education* . University of Illinois-Chicago.

Jaramillo, D. (2003). (Re)constituição do ideário de futuros professores de Matemática num contexto de investigação sobre a prática pedagógica. (*Tesis Doctoral)*. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Lebrun, V., & Zapata-Cardona, L. (2017). Una Perspectiva Crítica para la Enseñanza de la Estadística. *XXVII Simposio Internacional de Estadística – 5th International Workshop on Applied Statistics.* Medellín, Antioquia, Colombia.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: a sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 46*, 87–113.

Lesser, L. M. (2007). Critical Values and Transforming Data: Teaching Statistics with Social Justice. *Journal of Statistics Education, 15*(1), 1–21.

Lopes, C. E. (2008). O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cedes*, *28*(74), 57–73.

Loya, H. (2008). Los modelos pedagógicos en la formación de profesores. *Revista Iberoamericana de Educación, 3*(46), 1–8.

MacGillivray, H., & Pereira-Mendoza, L. (2011). Teaching Statistical Thinking Through Investigative Projects. En C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School*

MathematicsChallenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study (pp. 109–120). New York: Springer.

Radford, L. (2013). Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. Santo Domingo, República Dominicana.

Sánchez, S. G. (1998). *Fundamentos para la investigación educativa. Presupuestos epistemológicos que orientan al investigador.* Santa fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Santos, R., & Ponte, J. P. (2014). Ensino e aprendizagem de investigações estatísticas: dois estudos de caso com futuras professoras. *Quadrante*, *23*(2), 47–68.

Sayago, S. (2014). El análisis del discurso como técnica de investigación cualitativa y cuantitativa en las ciencias sociales. *Cinta de Moebio*(49), 1–10.

Schön, D. A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones.* Barcelona: Paidós.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica.* (P. Valero, Trad.) Bogotá: Una Empresa Docente (Trabajo original publicado en 1994).

Skovsmose, O., & Valero, P. (2012a). Rompimiento de La Neutralidad Política: EL Compromiso Crítico de la Educación Matemática con la Democracia. En P. Valero, & O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 1–23). Bogotá: Una Empresa Docente.

Skovsmose, O., & Valero, P. (2012b). Acceso Democrático a Ideas Matemáticas Poderosas. En P. Valero, & O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 25–61). Bogotá: Una Empresa Docente.

Souza, L. d., Lopes, C. E., & Pfannkuch, M. (2015). Collaborative professional development for statistics teaching: a case study of two middle-school mathematics teachers. *Statistics Education Research Journal*, *14*(1), 112–134.

Vanegas, Y. M., & Giménez, J. (2011). Futuros profesores de matemáticas y ciudadanía. *XIII CIAEM – IACME*. Recife, Brasil.

Vanegas, Y., Giménez, J., & Font, V. (2015). Aprender a formar en ciudadanía en la formación de profesores de matemáticas. En R. Flores, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Velásquez Gómez, R. (2017). 2017 confirma tendencia al calentamiento global. *El Colombiano*. Publicado 2 de mayo de 2017 en http://www.elcolombiano.com/medio-ambiente/en-2017-prosigue-el-calentamiento-global-LK6419836.

Weiland, T. (2016). Towards a framework for a critical statistical literacy in high school mathematics. En M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil, & J. A. Eli (Eds.), *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 984–991). Tucson, AZ: The University of Arizona.

Zapata-Cardona, L. (2016). ¿Estamos promoviendo el pensamiento estadístico en la enseñanza? *Segundo Encuentro Colombiano de Educación Estocástica (2 ECEE).* Bogotá, Colombia.

Zapata-Cardona, L., & González-Gómez, D. (2017). Imágenes de los profesores sobre la estadística y su enseñanza. *Educación Matemática*, *29*(1), 61–89.

Investigación en Educación Matemática. Experiencias en el Semillero MATHEMA

Alexander **Castrillón-Yepes**
Universidad de Antioquia
Colombia
alexander.castrillony@udea.edu.co
Gilberto de Jesús **Obando** Zapata
Universidad de Antioquia
Colombia
gilberto.obando@udea.edu.co

Los Semilleros de Investigación surgen en 1996 en la Universidad de Antioquia, Colombia, como una estrategia extracurricular para el fomento de la investigación (Molineros, 2009). Más tarde, esta estrategia se extiende a diferentes universidades del país, promoviendo la consolidación de espacios como los Encuentros Nacionales e Internacionales de Semilleros de Investigación y de redes como la Red de Semilleros de Investigación de la Universidad de Antioquia (RedSIN U. de A.) y la Red Colombiana de Semilleros de Investigación (RedCOLSI).

Oquendo, González y Castañeda (2001) definen los semilleros como "comunidades de aprendizaje donde confluyen estudiantes y profesores de diferentes profesiones y disciplinas con el propósito de buscar una formación integral" (p.13). También se definen como "espacio donde los estudiantes son los protagonistas de su propio aprendizaje, y en últimas, los responsables de construir su propio conocimiento y de adquirir actitudes y aptitudes propias para el ejercicio de la investigación y la ciudadanía" (p.13). Sin embargo, actualmente, existen diferentes definiciones de Semilleros de Investigación, según la institución en la que se enmarcan estos espacios. De manera particular, la Universidad de Antioquia conserva elementos esenciales de la estrategia según sus propósitos iniciales, reconociéndolos como comunidades de aprendizaje extracurriculares conformados por estudiantes de pregrado y posgrado, profesores y demás personas que por voluntad propia decidan participar. Asimismo, la institución reconoce la diversidad de estos espacios de formación, tanto en sus formas de organización como en sus actividades e intereses.

De manera particular, el Semillero MATHEMA de la Universidad de Antioquia es un espacio de formación ofrecido por el grupo de investigación MATHEMA-FIEM (Formación en Investigación en Educación Matemática) desde el año 2014. Este Semillero se propone construir reflexiones y proponer estrategias que atiendan a los problemas que atañen la formación matemática en los distintos niveles escolares. Asimismo, el Semillero se visiona como un espacio de formación con altos estándares de calidad y con capacidad de impactar crítica y creativamente el sistema educativo; para cumplir con este propósito, cuenta con una serie de actividades y aliados que contribuyen a la formación de sus integrantes.

El semillero está conformado por estudiantes de diferentes programas de Licenciatura (formación de profesores) de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, por profesores de la misma Facultad y colegas investigadores de otras instituciones. Dentro de las actividades del semillero se resaltan: la participación en redes a nivel local y nacional (RedSIN y Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática, respectivamente), la presentación de ponencias a nivel local, nacional e internacional, la promoción de intercambios académicos y de experiencias, la escritura científica, la publicación en revistas, las actividades de formación (talleres, cafés con el experto, foros, seminarios) y la realización de proyectos de investigación.

En el Semillero se promueve la formación en investigación, el trabajo en equipo y la interdisciplinariedad, a través de relaciones horizontales, posibilitando la búsqueda y generación de conocimiento y procesos de colaboración entre pares con el fin de fortalecer la comunidad de educadores matemáticos del país. Adicionalmente, el Semillero se piensa como una estrategia de importancia para la formación de futuros investigadores que constituyan el relevo generacional de los investigadores del grupo MATHEMA, y del país en general.

El grupo MATHEMA ha logrado conservar el semillero de manera permanente durante 5 cohortes que se consolidaron a lo largo de su historia, en las cuales se generaron trabajos y reflexiones alrededor de la Modelación Matemática en Educación Matemática, las Tecnologías Digitales en Educación Matemática, el Análisis y la Producción de material educativo, y el Álgebra Escolar. Sin embargo, durante este recorrido se identificaron algunos retos para la estrategia de Semilleros de Investigación como la permanencia de los integrantes, algunos suelen abandonar el espacio una vez terminado su pregrado; la falta de estímulos institucionales para continuar con sus estudios de posgrados; el exceso de carga académica dentro de los programas académicos; las jornadas laborales; y la necesidad de consolidar más semilleros en el campo.

Frente a este último aspecto se resalta el Encuentro de Semilleros realizado en el decimoséptimo Encuentro Colombiano de Matemática Educativa-2018 (ECME-17), como una oportunidad para conocer lo que realizan los diferentes Semilleros del campo en el país y para promover la constitución de estos espacios de formación. En este encuentro se resaltó la importancia de promover trabajos interinstitucionales entre los Semilleros, la necesidad de promover la participación de los mismos en eventos académicos y la construcción de redes nacionales e internacionales de Semilleros en el campo.

Así, en el póster se mostrarán los aspectos teóricos y metodológicos del Semillero, las principales actividades realizadas, los logros y los retos futuros. Con este se espera tejer diálogos con colegas de otras regiones de las américas, que permitan comunicar la experiencia del Semillero MATHEMA y fortalecer estrategias de trabajo colaborativo.

Referencias bibliográficas

Molineros, L. F. (2009). Orígenes y dinámica de los semilleros de investigación en Colombia: la visión de los fundadores. *Popayán: Universidad del Cauca.*

Oquendo, S., González, S., y Castañeda, B. (2001). Semilleros de investigación: una emergencia en pos del conocimiento y la ciudadanía. *REDSIN–Red Semilleros de Investigación de la Universidad de Antioquia, Medellín.*

Uso de una trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual para anticipar la comprensión e interpretar el pensamiento de los niños

Julia **Valls** González
Facultad de Educación, Universidad de Alicante
España
Julia.valls@ua.es
Gloria **Sánchez-Matamoros** García
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Alicante
España
gsanchezmatamoros@us.es
Mar **Moreno** Moreno
Facultad de Educación, Universidad de Alicante
España
mmoreno@ua.es

Resumen

Esta comunicación pone el foco en la adquisición de la mirada profesional de los estudiantes para maestro de educación infantil sobre la magnitud longitud y su medida, a través del uso de una trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual. Esta competencia docente implica interrelacionar las destrezas de identificar estrategias, interpretar/anticipar la comprensión y tomar decisiones de acción. El objetivo es analizar las diferencias entre anticipar la comprensión de los niños desde tareas seleccionadas por los estudiantes para maestro e interpretar el pensamiento matemático de los niños a partir de situaciones de enseñanza-aprendizaje, haciendo uso de una trayectoria de aprendizaje como herramienta conceptual. Los resultados muestran más dificultades de los estudiantes para maestro para anticipar la comprensión de los niños que para interpretar su pensamiento. Esta diferencia puede deberse a que la anticipación implica imaginar un contexto de enseñanza y posibles respuestas de los niños, actividad algo compleja sin experiencia docente.

Palabras clave: mirar profesionalmente, trayectoria de aprendizaje, instrumento conceptual, educación infantil, magnitud longitud y su medida.

Introducción y Marco teórico

Desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes es uno de los objetivos de la formación del profesorado actualmente. Esta competencia se conceptualiza, según Jacobs, Lamb y Philipp (2010), en tres destrezas interrelacionadas: describir las estrategias utilizadas por los estudiantes, interpretar/anticipar la comprensión de estos y decidir cómo responder basándose en la comprensión interpretada/anticipada.

Según la revisión realizada por Stahnke, Schueler y Roesken-Winter (2016) sobre investigaciones recientes, acerca de la adquisición de la mirada profesional, la mayoría de ellas describen cómo los estudiantes para maestro interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes. Sin embargo, son escasas las que se centran en anticipar la comprensión de los estudiantes como una tarea profesional integrada en la planificación (Llinares, Fernández y Sánchez-Matamoros, 2016). Norton, McCloskey y Hudson (2011) subrayan la importancia de que el profesor anticipe e interprete lo que los estudiantes pueden hacer cuando están resolviendo ciertos problemas matemáticos para ayudarles a progresar en su aprendizaje.

En esta investigación nos planteamos como objetivo analizar las diferencias entre anticipar la comprensión de los niños desde tareas seleccionadas por los estudiantes para maestro e interpretar el pensamiento matemático de los niños a partir de situaciones de enseñanza-aprendizaje, haciendo uso de una trayectoria de aprendizaje como herramienta conceptual.

La trayectoria de aprendizaje para la magnitud longitud y su medida utilizada en esta investigación es una adaptación de Sarama y Clements (2009), consta de: (a) un objetivo de aprendizaje; (b) la progresión en el aprendizaje considerando los elementos matemáticos que definen la magnitud longitud (reconocimiento, conservación y transitividad) y la medida de la longitud (unidad de medida-unicidad, iteración, acumulación-, relación entre el número y la unidad de medida, y universalidad de la medida) (Tabla 1); y (c) tareas instruccionales.

Tabla 1

Una progresión en el aprendizaje de la longitud y su medida (adaptado de Sarama y Clements, 2009)

Nivel	Progresión del desarrollo
1	Reconocen la magnitud longitud: • Identifican las cualidades de la magnitud longitud. • Realizan comparaciones directas considerando la longitud de forma intuitiva.
2	Reconocen la conservación de la longitud: • Realizan comparaciones directas por desplazamiento de los objetos.
3	Utilizan la propiedad transitiva para realizar: • Comparaciones indirectas • Ordenaciones de objetos. • Medidas de longitudes.
4	Identifican una unidad de medida: • Reconocen la unicidad de la unidad de medida. • Realizan iteraciones de la unidad de medida • Reconocen la propiedad de acumulación.
5	Reconocen la universalidad de la unidad de medida Reconocen la relación entre número y unidad de medida. Comienzan a hacer estimaciones

Para caracterizar cómo usan los estudiantes para maestro de educación infantil una trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual hemos adaptado la perspectiva de la génesis instrumental (Drijvers y Trouche, 2008; Verillon y Rabardel, 1995) en la que se diferencia entre artefacto e instrumento. En nuestra investigación (Sánchez-Matamoros, Moreno, Pérez-Tyteca y Callejo, 2018), el artefacto es la información que debe ser aprendida (la trayectoria de aprendizaje) y el instrumento se genera cuando el estudiante para maestro la usa de manera significativa para anticipar la comprensión e interprete el pensamiento matemático de los niños. El proceso por el que la información de una trayectoria de aprendizaje se convierte en instrumento se llama génesis instrumental, y consiste en la formación de esquemas instrumentales (de uso o de acción instrumental) entendidos como formas estables de realizar las tareas (Drijvers y Trouche, 2008).

Los esquemas de uso son esquemas elementales básicos, directamente relacionados con el artefacto, y sirven como bloques de construcción de los esquemas de acción instrumental. Estos esquemas de acción instrumental, propios del proceso de instrumentación, son los que permiten al estudiante entender las potencialidades y restricciones de la información dada por la trayectoria de aprendizaje y se constituyen progresivamente en técnicas que le habilitan para dar una respuesta efectiva a las tareas a resolver. El primer esquema de acción instrumental se desarrolla cuando el estudiante para maestro usa el modelo de progresión en el aprendizaje de la magnitud y su medida, para anticipar la comprensión e interpretar el pensamiento matemático de los niños. Y un segundo esquema de acción instrumental se desarrolla cuando el estudiante para maestro, a partir de la comprensión anticipada, usa los tipos de tareas y el modelo de progresión del aprendizaje para proponer nuevas tareas que favorezcan la progresión del aprendizaje. La instrumentación de una trayectoria de aprendizaje implica la coordinación de ambos esquemas de acción instrumental, lo que permitirá al estudiante para maestro/a usar toda la información de la trayectoria de aprendizaje (objetivos, progresión en el desarrollo de la comprensión y tareas) para gestionar las tareas profesionales.

Así pues, el objetivo de esta investigación se concreta en la siguiente pregunta:

¿Cómo los estudiantes para maestro de educación infantil anticipan las características de la comprensión e interpretan el pensamiento de los niños usando una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida como instrumento conceptual?

Método

Los participantes son 23 estudiantes para maestro de educación infantil (EPM) matriculados en la asignatura “Aprendizaje de la Geometría” del “Grado en Maestro en Educación Infantil” de la Universidad de Alicante. Uno de los módulos de enseñanza de esta asignatura fue “La longitud y su medida en Educación Infantil” el cual constaba de cinco sesiones de 100 minutos y en cada una de ellas los EPM debían resolver una tarea profesional. En las distintas sesiones del módulo se le propusieron tareas profesionales para interpretar el pensamiento matemático de los niños de infantil a través de situaciones de enseñanza-aprendizaje (registros de la práctica en forma de videos y/o de interacción entre alumnos/as y maestra) en la que se le planteaban tres preguntas para ayudar a los EPM a mirar de forma estructurada el pensamiento matemático de los niños, apoyándose en una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida (Tabla 1) o bien, tareas profesionales en las que debían seleccionar tareas para anticipar la comprensión apoyándose en la trayectoria de aprendizaje. Una vez resueltas las tareas profesionales individualmente, se analizaban y discutían las respuestas de los EPM, en gran grupo.

Instrumento de recogida de datos

El instrumento de recogida de datos está formado por las tareas profesionales de las sesiones 4 y 5 del módulo de enseñanza “La longitud y su medida en Educación Infantil”.

La tarea profesional de la sesión 4 (Tabla 2) tiene como objetivo que los EPM anticipen las características de comprensión que podrían poner de manifiesto los niños (apartados 2 y 3), a partir de una tarea seleccionada por ellos/as (apartado 1), y tomen decisiones para favorecer la progresión del aprendizaje de estos (apartado 4).

Tabla 2.

Tarea profesional de anticipación a resolver por los/las EPM

Selecciona una tarea de la magnitud longitud y su medida para Educación Infantil (libros, proyectos, web, etc.) e indica: 1. Objetivo de aprendizaje de la tarea. 2. Elementos matemáticos necesarios para realizar la tarea 3. ¿Qué características de la comprensión debería mostrar un niño que fuera capaz de resolverla? 4. ¿Qué tarea propondrías a continuación para avanzar en la comprensión de la magnitud longitud y su medida? Diséñala, indica el objetivo de aprendizaje y justifica tu respuesta.

La tarea profesional de la sesión 5 (Figura 1) tiene como objetivo que los EPM interpreten distintas características de la comprensión de la magnitud longitud y su medida puestas de manifiesto por cuatro niños (Mario, Almudena, Luis y Elena) en la interacción de estos con su maestra en una situación de aula (pregunta 2).

Situación de enseñanza-aprendizaje

Alicia es una maestra de infantil de una escuela pública. La edad de sus alumnos se encuentra entre los cinco y seis años. Hace una semana que empezó a introducir la magnitud longitud y su medida. Hoy aprovechando la clase de plástica propone a los niños hacer collares usando diferentes materiales (cuentas de colores y distintos tipos de macarrones) y cordones de varios tamaños (A, B y C):

Una vez que le ha propuesto la actividad, los niños eligen sus cuerdas y accesorios y empiezan a confeccionar los collares. Terminados los collares, Alicia les pregunta a los niños:

Maestra: *¿Quién ha hecho el collar más largo?*

Mario: *He hecho el collar con la cuerda en forma de bastón* [cuerda C] *y he usado 13 macarrones* [ha utilizado macarrones de varios tipos].

Almudena: *Seño, yo he hecho un collar con la cuerda rosa* [cuerda A] *y he usado 15 estrellitas* [las estrellitas están muy separadas]

Luis: *El mío tiene 12 macarrones* [ha utilizado todos del mismo tamaño] *y he cogido la cuerda que tiene forma de ensaimada* [cuerda B], *pero es más largo que el de Mario porque la cuerda es más larga.*

Elena: *Yo también he utilizado la cuerda rosa* [cuerda A] *y he usado 20 estrellitas* [las estrellitas están todas juntas]

Almudena: *luego el más largo de los collares es el de Elena.*

A partir de las respuestas dadas por los niños, Alicia les pregunta:

Maestra: *¿Estáis de acuerdo?*

Mario: *No seño, yo no estoy de acuerdo con Luis, porque el mío tiene más macarrones.*

Preguntas a los estudiantes para maestro:

Pregunta 1. Indica los **elementos matemáticos** que, desde el punto de vista de la maestra, son necesarios para realizar la tarea.

Pregunta 2. ¿En qué **nivel de comprensión** situarías a cada uno de los niños del diálogo? Razona tu respuesta a partir de las características puesta de manifiesto y justifica usando las intervenciones de los niños.

Pregunta 3. Suponiendo que eres Alicia, **propón una tarea** para seguir profundizando en la comprensión de la magnitud longitud y su medida para el niño/a que consideras está en el nivel más bajo y para el que está en el nivel más alto.

Figura 1. Tarea profesional de interpretar el pensamiento de los niños (3-5 años) a resolver por los EPM

Una vez interpretada la comprensión de estos (Mario y Almudena, nivel 1; Luis y Elena, nivel 4), a partir de los elementos matemáticos implícitos en sus respuestas (pregunta 1), tomen decisiones para favorecer la progresión del aprendizaje de estos (pregunta 3).

Análisis de Datos

Los datos son las respuestas de los EPM a las tareas profesionales propuestas en las sesiones 4 y 5. El análisis cualitativo de estas respuestas se ha realizado en dos fases (Figura 2). En la primera, se analiza el uso que hacen los EPM de la trayectoria de aprendizaje para resolver las dos tareas profesionales. En la segunda, se hace un análisis conjunto del uso que hace de la trayectoria de aprendizaje un mismo EPM en las dos tareas profesionales.

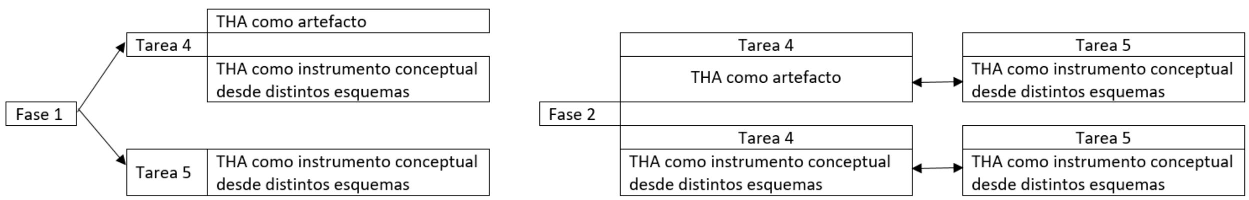


Figura 2. Esquema de análisis

En la primera fase, respecto a la tarea profesional 4 se analiza, en primer lugar, si la tarea seleccionada y el objetivo de aprendizaje, propuesto por los EPM, son coherentes. Este análisis proporcionó dos grupos de EPM: los que seleccionaron tareas con objetivos no coherentes y, en consecuencia, consideraron la trayectoria como un artefacto (G1) y, los que la usaron como un instrumento conceptual al seleccionar una tarea y proponer un objetivo coherente (G2). A continuación, se analizan las respuestas del G2 para identificar los esquemas de acción instrumental que se desarrollan para anticipar la comprensión de los niños (Moreno, Sánchez-Matamoros, Pérez-Tyteca y Valls, 2018). Asimismo, se analizan las respuestas de los EPM a la tarea profesional 5 para ver cómo usan la trayectoria de aprendizaje para interpretar el pensamiento matemático de los niños. Todos los EPM en esta tarea han considerado la trayectoria de aprendizaje como un instrumento conceptual y han desarrollado distintos esquemas.

En la segunda fase, se compara cómo ha usado cada EPM la trayectoria de aprendizaje en las dos tareas profesionales. Los resultados obtenidos se describen en el epígrafe siguiente.

Resultados

Los resultados muestran dos grupos de EPM. Aquellos que no usan la trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual para anticipar la comprensión pero sí para interpretar el pensamiento matemático de los niños, y los que la usan como instrumento conceptual tanto para anticipar la comprensión como para interpretar el pensamiento matemático de los niños (Figura 3).

Los 15 EPM que tienen dificultades con la tarea de anticipación, no usaron la información de la trayectoria para establecer un objetivo coherente con la tarea y/o anticipar la comprensión del niño, considerando, la trayectoria como un artefacto. Por el contrario, en la tarea de interpretar el pensamiento matemático de los niños, fueron capaces de usar la trayectoria como instrumento conceptual, construyendo diferentes esquemas de acción instrumental: seis de ellos construyeron el primer esquema de acción instrumental en magnitud y/o medida; siete coordinaron ambos esquemas de acción instrumental para magnitud o medida y, dos instrumentaron la trayectoria (Figura 3).

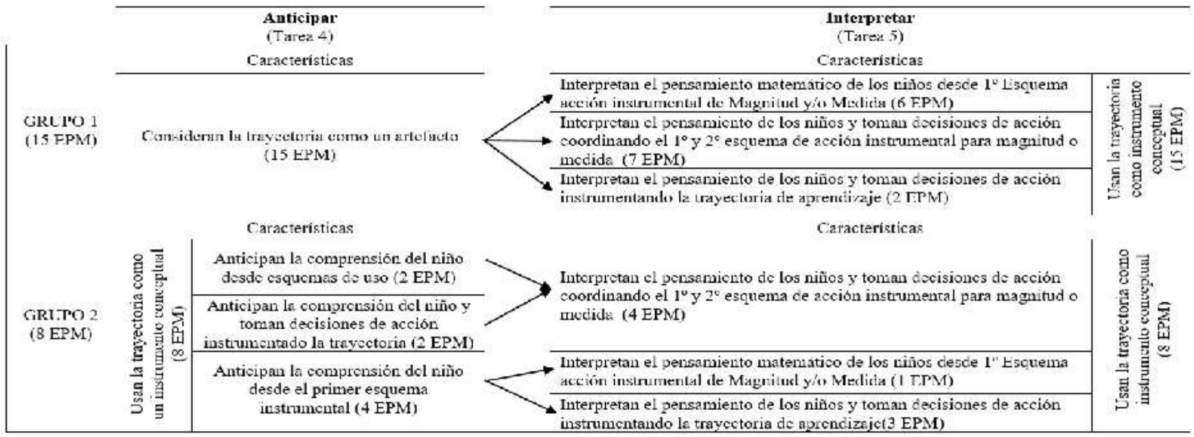


Figura 3. Características del uso de la trayectoria de aprendizaje en las tareas de anticipar e interpretar

Por ejemplo, Nerea (E1-2), tal como se muestra en la tabla 3, seleccionó una tarea sobre capacidad que no se correspondía con la magnitud longitud. Dos de los tres objetivos planteados hacen referencia a la capacidad y el tercero no es coherente con la tarea. Nerea toma como artefacto la trayectoria de aprendizaje al considerar que en la resolución de la tarea están implícitos los elementos de transitividad y universalidad de la medida que no son necesarios en esta. Por ello ha anticipado unas características de la comprensión inapropiadas y ha propuesto una nueva tarea que no favorece la progresión en el aprendizaje de los niños.

Tabla 3

Respuesta de Nerea a la tarea de anticipación

Tarea seleccionada	**Objetivos establecidos**
Presentar tres cajas de distintos tamaños y tres pelotas cuyo tamaño se corresponda con el de las cajas. Se pide a los niños que introduzcan las pelotas en las cajas.	• Identificar los conceptos de pequeño, mediano y grande • Clasificar las pelotas por tamaño • Experimentar con la medida
Elementos Matemáticos implícitos	**Características de la comprensión anticipada**
De Magnitud: Transitividad puesto que los niños y niñas observan que la pelota pequeña es menor que la mediana y esta menor que la grande, consecuentemente la pequeña también menor que la grande. De Medida: Universalidad de la unidad de medida ya que cualquier niño o niña obtendrá el mismo resultado en cuanto a introducir la pelota correcta en la única caja posible	Deben realizar comparaciones directas, comparando las cajas y las pelotas para darse cuenta que son de distinto tamaño. También adquirir la propiedad transitiva lo que le permitirá hacer ordenaciones de más de dos objetos. (Transición del nivel 2 al 3)
Nueva tarea para progresar	
Coger objetos cotidianos de la clase y usando las mismas cajas, introducir esos objetos en la correspondiente caja según su tamaño, de esta forma conseguirán realizar comparaciones indirectas utilizando las pelotas como intermediario.	

Sin embargo, Nerea al resolver la tarea de interpretar el pensamiento matemático de los niños usó la trayectoria como instrumento conceptual desde el primer esquema de acción instrumental para magnitud (Figura 3), es decir, usó el modelo de progresión de la trayectoria sólo para interpretar el pensamiento matemático de Mario y Almudena, que los sitúa en el Nivel 1 de comprensión al no darse cuenta del tamaño de las cuerdas (conservación de la magnitud).

Por otro lado, Nerea no fue capaz de proponer una nueva tarea para que Mario y Almudena progresaran en su aprendizaje (Tabla 4), ni tampoco interpretó el pensamiento matemático de Luis y Elena al no considerar los elementos relativos a la medida.

Tabla 4

Respuesta de Nerea a la tarea de interpretar

Compresión interpretada de los alumnos	**Nueva tarea para progresar de nivel**
• A Mario lo situaría en el nivel 1, no diferencia el tamaño de la cuerda, toma como base el número de macarrones sin tener en cuenta el tamaño. Dice que su collar es más grande que el de Luis por tener mayor número de macarrones, cuando la cuerda de Luis es de tamaño mayor. Mario no compara las cuerdas, observa la cantidad de macarrones. • Almudena parece encontrarse, también en el Nivel 1, se centra en el número de estrellas sin comparar el tamaño de las cuerdas.	• Para Mario y Almudena Medir las mesas del aula con cuerdas del mismo tamaño o diferente comparando las medidas de las mesas.
• Luis, podría estar en el nivel 3 ya que comparar y sabe que su cuerda es más larga que la de Mario y además parece que lo asegure con el número de macarrones hace una observación indirecta como si mediera con el número de macarrones del mismo tamaño. • Elena, se encuentra en el nivel 3, sabe que es más larga y usa también una observación o comparación indirecta usando las estrellitas y poniéndolas todas juntas.	• Para Luis y Elena

Los ocho EPM que usaron la trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual, tanto para anticipar la comprensión como para interpretar el pensamiento matemático de los niños, desarrollaron distintos esquemas. Dos de ellos anticiparon la comprensión desde esquemas de uso y coordinaron ambos esquemas de acción instrumental para magnitud o medida al interpretar el pensamiento de los niños. Uno desarrolló el primer esquema de acción instrumental tanto para anticipar la comprensión como para interpretar el pensamiento de los niños. Tres anticiparon la comprensión desde el primer esquema de acción instrumental e instrumentaron la trayectoria al interpretar el pensamiento de los niños. Y, por último, solo dos instrumentaron la trayectoria de aprendizaje tanto al anticipar la comprensión como al interpretar el pensamiento de los niños (Figura 3).

Conclusiones

Los resultados muestran la dificultad que han tenido la mayoría de los EPM (15 de 23 EPM) para anticipar la comprensión de los niños al no proponer objetivos de aprendizaje coherentes con las tareas seleccionadas lo que supone un obstáculo para anticipar dicha comprensión. Este hecho tiene importancia para el futuro profesional de los EPM ya que de tratarse de una situación real de aula, las tareas propuestas no favorecerían el aprendizaje de los niños. Convendría reforzar el análisis de tareas desde los elementos matemáticos implícitos en ellas y los aprendizajes que de estos se desea lograr. Sin embargo, todos los EPM han usado la trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual para interpretar el pensamiento de los niños. Esta diferencia puede deberse a que la anticipación implica imaginar un contexto de enseñanza y a partir de este, anticipar una comprensión de los niños usando la trayectoria de aprendizaje, mientras que en la actividad de interpretar el pensamiento matemático de los niños ya se dispone de este contexto de enseñanza en el que sólo deben identificar evidencias de la comprensión de los niños y relacionarlas con la trayectoria de aprendizaje.

En general la mayoría de los EPM han tenido dificultades para proponer tareas que favorecieran la progresión de los niños desde el nivel de comprensión en el que se encontraban. El hecho de que estas nuevas tareas siguieran una progresión curricular y no cognitiva, podría deberse a la dificultad de los EPM en relacionar el conocimiento matemático del concepto magnitud y medida con el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los niños lo que resulta coherente con lo señalado en otras investigaciones (Choy, 2016; Santagata y Yeh, 2016; Wilson, Stanjn, Edgington y Myers 2015).

Agradecimientos

Esta investigación ha recibido ayuda de los proyectos EDU2017-87411-R, MINECO/ FEDER, España, y Prometeo/2017/135 de la Generalitat Valenciana.

Referencias y bibliografía

Choy, B.H. (2016). Snapshots of mathematics teacher noticing during task design. *Mathematics Education Research Journal, 28*, 421-440.

Drijvers, P. & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*, *2*, 363-392.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Llinares, S., Fernández, C., & Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education,* 2016, **12**(8), 2155-2170.

Norton, A., McCloskey, A., & Hudson, R.A. (2011). Prediction assessments: Using video-based predictions to assess prospective teachers' knowledge of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(4), 305-325.

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Callejo, M.L., Pérez-Tyteca, P., & Valls, J. (2017). Desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente": un estudio de caso. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 457-466). Zaragoza: SEIEM.

Sanchez-Matamoros, G., Moreno, M., Pérez-Tyteca, P., & Callejo, M.L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 21*(2), 203-228.

Santagata, R., & Yeh, C. (2016). The role of perception, interpretation, and decision making in the development of beginning teachers' competence. *ZDM, 48*(1-2), 153-165.

Sarama J. & Clements D. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. London and New York: Routledge.

Stahnke, R., Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM-Mathematics Education, 48,* 1–27.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European journal of psychology of education*, *10*(1), 77.

Wilson, P.H., Sztajn, P., Edgington, C., & Myers, M. (2015). Teachers' use of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education, 66*(3), 227-244.

El proceso de derivación en GeoGebra: un estudio sobre el conocimiento matemático de futuros profesores

Cesar **Martínez** Hernández
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Colima
México
cmartinez7@ucol.mx
Yuliana Nayeli **Marmolejo** Rebolledo
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Colima
México
yuliana_marmolejo@ucol.mx
David Sadrac **Parra** Soto
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Colima
México
david.parrasoto08@gmail.com

Resumen

La investigación aborda la problemática del uso de herramientas tecnológicas y la formación de profesores en torno a su Conocimiento Matemático de la derivación de funciones algebraicas; en particular, sobre las técnicas de derivación requeridas y de los procesos algebraicos involucrados en éstas. La investigación, de corte cualitativo, se sustentó en los elementos teóricos del modelo llamado Conocimiento Matemático para la Enseñanza, la Aproximación Instrumental (AI) y los Registros Semióticos de Representación. Con base en el tipo de funciones propuestas a los futuros profesores, el contraste de sus técnicas (en el sentido de la AI) de papel y lápiz con el uso de GeoGebra, produjo tres tipos de respuestas en la población participante: respuestas equivalentes en ambos ambientes, respuestas incorrectas en el ambiente de papel y lápiz, y creencia de que sus respuestas de papel y lápiz son correctas.

Palabras clave: formación de profesores, conocimiento matemático, uso de tecnología

Antecedentes

Uno de los intereses de la investigación en Educación Matemática versa en torno al Conocimiento Matemático en alumnos del nivel superior, en particular sobre conceptos del cálculo diferencial; diversas investigaciones dan cuenta de ello (e.g., Díaz, 2009; Flores, 2013, entre otras). Es decir, el aprendizaje del cálculo, mediante distintos medios, es una problemática reconocida en la investigación. En este reporte, se aborda dicha problemática con futuros profesores respecto al proceso de derivación de funciones algebraicas en ambiente GeoGebra.

Una de estas variables es la formación y profesionalización de los profesores de matemáticas; por ejemplo, respecto a los tipos de conocimiento que deben tener; entre otros, el Conocimiento Común del Contenido Matemático (Ball, Thames y Phelps, 2008), el cual subraya el conocimiento del contenido en la parte especifica de lo matemático. Respecto al conocimiento matemático que deben desarrollar los futuros profesores, para grados preuniversitarios, una de las principales problemáticas se refiere a su aprendizaje de distintos conceptos del cálculo diferencial, por ejemplo, el de función, límites, derivadas, etc. (Flores, 2013).

Sobre el concepto de derivada, varias investigaciones muestran dificultades que presentan los estudiantes del nivel universitario en su aprendizaje. Por ejemplo, Ubuz (2002) menciona diferentes concepciones erróneas que manifiestan los alumnos, entre otras, no diferenciar la derivada puntual con la función derivada; o bien, confundir la ecuación de la recta tangente con la función derivada. Incluso hay problemáticas asociadas a los procesos algebraicos involucrados. En este sentido, es conocida la problemática sobre las dificultades en el aprendizaje del cálculo que estudiantes del nivel superior presentan sobre el tipo de errores algebraicos que cometen en el proceso de derivación (Díaz, 2009).

En el caso de la derivada, la cual es un límite, los procesos de derivación y el álgebra involucrada en éstos sólo se discuten en el registro algebraico y se deja de lado la discusión con otros tipos de registro. Lo anterior puede deberse a que usualmente se trabaja en ambiente de papel y lápiz y se hace énfasis en el registro algebraico. De esta manera, una vía que puede incidir en potenciar el aprendizaje es utilizar recursos tecnológicos que permitan el trabajo matemático mediante distintos registros. Duval (2006) dice que la originalidad de la actividad matemática está en movilizar parcialmente, al menos dos registros de representación al mismo tiempo, o la posibilidad de cambiar de un registro a otro todo el tiempo. De la misma manera en que Presmeg (1997) se menciona la importancia del uso de representaciones para el caso de las funciones, lo es para el concepto de derivada. Más aún, para los procesos de derivación y los resultados que se obtienen con éstos. De aquí la importancia de utilizar herramientas tecnológicas que permitan el trabajo con diferentes sistemas de representación.

En cuanto a los beneficios, la incorporación de tecnología como un medio alternativo para promover aprendizajes sobre el cálculo de derivadas (y de los procesos algebraicos involucrados) puede ser pertinente si se explotan al menos dos registros de representación como lo indica Duval (2004). En este mismo sentido, de acuerdo con Lagrange (2005), las capacidades numéricas, gráficas, simbólicas y de programación de las nuevas herramientas tecnológicas, juegan un papel importante en el futuro de la enseñanza de las matemáticas, no sólo como ayuda pedagógica sino como un vehículo para nuevas aproximaciones.

De acuerdo con los antecedentes planteados en esta sección, el problema de investigación que se reporta consistió en analizar el desarrollo del Conocimiento Matemático sobre la derivación de funciones algebraicas de futuros profesores de matemáticas cuando utilizan GeoGebra. Específicamente se plantea la siguiente pregunta: ¿Qué reflexiones emergen en los futuros profesores de matemáticas cuando contrastan técnicas de papel y lápiz y la técnica GeoGebra en la derivación de funciones algebraicas?

Referentes teóricos

Los elementos teóricos que sustentaron la investigación, tanto para el diseño de las Actividades (tareas) para la recopilación de datos como para su análisis fueron los siguientes. En primer lugar, se tomó de referencia al modelo sobre los tipos de conocimiento del profesor de matemáticas llamado Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés) (Ball, et al. 2008). En tanto que el estudio se enfoca en el Conocimiento Matemático de los futuros profesores, esta investigación sólo se enfocó en uno de los seis elementos que dicho modelo refiere: el conocimiento común del contenido matemático.

De acuerdo con Ball et al. (2008), el MKT se compone de dos grandes dominios; los cuales, a su vez se integran de tres tipos de conocimiento para la enseñanza de las matemáticas. La primera componente, Ball y sus colaboradores la llaman Subject Matter Knowledge, es decir conocimiento sobre el área específica, en este caso el de las matemáticas, y la primera componente de éstas tres la identifican como *Common Content Knowledge* (Conocimiento Común del Contenido matemático, CCK). Éste se refiere al conocimiento sobre las matemáticas que posee cualquier persona relacionada con esta área, por lo que no es propio para la enseñanza, pero es fundamental. Los otros componentes de este modelo son el conocimiento especializado, el conocimiento en el horizonte, conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimeinto del contenido y la enseñanza y el conocimiento del contenido y el currículum. Como ya se mencionó, en este estudio sólo se tomó en cuenta el primero de los seis componentes.

En segundo lugar, dado que los participantes trabajarían tanto en un ambiente de papel y lápiz como en GeoGebra para derivar funciones propuestas en las Actividades, otros de los elementos de la investigación provienen de la llamada Aproximación Instrumental del uso de herramientas tecnológicas (AI), en su vertiente antropológica (Artigue, 2002; Lagrange, 2003; Lagrange, 2005). En esta perspectiva de la construcción del conocimiento matemático, tres conceptos son importantes. El primero de ellos es el de Tarea, el cual se define como el problema a resolver. El segundo es el de Técnica, el cual se refiere a la forma o maneras de resolver la Tarea dada; por último, la Teoría, refiere a la explicación o justificación que sustenta la Técnica.

Dentro de la aproximación instrumental, cuando se utilizan herramientas tecnológicas que permiten resolver cierta tarea, por ejemplo los manipuladores simbólicos, para resolver, desarrollar, factorizar, etc. se consideran como una de las maneras en que el individuo puede resolver un problema. Es decir, las técnicas "tecnológicas" (como el uso de comandos) se consideran formas de resolver ciertas tareas. Usualmente, a las técnicas sólo se les confiere un valor pragmático; sin embargo, Artigue y sus colegas mostraron que también poseen un valor epistémico, es decir, permite una comprensión de los objetos matemáticos que involucra la Tarea, particularmente durante la construcción de las Técnicas. En este sentido, las Técnicas, de acuerdo con Lagrange (2005, p. 116) pueden usarse para distinguir y reorganizar las Tareas, si existen diferentes formas de resolver una Tarea (i.e. diferentes Técnicas). Así, cuando se utiliza alguna herramienta tecnológica que permite resolver cierta Tarea, se está considerando como una forma más que el usuario tiene para abordar el problema a resolver. Además, las Técnicas son el objeto de reflexión conceptual cuando son comparadas con otras y cuando su consistencia es discutida (Lagrange, 2003, p. 271).

Finalmente, dado que los alumnos trabajarían en al menos dos registros de representación, algebraico y gráfico, un tercer elemento teórico fue considerado: los Registros de Representación Semióticos (RRS) (Duval, 2006). Como es ampliamente conocido en el medio de la investigación sobre representaciones semióticas, de acuerdo con Duval (1999), el pensamiento matemático requiere activar en paralelo dos o tres RRS. Por lo tanto, para Duval, la coordinación de registros no es la consecuencia de entender las matemáticas, al contrario, es una condición necesaria.

Método

Los elementos metodológicos tomados en cuentas para llevar a cabo la investigación fueron los siguientes.

Participantes

Los futuros profesores participantes en este estudio fueron 14 estudiantes (E1, E2,…, E14, en adelante) de una Universidad Pública de México, quienes al momento de la toma de datos cursaban el 8º semestre unos, y el 6º semestre, otros, de una licenciatura en educación media especializada en matemáticas, enrolados en un curso extracurricular sobre el uso de GeoGebra. Tenían además, la experiencia de estar utilizando sistemáticamente este software de Geometría dinámica en algunos de sus cursos previos, durante al menos un año. Cada uno de los estudiantes trabajo de manera individual, previo a una discusión grupal de sus respuestas. Cada uno de ellos contó con una computadora para utilizar GeoGebra cuando fuera necesario, de acuerdo con las actividades.

Diseño de Actividades (Tareas)

Para el acopio de datos, se diseñaron tres actividades, cada una de ellas con una Tarea principal: Derivar una función dada. En términos de la Aproximación instrumental, las tres actividades incluyen preguntas técnicas y teóricas, además de promover un trabajo tanto en el registro algebraico, tanto en papel y lápiz como en GeoGebra, y trabajo en el registro gráfico, sólo en GeoGebra. Para identificar las diferentes formas que los alumnos derivan ciertas funciones y la explicación que proveen, las actividades incluyen las siguientes funciones:

- Actividad 1: involucra derivar $f(x) = (2x-3)^2$, $g(x) = 4x^2 - 12x + 9$ y $h(x) = 4x^2 - 9$.
- Actividad 2: incluye la derivación de $f(x) = x^3(5x^2-3) + x$, $g(x) = 5x^5 - 3x^3 + x$ y $h(x) = 5x^6 - 3x^3$.
- Actividad 3: se propone derivar $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$, $g(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{8x+1}}$ y $h(x) = (\frac{2x-3}{8x+1})^{\frac{1}{2}}$.

Las actividades incluyen tres momentos de trabajo: primero involucra derivar sólo con papel y lápiz en el registro algebraico. Segundo, involucra la derivación en GeoGebra y el uso de los registros algebraico y gráfico. El tercer momento incluye una serie de preguntas de reflexión sobre sus respuestas en ambos ambientes.

Fuentes de información

Los datos obtenidos provienen de las siguientes fuentes de información: hojas de trabajo de cada estudiante, archivos GeoGebra generados por cada uno de ellos, videograbación de las sesiones (una por cada actividad) y notas de campo del investigador. Dichas fuentes sirvieron para poder llevar una triangulación de datos.

Resultados

De acuerdo con los datos recabados, para las dos primeras actividades, ninguno de los participantes tuvo mayores problemas para resolver de manera correcta la tarea propuesta (derivar las funciones), ni para interpretar los resultados que se obtienen en GeoGebra. Sin embargo, hubo tres tipos de respuesta, para la tercera actividad, producto de sus reflexiones del trabajo con GeoGebra que emergieron en los alumnos, y que son representativos para cuando sus Técnicas y Teoría son, débiles en algunos casos, y sólidos en otros. El uso de GeoGebra como Técnica para resolver la Actividad 3, les permite obtener las funciones derivadas (Figura 1).

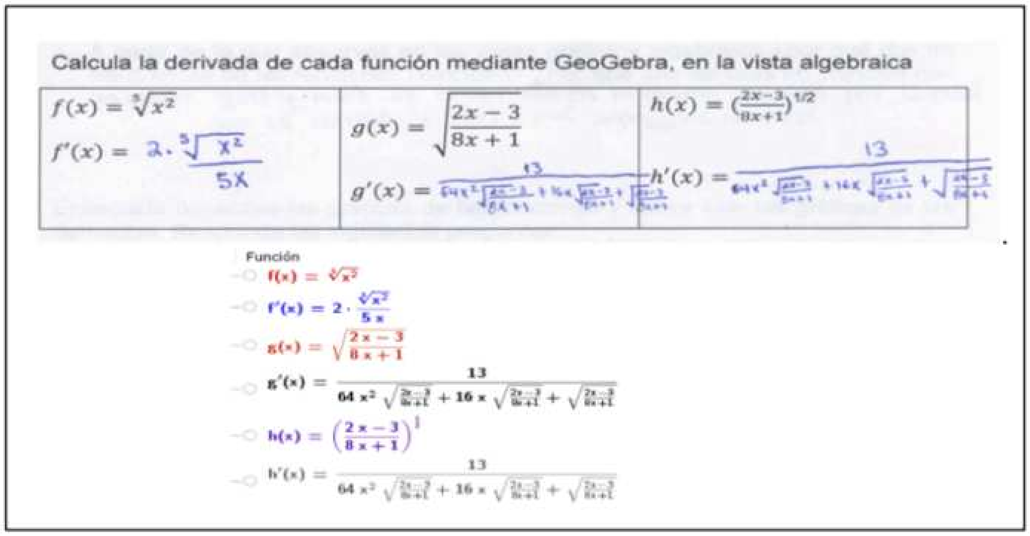


Figura 1. Resultados obtenidos con GeoGebra por E7

Como se observa en la Figura 1, GeoGebra les permite resolver la Tarea y obtener funciones derivadas en el mismo registro algebraico, pero con representaciones equivalentes. Es decir, se trata de respuestas que no concuerdan con las que ellos obtienen con papel-y- lápiz, se trata de representaciones equivalentes, en el mismo registro. Este tipo de respuestas, puede ser importante para promover reflexiones de carácter teórico, tal como lo señalan Kieran y Drijvers (2006). Para aquellos participantes que se muestran seguros de sus respuestas de papel-y-lápiz, esto no parece causarles confusión alguna. Sin embargo quienes no están seguros de sus primeras respuestas sí les causa ciertas dudas sobre sus procedimientos de papel-y-lápiz. Como se muestra a continuación. Las respuestas de los participantes respecto a su trabajo de papel-y-lápiz y los que obtienen con GeoGebra pueden clasificarse de la siguiente manera:

1) sus resultados son correctos pero no coinciden con los de GeoGebra.
2) sus resultados son incorrectos y no coinciden con los obtenidos en GeoGebra.
3) creencia de que sus respuestas son correctas aunque no coincidan con las de GeoGebra.

Las siguientes Figuras 2, 3 y 4 muestran cada uno de estos casos, respectivamente. Para el primero, se muestra el trabajo de E5 (Figura 2), donde si bien comete errores de notación sus respuestas finales son correctas.

El segundo caso, donde las respuestas son incorrectas y no coinciden con GeoGebra, es posible que uno de los factores que influyó en ello y por los cuales no coincidieron sus derivadas fue que el tiempo que tuvieron para terminar esta tarea, o bien que el futuro profesor no contaba con el conocimiento suficiente para calcular las derivadas en papel-y-lápiz. La Figura 3 (Trabajo de E1) muestra este ejemplo.

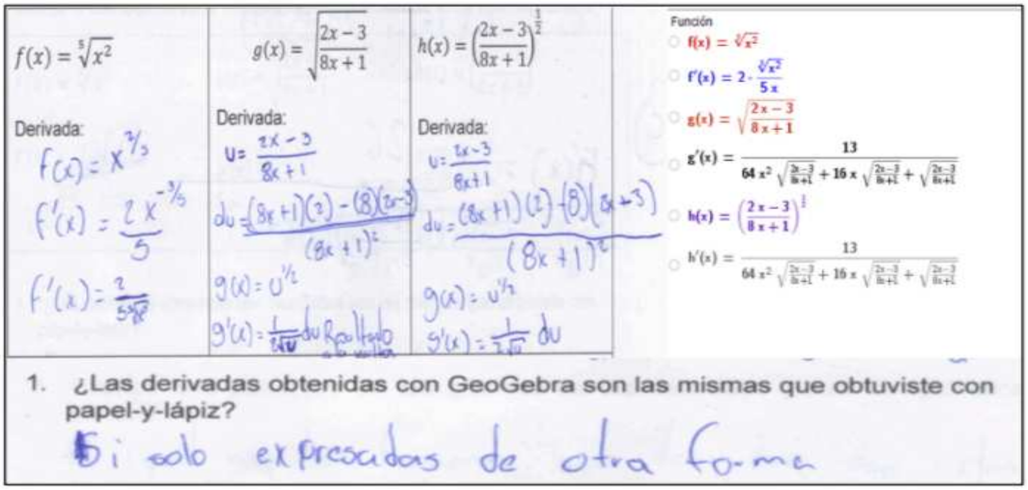


Figura 2. Resultados son correctos pero no coinciden con los de GeoGebra.

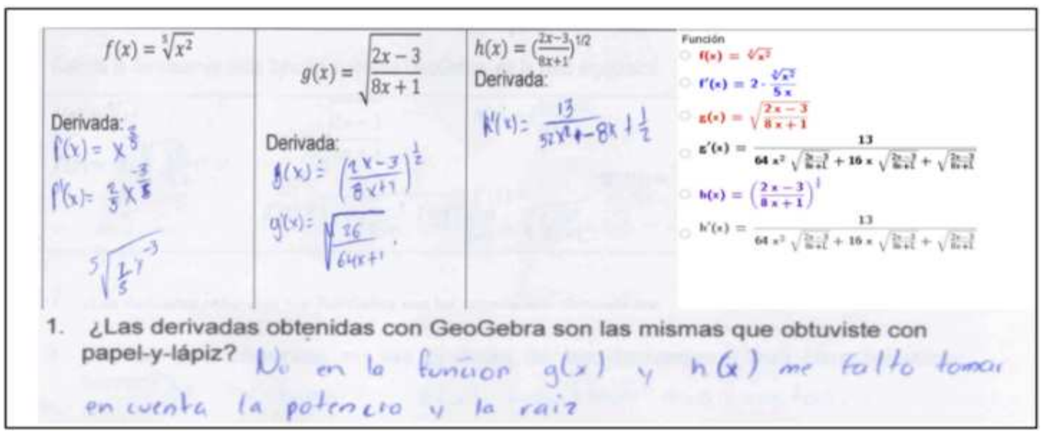


Figura 3. Resultados incorrectos y no coinciden con los obtenidos en GeoGebra.

En el tercer caso (Figura 4) muestra el trabajo de E9, por la respuesta del participante, él cree que sus respuestas están correctas al observar que en GeoGebra dos de las derivadas son iguales; al comparar con sus respuestas con papel-y-lápiz él también obtiene dos derivadas iguales (que difieren con las dadas por GeoGebra), a partir de este hecho, el participante argumenta que sólo le falta simplificar la derivada, para tenerlas en la misma forma que GeoGebra las expresa. Es decir, piensa que sus respuestas de papel y lápiz sí están correctas sólo que escritas en una representación algebraica diferente o bien que su proceso no está completo.

Como puede observarse, el futuro profesor no está del todo seguro si sus respuestas están correctas; cree que sí, ya que en sus respuestas dos de éstas coinciden. Es a partir de esta característica de coincidencia entre dos respuestas (que también se observa en GeoGebra) lo que lo lleva a pensar que sólo le faltó simplificar su resultado, para que fuera igual al de GeoGebra. La Tabla 1, muestra un resumen de lo expuesto en esta sección.

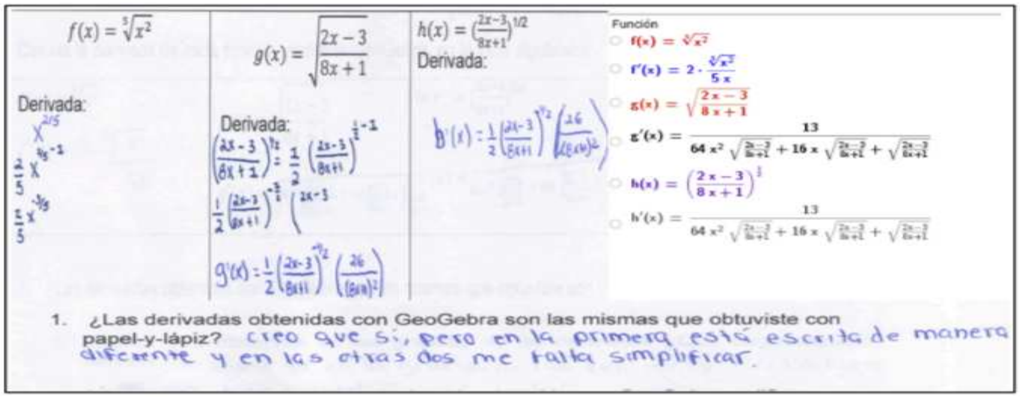


Figura 4. Creencia de respuestas correctas aunque no coincidan con las de GeoGebra.

Tabla 1

Tipos de respuestas al comparar resultados de papel y lápiz con resultados de GeoGebra

Tipo	Frecuencia
Respuestas de papel-y-lápiz correctas pero no coincide con GeoGebra	4
Respuestas de papel-y-lápiz incorrectas	6
Creencia de que sus respuestas de papel-y-lápiz son correctas aunque no coinciden con GeoGebra	4

Fuente: elaboración propia.

La diferencia observable respecto a las Actividades 1 y 2, es que en la Actividad 3 el trabajo con GeoGebra, para varios participantes les permite identificar que sus procedimientos son incorrectos; aunque no son capaces de corregirlos. Se dan cuenta que tienen errores al resolver sus procedimiento a papel-y-lápiz haciendo alusión que debe a un bajo conocimiento y argumentan que necesita repasar algunos procedimientos algebraicos.

Conclusiones

Hasta este momento de la investigación, es posible decir, que para algunas funciones, derivarlas (actividades 1 y 2), no les causó ningún problema; en este sentido, el uso de GeoGebra, no promueve mayores reflexiones. Sin embargo, no fue el caso de actividad 3, donde si hubo discrepancias en los resultados que obtiene algunos estudiantes.

Fueron dos el tipo de reflexiones que emergieron. La primera respecto a una identificación correcta de los resultados (correctos o incorrectos) que obtienen mediante las dos técnicas (papel-y-lápiz y GeoGebra); la segunda, una inconsistencia en la intepretación de los resultados que obtienen, por un lado con papel y lápiz, por otro con GeoGebra: identificarlos como equivalentes cuando no lo son. Respecto a esto, es importante mencionar que ninguno de los participantes utilizó el registro gráfico para justificar la incongruencia o no de las respuestas obtenidas con papel y lápiz a partir de observar las gráficas que en automático el software GeoGebra ofrece para las funciones derivadas. Fue necesaria la intervención del investigador para promover una mayor reflexión de su trabajo, a partir de contrastar los resultados y su consistencia en ambos registros.

Desde el punto de vista de la aproximación instrumental, el uso de GeoGebra, si bien es entendida como una técnica (que utilizaron correctamente) para derivar funciones, no fue incorporada como una herramienta que permite una discusión a nivel teórico, cuando las funciones son "más complejas" de derivar para el usuario. Este resultado concuerda con lo reportado en otros estudios (e.g., Martínez y Ulloa, 2017; Sinclair y Robutti, 2013) acerca de que es necesario mayor tiempo y ayuda por parte del profesor para desarrollar en el usuario de la tecnología la llamada génesis instrumental. En otras palabras, para promover una discusión más efectiva de sus técnicas, con el objetivo de que alcancen un desarrollo teórico.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*, 245-274.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Díaz, J. L. (2009). Los estudiantes de Cálculo a través de los errores algebraicos. *El cálculo y su enseñanza*, *1*, 91-97.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference* (pp. 3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico: PME-NA.

Duval, R. (2004). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143–168.

Flores, A. (2013). Ayudando a futuros profesores a mejorar la comprensión conceptual del cálculo. En A. Cuevas, F. Pluvinage, et al. (Eds.), *La enseñanza del cálculo diferencial e integral* (pp. 43-84). Mexico: Pearson.

Kieran, C. y Drijvers, P. (2006). Th eco-emergence of machine Techniques, paper-and- pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*, 205-263.

Lagrange, J-B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. En J.T. Fey (Ed.), *Computer Algebra Systems in secondary school mathematics education* (pp. 269–283). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lagrange, J-B. (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. En D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 113- 135). New York: Springer.

Martínez C. y Ulloa, R. (2017). Dynamic geometry software and tracing tangents in the context of the mean value theorem. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, *24*(2), 75-82.

Sinclair, N. Y Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of Dynamic Geometry. En M. A. Clements; J. A. Bishop; C. Keitel; J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (571-596). NY: Springer.

Ubuz, B. (2002). Development of calculus concepts through a computer base learning environment. En I. Vakalis (Ed.), *Proceedings of the 2 International Conference on the Teaching of Mathematics* (pp.1-10). Hersonissos, Creta. Grecia : John Wiley & Sons Inc.

La wiki como recurso educativo en el desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas en la formación de docentes de Matemática

Luis Armando **Hernández** Solís
Universidad Estatal A Distancia
Costa Rica
lhernandez@uned.ac.cr
Cristian **Quesada** Fernández
Universidad Estatal A Distancia
Costa Rica
cquesadaf@uned.ac.cr

Resumen

Este trabajo muestra los resultados de un estudio apoyado en el modelo de *Investigación – acción* cuyo propósito principal fue evaluar el uso de la wiki como recurso educativo en el desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas en un ambiente virtual de aprendizaje en la asignatura de *Historia y filosofía de la Matemática* de la carrera Enseñanza de la Matemática de la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica. Los resultados encontrados (evidencia consignada en el aula virtual, instrumentos de evaluación y percepción), respaldan que el uso de esta herramienta contribuyó al logro de los objetivos educativos de la asignatura así como a potenciar capacidades en el estudiante como el trabajo en equipo, el compromiso y actitudes proactivas para la construcción conjunta de ideas. Además, se concluye que tanto la actividad, como la metodología de investigación pueden ser un insumo para procesos de mejora de la calidad educativa en cursos similares.

Palabras clave: Habilidades socio-comunicativas, trabajo colaborativo, herramienta wiki, educación matemática, educación a distancia; historia de la matemática.

Introducción

La asignatura *Historia y Filosofía de la Matemática* forma parte del plan de estudios de la carrera de Enseñanza de la Matemática impartida por la Universidad Estatal a Distancia (UNED) de Costa Rica. Los primeros años que se ofreció la asignatura fue bajo un modelo tradicional de educación a distancia: al estudiante se le entregaba el material de estudio, asistía a tutorías presenciales (no obligatorias) y como parte de la evaluación del curso realizaba dos tareas y una prueba comprensiva (totalidad de temas). Como parte de las continuas acciones de mejora de la carrera, que derivaron en un rediseño del plan de estudios en el 2013, el curso cambia de modalidad y se ofrece de manera 100% en línea mediante la plataforma Moodle.

Lo anterior permitió que se emplearan otras metodologías y recursos para su mediación pedagógica y acompañamiento estudiantil: videos, materiales complementarios multimedia, foros de consulta, entre otros. Además, la manera de evaluar en el curso también cambió: se eliminó la prueba comprensiva presencial y se empezaron a realizar en línea pruebas cortas y foros académicos.

Dado que en la actualidad es indispensable desarrollar habilidades socio-comunicativas y colaborativas que le permitan al futuro docente asumir tareas grupales en los diferentes contextos educativos, surge la interrogante: ¿Cómo propiciar el desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas en los estudiantes de un curso que es totalmente virtual?

Con el fin de responder a esta interrogante mediante el desarrollo de ideas en torno a la evolución histórica y filosófica de las Matemáticas, en el primer cuatrimestre de 2018 se decide implementar la herramienta wiki para la elaboración del proyecto final. De esta manera, el propósito del estudio fue evaluar el uso de la herramienta wiki como recurso educativo en el logro de los objetivos educativos del curso y en el desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas en un ambiente virtual de aprendizaje en la asignatura de *Historia y filosofía de la Matemática*.

Marco referencial

Para Ruiz (2003) el estudio de la historia de la Matemática debe ir más allá de la simple transmisión de verdades absolutas y mecanismos de aprehensión. Ruiz (2003, p. 574) señala "(…) la historia se vuelve esencial cuando se establece un cierto constructivismo socio empírico". Bajo la premisa de que la historia se origina a partir de esfuerzos y contribuciones sociales (aportes parciales), se consideró que la interacción y la construcción colectiva del conocimiento era un aspecto fundamental a potenciar en este curso.

Según afirma Sagol (2011, p. 26) "un trabajo colaborativo es una actividad sostenida por un grupo de personas que realizan diferentes tareas con un objetivo común que depende de la acción de todas ellas. Cada uno es responsable por el grupo y el objetivo se logra a partir de la interacción grupal". Diversos autores mencionan la importancia del trabajo colaborativo en la formación de los estudiantes, especialmente en las ventajas cognitivas que se obtienen del intercambio de ideas y el aporte de la experiencia de vida de cada participante; este trabajo colaborativo no se centra específicamente en el producto académico sino en buscar la mejora en las relaciones sociales, para lo cual es pertinente el analizar tanto la interacción docente – alumno como alumno – alumno. (Slavin, 1993; Serrano y Calvo, 1994, citados por Villasana y Dorrego, 2010).

En relación a los elementos básicos para propiciar el aprendizaje colaborativo, Lucero (2013) destaca la interdependencia positiva, la cual se refiere a la relación que establezca el grupo como distribución de tareas, roles y metas. Además, la interacción producto de la comunicación y la manera en que colaboren para cumplir el objetivo propuesto, común a todos; también hace referencia al desarrollo de habilidades personales y de grupo como: escucha, participación, liderazgo, coordinación de actividades, seguimiento y evaluación.

Por su parte, Villasana y Dorego (2010) destacan la importancia de las habilidades sociales que demuestre un individuo en el entorno en que se desenvuelva. Al respecto indican que

> En el ámbito educativo, con frecuencia estas habilidades no son consideradas significativas a la hora de diseñar e implementar los procesos de enseñanza y de aprendizaje, sin embargo éstas componen elementos esenciales que deben ser tomados en cuenta para garantizar procesos efectivos que además coadyuven al crecimiento personal de los estudiantes. (p. 46)

Los entornos virtuales de aprendizaje se convierten también en un espacio potencial de interacción y colaboración. Según Villasana y Dorrego (2010), este tipo de entornos permiten promover "el trabajo en grupo, promover el aprendizaje activo, crear comunidades de aprendizaje […] y hacer los roles tradicionales del proceso de enseñanza/aprendizaje más fluidos." (p. 52).

En esta línea de pensamiento, autores como Ruiz y Galindo (s.f.) destacan que en todo proceso comunicativo virtual deben de repensarse la manera en que se dan las interacciones y relaciones interpersonales, de modo que las mismas tiendan a ser más horizontales y desestructuradas, esto como consecuencia de la misma naturaleza y exigencia de las relaciones sociales en ambientes de aprendizaje virtual.

Al implementar actividades de trabajo colaborativo en ambientes virtuales de aprendizaje, Mora y Hopper (2016) se refieren a cambios en el rol docente y aspectos a considerar en la elaboración de materiales, actividades, instrucciones, entre otros: apertura y flexibilidad del proceso educativo, aprendizaje autogestionado, espacios para la reflexión, gestionar ambientes de motivación y evaluación continua del proceso de aprendizaje. Entre las ventajas del aprendizaje colaborativo, Mora y Hopper (2016) destacan el promover la organización, el autoaprendizaje y las habilidades de comunicación; entre sus desventajas, hacen referencia a la dependencia de los aportes de los demás individuos y la dificultad para tomar acuerdos.

Entre las principales herramientas que promueven el trabajo colaborativo en ambientes virtuales, está la wiki. Una wiki es un espacio virtual (abierto o dentro de un entorno de aprendizaje) en el cual puede editarse contenido por diferentes usuarios, agregar enlaces a sitios, imágenes, videos, entre otros elementos. Tal y como menciona Area citado por Mora (2012) las wikis constituyen un recurso educativo valioso para el docente ya que las mismas registran el historial de la construcción de un documento, por lo cual resulta factible brindar el seguimiento en los procesos de aprendizaje de los estudiantes, tanto de manera individual como grupal.

De acuerdo a Ruiz, Sánchez y Palomo (citados por Mora, 2012) entre las ventajas de las wikis se encuentran, que la página se escribe y modifica de forma rápida, la interfaz es fácil de navegar y se maneja de manera intuitiva; además permite un uso colectivo, dado el carácter abierto de sus contenidos. Asimismo, la curva de aprendizaje para su uso es baja, ya que prácticamente no se requiere de un conocimiento de ningún tipo. En esta línea, Montenegro y Pujol (2009) consideran que el uso de wiki mejora la experiencia docente en el sentido de visualización y seguimiento del proceso, especificidad de la retroalimentación, reducción linealidad profesor – estudiante. Además, desde el punto de vista del estudiante, el uso de wiki permite flexibilidad horaria, tarea orientada al resultado, retroalimentación y mejora de la dinámica grupal.

Aunque las wikis presentan una gran cantidad de bondades, existen elementos que se deben considerar al utilizarla como recurso educativo. Villanueva (2009) se refiere a ciertos aspectos que pueden darse al utilizar la wiki por parte de los estudiantes, como la falta de contribución regular, falta de contribuciones originales, uso deficiente de la bibliografía y pobre estructuración del contenido. Por lo anterior, se recomienda indicar criterios claros en la rúbrica que acompañe el producto solicitado, así como la inclusión de una coevaluación para que el equipo pueda evaluarse a sí mismo.

En suma, se considera que si bien la temática del desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas ha sido ampliamente discutida en diversos estudios, en su mayoría, ellos hacen mención al modelo de educación presencial tradicional. Por tanto, resulta pertinente explorar recursos (como la wiki) y metodologías que propicien el desarrollo de estas habilidades en un modelo de educación a distancia, en particular en entornos virtuales de aprendizaje.

Metodología

Para dar respuesta a la interrogante planteada se adopta el modelo Investigación – Acción de John Elliot, el cual se define como "un estudio de una situación social con el fin de mejorar la calidad de la acción dentro de la misma" (Elliot, 1993, citado por Latorre, 2003). Es decir, el propósito no solo radica en estudiar el problema sino en realizar acciones que van encaminadas a enfrentarlo en la práctica.

Se opta por este modelo debido a que los cursos de la UNED están en constante evaluación, análisis y rediseño; esto hace que la práctica educativa se convierta en un proceso autoreflexivo en donde la teoría y la práctica se deben articular de forma dinámica. Aquí la Investigación – Acción conecta de forma natural con los mecanismos de mejora de la calidad educativa en la Institución. Respecto a esto, Latorre (2003) señala:

> La enseñanza deja de ser una técnica, un saber aplicar la teoría, para constituirse en un proceso reflexivo sobre la propia practica que lleva una mayor comprensión de las prácticas y contextos institucionales. (p.9)

Según este enfoque metodológico existen tres momentos o etapas: diseño del plan, ejecución del plan y evaluación del plan. Estos forman a su vez un proceso mayor que es cíclico en donde el plan se rectifica para ejecutarlo y evaluarlo de nuevo, y así sucesivamente.

Diseño del plan

Se realizó una investigación bibliográfica que apoyó la decisión de implementar en el curso una de las herramientas de la plataforma Moodle denominada "wiki". Se propuso un proyecto final que consistía en la creación grupal de una wiki en donde se presentaran de forma original varios contenidos que se desarrollaron en el curso. Algunos de los temas planteados fueron: Matemáticas en la Modernidad, Filosofía y fundamentos de las matemáticas, ¿Cuál debe ser el papel de la historia en la enseñanza de las Matemáticas?, ¿Qué son las Matemáticas?, ¿Las Matemáticas se crean o se descubren?, entre otros. Para esto se brindaron varios materiales de apoyo:

- *Proyecto final (instrucciones)*. Documento que presenta las pautas para el producto final.

- *Videos técnicos del uso de la herramienta.* Se pusieron a disposición de los estudiantes dos videos creados por la Universidad denominados: "¿Qué es una wiki y cómo participar?" y "Cómo ingresar y colaborar en la Wiki de Moodle".
- *Foro grupal: Proyecto final*. Se colocó un foro específico para la coordinación, organización y puesta en común de los estudiantes, en este se debían consignar las discusiones y acuerdos de cada subgrupo. El propósito de este fue promover el liderazgo, la discusión, el conflicto cognoscitivo, la evaluación grupal y el proceso de toma de decisiones.
- *Tabla de cotejo*. Muestra los indicadores con que se evaluaría el trabajo. Ver tabla 1.

Tabla 1

Indicadores de la tabla de cotejo

Aspectos generales	
Indicadores	*Descripción*
1. Completitud	Presenta todas las partes completas que se piden para el proyecto.
2. Sistematización de ideas	La información se presenta de forma clara y precisa, tomando las ideas principales (elementos históricos), pero sin profundizar demasiado en ellas.
3. Congruencia de ideas	Los elementos históricos empleados deben estar articulados de forma lógica coherente.
4.Creatividad	Presenta la información de forma diferente para cada unidad, utilizando las diferentes herramientas con las que cuenta la Wiki en la plataforma (incrustar imágenes y videos, tipos de letras, etc.).
5.Originalidad:	El contenido de la wiki debe ser original o debidamente referenciado.
Respecto a las preguntas generadoras planteadas:	
6. Articula las ideas de forma clara y precisa.	
7. Las ideas son el producto de una construcción intelectual colectica, son ideas originales que pueden ser sustentadas de citas textuales debidamente referenciadas.	
8. Las respuestas son congruentes con las lecturas del curso.	
Aspectos referentes al trabajo colaborativo (evaluación individual a partir de la plataforma)	
9. Participación y aportes en el foro grupal.	
10.Participación en la elaboración de la Wiki	

Fuente: Tabla de cotejo aplicada a proyectos finales. 2018.

Ejecución del plan

Se formaron en total seis subgrupos: cinco de cuatro estudiantes y uno de cinco estudiantes. Hay que señalar que la selección no se hizo al azar, ya que se pensó debía haber diversidad, y como el curso estaba avanzado se identificaron varios líderes y estudiantes sobresalientes que fueron distribuidos en cada subgrupo. La colocación de líderes se hizo con el objetivo de que fueran agentes motivadores que impulsaran el trabajo de sus compañeros. Sin embargo, los integrantes de cada subgrupo elegían de forma libre un coordinador. En algunos casos, el coordinador no coincidió con el líder identificado por el profesor.

Evaluación del plan

Para la valoración del plan de acción se diseñaron dos instrumentos: Una tabla de cotejo que evaluaría el producto final según indicadores preestablecidos (Ver tabla 1) y un cuestionario en línea el cual pretendía recolectar las percepciones de los estudiantes respecto al proyecto y al desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas propiciadas en la actividad. Ambos instrumentos tenían como propósito realizar un balance para la toma de decisiones pertinentes para su rediseño.

El cuestionario de percepción estaba compuesto de 15 ítems (tanto de respuesta cerrada como abierta, 6 con escalas de Likert) dividido en tres partes, como se muestra en la tabla 2.

Tabla 2

Estructura del cuestionario de percepción aplicado

C1	Administrativas	P1	Sexo
		P2	Edad
		P3	Centro universitario
C2	Proyecto del curso	P4	Instrucciones del documento de proyecto final (Claridad, Precisión, Utilidad)
		P5	Foro grupal del proyecto (Comunicación fluida y asertiva, Discusión y construcción de ideas, Puesta en común de ideas, Utilidad)
		P6	Rúbrica de evaluación del proyecto (Suficientes, Claros, Precisos, Pertinentes)
		P7	Coevaluación del proyecto
C3	La herramienta wiki	P8	Ventajas del uso de la wiki como recurso educativo
		P9	Desventajas del uso de la wiki como recurso educativo
		P10	Experiencia en trabajos colaborativos
		P11	Experiencia previa en uso de la wiki
		P12	Problemas en el manejo de la herramienta
		P13	Descripción de las dificultades presentadas con el uso de la herramienta
		P14	Posibilidades de mejora en el resultado final
		P15	Valoración general de la wiki como recurso educativo

Simbología
C: corresponde a la categoría a evaluar
P: corresponde a la pregunta realizada.

Fuente: Cuestionario aplicado a estudiantes. 2018.

La totalidad de la población completó el cuestionario de forma anónima, es decir 20 estudiantes (11 mujeres y 9 hombres) que presentaron el proyecto final. La población de estudio tenía un rango de edades entre los 20 y 57 años, donde el 90% tenían 25 años o más; es decir, casi en su totalidad tenían edad adulta. Además, pertenecían a doce centros universitarios distribuidos en las siete provincias en que se compone el país.

Análisis y discusión de los resultados

Respecto a la evaluación del proyecto final, se lograron productos sobresalientes. En los indicadores grupales del 1 al 5 y el 8 (Ver tabla 1) consiguieron puntajes mayores a 3. Tres de los grupos obtuvieron calificación 3 en los indicadores 6 y/o 7. En cuanto a la evaluación individual (indicadores 9 y 10), solo dos estudiantes de diferente grupo obtuvieron calificaciones deficientes de acuerdo a las evidencias consignadas en plataforma; esto fue consistente con la coevaluación que realizaron los grupos respectivos.

De manera cualitativa, las intervenciones en el foro grupal evidenciaron de forma indirecta valores y actitudes deseadas en cualquier profesional y ligadas a habilidades socio-comunicativas, tales como el respeto por el compañero, la responsabilidad individual, el respeto por la diversidad, la valoración del dialogo, entre otros. Hay que señalar que el profesor tutor estuvo periódicamente orientando, supervisando y autorregulando el foro de cada subgrupo.

Aunque la actividad se propuso para los 25 estudiantes matriculados en el curso, 5 de ellos no participaron por diferentes razones, entre ellas la deserción normal del curso (según los registros históricos), por lo que algunos grupos no trabajaron con la totalidad de los integrantes asignados, esto se valoró en la calificación individual.

De acuerdo con los datos recabados con el cuestionario de percepción, en los ítems que se empleó una escala de Likert (1 es deficiente y 5 satisfactorio), se consideró como exitoso o positivo calificaciones de 4 o 5. Respecto a las indicaciones que se brindaron para la realización del proyecto, la totalidad de la población las calificó con 4 o 5 en los tres aspectos que se consideraron relevantes: claridad, precisión y utilidad. En relación a los indicadores propuestos en el instrumento de evaluación, el 90% los consideró claros y precisos y el 85% los encontró útiles. Asimismo, en lo referente a materiales adicionales de consulta y enlaces de interés (videos y biblioteca virtual) el 85% los consideró pertinentes y confiables y el 80% como útiles.

En lo que concierne al foro grupal, el 70% considera que la comunicación entre los compañeros fue fluida y asertiva, el 85% considera que permitió la discusión, construcción y puesta en común de ideas de manera respetuosa, así como el 65% lo juzgó útil para la organización de tareas. Estos porcentajes reflejan un poco lo que se observó en la práctica. Al inicio la comunicación no fue tan fluida para la organización y asignación de tareas y varios grupos no utilizaron mucho este foro, debido a que por lo general empleaban otros medios más ágiles como *WhatsApp*; sin embargo, si fue de gran utilidad para la discusión académica y construcción conjunta de ideas. Se percibió en la observación poca experiencia en el uso de esta herramienta para labores de coordinación y organización.

En relación a la coevaluación realizada, un 90% consideran que poseen las habilidades necesarias para participar en este tipo de evaluación, un 95% indican que la misma contribuye a que exista mayor compromiso así como un 85% señala que favorece a que el producto sea de mejor calidad.

Con respecto a las ventajas del uso de la wiki como recurso educativo en el desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas, el 85% de la población considera que se promueve la responsabilidad, la organización, las habilidades de comunicación y afirman que se trabaja para alcanzar objetivos comunes de aprendizaje. Además, el 90% resalta que se respeta el criterio de los demás y se promueve el autoaprendizaje colaborativo.

En lo referente a las desventajas del uso de la herramienta, solo el 35% de los estudiantes participantes manifiestan que la dificultad para comunicarse con los compañeros de grupo y para la organización de tareas era una desventaja. Además, solamente el 40% de los estudiantes encontraron como desventaja la dificultad para realizar acuerdos y que la herramienta wiki es un poco limitada para realizar otras actividades. El 45% consideró que existe poca responsabilidad por parte de algunos compañeros y el 55% consideró que el depender del aporte de los compañeros es una desventaja.

El 85% de la población manifestaron no haber tenido ninguna dificultad de tipo técnico con el manejo de la wiki al momento de realizar la actividad. Dos estudiantes manifiestan haber tenido dificultad al inicio para introducir imágenes, videos y esquemas en la wiki. Esto es un resultado muy favorable debido a que solo el 45% de los estudiantes había utilizado anteriormente la wiki como recurso educativo. Tres estudiantes señalaron como una de las dificultades que presentaron en la actividad la poca participación de algunos compañeros y dos estudiantes consideraron como obstáculo la comunicación por medio del foro. Dos indicaron no haber tenido dificultades y los demás no realizaron comentarios al respecto.

Finalmente, en relación a la valoración general de la wiki como recurso educativo en el desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas, no hubo comentarios negativos; además 11 estudiantes realizaron comentarios positivos acerca de la actividad, donde destacan los siguientes:

- “Es una herramienta que favorece el trabajo en equipo, apoya con esquemas y resúmenes para el logro del aprendizaje requerido.”
- “Realmente me gustó muchísimo, porque de verdad el trabajar en equipo me hizo ser más responsable, sobre todo con el tiempo, además me permitió ser creativa y elaborar distintas actividades que hagan la información más atractiva, es algo abierto que me permite ser innovador.”

Conclusiones y recomendaciones

Mediante la valoración integral y cualitativa de los productos, y con base en los resultados obtenidos en los indicadores establecidos en los instrumentos de evaluación, se concluye que esta actividad contribuyó al logró del propósito del curso: Ofrecer una visión panorámica de la historia y filosofía de las matemáticas de nuestro tiempo, abordando los procesos históricos más importantes y significativos de las matemáticas y sus implicaciones en el desarrollo de la ciencia.

En comparación con los datos de los años 2016 y 2017, no hubo cambios significativos en el nivel de aprobación de la asignatura, que fue de un 64%; además, tanto la deserción como la reprobación del curso se mantuvieron similares (4% y 32% respectivamente). No obstante, específicamente en el proyecto de la wiki, el 90% de los estudiantes participantes obtuvieron notas superiores o iguales a 9 de un puntaje máximo de 10; esto puesto que los productos se juzgaron como sobresalientes en cuanto a presentación y contenido. Esto puede deberse a que el profesor tutor estuvo en comunicación constante, y a lo largo del proceso de elaboración del proyecto se brindaron bastas retroalimentaciones que lograron que los productos fueran de gran calidad. Esto se puede consignar como una recomendación si se desea implementar el uso de la wiki en alguna otra asignatura. Asimismo, otro aspecto que pudo incidir en el éxito de esta actividad es que (según la percepción de los estudiantes) los materiales y recursos suministrados fueron claros, confiables, pertinentes y útiles para la realización de la tarea.

Por otra parte, gran cantidad de estudios destacan la importancia del desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas en la formación universitaria; no obstante, se ha detectado una carencia de información entorno a esta temática en educación a distancia, en particular en carreras de formación inicial en la enseñanza de la Matemática. Es por esto que a partir de los resultados obtenidos y la percepción de los estudiantes, se considera esta experiencia no solo exitosa, sino que podría ser de gran utilidad y replicable en cursos similares.

En el modelo de educación a distancia, el estudiante tiende a ser muy individualista y puede ver como dificultad u obstáculo el tener que coordinar y depender de compañeros para la elaboración de una tarea educativa. Es por esto que este proceso debe desarrollarse de manera paulatina pero constante; además, que debe contar con acompañamiento y orientación del profesor para lograr resultados positivos.

Luego de efectuar este estudio y tomar en cuenta las conclusiones que arrojó, se hace pertinente valorar no solo la actividad como tal, sino también la metodología de investigación empleada, para los procesos de mejora de la calidad en otras asignaturas de la carrera Enseñanza de la Matemática.

Referencias bibliográficas

Latorre, A. (2003). *La investigación-acción: Conocer y cambiar la práctica educativa*. Editorial Graó. Barcelona, España.

Lucero, M. M. (2013). *Entre el trabajo colaborativo y el aprendizaje colaborativo*. Revista Iberoamericana de Educación, 1-20. Recuperado **https://rieoei.org/historico/deloslectores/528Lucero.PDF**

Montenegro, M. y Pujol, J. (2009). *Evaluación de la wiki como herramienta de trabajo colaborativo en la docencia universitaria*. RED – Revista de Educación a Distancia. Número monográfico X. Número especial dedicado a Wiki y educación superior en España (en coedición con Red-U). 15 de diciembre de 2009. Recuperado de **http://www.um.es/ead/red/M10/**

Mora, F. (2012). *Posibilidades educativas de la wiki*. Tecnología en Marcha. Vol. 25, Nº 3. Recuperado de **https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4835639.pdf**

Mora, F. y Hooper, C. (2016). *Trabajo colaborativo en ambientes virtuales de aprendizaje: Algunas reflexiones y perspectivas estudiantiles.* Revista Electrónica Educare, 20(2), 1-26. Recuperado de **http://dx.doi.org/10.15359/ree.20-2.19**

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las Matemáticas*. EUNED. San José, Costa Rica.

Ruiz, E. y Galindo, L. (s.f.). *Competencias comunicativas en un proceso de formación docente en el entorno colaborativo de aprendizaje virtual.* Recuperado de **http://www.virtualeduca.red/documentos/23/Ponencia%20Formaci%C3%B3n%20docente%20.pdf**

Sagol, C. (2011). *El modelo 1 a 1. Notas para comenzar*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Universidad Estatal a Distancia. Programa de Aprendizaje en línea. (Publicado el 13 de setiembre de 2017). *¿Qué es una wiki y cómo participar?* Recuperado de **https://youtu.be/_D0r0Zne1mo**

Universidad Estatal a Distancia. Programa de Aprendizaje en línea. (Publicado el 15 de febrero de 2016). *¿Cómo ingresar y colaborar en la wiki de Moodle?* Recuperado de **https://youtu.be/HfC1vp1LzjM**

Villanueva, A. (2009). *Uso de wikis en Ingeniería Informática*. Red U - Revista de Docencia Universitaria. Número Monográfico V. Número especial dedicado a WIKI y educación superior en España (II parte), en coedición con Revista de Educación a Distancia (RED). 31 de diciembre de 2009. Recuperado de **https://www.um.es/ead/red/M12/10-Villanueva.pdf**

Villasana, N. y Dorrego, E. (2010). *Habilidades sociales en entornos virtuales de trabajo colaborativo*. Recuperado de **https://ried.utpl.edu.ec/sites/default/files/pdf/v%2010-2/3.-%20habilidades-sociales.pdf**

La clasificación en Educación Infantil: cómo diseñan actividades los maestros en formación

Noemí **Pizarro** Contreras
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Chile
noemi.pizarro@umce.cl

Blanca **Arteaga** Martínez
Universidad de Alcalá
España
blanca.arteaga@uah.es

Resumen

La tarea de clasificar se inicia en el niño de manera muy temprana, y se considera fundamental en la preparación en los contenidos pre numéricos. Sin embargo, son pocas las investigaciones realizadas sobre las tareas desarrolladas por el maestro en el diseño de actividades que las impulsen o consoliden. El presente trabajo recoge una actividad realizada por 117 futuros maestros de infantil en formación, donde se diseñan actividades, antes y después de una lección específica sobre clasificación, impartida en la universidad, que incorpora el material manipulativo en el diseño. Los resultados apuntan a tareas muy guiadas que no facilitan la autonomía del niño, tras la formación, muestran una buena adquisición de las tipologías de clasificación, sin embargo no tienen en cuenta el juego como herramienta, algo que contradice las necesidades del escenario de aprendizaje en estas primeras edades.

Palabras clave: educación infantil, matemática, clasificación, formación.

Introducción

La Educación Infantil en España constituye una etapa escolar hasta los seis años. Durante este periodo el niño inicia su formación matemática de manera formal, dando prioridad a todo lo que constituye el pensamiento lógico, e iniciándose por trabajos donde preparar al niño para tareas posteriores de mayor abstracción resulta fundamental.

El niño inicia la tarea de la clasificación desde edades tempranas, con acciones como formar conjuntos de colores entre sus piezas de construcción o montar garajes especiales para colocar sus automóviles de juguete en una u otra planta dependiendo sus características. A su vez, el maestro de Educación Infantil inicia su tarea de enseñar aspectos matemáticos a los estudiantes con una tarea de categorización, la clasificación.

Podemos considerar esta tarea de clasificación como un saber lógico, que se integrará en un conjunto de saberes junto a la seriación o enumeración que preparará al niño para un aprendizaje posterior del número natural y las formas geométricas; "clasificar supone abstraer de los objetos determinados atributos esenciales que los definen" (Chamorro, 2005, p. 126). Además la clasificación puede considerarse también de utilidad para otras áreas del currículo en estas primeras edades; como la geometría, al establecer clasificaciones disjuntas de rectángulos y cuadrados (Clements y Sarama, 2011).

La tarea de clasificar "implica la aplicación o descubrimiento de una regularidad, clasificatoria" (Ruesga, Giménez y Orozco, 2005, p. 130), que dadas las características de la etapa se suele poner en escena a través del juego. Esta tarea de clasificar permanece desde niños hasta adultos, dado que mantener una organización en las cosas o situaciones nos facilita su comprensión.

El maestro como adulto "manifiesta frecuentemente sus habilidades clasificatorias en circunstancias diversas, sea ordenando simplemente el material disperso ubicado en su mesa" (Bermejo, 1985, p. 211). Además, debe considerar la habilidad de clasificar inherente al quehacer matemático, considerándolo en diversas actividades de aula, dado que la clasificación requiere que el niño construya o acepte reglas que el maestro define para la acción. La selección de materiales debe ser reflexiva tanto para el maestro como para los alumnos, "más que la forma de los materiales y las tareas, es importante que tengan significado" (Clements y Sarama, 2009, p. 329).

De este modo, al diseñar actividades para trabajar la clasificación en el aula, utilizaremos las recomendaciones de tipologías dadas por Maza y Arce (1991): formación de un concepto, dicotomía, división y doble dicotomía. La formación de un concepto requiere una primera selección. Por ejemplo, si está jugando con todos sus juguetes, el niño elige "los vehículos", situándolos por ejemplo en el garaje, estaremos entonces formando el concepto. El garaje contendrá coches, motos, camiones y otros vehículos de ruedas; posteriormente si aísla una característica del conjunto de elementos; pensemos que el niño será capaz de seleccionar las "motos", haciendo así dos subconjuntos "los que son motos" y los que no lo son, estaremos ante una dicotomía. La división es lo que podemos llamar una clasificación simple o aditiva, colocaría todos los vehículos por ejemplo en función de su tipología: coche, moto, camión, etc. Por último, la doble dicotomía requiere una división en cada una de las clases definidas en la dicotomía simple, siguiendo el ejemplo anterior, podría clasificar en función del tipo de vehículo y el color, a esta clasificación la llamaremos multiplicativa.

Cuando diseñamos una actividad de clasificación, hemos de tener en cuenta tanto una clasificación en sentido positivo como negativo. La negación como operador lógico unitario es fundamental para comprender relaciones más complejas de operadores binarios como la conjunción o la disyunción (González, 1991). Trabajando con actividades desde la negación, podremos prevenir dificultades de razonamiento, desde la argumentación, refutación o demostración (Fernández Bravo, 2007).

La representación de las tareas puede facilitar la comprensión de las relaciones lógicas, para ello "los árboles relacionales permiten analizar las relaciones lógicas que los niños realizan y establecer paso a paso en el proceso resolutivo, así como identificar las causas detrás de sus errores" (Ruesga, Valls y Lisbõa, 2011, p. 61).

El maestro como aprendiz

El maestro como aprendiz se sitúa en una posición donde debe dominar el contenido al tiempo que las teorías sobre la enseñanza y el aprendizaje, partiendo de experiencias anteriores propias que le facilitarán la actuación en su posterior desempeño (Scheuer y Pozo, 1999).

El análisis de cómo el maestro interpreta el contenido curricular, puede facilitar la interpretación y actuación en su práctica (Rodrigo, Rodríguez y Marrero, 1993). Para ello, un posible momento de especial reflexión para analizar la práctica del maestro es durante su periodo formativo, de manera que la guía del profesor de la universidad pueda ayudarle a gestionar un proceso reflexivo que le conduzca a un aprendizaje significativo entre lo que se sustenta en su experiencia previa y la práctica pedagógica que descubre y aprende durante sus estudios de Grado en Magisterio.

El aprendizaje tiene lugar si se construyen situaciones de aula donde el estudiante pueda vincular la información nueva con los conocimientos que adquirió con anterioridad (Peterson, Fennema & Carpenter, 1989). Cuando el aprendiz es un maestro hemos de plantearnos que el proceso es más complejo dado que el aprendizaje es "más de lo que los maestros hacen realmente en el aula y se extiende a la conducción fuerzas detrás de las acciones del profesor: sus cogniciones" (Artzt, et al., 2015, p. 22).

Para que el maestro aprenda es necesario que vivencie un escenario similar al que va a encontrarse posteriormente en su aula, en caso contrario, el maestro replicará una forma de enseñar muy similar a la que se utilizó con él, poco adaptada a su realidad. Por ello, es importante diseñar actividades que faciliten la reflexión, permitiendo al docente "conectar sus pensamientos con sus acciones, posibilitándole cambiar su comportamiento en el aula de clases" (Jiménez, Limas y Alarcón, 2016, p. 140). Los maestros en formación necesitan "interpretar situaciones matemáticas a fin de identificar formas de mejorar el pensamiento matemático de los niños" (Lee, 2017, p. 229).

Metodología

La experiencia se desarrolla en la Universidad de Alcalá (España), con estudiantes del penúltimo año del Grado en Magisterio de Educación Infantil. La muestra está compuesta por 117 futuros maestros que trabajan en grupos construidos de manera aleatoria durante los primeros minutos de la sesión. Se forman 27 grupos, de entre 2 y 6 personas. Tenemos un diseño cuasi experimental, con una tarea inicial, una intervención y una tarea final. El estudio tiene un carácter descriptivo.

Se pide a los grupos que desarrollen actividades de aula para trabajar la clasificación en un aula con niños, de 3 o 4 años. Para ello se reparte en cada uno de los grupos un material, algunos de ellos cotidianos en la vida del niño y otros propios del juego infantil (Figura 1). La actividad se desarrolla en la segunda semana de clases del curso y tiene una duración de dos horas. Consideramos que durante la etapa infantil, la interacción con los materiales resulta fundamental para "el desarrollo de estructuras de su pensamiento además de influir en su conducta general y en el propio rendimiento" (Laorden y Pérez, 2002, p.137), por lo que resulta fundamental que el maestro de manera previa desarrolle tareas donde pueda interaccionar con ellos.

Figura 1. Algunos de los materiales con los que se trabajó en la actividad de clasificación.

La actividad se diseña para trabajarse en dos tiempos, donde cada grupo conserva el material durante toda la sesión de clase. En el primer tiempo, los futuros maestros a la vista del material, diseñarán actividades para trabajar la clasificación; en este momento no se ha explicado nada sobre el contenido pedagógico-didáctico sobre la clasificación, los aprendices para maestro ponen en escena su conocimiento de matemáticas informales. En el segundo tiempo, la profesora (formadora de maestros) relata la lección, y los futuros maestros realizan de nuevo la actividad. Consideramos que, de esta manera, la formadora de maestros controla la instrucción de una manera guiada e involucrando al futuro maestro en la actividad a través de un proceso reflexivo en grupo, desde la experiencia primero y más tarde desde la teoría del área.

A partir de lo anterior, el objetivo general de este estudio es categorizar las actividades de clasificación que desarrollan los maestros en formación en educación infantil, antes y después de recibir una instrucción específica sobre estos contenidos. Para ello se plantean dos objetivos específicos; el primero pretende categorizar las actividades de acuerdo a la cantidad de características solicitadas (aditiva, si es una, o multiplicativa, si es más de una) así como la autonomía que se deja al niño en la actividad diseñada, por medio de las instrucciones entregadas por los futuros maestros. Para valorar si ha habido un cambio con la instrucción, se define el segundo objetivo específico desde la observación de la incorporación de los contenidos vistos en clase, como la negación, los árboles de clasificación, y las cuatro formas de clasificación: formación de concepto, dicotomía, división y doble dicotomía (Maza y Arce, 1991).

La formación se centra en el conocimiento específico sobre las formas de clasificación que se pueden hacer, pero además se muestra un conocimiento psicopedagógico sobre la forma de enseñarlo en aula, utilizando para ello tarjetas de atributos, tablas y árboles de clasificación; de esta manera se puede considerar que la instrucción tiene las características señaladas por Shulman (1993) sobre el conocimiento didáctico del contenido.

Resultados

Observamos que antes de recibir la lección, los futuros maestros en su mayoría diseñan actividades centradas en una única característica o atributo (88.46%), mientras que muy pocos utilizan más de una (3.85%). Por el contrario, tras la lección, los futuros maestros aumentan las características que se incluyen en la actividad, con un 96.30 % para las aditivas y un 74.07 % para las multiplicativas (Figura 2).

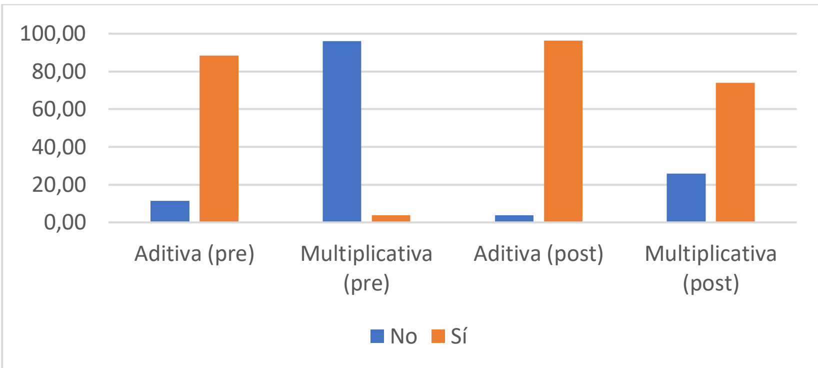


Figura 2. Descripción del trabajo según si clasifican de acuerdo a una o más características.

Al observar la relación entre antes y después de la lección, utilizamos la prueba de McNemar para valorar si hubo o no un cambio en la respuesta de tipo dicotómico, teniendo en cuenta que se cumplen las hipótesis necesarias para su aplicación. La hipótesis nula indica que los cambios se deben al azar y no a la lección recibida. En el caso aditivo, los datos indican (p-v=.375) que no ha habido cambios. En el caso multiplicativo, podemos decir (p-v=.00) que ha habido cambios con la lección recibida, en el sentido, que los futuros maestros desarrollan actividades con más de una característica implicada. Esto puede indicar que la formación ayuda al diseño de actividades dirigidas a una instrucción adecuada para niños de edades tempranas en la línea de la hipótesis de Bermejo (1989), cuando señala que "los niños pequeños prefieren emplear un solo criterio para clasificar, mientras que los mayores utilizan sobre todo dos o tres criterios" (p. 39).

También se observa que las actividades diseñadas por los futuros maestros son muy guiadas y no dejan autonomía al niño (Figura 3). Todas las actividades diseñadas se dan en modo directo (Ruesga, Valls y Lisbõa, 2011).

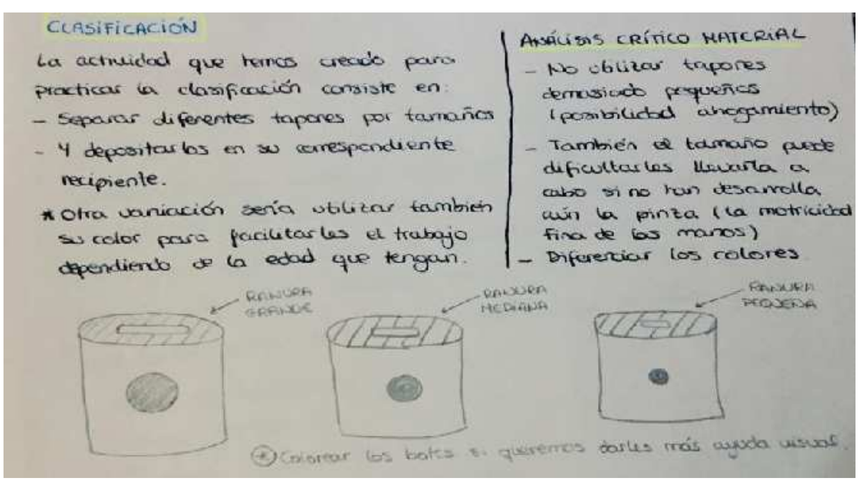


Figura 3. Ejemplo de actividad diseñada por los futuros maestros, previa a la instrucción.

Los resultados globales comparando entre el antes (pre) y después de la instrucción (post) indican que muy pocos dan autonomía suficiente al niño (Figura 4).

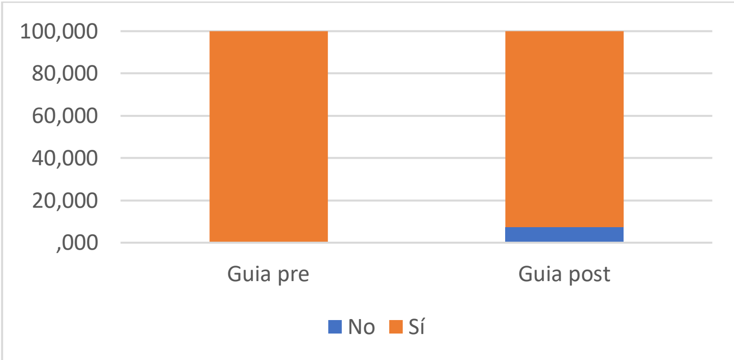


Figura 4. Autonomía en la tarea, antes y después de la lección.

Por último, nos centramos en observar la adquisición del uso de los contenidos vistos en clase, como la negación, los árboles de clasificación, y las cuatro formas de clasificación expuestas. Los futuros maestros no han incorporado en su mayoría el trabajo con la negación o los árboles de decisión como contenidos, ni el juego como estrategia en la actividad, como se puede apreciar en la tabla 1.

Tabla 1

Incorporación de estrategias y/o contenidos en las tareas tras la lección.

%	Negación	Árboles de decisión	Juego
No	88.89	81.48	96.30
Sí	11.11	18.52	3.70

En la Tabla 2, podemos observar la mayoría de los futuros maestros (>74%) si utilizaron las cuatro formas de clasificación expuestas por Maza y Arce (1991).

Tabla 2

Inclusión de las formas simples de clasificación.

	Formación concepto	Dicotomía	División	Doble dicotomía
No	0	0	11.11	25.93
Sí	100.00	100.00	88.89	74.07

Sin embargo, podemos observar que no todas las cualidades son consideradas por los futuros maestros como una tarea de clasificación, por ejemplo, el grupo 10, apunta "vamos a trabajar la diferencia de tamaño (grande y pequeño) y los colores (clasificación)"; el tamaño no se considera como una característica para la clasificación sino como un contenido independiente. Algunos de los grupos inician el trabajo describiendo una actividad de seriación, "con el material realizará una serie que los niños deben imitar, empezará con los círculos grandes colocándolos en fila, uno de cada color" (grupo 10), por lo tanto mezclan los contenidos con otras acciones de pensamiento lógico prenumérico.

Conclusiones

El primero de los objetivos específicos señala que las actividades diseñadas sólo consideran una característica o atributo para desarrollar la actividad. Por ello, es indispensable realizar más intervenciones por parte de los formadores de maestros de infantil con el fin que el futuro maestro se apropie de la habilidad, tanto para él como para la enseñanza, desarrollando, de acuerdo al nivel escolar, el desafío de clasificar más de tres características, con el fin de proyectar la habilidad, inherente a la disciplina matemática, en los niveles superiores.

Por otro lado, los aprendices para maestros ofrecen pocos espacios de autonomía en la actividad de clasificación a sus futuros estudiantes. Este aspecto puede resultar negativo, dado que las actividades planteadas no se caracterizan por una participación guiada en el sentido que menciona Edo (2008), es decir, que facilite la autonomía de los niños, sino que es completamente cerrada con instrucciones donde el maestro no acompaña sino dirige.

El segundo de los objetivos específicos centrado en los posibles cambios tras la instrucción, señala cambios en los tipos de actuación con la clasificación, pero no en el uso de recursos como la negación o los árboles. Sin embargo, la negación es fundamental porque ayuda a los niños a formarse desde un proceso reflexivo, en la resolución de dilemas que le prepararán después para otros procesos lógicos. Los árboles de decisión pueden ayudar a situar al niño en una formalización de la tarea, que además facilita la comprobación de si se está haciendo de manera correcta durante su elaboración. Todas estas situaciones, es probable que las realice, no formalmente, en su diario vivir por medio del juego, por lo tanto es el maestro de infantil quien debe consolidar el juego como una herramienta fundamental, dado que el aprendizaje se basa de manera conjunta en la manipulación y el juego (Alonso, López y de la Cruz, 2014).

Podemos valorar de manera positiva la incorporación de las cuatro formas fundamentales de clasificación que se trataron durante la lección, con porcentajes que señalan la incorporación de la tarea todos por encima del 74%. Lo importante ahora, es que los futuros maestros sean capaces de identificar qué formas de clasificación están utilizando, con el fin de implementarlas todas, por esto, es indispensable que los futuros maestros desarrollen experiencias de clasificación con miras a la enseñanza.

Por otro lado, consideremos que, además de incrementar las actividades de aula, es fundamental concienciar al futuro maestro infantil sobre la importancia de la clasificación, con el fin que la identifique en aquellas actividades que la involucran. Por último, estos resultados nos conducen a plantearnos que es necesario, que cada clase de la formación de maestros sea un espacio ejemplificador de cómo hacer clases; donde cada sesión tenga como objetivo transversal la construcción de conocimientos, habilidades y actitudes, y no una mera transmisión del contenido de manera aislada. De esta forma, cada clase debería basarse en situaciones lo más parecidas posible a lo que será el aula de infantil, por ejemplo, desde el juego como estrategia didáctica incluida en las llamadas conexiones prácticas (Novo, Alsina, Marbán y Berciano, 2017).

Se espera que este estudio continúe con observaciones en aula infantil, para categorizar las clasificaciones realizadas por los maestros y realizar, de ese modo, un análisis con foco en el conocimiento especializado del maestro infantil, para de esta manera ajustar las sesiones formativas tanto al contenido teórico como al diseño de actividades ricas.

Referencias y bibliografía

Alonso, C., López, P. & de la Cruz, O. (2013). Creer tocando. *Tendencias pedagógicas*, 21, 249-262.

Artzt, A., Armour-Thomas, E., Curcio, F. & Gurl, T. (2015). *Becoming a Reflective Mathematics Teacher*. New York: Routledge.

Bermejo, V. (1985). Estudio evolutivo de las conductas de clasificación en el niño. Aspectos lingüísticos y perceptivos. *Infancia y aprendizaje*, 31-32(8), 211-227.

Bermejo, V. (1989). Factores espacio-semánticos y tipicidad en conductas de clasificación e inclusión. *Estudios de Psicología*, 10(37), 31-43.

Chamorro, M.C. (2005). Didáctica de las matemáticas para educación infantil. Madrid: Pearson Educación.

Clements, D.H. & Sarama, J. (2009). Learning and teaching early math: The learning trajectories approach. New York: Routledge.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *Journal of mathematics teacher education*, 14(2), 133-148.

Edo, M. (2008). Matemáticas y arte en educación infantil. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 47, 37-53.

Fernández Bravo, J. A (2007). Teatro, lógica y matemática en Educación Infantil. *Multiárea*, 2, 101-116.

González, A. (1991). *Lógica matemática para niños*. Oviedo: Universidad de Oviedo.

Lee, J. E. (2017). Preschool Teachers' Pedagogical Content Knowledge in Mathematics. *International Journal of Early Childhood*, 49(2), 229-243.

Jiménez, A., Limas, L.J. & Alarcón, J. E. (2016). Prácticas Pedagógicas Matemáticas de Professores de uma Instituição Educativa de Ensino Básico e Médio. *Praxis & Saber*, 7 (13), 127-152.

Laorden, C. & Pérez, C. (2002). El espacio como elemento facilitador del aprendizaje: una experiencia en la formación inicial del profesorado. *Pulso*, 25, 133-146.

Maza, C. & Arce, C. (1991). *Ordenar y clasificar.* Madrid: Síntesis.

Novo, M. L., Alsina, Á., Marbán, J. M. & Berciano, A. (2017). Inteligencia conectiva para la educación matemática infantil. *Comunicar*, 52, 29-39.

Peterson, P. L., Fennema, E. & Carpenter, T. (1989). Using knowledge of how students think about mathematics. *Educational Leadership,* 46(4), 42-46.

Rodrigo, M., Rodríguez, A. & Marrero, J. (1993*). Las teorías implícitas. Una aproximación al conocimiento cotidiano*. Madrid: Aprendizaje Visor.

Ruesga, M.P., Giménez, J. & Orozco, M. (2005). Las tablas de doble entrada en educación infantil: procedimientos y argumentos de los niños. *Educación Matemática*, 17(1), 129-148.

Ruesga, M. P., Valls, F. & Lisbõa, G. (2011). Study of logical relations using trees and graphs in task with classification tables. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 4(2), 49-70.

Scheuer, N. & Pozo, J. I. (1999). Las concepciones sobre el aprendizaje como teorías implícitas. En J.I. Pozo & C. Monereo. *El aprendizaje estratégico: enseñar a aprender desde el currículo* (pp. 87-108). Madrid: Santillana.

Shulman, L. S. (1993). Renewing the pedagogy of teacher education: the impact of subject-specific conceptions of teaching. En M.L. Montero y J.M.Vez (eds.) *Las didácticas específicas en la formación del profesorado* (pp. 53-69). Santiago: Tórculo.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Visualización y producción de enunciados en las propiedades del triángulo

Griselda González Arriaga
Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos"
México
grisgonzalez5@yahoo.com.mx
Luis Manuel Aguayo Rendón
Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Zacatecas
México
l_aguo@yahoo.com.mx

Resumen

Esta ponencia forma parte de una tesis doctoral en construcción cuyo objetivo es probar una propuesta de formación para la enseñanza de la geometría con futuros profesores y docentes de escuelas multigrado. La finalidad es analizar la visualización en la actividad geométrica mediante la entrada del constructor considerada como necesaria por Duval (2005), y su importancia en este caso para identificar las propiedades del triángulo. El trabajo se basa en la perspectiva teórica Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) de Houdement y Kuzniak (2006). Es de carácter cualitativo, analiza la construcción y justificación de un profesor que participa en la experimentación y se observa la relación de los componentes cognitivos del ETG. Entre los hallazgos más relevantes encontramos que la descripción de las figuras geométricas permite producir una forma visual que tiene una propiedad geométrica, además, se confirma la importancia de activar la visualización no icónica en la actividad geométrica.

Palabras clave: visualización, geometría, formación de profesores, entradas de la geometría, triángulo.

Introducción

Esta ponencia deriva de una tesis doctoral en construcción en la que se experimenta una propuesta de formación para la enseñanza de la geometría con estudiantes y profesores de escuelas multigrado, en este trabajo se muestran los primeros avances y observaciones realizadas. El referente teórico que orienta el trabajo se basa en las concepciones sobre el trabajo matemático y las investigaciones en didáctica de la geometría de Houdement y Kuzniak (2006), específicamente en la perspectiva del Espacio de Trabajo Matemático, donde se señala que a través de la actividad matemática el individuo configura un constructo teórico acerca del objeto y del contenido matemático en cuestión. En este sentido y en el tema en particular de dicha investigación, nos referiremos al Espacio de Trabajo Matemático en el subdominio Geométrico (ETMG) o simplemente al Espacio de Trabajo Geométrico (ETG).

El saber geométrico que se coloca en el ETG son las propiedades y elementos notables del triángulo, es por ello que resulta necesario que estos contenidos geométricos se incluyan en las situaciones didácticas que forman parte de la propuesta experimental. Cabe mencionar que, en tanto que la propuesta se experimenta con profesores en formación y docentes que se desempeñan profesionalmente en escuelas multigrado, las interacciones entre unos y otros es una variable importante que tiene relación con los conocimientos geométricos y didácticos necesarios para que los sujetos del estudio reconstruyan las situaciones didácticas trabajadas en el ETG cuando las apliquen en los grupos de educación primaria.

Fundamentación teórica

Para comprender la estructura del Espacio de Trabajo Geométrico (Ver figura n° 1) deben considerarse los componentes que caracterizan a toda actividad geométrica en su dimensión puramente matemática, es decir, en el plano epistemológico de un ETG se encuentran componentes como: un espacio real y local, un conjunto de artefactos y un sistema teórico de referencia. Estos componentes, a través de las génesis (figural, instrumental y discursiva) del espacio de trabajo, se articulan con aquellos que conforman el plano cognitivo: la visualización, la construcción y la prueba.

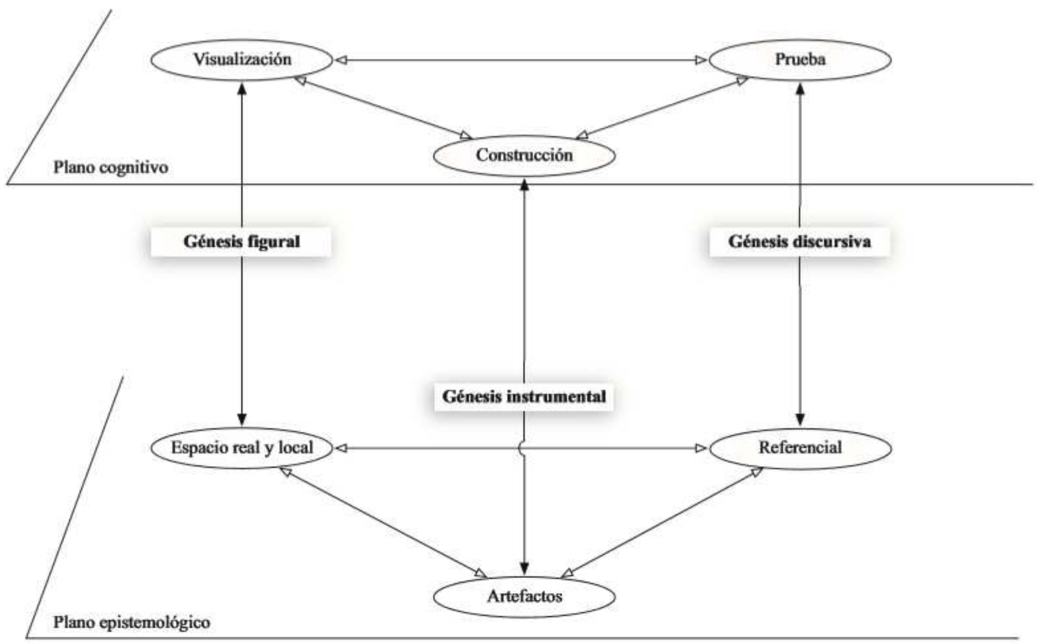


Figura 1. El espacio de trabajo geométrico y su génesis (Kuzniak, 2011).

Sin embargo, la estructura de un ETG debe entenderse como un modelo dinámico porque se requiere la activación de todas las génesis para que lograr un aprendizaje geométrico; por ello, los componentes de ambos planos resultan fundamentales en el proceso de enseñanza de la geometría. Empero, es importante mencionar que estos componentes pueden separarse para su análisis, pero no siempre es posible hacerlo en la actividad matemática.

Por esta posibilidad de separar los componentes para su análisis, en este estudio analizaremos lo relativo al componente de visualización, que es una actividad cognitiva fundamental en la geometría (Duval, 2005). Asimismo, en el plano cognitivo existen ciertos procesos que se activan con el trabajo geométrico (visualización, construcción y prueba) y se relacionan entre sí. En este caso en particular analizamos el proceso de visualización, lo que éste aporta al proceso de construcción y viceversa; es de subrayarse que la visualización también aporta al proceso de la prueba.

La visualización

La actividad cognitiva que se despliega en el dominio geométrico se puede considerar como una de las más completas, pues en el trabajo geométrico el sujeto debe ver, construir y razonar para aprehender los objetos geométricos. Cuando el geómetra se enfrenta a la tarea geométrica y despliega sus procedimientos mentales para resolverla, se hace presente el componente de visualización; a decir de Houdement y Kuzniak (2006), en la visualización se produce la representación semiótica de un objeto como una figura geométrica o un gráfico cartesiano.

Según Duval (2005), la actividad cognitiva requerida para la actividad geométrica exige la articulación de dos registros de representación que funcionan de manera simultánea e interactiva; el lenguaje y el registro de las figuras. Es decir,

> El reconocimiento de los objetos representados no depende ante todo de la discriminación visual de las formas, sino de las suposiciones que se han realizado y que también controlarán la mirada sobre las figuras. Y este es otro tipo de actividad que se moviliza: la producción discursiva de declaraciones que están vinculadas entre sí para justificar, explicar o demostrar (Duval, 2005, p. 8).

Es por ello, que la enseñanza debe considerar entre sus objetivos la visualización y la producción de enunciados, ambas son condiciones para aprender a aprender en geometría. En ese sentido cabe precisar que toda tarea que se plantee en la actividad geométrica está relacionada con la forma de ver y reconoce dos formas de visualizar según sea el tipo de operación que se realice con las figuras y la manera como se movilizan sus propiedades: una visualización icónica y otra no-icónica (Duval (2005).

Cuando se activa la visualización icónica los objetos se identifican o representan mediante la semejanza con un objeto (real) o por comparación con un modelo tipo de formas (una figura particular sirve de modelo, y otras figuras se reconocen según su grado de parecido con este modelo). Por su parte, señala Duval (2005), la visualización no icónica reconoce las formas por las limitaciones internas de organización que hacen imposible ciertas deformaciones o ciertas aproximaciones; por las deducciones discursivas acerca de las propiedades enunciadas en las definiciones o en los teoremas o bien a partir de hipótesis que declaran lo que representa una figura. La visualización no icónica facilita entonces la comprensión del problema, de ahí la pertinencia de activarla durante el trabajo geométrico.

Tipos de aprehensión

Resulta importante señalar que en el actividad geométrica el uso de las figuras posibilita el trabajo con la geometría elemental y en estos casos la visualización es intrínsecamente semiótica y no se puede reducir a una simple percepción visual, sino que en ella confluyen otros tipos de aprehensión según Duval (como se citó en Henríquez, 2014):

1. *La aprehensión perceptiva*. Identifica de manera espontánea la figura a partir de trazos externos o internos que posibilitan la resolución del problema.
2. *La aprehensión operatoria.* Toda figura puede modificarse de diversas maneras (rotar, separar, agrandar, desplazar, etc.), lo que representa una actividad heurística, ya que en la búsqueda de la solución a un problema geométrico, un sujeto puede modificar la figura hasta regresar a la configuración inicial y las modificaciones que hace pueden ser de dos tipos: un cambio figural o una reconfiguración.
3. *La aprehensión discursiva.* Se produce al asociar la configuración con una afirmación matemática (definiciones, propiedades), este razonamiento puede realizarse desde lo visual hacia el discurso o del discurso hacia lo visual ya que la introducción de una figura geométrica necesariamente implica un discurso.

La acción de visualizar figuras está asociada con las posibles actividades que se ofrecen a los alumnos ya que plantear a los estudiantes acciones en función de las figuras, puede ser un trabajo extenso y variado, a decir de Duval (2005, p. 9).

> Las variaciones de actividad se relacionan tanto con la tarea en cuestión (para reproducir una figura según un modelo o para construirla, o para realizar mediciones, o para describirla para que sea reconstruida por otro alumno) y en el modo del actividad solicitada (modalidad concreta utilizando un material manipulable, modo de representación apegándose a las únicas producciones gráficas, o modalidad técnica mediante la imposición de ciertos instrumentos).

Las entradas de la geometría

Considerando las potenciales variaciones de la actividad Duval (2005) identifica cuatro "entradas" o tipos de actividades para el trabajo geométrico:

1. La entrada del botánico (botanise). Es evidente e inmediata, en ésta se reconocen y nombran las formas más elementales de la geometría plana, se observan las características entre formas similares y/o diferentes y se distinguen sus propiedades a partir de las características visuales del entorno. La actividad del botánico no es geométrica pero se considera una primera etapa en todo proceso de adquisición de conocimientos geométricos.

2. La entrada del topógrafo (arpenter-géomètre). Las actividades se centran en aprender a medir -por ejemplo la distancia entre dos puntos- y llevar esta medida a un dibujo que toma el estatus de plano, generalmente las tareas exigen pasar de una escala de magnitud a otra, por lo que se deben igualar. Como no existe un procedimiento común para medir las distancias reales en el campo y las longitudes de un dibujo, pasar de una medida a otra se convierte en una dificultad para el estudiante. Cuando se eligen los objetos como puntos de referencia para representar su posición, se toman en cuenta las direcciones u orientaciones aunque estos aspectos no siempre sean relevantes para la representación geométrica.

3. La entrada del constructor (constructeur). Es necesaria porque en la actividad geométrica las particularidades de las figuras (por lo menos las formas elementales) deben ser edificables mediante instrumentos manipulables o sustitutos (regla, compás, software). Al usar los instrumentos, los alumnos pueden verificar o darse cuenta de las propiedades de las figuras, además de experimentar para constatar que no son

meramente perceptivas.

4. La entrada del inventor (inventeur-bricoleur). Para ejemplificar esta entrada se describe mediante la siguiente tarea: “a partir de un cuadrado ya dado, ¿de qué manera se puede construir otro que sea dos veces más grande y su área es el doble?”. Si este problema se resuelve usando sólo un papel cuadriculado para reproducirlo a partir del conteo de unidades, se reduce a operaciones de medición, pero, si se deconstruye la figura demandada, la acción exige una deconstrucción visual, ya que añadiendo trazos complementarios se genera un proceso heurístico que lleva a la solución de la tarea.

Como se puede apreciar, de acuerdo a Duval (2005), las dos primeras entradas activan la visualización icónica y las dos últimas la no icónica, la entrada del inventor implica la deconstrucción de las formas ya conocidas, lo que constituye el proceso central de la visualización geométrica que se lleva a cabo en coordinación con la actividad discursiva; por esta razón en la actividad geométrica resulta esencial favorecer la visualización no icónica.

Metodología

La propuesta de formación o ETG de formación, consta de tres situaciones didácticas que integran tanto el trabajo geométrico como el trabajo didáctico en el aula de formación y en los salones de clase de las escuelas primarias multigrado. La propuesta de formación se experimenta con tres estudiantes para profesor que cursan el séptimo semestre de la Licenciatura en Educación Primaria de la Escuela Normal Rural de San Marcos, en Zacatecas, México y dos profesores en servicio que se desempeñan en escuelas multigrado de una zona escolar de la región de Loreto, Zacatecas, México.

La primera situación didáctica se desarrolló durante seis sesiones de dos horas cada una, todas las sesiones se videograbaron y además se recuperaron las libretas en las que los participantes plasmaron los resultados de distintas tareas geométricas. Con los datos recabados mediante esos instrumentos se hicieron los análisis de corte cualitativo.

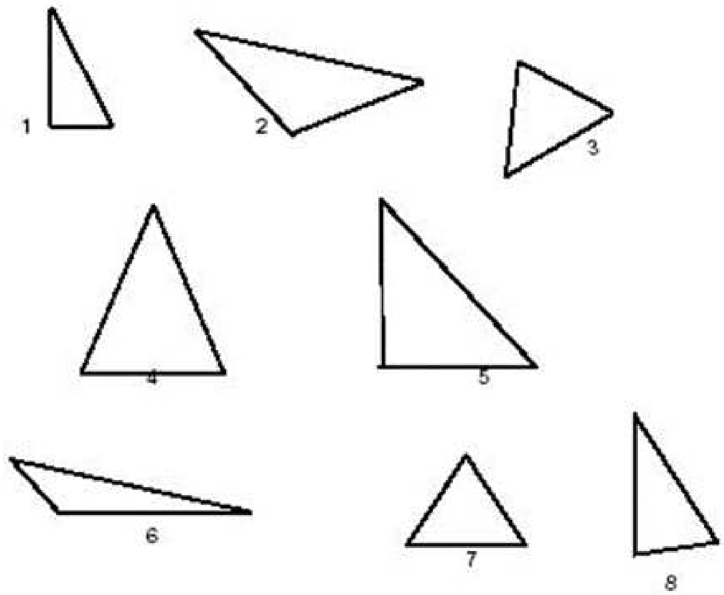
En la primea sesión, cuyo análisis es el objeto de esta ponencia, se coloca como saber geométrico la clasificación de triángulos y algunas de sus propiedades. El primer momento consistió en explorar los conocimientos previos que poseían los sujetos de estudio en situaciones que implicaban identificar y construir triángulos además de justificar la pertinencia de sus construcciones.

En la Tabla 1 se muestra la tarea propuesta. Se les proporcionó una tarjeta que contenía un conjunto de triángulos, se les pidió que seleccionarán uno de ellos y que redactaran un mensaje escrito con la secuencia que se debería usar para construirlo. Luego se pasó ese mensaje a otro de los sujetos y se le pidió que lo construyera.

Tabla 1

Ejemplo de tarea propuesta

Enunciado de la tarea	*Imágenes de la tarjeta*

"Cada uno de ustedes seleccionará uno de los triángulos de la tarjeta que se les entregó sin que los demás sepamos la que eligieron, enseguida escriban en la tarjeta en blanco la secuencia ordenada que hay que seguir para que se construya el triángulo elegido, después entreguen esas instrucciones a su compañero para que lo realice en una hoja blanca utilizando los instrumentos geométricos que consideren. Recuerden ser lo más precisos posible en sus indicaciones y emplear los conocimientos que poseen sobre los triángulos para que sea más clara la descripción".	

En la Tabla 1 se muestra la tarea propuesta. Se les proporcionó una tarjeta que contenía un conjunto de triángulos y a partir de la selección de uno de ellos, redactar la secuencia ordenada para que otro compañero identifique cuál es y lo construya.

Como se puede apreciar, esta actividad se clasifica como una tarea del constructor pues el trabajo principal consiste en construir la figura utilizando los artefactos que consideren necesarios, mediante esta tarea es posible descubrir las propiedades geométricas involucradas. Por otra parte, al incluir la descripción se activa la aprehensión discursiva que es necesaria para comunicar los resultados y en lo que toca a la validación, solamente se consideró la descripción del proceso de construcción y la verificación de si las instrucciones eran adecuadas y suficientes para cumplir con la tarea.

Como se mencionó anteriormente los saberes geométricos que se pretendían obtener por medio de la descripción y la discusión eran la clasificación de los triángulos y algunas de sus propiedades, específicamente los señalados en Thompson (1993): los ángulos internos de los triángulos suman 180°; cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60°; y en un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados son iguales.

Al concluir la tarea, se organizó una puesta en común de los resultados para que cada pareja confrontará las instrucciones recibidas y la figura construida; en esta etapa la formadora fue complementando con preguntas cada una de las participaciones con el fin de orientar la reflexión hacia las propiedades implicadas.

Resultados

El análisis de los resultados de esta sesión se centra específicamente en las descripciones (instrucciones) elaboradas por los cinco participantes y en las justificaciones que sobre ellas expresan. Nuestras reflexiones se focalizan en las propiedades de los triángulos que se pusieron en evidencia en el momento de la puesta en común de los resultados obtenidos en la Tarea 1. Para dar cuenta de los resultados más relevantes en esa sesión, tomaremos como referencia inicial la tarea que realizó una de las parejas formadas por el emisor de instrucciones y el constructor a la que llamaremos Caso A.

Análisis del caso A

> Mensaje emitido:
>
> "Para poder realizar el triángulo elegido deberás realizar los siguientes pasos:
>
> 1. Trazar dos líneas que tengan la misma medida y que formen entre ellas un ángulo de 90°.
>
> 2. Posteriormente, traza otra línea que una a ambos extremos de las líneas anteriores para que se forme el triángulo.
>
> 3. Revisa si el ángulo mide 90° exactamente y que los lados iguales sean exactamente de la misma medida".

En la discusión grupal se pidió a emisor y constructor que revisarán la pertinencia de las instrucciones, ambos coincidieron que lo fueron y las validaron mediante argumentos como: "el triángulo seleccionado es isósceles porque tiene dos de sus lados iguales y el tercero diferente"; "también es un triángulo rectángulo porque uno de sus ángulos era recto". También se les cuestionó si el triángulo construido era el único que reunía estas características, respondieron que "hay otro similar que tiene un ángulo de 90° pero sus lados son diferentes". Para validar su argumento el constructor midió los ángulos de ambos triángulos con el transportador y los lados con la regla, luego de medir señala que "con las indicaciones dadas solamente podría haber sido ese triángulo en particular".

En esta misma puesta en común, la siguiente discusión versó sobre cómo comprobar si todos los triángulos que tienen dos lados iguales y un ángulo de 90° grado con el mismo tipo de triángulo, en este caso, triángulo rectángulo isósceles, sobre el respecto los profesores manifestaron que "un triángulo isósceles rectángulo siempre tiene un ángulo de 90° y otros dos de 45° y los tres suman 180°, exactamente lo que deben sumar los ángulos internos de un triángulo".

Asimismo, mencionaron que "el triángulo que tiene todos sus lados desiguales se considera escaleno", el cual, señalaron "se puede identificar a partir de las medidas de sus lados, todos son diferentes, pero también se pueden considerar sus ángulos, pues existen triángulos escalenos obtusángulos, acutángulos y rectángulos". En cuanto a los triángulos equiláteros señalaron que "cada uno de sus ángulos mide 60° y todos sus lados son iguales". Cabe mencionar que todos estos argumentos se desprendieron de la validación de los resultados de la tarea en la que emplearon la regla y el transportador.

Con base en la puesta en común se pueden apreciar los saberes previos que tienen los profesores, la reflexión colectiva sobre algunas propiedades de los triángulos y algunos prejuicios pedagógicos principalmente cuando comprueban la pertinencia de las instrucciones (tal como se observa en el mensaje emitido cuando se indica que deben revisar que estén bien las medidas, orientando a que es el proceso de verificación), también se observa que en toda la actividad se omite el uso del compás en la actividad lo que resulta significativo porque en la perspectiva teórica y el discurso del constructor se asume que las figuras geométricas se construyen con ayuda de un instrumento que permite producir una forma visual con una propiedad geométrica específica, por esta razón, en este caso se comprueba que no es posible construir una figura sin tomar en cuenta sus propiedades geométricas. Finalmente, también es posible apreciar el despliegue de la visualización no icónica y su importancia en la actividad geométrica.

Conclusiones

Resulta fundamental la importancia de la visualización en el proceso de construcción y de prueba, ya que además de favorecer -en el caso de este análisis- la identificación de los diferentes tipos de triángulos y sus propiedades, facilita la reflexión sobre los criterios de construcción de los triángulos y además contribuye a la definición de los tipos de prueba que se pueden solicitar a los profesores. Con ello se hace evidente la relación de la visualización con los otros componentes del plano cognitivo de un ETG.

Dentro de las limitaciones de la actividad puede mencionarse el hecho de que las propiedades del triángulo quedaron circunscritas en los conocimientos básicos de clasificación y propiedades generales, es por ello que la descripción de los profesores no consideró por ejemplo la demostración del teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo que se plantea como: *sea un triángulo ABC, demostrar que A + B + C= 1 ángulo llano (180°).*

Otra limitante es que en la génesis discursiva (elaboración de instrucciones) no se mencionó al compás como instrumento para la construcción de los triángulos, tampoco lo emplearon los profesores en el proceso de construcción.

Referencias y bibliografía

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Siences Cognitives*, 10, 5-53. Francia: IREM de Strasbourg.

Henríquez, C. (2014). *El trabajo geométrico de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el nivel secundario.* Tesis doctoral. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, pp. 175-193. IREM de Strasbourg.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses génèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9–24.

Thompson, J. (1993) *Geometría.* México, D.F.: Limusa.

O futuro professor de Matemática em Estágio

Patrícia **Perlin**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Alegrete
Brasil
patricia.perlin@iffarroupilha.edu.br
Anemari Roesler Luersen Vieira **Lopes**
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil
anemari.lopes@gmail.com

O presente artigo é recorte de uma pesquisa de doutorado sobre o Estágio Curricular Supervisionado na formação inicial de professores de Matemática, ancorada na Teoria Histórico-Cultural e na Teoria da Atividade. Assim como a maioria das atividades humanas, Franco e Longarezi (2011) consideram que exercício da docência também se dá de forma coletiva. Deste modo, analisar as relações sociais que são estabelecidas no Estágio é fundamental para compreendermos a gênese da atividade docente enquanto estrutura social, na maneira como ocorrem suas relações enquanto formas de apropriações de experiências sociais. Como uma das premissas da THC é a de que o desenvolvimento humano é produto das relações sociais, Leontiev (2012) nos esclarece que no decorrer do processo de desenvolvimento do sujeito, sob a influência das circunstâncias concretas da sua vida, o lugar que ele efetivamente ocupa no sistema de relações humanas se altera, assim como a altera a sua atividade principal.

Destarte, ao investigarmos o Estágio como etapa fundamental na formação inicial de professores e que como uma atividade humana coletiva está no centro de um emaranhado de relações sociais, buscamos compreender as relações estabelecidas nele que são determinantes para a aprendizagem da docência. Neste artigo, particularmente, olhamos para essas relações a partir das preocupações dos estagiários sobre o seu ingresso na escola ao assumirem o papel de professores. Para atingir este objetivo constituímos um espaço formativo, constituído de 20 encontros, intencionalmente organizado dentro de um componente curricular de Estágio em Matemática no Ensino Médio em que participaram dez acadêmicos de um Instituto Federal brasileiro. Organizamos metodologicamente a investigação conforme as ideias de Araujo e Moraes (2017) que apresentam os princípios da pesquisa em Educação como atividade no sentido atribuído pela Teoria Histórico-Cultural. Segundo as autoras, essa maneira de pesquisar possui dimensão orientadora e dimensão executora. Em nossa investigação, a primeira dimensão permitiu investigar a formação do futuro professor de Matemática no Estágio e a segunda promover ações: de apreensão da realidade por meio de gravações em áudio de sessões reflexivas (Ibiapina, 2008) realizadas nos encontros, fichas, questionários e relatórios dos sujeitos; de análise do material empírico através de unidades de análise de Vigotski (2009); e de sistematização e apresentação dos resultados utilizando os episódios de Moura (1992). Nesse trabalho destacamos uma das nossas unidades de análise em que buscamos compreender as relações estabelecidas pelos estagiários no Estágio desencadeados a partir do enfrentamento e da superação das tensões e dos conflitos perpassadas por eles nesta etapa da sua formação inicial. Dos desafios iniciais apontados pelos sujeitos frente à transição de alunos (em atividade de estudo) a professores (em atividade de ensino), nos foi possível compreender as relações que os estagiários foram estabelecendo, sendo uma delas a estabelecida entre os estagiários e seus alunos, que permitiu-lhes compreender o papel social do professor por meio da atribuição de novos sentidos pessoais para atividade de ensino na medida em que foram surgindo novas necessidades ao assumirem o papel de professores.

Panossian, Moretti & Souza (2017, p. 148), consideram que os professores desenvolvem seu próprio pensamento teórico sobre a docência à medida que lidam com a necessidade de ensinar. Deste modo, podemos inferir que a relação dos estagiários com os seus alunos foram determinantes dos modos pelos quais eles aprenderam a ensinar no Estágio. Moura (1999, p. 10) considera que aos estagiários "é necessário que percebam o modo como se faz ensino em sala de aula". Neste sentido, a figura do professor supervisor, que recebe o estagiário em sua turma na escola, também é fundamental para que eles possam ter discernimento sobre como ocorre o trabalho do professor no ambiente escolar. O que e como ensinar e o modo como devem relacionar-se com os estudantes são aprendizagens decorrentes da relação que o estagiário estabelece com este professor. Concluímos que a apropriação de elementos inerentes à aprendizagem da docência – tal como ensinar e como relacionar-se com os alunos – é determinada por estas duas relações, entre estagiário e alunos e estagiário e professor supervisor.

Referencias e bibliografia

Araujo, E. S. & Moraes, S. P. G. (2017). Dos princípios da pesquisa em educação como atividade. In: M. O. de Moura (Org.). *Educação escolar e pesquisa na Teoria Histórico-Cultural* (pp. 47-70). São Paulo: Edições Loyola.

Franco, P. L. J. & Longarezi, A. M. (2011). Elementos constituintes e constituidores da formação continuada de professores: contribuições da teoria da atividade. *Educação e Filosofia*, 25 (50), 557-582.

Ibiapina, I. (2008). *Pesquisa colaborativa: investigação, formação e produção de conhecimentos*. Brasília: Líber Livro.

Leontiev, A. N. (2012). Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: L. S. Vigotsky, A. R. Luria, & A. N. Leontiev. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem* (pp. 59-84). São Paulo: Ícone.

Moura, M. O. de. (1992). *Construção do signo numérico em situação de ensino*. Tese de Doutorado em Educação, Universidade de São Paulo, SP, Brasil.

Moura, M. O de. (1999). *O estágio na formação compartilhada do professor: retratos de uma experiência*. São Paulo: FEUSP.

Panossian, M. L., Moretti, V. D. & Souza, F. D. (2017). Relações entre movimento histórico e lógico de um conceito, desenvolvimento do pensamento teórico e conteúdo escolar. In: M. O. de Moura (Org.). *Educação escolar e pesquisa na Teoria Histórico-Cultural* (pp. 125-152). São Paulo: Edições Loyola.

Vigotski, L. S. (2009). *A construção do pensamento e da linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

Quehacer matemático y validación: ideas de futuros profesores

Cristina **Esteley**
Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba
Argentina
esteley@famaf.unc.edu.ar
María Florencia **Cruz**
Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral
Argentina
ma.florenciacruz@gmail.com
Sara **Scaglia**
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral
Argentina
sbscaglia@gmail.com

Resumen

La discusión sobre las actividades matemáticas que deben poner en juego estudiantes en los diferentes niveles del sistema educativo y, en lo que atañe a la validación, se encuentra vigente en el campo de la educación matemática y resulta relevante para la formación de profesores. Este trabajo, que forma parte de una investigación más amplia, presenta un estudio de producciones escritas de futuros profesores en matemática en las que expresan sus ideas respecto a las actividades que caracterizan el quehacer matemático y en particular a la validación. El estudio se realiza apelando a una metodología de corte cualitativa. En el mismo, intervienen futuros profesores, del Profesorado en Matemática de una Universidad Nacional de Argentina.

El análisis realizado evidencia un reconocimiento por parte de los estudiantes a prácticas de validación ligadas principalmente a la demostración formal y esta última como actividad principal y fundamental del trabajo matemático.

Palabras clave: Quehacer Matemático, Validación, Futuros Profesores.

Introducción

Este trabajo presenta resultados preliminares de una investigación amplia realizada en el marco de una tesis de doctorado que se vincula con las atribuciones de sentido, por parte de futuros profesores en matemática de la Universidad Nacional del Litoral (UNL), sobre los procesos de validación matemática, cuando estos sujetos se involucran en un contexto de trabajo matemático-geométrico mediado por actividades de modelización matemática (MM) de naturaleza intra-matemática y el uso de tecnologías. Si bien el foco central es la atribución de sentidos en relación con los procesos de validación matemática, necesariamente con la tesis y con esta comunicación, emergen tres temáticas sustanciales para la educación matemática: 1) la formación de profesores, 2) el trabajo con MM y 3) el uso de tecnología en clases de matemática. Sus relevancias se hacen evidentes en los trabajos de dos Survey Teams presentados en el marco del ICME13. Uno de ellos focalizado en la formación de profesores y otro en la educación geométrica y uso de tecnologías. De manera similar se pueden destacar los Topic Study Groups (TSG) tales como el TSG21 vinculado a MM y el TSG48 interesado en el desarrollo profesional de futuros docentes de matemática (Kaiser, 2017). Un ejemplo de producción que da cuenta del avance y preocupación sobre la interacción entre estas tres temáticas es el texto editado por Stillman, Blum y Kaiser (2017). En el mismo se recopilan los principales trabajos presentados en la 17 Conferencia Internacional sobre la Enseñanza de la Modelización Matemática y Aplicaciones (ICTMA17) y se hace evidente el deseo por buscar mayores conexiones entre los trabajos sobre MM y otras producciones propias del campo de la Educación Matemática ampliando las fronteras del ICTMA. Como se pone en evidencia más adelante en este escrito, ciertos capítulos de tal texto avanzan sobre validación al trabajar con profesores cuando los mismos se involucran con actividades de MM fundamentalmente de fenómenos extra-matemático, sin embargo, no hay artículos que den cuenta de validación en contextos de MM al trabajar con fenómenos intra-matemáticos.

En el ámbito local existen avances en el trabajo con MM de fenómenos extra-matemáticos y futuros profesores o profesores en servicio. Entre otros, los trabajos presentados en Esteley (2014) y en Villarreal, Esteley y Smith (2018). En todos ellos se discute acerca de algunos procesos de validación seguidos por futuros profesores. Sin embargo, en Villarreal et al. (2018) se marca como una necesidad profundizar acerca de lo que acontece con futuros profesores de universidades argentinas, cuando deben validar los modelos construidos para dar cuenta de fenómenos extra o intra-matemáticos. En este marco, los resultados de la tesis y este estudio podrían ofrecer aportes al desarrollo local, ampliar las fronteras de lo ya hecho para luego contrastar con producciones del ámbito internacional.

Discusiones en torno a la validación en el ámbito del trabajo matemático se hacen presentes y resultan relevantes en el contexto internacional de educación matemática (Reid y Knipping, 2010; Hanna y De Villiers, 2012; Stylianides y Harel, 2018). En Argentina documentos curriculares oficiales para escuelas secundarias y para formación docente expresan la necesidad de que los estudiantes en diferentes instancias de formación experimenten escenarios educativos en los que se propicien validaciones avanzando desde empíricas a otras con mayor grado de formalidad (Diseño Curricular Educación Secundaria Orientada de la Provincia de Santa Fe, 2014; Propuesta de estándares para la acreditación de las carreras de profesorado universitario en matemática, 2012).

Se señala también que las actividades que se proponen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, entre ellas actividades de validación, deben estar influenciadas por rasgos característicos del quehacer matemático. Al respecto Brousseau (1986) afirma “El trabajo intelectual del alumno debe ser por momentos comparable a esta actividad científica” (p.6). Un modo de pensar la matemática como actividad científica, es apelando a la noción de la matemática como ciencia de los modelos.

En el marco de las ideas previas y atendiendo a lo explicitado en el currículo local de matemática para escuelas secundarias, se señala como desafío para la formación docente la reflexión, análisis y puesta en juego de actividades que caracterizan al quehacer matemático, incluyendo el proceso de validación. A partir de tales consideraciones, se lleva a cabo la tesis que enmarca el presente trabajo, en el que se estudia la producción escrita de futuros profesores cuando dan cuenta de sus ideas respecto a la validación y a las actividades que caracterizan a la ciencia matemática. En particular se busca dar respuestas a las preguntas: a) ¿Qué actividades reconocen estos futuros profesores como propias de la matemática o del quehacer matemático? y b) ¿Qué entienden por procesos de validación en instancias de trabajo matemático?

Marco Teórico

Si bien en el marco de la tesis se parte de pensar la matemática como ciencia de los modelos y, en ese sentido, las actividades matemáticas consideradas relevantes para la investigación son aquellas relativas al proceso de MM y en ese ámbito el proceso de validación, para este trabajo se decide tomar aportes más generales. Esta decisión se toma porque el presente estudio se focaliza en instancias iniciales de la tesis y, según datos ya recogidos se reconocen historias de formación de los sujetos con los que se trabaja (Cruz, Esteley, Scaglia, 2018) muy alejadas del trabajo con MM. En ese sentido, se amplían las fronteras del trabajo con MM, tomando aportes de autores tales como Bishop (2001), reconocido por sus aportes en el ámbito internacional, e Itzcovich (2007), con reconocimiento local, para dar cuenta de actividades vinculadas con el quehacer matemático. Se apela a producciones de Balacheff (2000) o Reid y Knipping (2010) para caracterizar procesos de validación. Se toman aportes de Doerr, Ärlebäck y Misfeldt (2017) y Saeki, Kaneko y Saito (2017) para avanzar sobre ideas relativas a validación en procesos de MM.

Actividades que caracterizan al quehacer matemático

Bishop (2001) considera la matemática como producto cultural y describe actividades que propician la producción matemática en diferentes culturas, reconociendo su potencial para el desarrollo de la comprensión matemática. Por la naturaleza del propósito y alcance de esta comunicación, interesa destacar la de explicar. Para el autor, explicar posibilita la conexión entre fenómenos y la teoría que los fundamenta, eleva la cognición humana más allá de la experiencia directa, permite que los demás y el propio sujeto comprendan el por qué del fenómeno que sucede. De esta actividad surgen reglas lógicas, pruebas, gráficos, ecuaciones, etc.

Itzcovich (2007) discute el sentido y las características que se otorgan al trabajo matemático escolar. Señala que la actividad matemática reconocida por los sujetos se encuentra influenciada por sus experiencias con procesos de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, determina actividades matemáticas que deben realizar los alumnos para involucrarse tales como: resolver problemas, explorar y representar, elaborar conjeturas, validar conjeturas, determinar dominio de validez y generalizar y modelizar.

Itzcovich (2007) afirma que en la resolución de problemas se movilizan conocimientos disponibles que no son suficientes para dar una respuesta, por lo que se producen conocimientos. En este sentido destaca la importancia de los procesos de representación y la puesta en juego de exploraciones. Particularmente en instancias de producción de conocimientos respecto a una problemática refiere a modelizar y organiza dicha actividad en etapas: recorte de la problemática en juego, identificación y establecimiento de relaciones entre variables y transformación de las relaciones en función de la matemática. El autor señala que en instancias de trabajo matemático se conjetura, es decir se establecen afirmaciones de las que se tiene cierto margen de certeza, aunque no se pueda asegurar que realmente es así. Luego de la formulación de una conjetura se lleva a cabo la validación, en la que se emplean argumentos matemáticos para fundamentar los resultados obtenidos.

Validación en el ámbito del trabajo matemático

Los términos que se utilizan para referenciar la validación de una aseveración se emplean de diferentes modos en la vida cotidiana, las matemáticas y la educación matemática. Este hecho puede producir confusión y particularmente ser un obstáculo para futuras investigaciones en el ámbito de la educación matemática (Balacheff, 2002/2004; Reid, 2005, citados en Reid y Knipping, 2010). Balacheff (2000) hace referencia a la expresión "procesos de validación" cuando estudiantes se involucran en el trabajo matemático del siguiente modo:

> En este estudio utilizaremos la palabra razonamiento para designar la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información. Le asignaremos el término procesos de validación a esta misma actividad cuando tenga como fin asegurarse de la validez de una proposición y, eventualmente, producir una explicación (una prueba o una demostración). (p.13)

Reid y Knipping (2010) y Balacheff (2000) consideran la prueba como un modo particular de validación empleado comúnmente en el aula de matemática de distintos niveles. En particular, los primeros señalan que estudiantes de matemática moderna pueden considerar que el avance de esta ciencia se logra por la acumulación de conocimiento, debido a la fuerte influencia de las características y formas de "prueba" que se muestran en diversos textos desde la época de Euclides. Los autores destacan que el número de pruebas que cumplen con la definición formalista planteada por Aristóteles no son muchas, lo cual puede ser una fuente de confusión cuando se afirma que los estudiantes de matemática deben comprender y realizar pruebas formales. En este sentido, Balacheff (2000) distingue entre pruebas pragmáticas y pruebas intelectuales. Las primeras son prácticas y recurren a la acción real, a la experiencia o a la ostensión y las segundas se apoyan en la formulación de propiedades y relaciones que se ponen en juego por lo que se alejan de la acción real.

Respecto a la validación en el marco del proceso de MM, cabe destacar que Doerr et al. (2017) al discutir acerca del empleo de ciclos de modelados, señalan la importancia de que las actividades de modelado que enfrentan estudiantes excedan la creación de modelos descriptivos que se validan por comparación de datos empíricos, con el fin de avanzar hacia actividades que incluyan explicaciones, implicaciones varias y el uso de medios computacionales. En esta línea Saeki et al. (2017) realizan una investigación en la que se fomenta el pensamiento crítico de estudiantes que validan modelos empleando hechos históricos y religiosos potenciando la toma de decisiones en el marco extra-matemático.

Metodología de la investigación y procedimientos seguidos

Para dar cuenta de los objetivos generales de la investigación que enmarca este estudio y con el fin de responder las preguntas formuladas en este trabajo, se opta por una investigación cualitativa, de corte interpretativo. Algunos de los procedimientos metodológicos empleados son compatibles con ciertos rasgos característicos de la investigación de diseño (Confrey, 2006).

La investigación se lleva a cabo con 17 futuros profesores que cursan Geometría Euclídea Espacial (GEE) en el primer semestre de 2018. El programa de formación tiene una duración de 5 años y se organiza con asignaturas de matemáticas específicas (61% sobre el total de materias), asignaturas de educación general (13%; ej. psicología de la educación), asignaturas de educación matemática (8%) y asignaturas de formación general (18%; ej. inglés). La asignatura GEE se dicta durante el primer semestre del tercer año del profesorado. Los estudiantes del mismo no han transitado aún por asignaturas de educación matemática y no han experimentado escenarios educativos en los que se emplea la MM como abordaje pedagógico. Se asume que en su recorrido por la carrera han tenido amplias oportunidades para interactuar con diversas actividades propias del quehacer matemático y con diferentes modos de validación en este ámbito.

En el marco de la tesis, se diseña una propuesta de enseñanza en la que se trabaja el tema "poliedros" en un escenario de modelización en la que intervienen todos los alumnos inscriptos en el curso. La propuesta completa se desarrolló en seis encuentros de 3 hs reloj cada uno durante las tres primeras semanas de cursado. Las clases estuvieron a cargo de las docentes encargadas del curso. La puesta en aula de la primera clase tiene dos instancias principales. En la primera las docentes realizan una descripción de los modos de trabajo que se emplean en la materia, su organización y algunas consideraciones respecto al empleo del método axiomático deductivo en el dominio del trabajo geométrico. En la segunda los estudiantes responden la siguiente consigna de trabajo:

Tabla 1

Consigna presentada a los estudiantes (Notas de campo).

Consigna 1: Lean en grupos de cuatro estudiantes los siguientes interrogantes y discutan posibles respuestas a los mismos. Luego realicen una narración en la que recuperen las respuestas de todos los integrantes del grupo (explicitando los acuerdos y desacuerdos que hayan surgido durante las discusiones): 1- ¿Cuáles son las actividades que lleva a cabo una persona que hace Matemática? 2- ¿Qué entienden por "proceso de validación" en instancias del trabajo matemático?

Con estas preguntas, previas al trabajo con MM, se buscaba que los estudiantes pusieran en evidencia respuestas formuladas a partir de sus experiencias matemáticas anteriores a la inmersión en el escenario de MM[1] y en el trabajo de validación que lo acompaña. En esa primera clase se encuentran presentes 15 estudiantes organizados en tres grupos de cuatro integrantes y un grupo de tres. Durante esta instancia se registra la información en audio, video y registros de *Word* donde realizan las narraciones objeto u unidad textual de análisis. Con el análisis se busca identificar las actividades matemáticas con que cada grupo da sentido al quehacer matemático y los modos en que dan cuenta de la validación. Con ese fin, se realizan lecturas cuidadosas de las narraciones vinculadas con la Consigna 1 y se identifican términos o frases relevantes utilizadas por cada grupo. Los grupos se identifican como G1, G2, G3 y G4. Los extractos textuales de los estudiantes se presentan en letra cursiva y son incluidos como evidencia de las interpretaciones realizadas. Se señala que este trabajo permite reconocer, previo a la entrada al escenario de MM, las primeras ideas de los estudiantes para luego poder contrastar con las ideas que se irán configurando en instancia del trabajo con MM.

Resultados: Análisis de las producciones de los estudiantes

El quehacer matemático

La primera aproximación al hacer matemática del G1 se vincula principalmente con resolver ejercicios intra y extra-matemáticos. Los integrantes explicitan la necesidad de

[1] En el escenario de MM puesto en aula se invita a la reflexión acerca del proceso de MM vivido por ellos, y se hace hincapié en los procesos de modelización y validación.

comprender los conocimientos anteriores (planteado por autores) y poder en base a eso, hacer nuestro camino, es decir, explorar, cometer errores que nos permitan llegar a verdades ya existentes o nuevas. Se considera que con “ejercicios” refieren a dar respuestas a situaciones dadas por otros empleando el lenguaje matemático. Respecto a lo planteado por Itzcovich (2007) se relaciona esta consideración con la resolución de problemas. Se evidencia también la vivencia de experiencias en las que la actividad matemática se vincula con la comprensión de producciones de matemáticos, y luego de lo anterior la experiencia con un tipo de trabajo más constructivo, como ser, resolver problemas, explorar y representar (Itzcovich, 2007).

El G2 en un primer momento expresa que las actividades que se realizan al hacer matemática son *razonar, deducir, demostrar, resolver, relacionar, crear hipótesis, mediante el empleo de todas las herramientas como ser software, material bibliográfico, entre otros*. En este fragmento se aprecia una actividad vinculada a la de explicación (Bishop, 2001). También se hace evidente la validación en ámbito de trabajo matemático, mientras que, al indicar resolver, relacionar y crear hipótesis se establece relación con resolver problemas y conjeturar (Itzcovich, 2007). Emerge así el razonamiento en el sentido de Balacheff (2000). Luego afirma que al hacer matemática se enseñan y transmiten conocimientos matemáticos, que se vincula con ideas próximas a la reproducción de ideas, conceptos y nociones matemáticas más que a la producción propiamente dicha.

El G3 destaca en primer lugar la búsqueda, selección y análisis de material bibliográfico, nuevamente se pone en escena la necesidad de interpretar y trabajar en torno a conocimientos disponibles en fuentes que se consideran legitimadas y no se aprecia referencia a la construcción personal de otras nociones. Luego plantea que al hacer matemática se realizan las siguientes actividades: *razonar, deducir, investigar, conjeturar, establecer relaciones, buscar contraejemplos, demostrar, entre otras*. La idea de matemática se encuentra principalmente vinculada a la explicación (Bishop, 2001) y a la elaboración y validación de conjeturas (Itzcovich, 2007). Finalmente destaca que las actividades que se realizan dependen del rol que ocupa la persona, sin embargo, no realiza mayores consideraciones al respecto.

Los estudiantes del G4 afirman: *Para nosotras una persona que hace matemática realiza las siguientes actividades: en primer lugar elige un tema que le interese, luego se aboca a la investigación de dicho tema y su aplicación en diferentes ámbitos. Luego elabora un esquema con las ideas más relevantes recaudadas de la investigación, para luego proponer (crear) nuevos conceptos (definiciones, propiedades, teoremas, axiomas, etc.)*. Se destaca que los estudiantes consideran la posibilidad de creación de la matemática y sus ideas se relacionan con la MM en términos de Itzcovich (2007).

En las producciones de los tres primeros grupos se evidencia un reconocimiento de prácticas matemáticas en las que parecieran prevalecer la reproducción más que prácticas vinculadas con la producción y construcción de nuevos conceptos matemáticos. Sin embargo, se destaca que G4 realiza consideraciones respecto a la creación matemática. De las actividades matemáticas mencionadas por los autores en la revisión bibliográfica se aprecia de modo predominante la referencia por parte de los estudiantes de actividades ligadas a la resolución de problemas, la formulación de conjeturas y a su validación y/o explicación. A su vez se destaca que no mencionan como parte fundamental de la actividad matemática la formulación de problemas y la resolución por parte del sujeto que los elabora. Tampoco se aprecia preponderante evocación a la exploración, generalización, modelización, entre otros.

La validación

El G1 respecto a la validación destaca que se entiende como el proceso *mediante el cual podemos otorgar legitimidad a cierta teoría o enunciado. Durante este proceso, la justificación de la teoría se realiza a través de un conjunto de argumentos (axiomas, teoremas demostrados, definiciones) o es descartada, al encontrar un contraejemplo o contradicción con una proposición ya verdadera*. Se aprecia el reconocimiento de la validación relacionada principalmente con el empleo de "pruebas intelectuales" en términos de Balacheff (2000), particularmente en lo que atañe a la demostración a partir de un conjunto de axiomas y como parte del proceso de validación se referencia también a la refutación.

El G2 plantea que ese proceso consiste en seguir pasos para lograr un resultado válido. A su vez destaca que *en estos pasos se vuelcan todos aquellos conocimientos y herramientas adquiridas y ya validadas con anterioridad*. Menciona la puesta en juego de pruebas, aunque no realiza consideraciones sobre el uso de la demostración formal mediante el método axiomático deductivo. Al señalar el empleo de afirmaciones validadas previamente posiblemente refiere al uso de pruebas intelectuales (Balacheff, 2000), pero no limita esta idea a un único método.

El G3 afirma que, con proceso de validación en instancias del trabajo matemático, se alude al *análisis de proposiciones para refutar o afirmar la veracidad de las mismas. En caso de ser válidas se demostrarán y en caso contrario se desarrollará un contraejemplo*. Se aprecia nuevamente la necesidad del empleo de pruebas intelectuales (Balacheff, 2000), en particular el uso de la demostración reconocida en la comunidad matemática. Respecto a la mención del uso del contraejemplo para refutar, es posible que refiera a proposiciones de carácter universal, pues no se puede refutar con un contraejemplo una de carácter existencial.

El G4 señala: *entendemos que es la verificación de que lo que se creó es válido a través de una demostración*. En este caso claramente se vincula la validación con la demostración.

En general, los grupos consideran que la validación constituye una parte sustancial del trabajo matemático. Se aprecia también un reconocimiento de la demostración aceptada por la comunidad matemática como fiable para aceptar una conjetura. Esto puede estar influenciado por experiencias vividas en las diferentes asignaturas de matemáticas específicas transitadas en el marco de la carrera y más aún por la presentación de la asignatura GEE en la que se discuten ideas vinculadas con el empleo y modo de proceder con el método axiomático deductivo.

A modo de discusión

Los resultados presentados dan respuestas a las dos preguntas planteadas. Se destaca que, si bien las respuestas ofrecidas, en sinergia con lo planteado por Reid y Knipping (2010) evidencian reconocimiento por parte de los estudiantes a formas de probar con el estilo de presentación de los Elementos de Euclides, las mismas no evidencian apreciaciones respecto a validaciones de tipo empírico. En este marco, cabe destacar que tampoco se realizan consideraciones de validaciones en el sentido mencionado por Doerr et al. (2017) y Saeki et al. (2017). Esto se debe quizás porque el contexto de trabajo matemático presente en estos artículos es esencialmente extra-matemático que contrastaría con los ámbitos de trabajo matemático usuales para los futuros profesores de la UNL. Cabe recordar que el propósito de la tesis es focalizarse en procesos de MM intra-matemáticos, de este modo: algunas percepciones de los estudiantes van a ir siendo reconsideradas y será necesario profundizar más aun la revisión de las referencias ya que son escasas las producciones que dan cuenta de los procesos de validación al trabajar con MM intra-matemática. Sin embargo, aportes de los autores recién mencionados pueden ofrecer pistas para repensar el trabajo de validación en el ámbito de formación de los futuros profesores cuando ellos trabajan en espacios de MM de fenómenos intra-matemáticos

Referencias y bibliografía

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente.

Bishop, A. (2001). Lo que una perspectiva cultural nos cuenta sobre la historia de las matemáticas. *Uno*, 26, 61-72.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2), 33*-115. Traducción de J.Centeno Pérez, B. Melendo Pardos, J. Murillo Ramón.

Confrey, J. (2006). The Evolution of Design Studies as Methodology. En R. Keith Sawyer (Ed.). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*. (pp. 135-151). New York: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.

Cruz, M.F., Scaglia, S. & Esteley, C. (2018). La construcción de definiciones geométricas. En Di Franco (Ed.), *VII Reunión Pampeana de Educación Matemática* (pp. 42- 47). Santa Rosa: Universidad Nacional de la Pampa.

Doerr, H.M., Ärlebäck, J.B. & Misfeldt, M. (2017). Representations of Modelling in Mathematics Education. En G.S. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Eds.). *Mathematical Modelling and Applications. Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education.* (pp. 71-81). Switzerland: Springer.

Esteley, C. (2014). *Desarrollo profesional en escenarios de modelización matemática: Voces y Sentidos*. Córdoba: Filosofía y Humanidades/UNC.

Hanna, G. y De Villiers, M. (Eds.). (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education.* New York: Springer.

Itzcovich, H. (Ed.). (2007). *La matemática escolar*. Buenos Aires: Aique.

Kaiser, G (Ed.) (2017) Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education. Cham: Springer

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe. (2014). Diseño Curricular. Educación Secundaria Orientada de la Provincia de Santa Fe.

Propuesta de estándares para la acreditación de las carreras de profesorado universitario en matemática. (2012). Disponible en: http://www.cin.edu.ar/comisiones/asuntos-academicos-material-en- tratamiento/subcomision-de-profesorados/

Reid, D and Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching.* The Netherlands: Sense Publishers.

Saeki, A., Kaneko, M. & Saito, D. (2017). Case Study of Pre-service Teacher Education for Mathematical Modelling and Applications Connecting Paintings with Mathematics. En G.S. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Eds.). *Mathematical Modelling and Applications. Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education.* (pp. 313-323). Switzerland: Springer.

Stillman, G.S., Blum, W. & Kaiser, G. (Eds.). (2017). *Mathematical Modelling and Applications. Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education.* Switzerland: Springer.

Stylianides, A.J. y Harel, G. (Eds.). (2018). *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving. An International Perspective*. Cham: Springer.

Topic Study Group 21.*Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics*. ICME13. Hamburg, 2016. Disponible en: http://www.icme13.org/files/tsg/TSG_21.pdf.

Topic Study Group 48. *Pre-service mathematics education of secondary teachers*. ICME 13. Hamburg, 2016. Disponible en: http://www.icme13.org/files/tsg/TSG_48.pdf.

Villarreal, M., Esteley, C. & Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM*, 50, 327–341.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Acciones formativas en el Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Salta

María de las Mercedes **Moya**
Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Salta
Argentina
maritamoyaster@gmail.com
Mario Ubaldo **Avila**
Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Salta
Argentina
marioavila390@gmail.com

Resumen

Presentamos un recorrido de las acciones formativas que se están desarrollando en el Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Salta, enmarcadas en el Proyecto de Investigación "Tecnomatemática: Profesor Universitario con TIC". El mismo, apuesta a la virtualización de la carrera, tomando como puntapié la formación inicial del profesorado. Se diseñan estrategias de mediación de saberes matemáticos, a través de la comunicación verbal, escrita, producción de materiales (textuales, auditivos, audiovisuales, utilización de software), para que el estudiante-docente sea capaz de producir proyectos educativos viables. Las mismas apuntan al desarrollo de habilidades y destrezas que favorezcan su accionar. Se pretende que los aspectos trabajados se compenetren en un todo holístico que involucren los saberes matemáticos, técnicos-tecnológicos, pedagógicos-didácticos. Las mayores dificultades, fueron de tipo académico y de comunicación. Planteamos propuestas a futuro a los fines de poder cambiar paradigmas educativos que se adapten a los tiempos de nuestra era.

Palabras clave: educación matemática, formación docente, comunicación, virtualidad, producción de materiales.

Introducción

El sistema educativo argentino, fue pensado en el siglo XIX; no obstante, los docentes que hoy tenemos en las aulas se formaron en el siglo XX y los alumnos son del siglo XXI. Quizá esta brecha temporal, es en parte la responsable de las constantes opiniones que se manifiestan sobre el bajo rendimiento académico de los alumnos argentinos en el campo de la matemática.

De la reflexión sobre estas brechas temporales, emerge la necesidad de una formación del profesorado en matemática acorde a los tiempos actuales. Para ello, es necesario pensar y repensar las prácticas educativas en todos los ámbitos del sistema y situarlos al entorno sociocultural en el que están inmersos.

En la Facultad de Ciencias Exactas, de la Universidad Nacional de Salta (UNSa) se propone la formación del Profesor en Matemática, a partir del cursado de 25 asignaturas, con dictado presencial y una duración de cuatro años. Las asignaturas se organizan en dos áreas: Formación General y Especializada, cuyo objetivo es facilitar la compresión por parte del egresado de la realidad educativa y de los contextos de su futura actuación profesional; y el área de Formación Orientada, en la que se contempla el conocimiento de los principales tópicos de los campos del Análisis, Álgebra, Geometría, Lógica, Informática, Topología, Probabilidades y Estadística, fundamentadores de los temas que se enseñan en todos los niveles del sistema educativo. El grupo de estudiantes que ingresa a la carrera pertenece a la franja etaria de 18-20 años, y se caracteriza por ser heterogéneo tanto en género como en posición socio-económica. Consultados sobre sus motivaciones, manifiestan el "gusto y facilidad para enseñar matemática", "creen tener vocación docente", "consideran que la carrera es corta y fácil". Además el entorno social de la provincia de Salta demanda Profesores en Matemática, por lo cual existen variadas y múltiples oportunidades laborales, que resultan atractivas para los proyectos personales de los estudiantes.

En este marco, y ante el panorama en el que interactuamos, se plantea el Proyecto de Investigación N° 2349/0: "Tecnomatemática: Profesor Universitario con TIC"; dependiente del Consejo de Investigaciones de la UNSa. Se pretende evaluar las acciones formativas que se llevan a cabo en la carrera, mixturando la formación presencial con la incorporación de metodologías de trabajos en Entornos Virtuales de Enseñanza y Aprendizaje. Entendemos que estos espacios actúan enriqueciendo las prácticas educativas, promoviendo nuevas metodologías de trabajo, nuevos canales de comunicación dentro y fuera del aula, y principalmente, nuevos perfiles de docentes y alumnos, acordes al escenario sociocultural del siglo XXI.

En esta comunicación, presentamos un breve recorrido de las acciones formativas que se están desarrollando en el Profesorado en Matemática de la UNSa. Las reflexiones son el resultado del trabajo de investigación que se desarrolla y que apuesta a la virtualización de la carrera, tomando como puntapié la formación inicial del profesorado.

Marco Teórico

La educación superior es un factor que trasciende en la sociedad, por lo tanto las universidades no se pueden quedar rezagadas a los cambios de los sistemas, las metodologías y las prácticas. Como consecuencia de la revolución tecnológica, los espacios virtuales de enseñanza y aprendizaje han adquirido un mayor protagonismo en las prácticas educativas, resignificando las teorías pedagógicas y didácticas. En tal sentido la formación del profesorado que se propone en la UNSa, debe contemplar estos cambios de paradigmas, ya que el educador que se está formado, será el que los experimentará en sus prácticas. La idea es dar lugar a la irrupción de una nueva pedagogía relacionada a la virtualización y digitalización de la enseñanza, asociada a la transición entre un enfoque basado en la transferencia de conocimientos, a uno centrado en la adquisición de competencias.

La idea de virtualizar un aula, y mucho más una carrera, no es sólo una cuestión de incorporar computadoras en la clase, tampoco consiste sólo en trabajar con Entornos Virtuales de Enseñanza-aprendizaje para la mediación de contenidos matemáticos, sino más bien implica romper los límites temporales-espaciales de lo que es el aula, también implica preguntarse dónde, cuándo, cómo y con quién los estudiantes realizan sus aprendizajes. (Burbules, 2008)

De acuerdo al Plan de Estudios vigente para la carrera del Profesorado en Matemática, consideramos necesario que en la formación del docente se trabajen sobre estos aspectos: estrategias de comunicación dentro de la situación de enseñanza – aprendizaje; producción de materiales educativos acorde al contexto y su vinculación de los mismos a través de la generación de proyectos educativos viables, en los cuales la matemática sea el eje central.

Entendemos que la comunicación tanto oral como escrita, es fundamental para la actividad profesional del educador en general, y del educador en matemática en particular. Deben explorarse en la formación inicial del profesorado, habilidades comunicativas que se manifiesten tanto en la presencialidad como en la virtualidad. En la actividad de comunicación, identificamos los “Diálogos Sociales”, caracterizados por la informalidad y la necesidad de compartir asuntos personales; los “Diálogos Argumentativos” nacidos desde las lógicas individuales y caracterizados por la defensa de puntos de vista (destacamos que este tipo de diálogo es el propio de la actividad matemática); y por último los “Diálogos Pragmáticos”, donde se ponen en juego el conocimiento de todos para construir desde distintas miradas, significados de un mismo tema. (Moya, 2017).

Por otro lado, es necesario tener bases teóricas sobre la actividad producción de materiales educativos, que son a su vez herramientas de comunicación, dentro del aula. Un material educativo es todo el conjunto de informaciones, orientaciones, objetos, productos, actividades y propuestas que se elaboran ad-hoc para guiar al alumno en su proceso de aprendizaje (Sabulsky, 2007). Pensar en el diseño y producción de materiales educativos por parte del docente, posee ciertas características intrínsecas que le dan un alto significado. En primer lugar, el material educativo se asume como transmisor de información, instrumento de conocimiento, medio de formación y alfabetización y herramienta de investigación. (Cabero, 1992). En segundo lugar, la producción de materiales se asume como una experiencia de aprendizaje, de fomento del trabajo colaborativo, donde se pondrán en juego aspectos artísticos, creativos, pedagógicos, comunicativos, técnicos, tecnológicos, entre los más relevantes. Teniendo en cuenta la función de estos materiales educativos, como instrumentos de mediación entre el objeto de aprendizaje y el sujeto que desea aprender, la responsabilidad del docente es dar un uso significativo a estos materiales, de tal manera de poder asumir un canal de comunicación vehiculizada con los mismos. (Méndez Garrido, 2003).

El concepto de “Tecnociencia” y en particular el de “Tecnomatemática”, establece la relación entre informática y ciencia al servicio de las actividades de investigación (Echeverría, 2003). Esta concepción, unida al aspecto pedagógico - didáctico, al cual se suma la Matemática, Informática y Etnomatemática, nos permite pensar la enseñanza situada de la matemática con medios digitales.

Nuestra concepción, como docentes investigadores de su propia práctica, es plantear una metodología de trabajo, en la que el docente en formación combine matemática y tecnología, (Tecnomatemática) para la producción de proyectos de enseñanza y aprendizaje, con un Diseño Instruccional (DI) acorde. Debe entenderse que un DI nos permite prever, organizar y ofrecer pautas para el logro de los aprendizajes por parte de los estudiantes. El objetivo final del DI, es la planificación de una serie de componentes que guiarán el aprendizaje de los estudiantes. (Polo, 2001).

Acciones Formativas

A continuación describiremos las acciones que se desarrollan en la formación inicial del Profesorado en Matemática de la UNSa. Las mismas apuntan a que el alumno, que se destaca por ser creativo, nativo digital, usuario de múltiples plataformas y dispositivos móviles para la socialización y autoaprendizaje, adquiera otras habilidades y destrezas que favorezcan su futuro accionar docente. Se pretende que los aspectos trabajados se compenetren en un todo holístico que involucren los saberes matemáticos, técnicos-tecnológicos, pedagógicos-didácticos.

Estrategias de Comunicación

Partiendo de un análisis crítico, teniendo en cuenta la realidad de los estudiantes, sus habilidades y dificultades, la infraestructura de la institución y de acuerdo al perfil establecido para el egresado (según el plan de estudio), se desarrollaron estrategias que tiendan a fomentar la comunicación, atendiendo a los distintos formatos, los medios tecnológicos, como así también al buen uso del lenguaje en sus distintos aspectos.

Lenguaje verbal. Para fomentarlo, se estimula al estudiante a ejercitar la tarea de "enseñar matemática" mediante el uso de una metodología lúdica que denominamos "pentatema". ¿Qué es el pentatema? Se dispone de una caja pentagonal, en la cual se distribuyen aleatoriamente fichas con temas matemáticos, acordes a los saberes previos de los estudiantes. Los mismos eligen una de las fichas y exponen "una clase" ante sus pares, simulando ser los docentes del aula. Aquí se ponen de manifiesto el leguaje matemático (argumentativo), la organización de la pizarra (lenguaje icónico-escrito), como así también el lenguaje gestual, y la dicción.

Este tipo de lenguaje, también se trabaja en las clases prácticas de las distintas asignaturas del plan de estudios, y en forma particular en las instancias de exámenes finales. En ellas, los estudiantes del profesorado, deben poner de manifiesto la oralidad junto con todas las componentes ya mencionadas.

Ante la presencia de dificultades de comunicación verbal, se proponen estrategias de ejercitación, que contribuyan al proceso que se está trabajando. Por ejemplo, se fomenta lectura dentro del aula, se propone que los alumnos se filmen exponiendo algún tema matemático o un trabajo práctico, y se estimula la autoevaluación y la objetividad en la evaluación de sus pares.

Lenguaje escrito. Además de proponer el desarrollo de las actividades típicas que involucran el lenguaje escrito, como ser la confección de informes, de trabajos prácticos, exámenes parciales escritos, se diseñan metodologías que contemplan el buen uso de este leguaje.

En el Aula Virtual se propone un foro de debate académico, en el cual los estudiantes, asumiendo un "juego de roles", discuten temas de interés, centrados principalmente en tópicos referentes a la enseñanza-aprendizaje de algún tema matemático. Se tienen en cuenta para la evaluación de esta actividad, el empleo del diálogo social, argumentativo y pragmático dentro de las intervenciones que se realicen. También se propone el uso de los foros de consulta para el desarrollo de las actividades de las distintas asignaturas, en algunos casos se emplea el foro social, a modo de "café virtual".

En redes sociales, se induce una práctica similar, con el agregado de que en éstas, el alumno participa en forma más natural, aportando críticamente a las entradas de sus pares, compartiendo materiales que fueron seleccionados de antemano, haciendo uso del diálogo social con mayor predominancia respecto del pragmático-argumentativo. Es importante destacar el trabajo en redes sociales, como herramientas de enseñanza y aprendizaje, ya que al ser esta actividad parte del DI de algunas cátedras, los estudiantes deben adecuar su identidad virtual a la práctica y al contexto en el que están trabajando.

También se hace uso de correo electrónico no solo para gestión dentro de la Cátedra, sino también académicas, como otra herramienta para el aprendizaje de la matemática.

Producción de Materiales

Consideramos importante el hecho de que alumnos del profesorado, puedan experimentar en la tarea de producción y uso de materiales educativos dentro de su formación docente. Esto, no sólo por las competencias técnicas-tecnológicas que en ella se desarrollan, sino también por el valor agregado que otorga, a su formación, el tener que pensar una práctica educativa mediada con materiales digitales.

Esto se realiza hasta el momento, como parte de las actividades de la cátedra Tecnología para la Educación Matemática, siendo esta asignatura la primera del plan de estudio que combina matemática, tecnología y pedagogía, como una primera aproximación a la tarea de enseñanza y aprendizaje de esta ciencia.

Las producciones se realizan en grupos de no más de tres estudiantes, esto con el fin de fomentar el trabajo colaborativo, cooperativo y en equipo. Las mismas se socializan con el grupo áulico, simulando la aplicación de estos materiales para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Con esta estrategia, se vuelven a poner en juego las habilidades de comunicación a través de los materiales y del buen uso del lenguaje que el estudiante (futuro docente) demuestra en su exposición.

Los materiales que se producen son: radio educativa, videos, construcciones dinámicas, juegos, materiales didácticos no digitales. En todos ellos se tiene en cuenta el concepto de vigilancia epistemológica, a fin de guardar coherencia y sintonía con los conceptos matemáticos.

Para la producción de radio educativa, la elaboración del guion debe realizarse con claridad y simplicidad en la exposición de las ideas, esto a fin de asegurar la comprensión del mensaje y facilitar la locución. La voz es la columna vertebral del sonido radiofónico, se pretende ejercitar la tarea de locución aporta al desarrollo de la dicción, modulación del tono, que se consideran importantes para la exposición oral del docente.

En los videos elaborados se muestran diferentes situaciones de la vida cotidiana, que pueden ser modelizadas. En los mismos se plantean problemas, que son resueltos en el desarrollo del video, creando espacios de pensamiento para la generación de otros problemas. Desde lo técnico, se visualiza musicalización; elementos separadores; guionado y locución; modelización, imágenes fijas y móviles; teatralización, entre otras.

Las construcciones dinámicas, se realizan con el software GeoGebra, con el objetivo de aportar a la visualización de los diferentes conceptos matemáticos propios de la Geometría, Algebra y Análisis. Las mismas, pueden ser utilizadas para el estudio de algunos temas en las ramas mencionadas, como así también para pensar en nuevas situaciones de enseñanza que puedan ser mediadas con estas herramientas de visualización, creadas por el estudiante - docente.

La producción de materiales didácticos no digitales, permite entre otras cosas que el estudiante haga propia la metodología lúdica, siendo capaces de plantear “juegos didácticos”, motores del divertimento matemático. Aquí es donde aparte del ingenio y la creatividad, se ponen en juego las habilidades manuales, la estética, el uso y sustentabilidad de los materiales construidos.

Trabajar con el estudiante del profesorado de matemática, este tipo de actividades, aporta al desarrollo de competencias profesionales, que en el plano académico le permiten, aprender matemática, enseñarla, resolver problemas y más aún plantearlos. Desde el plano pedagógico, le permite explorar en el desarrollo de actitudes cognitivas y metacognitivas, necesarias para el desarrollo de un paradigma superador. Teniendo en cuenta el desarrollo de destrezas técnicas – tecnológicas, destacamos que se trabajan en torno al uso de software libre para la producción de los materiales y para la enseñanza de la matemática, y prácticas sobre el uso de las herramientas de Office.

En la Fig. 1, se pueden visualizar algunos de los materiales digitales producidos por los estudiantes, como así también la puesta en práctica de los mismos, en el desarrollo de actividades de enseñanza y aprendizaje. Aquí se puede ver cómo se combinan los dos tipos de acciones formativas que se describieron hasta el momento: las de comunicación y las de producción de materiales.

Figura 1. Algunos materiales digitales producidos por los estudiantes

Como se dijo, los materiales educativos, son ante todo herramientas de comunicación dentro del aula, y como tales deben funcionar. En este sentido, recae sobre el docente la difícil tarea de definir “qué hacer con los medios”. Esta respuesta la encontraremos en el planteo de proyectos educativos.

Proyectos Educativos

Como se dijo, la propuesta de formación que se brinda a los estudiantes del profesorado, no solamente se centra en el diseño y producción de recursos (digitales o no) para la enseñanza de la matemática, sino también en reflexionar en el uso que se da a los mismos. La incorporación de estos materiales se realiza teniendo en cuenta su forma de articulación con los contenidos, las competencias educativas y cognitivas de los destinatarios, las características del entorno socio - cultural, destacando la importancia del cuándo y el cómo utilizarlos. Reflexionar sobre estos aspectos, no lleva a formular un proyecto educativo para la enseñanza y aprendizaje.

Un proyecto de educativo para la enseñanza y el aprendizaje, es un conjunto de actividades y tareas de carácter tecnológico, científico, lúdico, técnico, artísticos, etc., que se programan para alcanzar un propósito determinado. El mismo, surge como respuesta a un proceso de análisis y reflexión sobre la realidad, y busca dar solución a problemas reales en un contexto determinado. (Moya, M. 2005)

Entendemos que sería posible postular que, “para cada concepto matemático, existe al menos un proyecto educativo viable que combine tecnología, matemática, pedagogía – didáctica, a partir del cual puede trabajarse significativamente”.

Se espera que a partir del desarrollo de estos proyectos, se promuevan aprendizajes significativos en situaciones pedagógicas ricas en resolución de problemas. Estos vehículos de enseñanza y aprendizaje, deben permitir determinar cómo las capacidades y conocimientos se van logrando, favoreciendo el auto-aprendizaje a partir de la motivación y el desarrollo de capacidades.

Nuestro enfoque, siguiendo el postulado ya enunciado, es que el estudiante del Profesorado en Matemática, se forme en competencias que le permitan formular proyectos que vinculen, materiales, actividades interdisciplinarias y de naturaleza práctica, con aplicaciones a lo cotidiano. Esto es acorde a la política pública del Estado Nacional que modifica el enfoque de la enseñanza de la matemática a partir del 2019.

Por otro lado, apostamos al desarrollo profesional del docente que estamos formando, el cual debe identificarse como un investigador en su propia práctica educativa, y la de sus pares. Además ser capaz de formular hipótesis de investigación que luego puedan materializarse en tesis y trabajos de divulgación que aporten a la Educación Matemática.

Conclusión

En este proceso de formación del Profesor en Matemática, existieron dificultades que consideramos necesarias destacar. Desde el punto académico, se detectaron errores conceptuales en matemática básica, esto desde el punto de vista pedagógico significa un obstáculo a la hora de pensar una situación de enseñanza – aprendizaje. Asimismo estas debilidades académicas dificultan el proceso de diseño y producción de materiales y consecuentemente la elaboración de Proyectos Educativos viables que los incluyan. Nuestra reflexión es que es necesario fortalecer la formación conceptual de nuestro profesorado, aunque consideramos que esto no es suficiente, pues debe trabajarse también en el aspecto pedagógico-didáctico y técnico – tecnológico, apostando a una formación integral del mismo.

Las actividades de comunicación planteadas, contribuyen significativamente al desempeño del docente frente al aula. La idea es que se desarrollen habilidades y competencias que puedan manifestarlas en su desempeño profesional. De esta manera, nuestro egresado estaría capacitado para la confección de proyectos educativos, producción de materiales (escritos, auditivos y audiovisuales). No menos importante es el hecho que sea capaz desarrollar otras tareas que son propias de su quehacer docente y que no están institucionalizadas dentro del plan de estudios, como la de expresar sus ideas, argumentarlas, refutar la de sus pares, articular un discurso, escribir un reporte de investigación, entre otras.

En este trabajo se mostró algunos resultados de la investigación que se está desarrollando. La tarea es lenta, pues deben romperse mitos aferrados, que se manifiestan en la metodología de cátedras universitarias “tradicionales”. En otros casos, debe corregirse un error conceptual sobre lo significa virtualizar un aula. No es sólo una cuestión de incorporar computadoras en la clase, sino más bien implica romper los límites temporales-espaciales de lo que significa el aula, considerando dónde, cómo, cuándo, con qué y con quién los estudiantes construyen sus aprendizajes.

Como propuesta a futuro se pretende continuar con estas acciones formativas en los siguientes años, a los fines de evaluar el impacto de las mismas, retroalimentando este proceso de formación. También anhelamos acompañar a los docentes en ejercicio, en este cambio de paradigma de enseñanza, que implica un proceso de alfabetización digital que nos lleve a considerar la virtualidad como parte del proceso educativo de nuestra era.

Referencias y bibliografía

Burbules, N (2008). Riesgos y promesas de las TIC en la educación. ¿Qué hemos aprendido en estos últimos diez años? *Las TIC: del aula a la agenda política*, 3, 31- 40. Buenos Aires. UNICEF

Cabero, J.; Román P. (2008). E-Actividades. Un referente básico para la formación en Internet. Sevilla. MAD S.L.

Fernandez Coca, A. (2012). *Docencia 4.0, mucho más allá del uso de las TIC en el aula universitária.* Universitat de les Illes Balears. En http://cebloc.uib.cat/docencia-4-0/

Méndez Garrido, J. M. (2010). *Pautas y criterios para el análisis y evaluación de materiales curriculares*, Universidad de Huelva. En: http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/3451/b15760480.pdf?sequence=1

Moya, M; Avila, M. (2013). Aula Extendida en la Formación del Profesor en Matemática: Hacia el Docente 2.0. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Montevideo. En: http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/834.pdf

Moya, M.; Avila, M. (2015). Mediación de Proyectos Educativos con Materiales Digitales. *3° Jornadas de TIC e innovación en el Aula. Enlaces entre educación, conocimiento libre y tecnologías digitales*, 4, 388-394. Ed. UNLP. En http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/49971

Moya, M.; Avila, M. (2017). El impacto de aprender cónicas en Facebook. 4° Jornadas de TIC e *Innovación en el Aula. Más allá del aula virtual. Otros Horizontes, otros desafíos*, 4, 441-447. Ed. UNLP. En: http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/65078

Moya, M.; Avila, M. (2017). Reflexiones sobre la virtualidad en la formación del Profesorado en Matemática. Actas del VIII CIBEM, 234-242. Madrid. En http://www.cibem.org/images/site/LibroActasCIBEM/ComunicacionesLibroActas_CB601-700.pdf

Polo, M (2001). *El diseño instruccional y las tecnologías de la información y la comunicación.* Universidad Nacional Abierta. Dirección de Investigaciones y Postgrado. En: http://postgrado.una.edu.ve/disenho/paginas/polo.pdf

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Desde la Razón Áurea a la infinitud de los Fractales

Lilian del C. **Vargas** Villar
Universidad de Concepción
Chile
lilivargas@udec.cl
Daniel **Sánchez** Ibáñez
Universidad Austral de Chile
Chile, y
Universidad Estadual de Campinas
Brasil
danielsanch@gmail.com

Resumen

Este taller tiene como propósito contribuir a ampliar el conocimiento matemático de los profesores en formación y de los formadores de profesores de matemática en general, estudiando la construcción de fractales y espirales en razón áurea y su conexión con el arte y la naturaleza. Las actividades que se desarrollan se enmarcan dentro del Horizonte Matemático y aportan al desarrollo de éste, estudiando proyecciones del concepto del número áureo, mediante secuencias de actividades didácticas, donde los asistentes utilizan el software Geogebra como herramienta dinámica e interactiva para la construcción de novedosos fractales.

Palabras clave: Educación matemática, Geometría dinámica, Razón áurea, Fractales, Horizonte matemático.

Introducción

La formación Inicial Docente de profesores de Matemática debe tender a desarrollar ampliamente en los estudiantes el conocimiento matemático para enseñar. Hill, Ball y Shilling (2008, p. 374) definen tal concepto como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno”.

El objetivo del taller es contribuir a ampliar el conocimiento matemático de los profesores en formación estudiando el número áureo (o de oro), la ley de proporcionalidad áurea y su aplicación en la construcción de fractales y espirales. Así, las actividades que se desarrollan en el taller propuesto se enmarcan dentro del horizonte matemático como componente didáctico del profesor y aportan al desarrollo de éste, estudiando las proyecciones del concepto de razón áurea, específicamente aplicado en los procesos iterativos y de auto-semejanza de los fractales.

Fernández y Figueiras (2014) conceptualizan el Horizonte matemático como un tipo de conocimiento que afecta a los diferentes dominios del conocimiento del profesor en la práctica. Un profesor con un sólido y profundo desarrollo del horizonte matemático, al enseñar un concepto entiende cuales son las proyecciones de éste para el aprendizaje de posteriores saberes, lo que permite enriquecer la práctica en el aula.

La naturaleza en su bondad muestra un entorno lleno de objetos impresionantes que va más allá de las regularidades y las formas estándar. Al observar nuestro alrededor vemos: árboles, costas, flores, plantas, caracolas, etc., todas ellas con un orden dentro del caos que pareciera existir. Esto invita a reflexionar sobre el estudio de la geometría no Euclidiana y cómo puede ser una herramienta útil para el desarrollo de la creatividad y la comprensión de un modelo que busca interpretar la regularidad en las relaciones entre un objeto y sus partes a diferentes escalas.

Para Benoit Mandelbrot, el precursor de la geometría fractal, la observación de la naturaleza resulta primordial y de ahí el interés de la geometría fractal por las formas naturales y se pregunta: "¿Por qué a menudo se describe la geometría como algo 'frío' y 'seco'? Una de las razones es su incapacidad de describir la forma de una nube, una montaña, una costa o un árbol. Ni las nubes son esféricas, ni las montañas cónicas, ni las costas circulares, ni la corteza es suave, ni tampoco el rayo es rectilíneo" (Mandelbrot, 1997, p.28).

En los últimos años investigaciones en Didáctica de la Geometría, dan cuenta de nuevas formas de abordar esta disciplina tanto desde el interior de la matemática como desde otro ámbito, como el arte y la computación. Laborde y Laborde (2008), al referirse a la inserción del programa CABRI en las aulas, consideraron el tipo de tareas que se asignan a los estudiantes como un cambio importante en las exigencias para los profesores. Estos planteamientos han sido reiterados en estudios posteriores. Sinclair et al. (2016), por ejemplo, destacan la necesidad de lograr una mejor comprensión del papel de la tecnología y una mejor integración del uso de esta en las prácticas de enseñanza de los profesores, apoyándolos en el diseño y desarrollo de nuevas tareas que sean apropiadas para el uso de programas de geometría dinámica. A través del uso de software dinámico, como GeoGebra, CABRI II plus y otros, se puede estudiar las propiedades de los distintos objetos geométricos.

En éste escenario se presenta el taller sobre construcciones geométricas de fractales y espirales utilizando proporciones áureas, elaboradas en el software GeoGebra, creando las herramientas necesarias para obtener entes armónicos y creativos que motiven el estudio de la geometría y su relación interdisciplinaria con diferentes asignaturas. Arcavi y Hadas (2000) plantean que un ambiente dinámico permitiría a los alumnos construir figuras con ciertas propiedades y así poder visualizarlas, pero también les posibilitaría transformar aquellas construcciones en "tiempo real", lo que contribuiría a la formación del hábito de transformar (mentalmente o por medio de un instrumento).

GeoGebra es un software matemático libre e interactivo. Su estructura es ideal para la educación matemática en un ámbito recreativo y dinámico, uniendo tópicos de Geometría euclidiana, Algebra y Cálculo (Sánchez y Trumper, 2012). En todas las actividades del Taller utilizaremos su formato y configuración preestablecida (versión clásica 5.0), esto es, su "Barra de Menús" (para abrir, guardar, editar, etc.), los "Íconos de herramientas básicas" (con funciones predefinidas), su "Vista Algebraica" (elementos construidos) y su "Vista Gráfica" (para figuras bidimensionales).

Actividad 1

Objetivo: Crear herramienta para dividir un segmento en razón áurea

Para las actividades del taller es necesario crear en GeoGebra una nueva herramienta que permita dividir un segmento en razón áurea. Un segmento *AB* está dividido en un punto *C* en proporción áurea, o en media y extrema razón, cuando la relación entre la parte mayor *AC* con la menor *CB* es igual a la razón del segmento original *AB* con la parte mayor *AC*, es decir: dos números *a* y *b* están en razón aurea si $a/b = \varphi \approx 1,61803...$, donde φ es llamado como número áureo (Livio, 2007). En términos algebraicos, con $a = AC$, $b = CB$ y $a + b = AB$, tenemos que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \varphi$$

A partir de lo mencionado anteriormente, preparemos la nueva herramienta. Primeramente, dibuje un segmento *AB*, usando “Segmento” desde el tercer ícono, establezca su punto medio, usando “Medio o Centro” desde el segundo ícono, y renombre este punto como *M*. Luego, trace una recta perpendicular, con “Perpendicular” desplegando el cuarto ícono, al segmento *AB* en el punto *B*. Seguidamente, dibuje una circunferencia, con “Compás” a partir del sexto ícono, con centro en *B* y radio *MB*. Nombre *D* al punto de intersección, usando “Intersección” desde el segundo ícono, de la circunferencia con la recta perpendicular.

A seguir, trace el segmento *AD*, dibuje una circunferencia con centro en *D* y radio *DB*. Nombre *E* a la intersección de los dos objetos. Finalmente, al encontrar la intersección de la circunferencia de centro en *A* y radio *AE* con el segmento *AB*, se obtiene la división de éste en razón áurea en el punto *C* (ver Figura 1). A continuación crearemos una nueva herramienta.

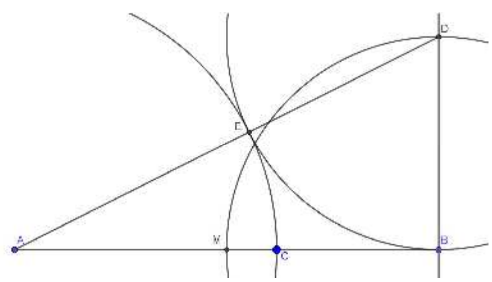


Figura 1. División de segmento en razón áurea.

Primero ocultaremos todos los objetos, con “Mostrar/ocultar objetos” del undécimo ícono, dejando sólo el segmento inicial *AB* y el punto de división áurea *C*. Luego, seleccione en menú “Herramientas” la opción “Crear una nueva herramienta”, luego se selecciona como objeto de salida al punto *C* y como objetos de entrada a los puntos *A* y *B*. Finalizamos este proceso nombrando “*RazonAurea*” a la nueva herramienta. Adicionalmente, guarde esta nueva herramienta como archivo con extensión “*.ggt*” en menú “Herramientas”, luego en “Gestión de herramientas” y en “Guardar como”, por ejemplo, “*RazonAurea.ggt*”. A cada “Nueva Ventana” en GeoGebra, para el resto de las actividades, comience abriendo el archivo “*RazonAurea.ggt*” para luego insertarla desde Menú “Confección de barra personal”.

Actividad 2

Objetivo: Construir espiral en triángulos equiláteros de lados en razón áurea

Para diseñar la espiral en el auto replicado del triángulo equilátero, primero es necesario elaborar una nueva herramienta que vaya generando la curva sobre un lado del triángulo. En el quinto ícono se selecciona “Polígono regular” de tres vértices *ABC*. Luego se dibuja un “Arco de circunferencia”, desde el quinto ícono, con centro en *B* y otros dos puntos *C* y *A*. Seguidamente, seleccionar la herramienta "*RazonAurea*" para dividir (en razón áurea) el lado *CB* en el punto *D* (ver Figura 2). Seguidamente, en el menú "Herramientas", seleccionar "Crear una nueva herramienta", señalando como Objeto de salida al triángulo *ABC*, al arco de circunferencia y a los puntos *C* y *D* (ver Figura 3). Como Objeto de entrada seleccione los puntos *A* y *B*. Nombre a la nueva herramienta y guarde (por ejemplo, como "*ArcoLado.ggt*").

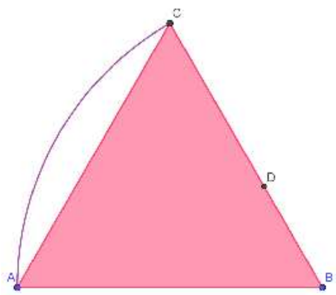


Figura 2. Triángulo equilátero, arco de circunferencia y división áurea de un lado

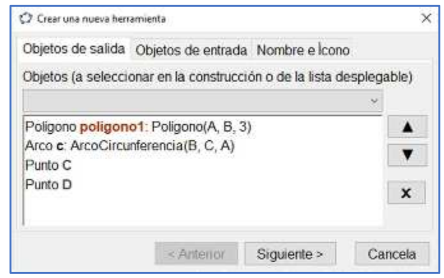


Figura 3. Creación de Herramienta de auto replicado (fractal).

A continuación, aplique la herramienta "*ArcoLado*" seleccionando los puntos *C* y *D*. Repita este proceso iterativo por lo menos unas cinco veces, para los otros lados del triángulo y coloree para obtener una representación, por ejemplo, como ilustrada en Figura 4 o en Figura 5.

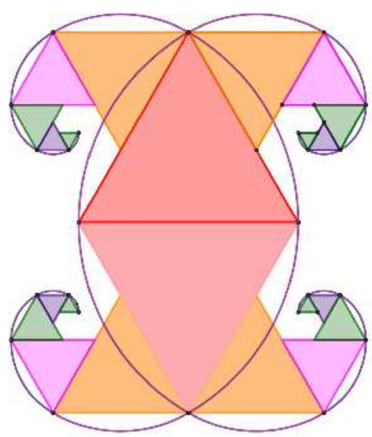


Figura 4. Proceso fractal de espirales y triángulos equiláteros en razón áurea.

Una de las características de estas construcciones realizadas es la razón entre los arcos que se van generando para construir la espiral, todos ellos en razón áurea: $\widehat{AC}/\widehat{CG} = \varphi$. Destacamos, que algunos procesos iterativos fractales de espirales áureos nos llevan a conectarnos con la naturaleza (ver Figura 6) y comprender estos fenómenos a través de la matemática.

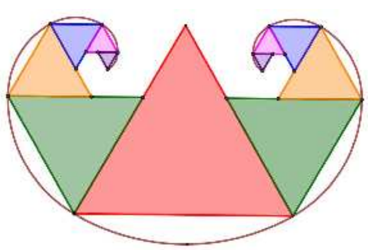


Figura 5. Otra forma de proceso fractal.

Figura 6. Espirales en la naturaleza

Actividad 3

Objetivo: Diseñar el Triángulo de Sierpinski con estrella de tres puntas en razón áurea

El matemático polaco Waclav Sierpinski (1882-1969) construyó, en 1919, este triángulo formado por tres copias auto-semejantes del paso anterior. Un objeto de estas características auto-semejante en distintas escalas se llama fractal. En ésta actividad se diseña una variante del triángulo de Sierpinski con la construcción de una estrella de tres puntas inscrita en un triángulo equilátero a partir de divisiones áureas de los lados. En el desarrollo de esta actividad se necesita construir dos nuevas herramientas: una para elaborar el triángulo de Sierpinski y otra para construir la estrella de tres puntas inscrita en un triángulo equilátero.

Para la primera herramienta, dibuje un triángulo equilátero *ABC*, seleccionando “Polígono regular” de tres vértices desde el quinto ícono. Luego se determinan los puntos medios de cada lado del triángulo, en “Medio o Centro” del segundo ícono. Seguidamente, en “Polígono” del quinto ícono, crear el triángulo *NLF*. Cambiar a color más claro éste último triángulo (ver Figura 7). Diríjase a Menú “Herramientas” y escoja “Creación de herramienta nueva”. Como objetos de salida colocar el triángulo *NLF* y sus vértices. Como objetos de entrada a los puntos *A* y *B*. Guarde y nombre a la nueva herramienta “*Sierpinski.ggt*”.

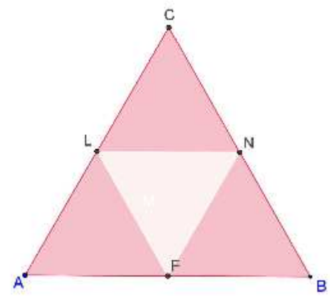


Figura 7. Triángulo de Sierpinski, primera etapa.

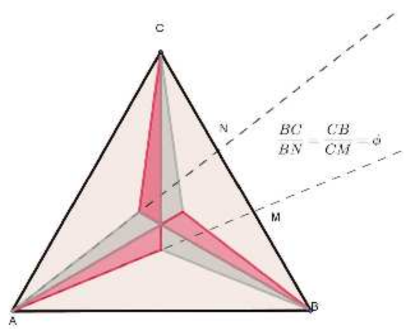


Figura 8. Estrella áurea.

Para la segunda herramienta, dibuje otro triángulo equilátero ABC y divida (ida y vuelta) al lado CB en razón áurea (con “*RazonAurea*”) tal que $\frac{BC}{BN} = \frac{CB}{CM} = \varphi$. Luego, trace las semirrectas *AN* y *AM*. Repita en los otros lados del triángulo. Busque el punto medio del triángulo ABC y finalice construyendo seis triángulos internos que forman la estrella, alternando colores, como en Figura 8. Luego, seleccione los objetos necesarios para visualizar la estrella, como objetos de salida, y a los puntos A y B como objetos de entrada. Nombrar y guardar como “*EstrellaAurea.ggt*”.

Para concluir la construcción del triángulo de Sierpinski con estrella de tres puntas en razón áurea, se utilizan las herramientas creadas sobre un triángulo equilátero. Usando “*Sierpinski*” genere sucesivos triángulos internos (los triángulos blancos, según Figura 7) y con “*EstrellaAurea*” seleccione en los dos vértices basales de cada triángulo (blanco) y obtendrá así la inserción de estrellas áureas. Repetir éste proceso, por lo menos, cuatro iteraciones y coloree el triángulo original (ver Figura 9). Finalmente ha construido usted un fractal de Sierpinski.

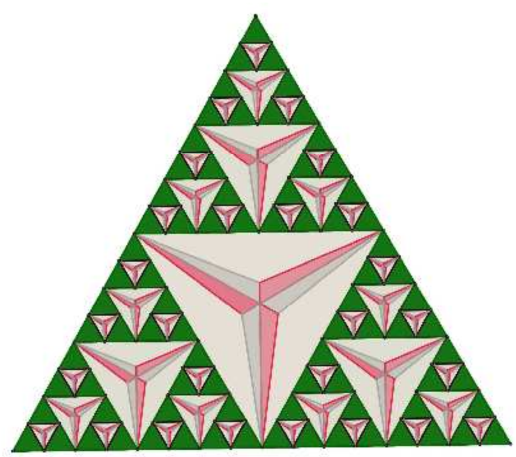


Figura 9. Fractal del Triángulo de Sierpinski

Actividad 4

Objetivo: Construir árbol pitagórico con triangulo áureo de Kepler

La construcción comienza a partir de la división de un segmento en extrema y media razón. Luego, continuamos con la construcción de un triángulo de Kepler. Desde cuarto ícono, elija “Perpendicular” y genere recta por *C* (punto de división áurea) perpendicular al segmento *AB*.

En seguida, seleccione “Compás”, desde el sexto ícono, y construya una circunferencia con centro en *B* y radio *AC*. A continuación determine el punto de intersección entre la recta perpendicular y la circunferencia. Obtendrá dos puntos. Escoja el punto que se encuentre sobre el segmento *AB*, llámelo *M*, y genere el polígono *ABM* (Figura 10). Este polígono ABM es conocido como triángulo de Kepler, en honor al astrónomo alemán Johannes Kepler quien lo describe (Livio, 2007, p.173) en una carta así:

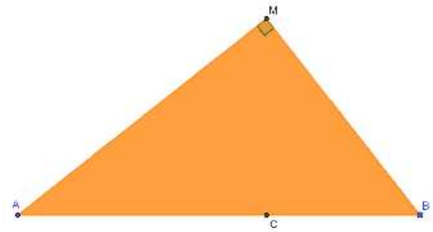


Figura 10. Triángulo (áureo) de Kepler.

> Si un segmento se divide entre el extremo y su proporcional, y se toma como hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto se halle sobre el punto que divide a la hipotenusa en dichas partes, entonces el cateto menor tendrá la misma longitud que la parte más larga del segmento de partida.

La principal característica de este triángulo es combinar dos aspectos fundamentales de la geometría euclidiana, el teorema de Pitágoras y el número áureo. En términos matemáticos, denotando $a = AC = BM = c$, $b = CB$, $h = CM$ y $d = AM$, tenemos por el teorema que

$$(a+b)^2 = c^2 + d^2 = c^2 + \left(a^2 + h^2\right) = c^2 + a^2 + \left(c^2 - b^2\right) = 3a^2 - b^2$$

Dividiendo esta última igualdad por b^2, y recordando desde Actividad 1 que $a/b = \varphi$ obtenemos el polinomio cuadrático que define al número áureo, ya que

$$(a/b)^2 + 2(a/b) + 1 = 3(a/b)^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^2 = \varphi + 1$$

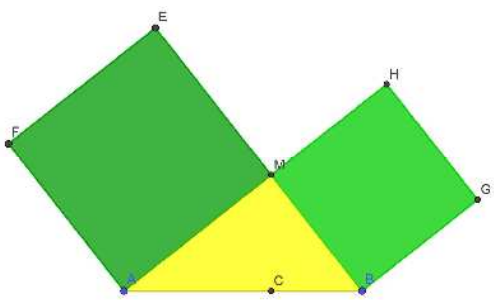


Figura 11. Colorido para árbol pitagórico a partir del triángulo de Kepler

Una vez construido el triángulo de Kepler, dibujamos dos cuadrados sobre sus catetos y coloreamos (opcional) como visualizado en Figura 11. En esta etapa creamos la herramienta fractal (de auto-replicado) para confección del árbol pitagórico. Para tal fin, diríjase a Menú Herramientas y a “Crear una herramienta nueva”. Como objetos de salida seleccione el triángulo de Kepler y los cuadrados más sus vértices superiores. Para los objetos de entrada seleccione los puntos *A* y *B*, y finalice la nueva herramienta.

En esta etapa se aconseja guardar la herramienta fractal en archivo “*FractalKepler.ggt*” (ir a Herramientas, luego “Gestión de herramientas” y ‘Guardar como”) y abrir una nueva ventana.

En nueva ventana abra el archivo creado ("*FractalKepler*") para luego insertar la herramienta en Menú "Confección de barra personal". A continuación trace un segmento *AB*, seleccionado desde el tercer ícono, y marque nuestra herramienta fractal en los puntos extremos *A* y *B*. Repita este proceso por lo menos unas 6 iteraciones, adicione un cuadrado en la hipotenusa del primer triángulo y coloree de forma a obtener un árbol pitagórico como en Figura 12.

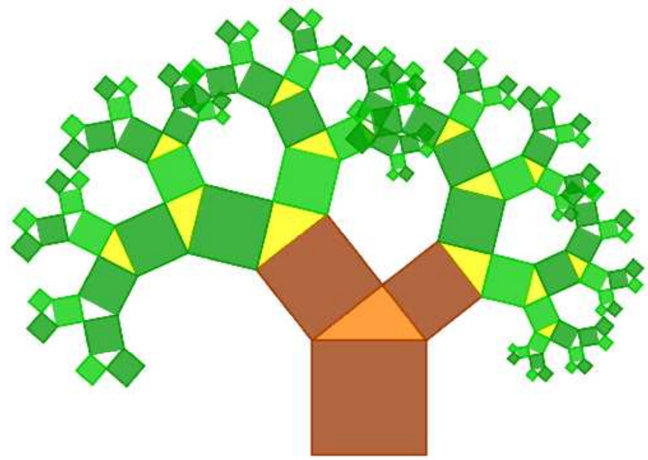


Figura 12. Árbol Pitagórico del Triángulo de Kepler.

Actividad 5

Objetivo: Construir Fractal de un cuadrado con reducción en razón áurea

Al igual que en Actividad 4, la siguiente construcción precisa de la división de un segmento en extrema y media razón. Luego continuamos con la construcción de un cuadrado. Despliegue el quinto ícono y elija "Polígono regular" y genere un cuadrado cuyos puntos iniciales (*A* y *B*) generen el lado base inferior del cuadrado. Luego, con la herramienta "*RazonAurea*" genere el punto *E* (punto de división áurea) en el segmento superior del cuadrado *DC*. En seguida, seleccione "Compás", desde el sexto ícono, y construya una circunferencia con centro en *C* y radio *DE*. A continuación elabore una semirrecta, desde tercer ícono, que pase por los puntos *E* y *C*. Luego, determine el punto de "Intersección", segundo ícono, entre la semirrecta y la circunferencia. Obtendrá el punto *F*. Oculte la circunferencia y utilice la herramienta de razón áurea para dividir en ambos sentidos cada uno de los lados del cuadrado (por ejemplo, con la herramienta seleccione *A* y *B*, y luego *B* y *A*). En seguida, genere sectores circulares, desde el sexto ícono, con centro en cada vértice y puntos de división áurea más distantes a ese vértice (por ejemplo, el sector circular *CGM* visualizado en Figura 13).

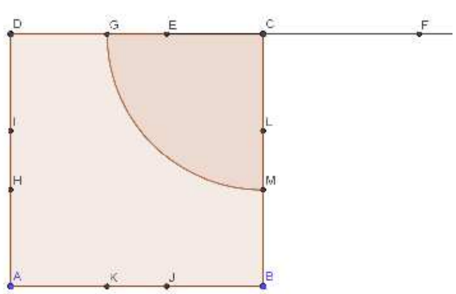


Figura 13. Divisiones áureas y sección circular en cuadrado.

Coloree los sectores circulares (rojo) y el cuadrado (amarillo). Posteriormente, creamos una herramienta para replicar el cuadrado original en un factor de reducción dado por el número áureo. Para tal fin, dirigirse a Menú Herramientas y apretar "Crear una herramienta nueva". Para los objetos de salida seleccionamos el cuadrado y los sectores circulares (más los puntos *D* y *C*). Para los Objetos de entrada seleccione los puntos *A* y *B*, y finalice la nueva herramienta. Obtendrá un nuevo cuadrado como en Figura 14. A continuación creamos otra herramienta (de auto-replicado) para confección del cuadrado fractal.

Para los objetos de salida seleccionamos el cuadrado menor y sus vértices *N*, *O* y *F* (según Figura 14). Para los Objetos de entrada seleccione los puntos *A* y *B*, y finalice la nueva herramienta. Repita este proceso por lo menos unas 4 iteraciones y finalice ocultando todos los puntos usados (desde el undécimo ícono "Mostrar/ocultar objeto") de forma a obtener un cuadrado fractal como visualizado en Figuras 15. Destacamos que los rectángulos "sobrantes" (en blanco) son rectángulos áureos.

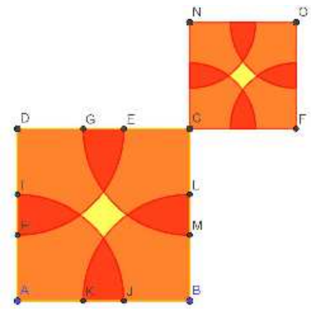


Figura 14. Cuadrados coloreados y diseño interior en razón áurea.

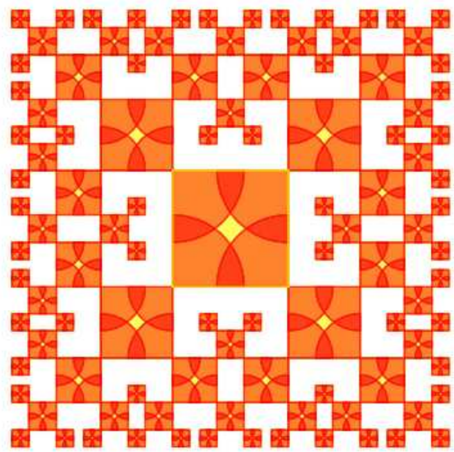


Figura 15. Cuadrado Fractal en reducción y diseños en razón áurea.

Referencias y bibliografía

Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International journal of computers for mathematical learning*, *5*(1), 25-45.

Fernánez, S., & Figueiras, L. (2014). Horizon Content Knowledge: Shaping MKT for a Continuous Mathematical Education. *REDIMAT*, *3*(1), 7-29.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, 372-400.

Laborde, C., & Laborde, J. M. (2008). The development of a dynamical geometry environment: Cabri-géomètre. *Research on Technology in the Learning and Teaching of Mathematic*, *2*, 31-52.

Livio, M. (2007). *Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente*. 2da Edição, Editora Record Ltda. Rio de Janeiro.

Mandelbrot, B. B. (1997). *Los objetos fractales: forma, azar y dimensión*. Tusquets S.A. Barcelona.

Sánchez, D., & Trumper, R. E. (2012). El Número Áureo φ, una propuesta didáctica. In *XV Jornada Nacional de Educación Matemática - SOCHIEM*. Temuco, Chile.

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education*, *48*(5), 691-719.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

A trajetória de uma professora formadora em uma disciplina de Estágio Supervisionado na Licenciatura em Matemática

Línlya **Sachs**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
linlyasachs@yahoo.com.br
Henrique Rizek **Elias**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
henriquerizek@hotmail.com

Resumo

Este texto objetiva apresentar a trajetória de uma professora formadora, em um curso de formação inicial de professores de Matemática, a partir de registros feitos por ela em um diário, durante um semestre, quando atuou em uma disciplina de Estágio Supervisionado. O material analisado nos permitiu acompanhar o processo envolvido no planejamento do estágio, passando pela realização e, por fim, as reflexões feitas pela professora formadora após esse período. O diário foi uma ferramenta que, por um lado, favoreceu a prática reflexiva da professora formadora e, por outro, possibilitou que ela, com subsídios teóricos e metodológicos, pesquisasse sua própria prática.

Palavras-chave: Educação Matemática, Professor Formador, Formação de Professores, Estágio Supervisionado, Diário.

Introdução

"Inicio aqui meu diário de campo como professora e orientadora de estágio supervisionado do curso de Licenciatura em Matemática [...]. A ideia de fazer este diário surgiu ao ler um texto que falava das potencialidades do diário como instrumento para pesquisa nas áreas sociais. Como todos os semestres em que oriento estágio (já faz oito [...]) são repletos de sentimentos, sejam de ânimo, de ansiedade, de frustração, de alegria, de decepção, achei que isso deveria ser registrado". (06/03/2017)[1]

[1] Os trechos escritos em itálico e entre aspas referem-se ao diário escrito pela professora formadora, que é a primeira autora deste artigo. No fim, entre parênteses, está a data do registro no diário.

Este artigo tem como objetivo apresentar a trajetória de uma professora formadora, a partir de seus registros em um diário, em uma disciplina de Estágio Supervisionado na Licenciatura em Matemática. O olhar volta-se, portanto, para o formador de professores de matemática no processo de formação inicial.

A questão colocada por Fiorentini (1994, p. 46 apud Cury, 2001, p. 12), "quem forma o professor formador de professores?", aponta para um (possível) problema: no Brasil, os professores que atuam nos cursos de Ensino Superior não têm, necessariamente, formação para ser professor. Nas instituições públicas, são exigidos graus de mestre ou doutor para concorrer às vagas de professor de Ensino Superior; mas nenhum tipo de exigência é feito para que apenas licenciados sejam esses professores[2]. Isso inclui, contraditoriamente, os cursos de formação de professores: não é necessário ser licenciado para atuar em um curso de licenciatura.

Nacarato et al. (2015), ao fazerem uma síntese do mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática, englobando o período de 2001 a 2012, evidenciaram que o campo de pesquisa que diz respeito ao formador de professores é, ainda, carente, sendo foco de, apenas, 5% das pesquisas (dissertações e teses) levantadas. Isso significa, para esses autores, que muitas questões a respeito do professor formador ainda continuam em aberto para a pesquisa no campo da formação inicial.

Diante disso, indagamos a respeito do formador de professores: "quem somos, o que fazemos, o que poderemos fazer?" (Cury, 2001, p. 11). Em especial, no contexto do estágio supervisionado, estamos interessados em entender o processo envolvido no planejamento que o formador faz, as expectativas que tem, as suas compreensões durante a realização do estágio pelos licenciandos na Educação Básica e as reflexões por ele feitas após o término desse período.

Na sequência, apresentamos o contexto de realização desta pesquisa, bem como as escolhas teóricas e metodológicas, e algumas discussões que o material analisado (o diário da professora formadora) nos permite fazer. Ao longo do texto, buscaremos dar nossas respostas às perguntas lançadas por Cury (2001): Quem somos? O que fazemos? O que poderemos fazer?

O contexto e as escolhas

A formação de professores de matemática, no Brasil, para atuação nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio[3], se dá, essencialmente, em cursos de Licenciatura em Matemática. Existe a obrigatoriedade, de acordo com a legislação brasileira, que sejam desenvolvidas nesses cursos ao menos 400 horas de estágio supervisionado na área de formação e atuação na Educação Básica (Brasil, 2015).

Esta pesquisa acontece em um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública brasileira. À época da realização da pesquisa[4], o estágio supervisionado se dividia em quatro momentos – Estágio Supervisionado A, B, C e D – que somavam 405 horas. Cada um desses momentos estava organizado em uma disciplina, de modo que o professor da disciplina

---

[2] Na ausência de mestres ou doutores, muitas instituições públicas contratam especialistas ou, até, candidatos apenas graduados.

[3] Nos anos finais do Ensino Fundamental, isto é, do 6º ao 9º ano, as crianças devem ter de 11 a 14 anos, enquanto, no Ensino Médio, devem ter de 15 a 17 anos.

[4] No ano de 2017, o curso passou por uma reestruturação, em que foi modificada a organização do estágio supervisionado. Essas mudanças no estágio aconteceram de modo progressivo, sendo que, a partir do ano de 2019, o estágio ocorrerá apenas no novo formato.

orientava o estágio dos alunos matriculados[5].

Aqui, apresentamos a trajetória de uma professora da disciplina de Estágio Supervisionado B, com base no que ela registrou em um diário. Um objetivo da disciplina, entre outros, é propiciar uma experiência de docência na escola de educação básica diferenciada do estágio de regência em uma turma regular.

Como um modo de reflexão acerca das atividades desenvolvidas no estágio supervisionado, a professora da disciplina espontaneamente escreveu um diário de campo, no primeiro semestre de 2017. As aulas aconteciam às terças, quartas e sextas-feiras, no período noturno, e semanalmente ela escrevia o que havia se passado, a respeito do estágio supervisionado. Foram, ao todo, 14 registros, feitos de 6 de março a 1 de julho de 2017.

Os trechos utilizados do diário estão neste artigo da mesma forma como foram escritos, sem intervenções nossas. Fizemos apenas omissões de partes (indicadas por [...]) e a modificação dos nomes das pessoas envolvidas, para garantia do anonimato.

Por meio do diário, pudemos conhecer a narrativa de uma orientadora de estágio no curso de Licenciatura em Matemática. Ela apresenta os primeiros sentimentos, no início das aulas; ela fala de seus medos, de seus desejos, de suas afetações; ela planeja e, ao planejar, fala do que espera, mas também do que teme; ela muda o planejamento com o decorrer das atividades; ela comemora com pequenas realizações no estágio; ela reflete sobre o que se passou, em que considera ter contribuído na formação daqueles futuros professores e como poderia fazer de forma diferente... É uma narrativa que fala de si – e, nesse sentido, autobiográfica –, mas, também, que fala de outros, em sua forma particular de vê-los no mundo.

Compreendemos esse processo de escrita como um modo de autoformação da professora formadora. Os registros nos servem como material para conhecer sua trajetória naquele semestre, mas, para ela, é mais que isso; é um modo de se conhecer também, mas, além disso, é uma maneira de pensar sobre o vivido, sobre suas decisões e de planejar ações futuras.

Quem somos? O que fazemos?

A professora formadora tem licenciatura e bacharelado em Matemática, mestrado e doutorado em Educação Matemática. Atua no Ensino Superior desde o ano de 2011 e não tem experiência anterior como professora da Educação Básica. Trabalha, prioritariamente, com disciplinas de Educação Matemática no curso de Licenciatura em Matemática.

“Como sempre – e como uma forma de me reinventar –, começo a disciplina cheia de ideias! Resolvi que, neste semestre, repetiria as atividades que propus no semestre passado. Mas haveria uma mudança importante. Diferente dos últimos semestres, resolvi [...] que as oficinas seriam diferentes de como foram até agora”. (06/03/2017)

Diferentes como? De que maneira poderiam ser essas oficinas? De acordo com Teixeira & Cyrino (2015), é importante que se proponha aos estagiários a utilização de estratégias de ensino diferenciadas, bem como a exploração de recursos variados no âmbito da regência, com vistas a manifestar/desenvolver, nos futuros professores, crenças sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, de modo a se apropriem do valor social da profissão. Dessa maneira, segundo esses

[5] Dependendo do número de alunos matriculados, o professor poderia pedir para que outros professores orientassem alguns estudantes também. No caso aqui investigado, a professora da disciplina orientou todos eles.

autores, o estágio deve "se constituir em uma ação formativa que influencia no desenvolvimento da identidade profissional docente de futuros professores" (p. 132).

A ideia de como seriam as oficinas "diferentes" veio de fora, de conversas com outras pessoas.

"*Esses dias, vi alguém falar sobre trazer para a escola pessoas da comunidade para oferecerem cursos daquilo que sabem fazer e achei a ideia boa – afinal, escola é muito mais do que português, geografia e matemática. E decidi unir isso com o discurso que tanto escuto (e com o qual não concordo!) por aí: "matemática está em tudo". Então, propus aos estudantes da turma que eles oferecessem oficinas de temas diversos, podendo ser o que eles se sentissem à vontade – fotografia, bordado, dança... – e, nesses temas, procurassem a matemática a ser abordada – não como assunto principal, mas secundário. Bom, eles toparam e agora vamos ver como vai ser.*" *(06/03/2017)*

O discurso de que "a matemática está em tudo" se mostrou como um desafio que a professora formadora decidiu assumir: se ela está em tudo, vamos propor oficinas de temas diversos, do cotidiano de algumas pessoas, e tentar abordar a matemática por meio desses temas. A ideia dela não era "forçar" a importância da matemática, mas que ela aparecesse naturalmente – caso aparecesse! Lins (1999) exemplifica com um assunto que costuma ser tratado por professores em aulas de matemática – que, por acaso, foi tema de uma das oficinas –, que são as pipas. Ele afirma que não faz sentido propor cálculo de área, de perímetro, da perpendicularidade, mas não falar sobre o que realmente importa para quem empina pipas: a capacidade de voo e a beleza. Assim, a professora pediu que os alunos tivessem o foco no tema da oficina e não na matemática, pois esta seria secundária.

A decisão pelos temas ficou por conta dos estudantes, que, inicialmente, diziam não ter ideias, não saber nada. Com conversas entre eles e com a professora, os temas escolhidos foram: Oficina de pipas, Oficina de Cultivo de Hortaliças, Oficina de *Stop Motion* e Oficina de Contação de Histórias.

Como podemos ver no trecho a seguir, a proposta das oficinas nesses moldes gerou insegurança na professora formadora, tanto no que diz respeito ao desenvolvimento delas como no papel que essas oficinas poderiam ter na formação desses futuros professores.

"Estão chegando as oficinas... e eu não sei o que me (os) espera! Parece que estou mais tensa que os próprios alunos – eles só não sabem disso! Não sei se a minha ideia foi boa, desconfio que não. Tenho pensado em que ministrar essas oficinas irá contribuir com a formação deles, já que não serão de temas matemáticos, mas a matemática irá aparecer (ou não) de uma forma transversal. Será que foi um equívoco propor algo tão diferente do tradicional? Digo isso, porque não acredito que "a" matemática (a da escola) irá aparecer nas oficinas... Apenas se forçar para que isso aconteça. O discurso de que a matemática está em tudo é muito forte e muito repetido por todos os lados; mas não tenho a menor dúvida de que não é bem assim. O interessante disso talvez seja a discussão que posso empreender com os alunos, após o término das regências, mas sinto que, além de faltar maturidade para tal, eles podem pensar que perderam tempo fazendo essas oficinas ou ainda que escolas que adotam pedagogias outras (como a Escola da Ponte) não funcionam." (25/04/2017)

A insegurança apresentada pela professora formadora vem, principalmente, de um refazer de sua ação, de uma busca por novas formas de viabilizar o desenvolvimento profissional dos licenciandos. De acordo com Barbato (2016, p. 265),

> Em vista da diversidade de saberes envolvidos na ação docente, os formadores agem em constante mudança para atender às diferentes demandas que decorrem da interação com as novas turmas. Desse modo, observamos que os formadores valorizam o saber adquirido na e pela experiência. Esse constante refazer da sua ação mostra-se como um exercício individual para muitos dos docentes que constroem seus saberes a partir das reflexões individuais sobre sua prática. Somente a reflexão individual sobre a prática pode originar um sentimento de insegurança sobre o papel do formador de professores e sobre a sua identidade, e a volatilidade dos saberes mobilizados traz a percepção de uma construção permanente de seu saber profissional.

Nesse sentido, a professora formadora, que inicia seu diário enfatizando sua experiência de oito semestres orientando estágio supervisionado, assume seu saber adquirido na e pela experiência ao longo desse período para propor algo novo (em relação ao que vinha realizando), visando pôr em discussão o discurso recorrente de que “a matemática está em tudo”. Contudo, além do novo gerar insegurança no que diz respeito ao papel das oficinas na formação dos licenciandos, também gera insegurança sobre como se desenrolariam as atividades futuras. Certamente, se as regências fossem aulas tradicionais, os possíveis problemas seriam mais previsíveis, uma vez que, neste modelo, o professor tem mais controle sobre as situações de sala de aula – e, por consequência, a orientadora do estágio também.

A professora formadora relata em seu diário diferentes imprevistos ao longo das oficinas, desde aqueles mais comuns àqueles mais inusitados para uma aula de matemática. Por exemplo, na Oficina de *Stop Motion*, era preciso um projetor para mostrar aos estudantes vídeos feitos com essa técnica para iniciar a oficina. As estagiárias reservaram o único projetor da escola. Porém, “*uma professora, que havia usado* [o projetor] *anteriormente, guardou o cabo de energia em uma bolsa, que ficou na sua casa. Ou seja, não teve como projetar*” *(14/05/2017)*. A saída encontrada pelas estagiárias foi *“passar no computador e pedir para os estudantes se aproximarem para assistir” (14/05/2017)*.

Já na Oficina de Pipas, era essencial que não chovesse nos dias de oficina, pois, além de confeccionar as pipas, empiná-las fazia parte da aula. Não deu outra: choveu exatamente no primeiro dia. *“Nesse dia, choveu manhã, tarde e noite, sem trégua” (28/05/2017)*. Para este caso, a saída foi reduzir um dia da oficina (inicialmente prevista para quatro dias). Outra atitude da professora formadora, prevendo o baixo número de alunos da escola nos dias de oficina, foi convidar *“também, os alunos da UTFPR. Além disso, os alunos do Estágio Supervisionado B deveriam participar, como forma de ajudar os colegas. Todos toparam”. (14/05/2017)*

As oficinas geraram, também, uma reflexão na professora sobre o processo de planejamento e de execução. No trecho seguinte, ela lamenta não ter dialogado mais com um dos estagiários que, na execução da oficina, realizou algo diferente do combinado:

“O que me incomodou foi a mudança que pode ter sido mal pensada ou como uma persistência de uma ideia inicial. Talvez […] eu não tenha dialogado o suficiente com ele sobre isso, entendendo suas razões e expondo as minhas. A falta de tempo foi, sem dúvida, uma das razões. Esse aluno faltou bastante e demorou para decidir o que faria. Também, por conta da greve do dia 28/4, todos os estudantes precisaram apresentar em um só dia – o que fez que ficassem corridas a apresentação e a discussão.” (14/05/2017)

Os estagiários contavam com o apoio da professora formadora para sanar dúvidas que surgiam no decorrer das oficinas – sejam elas relacionadas à matemática, ao tema escolhido ou a outros assuntos.

"Nessa semana que passou, também marquei de conversar com a Aline e com a Viviane[6] *sobre uma dúvida que ficamos no dia da apresentação das ideias das oficinas. No caso da oficina de Stop Motion, seria necessário definir, no Youtube, quanto tempo cada foto deveria ficar na tela, para dar uma ideia de movimento. Ficamos em dúvida se um dígito lá referia-se a milésimos de segundos. Pesquisei e percebi que se tratavam de décimos de segundos. Para não haver erro no pouco que havia de matemática na oficina (!), decidi conversar com elas sobre isso. No fim, não sei nem se elas falarão sobre isso para os alunos [...]." (04/06/2017)*

Apesar dos imprevistos, as oficinas foram desenvolvidas dentro do esperado. Ao término delas, ocorrem os momentos de reflexão do que fora realizado. Tais momentos aconteceram, como veremos nos trechos a seguir, em dois âmbitos: i) uma reflexão coletiva entre os estagiários, norteada por perguntas elaboradas pela professora formadora; e ii) uma reflexão feita pela própria professora formadora, como uma autoanálise sobre suas próprias ações (Libâneo, 2002).

No trecho a seguir, destacamos a reflexão proposta pela professora formadora aos licenciandos, cujos objetivos, para ela, eram claros: pensar sobre as oficinas no formato desenvolvido e, principalmente, pensar sobre o discurso "a matemática está em tudo".

"Esta semana, com o término das oficinas, pedi para os alunos responderam a algumas perguntas [...]. Com essas perguntas, eu queria que eles começassem a pensar sobre as oficinas e sobre o papo de que a matemática está em tudo. Também, queria saber sinceramente deles o que eles acharam dessa maluquice minha, de propor oficinas de temas não matemáticos!!!" (10/06/2017)

A discussão, empreendida após uma escrita individual de respostas a essas perguntas feitas pela formadora, foi realizada com todos os estagiários.

"Nessa conversa, explorei bastante a questão de a matemática estar em tudo ou não. Uma situação curiosa que aconteceu foi que alunos que não viram quase nada de matemática nas suas oficinas continuarem dizendo que, sim, a matemática está em tudo – como foi o caso da oficina de Stop Motion. Ué... e por que não apareceu? Eles dizem que apareceu, só não deu para explorar porque o objetivo era fazer o vídeo, a pipa, a muda etc. ou por falta de tempo. Mas a matemática estava ali. Afinal, a matemática está em tudo! E, enquanto isso, o Carlos[7] *insistia em dizer que não, a matemática não estava ali." (10/06/2017)*

Além da reflexão coletiva, com os estagiários, a professora registrou em seu diário sua própria reflexão. A esse respeito, destacamos dois aspectos. Um em que ela pensa sobre a disciplina de estágio, o formato das oficinas e a continuidade ou não desse formato – como aparece no trecho a seguir:

"[...] caso eu continue com o estágio, penso sobre esse formato de oficinas que propus este semestre. Continuar? Acredito que não. E por quê? Nem eu sei ao certo. Mas penso que haja uma expectativa por parte dos estagiários em 'ensinar matemática' – assim como há, por outro lado, os que têm medo disso. O estágio seria o momento de aceitar o desafio e pensar em formas de se fazer isso. A grande dificuldade é o oferecimento de oficinas fora do horário de aula.

[6] Nomes fictícios.
[7] Nome fictício.

Como atrair participantes? Matemática não é tão interessante assim para que as oficinas fiquem cheias... As técnicas utilizadas pelos professores para que os estudantes participem costumam ser atribuição de nota (o famoso "pontinho") para quem participar, dizer que eles não sabem matemática, por isso precisam fazer a oficina, ou promessa de treinamento para o ENEM. Humm... nenhuma delas me convence. O que fazer, então? Problema para o próximo semestre... ou não!" (18/06/2017)

Outro aspecto está em quando a reflexão gira em torno de seus sentimentos e a maneira como o estágio supervisionado, enquanto etapa fundamental para formar futuros professores, mexe com a professora formadora – como no trecho seguinte:

"Ontem foi o seminário de socialização e tive a alegria de ter [as professoras] *Joana e Bárbara*[8] *comigo. Elas me fizeram acreditar que a proposta maluca de oficinas de temas não matemáticos foi uma boa! E não apenas elas... A apresentação dos alunos também me fez crer nisso. Percebi que a preparação das oficinas, a realização, os improvisos e os resultados são importantes na formação dos licenciandos, mesmo que não seja de um tema matemático. Parece que todo esse processo de se tornar professor independe, muitas vezes, se é de matemática ou não; há algo anterior ao tema da aula nessa formação. E a ousadia em propor temas que não tivessem relação direta com a matemática foi também disparador de discussões importantes – como a que se refere à máxima de que "a matemática está em tudo". Na apresentação de ontem, vi que cada um dos estagiários lidou de forma diferente com isso e chegou a conclusões diferentes; de todo modo, eles pensaram e debateram sobre isso – o que fez valer toda essa ousadia! [...] Há uma sensação de 'estamos juntos' entre nós e em momentos diversos: naquele de planejamento, naquele momento em que tudo parece ter dado errado, naquele de comemoração, pois tudo aconteceu! E acho que é isso que mexe tanto comigo! Termino esse Estágio feliz e, quem sabe, até uma próxima!" (01/07/2017)*

O exercício da reflexão é um elemento chave para o desenvolvimento profissional do professor. De acordo com Alarcão (2010), a noção de professor reflexivo "baseia-se consciência da capacidade de pensamento e reflexão que caracteriza o ser humano como criativo e não como um mero reprodutor de ideias e práticas que lhes são exteriores" (p. 44). Talvez, exatamente por essa consciência de sua capacidade de pensar e refletir – a própria intenção de escrever um diário evidencia a capacidade de reflexão sobre sua prática –, a professora formadora se permitiu propor algo novo, diferente do que vinha ocorrendo nos semestres anteriores. Do lado dos estagiários, ao provocar a reflexão coletiva, a professora formadora também permitiu que esses se colocassem no exercício de refletir sobre suas ações, sobre a disciplina e sobre o fato de a matemática estar em tudo.

O que poderemos fazer?

Neste artigo, propusemo-nos a apresentar a trajetória de uma professora formadora ao longo de uma disciplina de Estágio Supervisionado na Licenciatura em Matemática. Investigamos essa trajetória por meio de registros de seu diário, uma ferramenta que, ao nosso ver, cumpriu duas funções relevantes para o trabalho do professor formador e que indicamos com sendo atividades possíveis de serem constantemente feitas por esses profissionais.

A primeira delas, comentada ao longo deste texto, refere-se à reflexão do professor formador acerca de suas ações. Como vimos, a escrita de um diário pode favorecer a prática

[8] Nomes fictícios.

reflexiva de professores formadores, prática esta que não precisa ficar restrita à professora formadora da disciplina, mas pode se estender a outros professores formadores, que atuam no Estágio Supervisionado ou não. Discussões individuais e coletivas entre professores formadores podem (para não dizer "devem") ser feitas a fim de gerar novas compreensões sobre a formação inicial de professores.

A segunda atividade desencadeada pelo diário escrito pela professora e que pode ser feita por professores formadores é a pesquisa sobre a própria prática. Neste texto, os registros do diário foram utilizados para apresentar a trajetória da professora formadora, mas poderiam ser utilizados com mais ênfase nas análises de suas ações. Os registros escritos do diário permitem que os pensamentos e os sentimentos manifestados, as escolhas, as dúvidas, as incertezas sejam avaliadas e investigadas, com base em aportes teóricos, de modo a sistematizar o conhecimento produzido na prática desta ação docente.

Finalizamos o presente trabalho explicitando que buscamos dar nossas respostas às perguntas que nos instigaram: "Quem somos? O que fazermos? O que poderemos fazer?". Nossas respostas foram com base em uma única experiência ao longo de uma única disciplina e por meio de apenas um instrumento de produção de dados (diário), mas ainda há muitos outros contextos e maneiras de ampliarmos nossas respostas a esses questionamentos. Fica, então, o convite a todos os professores formadores que desejam debater e propor outras visões a respeito dos cursos de Licenciatura em Matemática!

Referencias y bibliografía

Alarcão, I. (2010). *Professores reflexivos em uma escola reflexiva*. 7. ed. São Paulo: Cortez.

Brasil. (2015). Ministério da Educação. Resolução nº 2, de 1 de julho de 2015. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. *Diário Oficial da União*, Brasília, Seção 1, 8-12.

Barbato, C. N. (2016). *A constituição profissional de formadores de professores de matemática*. 2016. 322 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba.

Cury, H. N. (2001). A formação dos formadores de professores de matemática: quem somos, o que fazemos, o que podemos fazer? In: Cury, H. N. (Org.) *Formação de professores*: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS. 11-28.

Libâneo, J. C. (2002). Reflexividade e Formação de Professores: outra oscilação do pensamento pedagógico brasileiro? In: Pimenta, S. G.; Ghedin, E. (Orgs). *Professor Reflexivo no Brasil*: gênese e crítica de um conceito. São Paulo: Cortez, p. 63-93.

Lins, R. C. (1999). Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática? In: Bicudo, M. A. V. *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp. p. 75-94.

Nacarato, A. M. et al. (2012). Tendências das pesquisas brasileiras que têm o professor que ensina matemática como campo de estudo: uma síntese dos mapeamentos regionais. In: Fiorentini, D.; Passos, C. L. B.; Lima, R. C. R. (Org.). *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática*: período 2001 – 2012. Campinas: Unicamp. p. 17-41.

Teixeira, B. R. & Cyrino, M. C. C. T. (2015) O Estágio de Regência como Contexto para o Desenvolvimento da Identidade Profissional Docente de Futuros Professores de Matemática. *Alexandria* Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, 8 (3), 131-149.

O ensino da matemática em sala de aula por meio do lúdico

Cintia **Schneider**
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia
Brasil
cintia.schneider1995@gmail.com
Dirlei Salete de **Souza**
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia
Brasil
dirleisouza@hotmail.com
Felipe Junior **Crozetta**
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia
Brasil
felipecrozetta@outlook.com
Karla Aparecida **Lovis**
Instituto Federal do Paraná – *Campus* Capanema
karla.lovis@ifpr.edu.br

RESUMO

O presente artigo tem por objetivo demonstrar como é possível promover conhecimentos matemáticos por meio de atividades lúdicas. Para atingir essa finalidade foram desenvolvidas atividades dinâmicas e lúdicas para o ensino da Matemática por meio de oficinas, com uma turma de 8º ano de uma escola no município de Lindóia do Sul, SC - Brasil. Esta oficina foi desenvolvida como item obrigatório na etapa I do Estágio Supervisionado do curso de Matemática – Licenciatura. Por meio da oficina obtivemos resultados positivos no que se refere aprendizagem, interação e participação dos alunos. Destacamos que com a inserção do lúdico, o aluno compreende melhor os conceitos matemáticos e que a interação com seus pares colabora para a efetivação da aprendizagem.

Palavras chave: Matemática, Lúdico, Interação.

Introdução

Considerando que as oficinas e as percepções a cerca dela, que serão expostas adiante, foram desenvolvidas durante o Estágio Supervisionado do curso de Matemática Licenciatura, toma-se a liberdade de dissertar brevemente sobre esta etapa tão relevante e construtiva do processo de formação de professores.

O Estágio Supervisionado é um cumprimento da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996 - Lei Federal n°. 9.394, de 20 de dezembro de 1996), que define que todo o curso de Licenciatura deve oferecê-lo para a formação de professores que poderão atuar na rede de ensino pública ou privada do Brasil.

Segundo Santos (2005) o estágio deve ser visto como uma oportunidade de formação contínua da prática pedagógica, na qual o licenciando assume o papel ativo e possibilita um confronto com a realidade que irá enfrentar no dia a dia. Esse é o momento mais propício, que objetivam o crescimento pessoal e profissional do futuro professor, além disso, o estágio é um dos momentos para que o acadêmico exerça na prática o que aprendeu na teoria.

O Estágio Curricular Supervisionado de Ensino é definido pelo Parecer CNE/CP 28/2001 (BRASIL, 2001, p.10) como:

> [...] o tempo de aprendizagem que, através de um período de permanência, alguém se demora em algum lugar ou ofício para aprender a prática do mesmo e depois poder exercer uma profissão ou ofício. Assim o estágio curricular supõe uma relação pedagógica entre alguém que já é um profissional reconhecido em um ambiente institucional de trabalho e um aluno estagiário. Por isso é que esse momento se chama estágio curricular supervisionado.

As experiências proporcionadas pelo estágio aproximam-se de uma vivência da diversidade de situações educativas, como da prática docente, situações adversas em sala de aula, relação entre professor e aluno, elaboração e planejamentos de aulas e de uma oficina, e por meio disso realizar uma análise e relatar as experiências vivenciadas durante o estágio supervisionado.

Este trabalho relata a experiência com atividades e jogos para o ensino da Matemática elaborados por dois acadêmicos da 5ª fase do curso de Matemática - Licenciatura do Instituto Federal Catarinense - Campus Concórdia/Brasil, durante uma oficina do Estágio Supervisionado. Esta oficina também foi desenvolvida como Prática como Componente Curricular - PCC na disciplina de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem I. Por PCC entende-se:

> A prática como componente curricular é, pois, uma prática que produz algo no âmbito do ensino. Sendo a prática um trabalho consciente (…) de apoio do processo formativo, a fim de dar conta dos múltiplos modos de ser da atividade acadêmico-científica. Assim, ela deve ser planejada quando da elaboração do projeto pedagógico e seu acontecer deve se dar desde o início da duração do processo formativo e se estender ao longo de todo o seu processo. Em articulação intrínseca com o estágio supervisionado e com as atividades de trabalho acadêmico, ela concorre conjuntamente para a formação da identidade do professor como educador. Esta correlação teoria e prática é um movimento contínuo entre saber e fazer na busca de significados na gestão, administração e resolução de situações próprias do ambiente da educação escolar (BRASIL, Parecer CNE/CP nº 28/2001).

As atividades propostas foram desenvolvidas na Escola de Educação Básica Padre Izidoro Benjamin Moro, situada no município de Lindóia do Sul, SC. Foram observadas quatro aulas de Matemática em uma turma do 8º ano, no período matutino e a oficina desenvolvida no contra turno escolar. A oficina contou com a presença de 20 alunos e teve duração de quatro horas/aula.

O tema da oficina foi escolhido após conversa com a professora regente da turma, a qual nos apresentou as maiores dificuldades dos alunos no momento. A oficina teve fundamentação na metodologia de jogos.

Na oficina abordou-se o conteúdo de expressões algébricas. A finalidade foi instigar os alunos com atividades de Matemática de forma diferenciada, dando ênfase as expressões algébricas. Por meio das atividades lúdicas buscou-se fazer com que os alunos vissem a disciplina da Matemática de forma contextualizada e prazerosa e não apenas como componente curricular.

O desenvolvimento de jogos permitem à criança vivenciar experiências com a lógica e o raciocínio, permitindo atividades físicas e mentais que favorecem a sociabilidade e estimulando as reações afetivas, linguística, cognitivas e sociais.

Conforme Piaget citado por Wadsworth (1984, p. 44):

> O jogo lúdico é formado por um conjunto linguístico que funciona dentro de um contexto social; possui um sistema de regras e se constitui de um objeto simbólico que designa também um fenômeno. Portanto, permite ao educando a identificação de um sistema de regras que permite uma estrutura sequencial que especifica a sua moralidade.

Borin complementa que (1996, p. 9):

> Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva, e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que esses alunos falam matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem.

Assim, podemos destacar a importância da metodologia de jogos em sala de aula. Que além de proporcionar a criança um momento diferenciado, é também um momento de desbloqueio para que ela possa interagir em grupo. E se moldando a sociedade por meio das regras estabelecidas por ela.

Metodologia

A presente oficina foi desenvolvida no dia 3 de maio de 2018, no turno vespertino com a turma do 8º ano, na Escola de Educação Básica Padre Izidoro Benjamin Moro em Lindóia do Sul.

A oficina teve início as 13h05min e término as 17h05min. Trabalhou-se os seguintes tópicos: história da Matemática para embasar o conteúdo trabalho e mostrar em que situações do nosso cotidiano elas podem ser usadas, jogos para permitir que os alunos aprendessem de maneira mais lúdica e interativa, envolvendo, inclusive, a resolução de problemas. Além disso, a oficina foi desenvolvida em forma de gincana afim de que a competição estimulasse os alunos a desenvolver as atividades propostas.

Resultados e discussões

Para iniciar a atividade os acadêmicos deram as boas-vindas aos alunos e depois de uma breve fala da professora regente da turma, deu-se início as atividades. Todos se apresentaram falando seu nome, onde moravam, sua idade e outras coisas.

Depois de concluída essa parte de apresentações, deu-se o início das atividades, usando a história da Matemática. Desta forma explanou-se um pouco sobre a história da álgebra. Conforme Lins (1997), a palavra álgebra tem origem árabe que significa "restauração, restituição ou devolução" tendo referência com a transposição de um termo para outro lado da equação, esta introdução normalmente vem associada às equações que são expressões demonstradas por uma igualdade e sempre há uma "incógnita", que são termos algébricos a ser encontrado o valor numérico representativo. O aluno por sua vez poderá ampliar o modo de expressar e trabalhar melhor o raciocínio para conhecer valores ou termos, facilitando a resolução das equações e encontrando seu respectivo valor de representação da "letra" a ser conhecido o seu valor numérico.

Surgiu, então, a necessidade de se estabelecer generalizações de problemas de modo a chegar a uma resolução, o simbolismo moderno conhecido hoje, começou a despontar a partir de 1500 (BAUMGART, 1992), com a utilização dos símbolos modernos passou-se a utilizar-se de formas em que pudessem ser usadas em vários problemas que possuíssem uma mesma incógnita ou expressão.

Neste sentido, aponta-se que a história da Matemática é um instrumento de resgate da própria identidade cultural, o que se pode reforçar com o seguinte encaminhamento dado nos PCN:

> [...] ao verificar o alto nível de abstração matemática de algumas culturas antigas, o aluno poderá compreender que o avanço tecnológico de hoje não seria possível sem a herança cultural de gerações passadas. Desse modo, será possível entender as razões que levam alguns povos a respeitar e conviver com práticas antigas de calcular, como o uso do ábaco, ao lado dos computadores de última geração (BRASIL, 1998, p. 43).

No segundo momento um vídeo de produção própria foi passado para a turma. Esse vídeo tratava das expressões algébricas no cotidiano. Pereira, Pereira e Carão, (2008, p. 06), afirmam ser "[...] importante não negar os avanços da tecnologia e, sim, urgentemente nos apropriarmos desse processo, para podermos neles interferir". Amparados nesta justificativa é que fez-se uso do vídeo. Após o termino do vídeo aconteceu uma pequena fala para contextualizar o vídeo usando o exemplo de uma corrida de táxi, onde você paga a bandeirada e a incógnita da questão é o número de quilômetros que você vai rodar.

Depois disso, os estagiários fizeram uma dinâmica com o jogo "Eu tenho quem tem". Para dar início ao jogo foram distribuídas fichas para os alunos que continham frases. Exemplo: *eu tenho 10, quem tem 5 vezes 4,* assim quem tivesse o número 20 dava sequência ao jogo. O jogo tem uma sequência em que o aluno que começa o jogo deve finalizar a atividade, desta forma após 20 minutos, a atividade deu-se por encerrada. A mesma foi realizada 2 vezes para maior compreensão dos alunos.

O uso de jogos no contexto educacional com alunos que apresentam dificuldades de compreensão e de aprendizagem pode ser eficaz em dois sentidos, no qual o primeiro garantiria o interesse e a motivação dos discentes, e o segundo seria a possibilidade de aprimorar seus instrumentos cognitivos de modo a favorecer a aprendizagem dos conteúdos matemáticos (BRENELLI, 1996).

Os problemas podem ser de graus diferentes de dificuldades, mas se eles desafiarem a curiosidade do aluno poderá gerar o gosto pelo trabalho lógico e mental, além de proporcionar ao discente o gosto pelo triunfo da descoberta. De acordo com Polya (2006), a principal diferença entre uma questão considerada fácil e outra difícil pode estar em relação ao aluno reconhecer ou não o problema que está resolvendo com outro já resolvido, que tenha a mesma expressão.

No terceiro momento foi desenvolvida uma dinâmica em que os alunos foram divididos em dois grupos para realizar a atividade que consistia nos seguintes procedimentos: um estagiário lia a expressão (um número menos a sua metade) e os alunos achavam essa expressão que estava em fichas em cima das suas mesas, exemplo ($x - \frac{x}{2}$). Quando alguém erguesse a mão um dos estagiários ia até eles para pegar a resposta e conferir com o outro estagiário que estava com as respostas, após confirmada a resposta era anotado o ponto para o grupo no quadro.

Figura 1: Jogo da “Linguagem Algébrica”.
Fonte: Os autores (2018).

Percebeu-se os alunos interessados em resolver as questões e interagindo com os componentes de seu grupo e do adversário. Macedo, Petty e Passos (2000, p. 36) destacam a visão piagetiana sobre o uso de Jogos matemático em grupos, ressaltando que atividades em grupos é mais do que propor situações grupais:

> O trabalho por equipes supõe necessariamente a cooperação entre o todo e as partes, exigindo um “compromisso” constante de cada um dos elementos. Porém trabalhar em equipes não é apenas propor situações grupais. A ideia de Piaget sobre esse tema é mais ampla porque considera as relações sociais como importante aspecto no contexto escolar. Nestes termos , cada um é responsável por si e pelo grupo ao mesmo tempo, ou seja, trabalhar em grupo significa aprender as consequências disso, o que implica respeito mútuo, trocas de idéias e consideração pelo outro.

No quarto momento desenvolveu-se um jogo chamado “Tabuleiro Algébrico”, a qual tinha-se por objetivo que pudessem visualizar as expressões. O tabuleiro tinha um formato retangular dividido em várias casas. Cada casa continha uma expressão algébrica que era resolvida. Assim, após os alunos lançarem o dado e substituírem o resultado na expressão, eles determinavam quantas casas teriam que andar. Para ganhar o aluno teria que completar 3 voltas ao redor do tabuleiro.

Figura 2: Jogo "Tabuleiro Algébrico".
Fonte: Os autores (2018).

O quinto momento programado foi o dominó algébrico e o dominó das 4 operações. Para jogar o dominó algébrico os alunos tinham que fazer as operações que continham em cada cartela do jogo, para poder dar sequência. Depois de um determinado tempo percebeu-se uma pequena insatisfação por parte dos alunos, pois a atividade já estava se tornando cansativa. Desta forma, os estagiários fizeram a atividade final, com a qual foi utilizado um baralho comum: a sala foi dividida em dois grupos, os estagiários chamam uma pessoa de cada grupo para fazer uma disputa, que acontecia da seguinte maneira: cada aluno recebia uma carta do baralho e não podia ver, colocava ela na testa e um dos estagiários falava a soma das duas cartas, ganhava quem acertava primeiro a carta que estava segurando. Eles ficaram muito animados e após terminar a disputa entre os dois grupos, foi realizado o encerramento com os alunos que por sua vez deram um feedback da oficina destacando os pontos positivos e negativos da oficina.

Segundo Macedo (1995) a competição em jogos educacionais, não é boa nem má. Ela caracteriza uma situação onde duas pessoas desejam a mesma coisa ou dela necessitam ao mesmo tempo. A teoria de Piaget mostra que a competição nos jogos é parte de um desenvolvimento maior, que vai do egocentrismo a uma habilidade cada vez maior em descentrar e coordenar pontos de vista.

Para deixar os alunos mais animados pela oficina foram distribuídos bombons em um gesto de engajá-los em participar de mais oficinas, para que eles também possam ver a matemática de um jeito diferente e significativa.

Os momentos proporcionados por essa atividade fizeram com que os alunos desenvolvessem suas habilidades matemáticas de maneira prazerosa, sem medo de uma disciplina que apresenta-se tão desafiadora aos estudantes. Ao final da oficina, solicitou-se que os alunos dessem seu *feedback* sobre a oficina aplicada. De maneira geral, eles descreveram que gostaram de todas as atividades desenvolvidas, principalmente, os jogos que envolviam competição, e que gostariam que essa metodologia fosse adotada em mais disciplinas, e não somente na de matemática. Segundo os relatos, a oficina os auxilia na compreensão do conteúdo de uma maneira divertida e prazerosa.

Considerações finais

Após a realização das atividades, destaca-se a importância das oficinas pedagógicas realizadas com os estudantes em sala de aula, por ser um momento diferenciado em que os alunos podem ter um momento de descontração, vinculado a metodologias de ensino e matemática. Ou seja, eles acabam se envolvem de uma forma lúdica com os saberes matemáticos.

Esta oficina contribui de forma significativa para formação acadêmica dos estagiários visto que permite ao futuro professor colocar em prática conhecimentos teóricos, bem como vivenciar a realidade de uma escola.

De um modo geral, destaca-se a curiosidade dos alunos presentes na oficina: todos estavam motivados a conhecer algo diferente, deixando de lado o perfil de aluno passivo e dando espaço a um aluno investigador. Proporcionou-se uma experiência contextualizada para os alunos, que puderam desmistificar certos receios em relação a matemática.

Durante a oficina vivenciou-se uma experiência significativa da profissão docente, desde o planejamento da oficina de acordo com a professora regente, o currículo da escola até a realização das oficinas e a relação entre aluno e professor.

No final após todos derem seu *feedback* conclui-se que estas práticas contribuem para o seu desenvolvimento e aperfeiçoamento da formação docente. Com a prática foi possível um aprendizado que não só ajuda na formação de um profissional, mas também como cidadão, desenvolve a capacidade de empatia, a necessidade de sentir-se útil ao ser humano, saber que a cada resolução de uma operação de adição ou multiplicação, por exemplo, o aluno consegue alcançar o objetivo estabelecido e ver então o sorriso no rosto dos alunos não tem preço.

Referências

Baumgart, J. K. (1992). *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*. Volume 4. São Paulo: Atual, 1992.

Borin, J. (1996). Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP.

Brasil. MEC.CNE/CP. (2001). *Parecer nº 28 de 02 de Outubro de 2001*. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/sesu/ . Acesso em 20 de Outubro de 2018.

Brasil, *Parecer CNE/CP nº 28/2001*. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/abril-2016/37541-cne-seminario-formacao-professores-2016-apresentacao-06-marcia-gurgel-pdf/file. Acesso em 19.out.2018

Brasil. Ministério da Educação (1998). Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2001. BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei número 9394, 20 de dezembro de 1996.

Brenelli, R. P.(1996). O jogo como espaço para pensar: A construção de noções lógicas e aritmética. Campinas, SP: Papirus.

Lins, R. C.; Gimenez, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para século XXI*, (coleção Perspectivas em educação Matemática). Campinas: Papirus, 1997.

Macedo, L.. *Os jogos e sua importância na escola*. Fonte: Caderno de Pesquisa. Nº 93 (maio 1995).São Paulo. Fundação Carlos Chagas, 1995 p. 5- 11. Disponível em: https://www.construirnoticias.com.br/asp/matéria.asp?id=1487. Acesso em 26.Out.2018.

Macedo, L.; Petty, A. L. S.; Passos, N. C. (2000). *Aprender com jogos e situações problema.* Porto Alegre: Artmed.

Pereira, R. C. B; pereira, R. O; carrão E. V. A **Informática Educativa**: *professor, aluno e os problemas escolares no ensino aprendizagem*. Juíz de Fora: UFJF, 2008. Disponível em: <

http://www.ecsbdefesa.com.br/fts/INFOEDU.pdf>. Acesso em: 28.set.2018.

Polya, G. (2006). *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência.

Santos, H. M. dos. (2005). *O Estágio curricular na formação de professores: diversos olhares.* In: 28ª REUNIÃO ANUAL DA ANPED, GT 8 - Formação de Professores. Caxambu.

Wadsworth, B. *Jean Piaget para o professor da pré-escola e 1º grau*. São Paulo, Pioneira, 1984.

O Ensino de Funções Trigonométricas Com o *Software* GeoGebra

Sonner Arfux de Figueriedo
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Brasil
sarfux@uems.br
Nielce Meneguelo **Lobo da Costa**
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN
Brasil
nielce.lobo@gmail.com

Resumo

Neste artigo se discute, num experimento de ensino, como futuros professores consolidam conceitos trigonométricos em uma experimentação de tarefas desenhadas em um ambiente virtual. Desenvolveu-se em um Curso de Licenciatura, Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Brasil. O aporte teórico desse recorte da pesquisa maior veio dos estudos sobre abstração reflexiva de Piaget como indicada por Simon e Tzur. A metodologia da pesquisa foi qualitativa com características do *Design-Based Research*, Cobb et al, e a análise foi interpretativa. Foi desenvolvida uma trajetória hipotética de aprendizagem, segundo Simon *et al*, nela utilizamos uma abordagem exploratória-investigativa de ensino. Os sujeitos foram três licenciandos e os resultados indicaram que, apesar de pouca experiência com o *Software*, houve um processo de abstração dos conceitos ao relacionarem o aspecto operacional com o estrutural, o qual o acadêmico só atingiria se conseguisse interiorizar de modo a captar as relações trigonométricas como um todo.

Palavras chave: Educação Matemática; Trigonometria; Tecnologia; Formação pedagógica.

Introdução: O estudo da Trigonometria

As origens da trigonometria são um tanto obscuras. Há alguns problemas no papiro de Rhind que envolvem a co-tangente de um ângulo diedro da base de uma pirâmide, na tábula cuneiforme dos antigos babilônica Plimpton 322 que continha uma notável tábua de secantes, também é possível que as investigações modernas sobre a matemática da Mesopotâmia antiga venham a revelar um desenvolvimento apreciável da trigonometria prática, sem falar nos Indus que consideravam a trigonometria como uma ferramenta para sua astronomia.

A trigonometria na antiguidade sempre foi ligada às partes da geometria e da álgebra, com os quais se relacionam, entretanto hoje é tratada como um tópico matemático independente nas propostas curriculares (conteúdo programático de matemática) do ensino fundamental ou médio. Euclides Roxo considerava que muitas questões da Geometria se resolvem rapidamente graças as noções básicas de trigonometria, e ele se valeu das pressuposições teóricas de educadores matemáticos tais como Gutton, ao afirmar que os tópicos matemáticos abordados nos livros didáticos utilizados no ensino secundário apresentavam separações estanques entre os vários ramos da matemática, tornando-os fragmentados (LOBO DA COSTA, 2004).

Sendo assim, ao longo dos anos, houve uma evolução no sentido da simplificação da linguagem até, chegarmos à escrita atual, mas nem por isso a geometria através do desenho perdeu sua importância como meio de comunicação e de expressão, e foi sendo sempre utilizado paralelamente à escrita.

De modo a garantir ao discente uma formação que o torne protagonista na construção do conhecimento, é fundamental que se aplique na formação inicial uma metodologia para o ensino de funções trigonométricas que inclua a Geometria Dinâmica. A metodologia proposta para o ensino é uma alternativa à tradicional, e se propõe a resgatar a importância da geometria como fonte de conhecimento, inspiração e criação.

Propusemos uma alternativa para o ensino e aprendizagem da trigonometria usando o *software* de Geometria Dinâmica *GeoGebra*[1] na procura de sanar as dificuldades encontradas pelos acadêmicos quanto à compreensão das definições relacionadas à trigonometria, Com o uso do *software GeoGebra* proporcionamos ao acadêmico ferramentas e estratégias para a exploração, relação, análise e demonstração de forma que construíssem com solidez os conceitos e identificassem as propriedades trigonométricas.

A pesquisa que subsidia este artigo foi desenvolvida em um curso de Licenciatura em Matemática e teve por objetivo elaborar uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) para o ensino das funções seno e cosseno.

Assim, propusemos trabalhar o conteúdo de trigonometria no ciclo trigonométrico e introduzir as funções trigonométricas. A THA foi desenvolvida com acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática da UFMS.

Marco Teórico da Investigação

O marco teórico da investigação contemplou a caracterização do mecanismo cognitivo que se centra na relação atividade-efeitos em uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem - THA (do inglês, Hypothetical Learning Trajectory-HLT), segundo Simon, Tzur, Heinz & Kinzel (2004), com uma taxonomia sobre os processos de generalização que parte da ideia de abstração reflexiva de Piaget (1977). Assim podemos analisar a relação entre a aprendizagem conceitual e as tarefas matemáticas, com esta elaboração da THA, o mecanismo oferece uma estrutura para pensar sobre como a tarefa matemática pode promover o processo de aprendizagem do licenciando (FIGUEIREDO et al, 2015).

A perspectiva teórica procede a uma particularização da ideia de abstração reflexiva elaborada a partir das ideias de Piaget (1977) sobre abstração reflexiva, utilizada por Simon e Tzur

[1]. Para mais informações ver: https://www.geogebra.org

(2004). Estes autores apontam que as ações dos estudantes produzem diferentes efeitos que podem ser considerados por ele no desenvolvimento de seus processos de abstração.

O enfoque proposto por Simon (1995) e por Simon e Tzur, (2004), para desenvolvimento profissional docente propõe um modelo de análise da prática do professor que permite, com posterioridade, incorporar resultados aos programas de formação de professores. Os autores explicam que enquanto os alunos se concentram em suas atividades com vistas a atingir sua meta, eles criam registros mentais, de modo que a atividade de experiência é gravada mentalmente e se desenvolve uma interação da atividade que é ligada ao seu efeito.

Este mecanismo baseia-se na descrição de Piaget (1977) sobre dois aspectos: o da reflexão e da abstração. O primeiro aspecto é uma projeção, no qual as ações em um nível tornam-se objetos (entrada) para as ações do próximo nível. O segundo aspecto é uma subjetividade conceptualização, no qual uma reorganização entre ações ocorre. O autor faz uma distinção entre os dois tipos de reflexão realizados pelos estudantes em seus registros da experiência.

Tzur e Simon (2004) partindo da noção de abstração reflexiva de Piaget, assumem que os processos mentais dos estudantes são elementos constituintes da compreensão de um objeto que por sua vez envolve duas fases: a fase participativa, na qual o estudante desenvolve diferentes atividades guiadas por um objetivo, qual seja, o de resolver uma tarefa matemática; a fase antecipatória, em que antes de uma determinada tarefa cuja resolução envolve o uso de um conceito matemático pelo aluno ele deve considerar pertinente o uso do conceito matemático na resolução dessa tarefa. Neste caso, o aluno pode usar o conceito de forma adequada, independentemente do contexto ou da tarefa.

O trabalho docente ao desenhar uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem

O trabalho docente é uma atividade profissional que requer a mobilização de diferentes domínios do conhecimento em situações nas quais o professor deve tomar decisões, colocando seu "conhecimento em uso". Essa é competência docente de planejar situações de ensino e aprendizagem de matemática nas quais o professor mobiliza seus conhecimentos e faz uso do que conhece de matemática, de ensino e de tecnologia. São diferentes contextos e áreas nas quais o professor deve utilizar informações para as mais diversas tomadas de decisão.

O professor, a partir de sua intencionalidade pedagógica produz um “caminho” para a aprendizagem do aluno. Temos então um desenho e a planificação de instruções aos discentes, com definições dos objetivos da aprendizagem, os quais definem as metas a serem alcançadas; o desenho das tarefas propostas aos estudantes/professores; e a caracterização de uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) contendo a previsão de como o pensamento e a compreensão dos estudantes/professores poderão evoluir, quando resolvem as tarefas matemáticas propostas.

Em nossa pesquisa destacamos a experimentação das tarefas desenhadas em um ambiente virtual, nesta se analisa a experiência a partir dos referenciais teóricos subjacentes a trajetória hipotética de aprendizagem dos estudantes/professores, e se trata de investigar se a atividades desenvolvidas pelos estudantes/professores correspondem ou não com o que foi planejado nas definições dos objetivos da aprendizagem e, e neste caso, em que medida os materiais e o entorno desenhado apoiam a aprendizagem projetada.

O Desenho do experimento

A investigação desenvolveu-se em um processo de formação inicial no qual se aplicou um experimento de ensino sobre funções trigonométricas usando o *Software GeoGebra* em uma relação entre a atividade efeito com o uso de lápis e papel em um entorno tecnológico, cujo objetivo foi compreender a caracterizar o conceito de funções trigonométricas. A metodologia foi a qualitativa de cunho interpretativa com características do *Design-Based Research* segundo Cobb et al (2003). Criamos atividades relacionadas ao conteúdo de funções trigonométricas objetivando levar o acadêmico a identificar as razões trigonométricas, no ciclo trigonométrico, o conceito de periodicidade, amplitude, domínio, conjunto Imagem em funções trigonométrica possibilitando ao acadêmico uma ideia do que se trata esta abordagem no ensino de funções trigonométricas, ou seja, como organizar o raciocínio e de forma a construírem argumentações lógicas. Esperávamos que o acadêmico apresentasse alguma dificuldade relacionada à maneira de organizarem o raciocínio e construírem argumentações lógicas, também na operacionalização do *software*, uma vez que seria o primeiro contato com o *software GeoGebra.*

As atividades foram direcionadas a três acadêmicos do segundo ano do curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Fundamentos de Matemática I. Abordamos conteúdo da trigonometria no triângulo retângulo numa perspectiva investigativa para o estudo de seno, cosseno e tangente, na qual iniciou-se a construção do conhecimento por triângulos retângulos, passando para o ciclo trigonométrico e pôr fim a utilização de gráficos das funções correspondentes. Para esta atividade disponibilizamos três encontros de duas horas/aula cada, nas dependências da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - Brasil, no laboratório de informática.

Primeiramente foi feita uma revisão da teoria no que se refere ao conceito das relações trigonométricas para o triângulo retângulo, e em seguida generalizando este conceito para o ciclo trigonométrico, partindo do pressuposto que os acadêmicos já estudaram este conteúdo quando cursou a disciplina regularmente. Na sequência foi apresentado o *software GeoGebra* ao acadêmico, informando que se trata de um *software* matemático que reúne geometria, álgebra, calculo e estatística em três janelas diferentes: Gráfica, algébrica e numérica. Esperamos respostas a algumas questões e/ou soluções que o acadêmico construa, tais como: Como você explicar, os conceitos de ângulo e de arco trigonométrico; Qual(is) estratégia(s) pode (m) ser utilizada (s) por um professor a fim de proporcionar a alunos a construção do significado de periodicidade; Como o aluno entende o significado da tangente de x, se ele percebe o x como argumento da tangente, e não como um produto de duas variáveis.

Nesta atividade esperamos que o acadêmico possa também relacionar dois aspectos de um único conceito: o aspecto operacional, em que o conceito é visto como processo, e o aspecto estrutural, no qual o conceito é visto como objeto.

Roteiro para construção de gráficos

O acadêmico recebeu um *applet*[2] (figura 1), em um arquivo do computador, construído previamente no qual o mesmo passou a fazer sua investigação, uma vez que a construção da figura requer um domínio maior do *Software*. Nesta atividade coube ao aluno observar e analisar a variação do seno, cosseno e tangente no clico trigonométrico, movimentando o ponto P, e visualizandoas funções no gráfico. Ao mesmo tempo em que observava o ciclo, o acadêmico tinha a opção de selecionar apenas uma ou mais opções, ou até mesmo todas ao mesmo tempo.

Nesta atividade o acadêmico pôde selecionar a opção que desejava, não fornecemos um roteiro, deixamos que ele criasse as suas funções e investigasse o que acontecia com a sua imagem no *software*. Nossa intervenção foi no sentido de propormos algumas questões com relação ao arco

---

[2] É um *software* aplicativo que é executado no contexto de outro programa.

construído pelo ponto P, medida do raio da circunferência, o comprimento da circunferência, o comportamento da função seno, função cosseno e função tangente observando nos respectivos quadrantes suas variações, sempre no intuito de o acadêmico compreender as relações e propriedades da trigonometria. Por meio da exploração do software de geometria dinâmica o recurso de arrastar, permite a visualização das propriedades das figuras construídas. Assim observamos e argumentamos junto ao acadêmico sobre como explicar, os conceitos de ângulo e de arco trigonométrico.

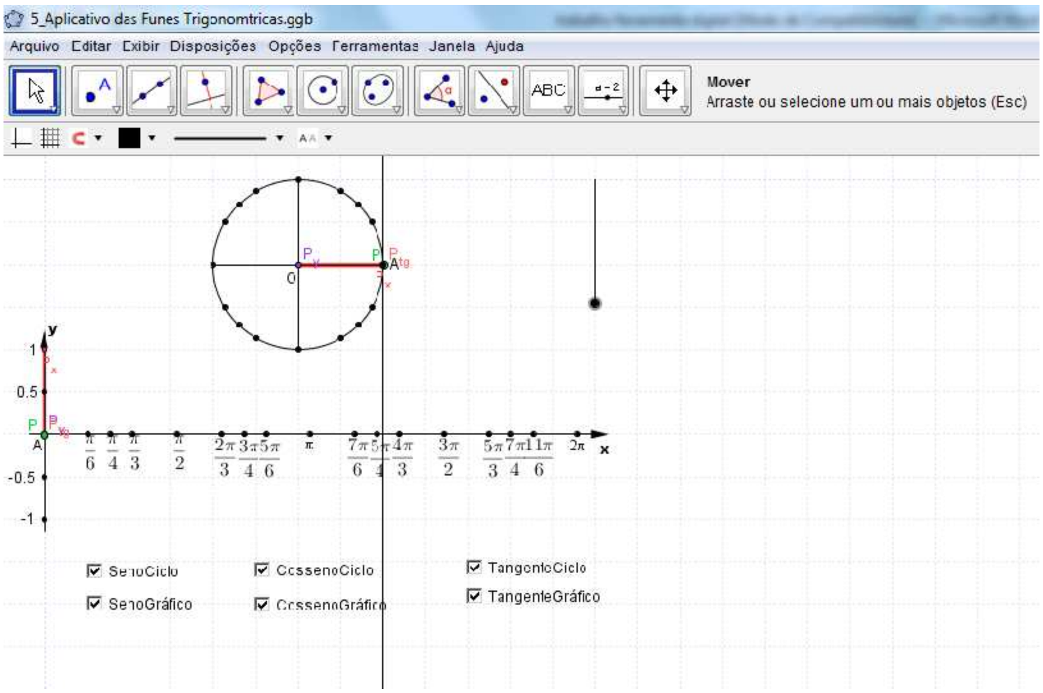


Figura 1 –Applet do Ciclo trigonométrico no *GeoGebra*

Após os estudantes empreenderem várias investigações foi então solicitado a eles que comentassem a atividade. Foi registrada a seguinte fala de um dos três acadêmicos: "com o *Software*, somos convidados a investigar diversas situações, podendo ter no nosso computador o registro de todas as situações criadas".

Posteriormente disponibilizamos mais dois *applet*, de modo que ao manipular podiam observara construção gráfica da função seno e cosseno. Nesta atividade propusemos 5 (cinco) tarefas, disponibilizamos com o *Software* o eixo cartesiano e as opções f(x)=a. $\sin x$ (x), g(x)=b. $\sin x$, p(x)= $\sin(m.x)$ e q(x)= $\sin x + n$. O acadêmico digitava o valor para cada variável a, b, m e n, pertencente ao conjunto dos números inteiros e analisava as variações no gráfico da função.

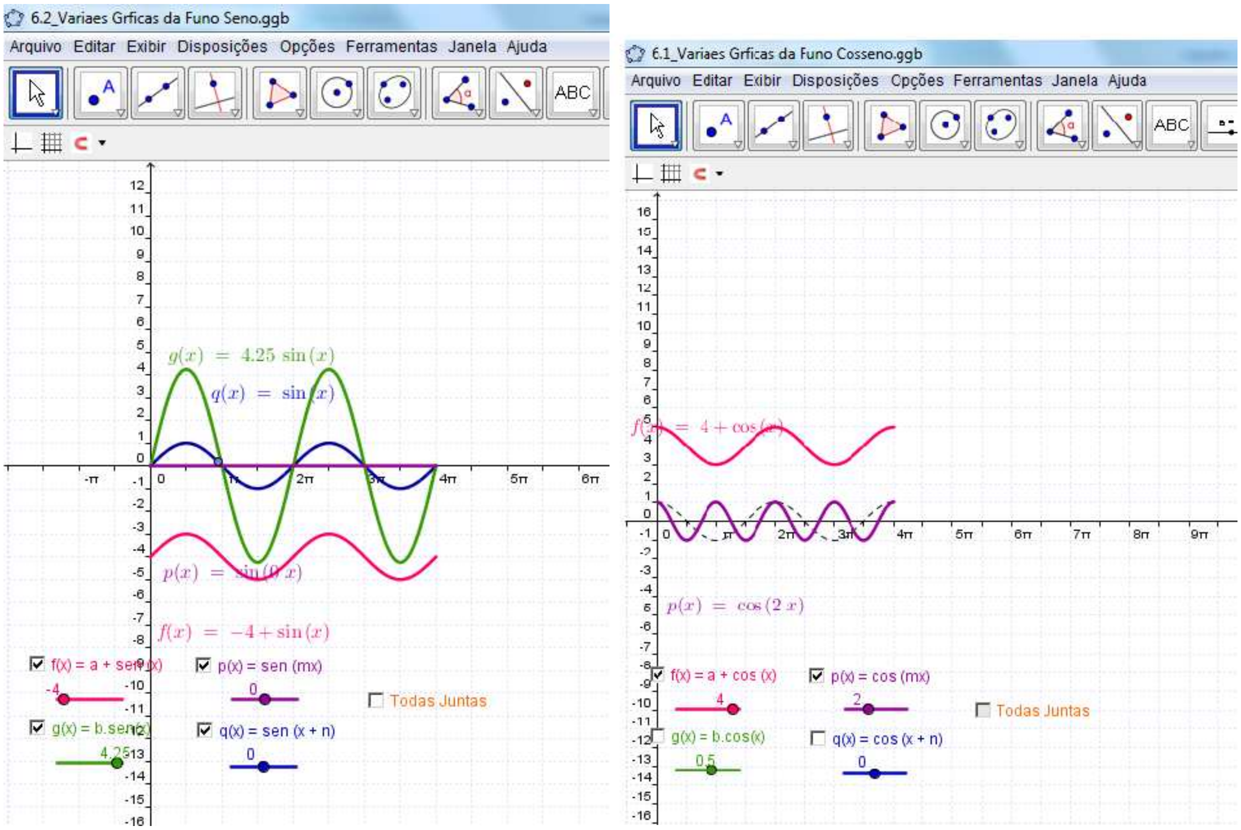


Figura 2: Applet da função seno e função cosseno no *GeoGebra*

- ✓ Tarefa 1: y= $\sin x$; y= $\sin x + 1$; y= $\sin x + 2$.

O que você observa ao comparar os gráficos na tarefa 1?

- ✓ Tarefa 2: y= $\sin x$; y= $\sin x - 1$; y= $\sin x - 2$.

O que você observa ao comparar os gráficos na tarefa 2?

- ✓ Tarefa 3: y= $\sin 2x$; y= $\sin 3x$; y= $\sin \frac{x}{2}$; y= $\sin \frac{x}{4}$.

O que você observa ao comparar os gráficos da tarefa 3?

- ✓ Tarefa 4: y= $2 \sin x$; y= $3 \sin x$; y= $4 \sin x$).

O que você observa ao comparar os gráficos da tarefa 4?

- ✓ Tarefa 5: $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $y = \cos x$.

O que você observa ao comparar os gráficos da tarefa 5?

- ✓ Tarefa 6: y= $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; y= - cos (x).

O que você observa ao comparar os gráficos da tarefa 6?

O acadêmico observou a variação no eixo cartesiano na atividade da tarefa 1 e 2, relacionando com o período da função, e na tarefa 3 e 4 a diferença entre multiplicar a função seno ou cosseno por uma constante e a multiplicação da constante com o arco correspondente.

Nesta atividade registramos a seguinte fala deum dos acadêmicos: “agora sim pude perceber qual é variável o parâmetro que determina a variação do gráfico no eixo do x e do eixo do y, quando o gráfico encurta ou fica mais comprido”.

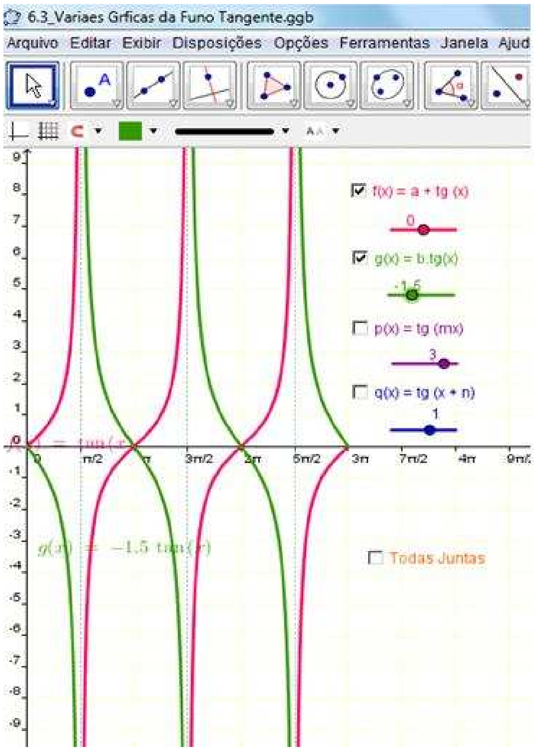


Figura 4: Applet da função tangente no *GeoGebra*

Neste último *Applet*, direcionamos nossa intervenção no sentido de responder à questão de como o acadêmico entende o significado da tangente de x, se ele percebe o x como argumento da tangente, e não como um produto de duas variáveis, sem esquecer nosso objetivo principal, observando os gráficos em relação a tangente.

Em nossas intervenções buscamos relacionar com esta ferramenta, sempre a discussão em relação ao conceito e definição dos conteúdos abordados, envolvendo a observação e reflexão que visam à atuação em situações contextualizadas, através de uma metodologia de formação investigativa, e com isto a possibilidade de o acadêmico colocar em prática seus conhecimentos na oportunidade de contato com o objeto em construção.

Na THA as tarefas matemáticas, Simon e Tzur (2004) identificaram tipos de tarefas que se pode propor aos alunos para que desenvolvam suas capacidades. Chamam de tarefas iniciais as que podem ser realizadas por estudantes que usam seu conhecimento prévio, já as tarefas que permitem que os alunos reflitam sobre ela própria relacionando-a para gerar abstração de regularidades na relação atividade-efeito, são denominadas de tarefas de reflexão e caracterizam ainda as tarefas de antecipação realizadas durante uma HLT às quais, para realização necessitam que o aluno tenha produzido uma abstração de regularidade na relação atividade-efeito.

Concluímos que as tarefas foram significativas para o ensino de funções seno, cosseno e tangente aliado a atividade de ensino com o *Software GeoGebra*, pois consideramos a aplicação do conceito a partir dos conhecimentos prévios dos alunos. Sabemos que a trigonometria pode ser abordada sob diferentes registros, de maneira a evitar aplicações que envolvam somente algoritmos e procedimentos, sobretudo algumas conexões entre a trigonometria e outras partes da matemática ou, talvez, entre está e as outras disciplinas como é proposta no Projeto Político Pedagógico do curso.

Os resultados permitem afirmar que a metodologia adotada auxiliou os alunos a ampliarem o conhecimento de tais conceitos, resultados também constatados em nossa intervenção com o acadêmico. No desenvolvimento do trabalho adotamos uma série de atividades investigativas para analisar as potencialidades e limitações do *Software* no ensino e aprendizagem da trigonometria, e assim, constatamos por meio desta sondagem, que foi possível diagnosticar que o *software* se mostrou muito eficaz, auxiliando os alunos a relacionarem os conceitos já vistos quando cursaram a disciplina regularmente.

Em nossa intervenção observamos e registramos algumas falas dos acadêmicos, mostrando a importância de se discutir a relação teoria e prática com um *software* matemático, possibilitando ao acadêmico a visualização e a interação, não ficando somente na fala do professor e na demonstração dos conceitos em lápis e papel. Consideramos que o acadêmico em virtude do pouco contato com o *software*, não realizou o processo de abstração da matemática ao relacionar o aspecto operacional e estrutural, no caso ele só atingiria se conseguisse interiorizar de modo a captar como um todo o conceito matemático da questão. Observamos ainda, que além da dificuldade de operacionalizar o *Software*, os acadêmicos apresentaram alguns erros conceituais no que tange à maneira de organizarem o raciocínio e construírem argumentações lógicas do conteúdo.

Nesta intervenção concluímos que a geometria dinâmica auxiliou nas atividades investigativas, de modo que os acadêmicos interagiram com o *software*. percebemos que a melhoria da prática depende do envolvimento do docente na busca de novas metodologias. Sendo assim, as análises nos levaram a concluir que as atividades auxiliaram os acadêmicos a construírem novos procedimentos e estratégias de ensino que contribuirão de forma positiva atingindo o objetivo da aprendizagem e investigação no ensino de função trigonométrica.

Referências

Coob, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003.). *Design experiments* in education research. Educational Researcher, v.32(n.1), pp. 9-13.

Figueiredo, S. A.; Lobo Da Costa, N. M.; Llinares, S. Valls, J. *Caracterização em uma Trajetória de Aprendizagem com Funções Trigonométricas.* XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática. Tuxtla Gutierrez. Mexico. 2015.

Lobo da Costa, N. M. (2004). *Formação de Professores para o ensino da Matemática com a informática Integrada à prática Pedagógica:* exploração e análise de dados em bancos computacionais. Tese de Doutorado em Educação. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

Piaget, J. (1977). Studies in Reflecting Abstraction. *Sussex: Psychology Press*.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 26, No. 2, 114-145.

Simon, M. A., Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.

Simon, M. A., Tzur, R, Heinz, K and Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective Abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 305-329.

A abordagem TPACK para a integração da calculadora científica na prática docente através da metodologia Lesson Study

Jalman **Lima**
Université Catholique de Louvain
Bélgica
jalmanlima@gmail.com

Yuriko Yamamoto **Baldin**
Universidade Federal de São Carlos
Brasil
yuriko@dm.ufscar.br

Resumo

Considerando a questão "Como integrar a calculadora científica em sala de aula como um instrumento de aprendizado, sob perspectiva de formação de professores?" o objetivo deste trabalho é apresentar uma discussão sobre a integração da calculadora científica na prática docente, para além da inserção, fundamentada no Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo – TPACK. A pesquisa conta com a parceria das escolas públicas do estado de São Paulo, Brasil, em cursos de formação continuada que trabalham articulações do conteúdo curricular com a prática efetiva nas salas de aula. O planejamento, elaboração e execução dos roteiros didáticos com uso da calculadora científica foram fundamentados na metodologia Lesson Study como um processo de desenvolvimento profissional. Os resultados obtidos nos primeiros módulos possibilitam a interdisciplinaridade com outras áreas de conhecimento, indicando apropriação pelo professor do papel integrador da calculadora científica como uma alternativa de prática docente reflexiva para efetiva aprendizagem dos alunos.

Palavras chave: integração de tecnologia, calculadora científica, TPACK, Lesson Study, formação de professores, desenvolvimento profissional de professores, melhoria na sala de aula, aprendizagem participativa.

Introdução

Há mais de três décadas a tecnologia digital tem feito parte de estudos de pesquisadores em Educação Matemática no Brasil e no exterior. Dentre as tecnologias digitais, encontra-se a calculadora científica, uma das peças controversas de tecnologia educacional e de sua presença em sala de aula.

O mecanismo para especificar vários tipos de uso da calculadora no ensino básico e superior pode tomar diversas formas. Nos documentos curriculares oficiais é possível encontrar referências ao uso (ou não) da calculadora, bem como aos tipos específicos de calculadoras: básicas, científicas, gráficas e calculadoras com CAS (Computer Algebra System).

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) para o Ensino Fundamental e Médio permitem e encorajam o uso de calculadoras e as trazem como uma ferramenta que "... abre novas possibilidades educativas, como a de levar o aluno a perceber a importância do uso dos meios tecnológicos disponíveis na sociedade contemporânea. A calculadora é também um recurso para verificação de resultados, correção de erros, podendo ser um valioso instrumento de auto-avaliação" (Brasil, 1997, p. 47).

Além disso, a Base Nacional Comum Curricular- BNCC (Brasil, 2017) para o Ensino Fundamental, recém aprovada e em elaboração para o Ensino Médio, traz, na página 96, como importante o uso de calculadoras "para avaliar e comparar resultados", sem, contudo, fazer referência sobre os tipos de calculadoras para os ensinos fundamental e médio. No entanto, não são apenas os tipos de calculadoras que estarão no foco da educação de professores atualizados para a realidade do século 21.

Neste trabalho, argumentamos que a simples menção à importância do papel das tecnologias na sala de aula, em particular das calculadoras científicas, não orienta os professores em exercício ou os cursos que estão a formar os futuros professores, sobre o que significa efetivamente trabalhar o conteúdo curricular das disciplinas específicas com o uso das tecnologias que impliquem na aprendizagem efetiva e consolidada do conteúdo curricular, com vistas à educação do cidadão inserido no mundo que convive com a tecnologia.

Kissane (2012) afirma que "... na prática é muito improvável que (os professores) usem materiais que não sejam oficialmente aprovados….. por essa razão, é bastante incomum que os professores de qualquer país usem calculadoras … em sala de aula se o currículo oficial e seu exame associado não sancionarem tal uso."

No Brasil, a situação é similar à descrita, com agravante dos documentos PCN ou BNCC não oferecerem aos professores a segurança e a confiança em mudar seus hábitos de métodos no ensino e aprendizagem na sala de aula, além de não haver orientações sobre "como mudar".

Isso coloca um desafio para motivar o uso de calculadoras no ensino básico para efetivamente cumprir as recomendações oficiais de integração da tecnologia no ensino e aprendizagem. Pelas nossas experiências, os professores carecem de formação para utilizar a calculadora científica como instrumento de aprendizado em sala de aula e, por conseguinte, poder desmistificar o seu papel de ser apenas um instrumento de cálculo e que não proporciona o desenvolvimento da compreensão da matemática na aprendizagem durante uma aula. O projeto do nosso trabalho tem como objetivo exatamente a formação continuada de professores que se tornem capazes de incorporar a mudança de concepção do papel de uma calculadora científica.

Nesta direção, apoiamos em Neves e Bittar (2015) que fazem uma importante observação sobre a carência de formações para o uso de tecnologias nos cursos de licenciatura do Brasil que podem contribuir para fomentar as discussões sobre o tema.

"Observávamos que os demais professores [...] careciam de formação para utilizar as tecnologias, pois muitos diziam que durante o processo de formação inicial, os cursos de licenciatura não haviam contemplado discussões e desenvolvimento de práticas para o uso das atuais tecnologias disponíveis na escola. Alguns professores afirmavam que ... ao preparar os planejamentos, incluíam as tecnologias como recursos a serem utilizados no desenvolvimento de suas aulas, porém, na prática pedagógica, isso não acontecia.” (Neves e Bittar, 2015)

É possível perceber que o trabalho do professor na educação básica se dá mediante desafios (Purificação, Neves & Brito, 2010). Neste contexto, as formações continuadas figuram-se como uma ferramenta essencial no processo constante e permanente de aperfeiçoamento dos professores, uma vez que permitem que estes agreguem conhecimento capaz de gerar transformação e impacto em suas práticas pedagógicas em sala de aula. Acreditamos que pesquisar, investigar, discutir e refletir representam, e isso requer, a busca permanente por formações continuadas que propiciem melhoria da prática pedagógica em sala de aula.

O objetivo deste trabalho é, portanto, trazer a discussão sobre a integração da calculadora científica na prática docente dentro do contexto de formações de professores, e para isso a metodologia de Pesquisa de Aula- Lesson Study norteia as propostas de atividades de formação do nosso projeto, como ferramenta de melhoria da prática na sala de aula, como apontada em (Baldin & Felix, 2011).

A estrutura deste artigo apresenta a seguir tópicos de discussão sobre o quadro teórico de TPACK – Conhecimento tecnológico e pedagógico de conteúdo, em que se fundamenta a proposta das atividades do curso de formação continuada do projeto, o potencial da calculadora científica como promotor da interdisciplinaridade da nova base curricular, e da análise do potencial pedagógico das fases da Lesson Study em promover a capacitação do professor em alternativas didáticas com uso de tecnologia.

Conhecimento Pedagógico, Tecnológico de Conteúdo (TPACK)

No contexto de integração de tecnologias em sala de aula, Mishra e Koehler (2006) introduziram o conceito de Conhecimento Tecnológico e Pedagógico de Conteúdo, conhecido como TPACK, que deriva do Conhecimento Pedagógico de Conteúdo - PCK de Shulman (1986), que é o conhecimento requerido do professor para ensinar determinada disciplina dentro do currículo. O TPACK identifica a natureza do conhecimento requerido pelos professores para a integração da tecnologia em sua prática, ao mesmo tempo em que aborda a natureza complexa, multifacetada e situada do conhecimento do professor. O TPACK suporta um quadro teórico que combina três áreas de conhecimento: conhecimento tecnológico, conhecimento pedagógico e conhecimento de conteúdo, e estuda como estes conhecimentos se conectam entre si, levando ao contexto de ambiente escolar, gestão da sala de aula e das características sociais dos alunos envolvidos. Esse conhecimento é diferente do conhecimento de um especialista em tecnologia ou disciplinar e também do conhecimento pedagógico geral compartilhado pelos professores em todas as disciplinas. O TPACK é a base do ensino eficiente com tecnologia, e requer uma compreensão do professor da representação de conceitos que usam as tecnologias e de técnicas pedagógicas que usam tecnologias de maneira construtiva no ensino de disciplinas específicas. Isto requer conhecimento do que torna os conceitos difíceis ou fáceis de aprender, assim como saber como a tecnologia pode ajudar os alunos a enfrentar problemas com suas dificuldades, considerando o conhecimento prévio dos alunos. Ainda o TPACK pode ser analisado dentro das teorias da epistemologia, e do conhecimento de como as tecnologias podem ser usadas para construir o conhecimento existente e desenvolver novas epistemologias ou fortalecer as antigas. Estes aprofundamentos não são tratados neste artigo, por fugir do escopo.

No nosso trabalho a calculadora científica é a tecnologia que utilizamos para potencializar as atividades didáticas que possam trazer alternativas para o ensino e aprimoramento da aprendizagem significativa dos problemas de matemática e ciências (física, química, biologia), e de outras ciências dentro do contexto de atualização curricular. E o conceito de TPACK embasa as nossas propostas de roteiros didáticos.

A calculadora científica como ferramenta que possibilita a interdisciplinaridade

Um ponto importante do nosso trabalho é destacar a calculadora muito além de um dispositivo para manipulação aritmética. As calculadoras científicas evoluíram desde a primeira calculadora científica nos anos 70. Nessa época, a calculadora era usada principalmente para realizar cálculos longos, incluindo os cálculos de interesse de cientistas e engenheiros.

A calculadora científica foi aperfeiçoada nos últimos quarenta anos. Em vez de ser uma ferramenta para cientistas e engenheiros, ela tem sido aprimorada para servir como ferramenta para educação matemática. (Kissane, 2015).

A calculadora no contexto educacional é usada para representação de objetos matemáticos e conceitos, realizar conexão de significados, aumentar o entendimento sobre o significado do conceito numérico e promover o letramento matemático. Por exemplo, para estudantes do ensino fundamental anos finais, a calculadora científica surge como uma importante ferramenta para provocar curiosidade e interesse de usuários, como ilustrado na Figura 1. Reapresentando diferentes representações de frações, decimais e divisão.

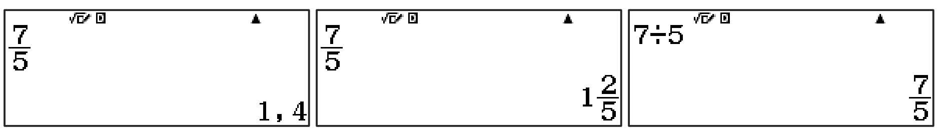


Figura 1. Reapresentando diferentes representações de frações, decimais e divisão.

A calculadora científica demonstra sua função mais promissora para o ganho educacional, quando é utilizada como dispositivo de exploração. Para ilustrar, consideremos estudantes aprendendo potenciação. Uma calculadora científica permite a exploração do significado de potências, especialmente quando os fatores dos números podem ser revelados.

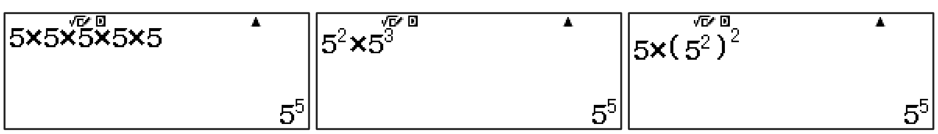


Figura 2. Explorando e entendendo potências.

Esta ferramenta possibilita a interdisciplinaridade preconizada pela nova Base Nacional Comum Curricular e já apontada pelos PCN e que ainda não está assimilada nas salas de aulas, a não ser em programas prontos de computadores. O domínio de linguagem matemática por meio da exploração de propriedades e de comparações de resultados numa calculadora abre as portas para trabalhar problemas de outras áreas de conhecimento que usam a linguagem matemática e notações científicas para seus conteúdos. Por exemplo, em um módulo para aulas de biologia do Ensino Médio, em execução no nosso projeto, a calculadora científica surge como uma valiosa ferramenta para conectar conceitos biológicos e matemáticos, tal qual para investigar o Gasto Energético Basal (GEB) de cada indivíduo para os próximos 20 anos, bem como o GEB quando estiver com 50 anos.

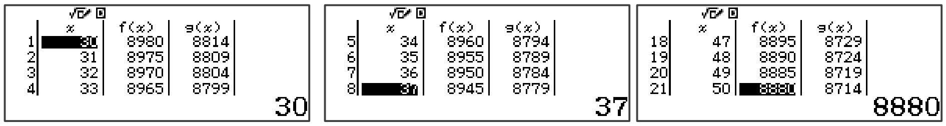


Figura 3. Ilustrações de telas da calculadora presentes no Roteiro de Aula sobre Nutrição: "Quanto necessitamos comer diariamente?".

Ao integrar a calculadora científica no roteiro de aula "Quanto necessitamos comer diariamente?", é necessário entender: as funções da calculadora científica (Conhecimento Tecnológico), entender a maneira pela qual o assunto (conteúdo específico, Nutrição) pode ser mudado pela aplicação da calculadora científica[1] (Conhecimento Tecnológico de Conteúdo) e como a calculadora científica pode ser incorporado dentro da metodologia de resolução de problemas, bem como considerar a problemática do planejamento apropriado de aulas (Conhecimento Pedagógico de Conteúdo). Para elaborar propostas de roteiros de aula integrada nesse sentido, a pesquisa leva em consideração questões que se levantam naturalmente: "Como os professores adquirem uma compreensão das relações complexas entre conteúdo, pedagogia e calculadora científica?" A abordagem padrão sugere que os professores simplesmente precisam ser treinados para manipular a calculadora científica. Partindo da necessidade de criar cursos de aperfeiçoamento especiais para professores na integração da tecnologia na sua prática docente, a pergunta natural surge: "Que metodologia é indicada para mudança de paradigma e integrar a calculadora científica na prática pedagógica do professor?"

A metodologia Lesson Study oferece um caminho para nortear o planejamento e execução das atividades e a reflexão sobre os resultados das mesmas e está presente no nosso projeto.

A Metodologia Lesson Study

No sentido de apontar uma mudança de paradigma para as formas de ensino da Matemática básica, como previstas nos PCN, a Lesson Study vem contribuir para capacitar os professores, de modo a promover melhorias na qualidade de aprendizagem de seus alunos (Baldin & Guimarães, 2012), (Baldin, 2010).

A Lesson Study é uma forma de desenvolvimento profissional realizado por ações colaborativas de professores que aprendem a pesquisar a aula. O Lesson Study é reconhecido internacionalmente como sendo uma forma extremamente eficaz de desenvolvimento profissional na mudança de práticas de sala de aula. (Isoda et al. 2007). Da mesma forma, ensinar através da resolução de problemas estruturados é amplamente reconhecido para desenvolver a capacidade dos alunos de pensar matematicamente e resolver problemas. O foco deste trabalho não é discutir a metodologia como estratégia para melhorar a prática do professor e a aprendizagem do aluno dentro da sala de aula (Baldin, 2009), mas sim fundamentar com esta metodologia a elaboração da proposta dos roteiros de aulas dos módulos do projeto. Para maiores detalhes da adequação necessária para impactar a prática na sala de aula referimo-nos a (Baldin & Felix, 2011).

Na próxima seção apresentamos os princípios básicos da metodologia Lesson Study em que se baseia o nosso projeto.

---

[1] O modelo usado foi a calculadora científica CASIO ClassWiz fx-991 LAX.

Os Princípios de Lesson Study

A Metodologia de Lesson Study consiste em atividade de pesquisa de uma aula (ou uma sequência de aulas) por professores, sendo uma atividade de grupo formado por pesquisadores, professores, coordenadores pedagógicos e até dirigentes. Em outras palavras, o Lesson Study é uma forma de investigação de uma aula-pesquisa sobre um tópico selecionado dentro do currículo escolar. O grupo pesquisa o planejamento (*conteúdo específico, estratégias de encaminhamento dentro da sala de aula, questionamentos adequados para estimular a aprendizagem participativa dos alunos, e previsão de possíveis soluções dos alunos*), para assim elaborar uma sequência didática a ser executada. Durante a execução do plano por um professor, o grupo observa a eficácia do plano elaborado de acordo com as evidências de aprendizagem dos alunos e analisando as expectativas iniciais. Após a realização da aula, o grupo se reúne para reflexão e avaliação do plano de aula como um todo, reunindo a auto-avaliação do professor com as contribuições críticas do grupo. A aula, assim analisada, pode retomar o ciclo com planejamento aperfeiçoado. (Isoda et al, 2007), (Fernandez & Yoshida, 2004), (Isoda, Arcavi, & Mena-Lorca, 2012).

Dentre todos as etapas do ciclo de uma Lesson Study o planejamento de uma aula com os ingredientes como citados acima constitui a pedra fundamental de todo o processo. Portanto, nos cursos de educação continuada de professores que almejam introduzir a Lesson Study como estratégia para promover mudança de paradigmas nas ações do professor na sala de aula, deve-se focar especialmente na aprendizagem do professor em “planejar uma aula” sob uma perspectiva diferente, mais completa e com dimensões que permitam a avaliação em si da aula durante a observação da mesma durante sua realização, assim como rever os seus olhares sobre a aprendizagem participativa do aluno através da execução do plano. (Baldin, 2010).

Tendo em vista que o nosso projeto está em execução com diversos módulos realizados e outras por realizar, notamos que o processo gradual de aprendizagem dos professores do grupo começa com a participação no plano de aula que é trabalhado inicialmente pelos pesquisadores para ser proposta para que o grupo a vivencie, para assim o grupo consiga acompanhar e compreender os itens do plano de aula, como parte da sua aprendizagem. É uma adaptação do ciclo da LS fundamentada por TPACK, dado que a inclusão da ferramenta tecnológica no plano de uma aula requer uma atenção redobrada na pesquisa.

Portanto, como Baldin (2009) afirma da necessidade de adaptar a metodologia de Lesson Study como Pesquisa de Aula, aos contextos da realidade brasileira nos cursos de educação de professores, o nosso projeto foca com prioridade o roteiro de aulas em que a integração da calculadora científica é realizada como uma aula inédita de resolução de problema-tema enaltecendo o significado do conhecimento de disciplinas específicas pelas facilidades que a calculadora traz para instigar a curiosidade, a exploração pela descoberta, a compreensão das possibilidades de generalizações e também da análise das limitações da calculadora.

Os passos da Lesson Study permitem a observação da eficácia de uma aula por meio de um planejamento cuidadoso, para então poder avaliar os resultados da aprendizagem dos alunos, que é o objetivo principal de uma aula.

Exemplo do projeto em escolas da rede estadual de ensino

A parceria do nosso projeto com a rede estadual de ensino básico, por meio da Diretoria de Ensino Regional de José Bonifácio, no estado de São Paulo, Brasil, está permitindo realizar a médio e longo prazo as capacitações de professores no uso de calculadora científica, usando a metodologia Lesson Study para efetivamente levar os professores participantes a compreender a importância do planejamento criterioso de uma aula com integração da tecnologia, e trabalhando o conteúdo do currículo oficial em contexto ampliado de conectar os tópicos com dimensões de competências e habilidades preconizados em documentos oficiais, por exemplo, incluindo a educação financeira, educação pela cidadania, interdisciplinaridade com outras áreas como Física, Biologia, estando a Geografia e Química em planos imediatamente futuros. Além disso, o roteiro foi planejado para mudar a dinâmica de participação dos alunos para engaja-los na produção de suas respostas.

Um dos exemplos recentes do nosso projeto foi realizado por meio do roteiro pesquisado, testado por simulações pelos participantes antes de levar a sala de aula dos participantes, e depois analisado através de registros, fotos e questionários de avaliação. O tema foi a probabilidade de acerto no sorteio de loteria, a Mega Sena, que consiste em apostas em 6 escolhas entre os números de dois dígitos, de 01 a 60. Um texto motivador e explicativo foi colocado no início do roteiro com as regras da loteria, e a aula foi planejada com uma proposta de inclusão dos participantes vivenciando inicialmente as possibilidades dentro da sua turma de alguém acertar o prêmio. As primeiras atividades foram para que os professores identificassem o objetivo de trabalhar o pensamento de análise combinatória dentro de uma situação problema do cotidiano, por meio do questionamento "Qual é a melhor proposta?" e vivenciar as reações que ocorreriam dentro da sua sala de aula. O roteiro é cuidadosamente elaborado por meio de atividades, no início lúdicas, mas inquisidoras à medida que se exploram as probabilidades, as técnicas de elaborar a árvore de possibilidades e os cálculos mediados pela calculadora. A calculadora se mostra especialmente útil ao promover o senso numérico ao explorar a ordem de grandeza dos números que surgem nas diversas possibilidades de aposta e dos preços que se pagam pelas mesmas, assim como analisar as limitações próprias da tecnologia e, portanto, descobrir o potencial do conhecimento matemático para solucionar problemas. Enfim, a educação cidadã de promover o gasto responsável e tomada de decisões foram resultados implícitos na atividade.

Cerca de 45 professores da rede trabalharam o roteiro descobrindo novas formas de ensinar conteúdo com significados e com a tecnologia. Até o momento dois professores conseguiram levar a aula-pesquisa para suas salas de aula com registros da realização, e a análise dos relatos pós-aula são promissores em mostrar a superação do temor de deixar a zona de conforto, como também uma apreciação crítica do como os alunos podem aprender com nova ferramenta didática. Os professores do nosso projeto que ainda não testaram a aula-pesquisa são esperados que se sintam motivados a executar o roteiro e participar da análise coletiva a ocorrer.

Conclusões

Diante da resistência compreensível dos professores em enfrentar desafios de mudança no paradigma de ensino com vistas a aprendizagem participativa e significativa dos alunos, acreditamos que o projeto de integração da calculadora científica no contexto escolar, fundamentado pelo quadro teórico TPACK e realizado dentro da metodologia Lesson Study está trazendo respostas promissoras a questões de investigação que motivaram o projeto, na direção de alternativas para os cursos de formação de professores nos tempos atuais.

Bibliografia e referências

Baldin, Y. Y. (2009). O significado da introdução da Metodologia Japonesa de Lesson Study nos Cursos de Capacitação de Professores de Matemática no Brasil. *XVIII ENCONTRO ANUAL DA SBPN.* São Paulo, 26 a 28 de setembro de 2009.

Baldin, Y. (2010). The Lesson Study as a strategy to change the paradigm of teaching mathematics: a Brazilian case. In *Proceedings of 4th APEC Tsukuba International Conference.* Tokyo: U. Tsukuba. http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2009/doc/pdf_20-21/YurikoYamamotoBaldin-paper.pdf

Baldin, Y. Y., & Felix, T. (2011). A Pesquisa de Aula (Lesson Study) como ferramenta de melhoria da prática na sala de aula. *XIII CIAEM-IACME*. Recife.

Baldin, Y.Y., & Guimarães, L. (2012). El proceso de introducción de Estudio de Clases en Brasil (versão ampliada em espanhol do original The process of introducing Lesson Study in Brazil). Em *Isoda, Arcavi & Mena Lorca (Eds), El Estudio de Clases Japnés em Matemáticas, Su importância para el mejoramiento de los aprendizajes em el escenario global. Tercera edición. Valparaíso: Ediciones Universitárias de Valparaíso*. Pp 306- 315.

BRASIL. (1997). Brasil. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. 8.

BRASIL. (2017). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular- BNCC*. Brasília.

Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Isoda, M., Stephens.M., Ohara, Y. & Miyakawa, T. (2007). *Japanese Lesson Study in Mathematics, Its Impact, Diversity and Potential for Educational Improvement*. Singapore: World Scientific.

Isoda, M., Arcavi, A., & Mena-Lorca, A. (2012). *El Estudio de Clases Japnés em Matemáticas, Su importância para el mejoramiento de los aprendizajes em el escenario global. Tercera edición.* Valparaíso: Ediciones Universitárias de Valparaíso.

Kissane, B. (2015). Learning with Calculators: Doing More with Less. In: *25th Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers: Mathematics: Learn, Lead, Link, 6 - 8 July 2015,*. Adelaide, Austrália.

Kissane, B. & Kemp, M. (2012). Calculators and the mathematics curriculum. *17th Asian Technology Conference in Mathematics. . Suan Sunandha Rajabhat University, Bangkok*.

Mishra, P., & Koehler, M. (2006). *Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge.* Teachers College Record, 1017-1054.

Neves, T., & Bittar, M. (2015). Análise da Prática de um Professor no Ensino da Matemática: Possíveis Reflexões em um Processo de Integração de Tecnologia. *EM TEIA Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana*, *5, número 3.*

Purificação, I., Neves, T., & Brito, G. (2010). Professores de Matemática e as tecnologias: Medo e Sedução. Em *Educação Matemática, Tecnologia e Formação de Professores : Algumas reflexões* (pp. 31-57). Campo Mourão: FECILCAM.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 4-14.*

Desarrollo del pensamiento numérico en los primeros años de la educación primaria: la suma y resta de números naturales

Ana Patricia Maroto Vargas
Sede de Occidente, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
ana.maroto@ucr.ac.cr

Ignacio Arias Gómez
Recinto de Golfito, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
arias.i.30@gmail.com

Resumen

El presente taller pretende ofrecer al público participante diferentes estrategias que el docente de primaria puede utilizar con el estudiantado de los primeros años de la educación primaria para sumar o restar números naturales, sin necesidad de utilizar el método algorítmico tradicional. Las estrategias presentadas ayudan a fortalecer el cálculo mental y mayor conocimiento del sistema de numeración decimal. El material por presentar ha sido utilizado con estudiantes para maestros de primaria de dos recintos de una universidad estatal en Costa Rica con el fin de que comprendan la importancia del desarrollo de diferentes alternativas al método algorítmico para resolver ejercicios y problemas de cálculo mental.

Palabras clave: matemática, suma números naturales, resta números naturales, estrategias para sumar o restar, pensamiento numérico.

Introducción

El presente taller pretende motivar la discusión sobre diferentes estrategias que pueden ser compartidas con docentes de educación primaria para fomentar el uso del pensamiento numérico en sus estudiantes. Las estrategias pretenden fomentar la comprensión profunda del sistema de numeración decimal, de las propiedades y operaciones de números naturales, de manera que el estudiantado pueda resolver ejercicios y problemas de manera eficiente, sin necesidad del uso de algoritmos que promueven el uso de la memoria. Para este trabajo se presentan estrategias para suma y resta con números naturales, tema que es enseñado en los primeros niveles de la educación primaria. Como parte del taller se pretende establecer conexiones con el significado del sistema decimal, asimismo con conceptos como agrupación y representación de números en la recta numérica.

Marco teórico

Pensamiento numérico

El pensamiento numérico debe ser promovido desde los primeros años de la educación primaria por su importancia para lograr el desarrollo de pensamiento matemático superior (Obando & Vásquez, 2008). El pensamiento numérico puede ser definido como: la comprensión general de números y operaciones, así como la habilidad e inclinación de usar esta comprensión de manera flexible para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles para manipular números y operaciones (McIntosh, Reys, & Reys, 1992, p. 3).

Según esos autores, el pensamiento numérico permite comprender los patrones que se establecen en matemáticas y la importancia de los números para resolver problemas de la vida cotidiana. El desarrollo de este pensamiento no implica la repetición mecánica de procedimientos que no ayudan a comprender profundamente el concepto de sistema de numeración decimal. Para lograr este tipo de comprensión profunda es importante la utilización de diferentes métodos para resolver las operaciones o problemas que son planteados al estudiantado, que le permiten profundizar en conceptos tales como la organización del sistema decimal a partir de potencias de base diez y la composición y descomposición de números, entre otros (Obando & Vásquez, 2008).

Adicionalmente, promover el desarrollo del pensamiento numérico permite al estudiantado comprender diferentes representaciones del mismo concepto y hacer conexiones a diferentes contextos matemáticos y de la vida cotidiana. Este es un proceso gradual, que debe ser promovido incluso antes de iniciarse la educación formal y que debe ser fortalecido en todos los niveles escolares (McIntos et al., 1992).

Almeida, Bruno & Perdomo-Díaz (2016) afirman que el pensamiento numérico tiene diferentes componentes: 1) comprender el significado de los números, 2) reconocer el valor relativo y absoluto de las magnitudes numéricas, 3) usar puntos de referencia al hacer cálculos numéricos, 4) componer y descomponer números, 5) utilizar diferentes representaciones de los números, 6) comprender el efecto relativo de las operaciones y 7) desarrollar estrategias apropiadas para evaluar si una respuesta es razonable (Almeida, Bruno & Perdomo-Díaz, 2016).

En este taller se presentan diferentes estrategias que pueden ser utilizadas por los docentes de enseñanza primaria para desarrollar la comprensión numérica de números naturales en sus estudiantes y fomentar el cálculo mental de manera eficiente.

Propuesta de los programas de estudio del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica

Los programas de estudio oficiales propuesto en el año 2012 por el Ministerio de Educación Pública (MEP) de Costa Rica tiene como enfoque principal del currículo la resolución de problemas. La propuesta plantea la necesidad de aprender matemática de calidad con profundidad, conectando diferentes áreas de la matemática y buscando el desarrollo de cinco procesos matemáticos centrales: razonar y argumentar, plantear y resolver problemas, conectar, comunicar, y representar. El plan de estudios pretende el desarrollo de la competencia matemática, la cual es definida como “la capacidad de los alumnos para aplicar conocimientos y habilidades, y para analizar, razonar y comunicarse con eficacia cuando plantean, resuelven e interpretan problemas relacionados con distintas situaciones” (MEP, 2012, p. 23). Para lograr esa competencia matemática el plan de estudios determina habilidades específicas que el estudiantado irá logrando como parte de su proceso de aprendizaje.

El MEP (2012) propone como parte de las habilidades por desarrollar en los estudiantes de enseñanza primaria el cálculo mental de resultados de operaciones básicas. Por esta razón nace la inquietud de generar estrategias que permitan en los estudiantes el desarrollo del pensamiento numérico, por medio de actividades que permitan abordar de manera diferente las propiedades de los números reales en operaciones como la suma o la resta, de esta manera al tener diversas estrategias podrán mejorar su cálculo mental.

Método de investigación

El material presentado en este taller ha sido diseñado por dos educadores matemáticos y fue utilizado como parte de un plan piloto con dos grupos de maestros en formación en dos sedes universitarias de la misma universidad en Costa Rica como parte de un curso de la carrera de Bachillerato en la Enseñanza Primaria. En total 47 estudiantes participaron del piloto, 26 en una sede y 21 en la otra. Con esta propuesta se está variando la metodología utilizada tradicionalmente en el curso para optar por un proceso de formación más acorde con la nueva propuesta del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012), con la cual se espera que el docente ofrezca al estudiantado posibilidades para resolver problemas de manera independiente. El cambio en la orientación del curso universitario pretende ofrecer al estudiante para profesor diferentes ideas de cómo puede ser enseñado el pensamiento numérico y al mismo tiempo se espera que la metodología empleada en clase favorezca el manejo profundo de concepciones y las propiedades básicas de los números naturales.

Metodología del taller

El desarrollo del taller se hará en tres partes. Primero, se introducirán algunas de las estrategias que pueden ser fomentadas para el desarrollo del pensamiento numérico, luego se le pedirá a las personas participantes resolver algunos problemas utilizando al menos tres de las estrategias planteadas. Se pedirá a algunas personas participantes comentar sus estrategias de solución y se motivará a las personas participantes a generar nuevas estrategias que consideren pueden implementarse para fortalecer el pensamiento numérico en el estudiantado. Durante todo este proceso se analizará los diferentes componentes propuestos por Almeida, et al. (2016) y mencionados en el marco teórico.

Se espera hacer notar que el uso de diferentes estrategias para resolver problemas con números naturales propicie el desarrollo de los cinco procesos matemáticos propuestos por el MEP. Las estrategias que se estarán abordando en el taller son las que se mostrarán seguidamente. Muchas de las estrategias están basadas en sugerencias dadas por Schifter, Bastable, Russell, Lester, Davenport, Yaffee, & Cohen (2010).

Suma de números naturales

Estrategia 1:

Encuentre el resultado de 48 + 25

Respuesta:

$$40 + 20 = 60$$
$$60 + 8 = 68$$
$$68+5 = 73$$

$$48 + 25 = 73$$

Estrategia 2: Encuentre el resultado de 48 + 25
Respuesta:

$$48 + 20= 68$$
$$68 + 2 = 70$$
$$70 + 3 = 73$$

$$48 + 25 = 73$$

Estrategia 3: Encuentre el resultado de 48 + 25
Respuesta:

$$40 + 20= 60$$
$$5 + 5 = 10$$
$$60 + 10 = 70$$
$$70 + 3 = 73$$

$$48 + 25 = 73$$

Estrategia 4: Encuentre el resultado de 48 + 25
Respuesta:

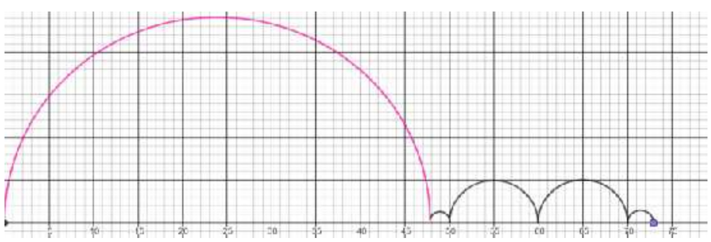


Figura 1. Representación gráfica de la suma 48 + 25.

Estrategia 5: Encuentre el resultado de 48 + 25
Respuesta:

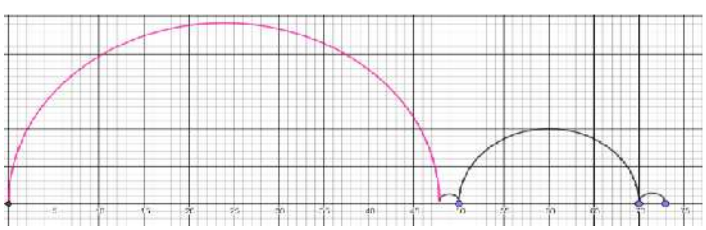


Figura 2. Representación gráfica de la suma 48 + 25.

Estrategia 6: Encuentre el resultado de 48 + 25
¿Cuáles son otras formas de representar esta suma en la recta numérica?

Estrategia 7: Encuentre el resultado de 48 + 25
¿Cuáles son otras formas de representar esta suma utilizando cualquier método numérico, dibujo o cualquier otra representación?

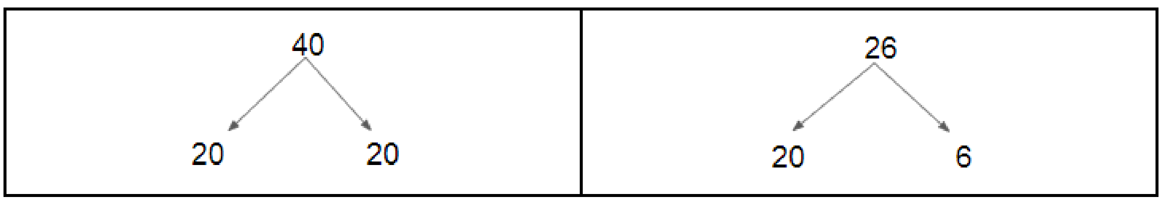
Resta de números naturales

Estrategia 1:
Encuentre el resultado de 40-26
Respuesta:

40 - 6 = 34
34 - 20 = 14

40 - 26 = 14

Estrategia 2:
Encuentre el resultado de 40-26
Respuesta: 40 - 26 = 14 porque



20 - 20 = 0 20 - 6 = 14

Estrategia 3:
Encuentre el resultado de 40-26
Respuesta:

26 + 4 = 30
30 + 10 = 40
4 + 10 = 14

40 - 26 = 14

Estrategia 4:
Encuentre el resultado de 40-26
Respuesta:

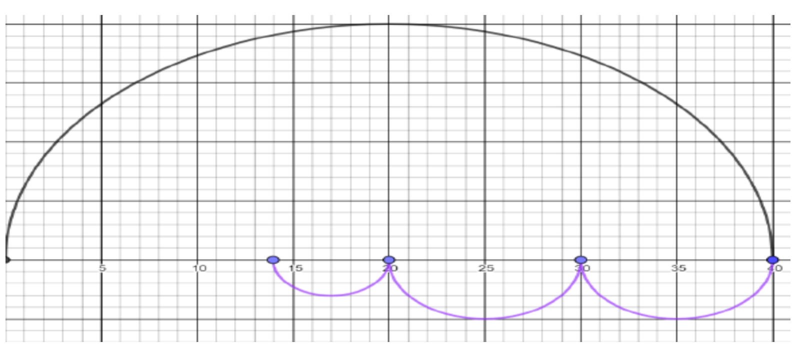


Figura 3. Representación gráfica de la resta 40 - 26.

Estrategia 5: Encuentre el resultado de 40-26
¿Cuáles son otras formas de representar esta suma en la recta numérica?

Estrategia 6: Encuentre el resultado de 40 - 26
¿Cuáles son otras formas de representar esta suma utilizando cualquier método numérico, dibujo o cualquier otra representación?

Estrategia 7:
Encuentre el resultado de 45 - 29
Respuesta:

$$29 = 5 + 4 + 20$$
$$45 - 4 = 40$$
$$40 - 20 = 20$$
$$20 - 4 = 16$$

$$45 - 29 = 16$$

Estrategia 8:
Encuentre el resultado de 35 - 16
Respuesta:

$$10 + 10 + 10 = 30$$
$$10 + 10 + 10 + 5 = 35$$
$$10 - 6 = 4$$
$$10 - 10 = 0$$

$$35 - 16 = 10 + 5 + 4 = 19$$

Estrategia 9:
Encuentre el resultado de 72 - 47
Respuesta:

$$72 - 40 = 32$$
$$32 - 2 = 30$$
$$30 - 5 = 25$$

$$72 - 47 = 25$$

Estrategia 10:
Encuentre el resultado de 72 - 47
Respuesta:

$$72 - 10 = 62$$
$$62 - 10 = 52$$
$$52 - 10 = 42$$
$$42 - 10 = 32$$
$$32 - 7 = 25$$

72 - 47 = 25

Entre la estrategia 9 y 10, ¿cuál considera como la estrategia más eficiente?, ¿por qué?

Estrategia 11:
Encuentre el resultado de 2000 - 547
Respuesta:

2000 - 500 = 1500
1500 - 40 =1460
1460 - 7 = 1453

2000 - 547 = 1453

Estrategia 12:
Encuentre el resultado de 2000 - 547
Respuesta:

1997 - 547 = 1450
1450 + 3 = 1453

2000 - 547 = 1453

Con este taller se espera generar reflexión sobre diferentes estrategias que se pueden implementar en el aula de matemática, para que el estudiantado logre una comprensión profunda del sistema de numeración decimal. Se pretende además que las personas participantes reflexionen sobre la necesidad de utilizar diferentes estrategias para resolver el mismo problema, de manera que cada estudiante puede aproximarse a la solución según sus conocimientos y destrezas. Se espera que las personas participantes generen nuevas estrategias que sean compartidas durante la discusión con el fin de enriquecer el conocimiento de todas las personas.

Referencias y bibliografía

Almeida, R., Bruno, A., & Perdomo-Díaz, J. (2016). Strategies of number sense in pre-service secondary mathematics teachers. International Journal of Science and Mathematics Education, 14(5), 959-978.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8.

Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programas de estudio en Matemática*. San José, Costa Rica: Autor.

Obando, G. y Vásquez, N. (2008). *Pensamiento numérico del preescolar a la educación básica*. Documento presentado en el Encuentro colombiano de matemática educativa.

Schifter, D., Bastable, V., Russell, S. J., Lester, J. B., Davenport, L. R., Yaffee, L., & Cohen, S. (2010). *Building a system of tens. Facilitator´s guide*. New Jersey: Pearson.

Oportunidades de aprendizaje en la formación inicial de los licenciados en matemáticas de la costa Caribe de Colombia visto desde la aplicación del TEDS-M

Evelyn **Ariza** Muñoz
Universidad Castilla La Mancha
España
evelyncarmen.ariza@alu.uclm.es
José Antonio **González-Calero** Somoza
Universidad Castilla-La Mancha
España
jose.gonzalezcalero@uclm.es
Ramon **Cózar** Gutiérrez
Universidad Castilla-La Mancha
España
ramon.cozar@uclm.es
Mónica **Borjas**
Universidad del Norte
Colombia
m.borjas@uninorte.edu.co

Resumen

Las oportunidades para aprender (OTL) reflejan visiones particulares de lo que se espera que los futuros maestros sepan y puedan hacer en un aula (Stark y Lattuca, 1997; Schmidt et al. 2008). En esta comunicación se presentan cuáles son esos OTL para matemáticas terciarias en 214 futuros licenciados de matemáticas de la costa Caribe mediante la aplicación de un instrumento usado en un estudio internacional llamado TEDS_M. En concreto, se utilizó la medida de escala de Rash, donde 10 es neutral y una puntuación superior a 10 indica que los estudiantes tuvieron una oportunidad superior a la media de aprender los temas incluidos en una escala determinada, mientras que un promedio inferior a 10 significa que los estudiantes tuvieron menos oportunidad promedio de hacerlo. Los resultados indican que, en líneas generales, los futuros licenciados tienen menos oportunidades de aprender las matemáticas que necesitarán pare ejercer efectivamente como maestros de matemáticas.

Palabras claves: formación inicial, oportunidades para aprender, licenciados en matemáticas, costa Caribe, TEDS_M.

Contexto y Marco teórico

La formación inicial docente en la materia de Matemáticas es una problemática vigente a la que varios autores están prestando especial atención, debido a que la vinculan con diversos indicadores de rendimiento académico. Una muestra sería los bajos resultados que obtienen los estudiantes de primaria y secundaria en las pruebas internas y externas en especial la de los países en desarrollo (Darling-Hammond, 2000; Takayma, 2012; Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico, 2005).Nuestra pregunta de investigación se encuentra precisamente anclada en este contexto, e indaga cuáles son las oportunidades de aprendizaje que tienen en su formación inicial los licenciados en Matemáticas de la costa Caribe de Colombia visto desde la aplicación del TEDS-M. El TESD-M es un estudio Internacional sobre la Formación Inicial del Profesorado de Matemáticas, centrado en analizar en qué medida los maestros están preparados para enseñar matemáticas en educación primaria y secundaria obligatoria. Con este fin, se estudió la variación en la naturaleza y el impacto de los programas de formación docente dentro y entre los siguientes países participantes: Asia oriental (Taiwán y Singapur) sudeste asiático (Malasia, Filipinas y Tailandia). De la antigua Europa del Este, bloque liderado por la Unión Soviética, (Rusia, Georgia y Polonia) Los países occidentales (Alemania, Noruega, España y Suiza) países americanos (Chile y EE. UU) de África (Botswana). (Tatto et al, 2008). El instrumento TEDS-M consta de 4 partes: parte A (datos sociodemográficos); parte B (oportunidades para aprender); parte C (conocimiento matemático); y, parte D (creencias).

Esta comunicación hace referencia a la parte B oportunidades de aprendizaje (OTL, por su sigla en inglés) y de ellas se menciona que pueden considerarse desarrolladas intencionalmente por los responsables de la política educativa y las instituciones de formación docente (Stark y Lattuca 1997). Las especificaciones nacionales y del programa de OTL reflejan visiones particulares de lo que se supone que los maestros de primaria y secundaria deben saber antes de ingresar al aula. En todos los países de TEDS-M, con excepción de Tailandia y Malasia, la enseñanza de las matemáticas representa una parte importante de las responsabilidades de los maestros de primaria porque trabajan como profesores de clase y enseñan la mayoría de las materias, incluidas las matemáticas. En Tailandia y Malasia, los maestros de primaria de matemáticas están incluso capacitados como especialistas en asignaturas y Enseñar principalmente matemáticas (Blömeke y Kaiser 2014).

El estado actual de la investigación sobre OTL en la formación del profesorado debe considerarse poca, ya que solo existen datos crudos sobre los componentes de la formación docente, en muchos estudios, solo el tipo de titulo o el número de cursos tomados se utilizó para definir OTL (Cochran-Smith y Zeichner 2005). En los países TEDS-M las OTL revelan diferencias cuantitativas (por ejemplo, cobertura alta, media y baja de las matemáticas, temas de pedagogía) así como las diferencias cualitativas (por ejemplo, cobertura de matemáticas específicas, temas de pedagogía) con los contextos culturales, su filosofía educativa es una característica importante que da forma a OTL y, por lo tanto, indica entre países heterogeneidad, derivada de visiones nacionales compartidas sobre la enseñanza que difieren entre países. (Blömeke y Kaiser 2014).

TEDS-M descubrió que OTL para las matemáticas, la pedagogía de las matemáticas y la pedagogía general dependía del nivel de grado y del plan de estudios que se esperaba que los futuros maestros enseñaran. Por ejemplo, programas para futuros docentes de primaria dieron más cobertura que los programas para docentes de secundaria básica a los conceptos básicos de números, medición y geometría y menor cobertura de funciones, probabilidad y estadística, cálculo y estructura. Los programas diseñados para preparar a los maestros para que enseñen los grados más altos tendieron a proporcionar, en promedio, más oportunidades para aprender matemáticas que aquellos programas que prepararon a los maestros para los grados más bajos. (Tatto et al, 2008).

Los hallazgos de este estudio reflejaron así lo que parece ser una norma cultural en los países participantes, que los profesores que se espera que enseñen en primaria y especialmente en los grados inferiores necesitan poco contenido matemático más allá de lo incluido en el plan de estudios de la escuela. El patrón entre los futuros docentes secundarios generalmente se caracteriza por una mayor y más profunda cobertura del contenido de las matemáticas; sin embargo, hubo una mayor variabilidad en OTL entre los futuros profesores que se prepararon para la escuela básica secundaria que entre aquellos que estaban preparados para enseñar 11° y superiores (Tatto et al, 2008). Los países con programas que ofrecen las oportunidades más completas para aprender matemáticas tuvieron puntajes más altos en las pruebas de conocimiento TEDS-M por ejemplo: Los docentes de nivel primario y secundario en países de alto rendimiento como China Taipei, Singapur y la Federación Rusa tuvieron significativamente más oportunidades que sus contrapartes primarias y secundarias en los otros países participantes para aprender matemáticas a nivel universitario y escolar (Tatto et al, 2008).

Los hallazgos de TEDS-M dieron una oportunidad para examinar cómo distintos enfoques se desarrollan en la práctica. Si se necesita relativamente poco conocimiento del contenido para los grados inferiores, entonces se puede justificar un menor énfasis en la preparación de las matemáticas y la no especialización. La pregunta clave es si los docentes preparados de esta manera pueden enseñar matemáticas con la misma eficacia que los docentes con un conocimiento más extenso y profundo, como el demostrado por los docentes especializados (Tatto et al, 2008).

Al tener en cuenta lo anterior, es necesario estudios como el nuestro que se interesen por conocer las oportunidades de aprendizaje que tienen los futuros profesores de la costa Caribe de Colombia en el área de matemática ya que varios investigaciones indican que el contenido de las matemáticas y el conocimiento de la pedagogía que los maestros aprenden frecuentemente no es el conocimiento más útil para enseñar matemáticas (Ball & Bass, 2000; Graham, Portnoy y Grundmeier, 2002; Hill, Sleep, Lewis, & Ball, 2007) otros estudios (Even & Ball, 2009; Mullis et al., 2008) muestran que el conocimiento matemático de los estudiantes de primaria y secundaria es débil en muchos países, un resultado que puede ser, en parte, producto de la formación que reciben de sus profesores . También es relevante la afirmación de que las reformas educativas que afectan directamente a la preparación matemática de los docentes y el plan de estudios que se espera que impartan suelen estar motivadas por mandatos implementados con poca o ninguna base empírica que respalde su eficacia (Tatto, 2007). Estos cambios han llevado, en algunos casos, a sistemas incoherentes de formación del profesorado y a una creciente incertidumbre sobre lo que los profesores de matemáticas deben saber y sobre cómo la formación docente puede ayudarlos a adquirir dicho conocimiento (Tatto, Lerner y Novotná, 2009).

Metodologia

Atendiendo a las características de nuestra investigación, la muestra se constituye de 214 sujetos, 100 hombres y 114 mujeres, que se encontraban cursando el último año de sus estudios en programas de licenciatura (pregrado universitario) en matemáticas o en educación con énfasis en matemáticas, en las cuatro instituciones de Educación Superior, ubicadas en la costa Caribe en los departamentos de Barranquilla, Sincelejo, Magdalena y César donde se impartían los programas mencionados. El instrumento usado, como ya se ha descrito anteriormente, es el TEDS-M, que consta de 4 partes: parte A (datos sociodemográficos); parte B (oportunidades para aprender); parte C (conocimiento matemático); y, parte D (creencias).

El TEDS-M se usó desde la óptica de OTL para explorar qué matemáticas, pedagogía matemática, pedagogía general y áreas relacionadas habían estudiado los futuros docentes. Así, las respuestas a los ítems en cada una de estas áreas se combinaron para formar siete índices (OTL) que se enuncian a continuación:

1. Matemáticas de nivel terciario;
2. Matemáticas a nivel escolar;
3. Pedagogía de la educación matemática;
4. Pedagogía general;
5. Enseñar a estudiantes diversos;
6. Aprendizaje a través de experiencias escolares; y
7. Coherencia de su programa de formación docente.

De los siete índices, los cuatro primeros se relacionan con el contenido académico de los programas de formación docente en matemáticas. En cada ítem, se les pedía a los estudiantes que indicaran si alguna vez habían estudiado temas concretos, ya sea en su programa actual o anterior. Los otros tres índices se relacionaban con áreas que no son directamente contenido académico; por ejemplo, preguntaban la frecuencia con la que algunos estudiantes experimentaron actividades en sus respectivos programas, a aprender a enseñar a diversos estudiantes y aprender a través de experiencias basadas en la escuela.

El modelo de medición utilizado para estas escalas fue el modelo de Rasch estándar (1980), que permitió crear una medida que reflejaba oportunidades de aprender en una escala de intervalos. La media de cada una de estas escalas se estableció en 10. Un promedio superior a 10 indica que los estudiantes tuvieron una oportunidad superior a la media de aprender los temas incluidos en una escala determinada, mientras que un promedio inferior a 10 significa que los estudiantes tenían menos oportunidad promedio de hacerlo.

Resultados oportunidad para aprender matemáticas de nivel terciario

Los elementos de matemáticas de nivel terciario o de Educación superior OTL exploraron si los futuros docentes habían estudiado temas de cuatro áreas de matemáticas de nivel terciario:

1. Geometría; 1. Geometría, que incluye ítems sobre los fundamentos de la geometría axiomática, analítica y de coordenadas, geometría no euclidiana y la geometría diferencial;

2. Estructuras discretas y lógica; con ítems sobre álgebra lineal y abstracta, teoría de conjuntos, teoría de números, matemáticas discretas y lógica matemática.
3. Continuidad y funciones; y con ítems sobre cálculo inicial, multivariante, avanzado y ecuaciones diferenciales; y,
4. Probabilidad y estadística.

En las tablas se puede observar que la primera columna hace referencia al puntaje obtenido en una escala de 1 al 10. donde la media de cada una de estas escalas se estableció en 10. Un promedio superior a 10 indica que los estudiantes tuvieron una oportunidad superior a la media de aprender los temas incluidos en una escala determinada, mientras que un promedio inferior a 10 significa que los estudiantes tenían menos oportunidad promedio de hacerlo. La frecuencia es el número de estudiantes que se ubicó en esa escala. Por ejemplo, para el caso de los temas de geometría los datos válidos son 209 y de ellos 73 estudiantes se ubican 8,93, otros 73 estudiantes en 9,95 en la escala mencionada. Al ver el puntaje menor a 10 que es la media, se observa que el 73 + 73 conforman el 69.9% de los estudiantes que tuvieron menos oportunidad de aprender los temas de Geometría.

Tabla 1

Futuros docentes que estudiaron temas de Geometría

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	8,93	73	34,0	34,9	34,9
	9,95	73	34,0	34,9	69,9
	10,97	43	20,0	20,6	90,4
	11,98	19	8,8	9,1	99,5
	13,00	1	0,5	0,5	100,0
	Total	209	97,2	100,0	
Perdidos	Sistema	6	2,8		
Total		215	100,0		

Fuente: Teds_M aplicada en costa Caribe de Colombia 2018

Tabla 2

Futuros docentes que estudiaron temas de Estructuras Discretas y Lógica

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	8,36	26	12,1	12,3	12,3
	9,69	124	57,7	58,5	70,8
	11,01	49	22,8	23,1	93,9
	12,34	12	5,6	5,7	99,5

	13,66	1	0,5	0,5	100,0
	Total	212	98,6	100,0	
Perdidos	Sistema	3	1,4		
Total		215	100,0		

Fuente: Teds_M aplicada en costa Caribe de Colombia 2018

Tabla 3

Futuros docentes que estudiaron temas de Continuidad y Funciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	8,74	59	27,4	28,2	28,2
	10,15	119	55,3	56,9	85,2
	11,55	25	11,6	12,0	97,1
	12,95	6	2,8	2,9	100,0
	Total	209	97,2	100,0	
Perdidos	Sistema	6	2,8		
Total		215	100,0		

Fuente: Teds_M aplicada en costa Caribe de Colombia 2018

Tabla 4

Futuros docentes que estudiaron temas de Probabilidad y Estadística

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	9,46	157	73,0	74,4	74,4
	11,12	39	18,1	18,5	92,9
	12,77	15	7,0	7,1	100,0
	Total	211	98,1	100,0	
Perdidos	Sistema	4	1,9		
Total		215	100,0		

Fuente: Teds_M aplicada en costa Caribe de Colombia 2018

Conclusiones

Las oportunidades para aprender se muestran como una razón para que los programas de licenciaturas en matemáticas de las universidades que participaron en la investigación reflexionen a nivel curricular que están enseñando y acerca de la percepción de sus estudiantes sobre su utilidad. De los futuros licenciados que se le aplicó el TEDS_M sólo 30% en el caso de Geometría y 27 % en el caso de estadística dice haberlo estudiado. Estos contenidos están relacionados con la enseñanza en la escuela, como señalan, por ejemplo, por organizaciones profesionales como el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM 2000), por educadores de matemáticas como Niss (1999) o por legisladores como The Standing Conference of the Ministers of Educación y Asuntos Culturales de los Länder en la República Federal de Alemania (KMK 2005). Lo anterior se supone un tema importante ya que la mayoría de los egresados ejercen su profesión los primeros años en las escuelas.

En el caso de estructura discreta y lógica sólo un 29% de los estudiantes contestó si haberlo estudiado durante su programa de formación donde se incluyen los ítems de aprender álgebra lineal, cálculo inicial, los fundamentos de la geometría y estadísticas, temas muy típicos de la primera secuencia introductoria de la universidad Matemáticas en cada área pero aún relacionadas con la enseñanza de las matemáticas en primaria escuelas y, por lo tanto, a menudo considerado como importante conocimiento de fondo.

Como es evidente a partir de los datos de TEDS-M, países como China Taipei y Singapur que obtienen buenos resultados en las pruebas internacionales de rendimiento estudiantil, como TIMSS, no solo aseguran la calidad de los participantes en la formación docente, sino que también cuentan con sistemas sólidos para revisar, evaluar, y acreditación de proveedores de educación docente. También cuentan con mecanismos sólidos para garantizar que los graduados cumplan con altos estándares de desempeño antes de obtener la certificación y el ingreso completo a la profesión (Tatto et al, 2008).

Bibliografía y referencias

Blömeke, S., Suhl, U., & Kaiser, G. (2011). Teacher education effectiveness: Quality and equity of future primary teachers' mathematics and mathematics pedagogical content knowledge. *Journal of Teacher Education*, 62(2), 154–171. doi: 10.1177/0022487110386798

Blömeke, S., Suhl, U., Kaiser, G., & Döhrmann, M. (2012). Family background, entry selectivity and opportunities to learn: What matters in primary teacher education? An international comparison of fifteen countries. *Teaching and Teacher Education*, 28, 44–55. doi: 10.1016/j.tate.2011.08.006

Cochran-Smith, M. & Zeichner, K. M. (Eds.) (2005). *Studying teacher education. The report of the AERA Panel on research and teacher education*. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioural sciences*. (2nd ed.). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Cronbach, L. J. (1976). *Research on classrooms and schools: Formulation of questions, design, and analysis*. Stanford: Stanford University.

König, J., Blömeke, S., Paine, L., Schmidt, W. H., & Hsieh, F.-J. (2011). General pedagogical knowledge of future middle school teachers: On the complex ecology of teacher education in the United States, Germany, and Taiwan. *Journal of Teacher Education*, 62(2), 188-201. doi: 10.1177/0022487110388664

McDonnell, L. M. (1995). Opportunity to learn as a research concept and a policy instrument. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 17(3), 305–322. doi: 10.3102/01623737017003305

NCATE (2001). *NCATE's ten-year progress report—Accrediting body changing the status quo in teacher preparation: Many states adopt profession's standards*. Washington: NCATE.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 1-24. doi: 10.1023/A:1003715913784

Schmidt, W. H., Houang, R. T., Cogan, L., Blömeke, S., Tatto, M. T., Hsieh, F. J., & Paine, L. (2008). Opportunity to learn in the preparation of mathematics teachers: its structure and how it varies across six countries. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 40(5), 735–747. doi: 10.1007/s11858-008-0115-y

Schmidt, W. H., Blömeke, S., & Tatto, M. T. (2011). *Teacher education matters. A study of the mathematics teacher preparation from six countries*. New York: Teacher College Press.

Stark, J., & Lattuca, L. R. (1997). *Shaping the college curriculum: academic plans in action.* Boston: Allyn & Bacon.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework.* East Lansing: Michigan State University.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Rodriguez, M., Bankov, K., Reckase, M., et al. (2012). The Mathematics Teacher Education and Development Study (TEDS-M). Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics: First findings. Amsterdam: IEA.

Formación en el Pensamiento Computacional a través de juegos de mesa

Jaime Andrés **Carmona-Mesa**
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
jandres.carmona@udea.edu.co
Mónica Eliana **Cardona** Zapata
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
meliana.cardona@udea.edu.co

Resumen

La literatura reporta la necesidad de formar profesores de las diferentes áreas en el Pensamiento Computacional a través de actividades sin ordenador, con el propósito de lograr conexiones profundas entre la naturaleza de este y la enseñanza en el área. Por lo tanto, en el presente estudio analiza las comprensiones de futuros profesores de matemáticas sobre las principales características del pensamiento computacional (descomposición, reconocimiento de patrones, abstracción, generalización de patrones y diseño de algoritmos), por medio de una experiencia con el juego CLUE. En este estudio se utilizó el análisis de contenido para estudiar las comprensiones e interpretaciones de 11 futuros profesores de matemáticas que participaron en un grupo de discusión. Se concluye que, si bien los futuros profesores de matemáticas logran comprender los procesos de descomposición, reconocimiento y generalización de patrones, es necesario ampliar en experiencias que les permita alcanzar los procesos de abstracción y diseño de algoritmos.

Palabras clave: formación de profesores, Educación Matemática, actividades sin ordenador, CLUE.

Introducción

El término Pensamiento Computacional (en adelante PC) tuvo un amplio uso durante la década de 1980 y refería a las habilidades que las personas en áreas de informáticas adquieren a través de su trabajo en el diseño de programas y *software* (Khine, 2018). Actualmente, el término del PC es ampliado a la formulación de problemas cuya solución involucra descomposición, reconocimiento de patrones, representación, planificación y monitoreo, abstracción, automatización, algoritmos y análisis (Wing, 2006; 2008). En este sentido, el PC supone un conjunto de habilidades esenciales para la vida y una forma particular para afrontar problemas científicos y tecnológicos (Zapata-Ros, 2015).

En el marco de la Educación Matemática, el PC evidencia valiosos aportes en los procesos de aprendizaje. Al respecto, Weintrop *et al.* (2016) abogan por incorporar el PC en las clases de matemáticas pues existe una relación recíproca: se usa el cálculo para enriquecer el aprendizaje de las matemáticas y las ciencias, y se aplican contextos matemáticos y científicos para enriquecer el aprendizaje computacional. En esta misma línea, diSessa (2018), English (2018), Gadanidis, Clements y Yiu (2018) y Pei, Weintrop y Wilensky (2018) exponen evidencia que les permite argumentar los cambios fundamentales del aprendizaje de las matemáticas al incluir el PC en el proceso educativo.

En consecuencia, la formación de profesores para la integración del PC en sus clases se constituye actualmente como un objeto de estudio que registra escasas investigaciones (Angeli y Jaipal-Jamani, 2018). Al respecto, Carmona-Mesa, Morales y Villa-Ochoa (2017) realizaron un estudio en la formación inicial de profesores de matemáticas para la integración del PC en sus clases; estos autores informan que el PC favoreció el diseño curricular de ambientes que integran tecnologías de manera eficiente, consiente e interdisciplinar para resolver problemas del contexto.

Para el caso de Medellín-Colombia, donde se desarrolló esta investigación, se registran políticas regionales que tienen como objetivo transformar las prácticas educativas al incluir profesores y estudiantes en proyectos que integran el PC a partir de la programación y robótica (Ruta N, 2015). Sin embargo, a nivel nacional no se han desarrollado investigaciones que brinden evidencia empírica para orientar dichos proyectos. Incluso, en las nuevas trasformaciones curriculares de los programas para formar profesores, no son claras las estrategias para lograr una formación en la integración de tecnología en los procesos educativos.

Esta situación se corresponde con lo planteado por Sands, Yadav y Good (2018) y Angeli y Jaipal-Jamani (2018), quienes sostienen que a pesar de la necesidad de formar frutos profesores para la integración del PC en sus clases, las Facultades de Educación carecen del conocimiento y de estrategias para hacerlo. Por lo tanto, es necesario desarrollar estudios que brinden evidencia empírica de estrategias que permitan formar futuros profesores en la integración del PC en sus clases. En particular, el presente estudio se propone atender esta problemática centrando el análisis en la formación inicial de profesores de matemáticas en una Universidad de la ciudad de Medellín.

Aspectos teóricos

La formación inicial de profesores para la integración del PC en sus clases, a pesar de su escasa investigación (Angeli y Jaipal-Jamani, 2018), se registra en la literatura que generalmente los futuros profesores no están familiarizados con la PC y tienen dificultades para encontrar conexiones entre este y el área que enseñan (Shute, Sun, y Asbell-Clarke, 2017). Hsu, Chang y Hung (2018) realizaron un meta-análisis de las investigaciones publicadas en revistas académicas entre el 2006 y 2017, este estudio les permitió concluir que los futuros profesores no han identificado claramente cómo enseñar el PC y que la mayoría lo hace a través de lenguajes de programación.

Esta evidencia es corroborada por la investigación de Sands *et al.* (2018), quienes concluyen que muchos profesores tienen muy poco conocimiento acerca de cuáles son las habilidades a desarrollar en el PC y desconocen cómo estas habilidades pueden implementarse en sus clases. Estos mismos autores indican que para lograr una formación exitosa de profesores en la integración del PC, es necesario implementar programas que ayuden desarrollar una comprensión profunda de lo que significa pensar computacionalmente. Al respecto, Kim y Kim

(2018) y Yadav *et al.*, (2016) sostienen que para lograr este objetivo es necesario incluir en la formación inicial de profesores cursos específicos en el PC. Además, la literatura reporta como principales enfoques utilizados en la formación inicial de profesores orientada en: actividades sin ordenador, programación a través de bloques, programación tangible, creación juegos digitales a través de programación, y robótica educativa (Angeli y Jaipal-Jamani, 2018).

De acuerdo a lo anterior, Kale *et al*. (2018), Sands *et al.* (2018) y Shute, Sun y Asbell-Clarke (2017) consideran como componente clave para ayudar a los profesores a conectar el PC con sus prácticas de enseñanza, ayudarlos a reconocer la naturaleza de este, la resolución de problemas de forma lógica (actividades sin ordenador), no simplemente a través de un lenguaje de programación. En ese sentido, Angeli *et al.* (2016) desarrollaron un curso destinado a formar futuros profesores en la integración del PC, con un enfoque en la solución de problemas del mundo real de forma lógica; estos autores informan que el tránsito de esta estrategia a la formulación de algoritmos en forma narrativa es una habilidad difícil de desarrollar para los profesores en formación inicial.

Lo presentado previamente, pone en evidencia la necesidad de ampliar en estrategias para la formación inicial de profesores en el PC, a través de la resolución de problemas de forma lógica (actividades sin ordenador). Por lo tanto, el presente estudio tuvo como finalidad contribuir en la formación inicial de profesores de matemáticas para la integración del PC por medio de juegos de mesa. Los juegos de mesa posibilitan la curiosidad, la experimentación y la investigación que llevan al aprendizaje, ayuda al desarrollo del pensamiento abstracto y el desarrollo de trabajo en equipo (Aristizábal, Colorado y Gutiérrez, 2016).

Autores como Barros, Rodríguez y Barros (2015) plantean que en los juegos se interiorizan y transfieren los conocimientos para volverlos significativos, porque permite experimentar, probar, investigar, ser protagonista, crear y recrear. En el mercado existen diferentes juegos de mesa para trabajar el PC (p. ej. C-jump y Robot Turtles) y se han desarrollado estudios que demuestran el potencial de estos en el desarrollo del pensamiento computacional (Riveros y Salguero, 2018). Sin embargo, los juegos de mesa existentes reflejan más un enfoque en programación tangible que propiamente actividades desconectas, que es el objetivo en esta investigación.

Aspectos metodológicos

En este apartado metodológico se describe el diseño de la intervención realizada al inicio del segundo semestre del 2018 y se presentan las decisiones para el registro de la información y posterior análisis. La intervención se desarrolló en un curso específico obligatorio y denominado Tecnologías en Educación Matemática, este buscó fortalecer la formación inicial de profesores en matemáticas a través de una adaptación temática y metodológica al PC. Esta adaptación temática al PC propone nuevas formas de abordar los problemas con la ayuda de los ordenadores o sin ella (Wing, 2006; 2011).

En particular, el primer eje temático, refiere a una introducción al PC y es donde realizó el presente estudio. A 11 futuros profesores (se usarán seudónimos) se les solicitó con ocho días de anticipación leer el documento “El pensamiento computacional y las nuevas ecologías del aprendizaje Computacional” (Valverde, Fernández y Garrido, 2015) para ser discutido en la siguiente sesión de clase de 3 horas. Esta sesión se dividió en dos momentos, se inició con el juego de mesa CLUE (Figura 1) y luego una discusión grupal de lo planteado en el documento a través de la experiencia desarrollada con el juego.

CLUE es un juego de mesa, sobre de detectives y misterio. El juego tiene tres tipos de cartas diferentes (sospechoso, habitación y arma); al iniciar se elige una de cada tipo y las tres detallan un asesinato; las demás cartas son repartidas entre los jugadores. El objetivo del juego es deducir dichos detalles por medio de pistas que se develan a medida que se avanza en este. En esencia, el participante que desarrolle su juego de la manera más sistemática y lógica es quien logra identificar rápidamente los detalles del asesinato. Por lo tanto, el propósito de esta intervención es generar un contexto rico para la resolución de problemas de forma lógica (Curzon y McOwan, 2018), que permita a los futuros profesores la creación de sentidos y significados del PC.

De acuerdo con lo anterior, el registro de los datos debía hacerse a través de las interacciones de los futuros profesores, en donde se logará describir y comprender las interpretaciones personales y colectivas. Arboleda (2008) y López (2010) reconocen el *grupo de discusión* como un método de investigación dialógico, basado en la producción de discursos, que consiste en reunir un grupo personas y suscitar entre ellas una discusión sobre un tema de interés y dirigida por un Moderador.

Figura 1: Juego CLUE, tomada de https://goo.gl/ky4BQg

En consecuencia, este estudio se desarrolló a partir de un grupo de discusión. El *grupo de discusión* fue moderado por el investigador principal de este estudio, quien orientó como un proceso de interacción que buscaba poner en juego las "representaciones, opiniones, actitudes, comportamientos, sistemas simbólicos, relaciones de poder y negociaciones mediante las cuales se llega a cierto consenso o a polarización en las posturas y concepciones de los participantes" (Cervantes, 2002, p. 77). Las interacciones entre los participantes fueron grabadas en video y luego trascritas, se desarrolló un análisis de contenido (Noguero, 2002) en los datos registrados a partir de los procesos que implica el PC: **descomposición, reconocimiento de patrones, abstracción, generalización de patrones** y **diseño de algoritmos** (Kemp, 2014).

Resultados y discusión

Luego de terminar el primer momento del encuentro (actividad con CLUE), se pasa a desarrollar la discusión grupal del documento y contextualizando en la experiencia del CLUE. Por lo tanto, el Moderador inicia preguntando ¿cómo se entiende el pensamiento computacional y cómo se entiende a partir del ejercicio que realizado previamente? Al respecto, Camila menciona que:

> *"(…) con el juego [CLUE] se veía un pensamiento computacional cuando uno empieza a identificar la dinámica del juego, entonces qué tiene que hacer para ganar (…); los mismos compañeros cuando están jugando están dando pistas sobre lo que está pasando entonces una con el cuadrito [Figura 2] que tiene empieza a descartar, va elaborando una estrategia para resolver*

el problema que en ese momento del juego es ganar. Yo creo que ahí se vería el pensamiento computacional".

La intervención de Camila pone en evidencia la **descomposición** del problema (necesidad de ganar el juego), a través de varios componentes que se pueden abordar de forma individual (Kemp, 2014). El primero son las pistas que dan los demás participantes, la dinámica del juego implica que al llegar con la ficha a un lugar se debe lanzar una hipótesis de quién es el sospechoso de ser el asesino y el arma utilizada, en caso de que alguno de los demás participantes tenga algunas de las tres cartas (se incluye él), debe mostrarla únicamente al jugador que lanzo la hipótesis. Por lo tanto, este es uno de los componentes claves de juego para poder ganar y Camila lo resaltó en su intervención. Otro aspecto destacado por Camila es "el cuadrito", el juego tiene como material complementario para cada participante un cuadro que incluye todos los tipos de cartas (sospechoso, habitación y arma) y se incluye con el objetivo de ayudar en registro de las cartas conocidas (pistas).

Posterior a la intervención de Camila se queda el grupo en silencio, a lo que el Moderador pregunta ¿alguien desea complementar la respuesta? y Tatiana menciona:

"el pensamiento computacional implica la descomposición, el reconocimiento de patrones, la abstracción, la generalización de patrones y el diseño de algoritmo. La descomposición yo creo que se ve más cuando generamos una hipótesis, entonces nosotros creíamos que era tal persona entonces preguntábamos por ella, entonces ya como que descartábamos ese culpable; cuando estaba en reconocimiento de patrones por ejemplo que mi compañera dijo tres [cartas] y a la otra [compañera], el que seguía volvió y dijo otros tres[cartas], entonces yo creo que no, este y este lo repitieron lo mostraron nuevamente dos veces entonces ya puedo ir descartando ese [trio de cartas], tampoco este, este si es".

Tatiana reafirma la intervención de Camila en relación con la **descomposición** y amplía un aspecto clave del PC, **reconocimiento de patrones** (Kemp, 2014). Ella lo asocia con el ejercicio de juego de estar lanzando hipótesis en relación con el lugar, el sospechoso y el arma utilizada en el asesinato; en la medida que se van identificando varias pistas, Tatiana cruza estas fuentes de información y descarta las que coinciden. Es decir, si un participante *x* lanza la hipótesis que el arma utilizada fue la daga y en el baño y un participante *z* muestra una, luego, un participante *w* indica que el arma utilizada fue la daga y en la cocina, y el mismo participante *z* muestra otra carta, se asume que el participante *z* tiene la carta daga.

Al finalizar la intervención, Tatiana afirma "*la abstracción no, no logre verla así como tal en el juego pero la generalización sí, después de que uno tiene pistas ya uno puede llegar a decir quién fue".* Al respecto, Kemp (2014) reconoce que la **abstracción** ayuda a usar el detalle absolutamente necesario para el funcionamiento del sistema. Posterior a la intervención de Tatiana los futuros profesores quedan en silencio por algunos minutos, por lo tanto el Moderador toma la palabra y describe una situación donde se evidencia la abstracción:

"cuando Tatiana uso intriga [otro tipo de carta], y esa carta intriga decía que yo [Tatiana] podía preguntarle a todos por una carta, podría ser lugar, armas o sujetos, ella eligió arma, y ella preguntó ¿Quién tiene el candelabro? La pregunta era para ellos, para los demás, ella no tenía que responder, ella lo podría tener, sí, pero ella no tenía que responder y esperaba a los demás entonces qué pasó ahí, (...) llego un punto en donde todos empezaron, candelabro, nadie, nadie, candelabro no hay, entonces empezaron a contar cuantas armas hay ,hay seis armas pero nosotros no tenemos el candelabro entonces el candelabro puede estar ahí [entre las cartas elegidas al azar antes de iniciar el juego], sí, pero no necesariamente tiene que estar ahí porque ella [Tatiana]

podía tener el candelabro, ella no lo tenía, pero podía tenerlo y los demás estaban en ese asunto".

El episodio referido por el Moderador plantea que la **abstracción** se identifica en el ejercicio cuando un jugador puede generar la confusión a partir de una carta que él tiene, pero quiere hacer parecer que es de las que se buscan para ganar el juego; es decir, que dicho participante comprende que esto es clave para ganar y lo usa para generar confusión en los demás. Posterior al episodio resaltado por el Moderador, pregunta por la generalización de patrones, a lo que José toma la palabra y menciona *"cuando usted preguntaba por tres cosas [sospechoso, habitación y arma], entonces si tres personas le mostraban, usted de una las descarta, yo creo que ahí se puede ver"*. La **generalización de patrones** permite definir conceptos en su forma más simple y reutilizar la definición para todas las instancias de ese concepto (Kemp, 2014), aspectos que corresponde con lo indicado por José. Luego, el Moderador pregunta ¿qué pueden mencionar del algoritmo? A lo cual todos quedaron en silencio por unos minutos.

Un algoritmo es un método preciso para resolver un problema dado, es una abstracción de un procedimiento paso a paso para tomar entrada y producir algún resultado deseado (Kemp, 2014; Wing, 2008). De acuerdo con Wing (2008) algunas caracteristicas como descomposición, reconocimiento y generalización de patrones son habilidades desarrolladas por áreas como la matemática; sin embargo, la abstracción (y por ende el algortimo) son caracteristicas más complejas y trascienden al contexto de la informática. Esto se corresponde con los momentos de silencio que se registran en la discusión al preguntar por ambos aspectos. Po lo tanto, el moderador le solicita a Natalia que comparta la estrategia que desarrolló para ganar el juego (fue la participante ganadora en el ejercicio).

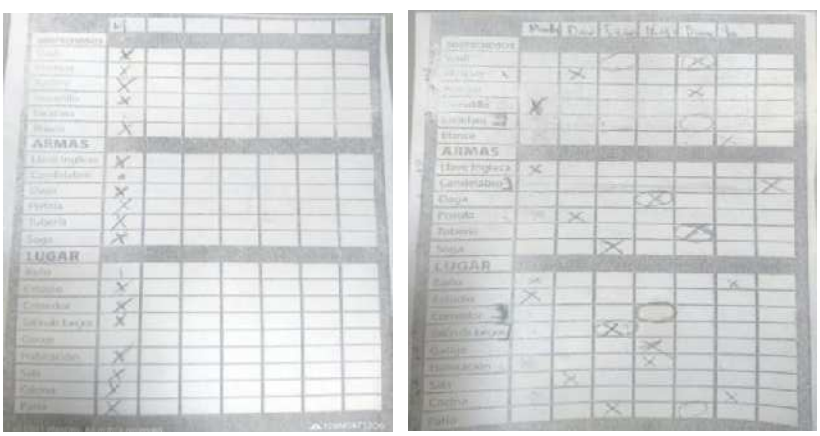


Figura 2: Tabla diligenciada por Camila (izquierda). Tabla diligenciada por Natalia (derecha).

En el desarrollo de la experiencia, Natalia construyó un algoritmo que le permitió ganar el juego rápidamente, la estrategia que siguió se divide en pasos sistemáticos y precisos (se corresponde con el proceso de **descomposición** de Camila). Ella para conocer qué cartas tienen y no tienen los demás participantes, le asignó una columna en la tabla a cada uno (Figura 2). Posterior a esto define: al plantear una hipótesis (toda hipótesis en el juego obliga indicar un lugar, sospechoso y arma) y ser mostradas las tres cartas en el juego significa que se deben descartar con una x (esto se corresponde con el proceso de **generalización** descrito por José). Luego, si muestran solo dos cartas aparece una incertidumbre de cuáles podrían ser, para lo cual definió encerrar en la casilla con un circulo y esperar a tener mayor información para descartarla con una x (coincide con el **reconocimiento de patrones** indicado por Tatiana).

El proceso desarrollado por Natalia da cuenta de las características resaltadas por los demás futuros profesores previamente, además los abstrae y asocia en un algoritmo por medio de una serie de pasos de entrada que la llevaron a ganar. En ese sentido, la experiencia vivida a través del juego CLUE se constituye como una herramienta importante para introducir el PC, que le permitió a los futuros profesores de matemáticas reconocer la naturaleza del pensamiento computacional en actividades sin ordenador (Kale *et al.*, 2018; Sands *et al.*, 2018; Shute, Sun y Asbell-Clarke, 2017).

Conclusiones

Los resultados de este estudio permiten concluir que la formación en el PC a través de experiencias sin ordenador, como el juego de mesa CLUE, posibilita la comprensión profunda de su naturaleza, su relación con el mundo real, las habilidades que permite desarrollar y la forma de implementarlo en el aula. Además, se evidencia que si bien los futuros profesores de matemáticas logran comprender los procesos de descomposición, reconocimiento y generalización de patrones, es necesario ampliar en experiencias que les permitan alcanzar los procesos de abstracción y diseño de algoritmos. Por lo tanto, se sugiere en futuras investigaciones la implementación de este tipo de recursos, acompañada de estrategias que favorezcan la sistematización de datos, la resolución de problemas, la codificación y organización de ideas; para luego trabajar de manera fluida en experiencias digitales como la programación por bloques o por líneas.

Referencias y bibliografía

Angeli, C., & Jaipal-Jamani, K. (2018). Preparing Pre-service Teachers to Promote Computational Thinking in School Classrooms. In *Computational Thinking in the STEM Disciplines* (pp. 127–150). Cham: Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-319-93566-9_7

Angeli, C., Voogt, J., Fluck, A., Webb, M., Cox, M., Malyn-Smith, J., & Zagami, J. (2016). A K-6 computational thinking curriculum framework: Implications for teacher knowledge. *Educational Technology and Society*, *19*(3), 47–57.

Aristizábal, J., Colorado, H., & Gutiérrez, H. (2016). El juego como una estrategia didáctica para desarrollar el pensamiento numérico en las cuatro operaciones básicas. *Sophia*, *12*(1), 117–127.

Barros, R., Rodríguez, L., & Barros, C. (2015). El juego del cuarenta, una opción para la enseñanza de las matemáticas y las ciencias sociales en Ecuador. *Universidad y Sociedad*, *7*(2), 137–144.

Carmona-Mesa, J. A., Morales, S., & Villa-Ochoa, J. A. (2017). *Pensamiento Computacional en la formación inicial de profesores de matemáticas*. Colombia: Universidad de Antioquia. doi:10.13140/RG.2.2.33696.07688

Cervantes, C. (2002). El grupo de discusión en el estudio de la cultura y la comunicación. Revisión de premisas y perspectivas. *Revista Mexicana de Sociología*, *64*(2), 71–88.

Curzon, P., & McOwan, P. W. (2018). Rätsel, Logik und Muster. In *Computational Thinking* (pp. 49–64). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. doi:10.1007/978-3-662-56774-6_4

Hsu, T.-C., Chang, S.-C., & Hung, Y.-T. (2018). How to learn and how to teach computational thinking: Suggestions based on a review of the literature. *Computers & Education*, *126*, 296–310. doi:10.1016/j.compedu.2018.07.004

Kale, U., Akcaoglu, M., Cullen, T., Goh, D., Devine, L., Calvert, N., & Grise, K. (2018). Computational What? Relating Computational Thinking to Teaching. *TechTrends*, 1–11. doi:10.1007/s11528-018-0290-9

Kemp, P. (2014). *Computing in the national curriculum A guide for secondary teachers Computing in the*. Newnorth Print, Ltd. Bedford.

Khine, M. S. (2018). Strategies for Developing Computational Thinking. In *Computational Thinking in the STEM Disciplines* (pp. 3–9). Cham: Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-319-93566-9_1

Kim, S., & Kim, H. Y. (2018). A Computational Thinking Curriculum and Teacher Professional Development in South Korea. In *Computational Thinking in the STEM Disciplines* (pp. 165–178). Cham: Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-319-93566-9_9

López, I. (2010). El grupo de discusión como estrategia metodológica de investigación: aplicación a un caso. *Edetania: Estudios y Propuestas Socio-Educativas*, *38*, 147–156.

Noguero, F. L. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *Revista de Educación*, *4*, 167–179.

Riveros, A., & Salguero, M. (2018). *Diseño de un Juego de Mesa como herramienta de apoyo para la enseñanza del pensamiento computacional a estudiantes de educación superior de la Universidad San Buenaventura de Cali (Trabajo de pregrado)*.

Sands, P., Yadav, A., & Good, J. (2018). Computational Thinking in K-12: In-service Teacher Perceptions of Computational Thinking. In *Computational Thinking in the STEM Disciplines* (pp. 151–164). Cham: Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-319-93566-9_8

Shute, V. J., Sun, C., & Asbell-Clarke, J. (2017). Demystifying computational thinking. *Educational Research Review*, *22*, 142–158. doi:10.1016/j.edurev.2017.09.003

Valverde, J., Fernández, M., & Garrido, M. (2015). El pensamiento computacional y las nuevas ecologías del aprendizaje. *RED - Revista de Educación a Distancia*, *46*(15).

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33. doi:10.1145/1118178.1118215

Wing, J. M. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A:Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *366*, 3717–3725. doi:10.1098/rsta.2008.0118

Yadav, A., Hong, H., & Stephenson, C. (2016). Computational Thinking for All: Pedagogical Approaches to Embedding 21st Century Problem Solving in K-12 Classrooms. *TechTrends*, *60*(6), 565–568. doi:10.1007/s11528-016-0087-7

Zapata-Ros, M. (2015). Pensamiento computacional: Una nueva alfabetización digital. *RED. Revista de Educación a Distancia*, *46*(15).

Estudio de la parábola como lugar geométrico: una forma de ampliar el conocimiento especializado del profesor

Isabel **Torres** Céspedes.
Universidad de Lima
Perú
iztorres@ulima.edu.pe

Elizabeth **Advíncula** Clemente
Universidad de Lima
Perú
eadvincu@ulima.edu.pe

José Carlos **León** Ríos
Universidad de Lima
Perú
Jleonr@ulima.edu.pe

Ángel Homero **Flores** Samaniego.
Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM.
México
ahfs@unam.mx

Resumen

En las escuelas de nuestros países, observamos que los docentes de matemática de educación secundaria tienen dificultades al resolver problemas relacionados con la parábola y su enseñanza está centrada en el tratamiento algebraico de dicha cónica, dejando de lado su condición geométrica. El objetivo de este taller es explorar con material concreto y con el GeoGebra diversas situaciones que afiancen el conocimiento de la parábola como el lugar geométrico y sus propiedades. En este trabajo tomamos en cuenta el enfoque del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTKS) y seguimos una metodología cualitativa que toma en cuenta aspectos de la ingeniería didáctica. Finalmente, esperamos promover la reflexión en los docentes para trabajar los distintos objetos matemáticos con recursos que faciliten la comprensión del objeto matemático haciendo conjeturas y validándolas.

Palabras clave: Conocimiento especializado del profesor, parábola, lugar geométrico, material concreto, GeoGebra.

Introducción

Estamos de acuerdo con Flores y Gaita, C. (2014) cuando indican que el modelo conductista predomina en los planes de formación de profesores de matemática de educación del nivel primaria y secundaria en el Perú. Los actuales escenarios de aprendizaje muestran que existen diversos recursos y estrategias que pueden ser utilizados como apoyo para la enseñanza de la matemática, específicamente la parábola. Nuestra propuesta didáctica está centrada en el aprendizaje de la parábola y dirigida a profesores de educación secundaria. Hacemos uso de material concreto y de tecnología digital, con el objetivo de explorar la condición geométrica de la parábola y algunas de sus propiedades. Las secuencias didácticas ofrecidas en el taller incluyeron actividades con material concreto como papel, hilo, así como el uso de recursos digitales en el aula con el aplicativo Geogebra, con la finalidad de crear ambientes de aprendizajes dinámicos y motivadores que propicien de manera más efectiva el aprendizaje del estudiante. Las actividades propuestas ofrecen diversas situaciones que permitan reflexionar sobre el objeto matemático parábola.

Marco teórico y metodológico

La realización del presente taller tiene como marco teórico el modelo MTSK (por sus siglas en inglés: Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática), propuesto por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013).

Este modelo se centra en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas respecto de la enseñanza del contenido, en nuestro caso de la parábola. Tiene dos grandes dominios de conocimiento: conocimiento del contenido matemático (MK, por sus siglas en inglés) y conocimiento didáctico del contenido (PCK, por sus siglas en inglés). En este taller, nos centramos en el conocimiento matemático (MK) que tiene como prioridad indagar los conocimientos matemáticos de los profesores de educación secundaria en relación con el contenido relativo a la parábola, pues observamos que los docentes en ejercicio presentan muchas deficiencias conceptuales en relación a este contenido, lo que pudimos confirmar cuando analizamos los resultados obtenidos en una evaluación diagnostica que aplicamos a un grupo de docentes de educación secundaria de nuestros países.

El conocimiento matemático (MK) está compuesto por tres subdominios de conocimiento: conocimiento de los temas (KoT, por sus siglas en inglés), conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM, por sus siglas en inglés) y conocimiento de la práctica matemática (KPM, por sus siglas en inglés).

En la tabla 1, se observa la descripción de cada subdominio del conocimiento matemático (MK).

Tabla 1

Descripción de los subdominios del conocimiento matemático (MK).

MK (Conocimiento matemático)		
KoT (Conocimiento del contenido	KSM (Conocimiento de la	KPM (Conocimiento de la práctica

matemático)	estructura matemática)	matemática)
Conocimiento de conceptos y procedimientos matemáticos con sus correspondientes fundamentos. Se concreta en saber matemáticas, conocer definiciones, propiedades, procedimientos, ejemplos específicos, significados y aspectos fenomenológicos asociados al contenido.	Considera la idea de conexión y complejidad del contenido matemático. Las conexiones abarcan las interconceptuales (comprenden vínculos entre ideas o conceptos matemáticos distintos) y temporales (enlazan los conocimientos previos y posteriores con el contenido de enseñanza).	Implica el modo de proceder en matemáticas. Incluye el conocimiento de las formas de conocer y crear o producir en matemáticas, el razonamiento y la prueba, saber definir y usar definiciones, elegir representaciones, argumentar, generalizar o explorar, aspectos de la comunicación matemática.

Fuente: elaboración propia. 2018.

Este taller forma parte de un proyecto de investigación en proceso y está dirigido a docentes de nivel secundario (quienes atienden a estudiantes entre 13 y 17 años) e investigadores interesados en el tema que deseen profundizar en la problemática o aportar con sus observaciones al mejor desarrollo de la investigación.

En el subdominio KoT hemos considerado tres categorías: los contenidos, la fenomenología y los sistemas de representación de la parábola, cada uno de ellos con sus respectivos indicadores. Consideramos que el profesor de matemática debe tener conocimientos de contenidos básicos como conceptos, reglas, teoremas y sus significados en relación con el contenido, imágenes, representaciones de los contenidos y procedimientos, incluimos el conocimiento de propiedades correctas y otras incorrectas de la parábola cuando manejamos los sistemas de representación.

En la tabla 2, damos cuenta de dichas características. Nuestras actividades engloban los indicadores de cada categoría como el concepto de la condición geométrica de la parábola, en la fenomenología la representación de situaciones de distintos significados de la parábola, en los sistemas de representación la omisión del sistema de ejes coordenados la invariabilidad de las propiedades de la parábola-

Tabla 2

Categorías e indicadores del subdominio KoT.

Categorías	**Indicadores**
Contenidos	Conocimiento del concepto de parábola como lugar geométrico.
	Conocimiento de la parábola como la gráfica de una función cuadrática.
Fenomenología	Conocimiento de distintos significados del concepto parábola.
Sistemas de representación de la parábola	Representación de la condición geométrica de la parábola omitiendo el sistema de coordenadas cartesiano.

Fuente: elaboración propia. 2018.

En el subdominio KPM hemos considerado que el docente debe conocer la forma cómo se produce el conocimiento matemático y las reglas de sintaxis de la disciplina. Por ejemplo, demostrando que el único punto común entre una recta tangente a una parábola y dicha parábola es el punto de tangencia, y que dicho punto resulta de hacer la discriminante cero. Recurrimos al pensamiento deductivo e inductivo.

En la tabla 3, se muestran la categoría formas de validación y demostración, así como los indicadores relativos.

Tabla 3

Categorías e indicadores del subdominio KPM.

Categoría	**Indicador**
Formas de validación y demostración	Verificación de la condición geométrica de la parábola a partir de la construcción de dicha cónica.

Fuente: elaboración propia. 2018.

Asimismo, dado que nuestro estudio es de carácter cualitativo, nuestra metodología toma en cuenta aspectos de la ingeniería didáctica, la cual tiene como propósito analizar los procesos de construcción del aprendizaje a través secuencias de enseñanza. El diseño de esta investigación incluye las tres primeras fases de la ingeniería didáctica: el análisis preliminar en sus tres dimensiones, epistemológica, cognitiva y didáctica; la concepción y el análisis a priori para el diseño de las actividades del taller y la experimentación en el desarrollo de este.

Actividades sugeridas

En esta propuesta se plantean actividades y tareas relacionadas con la parábola, explorar su condición geométrica y sus principales propiedades. A continuación, se presentan algunas de las que desarrollaremos en el taller.

Actividad 1: Construcción de la parábola con doblado de papel

El objetivo de esta actividad es explorar el concepto de parábola como lugar geométrico, representar la condición geométrica de la parábola omitiendo el sistema de coordenadas cartesiano y determinar la ecuación de la parábola teniendo en cuenta las propiedades de sus elementos.

La actividad consiste en obtener una parábola doblando papel como se observa en la figura1. Luego se procede a los cuestionamientos para explicar por qué se forma dicha curva.

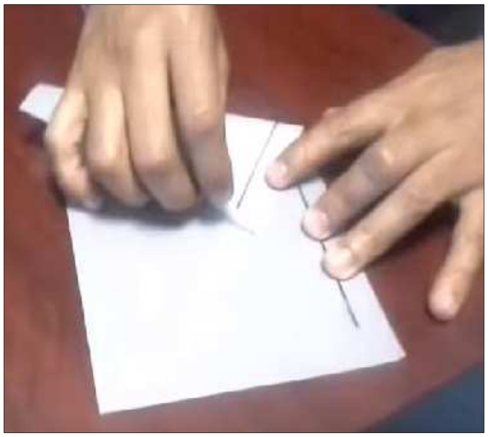


Figura 1. Construcción de la parábola con doblado de papel

Actividad 2: Construcción de la parábola con hilo y aguja

El objetivo de esta actividad es reconocer a la parábola como la gráfica de una función cuadrática y su representación geométrica en el sistema de coordenadas cartesiano; determinar la ecuación de la parábola teniendo en cuenta las propiedades de sus elementos; y, por último, determinar la ecuación ordinaria de la parábola y el reconocimiento de sus principales elementos.

La actividad consiste en obtener una parábola cruzando hilos según las posiciones previamente definidas y explicar por qué se obtiene dicha curva, como se observa en la figura 2.

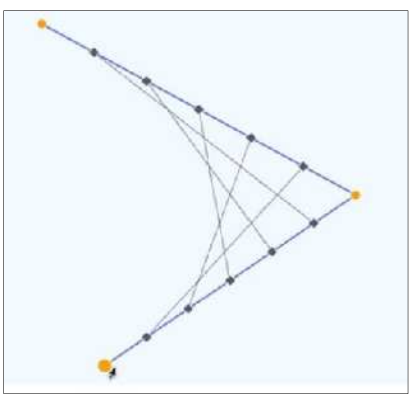


Figura 2. Construcción de la parábola con hilo y aguja.

Actividad 3. La parábola y el triángulo isósceles

Esta actividad hace uso del aplicativo Geogebr4a.El objetivo de esta actividad es construir una parábola haciendo uso de las propiedades de un triángulo isósceles y relacionarlas a la condición geométrica de la parábola, es decir la equidistancia que existe de un punto perteneciente a la parábola con la directriz y el foco.

En el desarrollo del taller, se requiere ocultar los ejes coordenados, la cuadrícula de la hoja y trazar en la vita gráfica un triángulo isósceles ABC.En la figura 3, se observa como el objeto triángulo isósceles usa sus propiedades elementales para la construcción de una parábola, incluso parábola de forma oblicua.

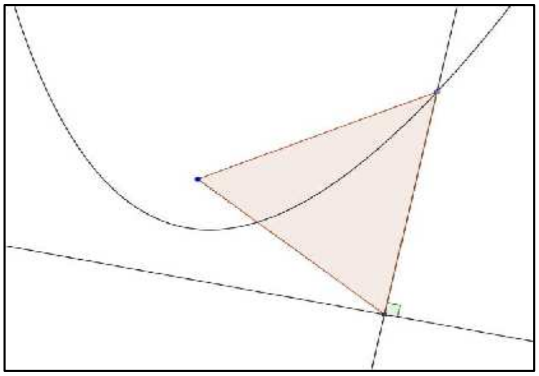


Figura 3. Construcción de una parábola a partir de un triángulo isósceles.

Actividad 4. Envolvente de una parábola

El objetivo de esta actividad es recrear en GeoGebra la construcción de una parábola doblando papel y mostrar que el trazo de una recta tangente a una parábola desde un punto exterior permite explicar la actividad del doblado de papel y además evidenciar un procedimiento para trazar una curva a partir de las intersecciones de rectas.

Antes de empezar la construcción es necesario ocultar los ejes coordenados y la cuadrícula en la hoja de trabajo que usaremos en GeoGebra. En la figura 4, mostramos el trabajo final de la envolvente de una parábola.

Luego, relacionar la actividad con una serie de preguntas ¿Cómo demuestra analíticamente que la recta $\mathcal{L}$ es tangente a la parábola?, ¿cuántas rectas tangentes a la parábola se puede trazar desde el punto P?, si el punto P está sobre el eje focal, ¿cuál es la posición de la recta que une los puntos de tangencia respecto a dicho eje?

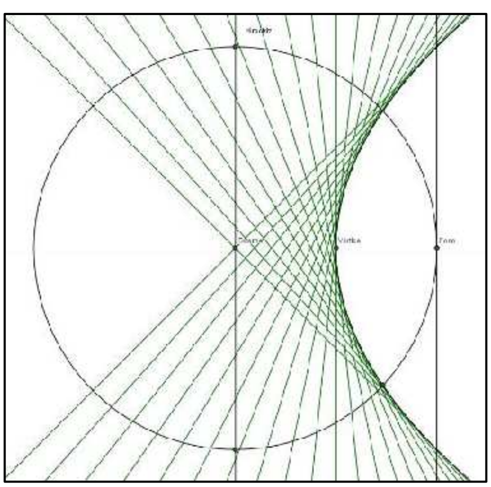


Figura 4. Construcción de una parábola por medio de rectas tangentes.

Consideraciones finales

Las actividades propuestas en este taller están diseñadas para reflexionar sobre la manera de fomentar el conocimiento del contenido (KoT) y el conocimiento de la práctica matemática (KPM) en el profesor. Nos hemos enfocado en la exploración de una determinada situación matemática, producir una conjetura y buscar la manera de validarla, es decir, la forma de crear y producir matemática a través del razonamiento y la prueba.

Con esto esperamos que se sienten las bases para una reflexión más profunda sobre el modelo teórico MTSK y la forma de abordar la parábola como lugar geométrico.

Referencias y bibliografía

Carrillo, J.; Climent, N.; Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Mathematics Teacher Specialized Knowledge. En: *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics education* (CERME 8) (pp. 2985-2994).~~,~~ Antalya, Turquía: ERME.

Flores, J. V. & Gaita, C. (2014). Situación actual de la Educación Matemática. en el Perú. *Revista de matemática, ensino e cultura*, *9*(15), 82-95. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/304677241_Situacion_actual_de_la_educacion_matematica_en_el_Peru

Programa de Estágio Supervisionado: uma real integração entre Universidade e Escola da Educação Básica

Barbara Corominas Valério
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo
Brasil
barbarav@ime.usp.br
Cláudia Cueva Candido[1]
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo
Brasil
cueva@ime.usp.br

Resumo

Este trabalho descreve a pesquisa realizada junto ao Programa de Estágio do Instituto de Matemática e Estatística da USP. Verifica-se a partir de análise de relatos que as ações desenvolvidas no programa promovem uma efetiva inserção dos futuros professores nas questões relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem da Educação Básica. A pesquisa, de caráter qualitativo, ocorreu nos últimos 10 anos envolvendo alunos de licenciatura em matemática e professores da Educação Básica da rede pública de ensino da Grande São Paulo. Relatamos também os principais resultados do projeto Ensino de Matemática Elementar do Observatório da Educação, financiado pela CAPES, realizado no ambiente do Programa durante os anos de 2013 e 2014, envolvendo também alunos do curso de pós-graduação. É possível concluir que as atividades desenvolvidas promovem uma formação inicial em que teoria e prática estão realmente integradas, propiciando ainda uma rica interação entre formação inicial e formação continuada.

Palavras chave: formação inicial, formação continuada, estágio supervisionado, pós-graduação em ensino de matemática.

Introdução

O Programa de Estágio Curricular Supervisionado foi criado no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, IME-USP, no início dos anos 2000, por ocasião de ampla reformulação do curso de Licenciatura em Matemática. Entre os objetivos de sua criação destaca-se o de promover, ainda na formação inicial de professores, a integração entre formação profissional e formação científica, em contraposição ao modelo vigente no século XX em que, após o Bacharelado em Matemática, o diploma de licenciado dependia apenas de complementação pedagógica.

[1] Este trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES (AUXPE - OBEDUC – 0988/2013).

Um dos fatores apontados para a separação entre teoria e prática na formação inicial de professores tem sido o distanciamento entre as Instituições de Ensino Superior e as escolas de Educação básica. Tal fato já era apontado por Schön em sua proposta de formação do profissional reflexivo

> (...) as escolas profissionais das universidades contemporâneas privilegiam o conhecimento sistemático. A racionalidade técnica, a epistemologia da prática predominante nas faculdades, ameaça a competência profissional, na forma de aplicação do conhecimento privilegiando a problemas instrumentais da prática. (2000, p.vii)

Implementado em 2009, o programa é composto pela disciplina "Projetos de Estágio", obrigatória para os alunos do curso de Licenciatura em Matemática, e pelo curso "Aprendendo com Projetos", de extensão universitária, oferecido a professores de Educação Básica da rede pública de ensino da Grande São Paulo. Nele são realizadas 100 das 400 horas de estágio que um aluno de Licenciatura da USP deve cumprir.

Anualmente o IME-USP faz convênios com escolas públicas a fim de, não somente garantir a realização dos estágios, mas também apoiar a continuidade de formação dos professores. As atividades conjuntas são desenvolvidas a partir de projetos de ensino elaborados por grupos formados por alunos do curso de Licenciatura _ os estagiários_ e professores da rede pública _seus supervisores nas escolas_ sob a orientação de um docente do Departamento de Matemática e com apoio de educadores vinculados ao programa.

O trabalho desenvolvido de modo simultâneo nos cursos de Licenciatura e de extensão promove a articulação entre formação inicial e continuada de professores. Favorece a reflexão da prática profissional por parte dos professores regentes nas escolas parceiras e o real contato dos licenciandos com as questões específicas da futura profissão.

A presença do professor supervisor em todas as etapas do processo é fundamental para o sucesso das atividades. Por essa razão, os professores supervisores têm sido convidados a se matricularem no curso de extensão após mostrarem interesse pelo projeto ao lecionarem em escolas que já fizeram parceria com o programa ou ao participarem de atividades no CAEM (Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática do IME/USP). Em 2009, na primeira vez que a disciplina e o curso de extensão foram oferecidos, a proposta também foi apresentada a algumas diretorias de ensino da região oeste da cidade de São Paulo, região onde está localizado o campus da Universidade. A finalidade dessa seleção é procurar garantir a participação de professores supervisores que realmente estejam dispostos a receber estagiários em suas salas de aula, que se envolvam com o grupo na elaboração de projetos e que socializem experiências de sua prática profissional durante os encontros do programa de estágios. Apesar dessa seleção parecer restritiva, desde a criação do programa, o IME/USP já firmou convênio com escolas públicas de todas as regiões da cidade de São Paulo e de municípios vizinhos; temos tido estágios realizados em todos os níveis da Educação Básica e, inclusive, na Educação de Jovens e Adultos. As características comuns entre as escolas parceiras têm sido, dentre outros, IDEB abaixo do esperado, falta de motivação para aprender e defasagem de conceitos de Matemática por parte de vários alunos. A característica comum aos professores participantes é a vontade de discutir essas questões e encontrar caminhos para melhorar seu trabalho junto aos alunos.

Desenvolvimento

O trabalho no Programa de Estágio Supervisionado é desenvolvido, no decorrer do ano letivo, em cerca de 18 encontros no IME/USP entremeados por 100 horas de estágio efetivo nas escolas parceiras. Vale destacar que nos encontros contamos com a presença dos professores regentes de classe e dos educadores vinculados ao programa, além dos estudantes de Licenciatura.

No início de cada ano letivo os participantes dividem-se em grupos, compostos por um professor supervisor e cerca de quatro estagiários. Cada grupo escolhe um tema para o projeto de estágio e esquematiza o cronograma para sua execução. Desde as primeiras visitas às escolas os estagiários familiarizam-se com a sala de aula em que será aplicado o projeto. No primeiro semestre, com base no estudo dos conceitos matemáticos relacionados ao tema escolhido e em avaliação diagnóstica aplicada aos alunos da turma que receberá o projeto, o grupo esboça um pré-projeto e o submete à apreciação dos educadores e do docente responsável. Em reuniões subsequentes, as atividades propostas são, muitas vezes, reformuladas após serem apresentadas e discutidas pelos participantes do programa. Trata-se de um processo dinâmico em que fica clara a especificidade do trabalho do professor, em que, a todo momento, é preciso reavaliar as ações de modo a atender às necessidades dos alunos. Já no segundo semestre, os alunos passam à aplicação do projeto.

Na elaboração dos projetos de ensino, os estagiários são incentivados a desenvolver atividades diferentes das rotineiramente propostas pelo regente de classe, pois entendemos que é no momento do estágio que o estudante pode ousar e colocar em prática toda a teoria de Didática da Matemática, com o apoio da equipe de educadores e, principalmente, do professor supervisor. Com isso queremos discutir a viabilidade da aplicação de projetos inovadores, dar oportunidade aos alunos da escola parceira de participarem de atividades diferenciadas e aumentar o repertório dos professores regentes, mostrando a eles que a aplicação de atividades não rotineiras pode ser tão ou mais eficaz para a aprendizagem do que a sua prática usual.

Com essa perspectiva, colocamos em discussão alguns temas relacionados a metodologias de ensino e, especificamente, de Didática da Matemática. Textos envolvendo resolução de problemas, uso de jogos e materiais didáticos estruturados ou não, bem como conceitos de contrato didático, transposição didática, registros de representação semiótica, obstáculos didáticos, erros e aprendizagem significativa são naturalmente oferecidos para estudo e reflexão dos grupos.

O desenvolvimento dos projetos sinaliza que com o uso de atividades diferenciadas o processo de sistematização dos conteúdos fica facilitado. Não é raro encontrarmos relatos dos estagiários e dos professores supervisores que os alunos da educação básica fazem referência as atividades desenvolvidas no projeto de estágio ao resolverem questões solicitadas nas mais diversas avaliações.

Integração entre teoria e prática na formação inicial

A possibilidade que os licenciandos têm de trabalharem com uma turma da educação básica durante um ano e serem acompanhados pelo supervisor na escola e o professor na universidade, propicia uma grande troca de informação. Durante os encontros na universidade, os licenciandos relatam como foi a aplicação das atividades elaboradas, o que funcionou em sala de aula e o que eles fariam diferente. Neste momento, a presença do professor supervisor é fundamental, pois sua experiência sobre a realidade escolar é socializada com a turma, o que enriquece a discussão. Os sucessos são comemorados e os insucessos analisados. A diversidade de escolas e as diferentes faixas etárias de crianças envolvidas nos projetos possibilitam múltiplos olhares, enriquecendo as discussões coletivas e ampliando o nível de reflexão. Um aluno em 2017 relatou "O projeto é uma grande oportunidade de experimentar, de aprender com os erros ou acertos (...) é sempre bom aprender compartilhando experiências (...) Entre uma experiência e outra, o aluno é convidado a refletir, a repensar, como fazer aquela atividade dar certo”.

A influência das discussões realizadas é percebida nos relatórios finais elaborados pelos grupos. É comum encontrarmos trechos que refletem as discussões ocorridas. Um grupo, em 2017, que trabalhava com o 7º ano, após perceberem que vários alunos tinham errado o cálculo da divisão de 2416 por 8, resolveram tentar descobrir a origem do erro. Após vários alunos terem explicado como tinham resolvido a conta, o grupo percebeu que o erro era devido ao uso mecânico do algoritmo da divisão. Com isso, conseguiram identificar a origem do problema e puderam realizar atividades para sanar as dificuldades existentes. Os alunos tomam consciência que dificuldades em conteúdo de anos anteriores, precisam ser resolvidos.

Outro grupo, ainda em 2017, pontuou muito bem sobre a importância da realização de atividades diferenciadas sem, no entanto, abrir mão da sistematização do conteúdo. Com atividades diferenciadas, conseguiam um maior envolvimento da classe o que facilitava inclusive o posterior registro matemático do conteúdo.

Os licenciandos relatam a importância que o desenvolvimento do projeto tem para a formação deles como futuros professores. Frases como *pudemos colocar a mão na massa* são facilmente identificadas nos relatos. Uma aluna, em 2017, que já trabalhava como professora escreveu que para ela o projeto “Colaborou para aprimorar as técnicas de ensino, pois aprendi a sair do roteiro e empregar dinâmicas inovadoras”.

Em 2013, os alunos quando questionados se tinham percebido em si alguma mudança de atitude após a aplicação do projeto, manifestaram que passaram a refletir sobre ações corriqueiras de um professor. Um aluno relatou “A maior mudança em mim foi de falar menos e dar mais pausas para os alunos pensarem. Alguns raciocínios que me pareciam óbvios são mais complicados que aparentam”. Outro aluno escreveu “Sim, quando percebi que uma explicação, completa leva o aluno apenas a reproduzir as palavras que eu disse, passei a tentar levar o aluno a desenvolver o problema por si”. Segundo Pimenta e Lima (2006, p.14) “A aproximação à realidade só tem sentido quando tem conotação de envolvimento, de intencionalidade, pois a maioria dos estágios burocratizados, carregados de fichas de observação, está numa visão míope de aproximação da realidade”.

Pelos relatos, fica claro que os alunos reconhecem a importância em dominar o conteúdo específico, mas que só isso não basta. É necessário que se tenha o conhecimento pedagógico do conteúdo, que se conheça o aluno e suas potencialidades. Estas características podem ser comparadas com o que Shulman (1987, p.8) chama de “Categorias da base de conhecimento”.

Integração entre pós-graduação e programa de estágio

O ambiente em que ocorre o Programa de Estágios do IME tem potencial para favorecer, não somente a interação entre formação inicial e continuada, mas também a articulação entre a pós-graduação e a Educação Básica.

Em particular, no bojo do Programa foi desenvolvido, nos anos de 2013 e 2014, o projeto “Ensino de Matemática Elementar”, filiado ao Observatório da Educação e financiado pela CAPES. A equipe, formada por bolsistas da CAPES, contou com cinco professores da Educação Básica, do curso de extensão “Aprendendo com Projetos”, cinco alunos de graduação, matriculados na disciplina “Projetos de Estágio”, e três estudantes do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.

Com o objetivo de estabelecer um vínculo de cooperação entre professores da rede pública de ensino da grande São Paulo e os diversos personagens do IME-USP, a dinâmica de trabalho incentivou professores regentes a aprofundarem conhecimentos de Matemática e a desenvolverem autonomia para aprimoramento de sua prática profissional; além disso, promoveu uma forte interação entre pós-graduandos e professores da Educação Básica, de modo a motivar a pesquisa acadêmica por demandas reais da escola pública e, em contrapartida, contribuir para a reflexão dos professores quanto a suas práticas pedagógicas.

Os alunos da graduação atuaram como observadores efetivos das salas de aula dos professores regentes e auxiliaram os estudantes do Mestrado em Ensino na coleta de dados.

Os professores regentes foram incentivados a elaborarem, com apoio dos mestrandos, seus próprios projetos de ensino. Apesar de apresentarem uma certa resistência a exporem suas ideias e a trabalharem com essa metodologia, foram desenvolvidos pelas professoras e aplicados a suas turmas um projeto com mandalas, um projeto com jogos e um projeto de alfabetização matemática.

Os pós-graduandos, também presentes nos encontros do programa de estágio supervisionado, tiveram oportunidade de observar todo o trabalho realizado pelos estagiários e seus supervisores, de discutir sobre questões da prática do professor com todos os participantes.

Houve momentos de importante reflexão dos temas tratados no programa e pudemos constatar que a presença dos mestrandos na equipe facilitou o diálogo propiciou a diminuição da distância entre os professores da Educação Básica e os docentes da Universidade.

Além disso, o aprofundamento da interlocução entre professores e mestrandos incrementou troca de conhecimentos específicos de matemática e de metodologias de ensino e teve influência decisiva nas pesquisas que deram origem a três dissertações de Mestrado.

A partir do contato de uma das mestrandas com uma professora regente que já trabalhava com resolução de problemas em turmas de Ensino Médio surgiu o tema da primeira dissertação de Mestrado (Prado, 2015). Mestranda e professora regente de classe dedicaram-se a estudar o tema e, na pesquisa de campo, investigaram a incidência das diversas representações semióticas em que os alunos se apoiaram para resolver uma coleção de problemas adaptados do Rali Matemático Transalpino.

Outro trabalho de Mestrado teve origem em uma aparente contradição _ as professoras regentes destacavam, frequentemente, a importância do incentivo ao raciocínio lógico no ensino da Matemática e, no entanto, por meio de pesquisa documental foi possível constatar que, em geral, os conceitos matemáticos eram tratados, em suas salas de aula, de maneira mecânica e havia prevalência de solicitações de cálculo direto por meio de algoritmos; além disso, observou-se que a nota dada a questões de prova dependia muito mais da resposta certa do que do raciocínio do aluno. A análise de entrevistas e de várias discussões na equipe levou a concluir que, em geral, as professoras tinham dificuldade em identificar os tipos de validação de hipóteses matemáticas nos diversos níveis de escolaridade. Em particular, não faziam distinção entre argumentação lógica no tratamento de uma questão e o cálculo para obter a resposta. Além da dissertação de mestrado (Matheus, 2016), essa pesquisa contribuiu para a formação continuada com o oferecimento do curso de atualização "Desenvolvimento do Raciocínio Lógico" (CAEM, 2015) a cerca de 40 professores da Educação Básica.

A questão norteadora da terceira pesquisa de Mestrado (Silva, 2016) foi "em que medida, a participação de professores em cursos de formação continuada tem potencial reformador em sua prática profissional?". A mestranda analisou os projetos de ensino elaborados pelas professoras regentes. Em entrevistas realizadas com as professoras de Educação Básica participantes, elas declararam que as atividades de formação continuada de que haviam participado ao longo da carreira, pouco influenciaram para qualquer mudança de sua prática. Relataram que, ao contrário, a elaboração de um projeto próprio de ensino, as atividades realizadas como supervisoras de estágio e as discussões sobre diversos temas abordados no processo motivaram-nas a refletir sobre as questões da sala de aula e a, efetivamente, transformar sua prática profissional.

Considerações finais

Após análise do material produzido ao longo destes anos, é possível afirmar que a participação nas atividades propostas propiciam aos estagiários uma experiência única. Ainda durante a formação inicial, os alunos de licenciatura têm a oportunidade de vivenciar a realidade escolar. Ao acompanharem uma turma de alunos da escola básica durante um ano, eles passam a ter conhecimento não só dos problemas relacionados ao processo de ensino e aprendizagem da matemática, que antes tinham sido discutidos apenas a nível teórico, mas também passam a ter maior consciência dos problemas sociais que estão presentes na realidade de uma sala de aula e que interferem diretamente no desenvolvimento dos alunos. Zeichner salienta que "Pesquisas têm mostrado claramente que as experiências de campo constituem importantes ocasiões para que se efetive a aprendizagem docente" (2010, p.484).

Em 2009 uma aluna relata "Esse momento foi muito importante em minha formação como professora, proporcionou um primeiro contato profissional e favoreceu o desenvolvimento das primeiras ideias de reflexão sobre a prática ainda durante a formação inicial".

Desde sua criação o programa de estágios proporciona integração entre formação inicial e formação continuada. Mostra-se também ambiente rico para a articulação entre a pesquisa acadêmica em ensino e a prática profissional do professor de Matemática. Por meio de relatos de licenciandos e de entrevistas fornecidas a estudantes de pós-graduação, foi possível constatar mudanças importantes na atuação dos professores quanto a hábitos de estudo e pesquisa, planejamento didático, necessidade de motivar os alunos com atividades contextualizadas e desafiadoras, indicando que o programa de estágios tem potencial para contribuir eficazmente com a melhoria da Educação Básica.

Referências e bibliografias

Matheus, A. R. (2016). *Argumentação e Prova na Matemática Escolar*. (Dissertação de Mestrado) Universidade de São Paulo (IME-USP), Brasil.

Pimenta, S. G.; Lima, M. S. L. (2006). Estágio e docência: diferentes concepções. *Poíesis Pedagógica*, 3(3-4), 5-24. doi: 10.5216/rpp.v3i3e4.10542

Prado, M. (2015). *Resolução de Problemas e Representações Semióticas: uma experiência no ensino médio inspirada no rali matemático*. (Dissertação de Mestrado) Universidade de São Paulo (IME-USP), Brasil.

Schön, D. A. (2000). *Educando o Profissional Reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre. Artmed.

Shullman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvad Educational Review*, 57, 1-22.

Silva, J. P. (2016). *Formação Continuada do Professor de Matemática: reconhecimento de indícios de prática reflexiva em um estudo de caso de processo de formação realizado por meio de projetos*. (Dissertação de Mestrado) Universidade de São Paulo (IME-USP), Brasil.

Zeichner, K. (2010). Repensando as conexões entre a formação na universidade e as experiências de campo na formação de professores em faculdades e universidades. *Educação*. Santa Maria, 35(3), 479-504.

Formação de profesores de Matemática: percepção de estudantes sobre pesquisa

Maria Elizabete de Souza Couto
Universidade Estadual de Santa Cruz
Brasil
melizabetesc@gmail.com
Zulma Elizabete de Freitas Madruga
Universidade Estadual de Santa Cruz
Brasil
betefreitas.m@gmail.com

Resumo

Este artigo objetiva apresentar e analisar percepções de estudantes de graduação em Matemática (Licenciatura) em relação à pesquisa. Trata-se de uma investigação qualitativa. Os participantes, alunos de uma universidade pública do sul da Bahia, responderam a pergunta "O que é pesquisa?", no início da disciplina Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), quando se depararam pela primeira vez com a disciplina de Metodologia da pesquisa. Como método de análise de dados, utilizou-se Análise Textual Discursiva (ATD). Os resultados indicam que os alunos já apresentam percepções sobre pesquisa, como se desenvolve, os elementos que constituem um projeto de pesquisa e a necessidade de estudos teóricos para aprofundar e avançar nos estudos. E parecem entender que por meio da pesquisa é possível captar e apreender uma nova compreensão sobre a realidade estudada. Por fim, os alunos da licenciatura percebem a pesquisa como princípio formativo para ajudá-los a avançar nos seus conhecimentos.

Palabras clave: educação matemática, formação de professores, pesquisa, trabalho de conclusão de curso, percepção de estudantes.

Considerações Iniciais

Este trabalho tem como objetivo apresentar e analisar as percepções de estudantes de graduação em Matemática (Licenciatura) em relação à pesquisa, considerando que no final dos cursos de graduação os estudantes elaboram uma monografia chamada de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Em muitas universidades, há disciplinas que orientam para realização deste trabalho, introduzindo os estudantes no método científico e iniciando a formação do pesquisador.

Sendo assim, a indagação que norteou o trabalho foi: quais as percepções de um grupo de estudantes da disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) dos cursos de Matemática (Licenciatura) sobre pesquisa?

A discussão sobre pesquisa no início foi o norteador da organização da disciplina durante o semestre, para o professor e, principalmente, os alunos que estavam iniciando os estudos sobre o método científico e a pesquisa.

Pressupostos Teóricos

Conforme o relatório que aprovou as Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática, os cursos de Licenciatura em Matemática têm como objetivo principal a formação de professores para a Educação Básica (Brasil, 2001). Esse relatório indica ainda, ações para a integralização do curso que "devem ser desenvolvidas como atividades complementares à formação do matemático", com a finalidade de ampliar sua postura de estudioso e pesquisador, como a produção de monografia (Trabalho de Conclusão do Curso/TCC), e a participação em programas de iniciação científica. Na licenciatura, "o educador matemático deve ser capaz de tomar decisões, refletir sobre sua prática e ser criativo na ação pedagógica, reconhecendo a realidade em que se insere. Mais do que isto, ele deve avançar para uma visão de que a ação prática é geradora de conhecimentos" (Brasil, 2001, p. 6), bem como tem a oportunidade de participar de programas de iniciação científica e à docência (Programa de Iniciação à Docência/PIBID).

As Diretrizes não indicam a pesquisa na formação do professor de Matemática, mas valorizam a prática docente para o licenciado. Entretanto, pensar a pesquisa nos cursos de Matemática indica o desenvolvimento da formação acadêmica, considerando uma possibilidade para:

> a) Alargar os horizontes dos educandos, incentivando-os a ter um olhar mais analítico-crítico sobre a realidade social em que estão inseridos e da qual fazem parte.
> b) Construir questionamentos importantes sobre acontecimentos e objetos que possam induzir à realização de estudos científicos.
> c) Compreender que devemos fugir ao que nos é apresentado como dogmático (determinante de certezas), alienado (longe da realidade) e a-histórico, ao se elaborar suas metodologias de estudo.
> d) Relacionar o prazer em produzir cientificamente conhecimento com o prazer de se formar como profissional, unindo as competências advindas desses processos em movimentos importantes à mudança da sociedade como um todo (Barros & Lehfeld, 2010, p. 24).

Nos cursos de Licenciatura, as discussões sobre a produção do conhecimento, a formação de professores e a pesquisa começaram a ganhar corpo e fazer parte dos debates na academia, no contexto internacional, inicialmente com o inglês John Elliott e, na década de 1980, com Donald Schön, pesquisador americano, trazendo para o debate o papel e a função do pesquisador, considerando-o mais importante que o papel do professor, visto que está envolvido com a vida profissional, as relações entre pesquisa e prática, e também os currículos dos cursos de formação (Diniz-Pereira, 2000). No Brasil, essas discussões começaram a estar na pauta das universidades uma década depois.

Na pesquisa, a observação, análise e reflexão são elementos que indicam possibilidades para superar os limites colocados pelo modelo formativo da racionalidade técnica que, na formação e na pesquisa "nega o caráter ativo e histórico do sujeito, bem como as influências recíprocas em relação ao seu meio sociocultural, não reconhecendo o que é mutável, observável, contraditório, ambíguo ou ambivalente" (Moraes & Valente, 2008, p. 23). Um indicativo de mudança na natureza da pesquisa que busca superar a abordagem quantitativa para a pesquisa qualitativa, bem como nos modelos formativos para a docência.

Nos anos de 1990, as discussões avançam e, nesse contexto, "a pesquisa na graduação passa a ter como finalidade ajudar a observar e a gerar questionamentos sobre a realidade que possa motivar a investigação científica para descrevê-la e compreendê-la" (Couto, 2017, p. 148-149). Como fruto dessas discussões e com a publicação, no Brasil, no início da década de 2000, das Diretrizes Curriculares para formação de professores, nos diversos cursos de graduação, a pesquisa começa a fazer parte dos cursos – Licenciatura -, além de valorizar a formação profissional enfatizando o caráter formativo e estratégico na produção de conhecimentos que podem ser "aprimorados e aproveitados pelos seus iniciantes em programas de pós-graduação, em nível de mestrado e doutorado, na área" (Barros & Lehfeld, 2010, p. 26).

Um momento de efervescência acadêmica, marcado pela incerteza e a construção de novos conhecimentos, visto que novos paradigmas começam a fazer parte das discussões e, entre avanços e desafios, a inserção da pesquisa ainda na graduação indica que este é um caminho promissor, embora dependa de muitas idas e vindas, como o movimento das ondas que se desdobram em ações, que se dobram e concretizam em processo de reflexão (Moraes, 2002), compreendendo que o

> [...] conhecimento produzido na pesquisa é fruto de processos que envolvem interpretação, e também criação, intuição, auto-organização e co-determinação por parte do sujeito pesquisador em sua relação com o objeto. E para comunicar o aprendizado ou o conhecido, o indivíduo usa a linguagem, as palavras e os diferentes discursos sobre o tema pesquisado (Moraes & Valente, 2008, p. 28).

Esse processo formativo nos cursos de graduação "que, anteriormente, era pensado apenas em uma visão macro, começa a delinear as microvisões e os microespaços, considerando, assim, as singularidades, particularidades e a diversidade" (Couto, 2017, p. 149).

Com as novas diretrizes e resoluções os microespaços começam a ser valorizados como temática de pesquisa e objeto de estudo. Na organização das licenciaturas, as orientações da Resolução Nº 2, de 1º de julho de 2015 (Brasil, 2015), nos artigos 5º, incisos II e III, 7º, incisos II e 8º, incisos XII estão indicando e valorizando a pesquisa como princípio formativo e pedagógico na formação do profissional do magistério e no aperfeiçoamento da prática educativa, bem como a viabilidade a programas de fomento à pesquisa sobre a Educação Básica, como exemplo, tem-se o PIBID. Tais situações permitem envolver-se em pesquisa, análise e discussão dos resultados de investigações de interesse da área educacional e específica, bem como recorrer a vários instrumentos e técnicas de pesquisa para construção de conhecimentos pedagógicos e científicos, objetivando a reflexão sobre a própria prática e a discussão e socialização de conhecimentos. Nesse sentido, a partir dos anos de 1990 a pesquisa começa a fazer parte da formação dos alunos, nos diversos cursos, nos programas de iniciação científica, docência e nos trabalhos de conclusão de curso (TCC). Um momento para ampliar o repertório de conhecimento, com levantamento de hipóteses, estudo aprofundado sobre a temática, refletir sobre o objeto de estudo à luz de uma teoria para encontrar respostas as suas indagações.

> A atividade de pesquisa é um fio que se entretece a todas as disciplinas trabalhadas no curso. É na pesquisa, na inserção cotidiana e nos diferentes espaços educativos, que surgem questões que alimentam a necessidade de saber mais, de melhor compreender o que está sendo observado/vivenciado, de construir novas formas de percepção da

> realidade e de encontrar indícios que façam dos dilemas desafios que podem ser enfrentados (Esteban & Zaccur, 2002, p. 22).

A pesquisa realizada tendo como objeto de estudo a prática pedagógica (Licenciatura) remete a um tipo de epistemologia, o que nos ajuda a aprender como uma pesquisa é desenvolvida segundo os princípios da abordagem qualitativa. Uma das oportunidades para a iniciação à pesquisa, para sistematização e ampliação do conhecimento e das habilidades adquiridas no curso, a articulação entre teoria e prática e entre o saber do aluno e a especificidade de sua formação (Bello, 2009). Assim, a pesquisa "exige que o mundo seja examinado com a ideia que nada é trivial, que tudo tem potencial para construir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora de nosso objeto de estudo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 49).

Tais princípios retratam e revelam a complexa rede de interações que constitui a experiência diária, mostram como se estrutura a produção de conhecimento em sala de aula e a inter-relação entre as dimensões cultural, institucional e instrucional (André, 1995) e formativa, as quais nos permite observar "os locais em que naturalmente se verificam os fenômenos nos quais está interessado, incidindo os dados recolhidos nos comportamentos naturais das pessoas: conversar, visitar, observar, comer, etc." (Guba, 1978; Wolf, 1978b, apud Bogdan & Biklen, 1994, p. 17). São ações que, numa pesquisa, oferecem pistas para aprender a estabelecer a relação entre teoria e prática, enxergando, no campo da pesquisa e com o material ali produzido, os conceitos teóricos estudados sobre o objeto de estudo e, algumas vezes, fazendo as análises a partir do local e sua condição, além de estabelecer a relação de confiança com os participantes e o local.

Pressupostos Metodológicos

Trata-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) e para a coleta de dados foi utilizado como instrumento narrativa/depoimento de 11 alunos de graduação de uma universidade pública do sul da Bahia, que cursavam Licenciatura em Matemática.

Os estudantes colaboradores da pesquisa estavam cursando no período de coleta de dados, a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso I (TCC I). Conforme o projeto acadêmico do curso há duas disciplinas de TCC - I e II. No TCC I o estudante deve elaborar um projeto de pesquisa junto com o orientador(a) e com a colaboração do professor da disciplina. No TCC II, o estudante desenvolve a pesquisa, elabora o relatório e apresenta o trabalho final, também amparado pelo orientador(a) e pelo(a) profesor(a) da disciplina.

A coleta de dados aconteceu na primeira aula da disciplina do segundo semestre de 2017, sob a forma de depoimentos/narrativas escritas, momento em que os estudantes explicitaram o que pensam sobre pesquisa, de uma forma bem livre e sem qualquer comentário anterior sobre o tema.

Para processamento dos dados, foi utilizada a Análise Textual Discursiva (ATD), conforme Moraes e Galiazzi (2013). Esse tipo de análise,

> [...] pode ser compreendida como um processo auto-organizado de construção de compreensão em que novos entendimentos emergem de uma sequência recursiva de três componentes: desconstrução dos textos do *corpus*, a *unitarização*; estabelecimento de relações entre os elementos unitários, a categorização; o captar do novo emergente em que a nova compreensão é comunicada e validada (Moraes, 2003, p. 192):

Na *descontrução* e *unitarização* houve uma fragmentação do texto coletado – depoimentos dos estudantes – com vistas a responder o questionamento inicial. Nesta etapa emergiram as unidades de significado que são definidas em função de um sentido pertinente ao propósito da pesquisa. Neste processo faz-se necessário que o pesquisador seja fiel em relação ao que consta no corpus da pesquisa.

A *categorização* é a etapa resultante do processo de organização e agrupamento das unidades de significado. Estas categorias podem ser classificadas de duas maneiras: *a priori*, quando surgem de uma forma objetiva e dedutiva no início da análise; e *emergentes*, aparecendo de uma forma indutiva e subjetiva no processo de análise dos dados, (Moraes & Galiazzi, 2013). Para categorizar, o pesquisador necessita de organização, atenção e potencial criativo.

O *metatexto* é a escrita que explicita a compreensão do pesquisador sobre o fenômeno investigado com base nas categorias elencadas no processo anterior. Nesta etapa, a escrita descreve o fenômeno e a interpretação do pesquisador, emergindo o novo, (Moraes & Galiazzi, 2013).

Nesta pesquisa foi adotado como *corpus* os depoimentos dos 11 estudantes da disciplina de TCC I que responderam a questão sobre ‘o que é pesquisa’. E para efetivar a análise, foram consideradas as categorias que emergiram do material produzido: os depoimentos dos estudantes.

Resultados e Discussão

Foram analisadas 11 narrativas de estudantes de graduação: Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do sul da Bahia. Eles escreveram o que pensavam sobre pesquisa de uma forma ampla, no início da disciplina, momento em que ainda não tinham participado de discussões sobre a pesquisa, desenvolvimento e resultados na formação profissional.

Conforme análise dos depoimentos coletados emergiram duas categorias: *concepções de pesquisa e o fazer pesquisa* e *elementos que perpassam uma pesquisa*, descritos a seguir.

Concepções de pesquisa e o fazer pesquisa

Organizar o planejamento da disciplina TCC I após solicitar que escrevessem foi o ponto de partida, visto que assim, ficou evidente as noções e percepções dos alunos sobre o que é pesquisa, principalmente a pesquisa no curso de graduação. Eles tiveram uma hora para escrever. Em seguida, foi socializado e começaram as discussões. Para os alunos, pesquisa é:

> [...] fazer uma investigação, um estudo sobre um determinado assunto (Al. 1).
>
> [...] buscar informação acerca de um tema (Al. 2).
>
> [...] uma busca visando a alcançar algum objetivo, seja ele uma resposta específica, coleta de dados etc. (Al.3).
>
> [...] um estudo mais direcionado, coordenado e dirigido, onde buscamos informações relevantes acerca de um tema (Al.4).
>
> [...] um projeto onde iremos escolher um tema e trabalhar [...] ou seja, buscar fontes de estudo para aprofundar nesse tema (Al.5).
>
> [...] é uma busca que inclui uma análise de fatores (Al. 6).
>
> [...] a maneira de buscar conhecimento e aprimorá-lo por meio de leitura, vivência (Al. 7).
>
> [...] uma busca por informações, dados, fatos etc. sobre algo que se quer conhecer ou ter um conhecimento mais profundo, ou uma visão mais ampla a depender do seu objetivo (Al. 8).
>
> [...] surge a partir de um problema, uma dificuldade; seria a busca para uma solução (Al. 9).

Os alunos (Al.1 e Al.4) já participaram de pesquisa durante o curso (iniciação científica) e trouxeram como primeiro ponto para a discussão o estudo sobre o tema. Para os demais, essa seria a primeira oportunidade para a iniciação à pesquisa. Todavia, parecem perceber que este é um momento para sistematização e ampliação dos conhecimentos e habilidades construídas nas disciplinas, a articulação entre teoria e prática, entre o saber do aluno e a especificidade de sua formação, bem construir conhecimento para além daqueles já estudados no curso (Esteban & Zaccur, 2002; Bello, 2009).

Fiorentini e Lorenzato (2009) destacam que a elaboração de um projeto de pesquisa, o que ocorre na disciplina de TCC I na universidade onde foi realizada a pesquisa, serve para mapear um camino a ser seguido durante o percurso investigativo, auxiliando ao estudante no esclarecimento dos rumos do trabalho.

Quando Al.8 sugere que a pesquisa dará uma visão ampla, isso indica a possibilidade de avançar os horizontes dos educandos, incentivando-os a ter um olhar mais analítico/reflexivo /crítico sobre a realidade social (Barros & Lehfeld, 2010).

Para o desenvolvimento da pesquisa indicaram que poderia ser realizada, em primeiro lugar, com estudos para aprofundamento do tema.

> Farei minha pesquisa através de leitura para entender a história por trás do meu objeto, como foi criado, o motivo pelo qual foi criado e porque ainda hoje é tão usado. Minha pesquisa será um resulto do meu entendimento do meu objeto. E, além disso, estudando, escrevendo, passando para o papel o que eu estou entendendo e como estou vendo o meu conteúdo (Al. 7).

> Meu projeto é um relato de experiência, onde pretendo explicitar a importância do conhecimento matemático para os professores dos anos iniciais. Os cursos de pedagogia possuem maior foco na parte de alfabetização e não possui muitas disciplinas relacionadas ao ensino da matemática. Escolhi como foco e objeto da minha pesquisa, uma professora dos anos iniciais que possuía grande resistência com a disciplina de matemática e que participou de uma formação continuada com esse foco (matemática). Espero conseguir mostrar a importância dessas formações e como elas realmente desencadeiam uma mudança. Além de buscar autores sobre o assunto (Al.9).

Al.7 indica que seu trabalho será realizado com leituras, provavelmente um trabalho bibliográfico ou uma revisão de literatura. Um tipo pesquisa também válido e criterioso, considerando sempre o seu objeto de estudo. Já Al.9 explicita que vai fazer um relato de experiência e pensa nas contribuições que pretende oferecer com sua pesquisa para os professores dos anos iniciais (pedagogo) que lecionam Matemática. Eles têm ideias preliminares em relação ao tipo de pesquisa que querem realizar. O delineamento do projeto na disciplina e com o(a) orientador(a) indicará a natureza da pesquisa e como fazer a coleta dos dados.

As duas pesquisas indicam a produção do conhecimento científico (Barros & Lehfeld, 2010), tendo como meio para a produção de conhecimento por caminhos diferentes. São possibilidades para revisitar as disciplinas estudadas no curso (Esteban & Zaccur, 2002) e a articulação teoria e prática (Bello, 2009), gerando novos conhecimentos sobre a realidade para que possam descrevê-la e compreendê-la (Couto, 2017). Essas pesquisas apresentam os microespaços (Couto, 2017) e o movimento não linear na construção do conhecimento (Moraes, 2002).

Elementos que perpassam uma pesquisa

Com ideias preliminares, os alunos foram trazendo à discussão os elementos que compõem uma pesquisa, principalmente no momento em que vão escrever o projeto de pesquisa (esse é um passo da disciplina TCC). Falaram do problema (Al. 9), do tema para estudo (Al. 2, Al. 4, Al.5), o aprofundamento nos estudos (Al.1, Al.4, Al.7, Al.8), para solucionar um problema (Al.9), o objetivo (Al.3) e as análises (Al.6). Nesse primeiro momento demonstraram um conhecimento que ainda precisava ser organizado. Um conhecimento que, certamente, irá ser aprofundado pela pesquisa e as demais disciplinas no curso (Esteban & Zaccur, 2002; Bello, 2009).

Para escolher o tema, definir problema, escrever objetivos é preciso fazer escolhas, que na discussão com o(a) orientador(a) (Al.1) ajudará a definir e construir questionamentos sobre o objeto para avançar nos estudos científicos (Barros & Lehfeld, 2010). E para o desenvolvimento da pesquisa irão recorrer a fontes diversas (Quadro 1).

Quadro 1 - A pesquisa será realizada com [...]

Alunos	**Fontes que serão estudadas na pesquisa**
Al.1	Artigos
Al.2	Internet, livros, pesquisas similares, documentos, arquivos etc.
Al.3	-
Al.4	Livros e artigos
Al.5	Procurar fontes
Al.6	Busca de materiais
Al.7	Leitura
Al.8	Livros. Teses e dissertações (pesquisa teórica)
Al.9	Relato de experiência.
Al.10	Livros e artigos
Al.11	Leitura

Fonte: Elaborado com material produzido na pesquisa (2018).

Após a escolha da temática da pesquisa, em conjunto com o(a) orientador(a), já se podem seleccionar alguns textos que trarão maior esclarecimento, com vistas à delimitação do problema do estudo ou à formulação de questão de investigação (Fiorentini & Lorenzato, 2009).

Entre os 11 alunos, dois já expressaram o tipo de pesquisa que iriam realizar: pesquisa teórica (Al.8) e relato de experiência (Al.9). Os demais indicaram o material (fontes) que será utilizado o que sugere que realizarão, também, uma pesquisa bibliográfica ou revisão de literatura. Tais depoimentos mostram que já possuem certo conhecimento sobre a pesquisa e seu encaminhamento, e que por meio da pesquisa irão construir conhecimento para ampliar o repertório formativo. Porém, não retrataram, ainda, como será coletado o material da pesquisa. Uma tarefa que realmente precisa ser estudada na disciplina para que possam construir os instrumentos considerando o tipo de pesquisa que será desenvolvida.

Considerações Finais

Este artigo teve como objetivo apresentar e analisar as percepções de estudantes de graduação em Matemática (Licenciatura) em relação à pesquisa. Por meio dos dados, foi possível perceber que os alunos, do curso Licenciatura em Matemática, no início da disciplina TCC, já apresentam percepções sobre o que é pesquisa e como se desenvolve, os elementos que constituem um projeto de pesquisa e a necessidade de estudos teóricos para aprofundar e avançar nos estudos (Esteban & Zaccur, 2002). Embora de maneira sucinta, parecem já compreender que por meio da pesquisa é possível captar e apreender uma nova compreensão sobre a realidade estudada (Moraes & Galiazzi, 2013).

Por fim, os alunos da Licenciatura percebem a pesquisa como princípio formativo (Brasil, 2015) para ajudá-los a avançar nos seus conhecimentos.

Referências

André. M. E. D. A. (1995). Avanços no conhecimento etnográfico na escola. In: FAZENDA, I. (Org.). A pesquisa em educação e as transformações do *conhecimento*. Campinas, São Paulo: Papirus.

Barros, A. J. P., & Lehfeld, N. A. S. (2010). *Projeto de pesquisa:* propostas metodológicas. 20. ed, Rio de Janeiro: Vozes.

Bello, S. E. L. (2009). Trabalhos de conclusão de curso nas licenciaturas: a possibilidade de uma experiência na constituição docente. In: *Anais*... ENDIPE, Porto Alegre, PUC/RS.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto, Portugal: Editora Porto.

Brasil. (2001). *Parecer CNE/CES 1.302/2001*. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática.

_____. (2015). *Resolução CNE/CP nº 2, de 1º de julho de 2015* - Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. MEC.

Couto, M. E. S. (2017). A pesquisa educacional: a construção da professora como pesquisadora. In: Mororó, L. P., Couto, M. E. S., & Assis, R. A. M. *Notas teórico-metodológicas de pesquisas em educação:* concepções e trajetórias. Ilhéus: Editus.

Diniz-Pereira, J. E. (2000). *Formação de professores.* Pesquisas, representações e poder. Belo Horizonte: Autêntica.

Esteban, M. T., & Zaccur, E. (2002). A pesquisa como eixo de formação docente. In: Esteban, M. T., & Zaccur, E. *Professora-pesquisadora:* uma práxis em construção. Rio de Janeiro, DP&A.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2009). *Investigação em educação matemática*: percursos teóricos e metodológicos. 3ed. Campinas: Autores Associados.

Moraes, R. (2003). Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela Análise Textual Discursiva. *Ciência & Educação*. v. 9, n. 2, p. 191-211.

Moraes, M. C., & Valente, J. A. (2008). *Como pesquisar em educação a partir da complexidade e da transdisciplinaridade?* São Paulo: Paulus.

Moraes, M. C. (2002). *Educação a Distância:* fundamentos e práticas. Campinas: Unicamp/Nied.

Moraes, R., & Galiazzi, M. C. (2013). *Análise Textual Discursiva.* 2ed. Ijuí: Editora Unijuí.

Experiências avaliativas na formação inicial de professores: o contexto das Práticas de Ensino de Matemática

Vivilí Maria Silva **Gomes**
Universidade Federal do ABC (UFABC)
Brasil
vivili.gomes@ufabc.edu.br

Este trabalho tem como objetivo apresentar e discutir as experiências avaliativas ocorridas no âmbito da formação inicial de professores. O *lócus* de realização da pesquisa foi o Curso de Licenciatura em Matemática da UFABC no contexto das Práticas de Ensino de Matemática (PEM) como componente curricular, abrangendo o período de 2013 a 2018. Trata-se de um recorte de pesquisa na, sobre e para a ação pedagógica, onde são descritos seus encaminhamentos e resultados e apontadas possibilidades para a inovação da avaliação em processo. A avaliação, como parte do ato pedagógico, nele se imbrica e permeia as ações de sala de aula, perpassando a relação professor-aluno-conhecimento (Luckesi, 2011). Por se tratar de um componente curricular de caráter teórico-prático, o processo avaliativo além de contínuo é formativo, e com ênfase nos conteúdos procedimentais e atitudinais (Zabala, 2000).

As PEM incluem-se nos componentes curriculares didático-pedagógicos específicos do Curso e a eles estão vinculados os módulos de Estágio Supervisionado, constituindo-se num conjunto de cinco componentes distribuídos, sequencialmente, ao longo da matriz curricular. A pesquisa se realizou no âmbito das turmas nas quais as PEM foram ministradas, sendo duas turmas para o Ensino Fundamental e cinco turmas para o Ensino Médio. É nesse espaço e tempo que a docente universitária se lança a novos desafios metodológicos juntamente com os licenciandos, a experimentar um pouco das incertezas e da complexidade do "ser professor".

A abordagem metodológica é da pesquisa-ação que se delineia nos estudos de Thiollent e Colette (2014), na visão de autonomia e emancipação dos professores de Contreras (2012) e Freire (2011), exemplificados nos estudos de Ponte e Serrazina (2004) e Pimenta (2005). Possui, portanto, caráter qualitativo, de cunho hermenêutico (Denzin apud Lüdke & André, 2013).

As ações foram guiadas em direção aos objetivos didáticos (individuais, em grupos ou coletivos) e se resumem no que segue: A. Avaliação contínua do processo individual por meio dos registros e narrativas contidos em portfólios, construídos individualmente e compartilhados com o coletivo. B. Elaboração de atividades em grupos, apreciadas e avaliadas continuamente pelos participantes (avaliação pelos pares) por meio de exposição ou dramatização (simulação) e discussão em rodas de conversa nos diversos encontros e entre encontros em rede social. C. Elaboração de Projeto de Trabalho ou Sequência Didática pelo coletivo, a depender da turma, com discussão ao longo dos encontros e avaliação contínua pelos participantes. D. Regência de aulas para alunos da rede pública de ensino em colaboração com suas professoras.

Para a organização das ações e seu acompanhamento, nos valemos do que chamamos de movimentos diagnósticos (MD), prospectivos (MP) e retrospectivos (MR), realizados ao longo dos encontros, de forma contínua, nos quais o processo avaliativo se apresenta imbricado. O processo é visualizado no diagrama da Figura 1.

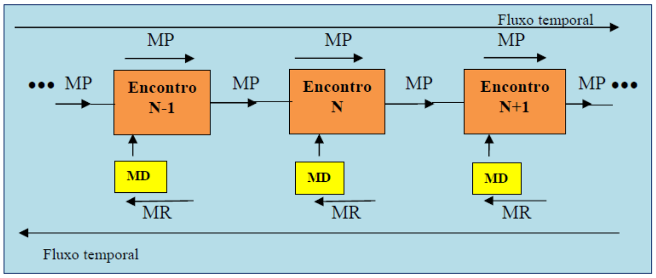


Figura 1. Sequência de encontros e os três movimentos (MD, MP e MR) feitos no processo.

A experiência com esses movimentos contínuos, como processo avaliativo e de correção de rotas, é o foco deste trabalho. Como exemplo de ação retrospectiva (MR), trazemos a elaboração dos portfólios. Preparados no decorrer das ações, os portfólios exigiram um olhar, *à posteriori*, para cada ação desenvolvida, incluindo uma avaliação do processo como um todo, com margem para a consideração de elementos artísticos nas expressões subjetivas neles contidas. Em seus portfólios, os estudantes apresentaram suas dúvidas e inquietações com muita fluidez, dado o ambiente de espontaneidade construído na convivência. Trouxeram suas impressões e expressões sobre o processo de construção do conhecimento, compartilhando suas angústias e expectativas. Os resultados indicam um modelo para um trabalho coletivo e colaborativo a ser feito pelos futuros professores em suas aulas, que integre formação e pesquisa (Cortesão & Stoer, 1997).

Referências Bibliográficas

Contreras, J. (2012) *A autonomia de professores*. São Paulo, Brasil: Cortez.

Cortesão, L., & Stoer, S. R. (1997) Investigação-ação e a produção de conhecimento no âmbito de uma formação de professores para a educação inter/multicultural. *Educação, Sociedade & Culturas*, 7, 7-28.

Freire, P. (2011). *Pedagogia da Autonomia: Saberes necessários à prática docente* (43ª ed). Rio de Janeiro, Brasil: Terra e Paz.

Luckesi, C. C. (2011) *Avaliação da aprendizagem: Componente do ato pedagógico*. São Paulo, Brasil: Cortez.

Lüdke, M. & André, M.E.D.A. (2013) *Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas* (2ª ed). São Paulo, Brasil: EPU.

Pimenta, S. G. (2005) Pesquisa-ação crítico-colaborativa: construindo seu significado a partir de experiências com a formação docente. *Educação e Pesquisa*, 31 (3), 521-539.

Ponte, J.P., & Serrazina, L. (2004) Professores e formadores investigam a sua própria prática: O papel da colaboração. *Zetetiké*, 11 (20), 9-55.

Thiollent, M.J.M., & Colette, M. M. (2014) Pesquisa-ação, formação de professores e diversidade. *Acta Scientiarum. Human and Social Sciences*, 36 (2), 207-216.

Zabala, A. (2000) *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre, Brasil: Artmed.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Demanda Cognitiva e a Competência Observar com Sentido: análise de atividades com a temática Funções Exponenciais

Marcos Vinicius Fernandes **Calazans**
Universidade Federal do Sul da Bahia
Brasil
marcos.fernandes@ufsb.edu.br
Claudia Lisete Oliveira **Groenwald**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
claudiag@ulbra.br
Salvador **Llinares** Ciscar
Universidad de Alicante
Espanha
sllinares@ua.es

Resumo

A formação de professores é um grande desafio a ser enfrentado por um país que está compromissado com o seu desenvolvimento e a garantia de acesso à cidadania. A qualidade dessa formação está presente na aquisição de competências docentes que preparem os estudantes de licenciatura para a sala de aula. Uma dessas competências é a de Observar com Sentido. Esta competência exige do licenciando a capacidade de compreensão do contexto, a partir das manifestações dos alunos e com a tomada de decisões. Para a ação docente específica é necessário verificar a demanda cognitiva das atividades prescritas, pois cada tipo evoca níveis de aplicação do conhecimento. Para ilustrar os níveis de demanda cognitiva, escolheu-se um livro didático de uma escola pública brasileira, no capítulo de Funções Exponenciais, temática investigada na pesquisa. Identifica-se os quatro níveis na obra escolhida, favorecendo a escolha didático-pedagógica por parte do professor de Matemática.

Palavras chave: formação de professores, observar com sentido, demanda cognitiva

Introdução

Percebemos que o trabalho docente vem mudando nos últimos anos, seja por novas competências exigidas ou pelo desafio das novas formas de comunicação e informação que cada vez mais estão dentro de sala de aula. Questiona-se a qualidade do professor, porém é esse profissional que reúne as melhores condições para encarar o processo de ensinar e desenvolver a aprendizagem de seus estudantes.

Galvão, Ponte e Jonis (2018) afirmam que o profissional docente se depara com quatro desafios elementares, listados a seguir: novas formas de aprendizagem; elevada diversidade de alunos; evolução tecnológica e o desenvolvimento das competências exigidas para os alunos que vivenciam o século atual. Os mesmos autores apontam que ser professor exige mais do atual profissional, pois se espera que o mesmo cumpra algumas expectativas, como: refletir sobre a sua prática; investir no próprio desenvolvimento profissional, ser autônomo, responsável e criativo; investigar e avaliar o próprio desempenho e; trabalhar em equipe.

Alarcão, Freitas, Ponte e Tavares (1997) também se envolveram em traçar o perfil das necessidades docentes, dos saberes e competências profissionais. Os autores identificam dois fortes apelos de preparação do professor: um sólido conhecimento científico de base e, as competências de cunho educacional. Não se espera que os profissionais de educação adquiram tais características sozinhos. São os programas de formação docente que são os responsáveis, em seus desenhos e propostas, em oferecer condições para que os futuros professores se preparem, adequando suas ações aos novos desafios da prática docente. Na construção das competências necessárias à ação docente, destacamos uma competência importante na formação docente, a de Observar com Sentido.

Este artigo é um recorte de tese de doutoramento. O objetivo da tese é investigar a integração das demandas cognitivas nos planejamentos de ensino realizados por estudantes a professor de Matemática como elemento que contribua no desenvolvimento da competência docente Observar com Sentido, no tocante à temática Funções Exponenciais.

Competência Docente: Observar com Sentido

Uma vez atuante como professor é importante que o profissional se prepare o máximo possível para exercer bem sua prática. Vários autores pesquisaram o conhecimento profissional de professores e destacaremos os achados de Shulman (1987). Para esse pesquisador, o professor precisa dominar o Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (Pedagogical Content Knowledge – PCK), que lhe permita a escolha das melhores estratégias para ensinar temas específicos e a estudantes com certas características, além de dotar a ele uma competência exclusiva do sujeito professor. É uma exigência de domínio de duas grandes esferas: o conhecimento pedagógico e o conhecimento de conteúdo, com excelente base e segurança, para em seguida mesclá-lo buscando transformar a ação do professor uma interseção constante de tais esferas.

Ainda, durante a formação, é possível atribuir uma atividade intencional capaz de fazer o estudante a professor adquirir competências que ele levará para a sua vida profissional. Aqui apontamos a competência de Observar com Sentido. Para Hiebert (2007), Observar com Sentido está ligada a capacidade do professor de Matemática em adotar decisões e, em seguida, ações a partir do que o estudante parece estar aprendendo. Para Fernández, Valls e Llinares (2011), o Observar com Sentido tem sua importância por desenvolver a capacidade de ensinar Matemática, pela compreensão via estudante do que ele está aprendendo. Para Callejo, Valls e Llinares (2010), a qualidade de ensino está fortemente ligada ao estudante a professor dominar tal competência, daí a importância de os cursos de formação focarem no seu desenvolvimento.

Abordando mais especificamente o termo Observar com Sentido, trazemos as definições a partir dos estudos de Van Es e Sherin (2002). Para esses autores, tal competência é determinada por três habilidades: a capacidade de identificar os fatores importantes no processo de ensinar, fazer reflexões sobre as interações que surgem em sala de aula a partir do conhecimento gerado do contexto e relacionar todos os eventos que acontecem em sala de aula com outras ideias mais generalistas do processo que se é envolvido no ensino-aprendizagem da Matemática. Jacobs, Lamb e Philipp (2010) são mais sucintos e afirmam que as três habilidades inter-relacionadas são: identificar as situações relevantes e importantes, realizar uma observação tomando como partida os referenciais teóricos postos e tomar decisão sobre a sua ação. Então, o Observar com Sentido é, sobretudo, a exigência de dar atenção às estratégias usadas pelos estudantes, em suas interpretações dos conhecimentos matemáticos dos estudantes para poder decidir como agir baseado no entendimento matemático do aluno (NICKERSON, LAMB & LAROCHELLE, 2017). Acreditamos que a competência Observar com Sentido cumpre com as descrições necessárias para se fazer o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK).

Demanda Cognitiva – Análise e Classificação de Atividades

Penalva e Llinares (2011) afirmam a necessidade do professor, ao planejar suas aulas, terem em mente os objetivos a serem atingidos e como alcançar usando ferramentas, como por exemplo, as tarefas matemáticas. Para esses autores, tarefas matemáticas são as propostas feitas pelos professores no processo de aprender matemática. Ainda, os autores apontam que atividade é um conjunto de tarefas a serem desenvolvidas pelos estudantes e que procedimentos são as formas de realização das tarefas.

Ainda nas pesquisas de Penalva e Llinares (2011), é possível traçar um vínculo entre aprendizagem e gestão das tarefas desde que elas, as tarefas, façam o estudante percorrer um caminho claro no sentido do entendimento do conteúdo matemático. Isso faz com que o professor tenha a compreensão que somente as tarefas não são suficientes para a aprendizagem, mas que se constituem como fatores que podem contribuir para o alcance dos objetivos. Para isso os autores reforçam que as tarefas devem fazer que seus estudantes pensem sobre o fazer matemática, superando apenas a recordação e os procedimentos soltos e valorizando o conhecimento prévio trazidos por eles.

Na atuação profissional, os professores deverão selecionar as tarefas que atendam os objetivos didáticos-pedagógicos traçados, adequando, para cada caso, o nível de exigência em cada situação. O ajustamento será feito a partir do nível cognitivo exigido aos estudantes. Llinares e Penalva (2001) trazem o termo Demanda Cognitiva informando que se trata da classe e nível de pensamento que se é exigido dos estudantes para a resolução da tarefa, apontando o que se alcança e o que se aprende em cada nível.

Smith e Stein (1998) classificam em quatro níveis de Demanda Cognitiva: tarefas que exigem a memorização (Nível 1); tarefas que usam procedimentos sem conexão (Nível 2); tarefas que utilizam procedimentos com conexão (Nível 3) e tarefas que exigem o “fazer matemática” (Nível 4).

Para a análise de atividades sob a óptica da Demanda Cognitiva, foi escolhido o livro didático Contato Matemática volume 1, da Editora FTD, de autoria de Joamir Souza e Jacqueline Garcia (2016). O referido livro é uma obra pertencente ao Programa Nacional de Livro Didático (PNLD) em vigor no triênio 2018-2020, distribuindo materiais didáticos dos componentes curriculares nas escolas públicas de todo o Brasil. A obra foi escolhida por ser utilizada pelos estudantes do Complexo Integrado de Educação de Porto Seguro (CIEPS), local de estágio supervisionado dos estudantes da Licenciatura Interdisciplinar em Matemática, Computação e suas Tecnologias da Universidade Federal do Sul da Bahia (UFSB).

Apresenta-se a seguir os níveis de demanda cognitiva, com exemplos retirados do referido livro didático, no capítulo de Funções Exponenciais.

De acordo com Smith e Stein (1998) as características de cada nível são:

Nível 1: tarefas que envolvem a reprodução de fórmulas e regras, com muita memorização, sem reflexões sobre as definições que estão sendo vistas.

1. Calcule as potências.

a) 13^2 e) $(-6)^3$ i) $3{,}3^2$

b) 2^7 f) -6^3 j) 7^{-2}

c) 29^0 g) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ k) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$

d) 7^1 h) $\left(\frac{8}{5}\right)^3$ l) $(-9)^{-2}$

Figura 1: Atividade 1
Fonte: Souza e Garcia (2016, p.139)

Observa-se que a atividade apresentada é de nível 1 pois requer apenas a aplicação de uma regra memorizada, sem fazer reforços ao conceito a ser apresentado.

Nível 2: exigem recurso por algoritmo, focada na obtenção das respostas ainda não fazem conexão com os conceitos matemáticos.

29. Sendo $f(x)=3^x$ e $g(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$, determine:

a) $f(0)$ d) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ g) $g(-3)$

b) $f(1)$ e) $g(1)$ h) $g\left(\frac{1}{2}\right)$

c) $f(-4)$ f) $g(2)$

Figura 2: Atividade 29
Fonte: Souza e Garcia (2016, p.144)

Classificou-se a atividade acima como nível 2 de demanda cognitiva por ainda dar ênfase na resposta, não fazendo conexão com o conhecimento específico da função exponencial, portanto uma tarefa que utiliza procedimento sem conexão.

Nível 3: intimamente relacionados com os conceitos ou procedimentos buscando a compreensão destes, apresentando claras conexões com as ideias ao subvalorizar o algoritmo pois o êxito se dará pela exigência de algum grau de esforço cognitivo.

31. Alguns fornos elétricos contêm um dispositivo que controla a temperatura em seu interior. Assim, o aparelho desliga automaticamente quando chega à temperatura desejada e torna a ligar quando há certa perda na temperatura. Um forno elétrico que possui esse dispositivo tem sua temperatura interna T calculada em função do tempo t que o forno está ligado, em minutos, pela função $T(t)=300-265\cdot(0{,}3)^{\frac{t}{10}}$.

Qual é a temperatura interna desse forno elétrico 5 min após ter sido ligado? E após 20 min?

Figura 3: Atividade 31
Fonte: Souza e Garcia (2016, p.144)

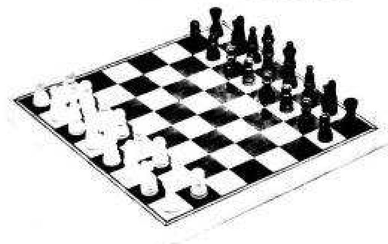
Para a questão escolhida como de nível 3, observa-se que já existe uma relação com o conceito matemático da função exponencial, exigindo uma melhor interpretação por parte do estudante, mesmo que exista um indicativo do conhecimento a ser aplicado. É uma tarefa que pedirá um procedimento com conexão.

Nível 4: Exigem um alto esforço cognitivo pois executam a tarefa por conhecerem e apresentarem a compreensão conceitual da matemática, verificado pelo pensamento complexo e muito distante do algorítmico em questões que não apresentam um indicativo de qual recurso deverá ser usado nem uma instrução prévia.

A questão abaixo é referente ao nível 4 de demanda cognitiva pois exige o “fazer matemática”, uma vez que é necessário um aprofundado nível cognitivo a partir de uma questão que não dá indicativos de resolução. O estudante deverá resgatar seus conhecimentos matemáticos e testá-los em um contexto de maior complexidade.

35. Há uma lenda que credita a invenção do xadrez a um brâmane de uma corte indiana, que, atendendo a um pedido do rei, inventou o jogo para demonstrar o valor da inteligência. O rei, encantado com o invento, ofereceu ao brâmane a escolha de uma recompensa. De acordo com essa lenda, o inventor do jogo de xadrez pediu ao rei que a recompensa fosse paga em grãos de trigo da seguinte maneira: 1 grão para a casa 1 do tabuleiro, 2 grãos para a casa 2, 4 para a casa 3, 8 para a casa 4 e assim sucessivamente. Ou seja, a quantidade de grãos para cada casa do tabuleiro correspondia ao dobro da quantidade da casa imediatamente anterior.

artemisphoto/ Shutterstock.com



O tabuleiro de xadrez possui casas alternadamente claras e escuras, sendo 32 de cada. As peças utilizadas para jogar também são claras e escuras, sendo 16 peças para cada jogador. O jogo de xadrez estimula o raciocínio lógico, entre outros benefícios.

a) De acordo com a lenda, qual é a quantidade de grãos de trigo correspondente à casa 6 do tabuleiro? E à casa 10?

b) Escreva uma função *f* que expresse a quantidade de grãos de trigo em função do número *x* da casa do tabuleiro.

c) Sabendo que o tabuleiro de xadrez possui 64 casas, qual o conjunto domínio da função *f*?

d) Escreva, na forma de potência, quantos grãos de trigo devem ser colocados na última casa do tabuleiro de xadrez.

Figura 4: Atividade 35
Fonte: Souza e Garcia (2016, p.145)

Considerações Finais

O desafio posto da docência com qualidade exige uma preparação dos futuros professores para apresentar um arcabouço teórico e habilidades práticas. Uma forma de conduzir os estudantes a aprender a Matemática é pela prescrição de atividades e tarefas, desde que seja intencional e bem escolhida a partir de cada objetivo traçado, considerando o nível cognitivo a ser desempenhado.

Assim, chega-se ao conceito de demanda cognitiva que descreve o nível de exigência dada em quatro formas distintas. Caberá ao professor identificar o nível e apresentar ao estudante dado o que se queira atingir. A partir disso, é proposto então que o futuro professor de matemática conheça os níveis cognitivos inseridos no desenho de formação profissional e consiga planejar suas aulas com a escolha de atividades com diferentes níveis de demanda cognitiva.

A escolha de tarefas, quando inseridas em um contexto de percepção das manifestações de raciocínio matemático dos estudantes, está caracterizado pela aquisição da competência docente Observar com Sentido, competência essa que bem caracteriza o professor de Matemática (PENALVA & LLINARES, 2011).

O presente artigo aponta a existência de atividades que se encaixam nos níveis cognitivos, em um livro didático, fator este que contribuirá na atividade docente com qualidade.

Referências e Bibliografia

Alarcão, I., Freitas, C. V., Ponte, J. P., Alarcão, J., & Tavares, M. J. F. (1997). A formação de professores no Portugal de hoje (Documento de um grupo de trabalho do CRUP - Conselho de Reitores das Universidades Portuguesas).

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57, 1-22.

Galvão, C., Ponte, J. P., Jonis, M. (2018) Os professores e sua Formação inicial. Práticas de Formação Inicial de Professores: Participantes e Dinâmicas. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Callejo, M.L; Valls, J; Llinares, S.(2010) Aprender a mirar con sentido situaciones de enseñanza de las matemáticas. In: M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (eds.), Investigación en Educación Matemática. Comunicación a los grupos de investigación. Seminario conocimiento profesional del profesor. XIV simposio de la SEIEM. Lérida.

Fernandéz, C; Llinares, S; Valls, J. (2011) "Mirando con sentido" el pensamiento Matemático de los estudiantes sobre la razón y proporción. Acta Scientiae, 13(1), 9-30.

Hiebert, J; Morris, A K; Berk, D; Jansen, A. (2007) Preparing teachers to learn from teaching. Journal of Teacher Education, 58, 47-61

Jacobs, V. R.; Lamb, L. L.; Philipp, R. A. (2010) Professional noticing of children's mathematical thinking. Journal for Research in Mathematics Education, v. 41, n. 2, 169-202.

Nickerson, SD; Lamb, L; Larochelle, R.(2017) Challenges in Measuring Secondary Mathematics Teachers' Professional Noticing of Students' Mathematical Thinking. Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts and Frameworks, 381-398.

Van Es, E. A.; Sherin, M. G. (2002). Learning to Notice: Scaffolding New Teachers Interpretations of Classroom Interacts. Jl. Of Technology and Teacher Education, v. 10, n. 4, p. 571-596.

Penalva, M. C.; Llinares, S. (2011) Tareas Matemáticas en la Educación Secundaria. In:GOÑI, Jesus María (coord) et al. Didáctica de las Matemáticas. Colección: Formación del Profesorado. Educación Secundaria. Barcelona: Editora GRAÓ. 12, 27-51.

Smith, M. S; Stein, M. K. (1998) Selecting ans Creating Mathematical Tasks: Foram Research to Practice. Matehmatics Teaching in the Middle Scholl, 3, 344-50.

Souza, J; Garcia, J. (2016). Contato Matemática. FTD, 139-145.

A formação compartilhada de professores no Clube de Matemática

Halana Garcez **Borowsky**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Brasil
halana.borowsky@gmail.com
Anemari Roesler Luersen Vieira **Lopes**
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil
anemari.lopes@gmail.com

Resumo

Este trabalho tem como objetivo discutir a formação inicial de professores que ensinam matemática no projeto Clube de Matemática, desenvolvido na perspectiva do compartilhamento. O projeto é desencadeado pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEMat) da Universidad Federal de Santa Maria (UFSM/Brasil) a partir do movimento de planejamento, desenvolvimento e avaliação de atividades de ensino em turmas dos anos iniciais do Ensino Fundamental de escolas públicas parceiras. Tal processo é orientado pelos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural (Vygotsky) e da Atividade Orientadora de Ensino (Moura) e tem nos levado que a compreender a formação compartilhada está para além de realizar ações em conjunto, está direcionada à realização de ações em colaboração que promovem o desenvolvimento dos sujeitos envolvidos.

Palavras-chave: Clube de Matemática, Formação Compartilhada de Professores, Educação matemática.

Introdução

A Matemática, assim como outras ciências, reflete o processo humano de produção do conhecimento. Moura (2000, p.3) enfatiza que a criação do conhecimento matemático na esteira do desenvolvimento ocorre "ora na frente, puxando a imaginação criadora, ora atrás, sistematizando o inventado para que outros pudessem apoderar-se de ferramentas simbólicas", e, no ínterim desse movimento, o homem é motivado pela necessidade do controle das quantidades e formas da natureza para buscar a solução de problemas que possam lhe dar conforto material e psicológico. Mas ainda que a Matemática seja esse "organismo vivo" que ao nos dar novas ferramentas de interação com a natureza física e simbólica, contribui para que nossa humanidade mantenha-se viva e confortável, é recorrente o discurso que na educação escolar a matemática é uma disciplina difícil de ensinar e de aprender.

Entendemos que a superação desse discurso perpassa, principalmente, pela formação dos professores que ensinam matemática. Isso significa compreender a formação docente como um processo de apropriação do conjunto de conhecimentos necessários para que o sujeito se torne professor que trabalha a serviço da educação. Em outras palavras, os caminhos de formação docente se constituem do mesmo modo como o processo de humanização: para tornar-se professor, o sujeito apropria-se dos movimentos histórico-culturais que perpassaram a constituição do trabalho docente.

Nesse sentido, o presente trabalho tem como objetivo discutir a formação inicial de professores que ensinam matemática no projeto Clube de Matemática (CluMat), desenvolvido na perspectiva do compartilhamento. Esse projeto CluMat é desencadeado pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEMat) da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM/Brasil) que é composto por acadêmicos dos cursos de Licenciatura em Pedagogia, Licenciatura em Matemática, de Pós-Graduação em Educação e Educação Matemática, professores da Educação Básica e do Ensino Superior. No CluMat os participantes planejam, desenvolvem e avaliam atividades de ensino em turmas dos anos iniciais do Ensino Fundamental de escolas públicas parceiras.

Entre os anos de 2014 e 2018, o CluMat foi desenvolvido em conjunto com as ações do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência no subprojeto interdisciplinar Educação Matemática (PIBID/InterdEM), financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes). É nesse contexto que apresentamos aqui um recorte de uma pesquisa que buscou investigar as relações essenciais do movimento de formação docente no projeto Clube de Matemática, na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural. Assim, nesse trabalho apresentaremos os aportes teóricos que orientam nossas ações (a Teoria Histórico-Cultural, a Teoria da Atividade e a Atividade Orientadora de ensino); os encaminhamentos metodológicos da pesquisa; um episódio de formação compartilhada que apresenta dados direcionados aos nossos objetivos e, por fim, algumas considerações.

Alguns pressupostos teóricos

A partir dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, entendemos a educação como uma via para o desenvolvimento humano, e não como uma mera aquisição de conteúdos e técnicas específicas. Por isso, destacamos que a educação escolar é importante em todas as fases do desenvolvimento e, de acordo com Rigon, Asbahr e Moretti (2010), a escola permite uma organização consciente dos processos de formação dos indivíduos a partir de uma organização intencional do ensino, que permite aos sujeitos a apropriação de conhecimentos, habilidades e formas de comportamento produzidas pela humanidade. “Nesse sentido, a escola é instituição privilegiada no que diz respeito às possibilidades de humanização do homem.” (Rigon; Asbahr; Moretti, 2010, p.29).

Vigotski (1998) expressa que a verdadeira essência da civilização consiste na construção propositada de monumentos para não esquecer fatos históricos preponderantes. Asbahr (2011) enfatiza que, na investigação do psiquismo humano, o ponto de partida é a história social, a história dos meios pelos quais a sociedade desenvolve-se e, nesse processo, desenvolvem-se os homens singulares. “A proposta vigotskiana é, portanto, compreender os fenômenos psicológicos enquanto mediações entre a história social e a vida concreta dos indivíduos." (Asbhar, 2011, P.25).

Nesse entendimento de humanização, pautado pelos estudos de Vygotsky, Leontiev propõe a Teoria da Atividade. Para Lontiev (2014) o homem desenvolve-se a partir da sua atividade principal, sob influência das circunstâncias concretas da sua vida e do lugar que ocupa no sistema das relações humanas. O termo atividade é culturalmente utilizado de forma ampla, estando relacionado com a realização de uma tarefa, tendo essa conotação, inclusive, no meio educacional. No entanto não chamamos todos esses processos de atividade. No contexto deste trabalho, utilizamos o termo a partir dos pressupostos da Teoria da Atividade, para aqueles processos que satisfazem uma necessidade que corresponde às relações do homem com o mundo.

> Por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo. (Leontiev, 2014, p.68)

Assim, ao pensarmos sobre o ensino de Matemática, entendemos que não é qualquer forma de organizar o ensino que irá proporcionar aos estudantes o desenvolvimento do pensamento teórico. Defendemos que o estudante vai aprender quando estiver em atividade e para tanto o ensino deve estar intencionalmente organizado pelo professor a partir do momento que o estudante adentra no espaço escolar.

A organização do ensino tem como premissa proporcionar a apropriação dos conceitos científicos pelos alunos e para que a aprendizagem se efetive "e se constitua efetivamente como atividade, a atuação do professor é fundamental na relação do estudante com o objeto do conhecimento, orientando e organizando o ensino" (Moura et al., 2010, p.94). Para tanto, é preciso que o professor crie condições para que o aluno possa agir movido por uma necessidade diretamente relacionada com a necessidade humana que levou à sistematização de tal conhecimento. Dessa forma, não estará apenas conhecendo empiricamente o objeto que trata a matemática, mas apropriar-se-á de todo um movimento dialético que envolve a constituição lógica e histórica do objeto estudado. Entendemos que, assim, a matemática assume papel fundamental para a efetivação do propósito da escola, afinal, o conhecimento matemático, sendo um patrimônio cultural, deve fazer parte não somente da história passada, mas contribuir efetivamente para o desenvolvimento da humanidade de gerações a gerações.

Mas como o professor pode organizar o ensino nessa perspectiva?

Com base nos pressupostos teóricos explicitados anteriormente e a partir da estrutura de atividade advinda de Leontiev, Moura (1996; 2010) propõe a Atividade Orientadora de Ensino (AOE) como encaminhamento metodológico para o ensino de matemática, que baliza as ações do Clube de Matemática. A AOE

> [...] respeita os diferentes níveis dos indivíduos e que define um objetivo de formação como problema coletivo é o que chamamos de atividade orientadora de ensino. Ela orienta um conjunto de ações em sala de aula a partir de objetivos, conteúdos e estratégias de ensino negociado e definido por um projeto pedagógico. Contém elementos que permitem à criança apropriar-se do conhecimento como um problema. E isto significa assumir o ato de aprender como significativo tanto do ponto de vista psicológico, quanto de sua utilidade. (Moura, 1996, p.32)

Desse modo, entendemos que a AOE proporciona não só a aprendizagem do aluno, mas contribui para a formação do professor. Afinal, nela, "estão presentes o conteúdo de aprendizagem, o sujeito que aprende, o professor que ensina e, o mais importante, a constituição de um modo geral de apropriação da cultura e do desenvolvimento do humano genérico". (MOURA et al., 2010, p.94).

Ao considerar que a formação docente não se reduz à sala de aula de um curso de licenciatura, mas constitui-se a partir de uma dimensão mais ampla, buscamos concebê-la como um processo histórico-cultural que pode trazer elementos que permitam uma análise mais complexa e profunda, que tem como eixo central o trabalho docente. Libâneo (2010, p.74) considera que, ao reportarmo-nos à THC, podemos compreender a formação profissional de professores por meio do trabalho real, "a partir das práticas correntes no contexto de trabalho e não a partir do trabalho prescrito, tal como aparece na visão da racionalidade técnica e tal como aparece também na concepção de senso comum".

Entendemos, portanto, que o processo só é possível quando os estudantes de licenciatura tem a possibilidade de compartilhar espaços formativos em que lhe são dadas essas oportunidades. Nesse sentido, para Lopes et al. (2016), é fundamental, no processo de formação do professor, criar situações em que haja a necessidade do compartilhamento das ações. Pois, desse modo, os sujeitos têm a oportunidade de desenvolver formas específicas de cooperação, que poderão permitir que ele atinja um nível adequado nas ações cognitivas por meio da apropriação e da conscientização do processo significativo da produção coletiva do conhecimento científico.

Na mesma direção, Placco e Souza (2006) destacam que aprender sobre a docência significa aproximar-se do conhecimento oferecido, apropriar-se dele a partir da própria história pessoal e particular, em um processo de ressignificação que ocorre na interação com o grupo. Esse processo constitui-se em instrumento de formação para formadores e sujeitos em formação, sendo a reciprocidade expressa na escuta entre todos os membros do grupo.

Assim, de acordo com Moura (2000), é na coletividade que se balizam as ações profissionais determinantes para o nível de formação do educador e, nessa direção, a formação se estabelece na interação com os pares e é movida por um motivo pessoal e coletivo. Para o autor, o motivo pessoal tem relação com o conjunto de conhecimentos e expectativas sobre a vida e os rumos que se acredita serem válidos para empreender o trabalho docente, já os motivos coletivos são dados por acordos que se estabelecem entre os que constituem a escola como grupo.

Encaminhamentos Metodológicos da Investigação

Como mencionado anteriormente, o Projeto Clube de Matemática – no decorrer da pesquisa – foi desenvolvido a partir das ações do subprojeto do PIBID InterdEM. O PIBID caracteriza-se, fundamentalmente, como um programa de ensino que possibilita, a estudantes de cursos de licenciatura, iniciação à docência; e, a professores da Educação Básica, uma perspectiva de formação contínua ao assumirem o papel de supervisores das atividades realizadas no âmbito do programa. A gênese do CluMat na UFSM está justamente em inserir futuros professores que ensinam Matemática no contexto escolar, com vistas à aprendizagem da docência, bem como a participação de professores da Educação Básica nesse processo formativo a partir da organização do ensino. Com o desenrolar do projeto, outras ações foram agregando-se ao processo de "estudo-planejamento-desenvolvimento-avaliação" das Unidades Didáticas, e investigações foram sendo realizadas.

Compreendemos que o CluMat proporciona aos estudantes da graduação contato direto com a escola e com seu futuro objeto de trabalho (o ensino); aos professores da escola de Educação Básica uma participação efetiva em um espaço de formação em que podem ser protagonistas; aos colaboradores da pós-graduação e à professora coordenadora possibilidades de aproximação entre ensino e pesquisa. Nessa perspectiva, consideramos que as unidades didáticas (sobre conhecimentos matemáticos) produzidas no contexto do projeto se constituem como uma unidade entre as atividades de ensino, aprendizagem e formação.

Assim, é nesse processo que buscamos os dados que nos ajudaram a investigar as relações essenciais do movimento de formação docente no projeto Clube de Matemática, acompanhando, no decorrer do ano de 2015, todos os encontros de estudo, planejamento e avaliação do grupo que era composto por dez estudantes de graduação, cinco acadêmicas de pós-graduação, duas professoras da Educação Básica e a professora coordenadora. Esses encontros foram gravados em áudio e vídeo e, posteriormente, suas transcrições originaram os episódios de formação compartilhada que constituíram a análise da pesquisa.

Os episódios não retratam todo o processo que é desenvolvido pelo projeto, mas apresentam situações em que as unidades de análise podem ser evidenciadas, com certa regularidade, em um processo dinâmico dos encontros realizados. De acordo com Moura (2000) os episódios poderão ser frases escritas ou faladas, que constituídos de cenas definidoras, caracterizam-no. “Os episódios serão reveladores sobre a natureza e qualidade das ações. Quanto à natureza, podemos destacar: se trata de conceito, de modos de ação, de valores, de conhecimento estratégico [..] ou se é apenas conhecimento prático”. (Moura, 2000, p.60). O autor usa como analogia para explicar o movimento de escolha dos episódios a produção de um filme, pois o pesquisador deverá escolher as cenas com fins a contemplar seu objetivo, o roteiro é composto de cenas simples que, assim como no filme, procurarão passar a sensação de que o fenômeno está revelado. “O espectador será chamado a viver como diretor de montagens um conjunto de situações que, em movimento do total das cenas escolhidas, vai construindo a sua visão da comunidade a ser relatada.” (Moura, 2000, p.70).

Assim, a organização dos dados desta pesquisa possibilitou a constituição de episódios de formação compartilhada, sendo que no presente artigo, apresentamos um desses episódios.

O compartilhamento de ações na formação docente

O CluMat possui como característica o envolvimento entre sujeitos com diferentes formações: licenciandos em pedagogia, matemática, educação especial, alunos de pós-graduação e professores. Esse compartilhamento é destaque no episódio que aqui apresentamos, decorrente de um Encontro Geral de Avaliação do projeto, em que uma das acadêmicas de matemática relata sobre suas aprendizagens ao participar de um grupo com essa característica. Os nomes dos sujeitos da pesquisa são fictícios, mantendo os princípios éticos da pesquisa.

> **Rose:** Eu estou adorando, é muito bom, é claro que, como eu faço matemática, futuramente, vou ser professora de Ensino Médio ou séries finais do Ensino Fundamental, mas o que eu estou aprendendo aqui, eu acho que tem certas noções que a gente precisa ter para dar aula para qualquer idade, porque eu só consigo ver isso agora, estou começando a ver esse lado, e o contato com os pequenos é maravilhoso, não sei se eu tive sorte de pegar uma turma boa e um grupo bom.

> **Coordenadora:** É, isso também existe, eu acho assim, para quem faz matemática e quem já é formada em matemática, a gente começa a entender muita coisa dos anos finais e do Ensino Médio olhando para os anos iniciais
> **Rose:** E quando tu não tens a oportunidade, tu não te tocas, eu até achava assim, que pedagogia é importante, mas eu não tinha noção do quanto é importante, e foi uma boa escolha que eu fiz, não me arrependo.
> **Coordenadora:** E tem uma coisa que a gente comenta muito aqui, que é muito fácil para o professor, para nós, professores de matemática, pegar um sexto ano e dizer: "meu Deus, o que aquela professora fez até lá". Mas o que normalmente a gente, professor de matemática, faz, diz "nossa, essas crianças não sabem", mas aí queremos ensinar do jeito que a gente pensa ser correto e, quer dizer, a gente acaba não ensinando eles mesmo, e toda a dinâmica de todo esse aprendizado que a criança teve nos outros anos e compreender que não é que a criança não sabe, ela não sabe aquilo que eu quero passar, porque eu quero que ela chegue no sexto ano sabendo de cor a tabuada, sabendo fazer as operações, tudo aquilo que eu espero que ela saiba ela já tem de chegar no sexto ano sabendo, e aí, se ela não sabe o que eu faço, muitas vezes, eu t

Rose é acadêmica do curso de matemática e, anteriormente, participou como bolsista de iniciação à docência de um subprojeto de matemática do PIBID/UFSM. Optou por fazer parte do projeto CluMat a fim de ter outras experiências formativas, o que ela destaca em sua fala, "*futuramente, vou ser professora de Ensino Médio ou séries finais do Ensino Fundamental, mas o que eu estou aprendendo aqui, eu acho que tem certas noções que a gente precisa ter para dar aula para qualquer idade, porque eu só consigo ver isso agora"* (Rose). A referência a "*noções para dar aula"* traz indícios de que a estudante busca por um modo geral de ação sobre a docência. No CluMat, o desenvolvimento de desse modo geral de ação é sustentado pelos princípios teórico-metodológicos da AOE, que permitem que as acadêmicas se apropriem de conhecimentos – teóricos e práticos - sobre organizar o ensino.

No diálogo apresentado é levantada uma discussão que permeia com frequência a área da Educação Matemática, qual seja, o fato de que há um discurso de que os professores dos anos iniciais não sabem matemática e que os professores de matemática não têm "didática". A partir do que as participantes relatam na cena, podemos entender que um projeto formativo, que conta com a participação de sujeitos com diferentes formações, ao privilegiar uma dinâmica de interação de conhecimentos de diversas naturezas, pode romper com essas barreiras entre os cursos de formação, como no caso do CluMat, em que a preocupação se centra na possibilidade de que todos os sujeitos envolvidos se apropriem de conhecimentos, visando à organização do ensino. Lopes e Vaz refletem sobre isso:

> A constatação de que, no curso de Licenciatura em Matemática, não se aprende matemática para ensinar associada às críticas que são direcionadas aos professores dos anos inicias que não sabem esse conteúdo e ao que ressaltamos anteriormente, referente à influência do conhecimento na ação docente, levam-nos a refletir sobre quais conhecimentos matemáticos o professor deve ter, que lhe permitam ensinar matemática de maneira mais eficaz, fazendo com que seus alunos aprendam. (Lopes; Vaz, 2013, p.1022)

As reflexões que surgem a partir da experiência do CluMat nos levam a questionar seos processos de formação de professores lhes permitem a apropriação de conhecimentos que contribuam para a organização do ensino de matemática, visando o ensino na Educação Básica. A partir dos referenciais da Teoria Histórico-Cultural, acreditamos, assim como Moura, Sforni e

Araújo (2011, p.42), que "[...] o conhecimento produzido só se constitui efetivamente como tal quando inserido na atividade humana que lhe confere significado social e sentido pessoal". Contudo, essa compreensão, que para nós é considerada uma premissa, nem sempre está presente nas atuais propostas de formação de professores.

Do mesmo modo, com a interação entre as futuras professoras e as professoras em atuação, como mencionado anteriormente, encaramos a significação do trabalho docente como um elemento formador para todas. Na dinâmica do projeto, as professoras e as acadêmicas, ao organizar ações que objetivam o ensinar, também, requalificam seus conhecimentos (Moura, 1996). Sendo assim, a busca pela organização do ensino, recorrendo à articulação entre a teoria e a prática, visando à aprendizagem do aluno, constitui-se na atividade do professor, e esta, por sua vez, promove a atividade do estudante ao criar nele um motivo especial para a sua atividade: estudar e aprender teoricamente (MOURA et al., 2010). Assim, o planejamento, o desenvolvimento e a avaliação também constituem-se em elementos formativos para o professor.

Considerações finais

Ao pensar sobre a formação compartilhada, em especial no projeto CluMat/UFSM, podemos entender que compartilhar está para além de realizar ações em conjunto; é realizar ações em colaboração que promovam o desenvolvimento dos sujeitos envolvidos. O compartilhamento é uma condição para o desenvolvimento de uma coletividade e está presente na vivência, reflexão, discussão de experiências formativas que são pertinentes à atividade pedagógica desenvolvida dentro de um grupo, pertencente a uma dada prática social. Tomamos, portanto, a premissa da formação compartilhada como sendo um projeto coletivo que leva à atividade pedagógica, da mesma forma que a atividade pedagógica pressupõe um projeto coletivo, dessa maneira, constituindo uma unidade dialética do movimento formativo docente. De acordo com Lopes et at (2016)

> Sendo a educação um processo coletivo, é no compartilhar que o docente tem a oportunidade de apropriar-se de novos conhecimentos, pois, embora as ações possam ser de cada um daqueles que concretizam uma determinada atividade, a aprendizagem não acontece no que cada um deles faz de forma isolada, mas na interação entre sujeitos ou entre sujeitos e objetos. Assim, faz-se necessário que as ações sejam desenvolvidas por todos, mas que cada um tenha não só a oportunidade, mas o comprometimento de participar. (p.25)

A partir do episódio apresentado, podemos inferir que a premissa do compartilhamento torna-se um elemento importante na formação dos participantes do CluMat. Nessa perspectiva, concordamos com Lopes et al. (2016) que destacam que a possibilidade da interação de diferentes sujeitos, com diferentes conhecimentos de modo a permitir o compartilhamento de ações, sentidos e significações, pode ser determinante na mudança de qualidade no processo formativo com o qual os sujeitos estão envolvidos.

Referencias Bibliográficas

Asbahr, F. S. F. *"Por que aprender isso professora?" Sentido pessoal e atividade de estudo na psicologia histórico-cultural.* (2011). Tese (Doutorado em Psicologia) – Universidade de São Paulo, São Paulo.

Leontiev, A. N. (2014). Uma contribuição à teoria de desenvolvimento da psique infantil. In: Vigotskii, L. S. et al. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.* São Paulo: Ícone.

Lopes, A. L. V.; Vaz, H. G. B. (2014). O Movimento de Formação Docente no Ensino de Geometria nos Anos Iniciais. *Educação & Realidade*, v.39, n.4, p.1003-1025, oct./dic. 2014. Disponível em; <http://www.scielo.br/pdf/edreal/v39n4/04.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2015.

Lopes, A.R. L. V. et al. (2016). Trabalho coletivo e organização do ensino de matemática: princípios e práticas**.** *Zetetiké*, v.24, n.45, p.13-28, 2016.

Moura, M. O. (1996). A atividade de ensino como unidade formadora. *Bolema,* Rio Claro, n.12, p.29-43.

Moura, M. O. et al. (2010). A atividade orientadora de ensino como unidade entre ensino e aprendizagem. In: MOURA, M. O. (Org.). *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural.* Brasília: Liber livro.

Moura, M. O. (2000) *O educador matemático na coletividade de formação*: uma experiência com a escola pública. Tese (Livre-Docência) - Universidade de São Paulo, São Paulo.

Moura, M. O.; Sforni, M. S. F.; Araújo, E. S. (2011). Objetivação e apropriação de conhecimentos da atividade orientadora de ensino. *Revista Teoria e Prática da Educação***,** v.14, n.1, p.39-50.

Placco, V. M. N. S.; Souza, V. L. T. (2006). *Aprendizagem do adulto professor.* São Paulo: Loyola.

Rigon, A. J.; Asbahr, F. da S. F.; Moretti, V. D. (2010). Sobre o processo de humanização. In: Moura, M. O. (Org.). *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural.* Brasília, DF: Liber Livro.

Vigotski, L. S. (1998). *A formação social da mente.* São Paulo: Martins Fontes.

Ações e formações de professores sobre ensino e aprendizagem de matemática: movimentos de um grupo de pesquisa

Anemari Roesler Luersen Vieira **Lopes**
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil
anemari.lopes@gmail.com
Halana Garcez **Borowsky**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
halana.borowsky@gmail.com
Brasil
Patrícia **Perlin**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Alegrete
Brasil
patricia.perlin@iffarroupilha.edu.br
Sandra Aparecida Fraga da **Silva**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo – Campus Vitória
Brasil
sandrafraga7@gmail.com

Resumo

A partir da compreensão da importância da integração entre a Universidade e a Escola de Educação Básica e de que a interação entre os diferentes sujeitos que compõe esses espaços representa possibilidades de aprendizagem para todos, foi criado o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, na Universidade Federal de Santa Maria (GEPEMat/UFSM). Este grupo, formado por estudantes de graduação e da pós-graduação; professores da Educação Básica e do Ensino Superior, desenvolve diferentes ações de ensino, pesquisa e extensão, pautados nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural. Neste contexto, o presente artigo tem por objetivo descrever ações deste grupo, materializadas em projetos voltados ao ensino e processos formativos relacionados à Educação Matemática.

Palavras chave: grupo de pesquisa, educação matemática, interação universidade e escola, formação de professores, ensino e aprendizagem.

Introdução

Compreendendo que as discussões sobre Educação Matemática escolar devem ter como partícipes a escola e o professor e que, na organização de ações e investigações que envolvem diferentes sujeitos, a interação entre estes pode proporcionar aprendizagem a todos os envolvidos, foi criado no ano de 2009 o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, na Universidade Federal de Santa Maria (GEPEMat/UFSM), Brasil. É constituído por estudantes de Licenciatura em Pedagogia, Matemática e Educação Especial, estudantes da Pós-Graduação em Educação e Educação Matemática, professores da Educação Básica e professores universitários que semanalmente se reúnem para a realização de estudos teóricos e investigações, bem como elaboração e desenvolvimento de ações em escolas públicas da rede de ensino estadual e municipal. Seus componentes, com diferentes formações, atuações e histórias de vida, se agregam a partir da preocupação comum com o ensino e a aprendizagem da matemática, materializada em diversos projetos.

O GEPEMat está organizado em duas linhas de pesquisa: ensino e aprendizagem, cujo objetivo é investigar propostas e processos educativos que envolvem o ensino e a aprendizagem em diferentes espaços e níveis educacionais; e formação de professores, que objetiva investigar, sob o enfoque da Teoria Histórico-Cultural, a formação docente em seus diferentes espaços e níveis educativos. Estas duas linhas, embora com objetivos específicos, articulam-se em diversas ações e investigações desenvolvidas pelos participantes do grupo.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é descrever ações do GEPEMat, materializadas em projetos voltados ao ensino e processos formativos relacionados à Educação Matemática. Para isso, inicialmente apontamos brevemente os fundamentos relacionados às dimensões orientadoras e executoras dos projetos. Posteriormente, destacamos três projetos que estão sendo desenvolvidos atualmente e finalizamos com algumas considerações.

Fundamentos teóricos orientadores

As ações desenvolvidas no âmbito do GEPEMat – que envolvem ensino, pesquisa e extensão – pautam-se na Teoria Histórico-Cultural por meio das obras de Vigotsky (2000, 2002) e, em especial, na Teoria da Atividade de Leontiev (1978,1983) e Atividade Orientadora de Ensino – AOE – de Moura (1996, 2010). Estes aportes têm sido importantes para compreendermos aspectos relevantes tanto sobre o processo de ensino e aprendizagem quanto da formação dos professores que ensinam matemática, dos quais destacamos alguns deles a seguir.

A concepção da educação que adotamos a entende como um processo de humanização (Leontiev, 1978), a partir da apropriação da cultura elaborada expressa na aprendizagem de conhecimentos historicamente produzidos, como no caso da Matemática. O processo de humanização está relacionado ao movimento histórico da humanidade que se desenvolve a partir da satisfação de necessidades. Isto implica em compreender a Educação Matemática como via para o desenvolvimento psíquico dos sujeitos e é função do professor promover, por meio da organização do seu ensino de matemática, as máximas capacidades cognitivas de seus alunos.

O desenvolvimento das funções psicológicas superiores está relacionado ao processo de ensino, sendo que a aprendizagem ocorre do nível interpsíquico para o intrapsíquico (Vigotsky, 2000, 2002), a partir da interação dos sujeitos. Esta compreensão ampara nossa premissa de que todas as ações desenvolvidas pelo grupo ocorrem a partir da interação entre diferentes sujeitos, que contribuem com diversas experiências e conhecimentos.

A importância dessa interação entre os sujeitos confirma-se por meio do compartilhamento de ações nas atividades em comum (Rubtsov, 1996) em que as ações e operações envolvem a repartição de modos de ação entre participantes envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. O compartilhamento é condição que implica a troca com o outro no sentido de que todos se apropriam tanto das ações desenvolvidas em interação, quanto dos sentidos e significados assumidos por elas, gerando um movimento de interdependência entre a diversidade dos conhecimentos dos sujeitos envolvidos e a mudança qualitativa tanto das ações, quanto dos conhecimentos (Lopes, 2009). Assim, entendemos que em um grupo, tal como o nosso, embora as ações sejam de cada um dos sujeitos, aquilo que concretiza sua aprendizagem não acontece a partir do que ele realiza de forma isolada. O compartilhamento é que vai permitir a cada um dos envolvidos a apropriação dos conhecimentos produzidos coletivamente.

Ainda, compreendemos a atividade do professor como atividade humana que promove o seu desenvolvimento. Ao nos referirmos ao termo atividade, o fazemos amparados em Leontiev (1978, p.69), para quem o termo identifica "os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo".

Em relação aos nossos encaminhamentos, nos pautamos na Atividade Orientadora de Ensino - AOE (Moura, 1996, 2010) como modo geral de organização do ensino de matemática, que exige do professor, entre outras coisas, a intencionalidade da ação pedagógica voltada a apropriação do conhecimento teórico por parte do aluno e a apropriação do movimento lógico histórico (Kopnin, 1978) do conceito a ser trabalhado. Para Moura (1996, p.32), a AOE "orienta um conjunto de ações em sala de aula a partir de objetivos, conteúdos e estratégias de ensino negociado e definido por um projeto pedagógico. Contém elementos que permitem à criança apropriar-se do conhecimento como um problema".

Ações do Grupo

Dentre as inúmeras ações do GEPEMat ao longo de sua existência, destacamos neste momento três projetos: "*Clube de Matemática"; "A Licenciatura em Matemática em questão: de que formação falamos?";* e *"Geometria e movimento lógico-históricos de seus conceitos".* Os projetos possuem características que demonstram o compromisso do grupo em estreitar os laços entre Universidade e Escola de modo que privilegiam não somente a organização, o desenvolvimento e a avaliação de ações de ensino da disciplina com os estudantes, como também formação de professores que ensinam Matemática na Educação Básica.

Moura (2013) ao discutir, a partir da Teoria Histórico-Cultural, o que constitui um projeto, caracteriza-o como sendo "constituído por atividades realizadas por sujeitos que têm uma individualidade, mas que ao interagirem com outros também mobilizados pela mesma atividade, vão moldando cada indivíduo, dando-lhes qualidade nova" (Moura, 2013, p.10). O autor entende que o conceito de projeto tem uma interface com o conceito de atividade, afinal, ele é uma das criações do homem para organizar suas ações com vistas a uma determinada finalidade, uma objetivação e que o faz em um contexto que é histórico e cultural. Desse modo, fica claro que, para concretizá-lo, deve-se sujeitar à possibilidade que os sujeitos que o concretizam tenham suas ações orquestradas para um fim idealizado.

Assim, consideramos que cada um dos projetos que apresentamos se constitui como uma unidade de ações realizadas por sujeitos que, ao interagirem com outros, também, mobilizados pela mesma atividade, ganham qualidade nova. Desse modo, é possível compreender também que o compartilhamento das ações permite o processo de mudança da qualidade de cada sujeito que, "ao fazer, aprende o modo geral de realizar ações adequadas a novas atividades que tenham por finalidade a satisfação da necessidade dos sujeitos envolvidos nessa atividade" (Moura, 2013, p.10).

O "*Clube de Matemática"* é um projeto de extensão instituído na UFSM desde o ano de 2009, financiado pelo Fundo de Incentivo à Extensão (FIEX/UFSM) e desenvolvido com o intuito de constituir um espaço de discussão teórica e metodológica sobre a organização do ensino de matemática a partir de ações desenvolvidas escolas de Educação Básica.

Compõem-se com a participação de estudantes dos cursos de Licenciatura em Pedagogia, Matemática e Educação Especial, estudantes de pós-graduação em Educação e Educação Matemática, professores da Educação Básica e professores universitários. Possui uma dinâmica que envolve a interação com as crianças na escola e a organização e avaliação das ações realizadas na universidade. O primeiro momento é o planejamento que é realizado coletivamente no grupo. Os acadêmicos vão até a escola e entram em sala de aula, acompanhados pela professora regente da turma, para realizarem as unidades didáticas que são pautadas nos pressupostos teóricos e metodológicos da Atividade Orientadora de Ensino. Por fim, a avaliação acontece novamente na universidade, onde são discutidos aspectos relacionados não apenas às aprendizagens das crianças, mas, também, à aprendizagem da docência e do conteúdo matemático por parte dos professores e futuros professores envolvidos.

O projeto Clube de Matemática já esteve vinculado ao Observatório da Educação a partir do projeto "Educação Matemática nos Anos Iniciais: Princípios e Práticas da Organização do Ensino" (OBEDUC-PPOE) e integrou as ações do subprojeto Interdisciplinar Matemática 1º ao 6º ano do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID/UFSM), ambos programas da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Com o passar do tempo, o projeto foi se constituindo como um importante espaço de formação, pois proporciona aos estudantes de graduação um contato direto com a escola e com seu futuro objeto de trabalho (o ensino), os professores, pós-graduandos e professores universitários também estão em movimento de formação, pois consideramos que as unidades didáticas produzidas no contexto do projeto se constituem como uma unidade entre as atividades de ensino, aprendizagem e formação para todos os envolvidos.

Tal espaço formativo tem sido legitimado em pesquisas de mestrado e doutorado, em que o Clube de Matemática é o lócus das investigações acerca da formação de professores que ensinam matemática. Esse movimento, ao nosso entender, também possibilita que o projeto esteja em constante aprimoramento, buscando contribuir de modo mais efetivo com a realidade social a partir da formação docente, da organização do ensino de matemática e, também, do fortalecimento da interação da universidade e escola

Além do desenvolvimento de projetos cujo foco é o ensino e a aprendizagem da Matemática na Educação Básica, o grupo vem preocupando-se com a formação de professores. Nesta direção, desenvolve-se o projeto de pesquisa "*A Licenciatura em Matemática em questão: de que formação falamos*?", que iniciou em 2017. A discussão sobre a formação docente é premissa para todo aquele que trabalha em um curso de licenciatura, pois embora se possa constatar os avanços em relação às políticas educacionais implementadas pelo Ministério da Educação brasileiro nos últimos anos, direcionadas à formação docente e às práticas de ensino, ainda há falta de professores e sérias críticas aos cursos de formação inicial, principalmente porque nos deparamos com professores que não sabem ensinar e alunos que não conseguem aprender. Em se tratando particularmente da formação do professor de matemática as questões são agravantes por dois motivos: o fato de que esta disciplina é uma das que mais reprova na Educação Básica e, diante disto, não há como deixar de refletir sobre as possíveis relações entre o fracasso escolar e a formação do professor; e a constatação da diminuição do número de professores de matemática habilitados, tanto pela reduzida procura - ou até permanência - por parte dos estudantes pelos cursos de licenciatura em Matemática, quanto pelo fato de que muitos habilitados não trabalham nesta área.

As ações investigativas deste projeto têm buscado traçar um perfil dos cursos de Licenciatura em Matemática do estado do Rio Grande do Sul, Brasil, visando identificar aspectos que os aproximam, dando continuidade aos estudos desenvolvidos pelo grupo ao participar de um projeto em âmbito nacional intitulado “Mapeamento e estado da arte da pesquisa brasileira sobre o professor que ensina Matemática” (Fiorentini, Passos, Lima; 2016). Do geral para o particular, o projeto pretende: conhecer as principais ideias referentes à formação de professores presentes na literatura dos anos de 1980 até a atualidade; investigar aspectos relativos à história dos cursos de licenciatura em Matemática do Brasil; organizar um banco de dados de pesquisas sobre o curso de Licenciatura em Matemática; elencar as principais recorrências presentes nas Propostas Político-Pedagógicos dos cursos de Licenciatura em Matemática, em relação a concepção de formação do futuro professor; apontar as principais recorrências presentes nas matrizes curriculares dos cursos de licenciatura em Matemática do Rio Grande do Sul no que diz respeito às disciplinas e ementas.

Tendo em vista que o projeto encontra-se em andamento, a expectativa é de que seus resultados permitirão um olhar mais apurado para os cursos de licenciatura do Rio Grande do Sul no sentido de subsidiar discussões sobre as reformas curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática, em especial o da UFSM, e o aprofundamento das discussões e debates sobre formação inicial de professores.

Congregando a tríade ensino, pesquisa e extensão, desenvolvemos durante os anos de 2017 e 2018, o projeto “*Geometria e movimento lógico-históricos de seus conceitos”* com o objetivo de estudar o movimento lógico-histórico de conceitos geométricos para organizar ações relativas aos conteúdos de geometria estudados, dando destaque à organizações de Atividades Orientadoras de Ensino – AOE – e ao uso de recursos didáticos. Foi desencadeado a partir de ações de: estudo; planejamento; desenvolvimento e avaliação coletiva de ações de ensino de Geometria voltadas à Educação Infantil, aos anos iniciais e aos anos finais do Ensino Fundamental.

Participaram desta ação vários integrantes do referido grupo, dos diferentes níveis de ensino (licenciandos, mestrandos, doutorandos e professores). O estudo do movimento lógico-histórico dos conteúdos geométricos foi ampliado nos anos de 2017 e 2018, com leitura e discussão de diferentes textos como o de Lima e Moisés (2002). Estes autores apresentam uma geometria desenvolvida a partir da observação da natureza, envolvendo os sentidos, como o par mãos e olhos. Esta observação e o próprio desenvolvimento da humanidade levou a construção de diferentes movimentos que constituem a(s) geometria(s). Um desses movimentos é o da decomposição, no qual partimos da observação do espaço, decompomos para o plano e para a linha. Porém, este processo também pode ser compreendido a partir da composição, num movimento inverso. Com estes estudos, identificamos alguns nexos conceituais da geometria que são as formas da natureza, a localização e as figuras geométricas. Notamos a necessidade de realização do estudo do movimento lógico-histórico dos conceitos geométricos anterior a fase de planejamento das ações e tarefas que foram desenvolvidas nas salas de aula da Educação Básica. Ressaltamos que a compreensão do movimento de decomposição e composição se fizeram presente nas tarefas e AOE ampliando a qualidade das ações desenvolvidas.

Em relação ao que foi desenvolvido nas salas de aula, escolhemos turmas diferenciadas e realizamos um trabalho vinculado aos nexos conceituais. Aplicamos as tarefas desde a educação infantil, envolvendo a localização e percepção de si e de objetos no espaço. No ensino fundamental, partimos das formas geométricas para, posteriormente, sistematizar discussões acerca das figuras geométricas. Nas sessões reflexivas, as participantes destacaram esse estilo do processo formativo, que contribui para a aprendizagem da docência. Embora tenhamos trabalhado em subgrupos, fazíamos momentos de compartilhamento dos estudos, planejamentos e ações desenvolvidas no coletivo. Esse movimento contribuiu para a aprendizagem de todos.

Considerações Finais

De modo geral, orientados por suas particularidades, os projetos têm como metas:

- proporcionar para professores e futuros professores possibilidades de discutir sobre ensino e aprendizagem da matemática do ponto de vista teórico e metodológico visando impactos em sua prática;
- possibilitar a estudantes da Educação Básica uma visão diferenciada da Educação Matemática, levando-os à aproximação com conhecimentos matemáticos;
- estabelecer parcerias que revelem possibilidades de universidade e escola de Educação Básica trabalharem juntas para uma educação de melhor qualidade, principalmente em se tratando do problemático ensino de matemática.

E, como resultado desses projetos, temos pesquisas de iniciação científica, trabalhos de conclusão de curso, dissertações e teses. Em suas especificidades, cada um desses trabalhos apresenta resultados que vem contribuindo para que consigamos compreender melhor processos relacionados à Educação Matemática, dos quais destacamos dois, especificamente em relação à formação de professores e ao ensino de matemática.

Em relação à formação de professores é possível identificar que a aproximação da universidade com a escola de Educação Básica com ações de inserção de estudantes de graduação no contexto escolar contribui significativamente para a formação tanto dos futuros professores, quanto dos professores atuantes com os quais interagem. Sobre o ensino, embora a matemática seja uma das disciplinas em que os alunos apresentam maior dificuldade, é possível pensar em modos de organizar o ensino que contribuam com a aprendizagem, desde que organizadas intencionalmente, a partir da apropriação de conhecimentos por parte do professor, ou seja, o professor precisa saber matemática e saber ensinar para poder desenvolver a sua atividade.

Ainda, em especial, essas pesquisas vêm apontando a relevância de espaços, tais como o composto pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, que oportunizam aos sujeitos que o compõem possibilidades compartilhadas de estudar e participar da organização e desenvolvimento de ações de ensino, pesquisa e extensão que tem como foco o ensino e a aprendizagem da matemática na escola.

Por último, enfatizamos que os projetos desenvolvidos pelo GEPEMat, estão alicerçados por uma coletividade docente, em que os sujeitos ao realizarem suas ações dirigem-se à realização de objetivos traçados pelo grupo e cada um contribui, com seu esforço pessoal, para alcançá-los. Na coletividade, os objetivos são socialmente valiosos, ou seja, não se encerram no próprio grupo e essa deve ser uma premissa para a formação docente na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural.

Referências e bibliografia

Fiorentini, D.; Passos, C. L. B. & Lima R. C. R. (org.) (2016). *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática*: Período 2001 – 2012. FE-Unicamp: Campinas, E-book. Disponível em: https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/pf/subportais/biblioteca/fev-2017/e-book-mapeamento-pesquisa-pem.pdf

Kopnin, P. V. (1978). *A dialética como lógica e teoria do conhecimento***.** Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.

Leontiev, A. (1983). *Actividad, conciencia e personalidad.* Havana: Editorial Pueblo y Educacion.

Leontiev, A. (1978). *O desenvolvimento do psiquismo*. Lisboa: Horizonte Universitário, 1978.

Lima, L. C.; Moisés, R. P. (2002). *Uma Leitura do Mundo*: forma e movimento. São Paulo: Escolas Associadas.

Lopes, A. R.L.V. (2009). *Aprendizagem da docência em matemática: o Clube de Matemática como espaço de formação inicial de professores***.** Passo Fundo: Editora UPF.

Moura, M. O. (Org.) (2010). *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural.* Brasília: Líber livro.

Moura, M. O. (2013) Teoria da Atividade: contribuições para a pesquisa em Educação Matemática. In:

Encontro Nacional de Educação Matemática. *Anais..*. Curitiba.

Moura, M.. (1996). A atividade de ensino como unidade formadora. *Bolema***.** São Paulo, 12, 29-43.

Rubtsov, V. (1996). Atividade coletiva e aquisição de conceitos teóricos de Física por escolares. In GARNIER, C.et. al. (Org). *Após Vygotsky e Piaget: perspectiva social e construtivista: Escola russa e ocidental*. Trad. Eunice Gruman. Porto Alegre: Artes Médicas, 186-195.

Vigotsky, L. S. (2000). *A construção do pensamento e da linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

Vigotsky, L. S.(2002). *A formação social da mente***:** o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes.

Educação inclusiva na formação inicial: percepções de licenciandos em Pedagogia e Matemática.

Marina Andrades **Felipe**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
marina.andrades@gmail.com
Marlise **Geller**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
marlise.geller@gmail.com

Resumo

Este trabalho apresenta uma investigação sobre as percepções de licenciandos em Pedagogia e Matemática em relação ao processo de alfabetização/letramento e de alfabetização matemática na perspectiva inclusiva, e na formação inicial que permeia os cursos. Participaram desta pesquisa 15 alunos, e envolveu um curso virtual pela plataforma moodle. Este artigo contempla um recorte de uma dissertação de mestrado e analisa, em uma abordagem qualitativa, as percepções sobre sua formação inicial e da alfabetização/letramento e da alfabetização matemática, sob o olhar do vínculo afetivo, junto a educação inclusiva. Pode-se inferir que os participantes apontam lacunas na formação inicial em relação as atividades práticas do docente com o aluno de inclusão e salientam e importância do vínculo entre professor e aluno.

Palavras chave: educação inclusiva, formação inicial, pedagogia, licenciatura em matemática.

Introdução

Esse artigo, decorrente de uma dissertação de mestrado em andamento em um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, aborda a percepção dos licenciandos dos cursos de Licenciatura em Matemática e Pedagogia, sobre o quanto a formação inicial aborda a educação inclusiva, e como percebem a alfabetização nesse mesmo viés, ainda sob o olhar do vínculo afetivo entre professor e aluno.

Os professores que irão atuar na disciplina de matemática, são os concluintes nos cursos de Matemática-Licenciatura e da Pedagogia, pois segundo a LEI 9394/1996 (BRASIL, 1996), "Art. 62. A formação de docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de licenciatura plena, admitida, como formação mínima para o exercício do magistério na educação infantil e nos cinco primeiros anos do ensino fundamental, a oferecida em nível médio, na modalidade normal".

A pesquisa norteadora dessa escrita, propõe-se a desenvolver uma formação para licenciandos, sobre a educação matemática inclusiva, e possui como pergunta geratriz: "Como a educação inclusiva, a partir de reflexões teórico-práticas, é construída na formação inicial de professores que ensinam matemática na educação básica?".

Formação de professores que ensinam matemática: algumas reflexões

A formação do profissional inicialmente propõe ensinamentos básicos, ou melhor, mostra as ferramentas que necessita para atuar em sua área habilitando-o através de um diploma. Sobre o que entendemos como certificado ou diploma, Santarosa (2010, p. 69) exemplifica: "é uma licença que necessita ser revalidada no decorrer do exercício profissional". Mas a construção do profissional como um todo, perpassa pelas atualizações que o mesmo vivencia, sejam por experiências na atuação ou cursos de curta e média duração.

O educador no brasil, para atuar, deve ser graduado no curso de Pedagogia (habilitação para ministrar aulas da educação infantil ao 5º ano do ensino fundamental, chamados anos iniciais do ensino fundamental) ou em um curso de Licenciatura específico para a área de atuação desejada, como a Matemática (habilitação para ministrar aulas do 6º ao 9º anos do ensino fundamental, chamado anos finais, e do 1º ao 3º anos do Ensino Médio).

Para a formação do profissional da educação, o caráter da mesma pode possuir o viés de "formação inicial" quanto "formação continuada", quando a mesma propõe discussões sobre a prática docente a estudantes que já as vivenciam, seja por meio de estágios, ou seus empregos quando já estão conectados a educação.

Os conceitos ou conteúdos, que são discutidos e/ou abordados durante a formação desse professor, vão muito além de "métodos" ou "fórmulas", pois o estudante deve refletir sobre seu papel como educador e compreender o que de fato é necessário saber para atuar na prática docente. Para Franchi (1995, p. 66):

> O professor deve ter a sua disposição um conhecimento abrangente que ilumine sua ação. Este não pode limitar-se a conteúdos e instrumentos que trabalhará em sala de aula.

Ou seja, a reflexão, como ferramenta dessa formação, é imprescindível para preparar esse futuro educador para sua prática. Ainda é interessante destacarmos a formação do profissional voltado a área do ensino de matemática, que Gatti (2014, p. 39) destaca:

> A formação para a prática da alfabetização e iniciação à matemática e às ciências naturais e humanas é precária, como também é precária a formação para o trabalho docente nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio.

E como nós educadores nos percebemos sobre o cognitivo e emocional desses alunos? Estamos preparados para compreender e auxiliar esse aluno a se conhecer e entender como a cabeça dele funciona?

> Há quase ausência nesses cursos de formação em conhecimentos sobre o desenvolvimento cognitivo e socioafetivo de crianças, adolescentes e jovens, suas culturas e motivações. De modo geral, nas ementas dos currículos das licenciaturas encontram-se, nos fundamentos educacionais, proposições genéricas que passam ao largo de oferecer uma formação mais sólida (Gatti, 2014, p. 39).

A aproximação do docente ao processo de desenvolvimento cognitivo de seu educando é uma abordagem que deve ser introduzida em todas as formações docentes. Quando tratamos de formação de professores, estamos lidando com o aprimoramento de profissionais que atuarão diretamente na construção cognitiva e social de seres humanos, então estes profissionais devem estar preparados para compreender as necessidades cognitivas e afetivas que seus alunos estão necessitando, para encontrar estratégias e efetivar aprendizagens.

Metodologia

A pesquisa[1] desenha-se com uma abordagem qualitativa por meio do olhar do licenciando, nos cursos de pedagogia e matemática, já que a pesquisa qualitativa, de acordo com Bogdan e Biklen (2010), envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto da pesquisadora com a situação estudada, enfatizando o processo e se preocupando em retratar a perspectiva dos participantes.

A pesquisa envolveu um curso virtual ofertado na plataforma *Moodle*, composto por 4 módulos, com objetivos específicos, descritos na Tabela 1:

Tabela 1-Módulos e Objetivos do curso

Módulo	***Título***	***Objetivo do Módulo***
1	Legislação	Apresentar as leis que regem o trabalho do educador, discutindo o quanto as mesmas estão presentes nas escolas.
2	Caso 1 – Deficiência Intelectual	Discutir sobre a adaptação de conteúdos para um caso apresentado, sobre um aluno com Deficiência intelectual.
3	Caso 2 – Transtorno Bipolar	Apresentar um caso sobre uma aluna com transtorno bipolar, e organização do conteúdo matemático proposto para a série que a aluna frequenta.
4	Caso 3 – Síndrome de Down e MoyaMoya	Discutir sobre a adaptação de conteúdos no caso de uma aluna com múltiplas situações, em uma turma de 7º ano, que inclui mais 2 alunas.

Fonte: A pesquisa.

A análise aqui apresentada, compõe-se de um recorte do questionário inicial, apresentado aos licenciandos que realizaram o curso a que nos referimos anteriormente. Para conhecermos o grupo, algumas características são importantes serem apresentadas.

O grupo compõe-se de 15 estudantes, sendo 5 estudantes de Pedagogia, e 10 estudantes de Matemática - Licenciatura. Entre os participantes da pesquisa, obtivemos maneiras distintas de conclusão do Ensino Médio, aparecendo as modalidades EJA, científico, Magistério/Normal ou Técnico. Os estudantes estão distribuídos em semestres distintos, conforme quadro da Tabela 2:

[1] Aprovada pelo Comitê de Ética sob protocolo número CAAE: 78396017.6.0000.5349

Tabela 2-Participantes

Aluno Participante	***Curso***	***Semestre***	***Tempo de Experiência Docente***
A1	Pedagogia	8	3 anos
A2	Matemática	4	3 anos
A3	Pedagogia	3	10 anos
A4	Matemática	1	1 ano
A5	Matemática	5	3 anos
A6	Matemática	3	2 anos
A7	Pedagogia	2	1 ano
A8	Matemática	3	5 anos
A9	Matemática	4	menos de 1 ano
A10	Matemática	7	2 anos
A11	Matemática	3	1 ano
A12	Pedagogia	6	5 anos
A13	Pedagogia	4	1 ano
A14	Matemática	2	_
A15	Matemática	3	1 ano

Fonte: A pesquisa

O educador que está se formando, está com o perfil em constante transformação, onde antes os alunos que estavam buscando a formação superior para ensinar já tinham a experiência do curso Normal, hoje, grande parte inicia sua caminhada pela educação direto no ensino superior. Segundo Cunha (2005, p.24), o perfil do iniciante na licenciatura se modifica e:

> Dessa forma, não temos mais, no Curso Normal ou na Pedagogia, alunos/as que fizeram estágios ou já ingressaram na docência, como era comum. Não encontramos alunos/as com experiências de professores/as, com dúvidas e conflitos inerentes à teoria-prática, com questões e problemas da sala de aula.

No grupo, é importante destacar que apenas um integrante ainda não teve contato ou experiência efetiva com o ambiente escolar, e que as experiências relatadas pelos demais participantes inclui práticas de estágio, trabalho voluntário, e ainda, atuação como secretário de escola.

Vínculo afetivo e a educação inclusiva: análise dos dados

No questionário inicial, os participantes se posicionaram sobre o ensino inclusivo, e ainda trouxeram relatos sobre suas experiências envolvendo a inclusão escolar ou outros contatos com crianças com deficiência e/ou transtornos.

> [...]considero a inclusão efetiva desses alunos um grande desafio, a maior dificuldade é atitudinal, pois quando há um vínculo entre o aluno e o professor facilita a aprendizagem. (A3)

O vínculo entre o professor e seus alunos, transforma o contexto escolar em um ambiente de aprendizagem constante, e para essa relação, é importante que o professor compreenda o aluno como um ser social. Segundo Kramer (1989):

> [...] o trabalho pedagógico precisa se orientar por uma visão das crianças como seres sociais, indivíduos que vivem em sociedade, cidadãs e cidadãos. Isso exige que levemos em consideração suas diferentes características, não só em termos de histórias de vida ou de região geográfica, mas também de classe social, etnia e sexo. Reconhecer as crianças como seres sociais que são implica em não ignorar as diferenças. (KRAMER, 1989, p. 19)

Os futuros professores, participantes da pesquisa, percebem a importância da visão do professor para com o aluno, sobre suas habilidades e peculiaridades para o aprendizado. O participante A8, em seu relato sobre sua experiência, reflete acerca desses e outros aspectos:

> [...] foi uma experiência incrível, visto que cada um apesar de suas peculiaridades tem muito a mostrar e desenvolver. A maior dificuldade foi em não ter uma capacitação para tal atividade e então a falta de conhecimento em saber como agir em determinadas situações[...] (A8)

Ainda, descreve o quanto sua caminhada foi enriquecedora para sua formação como docente, e como percebe que devamos buscar capacitações e formações para nossa atuação:

> [...] ao decorrer dos anos foi muito gratificante, bem como posso afimar que aprendi muito em relação a inclusão e adaptação curricular, o que levo pra minha vida profissional, e também sei o quanto precisamos buscar e nos capacitar para receber e atender á esses alunos. (A8)

Durante uma atuação em estágio, o estudante A5, entendeu como uma angústia e dificuldade "conquistar a confiança da criança, em mim e em nela mesma em questões diversas, desde escrever ou até mesmo subir uma escada sozinha". E no final do questionário, ainda apresentou uma frase animadora:

> "É um desafio muito grande trabalhar com alunos de inclusão, mas com amor e dedicação vamos conseguir!" (A5)

Considerações finais

O intuito dessa escrita sucinta, é instigar ao leitor a busca por novas produções e pesquisas acerca da educação inclusiva, pela perspectiva dos estudantes. Um ponto positivo a ser exaltado, é a percepção desse estudante como parte integrante do processo, e se inserindo na aprendizagem desse estudante através do vínculo afetivo.

A caminhada já construída desse grupo de estudantes, propõe aos mesmos muitos questionamentos acerca da inclusão, e evidencia o quão importante se faz uma formação que inclua essa e outras discussões nos encontros acadêmicos.

Continuamos buscando uma educação de qualidade, e que permita ao futuro professor continuar sonhando com os saltos mais altos possíveis para ele e seus estudantes, e compreendendo a inclusão de todos os alunos no ambiente escolar, como um ambiente curioso e saudável de aprendizado.

Referências

Bogdan, R.; Biklen, S. K (2010). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Brasil (1996). Lei 9.394/96, *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Brasília: Ministério da educação e do Desporto.

Cunha, R. C. O. B.(2005). Lembranças de escola na formação inicial de professores/as. In: *Olhar de Professor*. Ponta Grossa, 23-38.

Franchi, E. P. (1995). A insatisfação dos professores, consequências para a profissionalização. In Franchi, E.P. (org). *A causa dos professores*. Campinas, PAPIRUS.

Gatti, B. (2014). A formação inicial de professores para a educação básica: as licenciaturas. Revista USP, (100), 33-46.

Kramer, S. (1989). Com a pré-escola nas mãos: uma proposta curricular. São Paulo: Ática.

Santarosa, L. M. C. (2010) (org). *Tecnologias digitais acessíveis*. Porto Alegre; JSM Comunicação Ltda,

O estudo de aula como mecanismo didático em Residência Pedagógica

João Marcos Almeida **Ferreira**
Universidade Estadual da Paraíba
Brasil
joaomarcos0120@gmail.com
José Emanuel Barbosa **Alves**
Universidade Estadual da Paraíba
Brasil
emanuelbarbosaalves10@hotmail.com
Mariana Almeida **Ferreira**
Universidade Estadual da Paraíba
Brasil
mariana2500almeida@gmail.com
Roger Ruben Huaman **Huanca**
Universidade Estadual da Paraíba
Brasil
roger@uepb.edu.br

Resumo

O presente artigo descreve o estudo de aula como uma alternativa didática que foi proposta na etapa inicial do Programa Residência Pedagógica, financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Objetivamos discutir a inserção de professores de matemática em formação, no ambiente escolar, para investigar colaborativamente e reflexivamente, sua prática futura. Entretanto, fez-se necessário uma revisão bibliográfica, tendo como principal teórico João Pedro da Ponte (2016) e por conseguinte realizou-se discussões entre bolsistas e orientador do programa. Evidenciamos as potencialidades de se trabalhar o estudo de aula como mecanismo didático, visando a interação e compreensão dos alunos, para que possam desenvolver, de forma significativa, uma aprendizagem de qualidade com o ensino de matemática.

Palavras-chave: Residência Pedagógica, Educação Matemática, Estudo de Aula. Mecanismo Didático. Formação de Professores. Ensino de Matemática. Prática Futura. Aprendizagem de Qualidade.

1 Introdução

A nova geração de alunos, exigem um perfil docente preparado para diversas situações em sala de aula. Contudo, o que se observa na íntegra, é que a maioria dos professores insistem em permanecer no tradicionalismo, priorizando seu papel de mero transmissor de conhecimentos (Freire, 1996).

Em contrapartida, com intuito de provocar essa mudança, programas como o Residência Pedagógica - RP, têm sido experimentados para verificar se o aperfeiçoamento na formação de professores e a exploração de diversos mecanismos didáticos surtem efeitos positivos na aprendizagem e construção da cidadania dos alunos. Diversos graduandos no país se tornaram bolsistas do programa financiado pela CAPES, que teve início no mês de agosto de 2018, em conformidade com a política nacional. Com isto, a formação de professores foi fortalecida, constituindo um profissional mais maduro e conhecedor de sua própria identidade docente.

Na área de Matemática, isto têm um grande significado, sabendo que ainda existe uma rejeição pela mesma. As tarefas propostas pelo Programa Residência Pedagógica, executado na Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campus Monteiro/PB, na etapa inicial, promoveram leituras e discussões de vários temas, dentre eles o estudo de aula, que despertou o interesse para escrever este artigo.

O Estudo de Aula é um mecanismo didático, com grandes potencialidades como processo de formação, já que os professores trabalham em conjunto visando a aprendizagem de seus discentes. Assim, neste artigo levantamos questões sobre o estudo de aula e como a sua realização favorece a formação inicial dos residentes.

Onuchic e Huanca (2013) num dos capítulos "A licenciatura em Matemática: o desenvolvimento profissional dos formadores de professores", publicado no livro Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior, no ano de 2013, colocam algumas perguntas que podem ser inquietações de muitos pesquisadores sobre a formação de professores de Matemática.

> Como está nossa matemática? Como está nossa educação matemática? O que nós, pesquisadores, estamos produzindo nessa linha? Como nossa pesquisa acadêmica se relaciona com a educação básica? Há transferência do produto de nossas dissertações e teses para o trabalho do professor de matemática em sala de aula? Como concebemos a educação matemática no ensino superior? O que consideramos importante trabalhar, no processo de ensino e aprendizagem, com nossos alunos na licenciatura? Perguntamo-nos, também, se ser professor é uma profissão ou é apenas um ofício (Onuchic & Huanca, 2013, p. 310).

Todas essas perguntas fazem parte de inquietações de nossa vida enquanto alunos da formação inicial, também são perguntas que nos levaram a querer realizar o presente artigo, ou seja, nós residentes devemos estar preparados da melhor forma possível e que sejamos capazes de fazer matemática, sempre que possível, uma ponte de tópicos matemáticos que estamos estudando no curso de licenciatura em matemática com tópicos trabalhados nos Ensinos Fundamental e Médio.

2 Desenvolvimento

2.1 O Estudo de Aula na Residência Pedagógica

De acordo com Brasil (2018) o Residência Pedagógica é um programa articulado a CAPES que integra a Política Nacional de Formação de Professores e tem por objetivo unir teoria e prática através do aperfeiçoamento profissional nos cursos de licenciatura, promovendo a imersão do licenciando na escola de educação básica.

Através de um conjunto de etapas foi possível estudar a importância do estudo de aula como um mecanismo didático a ser aderido pelos profissionais que estão em campo, pelo qual irá promover ao professor uma visão mais ampla do aprendizado e desenvolvimento dos seus aprendizes.

O estudo de aula é realizado por uma equipe de professores e comunidade escolar, onde alguns professores centram-se na observação da aula lecionada por um ser docente, que não será o centro das atenções mas, o aluno e como ele desenvolve seu aprendizado. Em seguida iremos descrever como ocorreu as etapas de pesquisa e de como irão sobressair durante o andamento do Programa Residência Pedagógica.

2.1.1 Etapa 1: Entendo o Estudo de Aula através da pesquisa

Os bolsistas contemplados, iniciaram as atividades correspondente a etapa inicial entre os meses de agosto e setembro de 2018, no qual, tinham por exigências, o cumprimento de ações referentes a preparação teórica. Com isto, os estudos e as reflexões obtidas, ocasionaram discussões e tarefas definidas por parte do coordenador local, com intuito de refletir sobre a profissão docente.

Um dos textos indicados pelo coordenador do programa RP para discussão foi "O Estudo de Aula como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática", publicado no bolema em 2016 pelos autores Ponte (et al., 2016), onde eles trazem um caso empírico de um estudo de aula, investigando as potencialidades desta ferramenta numa prática colaborativa e reflexiva; as quais iremos abordar.

2.1.2 Etapa 2: Observando a Realidade Escolar

O estudo de aula se tornou não apenas uma tendência nacional para formação de professores em Portugal, mas internacionalmente. Essa tendência ainda está sendo revista no Brasil, pois são estudos divulgados recentemente. A Educação básica brasileira vem atravessando momentos complicados, principalmente no ensino de matemática onde os alunos são treinados a resolver tecnicamente listas de exercícios e não a desenvolver seu pensar criticamente (Ponte et al., 2016).

Depois de receber todo suporte teórico, os integrantes do Programa Residência Pedagógica irão adentrar no convívio escolar por um período de quatro meses, para observarem, atividades em sala de aula, reuniões pedagógicas, conselho de classe, adquirir conhecimentos das atividades de gestão escolar. Por fim iremos preparar planos de atividades de acordo com as demandas educacionais dos alunos, onde de forma colaborativa desenvolveremos estudos de aula para sanar deficiências nas práticas dos professores de matemática e buscar efetivar uma aprendizagem diferenciada aos educandos, mostrando a eles uma nova visão da matemática.

2.1.3 Etapa 3: Prática dos estudos na regência

Conforme o Programa RP, os bolsistas após o período de observação, ficaram mais 10 meses residindo na escola, ou seja, no mínimo contendo 100 horas de regência de classe, de um total de 320 horas a cumprir da terceira etapa do Programa RP. Seguindo este cronograma e com base nas observações realizadas na etapa 2, iremos colocar em prática tudo que foi planejado, discutido e refletindo colaborativamente o que pode servir de apoio para entendermos o processo de ensino e aprendizagem decorrente do dia a dia do professor e seus alunos em sala de aula.

2.2 Estudo de Aula: Teoria e Prática para Capacitação dos Professores de Matemática

O estudo de aula se constrói inicialmente, com um problema sob as orientações curriculares, os resultados de investigação sobre a aprendizagem do tópico e a sua experiência anterior, além de prever "dificuldades dos alunos, antecipam possíveis questões que possam surgir na aula, constroem tarefas, formulam estratégias de ensino e preparam instrumentos para a observação", onde um grupo de professores, o qual todos participam não apenas lecionando, mas observando e tirando nota. Este ciclo significa que, o mais relevante é a aprendizagem dos alunos, promovendo nos professores, a autoconfiança e aprofundamentos teóricos.

O texto dos autores Ponte (et al., 2016) apresenta um caso na cidade de Lisboa, onde foram feitos estudos de aula para investigar as suas potencialidades e expandir este trabalho. Pela opinião da direção da escola, cinco professoras foram escolhidas. Inicialmente, negociou-se sobre os objetivos e a preparação das aulas, e ao final, notando-se um maior interesse, relatou-se a experiência. Reunidas, as professoras discutiram sobre os possíveis erros dos alunos, possíveis soluções, os questionamentos; como também, o que poderia ser feito para que eles pudessem compreender melhor sobre o assunto abordado, estes levantamentos foram chamados de discussão e natureza das tarefas, e análise das dificuldades dos alunos.

Após essa discussão, realiza-se um diagnóstico dos conhecimentos dos educandos, com o intuito de adaptar tarefas de acordo com os objetivos propostos, isto é, o planejamento. Depois, houve a discussão do diagnóstico e o que permeia nesta etapa, é a troca de experiências pelas professoras. Ao final, obtêm-se a sistematização das principais dificuldades e o conhecimento dos alunos.

Uma nova etapa, é a análise dos processos de raciocínio por meio dos exemplos resolvidos pelos alunos: a generalização e a justificação, que possibilitaram a troca de ideias sobre as oportunidades de generalização e tarefas para a aula de investigação, definindo novas atividades a serem feitas. Também foram feitas discussões coletivas na sala de aula, chamando atenção para o desempenho da aula investigativa.

2.3 Aprendendo a aprender ensinando: discussões sobre o Estudo de Aula

Finalizado o estudo de aula, foi feito um balanço global, expondo cada momento e questionando a experiência e a estranheza inicial das professoras; se valeu a pena investir nessa formação profissional; o que tinham achado da resolução de tarefas de matemática; a importância da realização do diagnóstico e de analisar a natureza das tarefas e o raciocínio dos alunos; e por fim, refletiram sobre o planejamento, a aula de investigação e sobretudo a reflexão pós-aula. Por conseguinte, as professoras refletiram sobre o trabalho realizado, como sintetiza Ponte (et al. 2016)

> Ao longo desta reflexão, as professoras reconheceram vários fatores que as podem ter levado a envolver-se no trabalho como a resolução de tarefas matemáticas e a exploração de temas como a natureza das tarefas e os processos de raciocínio dos alunos. Valorizaram em especial a importância das discussões coletivas na sala de aula. Destacaram ainda o trabalho colaborativo e a oportunidade para se constituírem num grupo de trabalho onde se integraram as professoras novas na escola (PONTE et al., 2016. p. 885).

Por não estarem acostumadas com estas tarefas no seu dia a dia, as professoras apresentaram uma significativa mudança o qual evidenciou a construção de novos saberes, o protagonismo da equipe formadora, o trabalho em equipe das professoras e a estrutura no geral do que foi abordado em cada uma das sessões, e o envolvimento em geral com os estudos de aula, tornando a profissão docente cada vez mais prazerosa.

Após a leitura do texto sobre o estudo de aula como processo de desenvolvimento de professores de matemática dos autores Ponte (et al., 2016), escrevemos uma resenha e posteriormente, debatemos sobre; procurando associar os fatores do texto, com o cronograma da Residência Pedagógica para a efetivação das tarefas propostas.

2.4 Uma Análise do Estudo de Aula Como Mecanismo Didático

Nos dias atuais, surgem novos desafios para o ensino da matemática. É neste sentido que é exigido do professor uma releitura da sua prática em sala de aula continuadamente, para isto, o professor deve sair de sua zona de conforto e tomar uma nova postura frente as suas próprias limitações, é neste sentido que as aulas ganham caracterizações peculiares, pois, os alunos são tratados não como meros telespectadores, mas, como protagonizadores de um ensino de qualidade. De acordo com Nóvoa (1992):

> A formação não se constrói por acumulação (de cursos, de conhecimentos ou de técnicas), mas sim através de um trabalho de reflexividade crítica sobre as práticas e de (re)construção permanente de uma identidade pessoal. Por isso é tão importante investir a pessoa e dar um estatuto ao saber da experiência (NÓVOA, 1992, p. 13).

Por parte de muitos profissionais das licenciaturas em matemática, a uma grande preocupação com a forma de como o professor leciona sua aula, suas experiências e de como os alunos desenvolvem o aprendizado. É neste sentido que o estudo de aula torna-se tão importante ao ponto de mostrar ao professor as situações que necessitam de mudança em sala de aula, conduzindo o docente a uma análise do que está sendo transmitido, aperfeiçoando sua prática através do que ele ensina e de como seus alunos aprendem. A prática aqui analisada pelo professor irá fruir de acordo com o desenvolvimento dos seus alunos, não será algo repentino, porém, trabalhado, levando-o a pensar criticamente. Para que um trabalho como o estudo de aula seja desenvolvido em uma instituição de ensino, deve haver uma efetivação do corpo docente, neste caminho a inexperiência ou comodismo devem ser vencidos como Barros (2018) disse,

> O impacto da experiência do professor sobre o aprendizado dos alunos pode ser afetado por vários fatores, como o próprio comportamento do docente. Pode ocorrer, por exemplo, que professores mais experientes reduzam seu nível de esforço exatamente por perceberem que são melhores ou por serem mais bem remunerados por tempo de serviço e não por terem um melhor desempenho em sala de aula. Se isso acontecesse, o impacto potencial da experiência sobre o aprendizado do aluno estaria subestimado, pois os professores anulariam parte desse efeito com um menor empenho (Barros, 2018, online)

Ao tratar o estudo de aula como mecanismo didático, surgem uma corporação de procedimentos que devem ser seguidos e analisados com certa rigidez e comprometimento dos futuros professores. O ensino através do estudo de aula é composto por uma sequência de tarefas como planejamento, discussão e análise de aulas que tem por objetivo conhecer as dificuldades dos alunos, os aspectos positivos de cada um e buscar de forma concreta a compreensão do aluno, para que ele possa desenvolver seu conhecimento. É neste papel traçado pelo professor que a didática tem sua participação efetiva, pois, sem ela seríamos meros reprodutores. Libâneo (2017) diz,

> O ensino consiste no planejamento, organização, direção e avaliação da atividade didática, concretizando as tarefas da instrução; o ensino inclui tanto o trabalho do professor (magistério) como a direção da atividade de estudo dos alunos. Tanto a instrução como o ensino se modificam em decorrência da sua necessária ligação com o desenvolvimento da sociedade e com as condições reais em que ocorre o trabalho docente. Nessa ligação é que a Didática se fundamenta para formular diretrizes orientadoras do processo de ensino (Libâneo, 2017, p.53).

3 Conclusão

Carvalho e Carvalho (2012) enfatizam que a incumbência do professor nas escolas e instituições de Ensino Superior é a de discutir o próprio processo de educação, o que passa por estimular a curiosidade e a seriedade dos alunos, não garantindo, mas permitindo que estes percebam que existem contradições na sociedade, possibilitando com isso que alguns continuem de maneira mais comprometida nesse processo de transformação.

Nesse sentido, Onuchic e Huanca (2014) dizem que, uma proposta de formação inicial precisa dar oportunidade aos professores e futuros professores, entre outras situações, de repensar e problematizar suas concepções sobre processos de ensino e de aprendizagem.

> Diante da atenção voltada para o ensino, apresentamos uma perspectiva sobre o conhecimento do conteúdo no ensino, a qual considerava importante na formação de professores, baseada em três categorias: conhecimento do conteúdo da matéria; conhecimento pedagógico do conteúdo; e conhecimento curricular (Shulman, 1986, apud Onuchic & Huanca, 2014, p. 1023).

Assim, ao discutirmos sobre o estudo de aula, nos deparamos com suas potencialidades e como este seria útil para as tarefas do Residência Pedagógica, apropriando suas respectivas situações didáticas. Deste modo, houve o diálogo da teoria com a prática das professoras, que apresentaram significativo avanço em seu desenvolvimento profissional.

Concomitantemente, nos imaginamos atuando no estudo de aula e como este atribuirá valor à nossa profissão docente. O estudo de aula é um mecanismo didático fundamentado na colaboração e na reflexão, e no entanto, requer cuidados para seu indispensável sucesso.

4 Bibliografia e referências

Barros, R. P. *Experiência do professor em sala de aula*. Disponível em http://www.paramelhoraroaprendizado.org.br/Conteudo/verbete.aspx?canal=20100701145550501160&subtema=20100615161126445512&verbete=20110419151037476242. Acesso em 25 out. 2018.

Brasil. (2018). *Residência pedagógica*. CAPES. Disponível em: https://capes.gov.br/educacao-basica/programa-residencia-pedagogica. Acesso em 25 out 2018.

Carvalho, L. M. O., &Carvalho, W. L. P. (2012). *Formação de professores e questões sociocientíficas no ensino de ciências*. São Paulo: Escrituras.

Freire, P. (1996). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática docente*. São Paulo: Paz e Terra.

Libâneo, J. C. (2017). *Didática*. Cortez Editora.

Nóvoa, A. (1992). *Formação de professores e profissão docente*. Lisboa: Dom Quixote.

Onuchic, L. R., & Huanca, R. R. H. (2013). A Licenciatura em Matemática: O desenvolvimento profissional dos formadores de professores. In: Frota, M. C. R., Bianchini, B. L. & Carvalho, A. M. F. T. (Orgs.). *Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior*. 1ed. Campinas: Papirus, p. 307-331.

Onuchic, L. R., & Huanca, R. R. H. (2014). Uma Revolução no Campo da Formação dos Professores de Matemática. In: A*nais do II Congresso Nacional de Formação de Professores e XII Congresso Estadual Paulista sobre Formação de Educadores*. Águas de Lindóia: Universidade Estadual Paulista, p. 1020-1031.

Ponte, J. P. d. et al. (2016). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. *Bolema*, v. 30, n. 56, p. 868–891.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Una comunidad de práctica de profesores en formación que reflexiona sobre el concepto de función

Andrea Carolina **Quintero** Baños
Universidad Industrial de Santander
Colombia
Andreacquinterob@gmail.com
Sandra Evely **Parada** Rico
Universidad Industrial de Santander
Colombia
Sanevepa@uis.edu.co

Resumen

En este documento se presenta el avance de una investigación que está enmarcada en la línea de formación de profesores, específicamente en la formación inicial. Ésta tiene como objetivo caracterizar el pensamiento reflexivo de una comunidad de práctica de profesores de matemática en formación que negocia el concepto de función. Por medio de éste, se pretende responder a la pregunta: ¿Qué significados sobre el concepto de función y su enseñanza, construye una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación? Para lograr el objetivo de investigación proponemos trabajar bajo una interpretación del modelo de Reflexión-y-Acción (R-y-A) de Parada (2011), modelo que facilita al profesor en formación analizar y reflexionar sobre aspectos puntuales de sus primeras prácticas. A su vez, proponemos una metodología para trabajar en cursos de formación inicial de profesores de matemáticas que se caracterizan como una comunidad de práctica.

Palabras clave: Modelo de reflexión y acción, formación de profesores, comunidad de práctica, negociación de significados, concepto de función.

Problemática y contexto

Algunos autores como Hitt, (1996; 1998), Olvera (2015), Carlson y Oehrtman (2005) y Amaya, Pino-Fan, Medina (2016) mencionan dificultades que tanto estudiantes como profesores muestran en la comprensión del concepto de función. En particular, es de gran preocupación las dificultades que los docentes puedan presentar alrededor de un concepto, ya que estos son quienes tienen la tarea de enseñar. Shulman (1987) ratifica que un profesor que hace parte de una unidad educativa, debe comprender bien la estructura y la organización conceptual de la materia a enseñar.

En el desempeño del profesor, se deben afrontar constantemente situaciones donde no se tiene una respuesta inmediata, y es aquí cuando pueden salir a flote las diferentes dificultades que los docentes tienen alrededor de un concepto. Por ello, es de gran importancia incentivar a los docentes a realizar constantemente una tarea reflexiva sobre su quehacer, y que dicha reflexión sea vista como un proceso de aprendizaje, en el que se identifiquen dificultades y fortalezas, para así plantear alternativas de mejoramiento y superación.

Al respecto, Flores (1998) recalca la importancia de la reflexión como una herramienta en la formación inicial y desarrollo profesional de los profesores, ya que esta permite que los profesores mediten e indaguen sobre las dificultades que se pueden presentar en su práctica.

La universidad industrial de Santander (UIS) cuenta con una Licenciatura en Matemáticas, la cual tiene tres ejes de formación, matemático, didáctico y pedagógico. El eje matemático, es el encargado de brindar una formación sólida sobre los objetos matemáticos, y es en el componente didáctico donde los estudiantes se confrontan con sus saberes, esto se da en el momento en que reflexionan epistemológica y didácticamente sobre los diferentes objetos matemáticos, precisamente cuando necesitan hacer diseños didácticos para la enseñanza.

Una de las materias que ofrece este componente didáctico es Didáctica del cálculo, la cual está orientada específicamente a reflexionar sobre los objetos matemáticos estudiados en Cálculo, entre ellos el concepto de función. Este curso ofrece una balanza equilibrada de aspectos epistemológicos y aspectos didácticos del cálculo diferencial, por lo tanto, su objetivo es ofrecer desde la teoría y la práctica fundamentos para el diseño de metodologías adecuadas para el aprendizaje del cálculo (Escuela de Matemáticas, 2010).

En este contexto, se identifican dos oportunidades de investigación y acción para la mejora de un programa de formación inicial de profesores, oportunidades como: i) la constitución de comunidades de práctica para la formación inicial de profesores, y, ii) el fortalecimiento tanto conceptual como didáctico de la noción de función.

Así, resulta de nuestro interés responder a la pregunta de investigación: ¿Qué significados sobre el concepto de función y su enseñanza, construye una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación? Para dar respuesta a esta pregunta, nos planteamos como objetivo: caracterizar el pensamiento reflexivo de una comunidad de práctica de profesores de matemática en formación que negocia el concepto de función.

Aspectos teóricos y conceptuales

Para el desarrollo de la investigación usaremos principalmente una interpretación del modelo Teórico-metodológico de Reflexión y Acción (R-y-A) de Parada (2011), en el cual se propone trabajar al interior de Comunidades de Práctica (CoP) de educadores matemáticos. Dado que dicho modelo se enmarca dentro de la teoría social de las CoP, es importante describir aquí algunos de los elementos de dicha teoría.

Para Wenger (1998), una CoP es un grupo de personas que tienen algunas cosas en común, por ejemplo, comparten una preocupación, un conjunto de problemas o presentan interés por algún tema, y que sobre lo que tienen en común, trabajan colaborativamente para construir el conocimiento que favorecerá a cada uno de los miembros de la comunidad.

El mismo autor menciona que dentro de las comunidades de práctica se posibilitan tres aspectos particulares: i) la negociación de significados: es el proceso mediante el cual los participantes de una comunidad de práctica interactúan unos con otros, permean y enriquecen sus significados con relación a los de los demás; ii) la participación: se refiere al proceso que combina las habilidades de hacer, hablar, pensar, sentir y pertenecer, y se caracteriza por ser un proceso tanto personal como social en el que interviene el cuerpo, mente, emociones y relaciones sociales, y; iii) la cosificación: puede verse como un proceso o un producto que incluyen hacer, diseñar, representar, nombrar, codificar, describir, percibir, interpretar, utilizar, reutilizar, descifrar y reestructurar, pero tomando estos no solamente como objetos concretos, sino también como reflejos de las prácticas y de los significados propios de los participantes de una comunidad de práctica.

Una interpretación del modelo R-y-A para el estudio de la función

Como ya se había mencionado, Parada (2011) retoma las ideas de la teoría de comunidades de práctica de Wenger (1998) en el planteamiento de un modelo teórico y metodológico denominado *modelo de reflexión-y-acción en comunidades de práctica de educadores de matemáticas (R-y-A).* La Figura 1 presenta una interpretación de dicho modelo.

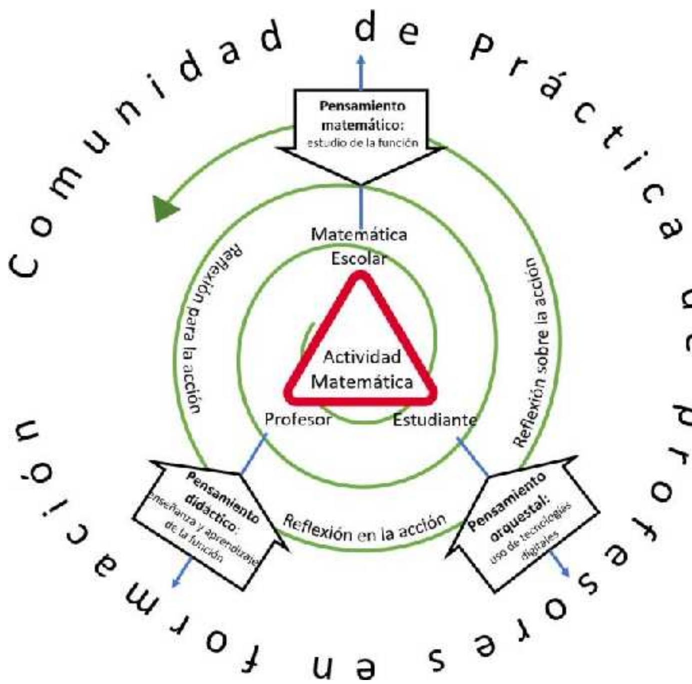


Figura 1. Bosquejo de la Interpretación del modelo R-y-A de Parada (2011)

La descripción del modelo R-y-A que se recoge en este documento se hace desde las palabras del autor, la cual se encuentra ampliamente explicada en Parada (2011). El anillo exterior hace énfasis en que las actividades de reflexión y acción que se plantean se promueven al interior de una comunidad de práctica de profesores de matemáticas, en la investigación que aquí se reporta hablaremos de una comunidad de profesores de matemáticas en formación que hacen parte de un curso de didáctica del cálculo.

El esquema tiene una lectura del centro al exterior. Tiene de fondo la actividad matemática que surge de la interacción de un triángulo pedagógico tomado de Saint-Onge (1997) citado por Parada (2011), en el que se identifican las siguientes relaciones: i) Matemática escolar - profesor:

relación de comprensión; ii) Profesor – estudiante: relación de mediación, y; iii) Estudiantes – matemática escolar: relación de estudio.

Parada retoma las ideas de Chevallard, Bosh y Gascón (1997) para caracterizar la actividad matemática por medio de tres tipos de actividades que pueden considerarse matemáticas: i) cuando se resuelven problemas a partir de herramientas que ya se conocen; b) enfrentarse a un problema que no sabe resolver, y; iii) cuando se crean matemáticas. En el modelo R-y-A se espera que sea el profesor quien despliegue una actividad matemática, para que tenga claridad de qué es lo que quiere lograr en la clase, y como lo va a lograr, esto en términos de los tres tipos de pensamiento.

Por otro lado, la autora explica que el modelo se muestra en forma de espiral, porque considera que los procesos de reflexión van evolucionando en la medida en que se van haciendo parte del ser humano; las reflexiones van a ser más objetivas, más críticas y con mayor sustento en la medida que se analizan. Parada propone realizar el proceso de reflexión en tres momentos: i) reflexión-para-la acción, la cual se da antes de la clase; ii) reflexión-en-la acción, se hace presente durante la clase, y; iii) reflexión-sobre-la acción, se da después de clase. Terminados los tres momentos, se inicia otra vuelta en espiral.

Las tres flechas que se presentan alrededor de la espiral, dan cuenta de tres aspectos sobre los cuales se propone desarrollar el pensamiento reflexivo de los profesores de matemáticas y son transversales en los tres procesos de reflexión. Estos aspectos son: pensamiento matemático (estudio de la función), pensamiento didáctico (enseñanza y aprendizaje de la función) y el pensamiento orquestal (Uso de tecnologías digitales).

Aspectos metodológicos

Esta propuesta se basa en la metodología de investigación acción-colaborativa, desde la perspectiva de Elliott (1993), quien menciona que este tipo de investigación se encarga de realizar un estudio de una situación social para tratar de mejorar la calidad de la acción en la misma, y es colaborativa porque la investigadora tiene el papel de moderadora en la comunidad de práctica.

La población en la cual llevaremos a cabo la investigación, es un curso de didáctica del cálculo que hace parte de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS. Una primera planeación curricular del curso caracterizado como comunidad de práctica, fue realizada como contexto de la investigación aun en curso de Amaya (2017), la cual fue puesta en escena durante el primer semestre del 2018.

Para el segundo semestre del presente año, se tomó como base la planeación del curso anterior, con algunas modificaciones, con el fin de que las dinámicas allí definidas posibilitaran en el curso la reflexión sobre el concepto de función.

A continuación se describen las fases del proceso metodológico de la investigación, del cual se presenta un bosquejo en la Figura 2.

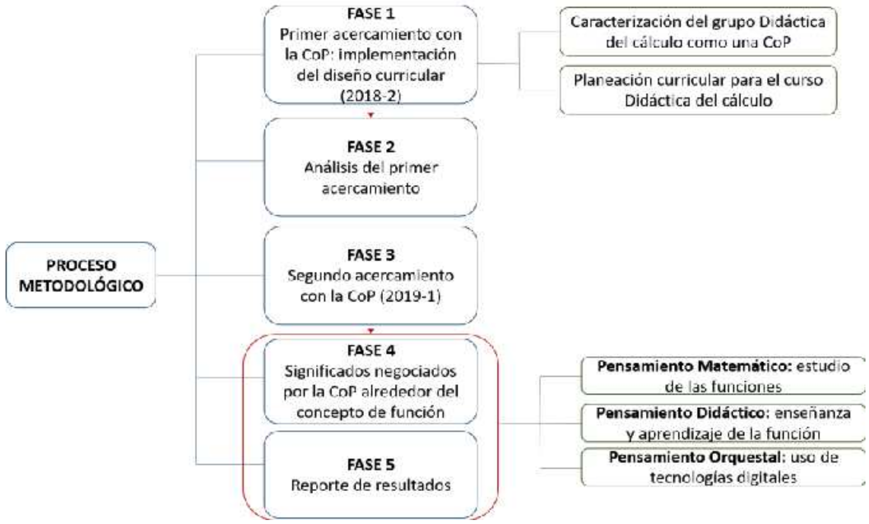


Figura 2. Esquema proceso metodológico

FASE 1: Primer acercamiento con la CoP: implementación del diseño curricular

Como ya se mencionó, la planeación curricular de este curso se está llevando a cabo durante el segundo semestre de 2018. Para la planeación de éste, y para posibilitar la negociación de significados de los profesores en formación, fue esencial el modelo de Reflexión y Acción descrito en el apartado anterior.

En un primer momento se caracteriza el grupo Didáctica del cálculo como un CoP en términos de Wenger (1998), quien menciona que éstas deben cumplir 3 criterios: tener compromiso mutuo, ser una empresa conjunta y tener un lenguaje compartido.

Un segundo momento de la fase 1, es la planeación curricular para el curso Didáctica del cálculo. Ésta planeación se compone de cuatro partes esenciales: exposiciones, tutorías, talleres y un proyecto de diseño didáctico. La participación directa de la investigadora, será en la implementación de los talleres y el diseño curricular que deben realizar los profesores en formación.

Las actividades del diseño curricular del curso, posibilitan que la clase sea un espacio de exploración, reflexión y cosificación de significados, donde se favorece los debates y discusiones alrededor de temas que hacen parte del cálculo diferencial (variación, funciones, límites y derivadas).

FASE 2: Análisis del primer acercamiento

La implementación de la planeación curricular antes descrita, la analizaremos a lo largo del semestre con la intención de ir realizando los ajustes para el nuevo acercamiento con la CoP (2019-1). Para ello, llevaremos a cabo el diseño de una matriz en la que se cruzarán las diferentes actividades de la comunidad con los tres aspectos del pensamiento reflexivo del modelo teórico R-y-A. Aspectos que tomaremos como categorías de análisis.

FASE 3: Segundo acercamiento con la CoP

La implementación del rediseño curricular del curso Didáctica del cálculo, en el cual haremos las modificaciones necesarias tanto a la metodología del curso como a los talleres de reflexión, modificaciones que surgirán de los resultados de la fase 2.

FASE 4: Significados negociados alrededor del concepto de función

Para el análisis de los datos usaremos el modelo R-y-A de Parada (2011), de donde se retoman sus tres pensamientos que usaremos como categorías de análisis: Pensamiento matemático, Pensamiento didáctico y Pensamiento orquestal.

FASE 5: Reporte de resultados

El reporte de resultados dará cuenta de un par de casos de estudio, en los que se pueda evidenciar el proceso de negociación logrado a partir de las dinámicas posibilitadas en la comunidad de práctica.

Algunas reflexiones

Algunas reflexiones respecto a lo que se ha hecho hasta el momento son: i) El grupo Didáctica del cálculo como CoP ha pasado de tener una participación aislada a tener una participación natural, ii) La planeación del curso ha permitido que los profesores en formación reflexionen sobre cada una de las acciones llevadas a cabo en la CoP, y iii) Se ha evidenciado que los profesores en formación presentan dificultades en el concepto de función, ven la función únicamente como una interdependencia de variables.

Referencias y bibliografía

Amaya, E. (2017). Significados de la demostración en una comunidad de práctica de profesores de matemática en formación. (Propuesta de investigación no publicada). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Amaya, T. Pino-Fan, L. y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. Educación Matemática, Volumen 28, pp. 111-144.

Carlson, M. y Oehrtman, M. (2005). Research sampler 9: Key aspects of knowing and learning the concept of function. *Mathematical Association of America*. Recuperado de http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_9.html

Elliott, J. (1993). El cambio educativo desde la investigación-acción, Madrid: Morata.

Escuela de Matemáticas. (2010). *Proyecto educativo que soporta la reforma del programa de Licenciatura en Matemáticas*. Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas de la UIS, Bucaramanga.

Flores. P. (1998) Formación inicial de profesores de matemáticas como profesionales reflexivos. *Revista de didáctica de las matemáticas*, Volumen 17, pp. 37-50.

Hitt F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Editor), *Investigaciones en Educación Matemática* Vol. I (pp. 245-264). Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Hitt F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 123-134.

Olvera, M. (2015). *El uso de herramientas digitales en el estudio de funciones y el desarrollo de competencia matemática para la enseñanza.* (Tesis de Doctorado). Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, México.

Parada, S. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional.* (Tesis de Doctorado). Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Jogos e aplicativos matemáticos para os anos iniciais

Alexandre **Wegner**
Universidade de Santa Cruz do Sul - UNISC
Brasil
alexandrewegn@unisc.br
Cláudio José de **Oliveira**
Universidade de Santa Cruz do Sul - UNISC
Brasil
coliveir@unisc.br
Daiane **Kipper**
Universidade de Santa Cruz do Sul - UNISC
Brasil
daianekipper25@gmail.com

Resumo

O objetivo da presente comunicação consistiu em desenvolver atividades pautadas no uso de tecnologias na Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Com base nesse objetivo, apresentamos a problemática que conduz e impulsiona o presente estudo: Como alunas do curso de Pedagogia avaliam o uso de jogos e aplicativos para o ensino das Matemáticas em sala de aula? A produção de dados se deu em uma aula da disciplina de *Linguagem Matemática na Educação I* no curso de Pedagogia. As atividades foram realizadas em grupos, com os quais foram trabalhados jogos e aplicativos matemáticos. Com base nessas experiências, as alunas realizaram relatos escritos, os quais compõem a empiria da pesquisa. Da análise do material de pesquisa, podemos inferir que experiências com o uso de recursos tecnológicos na formação inicial de professores que ensinam Matemática, são relevantes para o exercício da sua profissão.

Palavras-chave: educação, matemática, pedagogia, tecnologia, jogos, aplicativos, formação de professores, anos iniciais.

Introdução

Entendemos a e concebemos a Matemática Escolar "como uma disciplina diretamente implicada na produção de subjetividade, como uma das engrenagens da maquinaria escolar que funciona na produção dos sujeitos escolares" (Knijnik, Wanderer, Giongo, & Duarte, 2012, p.

25). Compreendemos que a Matemática ensinada e aprendida na escola é uma das matemáticas, pois no cotidiano dos mesmos há outras formas de se pensar matematicamente. De acordo com Neves (2016, p. 264) "No discurso da Educação Matemática, um dos enunciados que têm servido para justificar o baixo aproveitamento dos alunos em Matemática é o de que "Os alunos não aprendem Matemática por 'falta de base'". Sabemos que esse discurso toma como referência a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar, pois essa 'falta de base' se dá no contexto da sala de aula. Logo, uma pergunta se apresenta: de qual base estamos falando? Com isso, os cursos de Pedagogias têm um importante papel no entendimento dessa 'base matemática', pois são os professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais responsáveis pelas primeiras experiências dos alunos com a Matemática Escolar.

Para compreender a relação de futuros professores, estudantes de Pedagogia, com a Matemática Escolar recorremos a tecnologia como uma ferramenta propulsora na sala de aula. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN) já abordavam a inserção de tecnologias na sala de aulas, desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. De acordo com o referido documento:

> O indivíduo, imerso em um mar de informações, se liga a outras pessoas, que, juntas, completar-se-ão em um exercício coletivo de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção e transmissão dos conhecimentos. Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento (Brasil, 2000a, p.41).

Com base nas experiências, do primeiro autor deste estudo, como professor em diversos cursos de graduação, a empiria da pesquisa emergiu da oportunidade em ministrar uma aula em formato de oficina para alunas do curso de Pedagogia, na disciplina *Linguagem Matemática na Educação I*. O objetivo da referida oficina consistiu em desenvolver atividades pautadas no uso de tecnologias na Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Com base nesse objetivo, apresentamos a problemática que conduz e impulsiona o presente estudo: *Como as alunas do curso de Pedagogia avaliam o uso de jogos e aplicativos para o ensino das Matemáticas em sala de aula?*

Para potencializar a atividade e atender ao objetivo proposto em atribuir importância aos jogos e aplicativos matemáticos possíveis de serem usados por docentes em suas aulas, para o ensino das Matemáticas nos anos iniciais do Ensino Fundamental; criamos uma lista de jogos e aplicativos que pode ser conferida na tabela abaixo:

Quadro 1

Resumo dos jogos e aplicativos usados em sala de aula com seus links de acesso

Jogo nº	Nome do jogo	Link de acesso
1	Números	http://www.jogosgratisparacriancas.com/jogos_bebes_criancas/jogar_numeros.php
2	Jogo do Bóris	http://www.jogosgratisparacriancas.com/jogos_bebes_criancas/16-jogo-boris.php
3	Corujas	http://www.jogosgratisparacriancas.com/jogos_bebes_criancas/14-jogar-corujas.php
4	Diferenças	http://www.jogosgratisparacriancas.com/jogos_criancas_clique/13_diferencas1.php
5	Tangram	https://rachacuca.com.br/jogos/tangram-32/
6	O lobo e a ovelha	https://rachacuca.com.br/jogos/o-lobo-e-a-ovelha/
7	Número Complementa.	https://rachacuca.com.br/jogos/numeros-complementares/
8	Paciência	Geralmente disponível nos computadores
Aplicativos nº	Nome do aplicativo	Link de acesso
1	Adição e subtração	https://play.google.com/store/apps/details?id=kids.juegodesumas&hl=pt_BR
2	Tabuada básica	https://play.google.com/store/apps/details?id=br.com.jeronimo.tabuadabasica&hl=pt_BR
3	Kids numbers and math	https://play.google.com/store/apps/details?id=zok.android.numbers&hl=pt_BR
4	Formas	https://play.google.com/store/apps/details?id=com.oki.shapes&hl=pt_BR
5	Crianças jogos mat.	https://play.google.com/store/apps/details?id=com.preschool.kidsmathgames&hl=pt_BR
6	Matemática de miúdos	https://play.google.com/store/apps/details?id=com.developdroid.mathforkids&hl=pt_BR
7	Protractor	https://play.google.com/store/apps/details?id=com.keuwl.protractor
8	Conversos de unid.	https://play.google.com/store/apps/details?id=com.ba.universalconverter
9	Aprender. a contar o tempo	https://play.google.com/store/apps/details?id=com.TellingTimeForKids
10	Photomath	https://play.google.com/store/apps/details?id=com.microblink.photomath

Fonte: material utilizado pelos autores, quando do trabalho com jogos e aplicativos.

Ações metodológicas

A proposta foi desenvolvida de forma prática, pois os jogos foram projetamos através do *data show* e explorados pelas alunas através do seus notebooks e celulares conectados à internet. Ao projetar a lista de jogos e aplicativos, para serem manipulados durante a aula, destacamos a publicação de Dullius e Quartieri (2006, p. 2):

> A presença das tecnologias, principalmente do computador, requer das instituições de ensino e do professor novas posturas frente ao processo de ensino e de aprendizagem. Essa educação necessitará de um professor mediador do processo de interação tecnologia/aprendizagem, que desafie constantemente os seus alunos com experiências de aprendizagem significativas.

Frente as novas demandas, o professor se senti no dever de acompanhar os novos processos tecnológicos, tarefa que não tem sido fácil frente a rapidez das mudanças. A formação inicial apresenta-se como um espaço importante para conhecer novas tecnologias e realizar trocas com de conhecimentos com os colegas. Para Valente:

> A introdução do computador na educação tem provocado uma verdadeira revolução na nossa concepção de ensino e de aprendizagem. Primeiro, os computadores podem ser usados para ensinar. A quantidade de programas educacionais e as diferentes modalidades de uso do computador mostram que esta tecnologia pode ser bastante útil no processo de ensino-aprendizado (Valente, 2007, p. 2).

Embasado em Valente (2007), Dullius e Quartieri (2006) escolhemos jogos e aplicativos para computador ou telefone celular, que permitissem trabalhar tópicos matemáticos desenvolvidos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamenta. Na tabela, primeiramente apresentamos oito jogos, que são: O jogo 1, *Número,* foi escolhido para trabalhar a "contagem de números naturais"; o jogo 2, *Jogo do Bóris*, foi escolhido para trabalhar com "noções de maior ou menor"; o jogo 3, *Kids numbers and math*, retorna o conteúdo de "contagem", e trabalha "multiplicação por 2", "maior ou menor"; o jogo 4, *Formas*, analisa as questões de "diferença ou igualdade"; o jogo 5, *Crianças jogos mat*., foi escolhido por trabalhar com a geometria, a rotação, a localização e a imaginação; o jogo 6, *Matemática de miúdos*, induz a criação de "planos estratégicos" e "raciocínio lógico"; o jogo 7, *Protractor*, além de trabalhar as questões do jogo 6 também trabalha a soma, pois precisam complementar os números para encontrar o resultado "dez"; o último jogo analisado, *Paciência,* é encontrado em quase todos os computadores, o famoso jogo de "Paciência", cujo trabalha ordem, organização, diferenças, estratégia e se apresenta uma boa base para a área da Estatística.

Na mesma tabela, também apresentamos dez aplicativos desenvolvidos na oficina trabalhada na disciplina de *Linguagem Matemática na Educação I*, que foram adicionados pela maioria dos estudantes aos seus telefones, os quais são: O aplicativo 1, *Adição e subtração*, de modo divertido trabalha a "soma e a subtração"; o aplicativo 2, *Tabuada básica*, trabalha a "multiplicação"; o aplicativo 3, *Kids numbers and math*, é um kit completo para o exercício de várias "operações aritméticas" com figuras e objetos do cotidiano das crianças; o aplicativo 4, *Formas*, manipula as principais "formas geométricas" animadamente; o aplicativo 5, *Crianças jogos mat*, ocupa as "operações básicas" de modo divertido; como as "quatro operações" (adição, subtração, multiplicação e divisão) são muito importantes para o estudo nos anos iniciais do Ensino Fundamental; o aplicativo 6, *Matemática de miúdos*, trabalha a aplicação; o aplicativo 7, *Protractor*, introduz a ideia de "ângulo"; o aplicativo 8, *Conversos de unid.*, um interessante "conversor de medidas"; o aplicativo 9, *Aprender.a contar o tempo*, auxilia na compreensão do tempo e aprendizagem de como se lê as "horas no relógio" analógico; o último aplicativo, *Photomath*, se utiliza da câmera do telefone do mesmo modo que o sétimo, uma ferramenta que pode ser interessante para a realização das tarefas de casa, pois realiza quase todas as operações do Ensino Básico ao Superior sem precisar digitar, apenas fotografar o que está escrito no caderno ou em outro lugar.

As alunas do curso de Pedagogia, que participaram como sujeitos da pesquisa, em grupos, fizeram o uso dos aplicativos e jogos sugeridos na tabela acima. Assim, todos os sujeitos puderem experimentar a matemática num formato digital e com isso verificar a efetividades desses softwares no ensino e aprendizagem das matemáticas. A tarefa da aula foi concluída com a pesquisa e indicação de outro jogo ou aplicativo para os colegas de curso, gerando lastro para mais trabalho. Na próxima etapa apresentaremos os relatos escritos dos participantes da atividade.

Relatos dos participantes da atividade

Conforme escrito nas *Ações metodológicas*, agora passamos a apresentar os relatos escritos dos sujeitos da pesquisa que foram realizados por grupo, sendo no total cinco grupos:

O grupo número um relata sobre os jogos quatro e cinco e o aplicativo nove: Através do jogo escolhido, *Aprender a contar o tempo*, a criança desenvolve na prática a noção das horas, onde o aplicativo pede para mostrar no relógio o horário indicado ao lado. Com este conhecimento, que normalmente é ensinado no 2º ano, a criança acaba, automaticamente, se policiando no horário e nos minutos, compreendendo assim o horário que começa a sua aula, o horário que precisa ir dormir para acordar cedo pela manhã e até o tempo que pode brincar, entre outros exemplos. (Grupo 01, sobre o aplicativo nº 9).

Jogo as *Corujas Observadoras* é um Jogo Educativo para crianças de 2, 3 e 4 anos. No jogo aparece inicialmente 1 coruja de um tamanho e determinada cor, depois de clicar a segunda vez apareceu outra coruja de cor e tamanho diferente, assim foi a sequência até aparecerem várias corujas de várias cores e tamanhos. Depois ao clicar novamente as corujas foram sumindo. O jogo é divertido e as crianças aprendem o conceito de causa e efeito. (Grupo 01, sobre o jogo nº 3).

Jogo *Tangram-Racha Cuca* consiste em completar figuras com formas geométricas, colocando-as simetricamente em seu devido lugar. As figuras prontas, sempre dão impressão de alguma coisa, parecem números, letras, animais, objetos, etc. É um jogo bastante viciante, quanto mais se joga, mais se quer jogar. Tem sempre as mesmas peças para formar as figuras diferentes. (Grupo 01, sobre o jogo nº 5).

O primeiro grupo fez menção a aprendizagem do tempo, o que nem sempre é fácil compreender a noção de hora com base em desenhos estáticos desenhados na cartolina (uma forma muito utilizada em sala de aula para trabalhar o tempo); analisou um aspecto importante de "causa e efeito" a partir das multiplicações por dois, comparações entre maior e menor. O *Tangram* foi citado entusiasticamente devido aos recursos geométricos que ele permite trabalhar, estudar, compreender.

A segunda equipe analisou principalmente os jogos cinco, seis, sete e oito: Com o jogo *Paciência* o aluno desenvolve a atenção e raciocínio lógico, os aspectos relacionados a ele são números, quantidade e sequência. Faixa de ensino: 3º ao 5º ano. (Grupo 02, sobre o jogo nº 8).

Lobo e a ovelha, esse jogo trabalha o raciocínio lógico, pois você faz várias tentativas até conseguir acertar. Raciocínio lógico, estratégica, faixa de ensino do 2º ao 5º ano. (Grupo 02, sobre o jogo nº 6).

Tangram desenvolve raciocínio, noção de espaço, tentativas e paciência, porque as crianças devem analisar as peças para ver onde é o lugar correto de cada uma. As cores também são importantes neste jogo. (Grupo 02, sobre o jogo nº 5).

Números complementares, esse jogo pede que se 'ligue' dois números que, somados, tenham resultado 10, assim, eliminado o maior número de bolinhas em menor tempo. Trabalha com o raciocínio e a percepção. (Grupo 02, sobre o jogo nº 7).

O grupo 2 preferiu analisar os jogos de estratégia e raciocínio lógico, citando o jogo de *Paciência* e no jogo *Lobo e a ovelha*, que requerem observação, tentativas, até alcançarem os objetivos, também destacaram os *Números complementares*, ferramenta apropriada para a criança estudante perceber, tentar e descobrir diferentes modos de se chegar ao resultado 'dez', até poderíamos dizer que é um começo para o estudo das 'Partições'. O *Tangram* também foi citado, por se tratar de um jogo que prende a atenção do aluno.

O grupo número 3 enfatizou os jogos quatro e cinco e os aplicativos três e nove: *Aprender a contar o tempo* estimula a concentração, a memorizar números, conhecer as horas. (Grupo 03, sobre o aplicativo nº 9).

Diferenças permite analisar as semelhanças e diferenças nas imagens apresentadas. Possibilitando também contar quantos são iguais/diferentes, agrupar e comparar. (Grupo 03, sobre o jogo nº 4).

Quebra-cabeça Tangram estimula o raciocínio, o pensamento lógico. Permite que a criança teste as possibilidades encaixando as peças. Desenvolve a capacidade de visualização e noção espacial, bem como as formas geométricas. (Grupo 03, sobre o jogo nº 5).

Kids numbers and Math estimula o aprendizado dos números, compreender diferenças entre maior e menor, subtração e multiplicação de forma lúdica e animada. (Grupo 03, sobre o aplicativo nº 3).

O referido grupo salientou as 'diferenças' para o estudante compreender a ordem de uma de uma 'reta numérica'. Também relataram sobre o fascínio da geometria no *Tangram*; do quanto o jogo pode se produtivo na compreensão da geometria.

O quarto grupo fez menção apenas ao jogo do *Tangram*, passaram praticamente a aula toda se desafiando chegando a níveis avançados em seu ranking: O jogo do *Tangram* é composto por 7 peças com formas e texturas diferentes e faz com que se trabalhe as tentativas. As fases que eu achei fácil, já para a minha colega passou a ser difícil, fazendo com que nós duas jogássemos juntas. O *Tangram* pode ser trabalhado na Educação Básica; também pode ser trabalhado manualmente, tendo possibilidades de construção de atividades e conceitos diferentes do computador. (Grupo 04, sobre o jogo nº 5).

No relato do grupo 5 foi destacado os jogos cinco, seis e o aplicativo dois: O jogo *Quebra-cabeça Tangram* exige concentração, raciocínio lógico, paciência e tempo para pensar cada passo no jogo, encaixando cada peça geométrica que faz parte do jogo, logo aprendem as formas geométricas. Tudo a ver com a Matemática. (Grupo 05, sobre o jogo nº 5).

No jogo, *O lobo a ovelha e a couv*e precisamos testar várias tentativas, até acertar, tivemos vários erros com persistência conseguimos. Primeiro nós levamos a ovelha, depois a couve, mas não deixamos a ovelha sozinha com a couve, precisamos pensar como se fosse um quebra-cabeça. Para ajudar as crianças a pensarem e estimularem o raciocínio lógico. (Grupo 05, sobre o jogo nº 6).

Aprendendo a tabuada, com o aplicativo a criança responde o resultado da multiplicação que aparece na tela. O professor pode construir as tabelas de multiplicação com os alunos, utilizando o aplicativo. (Grupo 05, sobre o aplicativo nº 2).

Trabalharam com estratégias de soluções apoiadas nos jogos cinco e seis; foram os únicos a darem visão exclusiva ao aplicativo do *Aprendendo a tabuada*, consideram importantíssima a questão de se aprender e construir as tabelas de multiplicação.

Nessa perspectiva, o entendimento das alunas do curso de Pedagogia com relação a atividade desenvolvidas durante a aula ministrada na disciplina *Linguagem Matemática em Educação I*, estão em consonância com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Terceiro e Quarto Ciclo do Ensino Fundamental, lendo:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas (Brasil, 2000b, p. 46).

A tecnologia como uma possibilidade de compreender a Matemática escolar e a Acadêmica com base em um formato digital que dá movimento ao conteúdo, ou seja, uma forma interativa de ‘matematizar’. Tendo em vista que o mundo tem se tornado cada vez mais digital, a forma como pensamos e matematizamos tem acompanhado as mudanças tecnológicas, logo a sala de aula precisa se aproximar do mundo digital que está sendo vivenciado e experimentado cada vez mais por crianças e adolescentes.

Considerações

Ao ler os relatos dos participantes da atividade fica evidente que o uso de jogos e aplicativos, são efetivos para pensar as matemáticas em sala de aula. Observamos que todos os grupos fizeram uso do jogo número 5, *Tangram*, sinalizando as possibilidades de encantamento das alunas para o desenvolvimento do raciocínio lógico, matemático, geométrico. Isso não significa que os mesmos não tenham acesso ao jogo mencionado na versão física, mas no formato digital o *Tangram* o jogo envolveu os sujeitos da pesquisa de uma forma lúdica e interativa

Com base nos relatos escritos foi observada no que os alunas do curso de Pedagogia consideram importantes os exercícios para a organização do pensamento. Os jogos e aplicativos podem contribuir na formação de atitudes e para enfrentar desafios em outras situações da vida cotidiana Também podemos inferir que os jogos e aplicativos podem ser facilitadores no processo da aprendizagem, pois possibilitam a troca de experiências e permitem a criação de hipóteses a partir das experiências individuais ou do grupo .Este método de trabalho se faz importante para as alunas envolvidos na pesquisa, pois as mesmas são as futuras professoras que também ensinarão matemáticas, embasado em Wegner (2011, p. 88), citamos:

> [...] em conjunto, conseguir-se-á uma aula diferente, que melhorará as condições dos alunos para desenvolverem o raciocínio, resultando num melhor preparo para enfrentarem o mercado de trabalho, que propriamente exigirá além dos conhecimentos básicos, a eficiência em relação à tecnologia, e adaptabilidade, as novas ferramentas de acordo com o avanço da ciência.

Com base na problemática desenvolvida nessa pesquisa, verificamos que as alunas do curso de Pedagogia avaliam de forma produtiva as atvidades com jogos e aplicativos para o ensino das Matemáticas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Tais atividades permitem a proposição de ações mais interativas por parte das futuras professoras – alunas do curso de Pedagogia –, de modo que a sua atuação futura em sala de aula possa aproximar a Matemática Escolar do mundo tecnológico e interativo que tem se apresentado no nosso cotidiano.

Referências e bibliografia

Brasil (2000a). *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*. Brasil. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf

Brasil (2000b). *Parâmetros Curriculares Nacionais do Terceiro e Quarto Ciclo do Ensino Fundamental*. Brasil. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf

Dullius, M. M., & Quartieri, M. T. (2006). *Recursos Computacionais nas Aulas de Matemática*. Rio Grande do Sul, Lajeado. Recuperado de http://tecmat-ufpr.pbworks.com/f/R0168-1.pdf

Knijnik, G., Wanderer, F., Giongo, I. M., & Duarte, C. G. (2012). *Etnomatemática em movimento.* Belo Horizonte: Autêntica.

Neves, J. C. M. (2016). Metodologias de pesquisa na área da educação (matemática). In: Wanderer, F., & Knijnik, G. (Org.). *Educação Matemática e Sociedade* (pp. 37-54). São Paulo: Editora Livraria da Física.

Valente, J. A. (2007). *Diferentes Usos do Computador na Educação*. São Paulo, Campinas. Recuperado de http://nied.unicamp.br/publicacoes/separatas/Sep1.pdf

Wegner, A. (2011). *Uma abordagem do uso do software Graphmatica para o ensino de funções na primeira série do ensino médio.* Dissertação de Mestrado, Universidade do Vale do Taquari, RS, Brasil.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ensino de Geometria com o *SketchUp*: atividades investigativas a partir da Teoria de van Hiele

Edite Resende **Vieira**
Colégio Pedro II/Projeto Fundão – Instituto de Matemática – UFRJ
Brasil
edite.resende@gmail.com

Resumo

Este artigo tem como finalidade refletir sobre episódios vivenciados por alunos do 4º do Ensino Fundamental de uma escola federal da cidade do Rio de Janeiro em atividades de Geometria. Trata-se de uma pesquisa qualitativa realizada pela professora do Laboratório de Informática, autora desta comunicação, a qual se propôs investigar, a partir da Teoria de van Hiele, o conhecimento geométrico dos alunos acerca das figuras tridimensionais com o uso do software *SketchUp*. A metodologia utilizada considerou os princípios de uma sequência didática como prática educativa que articula teoria e prática. Ficou evidente nas atividades realizadas que alguns alunos reconheceram as figuras tridimensionais, identificaram os elementos que as constituem e fizeram as devidas representações no plano. Os dados também indicaram que as atividades no software permitiram à professora pesquisadora reconhecer que alguns alunos alcançaram o Nível 1 da Teoria de van Hiele, e outros estão progredindo para o nível seguinte.

Palavras chave: anos iniciais, tecnologia digital, *SketchUp*, Teoria de van Hiele, formação de professores.

Introdução

Desde o seu nascimento, a criança está em contato com o mundo. Ao observar, comparar e manipular objetos, ela vivencia situações ligadas à Geometria. A Geometria é um campo da Matemática que está relacionado ao nosso cotidiano.

As possibilidades de a criança conhecer a realidade do mundo em que vive dependem das relações que estabelece com o que está ao seu redor, como pessoas, lugares e objetos. Segundo Pires, Curi e Campos (2001), esse é o espaço que a criança percebe e que, posteriormente, lhe possibilitará construir um espaço representativo.

O estudo do espaço geométrico e das formas inicia-se a partir do que é percebido até que possa ser concebido pelo indivíduo, ou seja, esse processo é concretizado por meio da percepção das formas geométricas básicas e de suas características. Quando a criança se depara com um ambiente que lhe permite explorar as noções geométricas dos objetos do mundo físico, um mundo de possibilidades se abre para ela.

Na concepção de Fagundes (1977, p. 3), "para conhecer um objeto, um fato, é preciso agir sobre ele, modifica-lo, transformá-lo, compreender o processo dessa transformação e, como consequência, entender a maneira como o objeto é construído". Especialmente para os alunos dos primeiros anos de escolaridade, a quem se recomenda o início do estudo de Geometria com a manipulação de materiais concretos – etapa fundamental para a construção do pensamento geométrico –, com o uso das tecnologias digitais, o aluno pode dar um salto na compreensão desse processo de transformação e de construção do objeto.

Nesse sentido, Kaleff (2003) argumenta que a Informática pode facilitar os problemas enfrentados no ensino de Matemática e, em particular, em Geometria, relacionados à visualização, observação e manipulação de objetos geométricos. Segundo a autora, há vários software[1] com uma gama de recursos que contribuem para a construção da percepção espacial.

Assim, este artigo tem como finalidade refletir sobre alguns episódios vivenciados por alunos do 4º do Ensino Fundamental de uma escola federal da cidade do Rio de Janeiro em atividades de Geometria. Tais episódios são recortes de uma pesquisa implementada pela professora do Laboratório de Informática, autora desta comunicação, a qual se propôs investigar, a partir da Teoria de van Hiele, o conhecimento geométrico dos alunos acerca das figuras tridimensionais com o uso do software *SketchUp*.

O ensino de Geometria nos anos iniciais

Pesquisas como a de Pavanello (1993), Lorenzato (1995) e Fainguelernt (1999) sinalizam o esquecimento ou omissão do processo de ensino e aprendizagem da Geometria no Brasil, especialmente em escolas públicas. Durante muito tempo o ensino de Geometria não se renovou, perdendo seu vigor, como ressaltado por Fainguelernt (1999).

Educadores matemáticos mostraram preocupação acerca da desvalorização do ensino de Geometria nas escolas e iniciaram, ao longo da década de 90, um movimento de discussão e reflexão para tentar reverter a situação. A partir do consenso desses pesquisadores sobre a importância do trabalho com noções geométricas desde a pré-escola, observou-se, no final dos anos 90, um processo de valorização da Geometria que contribuiu para a elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997). Com o despontar dessas novas diretrizes para os currículos nas escolas brasileiras, o ensino de Geometria começou a ter outra configuração em todo o Ensino Fundamental, uma vez que se passou a dar especial relevo aos conceitos geométricos, destacando sua importância.

Tal importância se justifica uma vez que a criança, desde o seu nascimento, está em contato com o mundo, ou seja, um mundo tridimensional. Esse aspecto também é comentado por Nasser e Tinoco (2004). Elas consideram o conteúdo de Geometria a ser ensinado como um "edifício geométrico" e, como todo edifício, ele deve ter os alicerces firmemente construídos desde os primeiros anos de escolaridade. De acordo com as autoras,

> Desde o pré-escolar as crianças podem criar a base para o seu edifício geométrico, vivenciando atividades que permitam observar imagens da natureza, como as folhas, que em alguns casos possuem uma simetria perfeita. Devem também explorar o espaço, comparando objetos com formas geométricas (Nasser & Tinoco, 2004, p. vii).

[1] Cabri-Géomètre, Euklid, Sketchpad, Geoplan, Cinderella, Geogebra, Calques 3D, Shapari, Régua e Compasso, entre outros.

Atualmente, a Base Nacional Comum Curricular[2] – BNCC (Brasil, 2017) privilegia um ensino de Geometria pautado no estudo de um vasto conjunto de conceitos e procedimentos fundamentais para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. De acordo com esse documento, as ideias matemáticas essenciais ligadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. Na proposta oficial supracitada, fica evidente no ensino de Geometria que "estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes (Brasil, 2017, p. 269).

Pensamento geométrico: habilidades necessárias

A visualização e a representação são habilidades importantes a serem desenvolvidas por estudantes da Educação Básica, principalmente os alunos dos anos iniciais de escolaridade. É, portanto, um tema relevante para as pesquisas em Educação Matemática.

De acordo com Pais (1996), há quatro elementos fundamentais que intervêm fortemente nos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria Plana e Espacial: o objeto, o conceito, o desenho e a imagem mental. No início da aprendizagem, os objetos são a primeira forma de representação dos conceitos geométricos. Por objeto, entende-se o material manipulativo que representa uma forma geométrica. O desenho é a segunda forma de representação desses conceitos e, assim como o objeto, é de natureza essencialmente concreta e particular, consequentemente, oposta às características gerais e abstratas dos conceitos.

A interpretação de significados com auxílio de desenhos de figuras tridimensionais apresenta um grau de complexidade maior do que aquela feita a partir dos objetos. Conforme ressalta Pais (1996, p.68), "Quer seja na representação de figuras planas ou espaciais, o desenho tem sido, na realidade, uma passagem quase que totalmente obrigatória no processo de conceitualização geométrica".

Pais (1996) apresenta seu ponto de vista acerca do desenvolvimento do pensamento geométrico. Para a construção do conhecimento teórico dos alunos, é necessário que o professor contemple tanto os aspectos intuitivos quanto os experimentais. Assim, no início da escolarização, é mais indicado que a construção dos conceitos geométricos se dê a partir de atividades que priorizem a experimentação das ideias das crianças por meio de objetos manipuláveis. No entanto, segundo o autor, essa manipulação não deve restringir-se a uma simples atividade lúdica. Espera-se que, com o manuseio, o aluno possa, sob a orientação do professor, descobrir propriedades sobre o ente geométrico subjacente àquele objeto.

Além do manuseio de objetos, a visualização e a representação são elementos essenciais para a construção do pensamento geométrico. Pesquisas, tais como as de Barbosa (2011) e Carvalho (2010), assinalam a importância do desenvolvimento dessas habilidades pelos alunos no estudo das figuras espaciais e planas. Do ponto de vista de Carvalho (2010), a habilidade de representar figuras tridimensionais no plano e de interpretar desenhos que reproduzem os sólidos geométricos constitui uma das etapas do processo de desenvolvimento da visualização espacial

[2] A BNCC é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (BRASIL, 2017, p. 7).

dos alunos. Nesta mesma linha de pensamento, Parzysz (1988), citado por Carvalho (2010), afirma que os estudantes encontram dificuldades na codificação e decodificação de desenhos.

Assim, a habilidade de reconhecimento de objetos tridimensionais a partir de representações planas deve ser treinada continuamente ao longo da educação básica, e o uso de recursos tecnológicos pode facilitar esse processo, seja na realização direta de atividades, seja na elaboração de materiais pelo professor. Nesse sentido, Gutiérrez (2006, p. 26) assegura que “os programas de computador [...] são ideais para as explorações e investigações em geometria. Além disso, constituem um estímulo para a utilização do raciocínio dedutivo [...]”. O caráter exploratório de alguns software disponíveis permite aos alunos desenvolver seu espírito de investigação e fazer conjecturas.

Para a pesquisa em pauta, dentre os recursos disponibilizados, escolheu-se o software *SketchUp*[3] pela facilidade de utilização e interação. O *SketchUp* apresenta um conjunto de recursos e aplicativos que possibilita a criação de modelos em três dimensões (3D) e a exibição das produções a partir de vários pontos de vista. Trata-se de um software que não foi construído para o ensino de Matemática, mas para profissionais das áreas de design, arquitetura e engenharia. Sua manipulação exige o conhecimento de retas, pontos, ângulos, figuras planas, paralelismo, perpendicularismo, enfim, a exploração de uma série de conceitos geométricos que o torna um programa interessante para ser utilizado em projetos pedagógicos de Geometria. A sua utilização estimula o aluno a construir situações bem próximas do seu cotidiano, a fazer conjecturas e a validar ou não a sua hipótese. Os desenhos feitos nesse software permitem que o aluno descubra as propriedades das figuras geométricas, estabeleça relações e identifique semelhanças e diferenças entre elas, valorizando a investigação e a aprendizagem por descoberta.

Desenvolvimento do raciocínio geométrico: o modelo de van Hiele

O modelo de van Hiele teve origem na década de 50 quando Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geldof, professores de Matemática, apresentaram, em suas teses de doutorado, uma forma diferenciada para desenvolvimento do raciocínio geométrico, visto que seus alunos do curso secundário na Holanda apresentavam dificuldades na aprendizagem de Geometria.

De acordo com Nasser e Sant’Anna (2000), o modelo considera que os alunos avançam por meio de cinco níveis de compreensão de conceito, de forma sequencial e hierárquica. Segundo as autoras, o avanço de níveis depende mais de uma aprendizagem propícia do que de idade ou maturação, cabendo ao professor selecionar cuidadosamente as atividades. Elas ainda ressaltam que na Teoria de van Hiele, para que seja possível a compreensão por parte dos alunos e ocorra a aprendizagem, é necessário que se estabeleça relação entre o objeto a ser estudado e a linguagem própria, ou seja, a aula não deve ser ministrada em um nível não atingido pelos alunos.

Nasser e Sant’Anna (2000) apresentam os cinco níveis para o desenvolvimento do raciocínio em Geometria do modelo de van Hiele, a saber, Nível 1: Reconhecimento; Nível 2: Análise; Nível 3: Abstração; Nível 4: Dedução e Nível 5: Rigor.

Os van Hiele, citado por Silva e Candido (2014), sinalizaram em seus trabalhos que mais importante que a idade cronológica dos alunos é o encaminhamento dado em sala de aula pelo professor. Assim, o modelo van Hiele propõe cinco fases de aprendizagem que, desenvolvidas sequencialmente, propiciam o avanço de um nível de pensamento para o imediatamente mais

[3] Mais informações disponíveis em http://bausketchup.blogspot.com.br. Acesso em 25 de out. de 2012.

avançado; Fase 1: questionamento ou informação; Fase 2: orientação dirigida; Fase 3: explicação; Fase 5: orientação livre e Fase 5: integração.

Dessa forma, professor é um elemento de grande importância para auxiliar o aluno no seu desenvolvimento, proporcionando um ambiente propício à aquisição de conhecimentos.

Metodologia: o caminho percorrido

A metodologia deste estudo foi desenvolvida na perspectiva qualitativa, em uma escola federal da cidade do Rio de Janeiro, com alunos do 4º ano do Ensino Fundamental.

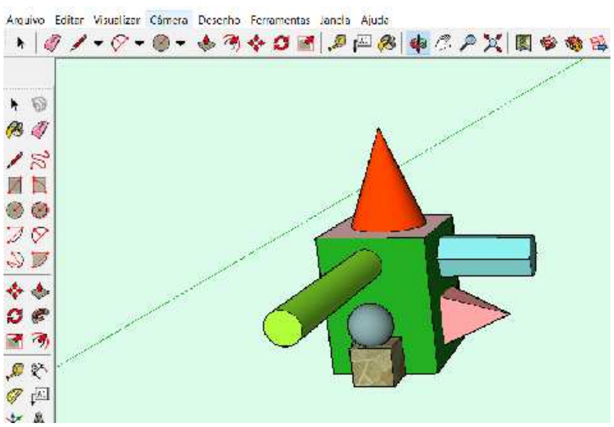
A opção por esse tipo de metodologia se justifica porque nela o investigador qualitativo não fica fora da realidade que estuda; pelo contrário, concebe e tenta compreendê-la em sua totalidade (Triviños, 1992).

Os dados foram coletados por meio de observação participante, dos registros das atividades dos alunos no software *SketchUp* e de gravação de áudio das discussões nas aulas. A pesquisa foi aplicada durante 4 semanas, em dois tempos de aula semanais, no Laboratório de Informática, em agosto/setembro de 2017.

A sequência de atividades foi planejada a partir da concepção de Zabala (1998). No entendimento do referido autor, as características da prática educativa são definidas a partir da maneira que a sequência didática é organizada. Por conseguinte, uma sequência didática bem planejada, com intenções bem definidas e objetivos claros e precisos, poderá constituir um recurso metodológico eficiente para atingir os objetivos de quaisquer áreas curriculares.

O retrato da pesquisa: alguns episódios

Para mostrar os resultados da pesquisa realizada, esta comunicação apresenta uma atividade que foi colocada no telão para a turma resolver coletivamente.



João pegou seus sólidos geométricos e construiu o seguinte prédio. Veja!

a) Quantos sólidos João utilizou?

b) Que sólidos ele utilizou? Escreva o nome deles.

c) Dentre os sólidos que estão sobre a mesa, quais os utilizados por João?

d) Agora, construa um prédio na tela do computador e monte-o com os sólidos geométricos.

Figura 1. Atividade 1

No item (a), todos os alunos responderam 7 sólidos. Eles utilizaram a ferramenta *Orbitar* do aplicativo para girar e explorar a construção de João.

Quanto ao item (b), nenhum aluno conseguiu nomear os sólidos corretamente. Eles identificaram o cone como triângulo; o paralelepípedo como retângulo; o cubo como quadrado; o cilindro como círculo; a pirâmide como triângulo, o prisma como losango e a esfera como bola. É importante destacar que dois alunos intercederam quando a turma nomeou a esfera como bola.

Eles alegaram que bola não é o nome correto para aquele sólido. Para eles, a esfera também era um círculo.

Foi possível constatar no item (b) dessa atividade que os alunos não têm o vocabulário adequado para nomear os sólidos geométricos, sendo necessário um trabalho mais efetivo por parte do professor. Assim, os alunos não reconheceram os sólidos por sua aparência global. Ficou evidente que os alunos também não identificaram os elementos de cada sólido, confundindo-os com as figuras geométricas planas.

Para resolver o item (c), cada dupla de alunos, pois os alunos trabalham em dupla no computador, recebeu uma caixa com 11 sólidos. Um tempo foi dado para eles fazerem comparações entre os sólidos geométricos e suas respectivas representações no plano, estabelecendo relações e analisando cada elemento. É importante destacar que todas as duplas reconheceram a representação dos sólidos geométricos na tela do computador, configurando, assim, o reconhecimento e a comparação das figuras por sua aparência global, conforme o Nível 1 do modelo de van Hiele.

As figuras seguintes são as construções de duas duplas, solicitadas no item (d)

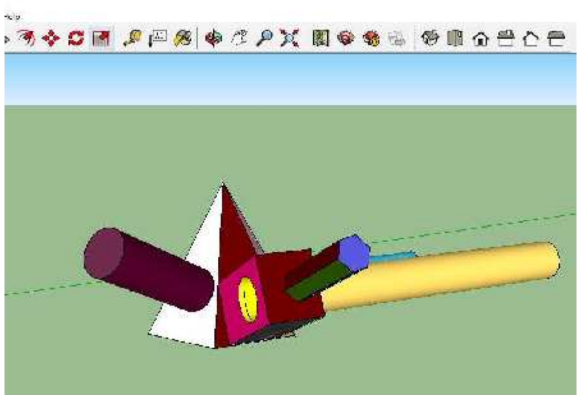


Figura 2. Prédio construído pelos alunos S e D

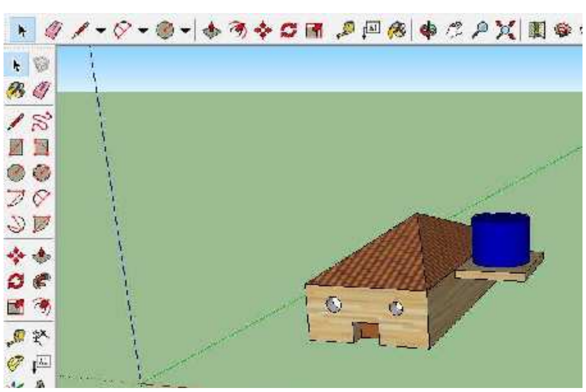


Figura 3. Prédio construído pelas alunos X e Y

Os alunos, de um modo geral, conseguiram representar sua construção da tela do computador com os sólidos geométricos. Apenas duas duplas tiveram dificuldades, embora a pesquisadora tenha feito intervenções, sinalizando os elementos que constituem os sólidos escolhidos: cantos, linhas de dobras, paredes e faces (nomes dados pelos alunos).

Considerações Finais

Nosso objetivo quando da realização dessa comunicação foi refletir sobre episódios vivenciados por alunos do 4º do Ensino Fundamental de uma escola federal da cidade do Rio de Janeiro em atividades de Geometria. Assim, ao realizarmos a análise nos diferentes instrumentos de coleta, foi possível construirmos proposições significativas emersas no contexto das aulas no Laboratório de Informática.

As análises apresentadas indicaram que o *SketchUp* foi um recurso imprescindível para promover a investigação e exploração das figuras geométricas espaciais. O ambiente característico do aplicativo oportunizou reflexões, auxiliando os alunos na resolução das atividades e na tomada de decisões. No entanto, ficou evidente as dificuldades dos alunos na resolução de algumas atividades. Nenhum dos alunos conseguiu nomear as figuras tridimensionais. Alguns foram capazes de identificar os elementos que as constituem, apesar de não utilizarem o vocabulário adequado. É importante destacar que os alunos não apresentaram dificuldade em reconhecer, dentre os sólidos geométricos sobre a mesa, os que estavam representados na tela do computador, reconhecendo as figuras por sua aparência global.

Os dados também indicaram que as atividades no software permitiram à professora pesquisadora reconhecer que alguns alunos alcançaram o Nível 1 da Teoria de van Hiele, e outros estão progredindo para o nível seguinte.

Para finalizar, ficou claro durante essa investigação que ações precisam ser implementadas com esses alunos no sentido de dar oportunidades para que eles possam manipular objetos, visualizar e representar e, assim, contribuir para o desenvolvimentos de habilidades necessárias à construção do pensamento geométrico.

Referências Bibliográficas

Barbosa, C. P. (2011). *O pensamento geométrico em movimento: um estudo com professores que lecionam Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG).*Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/ SEF,1997. 142 p.

Brasil. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*: Educação é a Base. Brasília, MEC/SEB, 2017.

Carvalho, M. L. de O. (2010). *Representações planas de corpos geométricos tridimensionais: uma proposta de ensino voltada para a codificação e decodificação de desenhos*. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, ouro Preto.

Fagundes, L. da C. (1977). *Materiais manipulativos no ensino de matemática a crianças de 7 a 14 anos: período das operações concretas*. Palestra proferida no Seminário Nacional sobre recursos audiovisuais no Ensino de 1º Grau, Brasília. Recuperado de: http://www.pead.faced.ufrgs.br/sites/publico/eixo4/matematica/livros/leituras/01_materias_manipulativos.htm.

Fainguelernt, E. K. (1999). *Educação Matemática: representação e construção em Geometria*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Gutiérrez, A. (2006). *La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría.* Recuperado de: http://www.altascapacidades.org/uploads/6/3/7/5/6375624/ensenanza_aprendizaje_ geometria.pdf.

Kaleff, A. M. (2003). *Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra cabeças geométricos e outros materiais concretos*. 2. ed. Rio de Janeiro: EDUFF. 209 p.

Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? *Educação Matemática em Revista*, SBEM, São Paulo. n. 4, p. 3-13, 1995.

Nasser, L., &Tinoco, L.(Coords.). (2004). *Curso básico de geometria: enfoque didático*. 3 ed. Rio de Janeiro: UFRJ/IM. Projeto Fundão, 2004. v. 3. 125 p.

______; Sant'Anna, N. P. (2000). *Geometria segundo a Teoria de Van Hiele*. 3 ed. Instituto de Matemática/UFRJ: Projeto Fundão, 2000.

Pais, L. C. (1996). Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. *Zetetiké*, UNICAMP-SP, v. 4, n. 6, 65-74.

Pavanello, R. M. A. (1993). O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. *Revista Zetetiké*, Universidade Estadual de Campinas, ano 1, n. 1,7-17.

Pires, C. M. C.; Curi, E., & Campos, T. M. M. (2001). *Espaço e Forma: a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries do Ensino Fundamental*. São Paulo: PROEM.

Silva, L.,& Candido, C. C. (2014). *Modelo de aprendizagem de geometria do casal Van Hiele*. Recuperado de https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=302963.

Triviños, A. N. S. *Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação*. São Paulo: Atlas, 1992. 176 p

Zabala, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Significados sobre la demostración matemática en una comunidad de práctica de clase

Edwin Andrés **Amaya** Sánchez
Universidad Industrial de Santander
Colombia
andrewing15@hotmail.com
Jorge Enrique **Fiallo** Leal
Universidad Industrial de Santander
Colombia
jfiallo@uis.edu.co

Resumen

Este documento muestra avances de una investigación que tiene como objetivo caracterizar los significados negociados por una comunidad de práctica de clase de profesores de matemáticas en formación, que participan en un curso de Didáctica del Cálculo y que reflexionan acerca del proceso de la demostración. Se usa el marco teórico de la práctica social de Wenger (2001) como fundamento de la comunidad de práctica. Presentamos resultados de una actividad en la que se pidió hacer demostraciones relacionadas con el tema de funciones a 13 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, la cual permitió identificar los significados que ellos le atribuyen a la demostración asociados a la función matemática. Entre dichos significados se pudo encontrar que la demostración puede hacer uso del álgebra, ser explicativa y permitir descubrir otras propiedades.

Palabras clave: Comunidad de Práctica, Profesores de Matemáticas en Formación, Demostración.

Introducción

Se necesita tener una mirada más comprensiva y amplia de las funciones y del papel de la demostración del que se le da de forma tradicional en las aulas, por tanto en la enseñanza de las matemáticas se requiere que los alumnos tengan actividades significativas para su desarrollo. (Crespo y Ponteville, 2003). Los profesores de matemáticas en formación necesitan comprender muy bien los objetos matemáticos con los que van a relacionarse en su labor docente. Ellos deben tener claro los argumentos necesarios para la comprensión de los contenidos que enseñan. En ese sentido, nuestro trabajo apunta a identificar la manera en que los profesores en formación llevan a cabo sus demostraciones y reflexionan sobre éstas a medida que negocian sus significados mediante la participación, apuntando a la adquisición de herramientas teóricas y metodológicas, útiles para diseñar e implementar actividades en el aula relacionadas con la demostración.

Aspectos teóricos

En el marco de la Teoría de la práctica social, prestamos especial atención a indagar acerca del proceso de negociación de significados, en nuestro caso de la demostración, el cual requiere desarrollar la interacción de los participantes que se van ajustando a la práctica para reflexionar y tomar acciones sobre el uso que se le da a la demostración en el aula de matemáticas. La participación de los profesores en formación permite un escenario donde se exponen las experiencias y conocimientos individuales bajo la interacción con los demás miembros de la comunidad. La negociación establecida, no es sinónimo de "acuerdo total" respecto a alguna interpretación, sino de un nivel de afinidad que permite el éxito de la comunicación y genera la cultura de la clase. En cuanto a la demostración matemática, autores como De Villiers (1993) señalan que cuando estas son presentadas por el profesor a los estudiantes como un producto ya materializado, sin la participación de ellos en su producción, es muy probable que eso produzca una experiencia poco significativa, es por ello que plantea algunas funciones de la demostración que son: verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación; con las que se proporciona una visión más comprensiva de la función y el papel de la misma que se puede dar en el aula de clase. Por tanto, hay que prestar especial atención a la forma en que se discute el papel de la demostración por parte de los profesores en formación, de tal manera que sientan la importancia de llevarla al aula.

Metodología

Para la intervención con la comunidad de práctica se diseñaron y aplicaron una serie de actividades con las que se quería promover la reflexión por parte de profesores de matemáticas en formación alrededor de la demostración. Presentamos una actividad que se enmarca dentro de un curso de Didáctica del Cálculo donde se trabaja alrededor de los conceptos de función, límite, derivada e integral, en esta oportunidad se muestran algunos resultados relacionados con el tema de funciones y con la cual se indagó sobre el significado de la demostración asociado a este tema. En la actividad se pidió responder a lo siguiente:

1. Suponga que f y g son funciones pares.
   - ¿Qué puedes decir sobre $f + g$ y $f.g$?
   - ¿Qué puedes decir si f y g son impares?

   Plantea tus conjeturas y demuéstralas.

2. Sean f y g dos funciones lineales.
   - ¿Qué puedes decir acerca de la composición?
   - ¿Cómo es su pendiente?

   Plantea tus conjeturas y demuéstralas.

3. Considera la familia de funciones $f(x) = \frac{1}{x^n}$, donde n es un entero positivo.
   - ¿Cómo es la función cuando n es par?
   - ¿Cómo es la función cuando n es impar?

   Plantea tus conjeturas y demuéstralas.

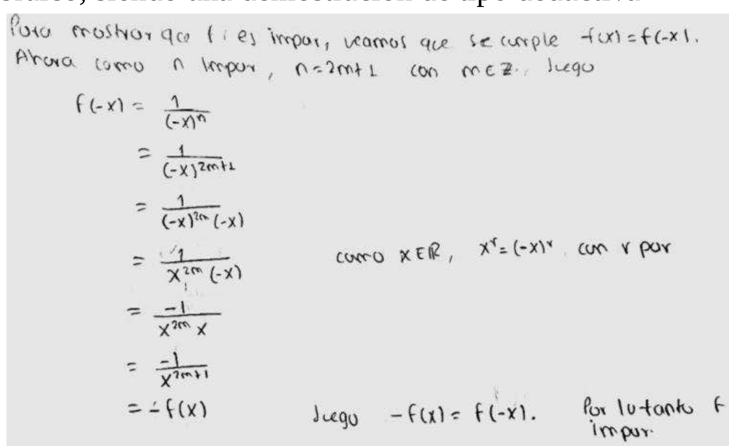
En cada ítem de los anteriores, los profesores en formación plantearon sus conjeturas y las demostraron, pues en el planteamiento de conjeturas, la persona puede darse cuenta de propiedades que le pueden servir para construir la demostración.

Las demostraciones que se pidieron hacer, se pueden abordar de distintas maneras. Cuando ellos plantearon su respuesta y mediante la puesta en común, se pudo evidenciar el significado que se le está asociando a la demostración, es decir, primero, si la demostración que produce es de tipo empírico o deductivo y segundo, el porqué de dicha presentación. Para el análisis de la información se tuvieron en cuenta los argumentos de las respuestas dadas por los participantes de la comunidad, las funciones de la demostración que señala De Villiers (1993) y categorías emergentes de significados.

Resultados

En el contexto de la comunidad se han tenido acercamientos a distintos tipos de demostración y su significado en los que se encontró que la mayoría de los profesores en formación considera la demostración desde un punto de vista estrictamente formal deductivo donde esté presente el uso exclusivo del álgebra. Para la presente actividad que se reporta, se pudo encontrar que siguen dándose diferentes posiciones frente a la demostración y algunos cambios en los puntos de vista de algunos de ellos. Entre las demostraciones surgieron en la comunidad, están aquellas que se presentan de manera retórica, de manera algebraica, de manera gráfica y otros no logran establecer la demostración debido a la falta de dominio conceptual.

Uno de los participantes de la comunidad presenta su demostración al ítem 3 (figura 1), haciendo uso principal del lenguaje algebraico, siendo una demostración de tipo deductiva formal donde usa las propiedades de las funciones pares e impares para construir la demostración que para él son básicas y suficientes para entenderla. Este profesor en formación hace la demostración con el fin de mostrar que el enunciado es verdadero para cualquier n, viéndola como una herramienta que debe hacer uso principal del álgebra para ser aceptada como demostración.   Se puede decir que la manera en la que ellos realizan sus demostraciones, así también será su forma de evaluar las demostraciones que se presenten de algún estudiante en el aula, donde pueden aceptar o no diversidad que pueden ser de tipo empírico o deductivo.


Para mostrar que f es impar, veamos que se cumple $-f(x)=f(-x)$.
Ahora como n impar, $n=2m+1$ con $m \in \mathbb{Z}$. Luego

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= \frac{1}{(-x)^n} \\
&= \frac{1}{(-x)^{2m+1}} \\
&= \frac{1}{(-x)^{2m}(-x)} \\
&= \frac{1}{x^{2m}(-x)} \quad \text{como } x \in \mathbb{R},\ x^r=(-x)^r \text{ con } r \text{ par} \\
&= \frac{-1}{x^{2m}x} \\
&= \frac{-1}{x^{2m+1}} \\
&= -f(x)
\end{aligned}
$$

luego $-f(x)=f(-x)$. Por lo tanto f impar.

Figura 1. Demostración de la segunda parte del ítem 3

En la respuesta de otro de los profesores en formación para el mismo ítem 3 (figura 2) se puede evidenciar una demostración haciendo uso principal de lenguaje retórico. Esta demostración se con el fin de dar a entender lo que sucede con la función al elevarla a una potencia impar. Se puede evidenciar el uso de la demostración como un medio de *explicación* (De Villiers, 2003) pues proporciona una visión de por qué la proposición es cierta. En la presentación de esta respuesta a toda la clase, los profesores en formación mencionan que si dicha demostración es para enseñar a estudiantes de cálculo diferencial, entonces es válida para que quede claro en ellos las propiedades utilizadas.

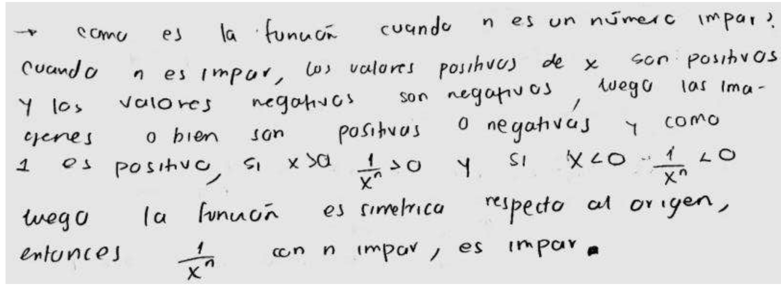

→ como es la función cuando n es un número impar?
cuando n es impar, los valores positivos de x son positivos
y los valores negativos son negativos, luego las ima-
genes o bien son positivas o negativas y como
1 es positivo, si $x>0$ $\frac{1}{x^n}>0$ y si $x<0$ $\frac{1}{x^n}<0$
luego la función es simetrica respecto al origen,
entonces $\frac{1}{x^n}$ con n impar, es impar.

Figura 2. Demostración de la segunda parte del ítem 3

Conclusiones

En la discusión y análisis de las respuestas dadas por parte de los profesores en formación y el investigador, se concluyó que se debe considerar en la enseñanza de estos temas en alumnos de cálculo diferencial, esencialmente que ellos comprendan por qué una proposición es cierta, desarrollar la capacidad de mostrar su validez e importancia y una forma de darse cuenta de ello puede ser inicialmente mediante razonamientos empíricos, para luego llegar a generalizar y entonces demostrar deductivamente

Referencias y bibliografía

Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2003a). Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 17* (1), 39-44. México.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"* (26), 15−30.

Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad. Barcelona, Paidós. Traducción de Genis Sánchez Barberán.

Silvia Johanna **Pineda** Garavito
Universidad Industrial de Santander
Colombia
vidana0619@hotmail.com

Sandra Evely **Parada** Rico
Universidad Industrial de Santander
Colombia
sanevepa@uis.edu.co

Formación inicial de profesores de matemáticas en atención a la diversidad

Resumen

Este documento comunica resultados de una investigación curricular cuyos objetivos son: desarrollar un curso enfocado en la atención a la diversidad en clase de matemáticas y describir los aprendizajes construidos por profesores en formación que reciben instrucción sobre atención a la diversidad. El estudio se desarrolló en seis fases donde se realizaron dos pilotajes de un curso enfocado en atención a la diversidad en el aula y se siguió a un caso de estudio durante su proceso de formación. La investigación concluyó con el diseño e inclusión en el plan de estudios de la licenciatura de una asignatura que forme al profesor en atención a la diversidad en el aula; y, haciendo uso del Modelo "Reflexión-y-Acción" de Parada (2011), entre los aprendizajes evidenciados se tiene que el profesor dio importancia a las características de los estudiantes o del grupo para realizar sus planeaciones de clase.

Palabras clave: Formación inicial de profesores, atención a la diversidad, diseño curricular.

Introducción

Una educación para todos involucra que las personas asistan a la institución educativa de su sector y puedan gozar de todos los recursos que tiene ésta, sin que se discrimine o limite su participación (UNESCO, 1990, 1994, 2000). De la revisión bibliográfica realizada se encontró reglamentación internacional y nacional (Colombia) que respalda la atención a la diversidad en el aula, pero autores como Figueroa y Muñoz (2014) afirman que a pesar de los documentos legales existentes no se consigue garantizar prácticas que atiendan la diversidad. Lo anterior se puede deber a la necesidad de formar al profesorado alrededor del tema (Aké, 2015).

Después de la revisión bibliográfica realizada decidimos revisar el programa de Licenciatura en Matemáticas de una universidad de Colombia, contexto de estudio. Entre las competencias del egresado planteadas en el programa encontramos algunas relacionadas con la implementación, por parte de los profesores, de acciones educativas que favorezca el aprendizaje de todos los estudiantes (Escuela de Matemáticas, 2012), pero las asignaturas reportadas en dicho plan no hacen alusión explícitamente a la atención a la diversidad. Dado que el contexto de la investigación se enmarca en la formación inicial de Licenciados en Matemáticas alrededor de la atención a la diversidad, se plantearon los siguientes objetivos: i) Desarrollar un curso enfocado en la atención a la diversidad en clase de Matemáticas, y ii) Describir los aprendizajes logrados por profesores en formación que reciben instrucción sobre atención a la diversidad en clase de matemáticas.

Aspectos conceptuales

El modelo de Reflexión y Acción (R-y-A) de Parada (2011) fundamentó la metodología de la investigación que aquí se reporta. En la Figura 1 se muestra un bosquejo del modelo. Dentro de la espiral se encuentra el triángulo pedagógico, en cuyos vértices están el profesor (P) – estudiante (E) - matemática escolar (ME), y en el centro la actividad matemática (AM). La actividad matemática está pensada en posibilitar que el alumno, independientemente de sus características pueda construir matemáticas al ritmo y al nivel que le sea posible.

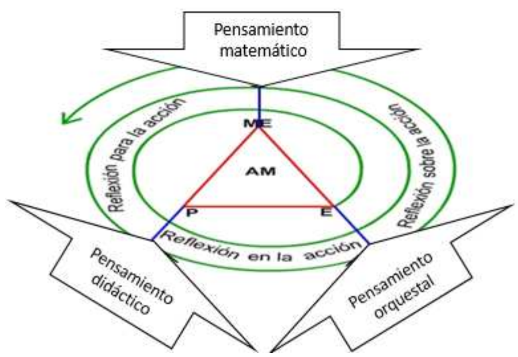


Figura 1: Modelo de "Reflexión-y-Acción". Fuente: Parada (2011)

El docente desarrolla su pensamiento reflexivo sobre la actividad matemática que promueve en clase en tres momentos: antes, durante y después de la clase. El profesor en formación inicial desarrolla su pensamiento reflexivo mediante la práctica experimental que se llevó a cabo en las asignaturas Fundamentación Didáctica y Seminario de Práctica Pedagógica, y posteriormente en la práctica vivencial que se hizo en las asignaturas: Práctica Docente I y Práctica Docente II.

Las tres flechas alrededor de la espiral representan aspectos sobre los cuales se propone desarrollar el pensamiento reflexivo de los profesores de matemáticas: pensamiento matemático, pensamiento didáctico y pensamiento orquestal. A continuación se describirá la manera cómo se interpretó cada uno de los pensamientos teniendo en cuenta el contexto de una investigación en la línea de atención a la diversidad en el aula de matemáticas.

El pensamiento matemático del profesor, implica que el profesor use sus saberes matemáticos y los logre aterrizar en diseños de aprendizaje adaptados a los estudiantes con sus diferentes procesos y características de aprendizaje. Con relación al pensamiento didáctico uno de los aspectos a tener en cuenta para caracterizar dicho pensamiento del profesor son las adaptaciones curriculares que él realice en clase. Según Blanco (1996) por adaptaciones curriculares se entienden como las modificaciones (cambios, énfasis) que requieren realizarse en los diversos componentes del currículo básico para adecuarlos a las diferentes situaciones, grupos y personas para las que se aplica, como una respuesta a las necesidades educativas de los educandos. Se hace referencia a las adaptaciones curriculares como una manera de atender la diversidad en el aula de clase, pero aclaramos que es necesario re-pensar el currículo de tal manera que se tenga en cuenta la diversidad del alumnado, esta labor no solo está en manos del profesor, es necesario el apoyo de toda la comunidad educativa para lograrlo.

Con relación al pensamiento orquestal se analizó la conducción de la clase por parte del profesor, y la manera cómo usa los recursos que seleccionó, de acuerdo a la actividad matemática que tiene prevista para sus estudiantes; estos aspectos se tomaron como categorías a priori para describir los aprendizajes construidos por profesores en formación que reciben instrucción sobre atención a la diversidad en clase de matemáticas.

Metodología

El estudio aquí expuesto se desarrolló en seis fases y un estudio preliminar a dichas fases para responder a los dos objetivos propuestos. A continuación se describirá cada uno:

Estudio preliminar. Se consultó los planes de estudio de las licenciaturas del país y se encontró que al menos la mitad no tienen alguna asignatura en la que se forme al profesor alrededor de la atención a la diversidad.

Fase 1. Revisión del plan de estudios del programa y diseño del curso: Se constató que no había asignaturas en la que se forme a los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas en atención a la diversidad, por ello, se diseñó un curso para atender esta falencia.

Fase 2. Primer pilotaje del diseño del curso: Este acercamiento se hizo mediante una adaptación curricular a la asignatura ya existente en el plan de estudios (Seminario de Práctica). El curso se dividió en tres partes: i) acercamiento teórico a la investigación en Educación Matemática; ii) Estudio y reflexión alrededor de la atención a la diversidad (aspectos legales, características físicas, cognitivas, sociales, comportamentales, etc.) y el rol del profesor de matemáticas como facilitador del aprendizaje; y iii) estudio teórico-práctico de metodología cualitativa (diseño y desarrollo de un proyecto en el que se problematiza sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en personas con características diferenciadas.

Fase 3. Análisis de resultados del primer pilotaje y rediseño del curso: El análisis curricular del curso se realizó basado en dos aspectos: los contenidos del curso y los proyectos de clase. Los posibles aprendizajes de la experiencia realizada (en el primer acercamiento) se usaron para responder al segundo objetivo de investigación.

Fase 4. Segundo pilotaje del diseño del curso: Puesta en escena del rediseño del curso.

Fase 5. Análisis de resultados del segundo pilotaje: Tal como se mencionó en la Fase 3, el análisis curricular valoró el logro de los objetivos tanto del componente teórico como el práctico. Los resultados de esta fase se usaron para el diseño curricular de un curso que se esperaba proponer para la reforma del programa de Licenciatura en Matemáticas.

Fase 6. Selección y seguimiento del caso de estudio: Se siguió en las asignaturas de Práctica Docente a los estudiantes egresados del primer pilotaje, y se seleccionó un caso de estudio para evaluar los aprendizajes logrados. Para analizar los resultados se usó el Modelo "Reflexión-y-Acción" de Parada (2011), dichos aprendizajes se categorizaron en cada uno de los componentes del pensamiento reflexivo del profesor.

Conclusiones

Con relación al primer objetivo de investigación se concluyó con el diseño de una asignatura llamada Educación Matemática y atención a la diversidad, la cual se incluyó en el nuevo plan de estudios de la licenciatura.

Con relación al segundo objetivo de investigación se evidenció algunos aprendizajes logrados. A continuación se mencionarán teniendo en cuenta los tres pensamientos mencionados en el modelo R-y-A:

Pensamiento matemático: El caso de estudio, en cada uno de los cursos por los que transitó, reflexionó sobre los objetos matemáticos con los que tuvo contacto, según el contexto en que se desempeñó. Además, resignificó algunas de las concepciones que tenía con relación a: las propiedades de la potenciación, los números enteros y la suma de números naturales. Todo esto, basado en lecturas de documentos de educación matemática.

Pensamiento Didáctico: El caso de estudio dio importancia a las características de los estudiantes o del grupo para realizar sus planeaciones; se apoyó en investigaciones en educación matemática para el diseño de las planeaciones; y comprendió que los errores de los estudiantes no son accidentales ya que están basados en conocimientos y experiencias previas, pudiendo tener diferentes causas que los motivan (dificultades didácticas, epistemológicas, cognitivas, de actitudes, entre otras).

Pensamiento Orquestal: comprendió la necesidad de incorporar diferentes instrumentos que posibiliten el aprendizaje de todos sus estudiantes; y seleccionó los recursos necesarios dependiendo de la actividad matemática que desea promover y de las características de sus estudiantes.

Referencias y bibliografía

Aké, L. (2015). Matemáticas y educación especial: realidades y desafíos en la formación de profesores. En López-Mojica, J. y Cuevas, J. (Coords), *Educación especial y matemática educativa*. pp. 15-32, México: Centro de Estudios Jurídicos y Sociales Mispat; Universidad Autónoma de San Luis de Potosi.

Blanco, R. (1996). *Alumnos con necesidades educativas especiales y adaptaciones curriculares*. Madrid: CNREE, MEC.

Escuela de Matemáticas. (2012). *Informe de autoevaluación con fines de acreditación*. Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas de la UIS, Bucaramanga.

Figueroa, I. y Muñoz, Y. (2014). La Guía para la Inclusión Educativa como herramienta de autoevaluación Institucional: Reporte de una Experiencia. *Revista Latinoamericana de Inclusión Educativa*, 8(2), 179-198.

Parada, S. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional*. (Tesis de Doctorado). Centro de investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

UNESCO (1990). *Declaración mundial sobre la educación para todos*, UNESCO, Jomtien, Tailandia.

Recuperado de http://www.unesco.org/education/pdf/JOMTIE_S.PDF

UNESCO (1994). *Conferencia Mundial sobre Necesidades Educativas Especiales: Acceso y Calidad*, Ministerio de Educación de España y UNESCO, Salamanca, España.

UNESCO (2000). *Informe final del Foro Mundial de la Educación en Dakar*, Dakar, Senegal.

A Atividade coletiva na formação inicial do professor de matemática: a elaboração do jogo como tarefa

Bruno Silva **Silvestre**
Universidade Federal de Goiás
Brasil
brunosilvestre.prof@gmail.com
Wellington Lima **Cedro**
Universidade Federal de Goiás
Brasil
wcedro@ufg.br

Resumo

O artigo tem por objetivo analisar as ações coletivas dos estudantes em formação inicial em matemática que sinalizam atividade de estudo, tendo o jogo como recurso de ensino importante para a organização do trabalho docente. Fundamenta-se nos pressupostos da Teoria Histórico Cultural sobre a formação do professor de matemática, elencando: os conceitos de Atividade propostos por Leontiev (1983), o jogo como recurso de ensino e a atividade de estudo referenciado em Davydov (1988) e Rubtsov (1996). A metodologia fundamenta-se na observação participante, fruto de uma pesquisa de mestrado realizada em 2016 em uma universidade brasileira, durante uma disciplina que abordava atividades lúdicas no ensino de ciências e matemáticas. A análise ressalta: as ações de planejamentos coletivos, as produções socializadas e o diálogo entre os estudantes como sinalizadores da apropriação do jogo como recurso relevante para a organização do ensino de matemática.

Palavras chave: atividade de estudo, coletividade, formação inicial, professor de matemática.

Introdução

Apresenta-se um recorte de uma pesquisa acadêmica, fruto de uma dissertação defendida no ano de 2016, que investigava a formação profissional inicial do professor de matemática, durante uma disciplina de núcleo livre, intitulada “Ensino de Ciências e Matemáticas por meio de atividades lúdicas na educação básica”, em uma universidade brasileira. O foco inicial da pesquisa era analisar a formação docente em matemática de modo a perceber o jogo como um importante recurso de ensino. Essa análise gerou outras inquietações, quanto à organização do trabalho docente e, sobretudo, à organização do trabalho docente de matemática tendo o jogo como recurso de ensino. Com ênfase na organização docente em matemática, que tem o jogo como recurso, especialmente nas ações de planejamento dos estudantes em organizar o ensino coletivamente por meio de uma tarefa, descreve-se, ao longo deste texto, alguns elementos que fundamentam a formação inicial do professor de matemática, sobretudo o seu preparo para docência, em que o jogo é compreendido como um recurso relevante ao ensino.

Estrutura-se o artigo em três seções, sendo que a primeira dialoga teoricamente com a Teoria da Atividade e a atividade de estudo caracterizada pela socialização de ações coletivas; a segunda aborda os dados experimentais, por meio da observação participante do trabalho de Silvestre (2016), descrevendo as principais ações coletivas que os estudantes em formação profissional inicial desenvolveram para planejar e organizar o ensino de matemática por meio do jogo; e, por último, apresenta-se algumas considerações sobre a relevância do trabalho colaborativo desenvolvido na coletividade para um ensino de matemática eficiente e dialético.

A Teoria da Atividade: contribuições à atividade de estudo coletivo na formação do professor de matemática

A pesquisa fundamenta-se nos pressupostos da Teoria Histórico Cultural, que, por sua vez, está em confluência epistemológica no materialismo histórico dialético e referenciada nas obras de autores russos, com destaque em Leontiev (1983), Davydov (1988), Rubtsov (1996) e Repkin (2014). Apoia-se à psicologia pedagógica, principalmente por tentar compreender os aspectos mentais e subjetivos, relacionados à dialética, em que os estudantes em formação profissional inicial em matemática entendem e apropriam-se dos conhecimentos didáticos, sobretudo às ações de planejamentos para a organização do ensino. Nessa perspectiva, o presente texto remete-se a elementos da psicologia leontieviana e preocupa-se com a aplicabilidade desta à educação matemática.

A apropriação da Teoria da Atividade por pesquisadores brasileiros tem-se mostrado eficiente para compreensão de alguns processos e métodos de pesquisa, como apontam Duarte (2002) e Asbahr (2005), relacionando-a à área da educação. Compreende-se em Leontiev (1983) que a vida humana, em todo o seu processo ontológico, é uma sucessão de atividades que vão substituindo umas às outras, percebendo que a atividade em sua estrutura concebe aspectos de orientação – necessidades, motivos e tarefas – e de execução – ações e operações. Os aspectos de orientação estão relacionados às ações mentais do homem, aos processos psíquicos e aos aspectos de orientação, que condizem com as ações manipulativas que podem ser objetais e/ou mentais. Segundo Leontiev (1983), na vida do ser humano há três atividades principais: jogo, estudo e trabalho, sendo a primeira evidenciada na infância, a segunda quanto se ingressa na escola e a terceira na fase adulta. Tais atividades não são únicas, mas potencializam os desenvolvimentos psíquicos. O trabalho de Davydov (1988) apoia-se na Teoria da Atividade e desenvolve pesquisas sobre a Atividade de Estudo, caracterizada como principal por Leontiev (1983), ao afirmar que, para um sujeito estar em atividade de estudo, o professor deve organizar o ensino de modo que crie condições e possibilidades para que o sujeito tenha necessidades e motivos para aprender, geralmente ocasionado por uma tarefa intencionalmente organizada, que desencadeará ações e operações para a sua resolução. Nesse processo de desenvolvimento de ações mentais e/ou objetais é que se dá a apropriação do conhecimento. Rubtsov (1996), seguindo essa premissa e estrutura de atividade de estudo, propõe que o professor organize a tarefa de estudo de modo a conceber uma situação problema, que coloque os estudantes para desenvolverem ações mentais de: estratégias, observação, manipulação, reflexão e pensamento crítico socializado para a solução do problema, ao qual usa-se o termo atividade em comum. Sobre esse tipo de atividade, desenvolvem-se os seguintes aspectos:

> 1 – As crianças têm como tarefa organizar a sua atividade cognitiva. Para isso, podem utilizar um "esquema de pesquisa", no qual o objeto de pesquisa, o problema, os meios de resolução e de controle são apresentados sob a forma de signos e símbolos.
>
> 2 – A classe é dividida em diversos grupos, cada um dos quais tendo parte do problema a ser resolvido (isto é, propõe o problema, outro resolve, um terceiro testa a solução, outro, ainda, faz a avaliação). Assim, o trabalho essencial, tal como o planejamento ou o controle da atividade, será efetuado pela criança e não pelo professor. Além disso, uma nova distribuição das tarefas permitirá à criança experimentar todos os papéis envolvidos.
>
> 3 – Os resultados do trabalho de todo o grupo dependem da qualidade do trabalho de cada um e da sua capacidade de cooperar e de autocorrigir-se. (RUBTSOV, 1996, p. 134).

Na proposta de Rubtsov (1996), há uma teorização da atividade comum, ou seja, coletiva, proposta para crianças, para que estas pudessem apropriar dos conhecimentos científicos da física. No entanto, observa-se ser possível aplicar a teoria a qualquer área do conhecimento, já que os parâmetros da atividade comum são: a resolução de problemas por meio de representações, a divisão da turma em grupos para solução coletiva e as relações entre os grupos no sentido de contribuir com a melhor resolução do problema. Nesta mesma perspectiva, Rivina (1996) concorda com a atividade em comum/coletiva e demonstra que, nos momentos de socialização das ideias objetivas pelos grupos, há uma melhor compreensão do problema e de sua solução: "[...] pois ao comparar diferentes pontos de vista e diferentes posições, chegam a uma melhor compreensão do problema a resolver" (p. 139). A autora, ainda, apresenta quatro categorizações para se resolver um problema proposto na coletividade: 1) Divisão e trocas entre os participantes relativamente aos elementos estruturais; 2) Construção de modelos; 3) Conflito de conceitos e 4) Atividades em comum baseadas em jogos. Desse modo, a observação participante, referenciada neste trabalho, aborda a atividade de estudo dos estudantes do curso de licenciatura em matemática da universidade brasileira em questão no desenvolvimento de uma tarefa de estudo, mobilizada por meio de problemas, que eram a elaboração e o planejamento de uma situação de ensino de matemática que tivesse como recurso o jogo, visando, sobretudo, a aprendizagem da docência.

A elaboração e o planejamento de uma situação de ensino: o jogo em destaque

Para o desenvolvimento da observação participante, o pesquisador acompanhou toda a disciplina de núcleo livre "Ensino de Ciências e Matemática por meio de atividades lúdicas na educação básica", ministrada no segundo semestre do ano de 2014. O professor formador propôs para os estudantes uma tarefa, à qual considera-se teoricamente como tarefa de estudo, realizada em grupos, contendo em cada grupo de quatro a seis participantes. A finalidade consistia em organizar e planejar uma situação de ensino que tivesse o jogo como recurso e que os estudantes, após organizarem tal situação, iriam experimentá-la em dois momentos, com outros públicos que não fossem a própria turma. Para a produção de dados, foram utilizados instrumentos, como: gravações de algumas aulas em que os estudantes tinham momentos de organização e planejamentos de ensino, entrevista ao final da disciplina de núcleo livre e registros escritos dos estudantes sobre os planejamentos e, também, um relato de experiência produzido por cada grupo, apresentado ao final da disciplina. Para análise desta proposta, utiliza-se algumas transcrições dos momentos de organização coletiva de planejamento dos estudantes e trechos da entrevista final, quando finalizavam a disciplina, ressaltando os sentidos atribuídos sobre o jogo e a organização do ensino.

Para a escolha dos recortes da pesquisa de Silvestre (2016), considera-se a relevância dos momentos que melhor indicam, durante a observação participante, o desenvolvimento do trabalho coletivo dos estudantes, para a apropriação da docência matemática, especialmente a que se utiliza do jogo como recurso. Além dessa justificativa, pauta-se no materialismo histórico dialético, compondo recortes que demonstram as relações entre os sujeitos, o conhecimento matemático e a organização do ensino, compreendido nas relações enfatizadas por Marx (1968) como dialéticas, objetivadas nas relações entre o homem e o mundo, sobretudo no processo de tornar-se professor de matemática.

Destaca-se, no quadro 01, uma transcrição de áudio de um dos grupos no momento de planejamento, sendo possível identificar a troca de ideias para a qualidade da situação de ensino.

Quadro 01 – Transcrição de áudio do momento de planejamento do grupo "basquemática" para o desenvolvimento da tarefa de estudo pensado coletivamente

1. Pesquisador: Como vocês vão desenvolver o conteúdo.
2. Daniela: Calma uma coisa de cada vez! Vocês pensam e depois vocês relacionam. Não é só matemática, matemática, matemática, matemática!

(Risos)

3. Daniela: Nossa!

(Pausa)

4. Daniela: Lembra do Wellington falando: "Não necessariamente tem que ser a matemática pela matemática"
5. Mateus: Não, não estou falando que é a matemática.
6. Daniela: Tem que ser o jogo, para a matemática. Não a matemática para a matemática.
7. Alana: A matemática para não matemáticos.

(Risos)

(Momento incompreensível)

8. Daniela: Tem gente que odeia matemática, está lá por que precisa. Não é um trem chato, é um trem legal, divertido! Nosso jogo vai cair no tedio puro, a pessoa já não gosta da matemática e tem que jogar matemática.

Cena I – Transcrição do primeiro momento de planejamento do grupo Basquemática.

Fonte: SILVESTRE (2016, p. 120)

Percebe-se, por meio da análise das falas dos estudantes em formação inicial, que, quando questionados pelo pesquisador, o que eles tinham conjecturado quanto ao conteúdo de matemática presente no jogo entram em uma sequência de respostas, em que se preocupavam, ainda, com os procedimentos do jogo, elencando, por meio do diálogo, nas contribuições de Daniela, Mateus e Alana – nomes fictícios para preservar a identidade dos participantes – a ideia de que o jogo deveria ser divertido, que a matemática presente no jogo deveria ser algo que motivasse e criasse necessidades nos participantes, expressos nas ideias: *"Não é um trem chato,* *é um trem legal, divertido!"*. Percebe-se, neste trecho, além das ações de diálogo desenvolvidas pela consciência, por meio do pensamento objetivado nas falas dos participantes, as contradições de ideias expostas pelos participantes que, após determinarem/conjecturarem várias possibilidades, chegam a um "acordo" para decidir como se desenvolveria a situação de ensino em si. Após refletirem coletivamente na melhor escolha, os participantes decidem por fazer um jogo em que a matemática esteja presente, mas de forma divertida, desmistificando o paradigma de que estudar matemática é chato.

O quadro 02 apresenta a transcrição de áudio de outro grupo, elucidando as regras presentes no jogo em desenvolvimento para ser um recurso de uma situação de ensino, que é pautado, também, no diálogo e nas relações dialéticas do pensamento objetivados por meio da fala.

Quadro 02 - Transcrição de áudio do momento de planejamento do grupo "roleta matemática" para o desenvolvimento da tarefa de estudo pensado coletivamente

[...] 1. Fabrício: Participantes? 2. Ohana: Os professores, os orientadores e os alunos. [...] (Pausa, barulho de movimentação nas cadeiras) 3. Fabrício: Quais são as regras? Ahhhh! 4. Ohana: Um minuto para responder... 5. Fabrício: É! Um minuto para responder. 6. Ohana: Tem duas chances para responder, por que se não passa para o outro grupo. 7. Fabrício: Duas chances para responder? 8. Ohana: Sim. Tipo, se eu chutar duas vezes e não saber a resposta certa lança a pergunta para o outro grupo. 9. Fabrício: Mas aí não tem quem errar já dava ponto para o outro? 10. Ohana: É pode ser! Pode ser assim. 11. Fabrício: Então coloca... 12. Ohana: Pode ser assim, se errar a pontuação passa para o outro grupo. 13. Fabrício: A pontuação passa para o grupo adversário. 14. Ohana: É acho que só. 15. Fabrício: A regra básica é essa né? Um minuto para responder cada pergunta. Se errar passa para o grupo adversário. Aí vai escolher um líder ne? 16. Ohana: É! 17. Fabrício: É.... (Pausa nas falas do grupo) 18. Fabrício: Aí as perguntas são passadas para o time adversário né? (Pausa nas falas do grupo)

Cena II – Transcrição do primeiro momento de planejamento do grupo Roleta Matemática.

Fonte: SILVESTRE (2016, p. 121-122)

No quadro 02, pode-se destacar a estruturação das ideias sobre a situação de ensino, quanto às regras do jogo, pensadas com a contribuição dos participantes do grupo, por meio da fala e do pensamento sobre o que concebiam como melhor para determinarem a situação de ensino.

Em confluência com a análise das falas e dos diálogos dos estudantes demonstrados até o momento, destaca-se, a seguir, um trecho da entrevista de Fabricio – nome fictício – em que o próprio estudante reconhece a importância do trabalho coletivo e a troca de experiências e informações que enriquecem e qualificam a tarefa desenvolvida.

> [...] sobre o que considera mais importante durante a disciplina de núcleo livre: "O que eu mais aprendi aqui cara, foi o trabalho de grupo, o trabalho de equipe, [...]" (Fabricio, 4F). Neste *flash*, percebemos a importância do trabalho em grupo, ou trabalho colaborativo para apropriação de determinado conhecimento. [...] destacamos que o trabalho em equipe não foi só importante para que os sujeitos em formação construíssem, planejassem e organizassem o ensino por meio do jogo, percebendo-o enquanto recurso de ensino de matemática básica, mas na perspectiva de considerar o trabalho em grupo e colaborativo incorporado à sua prática docente: "A gente não trabalha o aluno para aprender o conteúdo matemático, a gente trabalha o aluno para apreender aplicar o que ele vê na escola na vida em sociedade. A pessoa não consegue viver sozinha né? A gente não consegue viver sozinho. Então o aluno para aprender viver em sociedade ele tem que aprender a trabalhar em grupo. A gente que está aqui, dentro da faculdade, ver como isso é importante, né?" (Fabricio, F). (SILVESTRE, 2016, p. 157)

Na citação acima, de uma parte da entrevista realizada com Fabricio, tem-se a concepção de que o estudante demonstra relevância nas relações e nas ações coletivas constituídas e desenvolvidas com os grupos e, consequentemente, com toda a turma para a elaboração da situação de ensino, reconhecendo, inclusive, que não é possível viver em sociedade sem as relações em grupo, o trabalho em grupo, coletivo, é de muita importância, *"[...] para aprender viver em sociedade ele tem que aprender a trabalhar em grupo"*, ressaltando a relação homem-mundo.

Desse modo, caracteriza-se como tarefa de estudo dos estudantes, organizada intencionalmente pelo professor regente, a resolução do problema em desenvolver uma situação de ensino de matemática que houvesse o jogo como recurso. A organização dessa tarefa proposta aos estudantes da licenciatura em matemática apresenta-se em confluência com a atividade de estudo, sendo que os estudantes foram mobilizados a criarem necessidades e motivos para o desenvolvimento da tarefa que, por sua vez, ocasionou ações e operações para que os estudantes conseguissem criar a situação de ensino. Destaca-se, portanto, que a constituição do trabalho em grupo – desenvolvido pelos estudantes – no desenvolvimento da tarefa de estudo se deu pelas ações dialéticas dos estudantes, objetivadas por meio da fala e das expressões de suas consciências nas relações: conteúdo matemático, nos momentos de organização do jogo, evidenciado no ensino de matemática, proposto na própria tarefa de estudo desenvolvida pelos estudantes.

Algumas considerações

Considera-se que as ações desenvolvidas pelos estudantes enquanto organizavam e planejavam o ensino de matemática, tendo o jogo como recurso, destacam-se nas ações mentais de pensamento – relacionadas à consciência – objetivadas nas falas dos estudantes, quando um contribuía com o outro, e, nesses processos de contribuições mútuas, chegou-se a consolidação da situação de ensino de matemática, evidenciada nas relações de conteúdo matemático, no jogo com presença de regras/motivador de toda a situação de ensino e, também, no modo que iriam proceder com o ensino – didática. As ações coletivas aqui evidenciadas condizem com o instrumento utilizado – transcrições das falas captadas por meio do áudio – com os estudantes em formação, que, por sua vez, demonstraram a relação de relevância do trabalho e o enriquecimento de sua qualidade quando dialogado e construído por meio das contradições de pensamento, argumentação e ideias objetivadas nas falas dos estudantes, para compreenderem, sobretudo, a atividade pedagógica do professor de matemática.

Destacam-se as relações do homem com o mundo, mediadas pelo pensamento e substanciada pela consciência, em destaque neste trabalho nas ações da consciência objetivadas nas falas dos estudantes, nas quais, por meio de contradições, chegou-se à determinação específica da situação de ensino que se desejava, sendo motivadora e criadora de necessidades de aprendizagem, capaz de possibilitar movimentos de ação e operação para o seu desenvolvimento, cumprida a tarefa de estudo proposta, cumprindo sua finalidade última, que era utilizar o jogo como recurso relevante ao ensino de matemática.

Referências

Asbahr, F. S. F. (2005) A pesquisa sobre a atividade pedagógica*:* contribuições da teoria da atividade. *Revista Brasileira de Educação.* Nº 29. Mai/Jun/Jul/Ago. 108-119

Davydov. V. V. (1988) *Problemas do ensino desenvolvimental* – a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. Tradução de José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas da versão em inglês: Problems of Developmental Teaching. Revista de Educação Soviética, agosto, v. 30, nº 8.

Duarte, N. (2002) A teoria da atividade como uma abordagem para a pesquisa em educação. *PERSPECTIVA*, Florianópolis, v. 20, n. 02, p.279-301, jul./dez. 2002

Leontiev, A. N. (1983) *Actividad, consciencia, personalidad.* Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Marx, K. (1968) *O Capital:* crítica da economia política. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira. v.1.

Rivina. I. (1996) A organização de atividades coletivas e o desenvolvimento cognitivo em crianças pequenas. In. CATHERINE. G. et al *Após Vygotsky e Piaget: perspectiva social e construtivista.* Escolas russa e ocidental. Tradução Eunice Gruman. – Porto Alegre: Artes Médicas. 138-150

Repkin, V. V. (2014) O ensino desenvolvente e a atividade de estudo. *Ensino Em Re-Vista*, v.21, n.1, p.85-99, jan./jun.

Rubtsov, V. (1996) A atividade de aprendizado e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares. In. CATHERINE. G et al. *Após Vygotsky e Piaget: perspectiva social e construtivista*. Escolas russa e ocidental. Tradução Eunice Gruman. – Porto Alegre: Artes Médicas. 129-137

Silvestre, B. S. (2016) *A formação do professor de matemática:* o jogo como recurso de ensino. Dissertação – Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, UFG, Goiânia. 215 f.

O Conhecimento Matemático como Fator Determinante no Ensino e na Aprendizagem: Percepções de Professores Brasileiros que Ensinam Matemática

Marlo Mendes de Souza Junior
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil
marlojunior.mat@gmail.com

Rafaela Oliveira Carvalho
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil
rafacarvalho146@gmail.com

Raquel Carneiro Dörr
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil
raqueldoerr@gmail.com

Rebeca de Miranda Silva
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil
rebecamirandasilva@gmail.com

Regina Pina Silva
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil
reginapina@gmail.com

Resumo

O ensino e a aprendizagem de Matemática no Brasil têm suscitado discussões em função dos resultados, ainda abaixo do esperado, a presentados pelos estudantes nas avaliações em larga escala. Assim, questionam-se a formação inicial dos professores que ensinam Matemática, o distanciamento da formação acadêmica em relação à prática e o impacto do conhecimento matemático na atuação docente. Desse modo, desenvolveu-se um estudo com 45 professores que ensinam Matemática, tendo como objetivos: identificar as percepções desses professores, licenciados em Pedagogia e Matemática, sobre suas práticas de ensino e conhecer suas aspirações por aprimoramento em conteúdos matemáticos específicos. Os participantes responderam a duas perguntas acerca de suas percepções, atuação docente e necessidades formativas. Os dados foram submetidos à análise de conteúdo e os resultados mostram que eles consideram a Matemática como componente curricular difícil de ser ensinada e têm na geometria o tópico curricular mais requerido para aprofundamento.

Palavras-chave: aprendizagem, conhecimento matemático, ensino, formação de professores, geometria.

Contexto da investigação e referencial teórico

O ensino e a aprendizagem de Matemática no Brasil têm suscitado discussões em vários setores da sociedade pelos resultados, ainda abaixo do esperado, apresentados pelos estudantes nas avaliações em larga escala, tais como o *Programme for International Student Assessment* (PISA), o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), o Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE), entre outras. Do mesmo modo, acentuam-se, os debates acerca das reformas curriculares dos Cursos de Licenciatura em Matemática e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Gatti, 2013; Santos, 2014; OCDE, 2016; Brasil, 2016). Nesse contexto, questionam-se o ensino e o aprendizado da Matemática da Educação Básica ao Ensino Superior e também a formação inicial que os professores que ensinam Matemática (Fiorentini, 2003) têm recebido nas diferentes Instituições de Ensino Superior, em especial, o distanciamento da formação acadêmica em relação à prática em sala de aula e o impacto do conhecimento matemático na atuação docente. (Ball, Hill & Bass, 2005).

O conhecimento matemático do professor tem sido amplamente abordado nos debates relativos à qualidade da Educação Básica no Brasil, desde as últimas décadas do século passado. Entretanto, o que vem a ser esse conhecimento? Shulman (1986), ao desenvolver o "*knowledge base for teaching*" (base de conhecimentos para o ensino), classifica os diferentes tipos de conhecimentos necessários à prática docente. Dentre eles estão o conhecimento do conteúdo, do curricular, do pedagógico do conteúdo, do cognitivo dos estudantes, entre outros. Em relação ao conhecimento do conteúdo, entende-se, a partir dessa abordagem teórica, que a sua estrutura difere de acordo com as diferentes áreas de conhecimento, ou seja, esse conteúdo vai além do conhecimento dos fatos ou dos conceitos da área e integra, além da capacidade do professor de apresentar aos estudantes as verdades aceitas na área, a capacidade de explicar porque determinado resultado é considerado verdadeiro, como ele se relaciona com outros resultados ou porque é pertinente conhecê-lo. Além disso, engloba a compreensão, por parte do professor, sobre a posição que determinados tópicos curriculares assumem, se central ou periférica, na disciplina.

Todo esse entendimento tem contribuído para a realização de inúmeras pesquisas e para a ampliação da compreensão do Conhecimento Base do professor para ensinar Matemática. Nesse sentido, destacamos os trabalhos liderados por Ball e Hill. Eles sistematizaram diversos resultados de pesquisas a partir do referencial teórico de Shulman (1986) e desenvolveram a noção do Conhecimento Matemático para o Ensino (*Mathematical Knowledge for Teaching*). (Hill et al., 2005; Ball et al., 2005; Ball, Tames & Phelps, 2008).

Como sabemos, a formação de professores é um processo complexo iniciado na graduação, refletido, ampliado, transformado ou não no desenvolvimento profissional, concretizado, desenvolvido e significado em sala de aula a partir das inúmeras experiências advindas do ambiente escolar. Os conhecimentos construídos ao longo dessa trajetória são determinantes para o ensino e aprendizagem dos estudantes, do mesmo modo que as noções de Matemática científica e escolar e suas oscilações, enquanto objeto de estudo e de trabalho na escola (Fiorentini et al., 2016).

Moreira & David (2005) auxiliam nesses entendimentos ao discutirem a "transposição didática" (Chevallard,1991) e as "práticas escolares" (Chervel, 1990). Os autores concluem que "A Matemática escolar não se reduz a uma versão elementar e 'didatizada' da Matemática científica" (Moreira & David, 2005, p. 51) e "a prática profissional do professor de Matemática da escola básica é uma atividade complexa, cercada de contingências, e que não se reduz a uma transmissão técnica e linear de um 'conteúdo' previamente definido" (Moreira & David, 2005, p. 52). Já Diniz-Pereira (1999) discute as limitações dos cursos de formação inicial ao tratar o conhecimento matemático necessário à prática docente em Matemática, seja para os anos iniciais e finais do ensino fundamental, seja para o ensino médio. Para ele, tais limitações filiam-se às estruturas curriculares clássicas das licenciaturas do Brasil, surgidas na década de 1930, às quais são denominadas modelo "3 + 1". Nesse padrão, os três primeiros anos do curso de licenciatura são destinados às disciplinas específicas e as disciplinas de natureza pedagógica eram justapostas no último ano. Em suas publicações, o autor chama este modelo de racionalidade técnica e afirma:

> Nesse modelo, o professor é visto como um técnico, um especialista que aplica com rigor, na sua prática cotidiana, as regras que derivam do conhecimento científico e do conhecimento pedagógico. Portanto, para formar esse profissional, é necessário um conjunto de disciplinas científicas e um outro de disciplinas pedagógicas, que vão fornecer as bases para sua ação. No estágio supervisionado, o futuro professor aplica tais conhecimentos e habilidades científicas e pedagógicas às situações práticas de aula (Diniz-Pereira, 1999, p. 111-112)

Complementando as análises acerca da complexidade relativa à formação inicial do professor que ensina Matemática, somam-se resultados que afirmam que a identidade do professor apresenta marcas das trajetórias vividas e, por isso, não pode ser dissociada de sua história de formação ou dos formadores com os quais ele conviveu (Dörr & Pina Neves, 2014; Nacarato, Oliveira & Fernandes, 2017). Ademais, D'Ambrosio (1993) já nos alertava que dificilmente um professor de Matemática formado em programa obsoleto estará preparado para enfrentar os desafios das modernas propostas curriculares.

Logo, considerando este complexo cenário da formação de professores brasileiros que ensinam Matemática e as necessidades de compreensão sobre o impacto do conhecimento matemático do professor em sua prática docente, delineamos o presente estudo, tendo como objetivos:

i) identificar as percepções de professores que ensinam Matemática, licenciados em Pedagogia e Matemática, sobre suas práticas de ensino;

ii) conhecer suas aspirações por aprimoramento em conteúdos matemáticos específicos.

A escolha do objeto justifica-se pelo entendimento do grupo de pesquisa em relação à formação matemática de professores como importante elemento de influência em sua prática docente, e, consequentemente, no desenvolvimento de metodologias de ensino e nos resultados de aprendizagem dos estudantes.

Método

Participaram do estudo 45 professores que ensinam Matemática (23 homens e 22 mulheres), em sua maioria licenciados em Matemática e alguns em Pedagogia. Todos eles participavam, no momento da realização do estudo (fevereiro de 2018) de um Curso de Especialização em Metodologias de Ensino em Matemática, realizado na modalidade à distância e oferecido por uma universidade pública do Distrito Federal do Brasil em parceria com a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Os participantes são, em sua maioria, provenientes de Cursos de graduação de instituições privadas de Ensino Superior. Eles atuam, em sua maioria, em escolas da rede pública, como docentes de Matemática com tempo variado (desde os ingressantes na profissão com 1 ano de atuação, até aqueles que já atuam há 27 anos) e, além disso, possuem idades entre 23 a 52 anos.

Os participantes responderam a duas perguntas que solicitavam a justificativa para a resposta, organizadas em instrumento individual entregue a eles impresso em papel A4. Eles responderam a elas sem limitação de tempo e sem diálogo com os colegas de curso; foram voluntários e não receberam nenhum favorecimento em função de sua participação. As perguntas apresentadas foram as seguintes:

i) Você considera que a Matemática é difícil de ensinar? Justifique sua resposta.

ii) Que conteúdo de Matemática da Educação Básica você gostaria de estudar com mais profundidade? Justifique sua resposta.

Os dados obtidos foram organizados em quadros para facilitar a leitura e submetidos à análise de conteúdo, tomando-se a proposição como unidade de análise (Bardin, 1977; Fávero & Trajano, 1998). Este relato de pesquisa está inserido em contexto investigativo mais amplo e em desenvolvimento. Desse modo, este artigo traz resultados gerais os quais integrarão, posteriormente, resultados pormenorizados.

Resultados Gerais e discussões

Do total de participantes, 28 deles pertenciam e atuavam como docentes de Águas Lindas e 17 de Anápolis, ambas cidades situadas no estado de Goiás, sendo 45 respostas ao todo. Referente à primeira pergunta, foram obtidas um total de 25 respostas "sim", das quais 13 respostas são dos professores de Águas Lindas e 12 de Anápolis. Por outro lado, 16 respostas foram "não", dessas

11 são de Águas Lindas e 5 de Anápolis. Além disso, um professor de Águas Lindas não soube responder e 3 professores, também do mesmo município, responderam "depende".

Com relação à segunda pergunta, foram mencionados um total de 17 conteúdos, dos quais 53 eram citações totais de conteúdos específicos. Assim, listamos os tópicos curriculares da Educação Básica que os professores participantes gostariam de estudar com mais profundidade, os quais foram citados mais de uma vez nas respostas: geometria, probabilidade, álgebra, trigonometria, cônicas, polinômios, história da Matemática, logaritmo, matemática financeira, teoria dos números, funções, estatística, divisores, frações, potenciação, problemas matemáticos e análise combinatória. Dentre esses conteúdos, os que aparecem com mais frequência são geometria, citado 23 vezes, seguido de trigonometria¸ 6 vezes, e probabilidade, 4 vezes. Álgebra e matemática financeira foram citadas apenas 3 vezes. Funções e frações foram citadas 2 vezes. O restante foi citado uma vez e um professor não soube responder.

Essas informações foram organizadas nos gráficos seguintes:

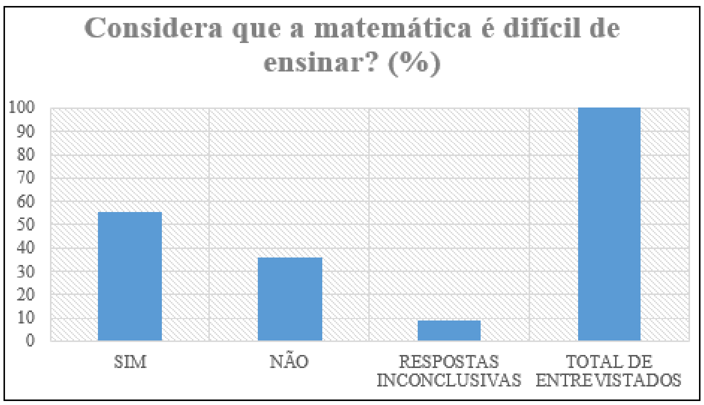


Figura 1. Percentual de respostas à primeira pergunta.

Figura 2. Percentual de respostas à segunda pergunta.

De acordo com as orientações de Fávero & Trajano (1998), em relação à primeira pergunta, quatro proposições foram evidenciadas: a Matemática é difícil de ensinar porque os estudantes não possuem os pré-requisitos conceituais básicos; a Matemática é difícil de ensinar porque possui linguagem abstrata e específica; a Matemática é difícil de ensinar porque estudantes e famílias compartilham representação negativa dessa área de conhecimento. Já em relação à segunda pergunta, três proposições foram evidenciadas: os professores gostariam de aprofundar seus conhecimentos em geometria porque não estudaram esse tópico curricular na Educação Básica e apresentaram como justificativa “para aprender novas formas de ensiná-la”; “acho difícil explicar o conteúdo”; “porque tenho dificuldade nesses conteúdos”. Os professores gostariam de aprofundar seus conhecimentos em geometria, trigonometria e probabilidade porque possuem dificuldades conceituais e metodológicas relativas a esses tópicos curriculares; pelo mesmo motivo, os professores gostariam de aprofundar seus conhecimentos em álgebra, matemática financeira e funções.

Entendemos que os resultados, mesmo sendo desvelados em 2018, apresentam similaridades com estudos anteriores. Moreira & David (2005), por exemplo, afirmam que a formação matemática do licenciando se desconecta da prática docente. As respostas obtidas levam-nos a concordar com estes autores se estabelecermos uma relação direta entre a formação dos professores e suas respostas, independentemente se forem licenciados em Pedagogia ou Matemática.

Avaliamos, também, que os resultados gerais apresentados denunciam a manutenção de uma realidade amplamente discutida na literatura sobre o ensino e a aprendizagem de geometria na Educação Básica. Muitos estudos referem-se a este fato a partir de termos como “omissão e (ou) abandono”. Ver, por exemplo, Pavanello (1993); Pina Neves (2010), Kaleff (2003), Salazar (2009), Almeida (2010). Desse modo, infere-se que se mantém, no âmbito da atuação profissional dos professores participantes do estudo, “[...] presentemente, está estabelecido um círculo vicioso: a geração que não estudou geometria não sabe como ensiná-la” (Lorenzato, 1995, p. 4).

Tais resultados preocupam-nos tendo em vista os resultados de estudos como os de Fillos (2006) que afirma que a geometria é fundamental para a compreensão do mundo e a participação ativa do homem na sociedade, pois facilita a resolução de problemas de diversas áreas do conhecimento e desenvolve o raciocínio visual. Fonseca et al. (2001) registram que ela é importante veículo para o desenvolvimento de habilidades e competências, tais como a percepção espacial e a resolução de problemas, pois oferece aos sujeitos oportunidades de observar, comparar, medir, inferir, validar, generalizar e abstrair. Sendo assim, os autores defendem que a reformulação do ensino de geometria não é apenas uma questão didático-pedagógica, é também epistemológica e social.

Em referência específica ao Ensino Médio, os documentos governamentais apontam que as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e na visualização de partes do mundo que o cerca. Além disso, defendem que essas competências são importantes na compreensão e na ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. Quanto ao Ensino Superior, as diretrizes curriculares para os cursos de licenciatura em Matemática destacam que os cursos devem proporcionar ao licenciando estudos de fundamentos de geometria, bem como de conteúdos presentes no currículo da Educação Básica.

Todos os argumentos pontuados até o momento permitem-nos algumas conclusões: o ensino de geometria é imprescindível para o desenvolvimento humano, é defendido por pesquisadores da área, é defendido nos textos dos documentos oficiais e a aprendizagem geométrica é pontuada como possível, desde que o ensino e a aprendizagem de geometria sejam (re)construídos em todos os níveis de ensino. Essas indagações são pertinentes se considerarmos o contexto social brasileiro. D' Ambrosio (1993) afirma que nossa sociedade, em geral, e nossos estudantes, em particular, não veem a Matemática como a disciplina dinâmica que ela é com espaço para criatividade e emoção.

Referências

Almeida, T. (2010). *Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Ball, D. L., Hill, H. C & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching: Who knows Mathematics Well Enough to Teach Third Grand, and How Can We Decide? *American Educator*, *29*(1), 14-46. Recuperado em http://hdl.handle.net/2027.42/65072

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. doi:10.1177/0022487108324554

Bardin, L. (2006). *Análise de conteúdo* (L. de A. Rego & A. Pinheiro, Trads.). Lisboa: Edições 70. (Obra original publicada em 1977).

Brasil (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular Ensino Médio*. Recuperado em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf

Chervel, A., (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação, 2*, 177-229.

Chevallard, Y., (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

D'ambrosio, B. S. (1993). Formação de professores de Matemática para o século XXI: o grande desafio. *Pro-Posições, Campinas*, *4*(1), 10.

Diniz-Pereira, J. E. (1999). As licenciaturas e as novas políticas educacionais para formação docente. *Educação & Sociedade, 68,* 109-125.

Dörr, R. C., & Pina Neves, R. S. O Perfil de Ingressantes na Licenciatura em Matemática de uma Instituição Pública Federal do Distrito Federal. In: VI EBREM Encontro Brasiliense de Educação Matemática, 2014, *Anais*... Brasília, 2014.

Fávero, M. H., & Trajano, A. (1998). A leitura do adolescente: Mediação semiótica e compreensão textual. *Psicologia, Teoria e Pesquisa, 3*, 229- 240.

Fillos, L. M. (2006). O ensino da geometria: depoimentos de professores que fizeram história. In: EBRAPEM, Belo Horizonte. Recuperado em: http://www.fae.ufmg.br:8080/ebrapem/completos/05-11.pdf

Fiorentini, D. (2003). *Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares*. São Paulo: Mercado das letras.

Fiorentini, D. et al. (2016). O professor que ensina Matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa. In: D. Fiorentini, C. L. B. Passos, & R. C. R. Lima (Org.). *Mapeamento da* *pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática: período 2001 – 2012*. , (pp. 17 – 42). Campinas, SP: FE/UNICAMP. E-Book. ISBN 978-85-7713-198-3.

Fonseca et al. (2001).

Gatti, B. A. (2013). Possibilidades e fundamentos de Avaliações em larga escala: primórdios e perspectivas contemporâneas. In: A. Bauer, & B. A. Gatti, (Org.). *Vinte e cinco anos de avaliação de sistemas educacionais no Brasil*. (pp. 47-69). Florianópolis: Insular, v. 2.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal*, *42*, 371-406.

Kaleff, A.M. (2003). *Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos.* Rio de Janeiro: EdUFF.

Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar geometria? *Educação Matemática em Revista* – SBEM, São Paulo, *4*, 3-13.

Moreira, P. C., & David, M. M. M. S. (2005). O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. Revista brasileira de educação, *28*, 50-62.

Nacarato, A. M., Oliveira, A. M. P. de, &. Fernandes, D. N. (2017, jan./abr.). Histórias da formação e de professores que ensinam Matemática: possíveis aproximações teórico-metodológicas. *Revista Zetetiké*, *25*(1), 46-74.

Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). (2016). *PISA 2015 results in focus*. Recuperado em http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa_2015_brazil.pdf

Pavanello, M. R. (1993). O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Revista Zetetiké, 1*(1), 7-17.

Pina Neves, R. da S., & Baccarin, S. A. de O. (2010). Estratégias de resolução de problemas de ingressantes no curso de licenciatura em Matemática: um estudo de caso por meio da replicação de itens do ENEM 2009. In X Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), Salvador. *Anais…* ISSN 2178-034X.

Salazar, J. V. (2009). *Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço.* Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Santos, E. R. dos. (2014). *Análise da produção escrita em Matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino.* Tese (Doutorado em Ensino de 73 Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Shulman, L. S. (1986). *Those who understand: knowledge growth in teaching*. *Educacional Researcher, 15*(2), 4-14.

A Análise Matemática na constituição de Conhecimentos Didático-Matemáticos para a atuação de professores de Matemática no Ensino Médio: uma análise epistêmica de uma atividade sobre Números Racionais

Paulo Cesar Pereira **Napar**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
paulonapar@gmail.com
Carmen Teresa **Kaiber**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
carmen_kaiber@hotmail.com

Resumo

Apresenta-se, neste artigo, um recorte de uma pesquisa em nível de mestrado intitulada “A Análise Matemática na Constituição de Conhecimentos para a atuação do Professor de Matemática no Ensino Médio: uma análise na perspectiva epistêmica do Enfoque Ontossemiótico”. A proposta deste excerto considera a análise de uma atividade, presente em um livro de Análise Matemática para Licenciatura, sobre Números Racionais, buscando uma articulação com um objeto de estudo do Ensino Médio para identificar potencialidades que alicerçam o Conhecimento Didático-Matemático de professores de Matemática do Ensino Médio. A análise toma como referência os pressupostos epistêmicos da ferramenta de análise didática da Idoneidade Didática do Enfoque Ontossemiótico, sendo conduzida em uma perspectiva qualitativa. Os resultados apontam que a atividade, de contexto da Análise Matemática, apresenta uma possível articulação com conhecimentos matemáticos do Ensino Médio no que se refere a utilização de provas matemáticas, mostrando-se como uma potencialidade para alicerçar conhecimentos da atuação docente nesse nível de ensino.

Palavras chave: Análise Matemática para Licenciatura, Ensino Médio, Enfoque Ontossemiótico, Números Racionais, Conhecimentos Didático-Matemáticos.

Introdução

Investigações sobre a Análise Matemática, como a de Reis (2001), Moreira, Cury e Vianna (2005) e Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013), apresentam discussões sobre o papel da Análise no contexto dos cursos de formação de professores de Matemática. Essas pesquisas surgem em torno de debates sobre como o alto nível de complexidade matemática, apresentado em determinados componentes curriculares, contribui para o desenvolvimento de competências profissionais para os futuros professores de Matemática.

A Análise, enquanto área de estudo que formaliza, rigorosamente, os conceitos matemáticos envolvidos no tratamento do conjunto dos Números Reais e do Cálculo (Ávila, 2006), coloca em evidência um conjunto de competências que, segundo Moreira, Cury e Vianna (2005), prioriza a constituição de conhecimentos matemáticos, deixando de lado, por vezes, a formulação de conhecimentos que contribuem para a formação pedagógica e didática de futuros professores. Apesar disso, tal como destacam as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática (Brasil, 2001), essa é uma área de conhecimento que deve ser abordada nos cursos de formação de professores de Matemática. Pondera-se que, se por um lado a Análise é conduzida pela visão do mundo puramente matemático, por outro, deve-se olhar para as contribuições que os conhecimentos provenientes dessa área têm a oferecer para a formação docente de professores de Matemática.

Considerando elementos do contexto apresentado, foi desenvolvida uma pesquisa no âmbito de uma dissertação de mestrado que teve como objetivo investigar articulações entre os conhecimentos matemáticos institucionais da Análise Matemática para Licenciatura em Matemática e os do Ensino Médio que apresentassem potencialidades para alicerçar o conhecimento do professor de Matemática para atuar no Ensino Médio. Essa pesquisa, de carácter qualitativo, partiu de pressupostos teóricos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) (Godino, 2009; Godino; Batanero & Font, 2008; Godino et al., 2017), buscando por possíveis articulações institucionais entre objetos matemáticos da Análise Matemática e os do Ensino Médio, os quais se constituíssem como potencialidades no desenvolvimento de Conhecimentos Didático-Matemáticos para a atuação dos professores.

A partir do contexto mencionado apresenta-se, aqui, um recorte dessa investigação que considera a análise das potencialidades de uma atividade, presente em um livro de Análise Matemática para Licenciatura (Ávila, 2006), sobre Números Racionais. Essa análise parte do entendimento de uma possível articulação com conhecimentos que, com referência em Souza (2013), estão presentes no Ensino Médio. Toma-se como pressuposto teórico os constructos advindos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS), particularmente no que se refere a Idoneidade Didática em sua dimensão epistêmica (Godino, 2009; Godino; Batanero & Font, 2008), direcionando-se para apontamentos sobre a constituição de Conhecimentos Didático-Matemáticos (Godino, 2009; Godino et al., 2017) para a atuação no Ensino Médio (Napar, 2018). Essa análise toma como foco aspectos relacionados a atividade enquanto situação-problema e a sua resolução, discutindo-se, com base no EOS, sobre os potenciais conhecimentos epistêmicos que emergem para a prática docente.

Aspectos teóricos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática

O marco teórico do Enfoque Ontossemiótico toma como base os aportes teóricos da Didática da Matemática francesa apontando para uma ontologia de objetos matemáticos que contemple uma visão que entende a Matemática em um triplo aspecto: atividade de resolução de problemas socialmente compartilhada, linguagem simbólica e sistema logicamente organizado (Godino, 2009; Godino; Batanero; Font, 2008).

O EOS, atualmente, se estrutura a partir de cinco grupos teóricos, a saber: (1) Sistemas de Práticas, (2) Configurações de Objetos e Processos Matemáticos, (3) Configuração e Trajetória Didática, (4) Dimensão Normativa e (5) Idoneidade Didática (Godino et al., 2017).

A Idoneidade Didática se constitui em uma ferramenta de análise própria para investigar elementos do trabalho docente frente aos objetos matemáticos e as relações nas práticas matemáticas, permitindo, assim, uma intervenção eficaz na sala de aula (Godino, 2009) e nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Refere-se a um processo que integra, harmonicamente, um conjunto de seis dimensões: epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, emocional e ecológica. A dimensão epistêmica diz respeito, em um processo de estudo, ao grau de representatividade que há, do ponto de vista institucional, entre o significado atribuído a um objeto em relação a sua referência matemática (Godino; Batanero & Font, 2008)

A dimensão epistêmica considera, em um processo de estudo matemático, componentes e indicadores que podem ser utilizados como uma ferramenta de análise didática, aqui intitulada como Ferramenta de Análise Didática: Dimensão Epistêmica (FADDE), a qual é apresentada e descrita no quadro da Figura 1.

Componentes	Indicadores
Situações-problema	-Apresentam-se mostras representativas e articuladas de situações de contextualização, exercícios e aplicações. - Propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).
Linguagem	- Percebe-se o uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica...), tratamento e conversões entre as mesmas. - O nível de linguagem adequado aos educandos a que se dirige. - Propõem-se situações de expressão e interpretação matemática.
Regras (Definições, proposições, procedimentos)	- As definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem. - Apresentam-se os enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado.
Argumentos	- Promovem-se situações as quais o educando tenha que argumentar e justificar o pensamento matemático. - As explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível a que se dirigem.
Relações	- Os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições e etc.) se relacionam e se conectam entre si. - Identifica-se a articulação dos diversos significados dos objetos que intervêm nas práticas matemáticas.

Figura 1: Componentes e indicadores da FADDE
Fonte: traduzido e adaptado de Godino (2009).

Destaca-se que as análises conduzidas neste trabalho possuem um direcionamento a constituição do conhecimento do professor de Matemática. Nesse sentido, considera-se uma visão para a ferramenta didática tendo em conta a modelização do conhecimento, no âmbito epistêmico, para a atuação docente. Esse olhar, segundo Godino (2009) e Godino et al. (2017), é denominado por Conhecimentos Didático-Matemáticos (CDM).

Os CDM de professores de Matemática, como no âmbito da Idoneidade Didática, são entendidos nas perspectivas epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, emocional e ecológica (Godino, 2009; Godino et al., 2017). Entende-se que esse modelo pressupõe os conhecimentos necessários para que o processo de ensino da Matemática, por parte dos professores, seja o mais qualificado possível.

Na perspectiva epistêmica, foco deste trabalho, são considerados duas classes de conhecimentos do professor que se inter-relacionam na constituição dos CDM: conhecimento comum do conteúdo e conhecimento ampliado do conteúdo. Toma-se, com base em Godino et al. (2017), uma interpretação para essas noções na presente investigação, na qual se concebe que o conhecimento comum do conteúdo se constitui nas possibilidades de conexões matemáticas que os conhecimentos da Análise Matemática têm para alicerçar o conhecimento específico do professor. Já o conhecimento ampliado do conteúdo, refere-se ao desenvolvimento de competências para identificar, significar e relacionar os conhecimentos matemáticos da Análise Matemática com os do Ensino Médio, bem como a outros contextos que podem estar envolvidos na prática profissional de professores de Matemática.

Aspectos metodológicos

A investigação, na qual a análise aqui apresentada se insere, foi conduzida em uma perspectiva qualitativa. Nesse contexto, os aportes do EOS forneceram elementos pertinentes para a realização da mesma. A atividade tomada para análise refere-se a uma questão sobre a transformação de um número em forma decimal para a sua forma fracionária. A questão foi extraída de um livro Análise Matemática para Licenciatura (Ávila, 2006) e, a partir da constituição de uma resolução que leva em conta o contexto de provas e justificativas matemáticas, apresenta-se uma análise formulada à luz dos componentes e indicadores da chamada Ferramenta de Análise Didática: Dimensão Epistêmica (FADDE) (Godino, 2009; Godino; Batanero & Font, 2008, Godino et al., 2017), como já destacado.

A análise dos dados é orientada por uma perspectiva que considera o cenário de conhecimentos matemáticos que apresentam potencialidades para a atuação de professores de Matemática do Ensino Médio (Napar, 2018). Nesse intuito, aborda-se uma articulação entre os conhecimentos da área de Análise com os conhecimentos do Ensino Médio orientada pelas potenciais contribuições, no âmbito epistêmico, a constituição de Conhecimentos Didático-Matemáticos (Godino, 2009; Godino et al., 2017).

Apresentação, análise e discussão

A atividade utilizada para análise neste recorte está no contexto da Análise Matemática para Licenciatura (Ávila, 2006), referindo-se a uma questão interpretada, aqui, como uma situação-problema: "Prove que a dízima periódica $0{,}21507507...$ é igual a $\frac{21507-21}{99900} = \frac{21486}{99900} = \frac{3581}{16650}$" (Ávila, 2006, p. 31).

Para avaliar as potencialidades dessa atividade, apresenta-se uma possível resolução, no quadro da Figura 2, conduzida por etapas (coluna 1) que são explicadas em linguagem natural (coluna 2) e conduzidas no âmbito da linguagem aritmética e algébrica (coluna 3).

Etapa	**Explicação em linguagem natural**	**Explicação em linguagem aritmética/algébrica**
	Tomando um número y tal que $y = 0{,}21507507...$	$y = 0{,}21507507...$
(1)	Multiplicando ambos os lados por 100 com o objetivo de deixar somente o valor referência do período (507) representado como número decimal.	$100y = 21{,}507507...$
(2)	Separando a parte inteira da decimal no membro direito da igualdade.	$100y = 21 + 0{,}507507...$

(3)	Tomando como referência o $k = 0{,}507507507\ldots$ com o objetivo de encontrar a fração geratriz do referido valor.	$k = 0{,}507507507\ldots$
(4)	Multiplica-se a igualdade por 1000 para tomar uma parte referência do período (507) para encontrar a fração geratriz.	$1000k = 507{,}507507507\ldots$
(5)	Realizando a subtração da linha (4) em relação a (3).	$1000k - k = 507{,}507507507\ldots - 0{,}507507507\ldots$
(6)	Realizando a subtração e multiplicando ambos os lados da igualdade por 999.	$k = 0{,}507507507\ldots = \frac{507}{999}$
(7)	Substituindo a fração encontrada para $k = 0{,}507507507\ldots$ da linha (6) na equação da linha (2).	$100y = 21 + \frac{507}{999}$
(8)	Colocando o membro direito da igualdade sobre o mesmo denominador.	$100y = \frac{21 \times 999 + 507}{999}$
(9)	Resolvendo a equação no membro direito e multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{100}$.	$y = \frac{21{,}486}{99900}$
(10)	Pela sexta classe de equivalência da fração encontrada.	$y = \frac{21{,}486}{99900} = \frac{3581}{16650}$

Figura 2: Prova de que 0,21507507... equivale a $\frac{3581}{16650}$

Fonte: Napar (2018).

Com referência a resolução produzida, discute-se, no que segue, os resultados frente aos aspectos teóricos do EOS, a partir da aplicação Ferramenta de Análise Didática: Dimensão Epistêmica, no contexto dos Conhecimentos Didático-Matemáticos.

Como mencionado anteriormente, a questão abordada retoma conhecimentos que, ao chegar nos estudos da Análise de Matemática, já devem ser de domínio de acadêmicos dos cursos de Licenciatura, considerando o conjunto de conhecimentos e competências com provas e demonstrações matemáticas que são adquiridos nas áreas de cálculo, álgebra e geometria ao longo da formação docente em Matemática (Reis, 2001). Nesse sentido, pondera-se que as revisitações desses conhecimentos se mostram necessárias no âmbito da Análise Matemática, pois é nessa área, especificamente, que o rigor com provas e demonstrações é cobrado em alto nível de complexidade (Reis, 2001; Ávila, 2006).

No âmbito do componente de situações-problema, foi possível perceber que a atividade demanda de competências referente a provas matemáticas que partem de uma situação envolvendo uma potencial contextualização de um conhecimento a ser trabalhado no Ensino Médio. Esse argumento decorre do fato de que, os potenciais conhecimentos mobilizados pelo professor colocam em jogo um conjunto de pensamentos e competências que se mostram presentes em relações com objetos matemáticos que, também, estão presentes no nível do Ensino Médio, tal como pode ser observado na Figura 3.

R6. Escreva cada item a seguir na forma fracionária		
a) 1,725	b) 0,848484...	c) $5,3\overline{27}$
Resolução:		
a) Seja $x = 1{,}725$. Logo: $1000x = 1{,}725 \times 1000$ $1000x = 1725$ $x = \frac{1725}{1000} = \frac{69}{40}$ Portanto, $1{,}725 = \frac{69}{40}$	b) Seja $x = 0848484\ ... = 0,\overline{84}$. Logo: $100x = 0,\overline{84} \times 100$ $100x = 84,\overline{84}$ $100x = 84 + \underbrace{0,\overline{84}}_{x}$ $100x = 84 + x$ $99x = 84$ $x = \frac{84}{99} = \frac{28}{33}$ Portanto, $0848484\ ... = \frac{28}{33}$	c) Seja $x = 5,3\overline{27}$. Logo: $10x = 5,3\overline{27} \times 10$ $10x = 53,\overline{27} \times 100$ (I) $1000x = 5\,327,\overline{27}$ (II) Subtraindo I de II, temos: $1000x - 10x = 5\,327,\overline{27} - 53,\overline{27}$ $990x = 5\,274$ $x = \frac{5274}{990} = \frac{293}{55}$ Portanto, $5,3\overline{27} = \frac{293}{55}$

Figura 3: Procedimentos para encontrar a forma fracionária de um decimal no âmbito do Ensino Médio
Fonte: Souza (2013).

A atividade, presente em um livro didático do Ensino Médio (Souza, 2013), se mostra como uma situação para a aplicação de um conhecimento matemático em um contexto diferente do qual se insere na Análise Matemática. A mesma faz com que os objetos de prova e demonstração matemática, assim como a representação fracionária de um racional representado como decimal, se articulem e se relacionem (componente das relações) em dois contextos diferentes de ensino e aprendizagem: o primeiro considera o ensino de Análise, cenário em que o rigor matemático é requisito para provar e demonstrar proposições, teoremas e hipóteses (Reis, 2001); o segundo refere-se a um contexto de nível médio no qual o rigor matemático, por vezes, deve ser deixado de lado para dar lugar a significação matemática do aluno no mundo exterior (Moreira; Cury; Vianna, 2005).

Tendo em vista os cenários mencionados, entende-se que não se deva desconsiderar a abordagem de rigor matemático que a Análise tem em suas bases, pois essa visão pode, e deve, fazer parte da visão do professor de Matemática a fim de corroborar para suas significações pessoais e institucionais que desenvolve na formulação de suas competências matemáticas (Godino et al., 2017). Destacar uma discussão em torno da Análise Matemática, que envolva a questão da prática docente no Ensino Médio, não implica em reduzir o nível de rigor que é tomado na abordagem de seus conteúdos, mas sim em compreender a complexidade de fatores e condicionantes matemáticos importantes no desenvolvimento dos conhecimentos comum e ampliado de professores de Matemática (Godino et al., 2017; Napar, 2018). Tal questão, no âmbito epistêmico, pressupõe a busca de horizontes matemáticos, em processos de estudo, que partam das significações dos objetos matemáticos no desenvolvimento de Conhecimentos Didático-Matemáticos (Godino, 2009).

Em relação aos componentes de linguagem e argumentos, a atividade condiz com a necessidade de que o professor de Matemática manifeste a articulação de conhecimentos que envolvem procedimentos a serem explicitados por meio de uma linguagem clara e precisa. Esse tipo de situação problema configura-se em uma situação que pode demandar reconhecimento e transição efetiva entre dois tipos de linguagem: o aritmética e algébrica, linguagens matemáticas utilizadas para resolver o problema e apresentar, de modo simbólico, a solução do problema; natural, por incorporar uma avaliação sobre os procedimentos utilizados para resolver a questão, mostrando a necessidade de se justificar, explicar e explanar a etapas para a elaboração da resolução e solução.

No contexto mencionado, a conversão de uma linguagem para outra requer, primeiramente, o conhecimento sobre as técnicas de demonstração e a forma como as mesmas podem ser conduzidas, atrelando-se a necessidade da utilização de argumentos e recursos que mostram o entendimento do aluno sobre o objeto matemático envolvido (Godino, 2009). Tendo um olhar específico a linguagem natural, num âmbito da prática docente, pondera-se que essa seja necessária para que o professor tenha condições de conduzir e justificar, matematicamente, os procedimentos adotados para o que se buscava provar. Na percepção de conhecimento epistêmico do professor destaca-se, por um lado, o conhecimento comum do conteúdo, condicionado ao objeto de ensino (conversão de racionais em forma decimal para forma fracionária) e, por outro, o conhecimento ampliado do conteúdo, que relaciona as práticas de argumentação e prova dedutiva em nível de rigor (conhecimento ampliado do conteúdo) que pode levar o professor a pensar e repensar em estratégias de conduzir demonstrações aos alunos do nível Médio.

No que se refere ao componente de regras, aponta-se que as perceptivas de definição, proposições e procedimentos estão adequadas ao nível dos estudantes. Além disso, a atividade, dependendo da forma como é conduzida em aulas dos componentes curriculares de Análise Matemática (conhecimento ampliado do conteúdo), pode ser abertura a discussão de regras que devem ser de abordagem pelo professor do Ensino Médio (conhecimento comum do conteúdo). Destacam-se, por exemplo, as ideias direcionadas a: tratamento de operações algébricas elementares; conhecimentos que envolvem o tratamento com equações algébricas; caminhos da prova matemática e das diferentes regras que podem ser consideradas para garantir a correção e resolução do problema.

Tendo se refletido sobre os resultados obtidos a partir do ponto de vista da FADDE e das potencialidades para o CDM de professores de Matemática, apresenta-se as considerações percebidas.

Considerações Finais

Na análise conduzida foi possível observar elementos que envolvem noções vinculadas aos componentes e indicadores da FADDE que podem propiciar um olhar crítico aos condicionantes dos processos matemáticos. Destaca-se como principal achado que a atividade, assim como trabalhada no âmbito de contexto e rigor da Análise Matemática, pode ser conduzida em um caminho de uma prática para o Ensino Médio, dependendo das transposições adotadas. Nesse sentido, a atividade apresenta objetos matemáticos, tal como se evidenciou pela análise, que podem servir de base constituinte do conhecimento comum do professor, levando em conta que, apesar das diferentes abordagens do problema, o objeto de estudo se mostrou o mesmo. Além disso, a referida atividade destacou uma noção de conhecimento ampliado do conteúdo, já que conduz a ideia da possibilidade de relacioná-la ao conhecimento para a o contexto em que se inserem os conhecimentos da prática docente, vinculando-se a uma percepção que vai além do conhecimento matemático formal, apresentando um papel de formulação de perfil profissional para a ação matemática em sala de aula. Olhando para a articulação desses dois conhecimentos, portanto, entende-se que foi possível identificar potencialidades dessa situação proposta para a constituição dos CDM de professores de Matemática.

Por fim, entende-se que em um cenário de formação profissional de futuros professores de Matemática, e de professores de Matemática já em exercício, deva-se ter um olhar tanto para o contexto matemático que é rigoroso no tratamento com definições, proposições e teoremas quanto àqueles conhecimentos que são inerentes as competências necessárias para a atuação de professores de Matemática na educação básica. Uma das possibilidades que se vê para isso, considerando a investigação como um todo, está em colocar em jogo discussões de questões e situações matemáticas do âmbito da Análise Matemática em discussões de situações didáticas para o Ensino Médio, o que pode contribuir para entendimentos da importância da Análise em cursos de Licenciatura em Matemática.

Agradecimentos: trabalho realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Agradecimento a FULBRA – Fundação ULBRA pelo apoio a participação no evento.

Referências

Ávila, G. S. S. (2006). *Análise Matemática: para licenciatura*. São Paulo: Blucher.

Brasil, Ministério da Educação (2002). *Das Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura*. Brasília, DF.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas [Versão eletrônica], *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D.; Giacomone, B.; Batanero, C. & Font, V. (2017). Enfoque ontossemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas [Versão eletrônica], *Bolema*, 31 (57), 90-113.

Moreira, P. C.; Cury, H. N. & Viana, C. R. (2005). Por que análise real na licenciatura. Recuperado em: https://www.researchgate.net/profile/Plinio_Moreira/publication/228618120_Por_que_analise_real_na_licenciatura/links/00b7d5149fdcaa877e000000/Por-que-analise-real-na-licenciatura.pdf.

Napar, P. C. P. (2018). *A Análise Matemática na constituição de Conhecimentos para a atuação do professor de Matemática no Ensino Médio: uma análise na perspectiva epistêmica do Enfoque Ontossemiótico*, Dissertação de Mestrado, Universidade Luterana do Brasil, Canoas, RS, Brasil.

Otero-Garcia, S. C.; Baroni, R. L. & Martines, P. T. (2013). Uma trajetória da disciplina de Análise e o seu papel para a formação do professor de matemática [Versão eletrônica], *Educação Matemática Pesquisa*, 15 (3), 692-717.

Reis, F. S. (2001). *A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

Souza, J. R. (2013). *Novo Olhar: Matemática*. São Paulo: FTD.

Uso de materiais manipuláveis como recurso didático no curso de formação de professores de matemática.

Barbara Corominas Valerio
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo
Brasil
barbarav@ime.usp.br

Existe uma vasta teoria que discute as potencialidades do uso de materiais manipuláveis durante o processo de ensino-aprendizagem. Em particular, na área de Matemática, é possível encontrar vários trabalhos que sugerem o uso de sólidos geométricos, material dourado, Tangram, dentre outros.

Nos cursos de formação inicial de professores de Matemática, não é difícil encontra trabalhos desenvolvidos pelos alunos onde é estimulado o uso de materiais manipuláveis. Em geral, são desenvolvidas atividades ou sequencias didáticas que podem ser utilizadas em turmas da Educação Básica, com o objetivo de favorecer uma aprendizagem mais significativa a estes alunos. Estas atividades normalmente são socializadas durante as aulas na universidade, como fruto de trabalhos de Prática Como Componente Curricular ou nas atividades vinculadas ao estágio curricular supervisionado. Segundo Lorenzato (2010), os professores devem aprender a fazer uso de materiais manipuláveis para o ensino da matemática ainda durante a formação inicial. Aprender fazer uso, no entanto, não significa apenas aprender a utilizar os materiais, mas saber qual é o momento mais apropriado de usá-lo em sala de aula, para que o processo de ensino e aprendizagem realmente seja favorecido, "mais importante que dispor do material didático, é saber emprega-lo". (LORENZATO, 2010, p.111).

Quais seriam então os benefícios ao se utilizar destes recursos com os alunos do curso de Licenciatura em Matemática?

É possível definir, pelo menos, dois objetivos principais ao utilizar materiais manipuláveis nas aulas do curso de graduação: favorecer uma aprendizagem mais significativa aos alunos do curso e, ao mesmo tempo, mostrar para os futuros professores, como pode ser motivador e interessante o uso destes materiais em sala de aula. Pesquisas indicam, que professores tendem a reproduzir mais as experiências vivenciadas durante a sua formação, do que as teorias estudadas.

Diante disto, sempre optei pelo uso de materiais manipuláveis, quando tive oportunidade nas disciplinas ministradas. Nestes casos, os alunos eram responsáveis por construir os materiais, os quais foram utilizados em atividades de investigação com o objetivo de facilitar a compreensão do tema estudado ou auxiliar na visualização do objeto matemático estudado. A construção dos materiais em geral envolvia o manuseio de cartolina (ou papel similar), canudos, barbante, varetas.

Foi uma experiência muito rica para os alunos, visto que muitos deles nunca tinham manipulado estes objetos para fins didáticos.

Um exemplo deste tipo de atividade, foi o trabalho que desenvolvi no primeiro semestre de 2018 com alunos do curso de licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística -IME-USP, que estavam matriculados em uma disciplina da área de Geometria. O assunto estudado era Volume de Sólidos Geométricos e a proposta da atividade era validar a fórmula do volume da pirâmide. Nesta atividade os dividiram um paralelepípedo em três pirâmides, ou melhor dizendo, eles construíram três pirâmides que justapostas de forma conveniente formavam um paralelepípedo. Para validar a fórmula do volume os alunos tiveram de mobilizar vários conceitos de geometria plana e fazer uso do importante Princípio de Cavalieri. Para a análise ser a mais geral possível, as três dimensões do paralelepípedo eram distintas (BONOMI et al).

Cito, a seguir, o relato de dois alunos da disciplina que colaboram para a conclusão que o uso de materiais manipuláveis pelos licenciando durante a sua formação inicial contribui de forma positiva para o futuro uso deste material "Para o curso de Licenciatura é de extrema importância sair do método comum, provar, provar e mais provar, confeccionar figuras é um método totalmente lúdico, que eu irei levar para os meus alunos..." e "Especificamente para a atividade entregue hoje...não acredito que teríamos conseguido entregar sem termos em mãos as figuras construídas...".

Referencias e bibliografia

Lorenzato, S. (2010). *Para Aprender Matemática*. Campinas, SP. Autores Associados. Coleção formação de professores.

Bonomi, M.C.,Monteiro, M.S. Um problema: o volume da pirâmide. Recuperado de http:// www.ime.usp.br/~dpdias/2017/ArtMarthaCris2008.pdf

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Um curso presencial sobre o teorema da incompletude de Gödel para estudantes de licenciatura em Matemática

Rosemeire de Fátima **Batistela**
Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana
Brasil
rosebatistela@hotmail.com

Resumo

Nesta oportunidade apresentamos um curso que trata do teorema da incompletude de Gödel (TIG) direcionado para estudantes de licenciatura em Matemática. Consideramos que o conhecimento deste teorema é importante e significativo para professorandos e requer atenção da comunidade da Educação Matemática, dado que as consequências deste teorema se relacionam com a concepção de Matemática ensinada em todos os níveis escolares, que, muito embora não tenham relação com conteúdos específicos, expõem o alcance do método de produção da Matemática. Este teorema não é elencado entre os conteúdos a serem trabalhados neste curso de licenciatura, porém, ressaltamos a importância do conhecimento de aspectos deste resultado pela parte dos que se qualificam para o ensino de matemática na Educação Básica uma vez que ele explicita as limitações a que está sujeito o método axiomático com o qual a Matemática é produzida.

Palavras chave: teorema da incompletude, Kurt Gödel, ensino de matemática, forma/ação de profesores, profesores de matemática, licenciatura em matemática, educação matemática, proposta pedagógica, curso presencial.

Apresentação

Em geral o TIG, que diz da incompletude de grande parte das teorias matemáticas, quais sejam, as que tenham na base os axiomas da aritmética dos números naturais de Giuseppe Peano (1858-1932)[1] em sua formalização, não é ensinado em cursos que qualificam professores para o ensino de Matemática na Escola Básica no Brasil.

[1] Também conhecidos como axiomas de Dedekind-Peano, pois Richard Dedekind (1831-1916), em 1888, propôs uma coleção de axiomas para os números naturais e Peano em 1889 publicou uma versão mais precisamente formulada das anteriores, em uma coleção de axiomas no seu livro, "Os princípios da Aritmética apresentados por um novo método" (*Arithmetices principia, nova methodo exposita*). Desde então, esse conjunto de axiomas vem sendo usado da forma

Em Batistela (2014) está exposta nossa argumentação a respeito da importância do ensino deste teorema para professores de matemática, pois, por meio dele é que a Matemática deu-se conta das limitações em seu modo de produção. Uma vez que a principal função de um professor de Matemática seja ensinar o estudante a pensar e a pensar de modo matemático é imprescindível que este aspecto da Matemática seja considerado e tratado em cursos de licenciatura.

Nosso arrazoado em Batistela (2014) é pela defesa de um trabalho matemático filosófico que trate junto a professores de matemática sobre essa dimensão da matemática que vai além da comumente considerada por professores da Escola Básica, que é a utilidade da matemática e a possibilidade de contextualização dos conteúdos matemáticos no cotidiano. Temos consciência que o trabalho que prioriza essa contextualização, somente, é realizado na maioria das vezes com a crença de que essa proposta poderá, entre todas as que conhece, ser a mais produtiva em termos de aprendizagem dos alunos. Porém, essa ocorrência parece predominar na Escola Básica e tem-se em cursos de licenciatura em Matemática estudantes que passaram vários anos na escola vivenciando esta prática e no momento da forma/ação[2] de professores precisam ser apresentados à outros aspectos da Matemática que não somente o da matemática que pode ser contextualizada no cotidiano e que virá a ser ensinada na Escola. Segue uma reflexão sobre a relevância de tangenciarmos em cursos de licenciatura resultados que mostrem a Matemática para além daquela que se ensina na Escola e que se utiliza nas práticas cotidianas:

> Um olhar pragmático e sem reservas permite-nos afirmar que de todos os assuntos ensinados na escola na disciplina Matemática, a usabilidade se dá nas quatro operações e algumas partes da geometria e somente agrimensores utilizarão diretamente a geometria aprendida na escola em seu ambiente de trabalho. As demais profissões, inclusive as da área de exatas, têm como objeto de ensino outros aspectos da Matemática, cuja relação com a Matemática ensinada na escola é um fio quase invisível. Batistela (2014, p. 8-9).

O conhecimento do teorema da incompletude de Gödel possibilita uma imersão na realidade do sistema formal da Matemática e no âmbito do ensino de Matemática isso pode afastar o mito cultural de que a Matemática tem resposta correta para tudo, e, também, enfraquecer a visão de que a Matemática tem as rédeas da situação de produção de verdade. Uma visão de Matemática desprovida do conhecimento dessa limitação do método axiomático carrega consigo a ideologia da superioridade desta disciplina entre as demais disciplinas escolares.

Em Batistela (2017) apresentamos uma possibilidade de trabalho com o TIG em um curso de licenciatura de forma que aspectos deste resultado sejam abordados em conexão com outros que constam nas ementas de algumas componentes curriculares. Durante a análise para a elaboração da proposta pudemos compreender que há níveis distintos de possíveis compreensões e de ensino do TIG e a compreensão de uma demonstração dele requer conhecimento e trato com determinado ferramental dessa ciência. A demonstração original de Gödel não se entrega facilmente a um leitor sem familiaridade com lógica matemática. Porém, há várias

---

como foram criados. Os termos indefinidos são três: 'número', 'zero' e 'sucessor imediato de' e os axiomas são cinco: i) zero é um número; ii) o sucessor imediato de um número é um número; iii) zero não é sucessor imediato de um número; iv) não há dois números que tenham o mesmo sucessor imediato; e v) (que formula o princípio da indução matemática) qualquer propriedade pertencente a zero e também ao sucessor imediato de cada número que tenha a propriedade pertence, a todos os números.

[2] Pode-se ver mais sobre forma/ação do profesor de matemática em Bicudo (2013). Aqui "forma/ação está sendo compreendida como um processo contínuo e ininterrupto de devir em que *forma* e *ação* estão sempre em mudança, em transformação e estão implicados mutuamente, em marcha, em movimento de acontecer junto à matéria, de ir sendo, de mover-se continuamente...", conforme Batistela (2017, p. 3).

demonstrações realizadas posteriormente e entre elas as que se valem de recursos e de uma cultura matemática mais atual, as quais acreditamos que sejam mais acessíveis, é o caso da demonstração explicitada em Shoenfield (1967) no capítulo que trata de incompletude e indecidibilidade de teorias. No âmbito das várias demonstrações do TIG, que objetivam ser acessíveis aos não especialistas no ferramental lógico matemático, a ilustração da demonstração original de Gödel realizada por Nagel e Newman (1973) se destaca pela possibilidade de imersão nas ideias da demonstração original de Gödel que o estudo proporciona.

O curso que aqui apresentamos é dirigido à estudantes de licenciatura em Matemática no horizonte de possibilidades da Educação Matemática e por assim ser considera que esteja dialogando com pessoas que apresentam familiaridade com o ferramental matemático, pois este campo de conhecimento pressupõe o conhecimento da Matemática.

A palavra *horizonte* diz respeito àquilo que é visível em um campo aberto à compreensão, desde onde se está até o alcance de nossa mirada perceptiva, aqui entendida como "espiritual", ou seja, da clareza do nosso entendimento. Desse modo, *horizonte de possibilidades* revela o campo de possibilidades do que pode ser compreendido, pois não se pode determinar como e o que será compreendido pelos sujeitos cognoscentes. Neste trabalho, o *horizonte* da Educação Matemática expõe possibilidades de compreensões do teorema como dado, focando sua demonstração, sua inserção histórica no âmbito da Matemática, a importância da axiomatização na produção matemática e outras compreensões que a questão da incompletude dispara.

Das ideias que compõem o curso para o ensino do TIG

No âmbito de nossa compreensão, de que há vários níveis possíveis de se trabalhar com o TIG com alunos de graduação em Matemática, desde uma discussão do enunciado, sem entrar nos detalhes da prova, até, por exemplo, uma discussão que abranja uma demonstração formal e a discussão das ideias utilizadas nela, apreendemos que o trabalho com a demonstração do TIG abordando todos os detalhes deste teorema demandaria muita maturidade e por isso optamos por trabalhar com a ilustração da demonstração do TIG realizada por Gödel trazida em Nagel e Newman (1973).

Distinguimos que a formação cultural matemática de um professor solicita que estes professores em forma/ação tomem contato com o TIG, o qual diz das possibilidades de ser da própria Matemática e da distinção entre *verdade* matemática e *demonstrabilidade* matemática.

Em Batistela (2017) apresentamos que tratando-se de um resultado que é provado no âmbito da *aritmética de Peano*, poderia ser referenciado nos momentos em que este assunto estiver sendo focado. Da mesma forma, a ideia de resultado que anuncia impossibilidades (e possibilidades também) conecta-se até certo ponto com *os problemas clássicos da Antiguidade* (a quadratura do círculo, trissecção de um ângulo qualquer, duplicação do cubo), com o teorema de Abel sobre a impossibilidade de resolver equações de quinto grau com radicais, entre outros. O TIG, que anuncia a impossibilidade da solução positiva do segundo problema de Hilbert o qual solicitava a demonstração, na própria aritmética, da compatibilidade dos axiomas aritméticos. Este fato que repercute na impossibilidade da realização do seu programa original, pode ser apresentado junto aos demais teoremas de impossibilidade e, ao mesmo tempo, diferenciando-o, por ser um resultado de impossibilidade da metamatemática.

O TIG aparece num momento histórico em que a Matemática vinha passando por tentativas de fundamentação em diferentes bases. As escolas intuicionistas e logicistas, cada uma pelo seu motivo, tinham fracassado na realização completa do objetivo idealizado. Os formalistas seguiam em pé, mas o resultado de Gödel de 1931 dá a última palavra que decreta a impossibilidade do intento originalmente concebido por essa escola. Esse assunto, *as correntes filosóficas que buscaram fundamentar a Matemática*, costuma ser tratado em cursos de Licenciatura e vislumbramos que este seria também uma ocasião de apresentação do TIG, pois ele aponta a impossibilidade de se fundamentar a Matemática completamente sob a base da aritmética, que era o objetivo dos formalistas. Este resultado reverbera também sob as ambições e expectativas de a Matemática ser uma ciência absoluta que produz e prova, simultaneamente, todas as suas verdades.

Outra ocasião oportuna julgamos que seja em situações de ensino em que se mostre a Matemática como uma realização histórico-cultural humana, sujeita às características de seu modo de produção, o método axiomático, e como uma ciência viva em acontecimento, ainda sujeita a dúvidas. Nesse momento, seria plausível apresentar a incompletude da Matemática como uma impossibilidade, mas também como abertura para essa ciência, já que permite um revigoramento e surgimento de outras teorias. Também seria apropriado evidenciar mudanças no modo pelo qual na Matemática são encarados os problemas após o TIG, pois esse teorema afirma que há um conjunto de problemas indemonstráveis que independe do ideal cognitivo dos matemáticos e do empenho destinado às suas provas. Estes, embora indemonstráveis, trazem ao conhecimento a natureza revigorante da Matemática que não permite se circunscrever, ou seja, ter os limites de suas teorias bem determinados e circunscritos a elas.

O tema da criação das *geometrias não-euclidianas*, por ser um resultado que diz sobre a relatividade de verdades matemáticas em relação aos axiomas do sistema, também mostra que tais verdades são restritas aos axiomas da teoria. Isso desmente a concepção de que a Matemática é uma estrutura única e totalizante, assemelhando-se à mensagem do TIG, quando afirma que haverá verdades matemáticas que não são deduzidas dos axiomas da base da teoria e que não podem ser provadas naquela teoria.

Entendemos que cabe fazer dessas conexões temáticas percebidas uma oportunidade de abordagem e discussão das ideias do TIG para professores em forma/ação.

A fenomenologia considera imprescindível que os estudantes em forma/ação em cursos de licenciatura em Matemática vivenciem experiências com o objeto matemático as quais ofereçam oportunidade que os conduzam ao pensar matematicamente, trabalhando com intuições[3] e, também, com o método axiomático dedutivo, além de compreenderem as aplicações dessa ciência e situações contextualizadas no mundo sociocultural em que a Matemática é importante. Desse modo, o curso proposto arquiteta experiências estruturadas

Do curso em si

A partir do afirmado acima a proposta prevê a abordagem do TIG conectando-o com os seguintes temas: teorema fundamental da aritmética (que garante o processo de atribuição unívoca dos números de Gödel realizada por Gödel em sua demonstração do TIG); Geometrias não euclidianas; Problemas clássicos da Antiguidade; e, problema 2 de Hilbert.

Este tratamento é elaborado para ser realizado de forma intelectualmente honesta no sentido de oportunizar ao graduando conhecê-lo, vivenciando o resultado em sua dimensão de ideias de que ele se vale, que ele estabelece, bem como suas conclusões e sua demonstração, em

[3] A intuição revela-se para nós como uma fonte originária de doação de conhecimento. Fontana (2007, p. 168) afirma que "a fenomenologia husserliana recoloca a intuição como conhecimento evidente e racional plenamente capaz de alcançar o plano ontológico fundador de todo fenômeno". Intuições aqui significam tanto as sensoriais como as essenciais.

diferentes aspectos durante o curso avançando em complexidade e culminando no trabalho com a ilustração da demonstração realizada por Gödel.

No que se refere ao trabalho com uma demonstração do TIG, Ferreira e Santos (2015) constatam que o trabalho com provas e demonstrações, de modo geral, em sala de aula contribui para o desenvolvimento de uma forma de pensamento que aprofunda o entendimento matemático e, além disso, aprimora a argumentação natural do homem. Dessa forma e por nossa experiência pessoal com a demonstração do TIG compreendemos que o trabalho com uma demonstração do TIG pode aprofundar o entendimento dos estudantes sobre a incompletude da Matemática.

Trazendo em mais detalhes, o curso tratará de alguns aspectos que podem ser antevistos, quais sejam:

Apresentar o cenário matemático presente à época do surgimento deste teorema, expondo-o como a resposta negativa para o projeto do Formalismo que objetivava formalizar toda a Matemática a partir da aritmética de Peano,Batistela, Bicudo e Lazari (2017). Além disso, trazer no contexto, as outras duas correntes filosóficas, Logicismo e Intuicionismo, e os motivos que impossibilitaram o completamento de seus projetos, que semelhantemente ao Formalismo buscaram fundamentar a Matemática sob outras bases, a saber, a Lógica e os constructos finitistas, respectivamente. Trabalhar o aspecto de que teorema da incompletude de Gödel aparece oferecendo resposta negativa à questão da consistência da aritmética, que era um problema para a Matemática na época, estabelecendo uma barreira intransponível para a demonstração dessa consistência, da qual dependia o sucesso do Formalismo e, consequentemente, a fundamentação completa da Matemática no ideal dos formalistas.

Focar na demonstração deste teorema expondo-a por meio da obra de Nagel e Newman (1973) e conduzir o leitor pelos meandros da prova desenvolvida por Gödel em 1931, ilustrando-a, bem como, as ideias utilizadas nela, aclarando a sua compreensão. Possibilitar a experiência dos estudantes com a numeração de Gödel com a qual ele realiza a aritmetização da metamatemática que viabiliza a construção da proposição indecidível.

Trabalhar uma discussão focada na proposta de Bourbaki (1950) para a Matemática, por compreendermos que a atitude desse grupo revela a forma como o TIG foi acolhido nessa ciência e como ela continuou após este resultado. Nessa exposição aparecerá que o grupo Bourbaki assume que o teorema da incompletude não impossibilita que a Matemática prossiga em sua atividade, ele apenas sinaliza que o aparecimento de proposições indecidíveis, até mesmo na teoria dos números naturais, é inevitável.

Trabalhar algumas ideias do TIG explicando e discutindo sua mensagem, bem como os desdobramentos do TIG uma vez que entendemos que as consequências deste teorema se relacionam com a concepção de Matemática ensinada em todos os níveis escolares, que, muito embora não tenham relação com conteúdos específicos, expõem o alcance do método de produção da Matemática.

Em síntese, a proposta do curso no todo deverá apresentar que à época do aparecimento do TIG reinava a concepção que trazia o entendimento de que não havia *ignorabimus*[4], Hilbert

---

[4] Em Hilbert (2003, p. 11) pode-se ler: "O axioma da solubilidade de cada problema é somente uma particularidade característica do pensamento matemático ou é possível uma lei geral inerente à natureza de nosso pensamento que todas as perguntas colocadas possuem respostas? [...] Esta convicção de que a solubilidade de um problema matemático nos dá um forte estímulo durante o trabalho, nós ouvimos um grito contínuo que vem de dentro: *Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!* (*Aí está o problema, procura a solução. Você pode encontrá-la através do pensamento puro, pois na Matemática não existe "ignoremos"!*)*"*.

(2003), isto é, de que não haveria problema bem colocado que com o devido empenho dos matemáticos não tivesse solução. Após Gödel, essa concepção não se sustenta mais. O encontro de Gödel com o indecidível em seu TIG confere a esta ciência uma visão de que nela há sentenças matematicamente bem formuladas e verdadeiras que não podem ser formalmente expressas como tal.

Assim, posteriormente ao TIG, compreende-se que as teorias que incluem números naturais em sua formalização são constituídas por proposições demonstradas (teoremas), proposições não demonstrados (conjecturas) e proposições indemonstráveis (indecidíveis), ou seja, proposições verdadeiras que não podem ser provadas como tal (ou como não verdadeira) na teoria, ultrapassando a ideia do *ignorabimus*, vigente até então.

No bojo da proposta, focando outras decorrências do TIG, trataremos de apresentar pontos relevantes que se desdobram do resultado, destacando, a distinção entre *verdade* matemática e *demonstrabilidade* matemática bem como, a relatividade de uma verdade matemática que é restrita aos axiomas da teoria em que ela pode ser formulada. Por outro viés, a dimensão de impossibilidade (e possibilidade) que ele anuncia para o problema da prova da consistência da aritmética e a resposta final que ele, o TIG, dá às escolas filosóficas que buscavam fundamentar a Matemática sob bases firmes. Também, priorizaremos apresentar a Matemática após o TIG e como ela segue sendo construída após este revés em seu autoconhecimento.

Considerações finais

O curso proposto visa oportunizar ao licenciando em Matemática conhecer o TIG, vivenciando este resultado e a dimensão de ideias de que ele se vale, que ele estabelece, bem como suas conclusões e sua demonstração pasando pelo trabalho com a ilustração da demonstração realizada por Gödel. Este curso já foi realizado uma vez por ano na Universidade em que lecionamos.

A incompletude de uma teoria é uma consequência de seu sistema axiomático. Uma teoria consiste em um sistema axiomático e todos os seus teoremas, os quais são derivados do conjunto de axiomas da base da teoria por meio do método axiomático. Uma vez que há um indecidível em uma teoria, sendo o indecidível uma declaração verdadeira, deduzida por um argumento metamatemático, o que fica evidente é que aquela teoria possui verdades e que ela própria não tem possibilidade de provar. Disso entendemos que, na prática, não é toda prova que pode ser reduzida aos axiomas da base do sistema, ou seja, tem-se que aqueles axiomas que estão na base do sistema formal daquela teoria não são uma coleção que dá conta de provar todas as verdades daquela teoria. Isso também evidencia que não se tem clareza sobre a coleção de axiomas que tal indecidível necessitaria para ser provado. Por exemplo, pode-se ter uma sentença verdadeira da teoria dos números expressa na linguagem da aritmética, ou seja, derivada dos axiomas de Peano, cuja prova poderia necessitar de algum axioma da topologia ou da análise complexa, isto é, pode ser que a prova da sentença necessite de algum(s) outro(s) axioma(s) de alguma(s) outra(s) teoria(s).

Gödel institui que os axiomas de Peano apenas descrevem parcialmente a teoria dos números naturais. Logo, não é todo corpo consistente de proposições que pode ser descrito por uma coleção de axiomas. O TIG diz que o corpo da teoria dos números naturais é um corpo consistente de proposições sem axiomatização recursiva. Uma vez computadas as instruções, um computador pode reconhecer axiomas e regras básicas para derivar teoremas e reconhecer se uma prova é válida. Contudo, não pode determinar se a prova para uma afirmação existe, pois, para saber isso, deve-se esperar e ver se a prova ou a negação dela é gerada. Disso, resulta que não se saberá por este método quais proposições são teoremas. Daí procede a afirmação de que o método axiomático possui uma limitação técnica.

O TIG confirma a existência de uma característica fundamental em relação ao modo de se fazer Matemática, e nossa visão é que por isso ele é um resultado cultural que se relaciona diretamente ao modo como se compreende Matemática e por conseguinte, à que ensinamos.

Dada a importância desse teorema, conforme pode-se ver mais em Batistela e Bicudo (2018), principalmente no que se refere à sua relevância cultural para a Matemática, entendemos que a apresentação do resultado do fenômeno gödeliano é uma informação imprescindível que deve estar presente entre os conteúdos elencados para serem trabalhados em cursos de Licenciatura em Matemática.

Referências

Batistela, R. F. (2014, novembro). O teorema da incompletude de Gödel e os professores de Matemática. Anais do *Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*, Recife, PE, Brasil, 18. Recuperado de http://www.lematec.net.br/CDS/XVIIIEBRAPEM/PDFs/GD11/batistela11.pdf

Batistela, R. F. (2017). *O Teorema da Incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática* (Tese de doutorado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, Brasil. Recuperado de https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/148797/batistela_rf_dr_rcla.pdf?sequence=3

Batistela, R. F., Bicudo, M. A.V. B., & Lazari, H. (2017). Cenário do Surgimento e o Impacto do Teorema da Incompletude de Gödel na Matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*. 10 (3). 198-207. Recuperado de file:///C:/Users/Home/Downloads/4749-18324-1-PB%20(3).pdf. doi: http://dx.doi.org/10.17921/2176-5634

Batistela, R. F., & Bicudo, M. A. V. (2018). The Importance of Teaching Gödel's Incompleteness Theorem in Mathematics Teacher Education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 33, 1-13. Recuperado de http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/pome33/index.html

Bicudo, M. A. V. (2013). O professor de matemática em forma/ação. *Encontro Nacional de Educação Matemática*, Curitiba, PR, Brasil, 11.

Bourbaki, N. (1950). The Architecture of Mathematics. *The American Mathematical Monthly.* 57(4), 221-232.

Ferreira, F. A., Santos, C. A. B. (2015). Uma análise hermenêutica de pesquisas apresentadas no ICME no período de 2003 a 2013 sobre práticas e saberes docentes em atividades de provas e demonstrações matemáticas. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 6, 12-21. Recuperado de http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1030/727

Hilbert, D. (2003). Problemas matemáticos. *Revista Brasileira de História da Matemática*. Tradução de S. Nobre. 3, (5), 5-12. Recuperado de http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-

%20vol.3,%20no5,%20abril%20(2003)/Discurso%20Hilbert%20-%20RBHM,%20Vol.%203,%20no%205,%20p.%205%20-%2012,%202003.pdf

Nagel, E., Newman, J. R. (1973). *Prova de Gödel*. Tradução de G. K. Guinsburg. São Paulo: Editora Perspectiva e Editora da Universidade de São Paulo.

Shoenfield, J. R. (1967). *Mathematical Logic*. London: Publishing Company.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Uma caracterização das tarefas desenvolvidas na disciplina Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental em Matemática de uma instituição privada brasileira

Diego Fogaça **Carvalho**
Universidade Norte do Paraná
Brasil
diegofocarva@gmail.com
Osmar **Pedrochi** Junior
Universidade Norte do Paraná, Bolsista PNPD – CAPES
Brasil
ojpedrochi@yahoo.com.br
Fátima Aparecida Dias da **Silva**
Universidade Norte do Paraná
Brasil
fatimadias.consultoria@gmail.com

Resumo

Neste estudo, temos por objetivo caracterizar por meio dos saberes docentes, de acordo com Tardif (2002), as tarefas desenvolvidas na disciplina de Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental, componente curricular de um curso de Licenciatura em Matemática, ofertado na modalidade Educação a Distância de uma universidade privada brasileira. Para organização e análise dos dados, utilizou-se a Análise de Conteúdo de Bardin (2016), em um movimento de categorização *a priori*. Advindo desse movimento analítico, foi possível compreender que todas as tarefas possibilitam manifestações dos saberes docentes, bem como os processos de reflexão da e na ação e a reflexão da reflexão da ação, de modo a configurar um ambiente propício para a aprendizagem da docência.

Palavras-Chave: Educação Matemática, Estágio Curricular Supervisionado, Formação do professor de matemática, Educação a Distância, Saberes Docentes.

Introdução

No Brasil, no ano de 2002, por meio da publicação das resoluções CNE/CP1, de 18 de fevereiro de 2002 e CNE/CP2, de 19 de fevereiro de 2002, pelo Conselho Nacional de Educação, houve a instituição das Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da Educação Básica, nível superior, para os cursos de Licenciatura Plena, as quais se constituíram "um conjunto de princípios, fundamentos e procedimentos a serem observados na organização institucional e curricular de cada estabelecimento de ensino" (Brasil, 2002, p.1).

Em suma, esses documentos, além de trazer um entendimento sobre o papel da educação, do professor e, consequentemente, da formação docente, apresentou uma distribuição de como a carga horária deveria ser organizada, definindo o valor mínimo de 2800 (duas mil e oitocentas horas), distribuídas, de acordo com Brasil (2002) em: 400 (quatrocentas) horas de prática como componente curricular, ao longo do curso; 400 (quatrocentas) horas de estágio supervisionado a partir do início da segunda metade do curso; 1800 (mil e oitocentas) horas de aulas para os conteúdos de natureza científico-cultural; 200 (duzentas) horas para outras formas de atividades acadêmico-científico-culturais.

Após essas publicações, os cursos de licenciatura tiveram dois anos para se adequar às solicitações. Pode-se interpretar, com base nos documentos, que as ações realizadas pelo CNE, visaram garantir para a formação de professores um espaço para a articulação entre a teoria e prática, principalmente a evidenciação da carga horária para prática como componente curricular e estágio supervisionado.

No ano de 2015, o mesmo conselho publicou a Resolução nº 2, de 1º de julho de 2015, em que houve uma ampliação da regulamentação, incluindo a formação continuada. Em suma, além da formação inicial, que inclui a curso de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e os cursos de segunda licenciatura, a formação continuada de professores também ganhou um contorno legal no Brasil. Interpreta-se que um dos objetivos dessa resolução, dá-se pela necessidade da formação docente estar alinhada aos pressupostos que virão a compor a Base Nacional Comum para o Ensino Fundamental e Médio.

Nessa resolução, também foi ampliada a carga horária do curso de licenciatura, constituindo de 3200 (três mil e duzentas horas), com a duração mínima de oito semestres letivos ou quatro anos. Dessa forma, foram destinadas 400 (quatrocentas) horas para prática como componente curricular, 400 (quatrocentas) horas para o estágio supervisionado na área específica de formação, 2200 (duas mil e duzentas horas) para a realização de atividades formativas distribuídas em dois grandes núcleos formativos, a saber: o primeiro de estudos de formação geral, áreas específicas e interdisciplinares, campo educacional, seus fundamentos e metodologias, e das diversas realidades educacionais; o segundo se refere ao núcleo de aprofundamento e diversificação de estudos das áreas de atuação profissional, incluindo os conteúdos específicos e pedagógicos, priorizados pelo projeto pedagógico das instituições. Por fim, 200 (duzentas horas) de atividades teórico-práticas de aprofundamento em áreas específicas de interesse do aluno, englobando seminários, iniciação científica, iniciação à docência, intercambio, entre outras.

Com essa breve contextualização, do ponto de vista legal, pode-se elucidar como que a prática docente e sua articulação com a teoria foram ganhando proporções, sendo inseridas nas resoluções que normatizam os cursos de formação docente em âmbito nacional. Consequentemente, o Estágio Curricular Supervisionado se constituiu, junto à Prática como Componente Curricular, espaços para que a abordagem da prática e sua articulação com a teoria possam acontecer. Diante desse contexto, este artigo tem por objetivo caracterizar as atividades previstas na disciplina Estágio em Matemática no Ensino Fundamental, componente curricular de um curso de Licenciatura em Matemática a distância de uma instituição privada brasileira. Para essa caracterização, será utilizado a tipologia dos saberes docentes, elaborada pelo pesquisador canadense Maurice Tardif (2002). Em suma, almeja-se associar os tipos de saberes docentes propícios de serem mobilizados em cada uma das atividades, elaborando, assim, um perfil.

Na sequência, explana-se a tipologia de saberes docentes, utilizadas neste contexto investigativo, como categorias a *priori* para análise do manual da disciplina analisada.

Alguns apontamentos a respeito da formação de professores

Nesta seção realiza-se algumas ponderações a respeito da formação de professores e, na sequência, aprofunda-se a tipologia de saberes docentes, elaborada por Tardif (2002).

Para Ibernóm (2006) é de extrema importância que a formação de professores considere as mudanças sociais que estamos vivenciando e as incorpore no currículo, preparando professores para atuar em uma sociedade em transição. Dessa forma, é importante que sejam viabilizados espaços de participação, discussão e reflexão, de modo que os professores possam interagir entre si, aprendendo a conviver e atuar em contexto de transição e incerteza.

Zaichner (1993), afirma que a formação docente deve promover o desenvolvimento do pensamento reflexivo e analítico, para que os professores exerçam um papel ativo nos processos de inovações curriculares. Contreras (2002), por sua vez, destaca que a reflexão do professor não deve se limitar a sala de aula, é necessário ir além, de modo a obter uma compreensão teórica a respeito dos elementos que condicionam a prática docente,

Essas afirmativas corroboram para que se possa pensar na opção realizada por utilizar a tipologia de Tardif (2002) como categorias a priori. Essa opção se deu pelos critérios que foram utilizados pelo autor se relacionarem diretamente com a prática do professor. De acordo com o autor, o modelo por ele proposto foi construído “a partir das categorias dos próprios docentes e dos saberes que utilizam efetivamente em sua prática profissional cotidiana” (Tardif, 2002, p.18).

Ao iniciar a obra, Saberes Docentes e Formação Profissional, Tardif (2002) apresenta os fios condutores de seu texto e assume o seguinte posicionamento: a “minha perspectiva procura, portanto, situar o saber do professor na interface entre o individual e o social, entre o autor e o sistema, a fim de captar a sua natureza social e individual como um todo” (Tardif, 2002, p.16).

O primeiro fio condutor diz respeito à relação entre saber e trabalho. Para o autor, o saber está a serviço do trabalho, ou seja, o trabalho se constitui um condicionante para as relações que os professores estabelecem com os saberes, pois “nunca são relações estritamente cognitivas: são relações mediadas pelo trabalho que lhes fornece princípios para enfrentar e solucionar situações cotidianas” (Tardif, 2002, p.17).

O segundo fio condutor diz respeito ao pluralismo imputado aos saberes docentes, ou seja, os saberes que os professores se valem na prática, em sala de aula, são compostos por um amalgama de princípios: “o saber dos professores é plural, compósito, heterogêneo, porque envolve, no próprio exercício do trabalho, conhecimentos e um saber-fazer bastante diverso, provenientes de fontes variadas e, provavelmente, de natureza diferente” (Tardif, 2002, p.18).

O próximo fio condutor diz respeito ao fato de os saberes docentes serem temporais, ou seja, são adquiridos em um contexto de história de vida, de uma carreira profissional. Consequentemente, para o autor, ensinar pressupõe aprender a ensinar, ou seja, um processo de aprendizagem e domínio progressivo dos saberes que são necessários para a realização do trabalho.

Pela maneira como os saberes docentes são caracterizados até o momento, heterogêneos e temporais, deve-se pensar na maneira como os professores realizam essa articulação. Para o autor, esse fato se dá pelo trabalho, pela utilidade no ensino:

Nessa ótica, os saberes oriundos da experiência do trabalho cotidiano parecem constituir o alicerce da prática e da competência profissionais, pois essa experiência é, para o professor, condição para aquisição e produção de seus próprios saberes profissionais. Ensinar é mobilizar uma ampla variedade de saberes, reutilizando-os no trabalho para adaptá-los e transformá-los pelo e para o trabalho (Tardif, 2002, p.21).

Dessa forma, nesse fio condutor, o autor assume a experiência do trabalho docente como fundamento para os saberes.

Outra característica atribuída ao trabalho dos professores, é o fato de ser interativo, ou seja, o professor, trabalhador, interage diretamente com o "objeto" de trabalho, o aluno, por meio da interação humana, diferente dos modelos tradicionais de educação que se pautam no modelo fabril, advindo da revolução industrial, estruturado em modelos do trabalho material.

Por fim, ao descrever o último fio condutor, o autor destaca a emergência de se pensar nesse instante a formação docente, tomando como parâmetro os saberes docentes e as realidades específicas do cotidiano dos professores.

Com a apresentação desses pressupostos, compreende-se uma aderência com as diretrizes elaboradas pelo Conselho Nacional de Educação do Brasil, principalmente a valorização da prática docente e sua articulação com a teoria, justificando a opção teórica realizada.

A tipologia elaborada por Tardif (2002) considera os saberes docentes como um amalgama, oriundo de diversos contextos epistemológicos, situados temporalmente, que tomam a sua eficiência para o ensino como critério de valoração. Para o autor, define-se os saberes docentes "como um saber plural, formado pelo amálgama, mais ou menos coerente, de saberes oriundos da formação profissional e de saberes disciplinares, curriculares e experienciais" (Tardif, 2002, p.36).

Os saberes da formação profissional, refere-se ao conjunto de saberes que são abordados pelas instituições de formação de professor. O processo de ensino e aprendizagem e seus atores, referem-se ao objetivo de pesquisa nas ciências humanas, especificamente as áreas de educação e ensino. Essas áreas do saber, de acordo com o autor, além de produzir os saberes, promove a sua incorporação na prática do professor.

Porém, para o autor, a prática do professor não é somente um objeto de saber das ciências da educação, é uma atividade que mobiliza diversos saberes, denominados saberes pedagógicos, esses saberes "apresentam-se como doutrinas ou concepções provenientes de reflexões sobre a prática educativa no sentido amplo do termo, reflexões racionais e normativas que conduzem a sistemas mais ou menos coerentes de representação e orientação da atividade educativa" (Tardif, 2002, p.37).

Os saberes disciplinares referem-se aos que são incorporados pelas instituições universitárias. Esses saberes correspondem a diversos campos do conhecimento, integrados sobre a forma de disciplina. Pode-se interpretar que, em relação à matemática, seriam as geometrias, a análise, o cálculo diferencial e integral, a estatística, entre outras áreas da matemática. Para o autor, esses saberes emergem da tradição cultural e dos grupos que produziram esses conhecimentos.

Os saberes curriculares, em suma, consistem nos programas escolares, ou seja, nos discursos, objetivos, métodos e conteúdo; a partir dos quais as instituições escolares categorizam e apresentam os saberes sociais selecionados para a formação de uma cultura erudita.

Por fim, Tardif (2002, p.39) define os sabres experienciais, elaborados pelos professores no exercício da prática de sua profissão. Para o autor, esses "saberes brotam da experiência e são por ela validados. Eles incorporam-se à experiência individual e coletiva sob a forma de *habitus* e de habilidades, de saber-fazer e de saber-ser".

Assumindo a tipologia como categorias *a priori*, deu-se início aos procedimentos de análise das tarefas que compuseram o manual da disciplina Estágio em Matemática no Ensino Fundamental, na continuidade são apresentadas considerações a respeito do método de análise do material analisado.

Considerações teórico-metodológicas

Para a constituição desse artigo, tomou-se como objeto de análise o Manual de Estágio em Matemática no Ensino Fundamental, elaborado pelos professores do curso de Licenciatura em Matemática, na modalidade a distância, aplicado no ano de 2017. Tem-se por intuito, caracterizar as tarefas por meio da tipologia docente de Tardif (2002), com o intuito de elaborar um perfil.

O manual de estágio foi composto por onze seções que abordam desde orientações de como o aluno deve proceder no ambiente escolar até as fichas que devem ser preenchidas e anexadas no relatório final. Há, também, um cronograma com as datas de entrega e a exemplificação de todo o procedimento que o futuro professor deve realizar para estabelecer um convênio entre a universidade e escola.

Para este artigo, valeu-se de inspirações nos procedimentos da Análise de Conteúdo, sendo, assim, compreendida:

> Definitivamente, o terreno, o funcionamento e o objetivo da análise de conteúdo podem resumir-se da seguinte maneira: atualmente, e de modo geral, designa sob o termo de análise de conteúdo: Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/ recepção (variáveis inferidas) dessas mensagens. (Bardin, 2016, p.48).

Dessa forma, os saberes docentes foram considerados categorias *a priori*, nas quais cada tarefa prevista foi alocada. Cabe destacar que a utilização do termo inspirações se deve ao fato de que, não necessariamente, uma tarefa está diretamente relacionada a um tipo de saber docente, podendo contemplar mais de um. Consequentemente, esse fato vai de encontro ao critério da exclusão mútua, conceituado por Bardin (2016) um indicador de uma boa categoria. Todavia, não se compreende, nesse contexto investigativo, de acordo com a forma que a Análise de Conteúdo foi utilizada, o não respeito à exclusão-mútua um desqualificador da análise. Em suma, o termo inspirações tem a intenção de para amenizar o conflito descrito anteriormente.

A análise dos dados foi iniciada por meio da organização das informações em um quadro, em que foi disposto o objetivo de aprendizagem da tarefa e os saberes docentes que se interpretou serem mobilizados. Em suma, desse movimento analíticos, culminou na elaboração de um perfil, descrito e analisado na continuidade deste trabalho.

Os saberes docentes mobilizados pelas tarefas da disciplina Estágio em Matemática no Ensino Fundamental

O Manual utilizado na disciplina Estágio em Matemática no Ensino Fundamental foi composto por nove tarefas que tem por objetivo proporcionar uma imersão do futuro professor na realidade da sala de aula, de modo que seja possível reconhecer semelhanças e diferenças nas séries que compõe os anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano). Busca-se, também, a associação entre teoria e prática, tendo o currículo como contexto. Em suma, almeja-se constituir uma configuração de aprendizagem da docência que visa uma articulação interdisciplinar do conteúdo matemático por meio da observação, reflexão, supervisão com a realidade observada.

A primeira atividade da disciplina visa a apresentação do futuro professor no ambiente escolar. Refere-se a um pedido formal para o diretor e professor regente, com o intuito de obter autorização para a realização do estágio. Interpreta-se que a atividade, além de ser um primeiro contato, pode proporcionar ao futuro professor uma primeira impressão da estrutura organizacional da escola, bem como as turmas em que desenvolverá suas atividades.

As duas próximas tarefas têm por objetivo proporcionar momentos de leitura, reflexão e síntese, levando o futuro professor a ler e resenhar um artigo que aborda o papel do estágio curricular supervisionado na formação do professor de matemática e uma análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Interpreta-se que essas tarefas proporcionam situações em que os futuros professores podem mobilizar de forma direta saberes que estão relacionados com a formação profissional, especificadamente os saberes pedagógicos, principalmente pelos artigos da área de Educação Matemática, reportar uma situação de estágio supervisionado, caracterizando seu papel no desenvolvimento profissional do professor de matemática. Por outro lado, a análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais, oportuniza ao futuro professor conhecer os saberes curriculares que subsidiam o Ensino Fundamental, conhecendo os objetivos, temas transversais, a maneira como o conteúdo matemático é distribuído ao longo das séries. É possível, também, que o futuro professor tenha contato com os saberes pedagógicos, que são as sugestões metodológicas apresentadas pelo documento.

Cabe esclarecer que essa atividade deverá ser atualizada, principalmente pela publicação da BNCC (Base Nacional Comum Curricular) que trouxe outros contornos para a Educação Básica brasileira.

A quarta tarefa refere-se a um momento de entrevista com a direção da escola, podendo ser realizada com o diretor ou com a direção auxiliar. Objetiva-se que o futuro professor conheça a função da direção na escola, bem como as ações que podem ser tomadas por essa instância para contribuir no processo de ensino e aprendizagem, organização e função do conselho de classe e o projeto político pedagógico. Interpreta-se que essa entrevista pode mobilizar saberes curriculares, bem como saberes experienciais, situados no contexto da escola.

Na tarefa sequente, o futuro professor realizará a observação de dezoito aulas, distribuídas em três turmas do Ensino Fundamental. Tem-se por intuito mobilizar vários saberes docentes, mas compreende-se que o foco está na atuação do professor, ou seja, a maneira como atua, fundamentado em seus saberes experienciais. No entanto, é possível que o futuro professor tenha contato com os saberes disciplinares e pedagógicos, dependendo da gestão de classe e da matéria realizado pelo docente observado.

A análise do livro didático utilizado pelo professor, refere-se a próxima atividade apresentada pelo manual. Interpreta-se que a tarefa pode proporcionar a mobilização de saberes disciplinares, curriculares e pedagógicos articulados, de modo a estruturar um contexto em que esses saberes se articulam para compreensão da maneira como o autor do livro didático estrutura o processo de ensino e aprendizagem da disciplina.

Após a análise do livro didático, as tarefas sequentes têm por objetivo estruturar a realização da regência. Em um primeiro momento, o futuro professor deverá planejar seis aulas que serão ministradas em uma das salas que realizou a observação. Na sequência, deve apresentar esse planejamento para o professor regente, com o intuito de haver um refinamento e adequações à realidade da sala de aula. Por fim, deve ministrar essas aulas, supervisionado pelo professor da turma.

Interpreta-se que essa sequência de tarefas pode proporcionar a articulação de toda a tipologia de saberes docentes apresentados por Tardif (2002), assumindo a prática em sala de aula como contexto e a aprendizagem dos alunos o objetivo da ação do futuro professor. Cabe destacar que a presença do professor regente é de suma importância para a efetivação do ambiente de aprendizagem configurado, pois seus saberes experienciais são mobilizados, refinando as aulas apresentadas, desencadeando um processo reflexivo de aprendizagem da docência, situada na prática.

Na continuidade, oportuniza-se a realização de um processo reflexivo, por parte do futuro professor, das atividades realizadas até o momento. É sugerida a leitura de um artigo sobre o estágio supervisionado na disciplina matemática que tem por objetivo motivar o estudante a refletir sobre todas as situações formativas vivenciadas anteriormente. Interpreta-se a mobilização de saberes pedagógicos, por se tratar de um texto da área da Educação Matemática, mas os demais saberes também podem ser mobilizados, principalmente pela oportunidade de pensar no que foi vivenciado, pontos valorados por positivos, bem como negativos.

As próximas tarefas visam abordar a inserção das tecnologias digitais no ensino de matemática. Foi pedido para que os futuros professores entrevistarem o professor regente com o objetivo de conhecer como as tecnologias digitais são utilizadas nas aulas de matemática e quais são esses aplicativos. Na sequência, foi requerida a elaboração de um projeto envolvendo tecnologias digitais em aulas de matemática. Interpreta-se uma complementariedade entre as duas tarefas, principalmente pela entrevista proporcionar que o professor regente possa compartilhar seus saberes experienciais. Ao elaborar o projeto, o estudante poder-se-á fundamentar em vários saberes docentes resultantes das experiências que vivenciou na disciplina, bem como os apresentados na entrevista.

Para finalizar, a última tarefa refere-se à escrita do Relatório Final de Estágio, momento de organizar os manuscritos das tarefas realizadas ao longo da disciplina. Novamente, compreende-se que o amalgama de tipos de saberes docentes encontram condições propícias para serem mobilizados.

Ao olhar transversalmente para os dados, é possível observar uma valorização dos saberes experienciais mobilizados pelo professor supervisor do estágio e um processo de refinamento desses saberes com a prática e o conjunto de saberes docentes em formação do futuro professor. Interpreta-se que o ambiente formativo configurado tende a possibilitar o desenvolvimento do pensamento reflexivo da prática em sala de aula por meio da experiência. De acordo com Tardif (2002, p.53): a

> experiência provoca, assim, um efeito de retomada crítica (retroalimentação) dos saberes adquiridos antes ou fora da prática profissional. Ela filtra e seleciona os outros saberes, permitindo assim aos professores reverem seus saberes, julgá-los e avalia-los e, portanto, objetivar um saber formado de todos os saberes retraduzidos e submetidos ao processo de validação constituído pela prática cotidiana.

Nesse sentido, interpreta-se que a disciplina Estágio em Matemática no Ensino Fundamental se configura uma oportunidade de aprendizagem da docência em matemática, bem como o início de um processo formativo com as características supracitadas, apresentadas por Tardif (2002).

Na sequência, apresenta-se algumas considerações finais e aspirações que se configuram em possibilidades de direcionamentos futuros de outras investigações.

Considerações Finais

Partindo do objetivo de caracterizar as tarefas desenvolvidas na disciplina de Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental, pertencente ao currículo de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade privada na modalidade a distância, considerou-se a tipologia de saberes docentes de Tardif (2002) como um conjunto categorial a *priori*. Proveniente do movimento analítico, foi possível interpretar que o conjunto de tarefas propicia a mobilização de toda a tipologia de saberes.

Destaca-se que, no desenrolar da disciplina, há tarefas que enfocam os saberes de modo específico, como, por exemplo, os pedagógicos ou curriculares. Porém, na maioria das tarefas, foi perceptível que houve possibilidades de mobilização de todos os saberes docentes, ou seja, a constituição de um amálgama que considera o processo de ensino e aprendizagem em matemática, em sala de aula, como referente para aprendizagem da docência.

Em suma, interpretou-se que a maneira como a disciplina de Estágio foi estruturada, fomentou a participação do professor regente do estágio de modo a configurar um ambiente propício para que seus saberes experienciais fossem inseridos no escopo de possibilidades formativas para o futuro professor.

Cabe destacar que, futuramente, tem-se a intenção de analisar os relatórios apresentados pelos futuros docentes, com o intuito de conhecer a maneira como cada uma dessas tarefas foram realizadas. Almeja-se, com este artigo, a elaboração de um quadro de expectativas que se constituirá referência para o processo investigativo descrito anteriormente.

Referências e bibliografia

Bardin, L. (2016). *Análise de conteúdo*. São Paulo: Edições 70.

Contreras A. (2002). *A autonomia de professores*. São Paulo: Cortez.

Imbernón, F. (2006). La profesión docente desde el punto de vista internacional ¿qué dicen los informes?. *Revista de Educación*, 340, 41-50.

Resolução CNE/CP 1, de 18 de fevereiro de 2002. Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, cursos de licenciatura, de graduação plena. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf

Resolução CNE/CP 2, de 19 de fevereiro de 2002. Institui a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CP022002.pdf.

Resolução CNE nº2, de 1º de Julho de 2015. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduandos e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. Recuperado de http://pronacampo.mec.gov.br/images/pdf/res_cne_cp_02_03072015.pdf

Tardif, M. (2002). *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis: Vozes.

Zeichner, K. M.(1993). *A Formação Reflexiva de Professores, Ideias e Práticas*. Lisboa: EDUCA.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Circuito de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal, Brasil: formação para a docência e intervenção social

Janaína Mendes Pereira da Silva
Universidade de Brasília
Brasil
Jana.mendes.ps@gmail.com
Mauro Luiz Rabelo
Universidade de Brasília
Brasil
tunoluiz@gmail.com
Raquel Carneiro Dörr
Universidade de Brasília
Brasil
raqueldoerr@gmail.com
Vitor Estevan dos Santos
Universidade de Brasília
Brasil
Vitor.santos9@gmail.com
Paulo Victor Mourão Silva
Universidade de Brasília
Brasil
Pou14123@hotmail.com

Resumo

Este texto apresenta um relato da constituição do Circuito de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal que é uma atividade desenvolvida a partir do trabalho colaborativo e voluntário de educadores matemáticos que intervêm socialmente com estudantes e professores de Escolas Públicas, por meio da oferta de vivências em matemática. Além disso, este trabalho também apresenta um projeto de pesquisa em desenvolvimento, que tem como objetivos: 1/ Coletar, organizar e formatar as vivências já produzidas e as em produção nos Circuitos de Vivências em Matemática do Distrito Federal; 2/ Produzir *website* para a socialização dessa produção, integrando diferentes recursos tecnológicos disponíveis; 3/Instituir a pesquisa colaborativa em todas as instâncias de produção, organização, avaliação e socialização das vivências. Por fim, serão descritos os resultados alcançados pelo projeto em seu primeiro ano de execução.

Palavras chave: Circuito de Vivências, formação continuada, intervenção social.

Introdução

A formação inicial e continuada dos professores que ensinam matemática[1] tem inquietado a sociedade brasileira e sido amplamente investigada, gerando debates e muitas publicações, tanto no Brasil quanto em outros países. Os estudos de D'Ambrosio (1993), Fiorentini (2005), Ponte (1998), Nacarato (2003), Borba (2006), entre outros, exemplificam este movimento e contribuem para o entendimento de possibilidades e dificuldades relacionadas à formação do licenciado no Brasil (Gatti, 2011). Nesse contexto, ampliam-se, também, os estudos que revelam: a escassez de docentes para o Ensino Médio na rede pública; o alto índice de desistência na carreira; o aumento dos afastamentos por motivos de saúde; a aversão declarada, entre os jovens, à carreira docente. Tudo isso explicita aspectos da relação entre educação e trabalho, em especial, a pauperização, a precarização e a proletarização do trabalho docente, como analisam Oliveira (2003) e Sampaio e Marin (2004), fatores esses que lançam desafios urgentes para os diferentes setores da sociedade brasileira.

Muitas possibilidades vislumbradas na literatura acadêmica têm contribuído para a melhoria da formação inicial e continuada do professor que ensina matemática e registram experiências exitosas, vivenciadas em diferentes instituições com públicos também diversos. Algumas podem ser conhecidas, recriadas e/ou ampliadas e são, na maioria, divulgadas pelas sociedades, organizações e/ou grupos da área de Educação, Matemática, Educação Matemática e Psicologia da Educação Matemática, no Brasil e no Exterior.

Nesse ínterim, a Faculdade de Educação e o Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, UnB, têm contribuído decisivamente *para* e *na* produção de material didático para os processos de formação continuada de professores que ensinam matemática no Brasil. Como exemplo, temos: o projeto pioneiro, coordenado pela professora Nilza Eingenheer Bertoni, Doutora Honoris Causa pela UnB, denominado: "Um novo Currículo de Matemática[2] da 1ª a 8ª séries – Subprograma para o ensino da Ciência – SPEC – MAT – UnB/MEC/CAPES/PADCT2"; O Curso de Pedagogia para Professores em Início de Escolarização (PIE) em parceria com a SEEDF, que congregou professores da rede pública de ensino, pesquisadores e egressos dos vários níveis de formação da UnB, entre eles, do Programa de Pós-Graduação em Educação, da Faculdade de Educação, da linha de pesquisa de Ensino e Aprendizagem; o Programa Gestão da Aprendizagem Escolar (GESTAR), que congregou outros pesquisadores, entre eles egressos do departamento de matemática – como é o caso do Prof. Cristiano Alberto Muniz –, em uma proposta de formação continuada em matemática para professores dos Anos Inicias e Finais do Ensino Fundamental, sendo desenvolvido em vários estados da federação. Além desses, destacam-se, também, o Pró-letramento, o Pacto Nacional para a Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), o Pacto Nacional pelo fortalecimento do Ensino Médio, entre muitos outros[3]. Mais recentemente, destacam-se os materiais produzidos no âmbito do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e do Programa de Educação Tutorial (PET)[4].

---

[1] Termo usado por Fiorentini (2005) para se referir aos professores licenciados em pedagogia e matemática, docentes de matemática na Educação Básica.

[2] Para mais informações acesse: <http://32reuniao.anped.org.br/arquivos/trabalhos/GT19-5778--Int.pdf>

[3] Informações sobre todos eles podem ser obtidos no *site* do Ministério da Educação http://pacto.mec.gov.br/ .

[4] < http://www.mat.unb.br/>

Todavia, apesar da qualidade dos materiais produzidos para os processos de formação continuada (presencial, semipresencial, a distância), vivenciamos, ainda, resistências e dificuldades em promover mudanças na prática docente e ampliar a aquisição conceitual em matemática pelos professores (Fiorentini, 2005, 2012). Tais evidências nos permitem afirmar que é preciso repensar, então, e cada vez mais, a formação inicial, em especial, o modo como os cursos de licenciatura em pedagogia e matemática estão organizados em termos de projeto político pedagógico e matriz curricular e como são de fato geridos e executados. Percebe-se, ainda, a não superação do modelo de licenciatura segundo a fórmula “3+1” em muitas instituições e, mesmo naquelas que já alteraram essa fórmula, os avanços são lentos devido ao isolamento entre as diferentes áreas de conhecimento (Fávero & Pina Neves, 2011; Pina Neves, 2008). Cientes de tudo isso, avaliamos que se faz necessário unir professores e pesquisadores das faculdades de educação e dos departamentos de matemática para a construção de propostas de formação inicial que articulem, a contento, matemática científica e matemática escolar (Moreira & David, 2003), tendo a Educação Básica como parâmetro para as ações formativas (Muniz, Pina neves & Nascimento, 2009). Entende-se que são necessárias ações que não fiquem restritas aos “muros” da universidade, mas que dialoguem com a escola e seus professores. A partir desses entendimentos e de posse das aprendizagens construídas no projeto de extensão intitulado Serviço de Atendimento Matemático à Comunidade[5] (SAMAC), nasceu, em 2004, o Circuito de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal.

O Circuito de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal (Brasil)

O processo de constituição e execução dos Circuitos pode ser resumido na tabela 1, apresentada a seguir, com destaque para as fases, os participantes, as ações, entre outros aspectos.

Tabela 1

Circuitos de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal

Título	**Circuito de Vivências em Matemática**
Datas importantes	2003 – discussão/planejamento; 2004 – início das atividades; Situação atual: em desenvolvimento
Instituições envolvidas	Universidade de Brasília (Departamento de Matemática e Faculdade de Educação); Instituto Federal de Brasília; Universidade Católica de Brasília; Faculdade Projeção de Taguatinga (Antiga Faculdade Jesus Maria José) Faculdade Estácio de Sá (Antiga Facitec de Taguatinga)

[5] Iniciou-se em 1996, no Departamento de Matemática, por meio de um projeto de extensão, o Serviço de Atendimento Matemático à Comunidade (SAMAC), sob a orientação da professora Maria Terezinha Jesus Gaspar. O projeto contou com a participação de bolsistas e voluntários dos cursos de licenciatura em matemática e pedagogia e ofertou, gratuitamente, à comunidade local atendimento em matemática escolar. Este trabalho propiciou aos estudantes de graduação a oportunidade de interagir com estudantes e professores do ensino fundamental e médio e da comunidade em geral por meio de propostas pedagógicas discutidas pelo grupo em momentos de formação no projeto. Essa oportunidade propiciou a criação, produção, construção, experimentação e validação de sequências de ensino para o processo de aprendizagem matemática.

Objetivos	1/ promover o pensar e o fazer matemática de maneira investigativa e criativa junto a estudantes da Educação Básica de Escolas Públicas da SEEDF; 2/ promover a produção de vivências em matemática por estudantes de graduação, pós-graduação, professores e pesquisadores da área de ensino de matemática, vinculados aos cursos de licenciatura em matemática e pedagogia de instituições públicas e particulares; 3/ desenvolver e avaliar as vivências em matemática produzidas; 4/ instituir a pesquisa colaborativa como ferramenta de formação inicial e continuada para o professor e/ou futuro professor que ensina matemática.
Princípios teórico-metodológicos	Produção de vivências em matemática tendo como referência o currículo de matemática da SEEDF em consonância com os aspectos teórico-metodológicos defendidos por Muniz (2010), Bertoni (1983, 2003, 2008) e Skovsmose (2000).
Metodologia	Eles são realizados em escolas públicas, previamente agendadas; cada vivência em matemática é desenvolvida por dois ou mais responsáveis, durante 40 minutos, em regime de circuito. Com isso os participantes têm a oportunidade de vivenciar até 5 vivências.
Demanda	A busca por agendamentos cresce a cada ano e o calendário anual é organizado com bastante antecedência. Para atender a demanda das escolas – sem lista de espera – o número de circuitos e pessoas envolvidas deveria triplicar.
Avaliação	As vivências são avaliadas tanto pelos estudantes das escolas atendidas quanto pelos que oferecem as vivências por meio de formulários de avaliação construídos para esse fim pela equipe. As avaliações têm auxiliado nos processos de reelaboração e adequação das vivências aos princípios teórico-metodológicos.

Fonte: SBEM-DF.

As vivências são produzidas de modo colaborativo, assim como propõe Fiorentini (2005) tendo sempre um(a) coordenador(a) que dialoga com seus proponentes. Esses, por sua vez, são vinculados às instituições e programas envolvidos. Depois de aplicadas nas escolas, muitas delas passam por adaptações em função das aprendizagens provenientes da prática. Assim, os Circuitos de Vivências em Matemática do Distrito Federal têm sido realizados desde novembro de 2004 até a presente data. Eles têm atendido grande quantitativo de estudantes da educação básica, distribuídos em escolas públicas de diferentes regiões do Distrito Federal.

Desse modo, o Circuito de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal tem se constituído em importante instância de formação inicial e continuada para os professores e futuros professores que ensinam matemática no DF, na medida em que integra profissionais da escola e da universidade e utiliza a investigação matemática como princípio no planejamento e mediação das vivências. Entretanto, ele apresenta dois grandes desafios, quais sejam:

Desafio 1 – a sua não formalização enquanto projeto de pesquisa interinstitucional na área de formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática, que leva à falta de validação científica para os processos de produção, aplicação e avaliação das vivências produzidas.

Desafio 2 – a falta de coleta, organização, formatação e socialização das inúmeras vivências já produzidas e das que estão em fase de produção.

Em função desses desafios e apesar de todas as conquistas em termos de produção colaborativa, do número de escolas e de estudantes atendidos, do número de instituições envolvidas, os Circuitos não têm organizado e nem socializado seus materiais para consulta, gerando a perda de vivências e impossibilitando que mais pessoas as acessem e possam se beneficiar do material produzido.

Logo, entendemos que a coleta, a organização, a formatação e a socialização de toda essa produção já realizada e da em fase de produção, em um *website* concebido para o acesso de professores e estudantes ampliaria as possibilidades de divulgação dos conhecimentos construídos de modo colaborativo e permitiria a consulta em quaisquer dispositivos e lugares, utilizando as possibilidades e conveniências oferecidas pela internet. Desse modo, temos um projeto de pesquisa em desenvolvimento que tem atuado com os seguintes propósitos:

- coletar, organizar e formatar todas as vivências em matemática já produzidas nos Circuitos de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal, de 2004 a 2015;
- promover o pensar e o fazer matemática de maneira investigativa e criativa com estudantes da Educação Básica de Escolas Públicas da SEEDF;
- promover a produção de vivências em matemática por estudantes de graduação, pós-graduação, professores e pesquisadores da área de ensino de matemática, vinculados aos cursos de licenciatura em matemática e em pedagogia de instituições públicas e particulares;
- produzir um *website* para a socialização dessa produção integrando diferentes recursos tecnológicos disponíveis;
- instituir a pesquisa colaborativa como ferramenta de formação inicial e continuada para o professor e futuro professor que ensina matemática, assim como defende Fiorentini (2005), em todas as instâncias de produção, organização, avaliação, execução e socialização das vivências.

Metodologia do Projeto

Nesta seção descreveremos o projeto de pesquisa em desenvolvimento e que configura-se como uma pesquisa colaborativa, assim como defende Fiorentini (2005) no contexto da formação de professores que ensinam matemática, a partir do diálogo com construtos teóricos produzidos em outras áreas e por experiências já desenvolvidas no âmbito da instituição sede da investigação como discutido anteriormente nos estudos de: França, Pina Neves e Pires (2015); Grebot, Gaspar e Dörr (2013); Dörr e Pina Neves (2014), entre outros.

Desse modo, Magalhães (2004, p. 75) conceitua colaboração como a prática em "que todos os agentes tenham voz para colocar suas experiências, compreensões e suas concordâncias e discordâncias em relação aos discursos de outros participantes e ao seu próprio". Desgagné (1997), citado por Ibiapina (2008), considera a colaboração como fator que implica em negociação dos conflitos que são inerentes ao processo de ensino e aprendizagem, representando formas de superação do aprendido, visto que favorece a tomada de decisões democráticas, a ação comum e a comunicação entre pesquisadores e professores.

Logo, a pesquisa colaborativa considera todos os participantes do processo aprendizes, pois as ações interpsicológicas e intrapsicológicas dos partícipes envolvidos se cruzam, proporcionando a interação entre pesquisador e professor. Desse modo, como enfatiza Ibiapina (2008, p. 40): “Esse processo implica em conflitos propiciadores de oportunidades de compreensão crítica por parte dos envolvidos sobre o que está sendo discutido”.

No projeto que estamos desenvolvendo, a investigação colaborativa perpassa todas as etapas propostas como uma forma de reconstrução e aprimoramento das ações desempenhadas pelos envolvidos no processo. As etapas em desenvolvimento são as seguintes:

1. Coleta das vivências já produzidas; busca histórica junto aos membros do circuito de vivências desde seu início em 2004 com o intuito de acessar todo o material já produzido.
2. Avaliação das vivências tendo como parâmetro o embasamento teórico adotado; caso a vivência apresente algum descompasso conceitual ou procedimental, ela será adaptada, tendo o apoio e a concordância do autor ou autora original.
3. Coleta de autorizações para socialização das vivências de todos os autores.
4. Definição dos recursos didáticos e dos formatos a serem utilizados nos processos de formatação das vivências.
5. Formatação e revisão do conteúdo das vivências a partir de recursos atuais de tratamento de texto e imagem, bem como revisão quanto às normas vigentes.
6. Construção do *website* para a socialização das produções.
7. Período de experimentação com professores da SEEDF e estudantes de Licenciatura em Matemática e Pedagogia.
8. Lançamento e disponibilização do *website p*ara consultas, experimentação e sugestões junto à comunidade acadêmica e educacional do DF.
9. Formação presencial junto a professores da SEEDF para exploração do *website* e produção de novas vivências em matemática.
10. Ofertar, de modo regular, os Circuitos de Vivências em Matemática do Distrito Federal, garantindo a coleta, a organização, a formatação e a avaliação das vivências produzidas;

Considerações finais

O projeto de pesquisa aqui descrito iniciou-se formalmente em fevereiro de 2018 e, ao final desse mesmo ano, teve como resultados da primeira fase a construção de um *website* que ficará em testes por um período de seis meses. Nesse canal digital de informações, a equipe de pesquisadores tem trabalhado para que um maior número de oficinas de atividades matemáticas estejam disponíveis para consulta e informação à comunidade de estudantes e professores de Matemática em todos os níveis e sirva para o professor, ou futuro professor que ensina matemática, de modo a lhe auxiliar no processo de aprendizagem e ensino da matemática nas modalidades presencial e a distância.

O trabalho de pesquisa está previsto para durar ainda mais um ano e, ao final, será possível ter acesso às chamadas vivências em matemática dos anos iniciais ao Ensino Médio, produzidas nos Circuitos de Vivências. Além disso, no *website* criado será possível a atualização de modo contínuo do banco de oficinas. Ou seja, as ações dos novos Circuitos poderão ser catalogadas logo após a sua realização.

Por fim, ainda estão planejados para o último ano do projeto a capacitação de professores-formadores da Secretária de Estado e Educação do Distrito Federal, Brasil, e a formação de colaboradores para o planejamento, elaboração e validação de materiais pedagógicos para o ensino de matemática na Educação Básica.

Referências e bibliografia

Andrade, G. G., & Rabelo, M. L. (2007). O Enem e os Desafios da Correção das Redações. In: G. G. Andrade & M. L. Rabelo (Org.). *A produção de textos no Enem: desafios e conquistas*. (pp.11-24). 1ed. Brasília: EdUnB, v. 1.

Arroyo, M.G. (1980). Operários e educadores se identificam: que rumos tomará a educação brasileira. *Educação & Sociedade*, *5*, 5-23.

Bertoni, N. E. (1983). Geometria + Laboratório + M. C. Escher. *Revista do Professor de Matemática*, *2*. Rio de Janeiro: SBM.

Bertoni, N. E. (2003). Entrevista concedida à Educação Matemática em Revista – *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática* , *10*(14). São Paulo: SBEM.

Bertoni, N. E. (2008). A construção do conhecimento sobre número fracionário. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, *21*(31). Universidade Estadual Paulista.

Borba, M. C. (2006). *Tendências internacionais em formação de professores de matemática.* [A. O, Júnior, Trad.] Belo Horizonte: Autêntica. [Trabalho original publicado em 2000].

D’Ambrosio, U. (1993). *Etnomatemática:* arte ou técnica de explicar e conhecer. 2. ed.São Paulo: Editora Ática.

Desgagné, S. (1997). Le concept de rechereché collaborative: l`idée d`um rapprochement entre chercheurs universitaries etpraticiens enseignantts. *Reveu dês de L`Éducation*, *23*(2), 371-393.

Dörr, R. C., & Pina Neves, R. S. (2014). O Perfil de Ingressantes na Licenciatura em Matemática de uma Instituição Pública Federal do Distrito Federal. In VI EBREM Encontro Brasiliense de Educação Matemática, *Anais...* Brasília.

Fávero, M. H., & Pina Neves, R. S. (2011). La intervención psicopedagógica como opción teórico-metodológica para la formación inicial de profesores de matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *28*, 99-116. Acessado: 07 jul. 2015, em: http://www.fisem.org/web/ union/

Fiorentini, D. (2012). Formação de professores a partir da vivência e da análise de práticas exploratório-investigativas e problematizadoras de ensinar e aprender matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *7*(10), 63-78.

Fiorentini, D. (2005, jun.). A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da Licenciatura em Matemática. *Revista de Educação PUC-Campina*s, 18, 107-115.

França, J.A., Pina Neves, R. S., & Pires, L. G. (2015). A análise da produção escrita de escolares do terceiro ano do ensino médio: atividade de formação no contexto do PIBID de matemática da Universidade de Brasília. In: Conferência Internacional do Espaço Matemático em Língua Portuguesa, *Anais*... Coimbra.

Gatti, B. A. (2011). *Políticas Docentes no Brasil: um estado da arte*. Brasília: Ministério da Educação, 295p.

Grebot, G., Gaspar, M. T. J., & Dörr, R. C. (2013). Experiências Matemáticas e experiências com alunos na formação de professores: desdobramentos do programa PIBID/MAT da Universidade de Brasília. In VII CIBEM Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, *Actas*… Montevideo.

Ibiapina, I. M. L. de M. (2008). *Pesquisa colaborativa: investigação, formação e produção de conhecimentos.* Brasília: Líber Livro.

Magalhães, M. C. C. (2004). A linguagem na formação de professores como profissionais reflexivos e críticos. In M. C. C. Magalhães (Org.). *A formação do professor como um profissional crítico*: linguagem e reflexão. (pp. 59-85). Campinas, São Paulo: Mercado de Letras.

Moreira, P. C., & David, M. M. M. S. (2003). Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. *Zetetiké*, *11*(19), 57-80.

Muniz, C. A. (2008). Políticas públicas e formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática. GT-19: Educação Matemática. In 31ª Reunião Anual da ANPEd: Constituição Brasileira, Direitos Humanos e Educação, Caxambu, MG. *Anais*.... Acessado em 20 mar. 2017 em: http://31reuniao.anped.org.br/5trabalhos_encomendados/trabalho%20encomendado%20-%20gt19%20-%20cristiano%20alberto%20muniz.pdf

Muniz, C. A. (2010). *Brincar e Jogar*: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. 1. ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 145 p .

Muniz, C.A., Pina Neves, R. S., & Nascimento, A.M.P. do. (2009). Entre o olhar, o esquema e a intervenção psicopedagógica na produção matemática da criança. *Perspectivas da Educação Matemática*, *1*, 79-110.

Nacarato, A. M. (2003). A escola como lócus de formação e de aprendizagem: possibilidades e riscos da colaboração. In D. Fiorentini & A. M. Nacarato (Orgs.). *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática.* (pp. 175-195). Campinas, SP: Musa.

Oliveira, D. A. (2003). *As reformas educacionais na América Latina e os trabalhadores docentes.* Belo Horizonte: Autêntica.

Pina Neves, R. da S. (2008). A divisão e os números racionais: uma pesquisa de intervenção psicopedagógica sobre o desenvolvimento de competências conceituais de alunos e professores. Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, Brasília-DF.

Ponte, J. P. (1998). O conhecimento profissional do professor de matemática. *Educação, Sociedade e Culturas*, *9*, 189-195.

Sampaio, M. das M. F., & Marin, A. J. (2004, set./dez.). Precarização do Trabalho docente e seus efeitos sobre as práticas curriculares. *Revista Educação & Sociedade*, 25(89), Campinas, SP.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, *14*, 66-91.