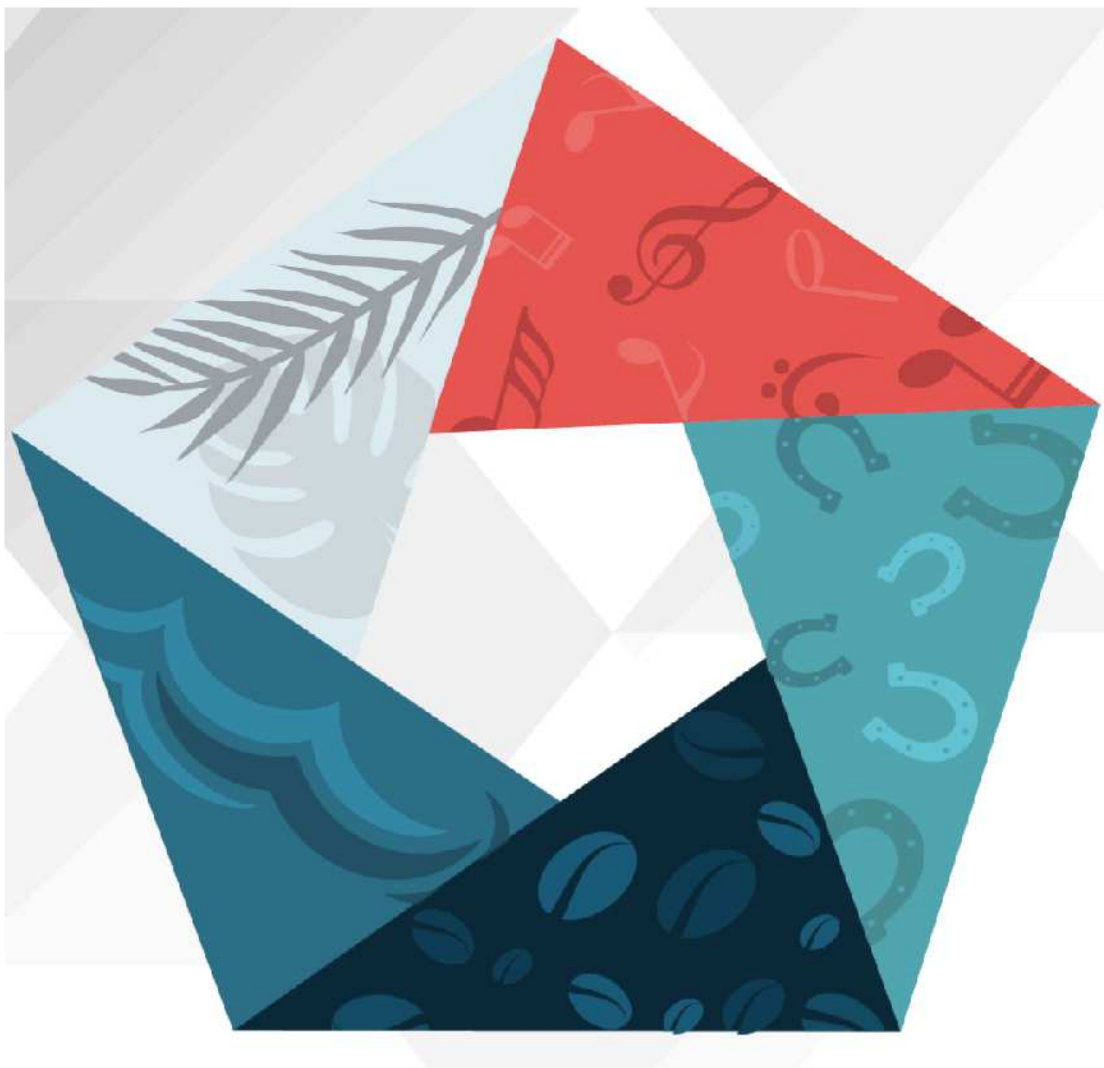
Educación Matemática en las Américas 2019

Volumen 4: Minicursos



CIAEM
IACME
desde - since 1961

Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO
www.ciaem-iacme.org

Educación Matemática en las Américas 2019
Volumen 1: Formación inicial de profesores
Editado por Yuri Morales-López y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN: 978-9945-09-413-8

El *Comité Interamericano de Educación Matemática* (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la *International Commission on Mathematical Instruction*. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera al CIAEM y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no fue previamente publicado en otro medio; y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Se respetaron los metadatos (nombres, apellidos, títulos, entre otros) que los autores proporcionaron cuando postularon su trabajo en la plataforma del evento.

Para citar este libro:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2020). *Educación Matemática en las Américas 2019.* Editores: Yuri Morales-López y Ángel Ruíz. República Dominicana: Autor.

ISBN: 978-9945-09-413-8
9 789945 094138

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LAS AMÉRICAS 2019

Presentación

Para el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es un placer y un honor ofrecer a la comunidad educativa este Volumen de *Educación Matemática en las Américas 2019*, en donde se pueden encontrar muy importantes insumos para comprender el momento histórico que atraviesa la Educación Matemática desde la perspectiva de las Américas.

La *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática* se realizó entre el 5 y 10 de mayo del 2019 en Medellín, Colombia. La Universidad de Medellín y la Universidad de Antioquia fueron las organizaciones académicas anfitrionas del evento. Las sesiones fueron realizadas en el campus de la Universidad de Medellín. Participaron 700 personas provenientes de 25 países de cuatro continentes: Europa, Asia, África y las Américas. Participaron centenares de docentes en servicio de la ciudad de Medellín y del Departamento de Antioquia.

Alrededor de 400 trabajos fueron presentados: conferencias plenarias y paralelas, mesas plenarias, minicursos, sesiones temáticas, comunicaciones cortas, talleres y posters. Unas 50 personalidades del mayor nivel en la comunidad internacional de Educación Matemática expusieron sobre sus investigaciones. Entre ellas Jill Adler (Suráfrica), Ferdinando Arzarello (Italia), Salvador Llinares (España), Yoshinori Shimizu (Japón), Michael Shaughnessy (EUA), Luis Rico (España), Fidel Oteiza (Chile), Carlos Vasco (Colombia), Carlos Sánchez (Cuba), Luis Carlos Arboleda (Colombia), Edwin Chaves (Costa Rica), Nelly León (Venezuela), Vilma Mesa (EUA). Aunque físicamente no pudo estar presente envió su contribución en forma de video Ubiratan D'Ambrosio (Brasil). Los trabajos dentro de la plataforma del congreso se pueden consultar en https://ciaem-redumate.org/conferencia/index.php/xvciaem/xv/schedConf/presentations

La revisión científica de todos los trabajos fue responsabilidad de un Comité Asesor Internacional, un Comité Internacional del Programa y el Comité Ejecutivo del CIAEM. Se contó con la coordinación central de Directores de tema y la Dirección de la plataforma científica realizada por el académico Yuri Morales con el apoyo de la profesora Johanna Mena (ambos de Costa Rica) y con la participación voluntaria de muchísimos revisores científicos de muchos países.

Este volumen incluye trabajos que fueron efectivamente presentados en ese congreso.

Expreso mi agradecimiento a todos los miembros de los comités científicos, directores de tema, revisores científicos, y directores de la plataforma científica. También deseo agradecer por su apoyo en el registro de este libro a Sarah González y a la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra en República Dominicana. Agradezco mucho a todos los autores que decidieron compartir su trabajo en las instancias que abrimos mediante la XV CIAEM. También a Yuri Morales quien técnica y formalmente generó este volumen para su registro.

En las diversas dimensiones del congreso, de cuya realización este libro es producto, quiero aprovechar esta ocasión para reconocer la valiosa contribución de las Universidades de Medellín y de Antioquia y al Comité Organizador Local de la XV CIAEM, y, además, agradecer al equipo humano del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* que ha sido durante muchos años un sostén crucial en la organización de todos los eventos del CIAEM y de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*; y en particular de este libro que hoy sacamos a la luz pública.

Este volumen es una parte del libro de *Memorias* completo (son 15 volúmenes que se pueden ver/descargar). Se ha respetado aquí la paginación del libro completo. Y las referencias *deben hacerse con base en el libro y su paginación*. No es necesario indicar el volumen específico donde se cita pues esta es una versión funcional al servicio de una mejor visualización o descarga de este valioso material.

Invitamos a los lectores de este libro a promoverlo en sus diversas actividades de docencia, investigación, extensión y divulgación en todos sus países.

Con afecto

Ángel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática
Presentación del 17 de julio de 2024
Costa Rica

Índice

Basado en la información suministrada durante la postulación de cada trabajo

Minicursos

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Mini curso de Comunicación de la Matemática en el Aula Escolar para futuros profesores y futuras profesoras

Claudia **Vargas** Díaz
Universidad de Santiago de Chile
Chile
claudia.vargas.d@usach.cl

Resumen

El minicurso se dará en dos partes: 1) aspectos comunicativos generales y la comunicación de la matemática, y 2) comunicar con éxito, recomendaciones y recursos. Estos contenidos son parte de un ciclo formativo que se dictó a un grupo de futuros profesores de matemática de enseñanza media de la capital de Chile. En este artículo se comparten brevemente la metodología, los resultados y las conclusiones sobre un proyecto que acaba de culminar en el cual se abordó la comunicación de la matemática en la formación de profesores de matemática.

Palabras clave: educación, matemática, didáctica, comunicación, reflexiones de los futuros profesores

Introducción

El proyecto del cual emergió este mini curso pretendió caracterizar las competencias comunicativas necesarias para la formación de profesores de matemática de educación media. Las competencias comunicativas son relevantes en la formación del docente no sólo por lo profesional (Giménez y Vargas, 2012) sino también por el efecto que puede causar el profesorado en sus educandos (Fernández y Cuadrado, 2010). Así en este trabajo se considera que la competencia comunicativa matemática es la capacidad social comunicativa de enseñar matemática, la cual se desarrolla cuando el profesor reflexiona acerca de la importancia de la comunicación para enseñar a un grupo de alumnos interesados en aprender matemática (Vargas, 2012).

Para el proyecto se trazaron los objetivos específicos siguientes: O1. Analizar la situación actual de la formación de profesores de matemática en relación a la competencia comunicativa. O2. Reconocer elementos teóricos que sirvan para caracterizar la competencia comunicativa y elementos prácticos que promuevan en los futuros profesores el desarrollo de competencias para comunicar la matemática en un proceso de formación. O3. Detallar una propuesta de formación que sirva para desarrollar la competencia comunicativa en futuros profesores. O4. Explorar si la propuesta de formación (implementación piloto) es capaz de desarrollar la competencia comunicativa en futuros profesores.

En el mini curso se mostrarán los resultados relacionados con los objetivos O3 y O4 ya que según estos objetivos, parte de los resultados obtenidos fueron materializados en una propuesta de ciclo de formación la cual fue experimentada.

Se destaca la tarea realizada por los estudiantes, para lo cual se expone un ejemplo y la reflexión de una futura profesora en su experiencia dando clases de repaso.

Metodología

Para abordar los objetivos, se realizó una revisión de las mallas curriculares de las carreras de pedagogía en matemática acreditadas que formen parte de universidades del Consejo de Rectores de Universidades Chilenas CRUCH y se consultó a los jefes de carrera para conocer si en las respectivos programas se desarrollan competencias comunicativas para enseñar matemáticas en algunas de las asignaturas. Conjuntamente, se realizó un sondeo de percepción en un grupo de estudiantes de pedagogía que ya cursaron prácticas profesionales para así conocer sus percepciones y reflexiones en relación a la competencia comunicativa para enseñar matemática (Domingo, 2013).

También se realizó un reconocimiento de elementos teóricos para caracterizar las competencias comunicativas a desarrollar en los futuros profesores para su posterior desempeño profesional (Saló, 2006) (Sanz, 2005). Se filmaron algunas clases de matemática para extraer otras informaciones en torno a competencias comunicativas del profesor de matemática para identificar elementos prácticos que iluminaran qué se debe mejorar al comunicar la matemática. El análisis se realizó considerando los tipos de intercambio en el aula (Villalta, 2009) (Villalta y Martinic, 2013).

En base a la literatura y a los hallazgos de las video grabaciones obtenidas se elaboró una propuesta secuenciada de formación (mini ciclo de formación) para los futuros profesores con la implementación piloto de la propuesta obtenida en estudiantes de pedagogía en matemática. Se les pidió video-grabar unas clases para luego analizar su performance. Esto porque las reflexiones de los futuros profesores están estrechamente ligadas con sus prácticas futuras (Miller y Baker, 2005).

Resultados

En relación al objetivo O1, se pudo establecer que los programas de formación que accedieron a compartir información no entregan herramientas directas en competencias comunicativas para enseñar matemática (Vargas y Apablaza, 2019).

Respecto del objetivo O2, los/las participantes admiten que no han sido formados en esa perspectiva con lo cual evidencian la necesidad de instrucción al respecto.

En términos del objetivo O3, se detectó que una de las principales falencias de los profesores en las filmaciones realizadas fue que explican la matemática sin hacer uso de materiales didácticos que podrían hacer más significativo el aprendizaje de sus estudiantes.

Parte de los hallazgos del trabajo metodológico se materializaron en un ciclo de formación en relación al desarrollo de competencias comunicativas. Este ciclo formativo fue programado en base a lo informado por los y las jefes de carrera, la literatura y a los hallazgos a partir de los vídeos.

El ciclo tuvo una duración de cuatro sesiones y se trabajó en él los siguientes aspectos:

Primera parte. Aspectos comunicativos generales:

1. La comunicación. Para hacer conscientes del acto comunicativo a los futuros profesores y profesoras, así como también informar entre otros aspectos, los elementos teóricos que subyacen a la comunicación.
2. Dialogar. Dar a conocer qué significa dialogar y cuál es la importancia del diálogo en el aula.
3. Tipos de discurso. El discurso dialogar y el discurso monologal.
4. Comunicación en el aula. La habilidad de escuchar y el hacerse escuchar.

Segunda parte. Comunicación de la matemática

5. La comunicación de la matemática. El contenido matemático y su complejidad.
6. Trabajo reflexivo ¿Nos hemos visto dando clases? Los futuros profesores realizan la tarea de mirarse dando clases. En la tarea identifican el tipo de discurso que realizan y examinan su práctica comunicativa.

Tercera parte. Comunicar con éxito

7. El discurso perfecto. En búsqueda de los tipos de intercambio comunicativo.
8. Receta. La fórmula del buen comunicador.
9. ¿Qué hay que evitar?. Errores comunes en clases de matemática.

Cuarta parte. Recomendaciones y recursos

10. Recomendaciones para presentar contenidos de matemática. Cómo presentarlo correctamente.
11. Uso de recursos para presentar contenidos matemáticos. Algunos ejemplos para ilustrar cómo explicar algunos contenidos.

En la cuarta parte se llevó a los estudiantes a trabajar con material manipulativo y se les explicó cómo usarlo en el aula escolar y por qué usarlo en el sentido comunicativo. Esto dio un impulso en el proyecto para adquirir el material para los cuatro ejes de la enseñanza escolar de Chile, aunque finalmente se llegó a lo que actualmente tenemos como Museo Laboratorio de Didáctica de la Matemática.

Este ciclo formativo se experimentó y se invitó a participar voluntariamente a estudiantes del programa Licenciatura en Educación Matemática y Computación (LEMC) del Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación (DMCC) de la Facultad de Ciencia de la Universidad de Santiago de Chile. En el ciclo formativo se inscribieron y asistieron 16 estudiantes de distintos niveles de la carrera LEMC y de distinto género a quienes se les otorgó un diploma de participación en el DMCC.

La actividad 6 correspondió a una instancia reflexiva en que debían responder a la pregunta: ¿nos hemos visto dando clases? Los futuros profesores realizaron la tarea siguiente: Identificar qué tipo de discurso utilizo en mis clases (reflexión), Identificar tono de voz (serio, alegre, reflexivo), Grabar y transcribir unos 10 minutos (práctica), Examinar la grabación (reflexión), Transcribir los 10 minutos y anotar sus descubrimientos.

Los estudiantes accedieron a realizar la tarea propuesta, y aquí se presenta la actividad de una estudiante:

"Pertenezco a un voluntariado de reforzamiento escolar…, en el cual realizo clases o tutorías a una niña de séptimo básico. Estas tutorías las realizamos los miércoles, al no tener los implementos y no poder grabarla, solo grabé el audio de la clase. Considero que el discurso que utilizo es dialogal, puesto que, al tener los contenidos, le voy preguntando si se recuerda la definición de los conceptos o las características de estos dados por la profesora, si no es así, o solo recuerda un poco, yo la ayudo. Uso variaciones en el tono.

Mi tono de voz trata de ser serio y amable, pero también alegre, alegre sobre todo en el principio, cuando le pregunto cómo está ella y cómo van las clases, y también cuando destaco su resolución correcta de los ejercicios. Mi voz es seria, en el momento en que le explico o complemento la materia que ella no recuerda, cuando le propongo los ejercicios y cuando los reviso.

"Parto hablando yo, y luego intercalado, con la alumna.

Alumna: En vez de hacer una prueba hicimos en grupo, una diapositiva

Futura profesora: ¿Sí? ¿Y te resulto bien?

Alumna: Si, hasta el momento tenemos un 7

Futura profesora: ¡Oh! Que buena, te felicito, ¿ya se lo mostraron entonces a la profe?

Alumna: Si, se lo mandamos, pero hay que disertar el lunes

Futura profesora: ¿Y estuvo entretenido eso? ¿Te gusta la computación?

Alumna: Si…

Futura profesora: ¿Sí? Un poquito jeje (sic). Y tenía que ver con la proporcionalidad

Alumna: No, con los tipos de gráficos

Futura profesora: A veces uno entiende más con los trabajos prácticos que con las pruebas

Alumna: Pero el problema es que no traje cuaderno, como en clases no lo ocupamos

Futura profesora: Pucha, ahí estamos complicadas, pero no importa podemos ver que te pasaron las clases anteriores

Alumna: Es que no hemos tenido más clases y yo falté.

Futura profesora: Pero mira, lo último que nosotros vimos, no sé si te acuerdas, fue sobre un poco de estadístico, que era el tema de la población, la muestra, ¿te acuerdas de que eso vimos como hace dos clases atrás?

Alumna: Si

Futura profesora: Y después empezamos a hacer una tabla, que era súper larga y tenía muchos números. ¿Te acuerdas de eso?

Alumna: Si

Futura profesora: Ya mira, vamos a tratar de hacer una y vamos construyéndola juntas, y entonces tú me vas a decir y tú me vas a decir, a ver si te acuerdas un poquito, o si no… mira yo voy a poner los datos, vamos a hacer acá, vamos a poner los datos y esto va a ser acá, va a ser, dice, Camila tiene dos hermanos, vamos a poner varios nombres, juanita, pepita, Carlos, Ignacio, a ver dime nombres tú, un nombre que a ti te guste.

Alumna: ¿Ariano?

Futura profesora: Ah mira, nunca lo había escuchado, Ariano,

Alumna: Ariana

Futura profesora: Ah, Ariana, como la cantante, ¿Quién más?

Alumna: Ah, ¿Pero tienen que ser hombres?

Futura profesora: Hombres y mujeres

Alumna: Mmm (sic), Felipe

Futura profesora: Felipe, nos faltan tres, a ver vamos a poner Martina

Alumna: ¿Camilo?

Camilo bien, y el último. Dime el último

Alumna: Catalina

Futura profesora: Catalina, ya, entonces, Camila tiene dos hermanos, juanita tiene cuatro, Felipe tiene uno, Carlos uno, Ignacio tampoco tiene, Ariana tiene dos, Felipe tiene tres, Martina tiene 5 hermanos, ¿Cuántos hermanos tienes tú?

Alumna: Dos,

Futura profesora: Dos

Alumna: Tres ahora

Futura profesora: Ya, este último va a tener tres, vamos a agregar a otro, me voy a agregar a mí, yo tengo uno también, vamos a agregar a Israel y le pondremos que tiene tres. Ya tenemos estos datos que son la cantidad de hermanos, entonces nosotros vamos a crear una tabla que va a decir acá. ¿Qué es lo que vamos a medir acá entonces?

Alumna: Eh... (sic)

Futura profesora: Acuérdate que nosotros hablábamos de categorías que es lo que se iba como a analizar. ¿Qué es lo que nos indica acá estos datos? Por ejemplo ¿Qué característica tiene?, Camila tiene dos hermanos ¿Qué me está diciendo? ¿De qué me está hablando?

Alumna: …, que tiene dos hermanos

Futura profesora: Que tiene dos hermanos. ¿Y qué característica en común tienen todos ellos

Alumna: Que son números

Futura profesora: Ya, son números, pero según los nombres, que tienen hermanos, mira, todos tienen hermanos, algunos no tienen, lo que nosotros vamos a medir es una característica en común de todos, eso es lo que nosotros estamos, vamos a poner en la tabla, entonces, esta de acá es la categoría de numero de hermanos y nosotros lo podríamos agregar según. ¿Qué es eso un resumen?

Alumna: No

Futura profesora: Ya, podríamos ir poniéndolo según, no sé si te acuerdas de que nosotros hablábamos por ejemplo ya, teníamos el color de pelo rojo, y nosotros decíamos cuántos niños tenían el pelo rojo, y poníamos al lado el numero ¿te acuerdas?

Alumna: Si

Futura profesora: Ya, ¿cómo podríamos hacer las categorías hacia abajo?, como podemos dividir esto, o sea no dividir, agrupar

Alumna: Sumándolo

Futura profesora: ¿Sumando que cosa?

Alumna: Este con este

Futura profesora: Por ejemplo, si sumamos todo, me va a dar el total ¿Cierto, pero si yo lo quiero dividir, quiero dividir esta tabla, como nosotros hacíamos la semana pasada, teníamos rojo, rojo amarillo y azul y decíamos cuántos rojos tenemos y decíamos dos, y en vez de poner dos veces rojo, poníamos rojo y escribíamos la cantidad?”

La futura profesora precisó sus descubrimientos:

“Me considero muy informal en ocasiones para hablar, encuentro que me falta vocabulario para explicarle de mejor manera los conceptos, recito varias veces algunas palabras, y dejo algunas ideas al aire cuando noto que ya está entendiendo, o no lo está haciendo, hago conexión con las clases anteriores. Me di cuenta de que muchas veces le hago una pregunta y antes de terminarla me doy cuenta de que no se va a entender o está mal formulada, entonces antes de terminar cambio la pregunta a otra. También cuando ella no sabe la respuesta trato de inducirla a que responda. También poseo muletillas, las cuales son ‘ya’ y ‘mira’.”

Conclusiones

A partir de la implementación piloto del ciclo formativo, se puede apreciar en primer lugar que los estudiantes el ciclo formativo acogen esta oportunidad en su formación. Aún cuando ya han realizado prácticas profesionales no se han dado cuenta de que su manera de comunicar debe cuidarse y es necesario recibir instrucción al respecto. Por otra parte, el hecho de reflexionar sobre su propia práctica docente podría fortalecer su docencia al considerar el efecto de su manera de explicar cuando sean profesores en un aula (Miller y Baker, 2002).

El hecho que la futura profesora del ejemplo presentado observe la presencia de muletillas y falta de vocabulario en su discurso, le proporciona elementos que antes no había considerado en su proceso de formación y en cierta forma realiza una autoevaluación (De la Fuente et al, 2015). También es claro que la futura profesora es consciente de que su manera de obtener una respuesta de la alumna favorece un tipo de intercambio en el cual hay una inducción a la respuesta (Villalta, 2009) y que no era absolutamente consciente de este hecho hasta escucharse.

Los elementos evidenciados por la estudiante no se ven trabajados en las mallas curriculares analizadas ni están presentes en las informaciones proporcionadas por los jefes y jefas de carreras de pedagogía en matemática (Vargas y Apablaza, 2019). Los estudiantes de pedagogía que participaron tanto del ciclo formativo como de otras experimentaciones en el transcurso del proyecto, admitieron que no poseen herramientas para enfrentar un grupo de estudiantes en el aula de matemática. No sólo en el aspecto de comunicación de la matemática, también en lo social.

Adicionalmente se puede concluir que los futuros profesores otorgan tiempo e importancia a comunicar bien la matemática, lo cual alienta a continuar con este tipo de investigación y ciclos formativos.

Reconocimientos

Proyecto regular de investigación DiCyT USACH. "Caracterización y Desarrollo de Competencias Comunicativas en la Formación de Profesores de Educación Matemática"

Proyecto de cooperación internacional de investigación: Innovación de la enseñanza y desarrollo curricular en la formación inicial docente financiado por DAAD. Deutscher Akademischer Austauschdienst (Servicio Alemán de Intercambio Académico)

Referencias y bibliografía

De la Fuente, J., Asensio, E., Smalec, I. & Blanco, A. (2015). Autoevaluación y desarrollo de habilidades comunicativas en profesores universitarios mediante e-rúbricas y grabaciones. *Revista de docencia universitaria*, 13 (1), Enero-Abril 2015, 257-276, ISSN: 1887-4592

Domingo, J. (2013). Percepción del profesorado sobre la competencia comunicativa en estudiantes de magisterio. *Perfiles Educativos*, XXXV, 142, 54-74.

Fernández, I. & Cuadrado, I., (2010). Competencia comunicativa del profesorado y desarrollo emocional de los adolescentes. *International Journal of Developmental and Educational Psychology. Psicología positiva y ciclo vital. INFAD*, Año XXII, 2 (1).

Giménez, J. & Vargas, C. (2012). Competencia comunicativa matemática y formación docente. En Font, V. & Larios, V. (eds) *Competencia profesionales del profesor de matemática de secundaria*. Universitat de Barcelona, E-Book, Diciembre 2012, 103-114. ISBN 978-84-475-3558-3

Marcelo, C. (2008). *El profesor principiante. Inserción a la docencia*. Biblioteca latinoamericana de Educación. Barcelona : Editorial Octaedro.

Miller, K. & Baker, D. (2001). Mathematics and science as social practices, investigating primary student teacher responses to a critical epistemology. *Ways of knowing journal*, 1 (1), 39-46.

Sanz, N. (2005). *Comunicación efectiva en el aula*. Barcelona: Graó.

Saló, N. (2006) *Estrategias de comunicación en el aula. El diálogo y la comunicación interactiva*. Barcelona: CEAC.

Vargas, C. & Apablaza, C. (2019). Competencias Comunicativas en la Formación Actual de Profesores de Matemática en Chile. *Formación Universitaria*, En prensa.

Vargas, C. (2012). *Evaluación de la competencia comunicativa en la formación de profesores de matemática de secundaria* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona.

Villalonga, P. & González, S. (2001). Propuesta para favorecer la comunicación en el aula de una Facultad de Ciencias. *Números. Revista de Didáctica de la Matemática*, 48, 25-35.

Villalta, M. (2009). Análisis de la conversación: una propuesta para el análisis de la interacción didáctica en la sala de clases. *Estudios pedagógicos*, XXXV (1), 221-238.

Villalta, M. & Martinic, S. (2013). Interacción didáctica y procesos cognitivos. Una aproximación desde la práctica y discurso del docente. *Universitas Psychologica*, 12 (1), 221-233.

Desarrollando el pensamiento estadístico y probabilístico en el aula escolar de matemática con situaciones de incertidumbre

Soledad **Estrella**
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
soledad.estrella@pucv.cl

Resumen

La estadística entendida como la ciencia de aprender desde los datos, es una disciplina que permite tomar decisiones fundadas haciendo inferencias con cierto grado de certeza. En la escuela tradicional, los estudiantes se enfrentan a una enseñanza caracterizada por situaciones determinísticas con respuestas cerradas y énfasis en la certeza, sin embargo, en la vida cotidiana el ser humano debe decidir con tiempo limitado y con información limitada, recurriendo a la intuición antes que a un razonamiento basado en la evidencia de los datos. Este minicurso busca que sus participantes comprendan que la estadística y la probabilidad en el aula escolar de matemática tienen que proveer de situaciones de aprendizaje que promuevan el desarrollo del pensamiento a través de razonar en escenarios de incertidumbre.

Palabras clave: educación estadística, didáctica de la probabilidad, pensamiento probabilístico, incertidumbre, sesgos.

Desarrollar el pensamiento desde la alfabetización

El estudiante del siglo XXI requiere de nuevas alfabetizaciones y competencias, que promuevan el desarrollo del pensamiento crítico, el cual es estimulado desde la estadística y la probabilidad. La alfabetización estadística incluye habilidades básicas que se usan para comprender la información estadística, como organizar datos, construir y presentar tablas, y trabajar con diferentes representaciones de datos; también incluyen la comprensión de conceptos, vocabulario y símbolos, y una comprensión de la probabilidad como una medida de incertidumbre.

El pensamiento estadístico es el proceso de pensamiento que los profesionales estadísticos ponen en juego en su práctica diaria al solucionar problemas reales. Desarrollar este pensamiento se relaciona con un aprendizaje a largo plazo que trasciende la lógica determinista y tiene en cuenta la variabilidad y la incertidumbre. En este sentido, la noción de incerteza es amplia e incluye fenómenos que están fuera del dominio de la estadística, cuyo foco sobre la incertidumbre se debe a la variabilidad aleatoria, haciendo posible hacer inferencias y predicciones. Dentro de esta incertidumbre, a veces es posible medir cuán incierto es un fenómeno, y a ello se le conoce con el término "probabilidad".

Gal (2005) señala que la alfabetización probabilística incluye la comprensión de ideas fundamentales como variabilidad, aleatoriedad e independencia; también involucra el cálculo de probabilidades, el uso de un lenguaje para comunicarse en escenarios de incertidumbre, entendiendo el papel y las implicancias de cuestiones probabilísticas, como los mensajes en diferentes contextos y en el discurso público y personal.

Si bien la probabilidad es matemática, enseñar estadística no es enseñar matemática, y aunque todavía persisten definiciones que caracterizan a la estadística como una rama de las matemáticas, ya se ha establecido la naturaleza distinta de la estadística como disciplina, la cual tiene carácter interdisciplinario puesto que los estadísticos requieren pensar interconectadamente, de forma estadística, matemática y computacional. Varias investigaciones han reportado el fenómeno que invisibiliza esta diferenciación disciplinaria, lo cual se refleja en la difusa diferenciación entre la enseñanza matemática y la enseñanza estadística (del Pino y Estrella, 2012).

El minicurso que se presenta abordará la enseñanza de la probabilidad para el desarrollo del pensamiento estadístico y probabilístico, a través de situaciones de incertidumbre reales (o simuladas) que conecten los conceptos. Para ello es esencial reconocer y diferenciar aspectos teóricos y experimentales de la probabilidad.

Conectando la probabilidad teórica y la probabilidad experimental

Aportes importantes. Bernoulli distinguió entre las probabilidades que pueden calcularse a priori (deductivamente, a partir de consideraciones de simetría) y aquellas que solo pueden calcularse a posteriori (inductivamente, a partir de frecuencias relativas). Él sostuvo que la probabilidad de una gran diferencia entre la probabilidad empírica y la probabilidad teórica tiende a cero a medida que aumenta el número de ensayos. La idea que la frecuencia relativa a largo plazo de un evento debe ser muy cercana a la probabilidad del evento es un corolario importante de este teorema. Esta ley experimental, conocida como ley de estabilidad de las frecuencias, tiene un respaldo matemático claro en un grupo de teoremas rigurosos que en conjunto configuran lo que llamamos Ley de los grandes números, y que inicia uno de los enfoques de la probabilidad (Batanero, Henry, & Parzysz, 2005) más usados en su enseñanza.

A continuación se entregan algunos de los enfoques útiles en esta enseñanza.

Enfoque intuitivo de la probabilidad. Las primeras ideas intuitivas y los juegos de azar son comunes en todas las civilizaciones primitivas. Ideas que aparecen tanto en niños como en personas que no han estudiado probabilidades, y usan frases y expresiones coloquiales para cuantificar los sucesos inciertos y expresar su grado de creencia en ellos. En esta aproximación intuitiva, se asignan cualitativamente probabilidades a los sucesos en base a las preferencias individuales, empleando diversas expresiones lingüísticas para referirse a estas comparaciones: "más probable", "muy probable". En algunos casos se ordenan por su mayor verosimilitud y se cuantifican sólo en casos sencillos, sin formalismo matemático.

Enfoque clásico de la probabilidad. Aunque a partir del siglo XVII varios matemáticos resuelven algunos problemas relacionados con los juegos de azar, el concepto de probabilidad no se llega a formalizar hasta comienzos del siglo XVIII. Es así que, la preocupación por las ganancias esperadas en estos juegos, lleva a definir la esperanza matemática antes que la probabilidad.

La correspondencia entre Pascal y Fermat, se considera como el punto de partida de la teoría de la probabilidad; aunque ellos usan la probabilidad en forma implícita, sin llegar a definirla. Laplace propone una forma de cálculo que implica reducir los acontecimientos aleatorios a un cierto número de casos igualmente posibles. Por tanto se encuentran pocos casos donde pueda aplicarse este significado, más allá de los juegos de azar.

Enfoque frecuencial de la probabilidad. Estudios teóricos sobre la predicción cuantitativa de eventos futuros desde la regularidad observada en ensayos repetidos de un fenómeno aleatorio solo aparece 3 siglos después que Bernoulli justificase una estimación frecuentista de la probabilidad y diera una primera demostración de un teorema de probabilidad, (la ley de los grandes números). La probabilidad se define como el valor hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa de un suceso al estabilizarse, asumiendo la repetibilidad del ensayo. Sin embargo, hasta 1928 no se dio una definición formal de la probabilidad desde el punto de vista frecuencial (von Mises, 1952/1928).

Algunos problemas filosóficos del enfoque frecuencial que se discuten aún, son la ausencia de un valor exacto para la probabilidad, y siempre tener aproximaciones de la misma; no saber con certeza el número idóneo de experimentos para aceptar tal estimación; y la consideración que a veces es imposible contar con idénticas condiciones en la experimentación. Pese a ello, este enfoque frecuencial, didácticamente tiene la ventaja de conectar estadística y probabilidad.

Enfoque subjetivo de la probabilidad. La demostración por Bayes de su teorema indicó que la probabilidad (a priori) de un suceso puede revisarse a partir de nuevos datos para transformarse en una probabilidad a posteriori. Esta idea fue retomada más tarde por Ramsey (1931) y de Finetti (1974/1937), quienes definen las probabilidades como grados de creencia personal basados en el conocimiento y experiencia personal. La probabilidad pierde su carácter objetivo, pues está condicionada por un cierto sistema de conocimientos, y no es necesaria la repetición en idénticas condiciones, ampliándose el campo de aplicación de las probabilidades.

La controversia sobre el estatuto científico de esta visión de la probabilidad surge ante la dificultad de hallar una regla para asignar valores numéricos que expresen los grados de creencia personal. Didácticamente el interés de esta visión es que formaliza la idea intuitiva de aprender de la experiencia.

Aunque en la alfabetización probabilística escolar no se aborda el enfoque axiomático, el profesor debe tener una comprensión profunda de aquel para comprender los fenómenos propios de la enseñanza de la probabilidad.

Enfoque axiomático de la probabilidad. A lo largo del siglo XX, diferentes autores contribuyeron al desarrollo de una teoría matemática formalizada sobre la probabilidad. Borel contempló la probabilidad como un tipo especial de medida, mientras que Kolmogorov usó esta idea, aplicando la teoría de conjuntos y de la medida, para deducir una axiomática. Lo interesante de la axiomática de Kolmogorov es que fue aceptada por todas las escuelas, independientemente del significado filosófico otorgado a la naturaleza de la probabilidad.

Características del rol crítico desempeñado por los profesores.

Considerando que una vez que los niños entran a la escuela, ningún factor es tan importante como la calidad de los profesores (Bruns y Luque, 2014), este apartado lista diversos hallazgos de investigación que han determinado acciones para una enseñanza efectiva de la estadística y probabilidad en las aulas escolares de matemática. Algunas de tales acciones serán vivenciadas y discutidas en este minicurso:

- Ofrecer más experiencia empírica de variabilidad y aleatoriedad (Biehler, Ben-Zvi, Bakker, & Makar, 2013; Kazak & Pratt, 2017)

- Seleccionar herramientas digitales y otros tipos de representaciones externas (Pratt, 2000; Pratt & Kazak, 2018; Zahner & Corter, 2010; Lee & Lee, 2009; Biehler et al., 2013; Estrella, Olfos, Morales, & Vidal-Szabó, 2017; Estrella, Olfos, Vidal-Szabó, Morales, & Estrella, 2018)
- Dar oportunidades para predecir los resultados de una situación de probabilidad con resultados equiprobables sin realizar un experimento real (Kafoussi, 2004)
- Reconocer la complejidad de las diferentes epistemologías de probabilidad y ayudar a los estudiantes a superar las aparentes discrepancias mediante la simulación o herramientas especialmente diseñadas (Alvarado, Estrella, Retamal & Galindo, 2018; Liu & Thompson, 2007; Prediger, 2008)
- Reconocer la importancia del diseño de tareas con propósito y la relevancia de mantener las demandas cognitivas de la tarea, para llevar a los estudiantes a tomar sentido del poder de conceptos estadísticos y probabilísticos (Ainley, Pratt, & Hansen, 2006; Estrella, Zakaryan, Olfos & Espinoza, 2019)
- Ofrecer oportunidades para que los estudiantes argumenten sus ideas con sus pares, las negocien y usen tecnología (Ruthven y Hofmann, 2013; Ben-Zvi, Aridor, Makar & Bakker, 2012; Kazak et al., 2015).

Este desempeño docente implica que los profesores adquieran conocimientos y competencias que les ayuden en su actuar profesional. Así en el contenido de probabilidad en un contexto propio de la estadística, se espera que a largo plazo los profesores: (i) conecten ideas entre probabilidad, muestreo aleatorio e inferencia sobre una población; (ii) investiguen los procesos aleatorios y comprendan la probabilidad como una medida de la frecuencia relativa a largo plazo de un resultado, entendiendo las reglas básicas de probabilidad y sus enfoques a través de la experimentación y la simulación; (iii) comparen dos distribuciones de datos y hagan inferencias informales sobre las diferencias entre dos poblaciones; (iv) comprendan el rol de la aleatorización en el diseño de estudios y como base para la inferencia estadística; (v) comprendan las reglas de probabilidad, la probabilidad condicional y el uso de ellas en la toma de decisiones prácticas; y (vi) modelen relaciones entre variables, entre otras.

Lograr este desempeño es esencial para llegar a desarrollar el pensamiento estadístico y el probabilístico desde la alfabetización escolar de los estudiantes, pues muchas de estas ideas y procedimientos son complejas, difíciles y contraintuitivas.

Referencias y bibliografía

Ainley, J., Pratt, D., & Hansen, A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal, 32*(1), 23–38.

Alvarado, H., Estrella, S., Retamal, L., & Galindo, M. (2018). Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(2), 131-156.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005) The nature of chance and probability . *En Graham A. Jones (Ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning,* 16-42. *Kluwer Academic Publishers.*

Ben-Zvi, D., Aridor, K., Makar, K., & Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM, 44*(7), 913-925.

Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A., & Makar, K. (2013). Technologies for enhancing statistical reasoning at the school level. In M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt, & J. Kilpatrick (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 643–688). New York: Springer Science+Business Media.

Bruns, B. & Luque, J. (2014). *Profesores excelentes: cómo mejorar el aprendizaje en América Latina y el Caribe*. Perú: Banco Mundial, Galese SAC.

del Pino, G., & Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 49*(1), 53-64.

Estrella, S., Zakaryan, D., Olfos, R., & Espinoza, G. (2019). How teachers learn to maintain the cognitive demand of tasks through Lesson Study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*, 1-18.

Estrella, S., Olfos, R., Vidal-Szabó, P., Morales, S., & Estrella, P. (2018). Competencia meta-representacional en los primeros grados: representaciones externas de datos y sus componentes. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 36*(2), 143-163.

Estrella, S. (2018). Data representations in Early Statistics: data sense, meta-representational competence and transnumeration. In A. Leavy, A., M. Meletiou, & E. Paparistodemou (Eds.). *Statistics in Early Childhood and Primary Education – Supporting early statistical and probabilistic thinking*, (pp. 239-256). ISBN 978-981-13-1044-7. Singapur: Springer.

Estrella, S., Olfos, R., Morales, S., & Vidal-Szabó, P. (2017). Argumentaciones de estudiantes de primaria sobre representaciones externas de datos: componentes lógicas, numéricas y geométricas. *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 20*(3), 345-370. DOI 10.12802/relime.17.2034.

Kafoussi, S. (2004). Can kindergarten children be successfully involved in probabilistic tasks? *Statistics Education Research Journal, 3*(1), 29–39.

Kazak, S., & Pratt, D. (2017). Pre-service mathematics teachers' use of probability models in making informal inferences about a chance game. *Statistics Education Research Journal, 16*(2).

Pratt, D., & Kazak, S. (2018). *Research on uncertainty. In International handbook of research in statistics education* (pp. 193-227). Springer, Cham.

Franklin, C., A. Bargagliotti, C. Case, G. Kader, R. Scheaffer, & D. Spangler. 2015. The Statistics Education of Teachers. American Statistical Association.

Gal, I. (2005). Towards ‘probability literacy’ for all citizens. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Nueva York: Springer.

Gómez, E., Batanero, C., & Contreras, J. (2014). Conocimiento Matemático de Futuros Profesores para la Enseñanza de la Probabilidad desde el Enfoque Frecuencial. *Boletim de Educação Matemática, 28*(48), 209-229.

Lee, H. S., & Lee, J. T. (2009). Reasoning about probabilistic phenomena: Lessons learned and applied in software design. *Technology Innovations in Statistics Education, 3*(2). http://escholarship.org/uc/item/1b54h9s9.

Liu, Y., & Thompson, P. W. (2007). Teachers’ understandings of probability. *Cognition and Instruction, 25*(2), 113–160.

Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 602–625.

Pratt, D., & Kazak, S. (2018). *Research on uncertainty. In International handbook of research in statistics education* (pp. 193-227). Springer, Cham.

Prediger, S. (2008). Do you want me to do it with probability or with my normal thinking?— Horizontal and vertical views on the formation of stochastic conceptions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *3*(3), 126–154.

Ruthven, K., & Hofmann, R. (2013). Chance by design: Devising an introductory probability module for implementation at scale in English early-secondary education. *ZDM Mathematics Education*, *45*(3), 409–423.

Wild, C., Utts, J., & Horton, N. (2018). What Is Statistics? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 5–36).

Zahner, D., & Corter, J. E. (2010). The process of probability problem solving: use of external visual representations. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(2), 177–204.

Experiencias para la formación de profesores de matemáticas en atención a la diversidad

Sandra Evely **Parada** Rico
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander, Colombia.
Colombia
sanevepa@ uis.edu.co

Resumen

En Educación Matemática se ha avanzado en el estudio de fenómenos que asocian la atención a la diversidad y la formación de profesores. Al respecto, León (1999), López (2013), Aké (2015) y Pineda (2018) han mostrado diferentes acercamientos, tanto desde la exploración cognitiva, como de las experiencias de formación de profesores. Aquí se compartirán las experiencias de formación e investigación desarrolladas en la Universidad Industrial de Santander (UIS). Experiencias que se han llevado a cabo desde las reflexiones teóricas hasta la inmersión curricular en las asignaturas del plan de estudios de los Licenciados en Matemáticas. Dichas experiencias han mostrado evidencias de la necesidad de establecer un diálogo permanente entre la comunidad educativa (escuela, universidad y familia) para repensar el currículo de los profesionales (profesores de matemáticos) con el fin de que se logren atender las necesidades reales del aula y que de esta manera las matemáticas escolares sean asequibles para todos, reconociendo las diferencias.

Palabras clave: formación inicial, profesores de matemáticas, atención a la diversidad.

Introducción

En el marco del XV CIAEM, en la modalidad de minicurso, inicialmente discutiré, a la luz de los marcos legales, teóricos y experienciales, sobre la necesidad de reflexionar con los profesores de matemáticas en formación, sobre la atención a la diversidad y sobre la búsqueda de oportunidades para acercar las matemáticas a todos los estudiantes independientemente de sus características particulares. Posteriormente, expondré algunas experiencias (prácticas y de investigación) que se han venido desarrollando en la Universidad Industrial de Santander, en Colombia. Para ello, posibilitaré espacio para el análisis de algunos productos emergentes del trabajo realizado, los cuales pueden servir como ejemplo o apoyo para otras comunidades o contextos educativos.

Formación de profesores de matemáticas y atención a la diversidad

La necesidad de formar a los profesores alrededor de la atención a la diversidad es un tema que ha sido ampliamente discutido por diferentes organizaciones mundiales y por los sistemas políticos de cada país. Ante ello, la Educación Matemática en las últimas décadas ha asumido con mayor fuerza el reto de reconocer las diversidades y las maneras de atenderla para acercar a los estudiantes al conocimiento matemático. Al respecto, autores como León (1999), López (2013) y Aké (2015) exponen que hay poca investigación en Educación Matemática asociada a las Necesidades Educativas Especiales (NEE) y mucho menos desde la línea de formación de profesores

A continuación, presento algunas experiencias orientadas por uno de los equipos del grupo de Investigación en Educación Matemática de la UIS (Edumat-UIS), con el fin de recibir realimentación que permita enriquecer el trabajo que hemos venido realizando. Además, aportar ideas para quienes no han empezado a transcurrir este proceso de estudio y formación.

¿Por qué los profesores de matemáticas necesitan reflexionar sobre la atención a la diversidad?

En muchos espacios sociales y políticos, se reitera la necesidad de ofrecer acceso a la educación a todas las personas sin establecer diferencias. No obstante, este discurso que está muy bien reglamentado en varios documentos de organismos nacionales e internacionales, poco o nada cala cuando se establecen acciones para la formación de los profesionales de la educación.

En documentos presentados por organismos internacionales, como la ONU y la UNESCO, se menciona que la educación para todos implica que las personas asistan a instituciones educativas donde puedan gozar de los recursos necesarios, sin que se les discrimine o se les limite su participación. A nivel nacional, en la Constitución Política de Colombia (Asamblea Nacional Constituyente, 1991) se enfatiza en el derecho que tienen todas las personas a la educación. Derecho que se refuerza en la Ley General de Educación (Congreso de la República, 1994) y en otros decretos en los que establecen disposiciones para ofrecer apoyo pedagógico en el marco de una educación inclusiva. Pero, ¿qué de esto se vivencia en la cotidianidad de nuestras escuelas?

Claramente, la legislación nos muestra que la educación para todos es un principio moral y legal que nadie puede evadir. Sin embargo, el panorama que se vive en las instituciones educativas del país y tal vez, de otros países latinoamericanos, es otra cosa. Es posible que todas esas intenciones no se hayan logrado solo por falta de voluntad, sino tal vez por escasez de apoyo de la comunidad académica, quien no se ha interesado lo suficiente en la fenomenología que rodea la atención a la diversidad y la educación matemática.

Desde la Matemática educativa, uno de los acercamientos a la fenomenología antes descrita se ha abordado desde la línea de formación de profesores. En este sentido, autores como López- Mojica y Cruz (2015) y Aké (2015) mencionan que en la atención a la diversidad en clases de matemáticas existen dos tipos de profesores: los profesores de matemáticas y los profesores de educación especial. Los primeros no están familiarizados con las Necesidades Educativas Especiales (NEE), y los segundos, a pesar de estar formados en psicología y pedagogía, no han recibido formación en contenidos didácticos específicamente relacionados con las matemáticas. En este sentido, Bruno y Noda (2010) enfatizan en que hace falta estudios que articulen la formación para trabajar en matemáticas y la atención a los estudiantes con NEE.

A lo expuesto anteriormente, Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) exponen que los estudiantes con NEE deben comprender con los mismos principios de enseñanza que el resto del alumnado. Comprensión que implica: conectar u organizar los conocimientos, construir el aprendizaje sobre lo que ya se conoce y la instrucción formal de la escuela debe construir a partir del conocimiento matemático informal. Vale la pena mencionar aquí, que cuando hablamos de estudiantes con NEE estamos incluyendo las personas con capacidades o talentos excepcionales, porque ellos también requieren atención en el aula y para ellos también deben ser formados los profesores.

Un aspecto que merece la reflexión por parte de los profesores y educadores matemáticos es la falsa creencia que se tiene en cuanto a que las personas con características diferenciadas no pueden aprender matemáticas o que ellos aprenden con ciertas falencias. Lo anterior desestima los resultados de investigación que muestran que hay objetos matemáticos complejos que también constituyen un reto tanto para profesores como para estudiantes sin dificultades identificadas. La anterior reflexión nos muestra la necesidad de fortalecer el campo de las investigaciones, especialmente relacionadas con la formación de los profesores que enseñan matemáticas.

Los argumentos antes expuestos motivaron al grupo de investigación de Educación Matemática y Atención a la Diversidad (de Edumat-UIS) no sólo a continuar desarrollando estudios enfocados en alguna NEE sino a problematizar sobre el propio plan de estudios del programa de pregrado de Licenciatura en Matemáticas. Plan de estudios que tiene explícitamente establecidas competencias relacionadas con la formación alrededor de la atención a la diversidad en el aula de matemáticas, algunas de ellas son:

- Como profesional de la educación, el egresado está en capacidad de crear ambientes que favorecen los procesos de enseñanza y aprendizaje que atiendan las diferencias individuales y los procesos de desarrollo cognitivo, afectivo y social de los estudiantes.
- Como profesional de la educación, el egresado implementa acciones educativas que responden a la diversidad sociocultural y posibilitan la inclusión social de personas con necesidades educativas especiales y poblaciones en situación de vulnerabilidad.

Por otro lado, decidimos contrastar esas competencias planteadas en el plan de estudios con las exigencias del Ministerio de Educación Nacional (MEN), encontrando que éste ha establecido directrices como:

- “Las escuelas normales superiores, las instituciones de educación superior que poseen facultad de educación y los comités territoriales de capacitación docente, deberán garantizar el desarrollo de programas de formación sobre educación inc1usiva para los docentes que atienden estudiantes con discapacidad o con capacidades o con talentos excepcionales.” (MEN, 2009, art. 16).
- “Las instituciones de educación superior deberán promover la sensibilización y capacitación de los licenciados y maestros en todas las disciplinas y la inclusión del tema de discapacidad en todos los currículos desde un enfoque intersectorial.” (Congreso de Colombia, 2013

Los enunciados anteriores posteriormente nos llevaron a indagar cómo se estaba trabajando en otras universidades del país para la consecución de dichas competencias. La búsqueda nos mostró que sólo cinco universidades del país ofrecen la licenciatura en Educación Especial. Cuando revisamos sus planes de estudio, encontramos que en tres de ellas se incluyen asignaturas relacionadas con matemáticas, por ejemplo: Educación y dificultades en el aprendizaje de la matemática; Desarrollo del pensamiento proposicional; y Fundamentos de Matemáticas.

Posteriormente revisamos los planes de estudio de algunas licenciaturas del país con el propósito de identificar si alguna asignatura incorporaba el estudio sobre la atención a la diversidad en el aula. De este estudio, Pineda (2018) reporta que al revisar el plan de estudios de 159 licenciaturas de 25 universidades del país se encontró que el 64% de ellas (102 licenciaturas) no incluyen en su plan de estudio alguna asignatura relacionada con atención a la diversidad.

Una vez visto este panorama nacional, nos devolvimos a analizar los programas de las asignaturas del plan de estudios para ver las formas mediante las cuales se estaban logrando dichas competencias. Revisión que nos mostró que ninguna asignatura del plan tenía establecido algún acercamiento teórico o práctico que pudiera aportar en esa línea en la formación inicial de los profesores. Resultado que generó una oportunidad para intervenir curricularmente y aprovechar la reforma solicitada por el MEN en el año 2017 a todos los programas de licenciatura del país.

Dicha oportunidad nos condujo a plantear la necesidad de buscar estrategias para que en los cursos de la línea de didáctica se realizara algún acercamiento al problema. La indagación y experimentación posibilitó el diseño de un curso alusivo a la atención a la diversidad en el aula de matemáticas, además de la articulación organizada de las actividades del grupo de investigación con la formación ofrecida en el plan de estudios de la licenciatura.

¿Qué experiencias contribuyen en la formación de profesores de matemáticas sobre la atención a la diversidad?

El grupo de Investigación en Educación Matemática Edumat-UIS tiene más de 20 años de creación, y es en el 2004 cuando surge entre sus integrantes la intención de investigar sobre la atención a la diversidad en clase de matemáticas. Así, las primeras investigaciones reportadas por el grupo fueron algunas tesis de licenciatura en las que se lograron acercamientos curriculares en contextos vulnerables. Entre los trabajos realizados podemos rescatar el de Cárdenas (2007), quien trabajó en la creación del Currículo del área de Matemáticas para la Educación Secundaria y Media Vocacional del Instituto San Juan Bosco del Establecimiento Penitenciario y Carcelario de Bucaramanga. También, es importante mencionar el estudio realizado por Bautista y Mantilla (2007), quienes presentaron una alternativa de adaptación curricular grupal en Matemáticas para educandos con Necesidades Educativas Especiales, el cual fue desarrollado para el Instituto de Capacitación Laboral en Santander, quien recibe a personas en situación de discapacidad cognitiva, psíquica y física. En el grupo se desarrolló también un proyecto de extensión en el que participaron educandos con síndrome de Down de diferentes instituciones de Bucaramanga y su área metropolitana, con quienes se trabajaron procesos multiplicativos.

Las experiencias de investigación antes descritas nos animaron a retomar las actividades del grupo, pero esta vez para conseguir una intervención en la formación inicial de los profesores, con el fin de atender las necesidades expuestas en el apartado anterior. La intervención se inició con un grupo de profesores en formación que participaban de un curso denominado Seminario de Práctica, el cual tiene como objetivo: posibilitar un acercamiento al campo de la investigación en educación matemática, no sólo como usuarios del conocimiento sino haciendo una primera inmersión en la metodología de investigación.

El objetivo del “curso experimental” nos permitió estudiar los elementos fundamentales de la metodología de investigación en Educación Matemática, pero esta vez desde el fenómeno de inclusión como objeto de estudio. El curso generalmente se ha desarrollado con una metodología teórico-práctica en la cual en la medida en que se van estudiando los aspectos teóricos del proceso investigativo los estudiantes van diseñando y desarrollando una investigación. Para el proyecto cada estudiante elegía la problemática que deseaba, según sus intereses. Así, el ajuste principal del curso fue que el estudio se realizaría sobre la atención a la diversidad en clase de matemáticas. Por ello el curso se dividió en tres grandes partes: i) acercamiento teórico a la investigación en Educación Matemática; ii) Estudio y reflexión alrededor de la atención a la diversidad (aspectos legales, características físicas, cognitivas, sociales, comportamentales, etc.) y el rol del profesor de matemáticas como facilitador del aprendizaje; y iii) estudio teórico-práctico de metodología cualitativa (diseño y desarrollo de un proyecto en el que se problematiza sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en personas con características diferenciadas.

El análisis de los resultados logrados de la intervención en este curso se usó para el diseño curricular de un curso de Educación Matemática y Atención a la Diversidad que se planteó para la reforma del programa de Licenciatura en Matemáticas. Curso que actualmente hace parte del nuevo plan de estudios del programa y tiene como propósitos:

- Conocer los aspectos descriptivos, etiológicos y de intervención de los diferentes trastornos del desarrollo y necesidades educativas especiales en el ámbito escolar.
- Adquirir conocimientos básicos relacionados con la diversidad conceptual en el campo de la educación especial.
- Reflexionar sobre la actitud del maestro de matemáticas frente a los educandos con característica diferenciadas de aprendizaje.
- Conocer el proceso de maduración del pensamiento lógico-matemático y los conceptos y destrezas básicas que se proponen en el currículo de la educación especial.
- Fomentar la capacidad crítica e investigadora, base de la formación permanente del equipo docente posibilitador de la atención a la diversidad, específicamente en la clase de matemáticas.
- Contribuir a la reflexión y al análisis de las implicaciones educativas y pedagógicas que tiene la atención especializada de niños y jóvenes con características diferenciadas de aprendizaje en los diferentes niveles del sistema educativo colombiano.

Cada profesor en formación que ha vivido la experiencia de desarrollar este curso (en este momento se ha realizado en seis cohortes consecutivas) tiene una historia enriquecedora para contar. De los casos, Pineda (2018) en su tesis de Maestría en Educación Matemática reporta el caso de una de los profesores en formación (Gabriela), quien desarrolló el curso y a quien posteriormente se le dio seguimiento en los cursos de Práctica Docente I y II. Para analizar los resultados se usó el Modelo "Reflexión-y-Acción" de Parada (2011), dichos aprendizajes se categorizaron en cada uno de los componentes del pensamiento reflexivo del profesor: pensamiento matemático, didáctico y orquestal.

El desarrollo de esta intervención hasta el momento ha permitido el desarrollo de más de 30 diseños de clase de matemáticas dirigidos a estudiantes con alguna NEE. Varios de ellos los reporta Pineda (2018) y entre ellos quiero citar aquí algunos, a modo de ejemplo:

- **Los números enteros y sus operaciones en estudiantes con dificultades de aprendizaje en matemáticas**. El objetivo del proyecto fue: identificar y describir qué acercamientos metodológicos favorecen el aprendizaje de los números enteros y las operaciones de adición y sustracción en una estudiante con dificultades en el aprendizaje. Partiendo de investigaciones que mencionan que la noción de número se puede trabajar desde tres dimensiones: la abstracta, la recta, y la contextual. El proyecto concluyó que la dimensión de recta favoreció el aprendizaje de las relaciones de orden entre un par de números enteros y las operaciones de adición y sustracción de números enteros.
- **Concepción de número de una persona con Necesidades Educativas Especial.** La profesora en formación decidió enseñar los números a una joven con discapacidad cognitiva leve de 27 años de edad. La joven no reconocía el sistema monetario colombiano, lo que era importante para ella, dado que laboraba empacando y vendiendo papas. La profesora, consiguió a través de su intervención, mediada por material real y problemas de su contexto, que la joven adquiriera nociones de número y estableciera relaciones de orden.
- **Construcción del concepto de número por medio de actividades que involucran el sistema monetario en estudiantes con Síndrome de Down**. En este proyecto el profesor en formación decidió trabajar con dos personas con Síndrome de Down, uno de ellos cursaba segundo grado y tenía 9 años, y el segundo un joven desescolarizado con 22 años. Entre ellos el niño de 9 años mostraba más habilidades numéricas que el joven de 22 años. El estudio, le permitió al profesor en formación, valorar la importancia de conocer a cada estudiante para poder diseñar alternativas ajustadas a sus necesidades.
- **Compresiones del número en un niño con Trastorno de Espectro Autista (TEA).** En este proyecto se trabajó con un niño desescolarizado con 7 años y con diagnóstico de Trastorno del Espectro Autista (TEA). El objetivo planteado era analizar cómo influye el contexto en el aprendizaje de la suma para niños con autismo, y así plantear una estrategia en la enseñanza estos en la suma. Uno de los resultados más importantes del trabajo realizado fue que el uso de representaciones pictóricas captaba el interés del niño. Además, que era necesario plantear actividades cortas, en algunos casos apoyadas de tecnologías digitales. El trabajo realizado motivó a la madre del estudiantes a escolarizarlo, pues descubrió que si podía aprender.

Tal como lo reporta Pineda (2018), la puesta en marcha del curso mostró que el diseño curricular antes descrito favorece el alcance de los propósitos planteados. Se encontraron evidencias de que las actividades realizadas permitieron que los profesores en formación reconocieran las diferentes posibilidades de alumnados. Las actividades de: i) lectura y discusión de documentos sobre: atención a la diversidad, orientaciones pedagógicas expedidas por el MEN, tesis de educación matemática; ii) las exposiciones sobre algunas NEE; y iii) los proyectos realizados por los profesores en formación; dejaron ver que el estudio teórico-práctico de las diferentes Necesidades Educativas lograron sensibilizar a los estudiantes y les exigió problematizar alrededor de dicho fenómeno de estudio.

Uno de los resultados más importantes del trabajo es que el grupo de investigación en Educación Matemática y Atención a la Diversidad se ha ido conformando y consolidando con los estudiantes que han realizado el curso, quienes al culminarlo siguen reflexionando y mejorando los diseños didácticos. Así, el grupo ha seguido compartiendo la experiencia en diferentes escenarios. El principal de ellos, es el Seminario de Práctica en el cuál se exponen los trabajos realizados y se motiva a sus compañeros a interesarse en este campo de estudio.

Uno de los trabajos del grupo actualmente es construir materiales para la docencia, en los que se recopilan algunos de los diseños hasta ahora realizados. También, se sigue apoyando el

Seminario de Práctica y los demás cursos de la línea de didáctica, para que se reflexione al interior de ellos sobre la atención a la diversidad en clase de Matemáticas. Lo anterior, mientras se pone en marcha el curso diseñado (segundo semestre de 2020), pues el plan de estudios reformado se encuentra hasta ahora en el tercer de los nueve semestres de su malla curricular.

Algunas reflexiones

Los futuros profesores de matemáticas se sensibilizaron ante la responsabilidad de formarse para atender personas con NEE. Así mismo, valoraron la necesidad de conocer a sus estudiantes, para planear las actividades ajustadas a sus particularidades Ellos también comprendieron que es muy relevante seleccionar los recursos apropiados para posibilitar actividad matemática en sus estudiantes, independientemente de sus características.

Concretamente, las experiencias desarrolladas hasta el momento en la UIS para formar a los profesores de matemáticas en atención a la diversidad son: 1) Desarrollo de Investigaciones de corte curricular; 2) Proyectos de extensión a la comunidad; 3) Inmersión en el plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas (mediante la creación del curso de "Educación Matemática y Atención a la Diversidad" y las orientaciones a los cursos de didáctica); 4) desarrollo de diseños de clase, especialmente inclinados a las adaptaciones curriculares; 5) Seminario de investigación de Educación Matemática y Atención a la Diversidad, como subgrupo de Edumat-UIS.

Referencias bibliográficas

Aké, L. (2015). Matemáticas y educación especial: realidades y desafíos en la formación de profesores. En López-Mojica, J. y Cuevas, J. (Coords), *Educación especial y matemática educativa*. pp. 15-32, México: Centro de Estudios Jurídicos y Sociales Mispat; Universidad Autónoma de San Luis de Potosi.

Asamblea Nacional Constituyente (6 de Julio de 1991) Constitución política colombiana.

Bautista, L. & Mantilla, L. (2007). *Una Alternativa De Adaptación Curricular Grupal En Matemáticas Para Educandos Con Necesidades Educativas Especiales*. Trabajo de grado para optar el título de licenciado en Matemática de la Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas. Bucaramanga, Colombia,

Bruno, A. y Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con síndrome de Down. En Moreno, M., Estrada, A., Carrillo, J. y Sierra, T. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XIV. pp. 141-162. Lleida: SEIEM.

Cárdenas, A. (2007). *Currículo Del Área De Matemáticas Para La Educación Secundaria Y Media Vocacional Del Instituto San Juan Bosco Del Establecimiento Penitenciario Y Carcelario De Bucaramanga*. Trabajo de grado para optar el título de licenciado en Matemática de la Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas. Bucaramanga, Colombia.

Congreso de Colombia. (8 de febrero de 1994) Ley General de Educación. [Ley 115 de 1994]. DO: 41.214. Congreso de Colombia. (27 de febrero de 2009). Se aprueba la "Convención sobre los derechos de las personas con discapacidad". [Ley 1346 de 2009]. DO: 47.427.

Congreso de Colombia. (27 de febrero de 2013). Se establecen las disposiciones para garantizar el pleno ejercicio de los derechos de las personas con discapacidad. [Ley Estatuaria 1618 de 2013]. DO: 48.717. Departamento de Educación y Ciencia. (27 de diciembre 2000). Boletín Oficial de Aragón. Atención al alumnado con necesidades educativas especiales. [Decreto 217 de 2000].

León, M. (1999). La formación del profesorado para una escuela para todos. Un análisis de los planes de estudio del maestro especialista en educación primaria y en educación especial en las universidades españolas. *Revista de curriculum y formación del profesorado* 3(2), 1-24.

López, J. (2013). *Pensamiento probabilístico y esquemas compensatorios en la educación especial.* Tesis de Doctorado en Matemática Educativa. Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico nacional, Distrito Federal.

López-Mojica, J. y Cruz, K. (2015). Formación docente en educación especial: aspectos de su conocimiento matemático en fracciones. En J. López-Mojica y J. Cuevas (Coords.). Educación especial y matemática educativa. pp. 33-51. México: Centro de Estudios Jurídicos y Sociales Mispat; Universidad Autónoma de San Luis de Potosi.

Parada, S. (2011). Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional. Tesis de Doctorado en Matemática Educativa. Centro de investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico nacional, México.

Pineda, S. J. (2018). Formación inicial de profesores de matemáticas alrededor de la atención a la diversidad. Trabajo de grado para optar el título de Magister en educación Matemática. Escuela de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander Bucaramanga, Colombia.

Kilpatrick, J. Swafford, J. y Findell, B. (2001). Adding it up. Helping children learn mathematics. National Academic Press. Washington, DC.

MEN. (9 de febrero 2009) Por medio del cual se reglamenta la organización del servicio de apoyo pedagógico para la atención de los estudiantes con discapacidad y con capacidades o con talentos excepcionales en el marco de la educación inclusiva. [Decreto 366 de 2009]. DO: 47.258.

MEN. (15 de septiembre de 2017) Por la cual se ajustan las características específicas de calidad de los programas de Licenciatura para la obtención, renovación o modificación del registro calificado, y se deroga la Resolución 2041 de 2016 [Resolución 18583 de 2017].

Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática

Leonor **Camargo** Uribe
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
lcamargo@pedagogica.edu.co

Resumen

El minicurso está dirigido a estudiantes en procesos de elaboración de tesis, investigadores nóveles en el campo de la Educación Matemática o profesores que orientan espacios académicos de investigación. Comienza con una propuesta para distinguir entre metodología y estrategia investigativa. A partir de ese planteamiento, se presentan algunas estrategias investigativas que se emplean actualmente en Educación Matemática, que se valen de procedimientos cualitativos para captura y análisis de información. Las estrategias se clasifican en naturalistas, clínicas y de diseño. Sobre cada una de ellas se expone en qué consiste, en qué casos se usa, cuáles son los productos esperados, quiénes son los participantes y sus roles, en qué escenarios se desarrolla, que llevan los investigadores al escenario, qué etapas se suelen cubrir y qué variantes de la estrategia existen. Se ofrecen ejemplos tomados de estudios realizados por investigadores colombianos.

Palabras clave: estrategias investigativas, aproximación investigativa, estudios naturalistas, estudios clínicos, estudios de diseño.

Metodología y estrategia investigativa

Se da inicio al minicurso estableciendo la diferencia entre metodología de investigación y estrategia investigativa. Se denominará **metodología de investigación** al conjunto conformado por una o varias estrategias investigativas, un conjunto de recursos y una fundamentación teórica específica que genera la base racional para orientar la investigación de principio a fin. En una metodología, la fundamentación teórica y las estrategias se articulan en una relación estrecha de construcción y reformulación mutua, en la que los principios y conceptos asumidos en la fundamentación teórica definen el espectro de lo que es posible y deseable conocer y cómo puede ser conocido (Moschkovich y Brenner, 2000; Radford y Sabena, 2015). La metodología tiene estrecha relación con el problema a investigar, las preguntas que se hacen, el marco conceptual de referencia, el modelo investigativo, las estrategias y los recursos que se ponen en juego para obtener información y analizarla. Se denominará **estrategia investigativa** al mecanismo que pone en funcionamiento un diseño investigativo en el mundo empírico, permitiendo a los investigadores conectar sus presupuestos teóricos con formas específicas de obtener información para analizarla (Denzin y Lincoln, 1998). Es el conjunto de prácticas, recursos e instrumentos, organizados de manera más o menos planificada, que se emplea en una investigación para hacer y reportar una indagación disciplinada sobre un asunto de interés. El término "indagación" se refiere a una búsqueda asociada a interrogantes que se quieren responder. Y el calificativo "disciplinada" pretende señalar que el proceso es sistemático, susceptible de ser auditable y los resultados pueden ser públicamente examinados y sometidos a crítica por otros miembros de la comunidad donde se inscribe la investigación.

En Educación Matemática son notorias las estrategias que se valen de procedimientos cualitativos, quizás por el giro en el campo que se dio a finales del siglo XX, que enfatiza en la naturaleza social y cultural de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje. Esta visión sitúa la indagación en complejos escenarios y comunidades, amplía el rango de los fenómenos de estudio y admite fuentes de información de diversa naturaleza. Varias de las estrategias involucran a profesores, estudiantes y agentes educativos en los equipos de investigación. Como consecuencia se preocupan por generar mecanismos para actuar responsablemente usando evidencias y herramientas analíticas creíbles.

La pertinencia de la estrategia escogida en una investigación no se deriva únicamente de su capacidad para dar respuestas a cuestiones específicas que movilizan la investigación. Proviene de su potencial para encontrar nuevas vías para pensar acerca de las inquietudes y sus posibles soluciones, promoviendo la profundización en los fenómenos, para ir más allá de lo obvio e inmediato y poner el acento en lo que podría ser factible. Las preguntas por el objeto de estudio, el tipo de fenómeno (¿es un estado?, ¿es un proceso?, ¿es un mecanismo?, ¿es una evolución?), el contexto investigativo, las interacciones que interesan, los participantes y la naturaleza de los productos, determinan la estrategia por escoger o por construir.

Estrategias investigativas que se valen de procedimientos cualitativos

Se clasifican las estrategias con base en el tipo de preguntas que permiten atender. El interés por presentar una clasificación proviene del deseo de facilitar la comunicación entre investigadores y construir un punto de partida para guiar las elecciones personales. Las estrategias se diferencian en la forma como abordan el proceso empírico, los participantes, los roles, los escenarios, las etapas y los productos esperados. Es decir, como indican Denzin y Lincoln (1998), cada estrategia tiene formas particulares de "ponerse en movimiento".

Estrategias naturalistas

Las estrategias naturalistas son aquellas que se preguntan ¿qué pasa?, ¿qué pasó? para describir e interpretar algún fenómeno relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la evaluación en matemáticas o asuntos relacionados con redes y sistemas de prácticas sociales y culturales que influyen en la Educación Matemática de niños, jóvenes, adultos y profesores. Estas estrategias son empleadas principalmente por quienes toman en cuenta la compleja cultura escolar o educativa, de manera holística, sin interferir en ella o por quienes adoptan una aproximación interpretativa.

El principal interés de los investigadores usualmente es la descripción de una situación, lo más fiel posible, de modo tal que la información obtenida se pueda narrar o interpretar en función del escenario en donde se recolecta. Los estudios no pretenden develar realidades objetivas sino lograr relatos o interpretaciones construidas por los participantes, de manera negociada (Uribe, 2013).

Las interpretaciones, cuando tienen lugar, buscan: generar comprensiones sobre fenómenos buscando representarlos, construir consensos entre formas de interpretarlos, examinar hechos e interacciones entre ellos, construir mapas de rutas sobre prácticas, sugerir vías de atención a situaciones, o tomar decisiones; todo ello toma en consideración la cultura en la cual se da el asunto investigado (Moshkovich y Brenner, 2000; Bakker y van Eerde, 2015).

En investigación en Educación Matemática las estrategias naturalistas han permitido principalmente estudiar las prácticas de enseñar y aprender matemáticas en diversos contextos, examinar actitudes y creencias e identificar fenómenos sociales al interior del aula de matemáticas o en las redes de prácticas sociales que rodean el aula. La manera de proceder está influida por los escenarios en donde estas actividades se llevan a cabo, se regulan o se controlan. Frecuentemente son empleadas las estrategias investigativas: “basada en prácticas usuales”, “en primera persona”, “estudio de caso” y “revisión documental”, descripciones detalladas de estas se encuentran en Kelly y Lesh (2000).

Estrategias clínicas

Las estrategias investigativas clínicas son aquellas en donde, sobre un fenómeno en particular, los investigadores se preguntan ¿cómo pasa? o ¿cómo pasó?, ¿por qué pasa? o ¿por qué pasó? Los investigadores pretenden hacer un análisis a profundidad que les permita explicar el fenómeno, además de describirlo o interpretarlo. Las estrategias clínicas son empleadas con frecuencia por quienes adoptan una aproximación hermenéutica. En Educación Matemática usualmente son empleadas por quienes tienen interés en develar formas de pensar de las personas.

Para ahondar en el fenómeno de interés los investigadores buscan tener cierto control sobre la forma en que recogen la información, alejándose del escenario. Así, pretenden que se revelen descripciones, concepciones, procedimientos y justificaciones útiles para profundizar en los fenómenos investigados y explicarlos. En el caso de preguntas acerca de cómo sucedió un fenómeno en el pasado es necesario que quienes participaron en la situación que le dio lugar puedan interactuar con el investigador y participar en el estudio. De lo contrario habría que llevar a cabo una “revisión documental”.

Las estrategias clínicas más empleadas en Educación Matemática son la entrevista estructurada”, la “entrevista semi-estructurada”, la “entrevista basada en tareas” y la “observación clínica”; descripciones detalladas de estas se encuentran en Kelly y Lesh (2000).

Estrategias de diseño

Las estrategias investigativas de diseño son aquellas en las que los investigadores se preguntan ¿qué pasaría si…? sobre un fenómeno en particular. Se pretende hacer un análisis a profundidad en ámbitos socialmente complejos sobre potenciales efectos de cierto diseño sobre el asunto de interés. La atención se enfoca en eventos que ocurren en escenarios conceptualmente ricos que son explícitamente diseñados para optimizar las oportunidades de desarrollos relevantes y observar su efecto.

Las estrategias de diseño son empleadas con frecuencia por quienes adoptan una aproximación colaborativa social. Los investigadores proponen una hipótesis de trabajo en la que predicen qué podría pasar si se introducen ciertas condiciones o circunstancias que no están presentes en un momento dado. A partir de la hipótesis, diseñan una situación para poner en funcionamiento dicha hipótesis y estudian los efectos logrados. Estas estrategias son empleadas para obtener evidencias del efecto de un nuevo programa, currículo, artefacto, material educativo, conjunto de problemas, normas, etc. (Bakker y van Eerde, 2015).

Las estrategias de diseño están en un lugar intermedio entre las estrategias naturalistas y las estrategias clínicas. De un lado, pretenden superar las críticas que se hacen a las estrategias clínicas por no tener en cuenta las condiciones y limitaciones en las que suceden los eventos educativos y estar alejadas de los escenarios reales. De otro lado, buscan superar las críticas que se hacen a las estrategias naturalistas por requerir de largos periodos de tiempo y esfuerzo en capturar mucha información, que no necesariamente se usa. Entre las estrategias de este tipo están el "experimento de enseñanza", el "experimento comparativo" y la "investigación acción" (Kelly y Lesh, 2000).

Registro de información

Una actividad clave de cualquier investigación que se vale de procedimientos cualitativos es la toma de decisiones sobre cuál información conviene registrar para el análisis y cuál no. Esta escogencia es necesaria porque registrar todo lo que sucede en el escenario, aquello que pasa en el entorno de este o todo lo que hacen o dicen los participantes sobre un fenómeno de interés, es una tarea imposible (Miles y Huberman, 1994). La selección de participantes "informantes", a partir de criterios explícitos y de los procesos o productos que se quiere registrar, define los límites del estudio y establece qué tipo de conclusiones se pueden sacar de este.

Los procesos de registro son diferentes, según si se trata de obtener información para indagar por: concepciones, formas de pensar, ideas, emociones, opiniones, acciones, interacciones, prácticas, producciones, etc. Y también si se trata de analizar lo que hacen individuos solos, interacciones entre individuos o una mezcla de los dos; o si se trata de registrar estados, transiciones entre estados o evoluciones.

Kelly y Lesh (2000) alertan sobre el cuidado que hay que tener con las posibles modificaciones que sufra un fenómeno que se está estudiando como consecuencia del proceso de registro de información y con el efecto que este proceso pueda tener sobre la información capturada y sobre los análisis que se hagan. Señalan que, en el caso de estrategias naturalistas, entre menos invasivos sean los procesos de captura de información y menos personas extrañas al escenario estén presentes en este, mucho mejor.

Cinco preguntas determinan qué información registrar: ¿dónde registrarla?, ¿a quién o qué registrar?, ¿cuándo?, ¿haciendo qué? y ¿cómo? Las respuestas a cada pregunta dependen de las necesidades del estudio. Más que atender criterios sugeridos por otros, los investigadores se centran en la meta de obtener información lo más holística y rica posible sobre el fenómeno de tal suerte que permita revelar aspectos nuevos de su complejidad. En cualquier caso, una característica clave de la información por recoger es que tenga un fuerte vínculo con el escenario social en el que ocurren los eventos; esto hace que la información más útil sea la que se capture en estrecha proximidad con la situación específica, teniendo en cuenta las influencias del contexto local.

El momento de responder las cinco preguntas depende del tipo de diseño. Diseños flexibles y abiertos, de carácter principalmente exploratorio, pueden ir definiendo y concretando sobre la marcha: el escenario, los informantes, los eventos, los procesos y los instrumentos que se usarán para registrar información. Diseños rígidos y focalizados, de carácter principalmente confirmatorio, definen y concretan al máximo estos aspectos antes de ir al escenario.

Producción de unidades de análisis

La información en bruto, recogida en el escenario, no siempre corresponde a los datos investigativos. Es necesario llevar a cabo procesos de organización, reducción, depuración y fragmentación de la información; así se constituyen unidades de información para el análisis (Denzin y Lincoln, 1998; Tobin, 2000).

La información recogida en el escenario requiere ser organizada cuidadosamente para asegurar su uso eficaz, flexible y confiable por todos los investigadores de un estudio. Las investigaciones que se valen de procedimientos cualitativos generalmente acumulan gran cantidad de información; por eso conviene establecer un mecanismo de organización y archivo desde el inicio de la captura. Así se tiene acceso a esta en cualquier momento y los análisis se hacen vinculados a la información original.

A partir de la información comienza un proceso que Miles y Huberman (1994) consideran relacionado con el análisis, pues los investigadores toman decisiones sobre el material registrado influenciados por las inquietudes investigativas, el marco de referencia y aquello que identifican en los registros. Después de la recopilación de evidencias los investigadores seleccionan la información que consideran será empleada en el análisis y descartan información irrelevante o inútil.

La información reducida no siempre constituye los datos del estudio. En muchos casos hay que depurarla, lo cual implica refinar y optimizar las evidencias para hacerlas aún más concretas y útiles para el análisis. El proceso puede conducir a eliminar información que inicialmente se consideró relevante pero que en una segunda mirada se aprecia que no lo será. A partir de sucesivas revisiones de la información depurada se desarrolla un proceso de fragmentación e integración del material. Este proceso conduce a establecer los datos de la investigación, que se denominan unidades de análisis.

Un dato o unidad de análisis es un segmento textual claramente discernible, es decir, un fragmento de la información depurada o constituido por la integración de porciones de esta que tiene sentido completo para los investigadores y se puede someter a un análisis. Un dato puede interpretarse a la luz de un marco de referencia para producir descripciones, explicaciones, inferencias, constructos teóricos, pruebas de hipótesis, esquemas de relaciones, tipologías, etc. Algunos ejemplos de datos investigativos usados en Educación Matemática son: transcripciones completas (pero depuradas) de interacciones en las que se reporta un proceso, se discute un asunto, se resuelve un problema, etc.; relatos o narraciones completos (pero depurados), producidos por informantes o investigadores; protocolos completos (pero depurados) del proceso seguido por uno o varios informantes para el desarrollo de una tarea durante un periodo de tiempo; momentos específicos del desarrollo de una tarea; episodios o conjuntos de sucesos relacionados en un todo; escenas o sucesos específicos; fragmentos de transcripciones; unidades textuales reconstruidas integrando oraciones que tratan sobre un asunto en particular; párrafos de escritos o transcripciones; respuestas a preguntas; enunciados de situaciones, problemas, tareas; oraciones; expresiones; secuencias de gestos; gestos.

¿Qué nivel de detalle deben tener los datos? Esta respuesta depende del estudio. Algunos análisis lingüísticos requieren que los datos por analizar sean interacciones, línea a línea, e incluso palabra a palabra. Pero de manera más típica los datos son oraciones, párrafos o narraciones. Lo importante es que el investigador tenga claro cuál es su unidad de análisis en la investigación.

Análisis de los datos

La intención de un análisis es adentrarse en la complejidad de los datos de la mano de un referente teórico para: aclarar información que inicialmente puede parecer confusa, desentrañar componentes o constructos, identificar unidades de significado, descubrir patrones, encontrar indicios de pensamientos, percepciones, concepciones o actuaciones, establecer conexiones, establecer variables intervinientes, etc. Los investigadores, no sin esfuerzo, llevan a cabo un ejercicio fundamentado, creativo, inventivo e interpretativo de procesamiento de los datos para construir un sentido sobre aquello que observan. El proceso toma tiempo y requiere determinación, persistencia y perseverancia. Solo gracias a la búsqueda constante y diligente, superando frustraciones y desánimos, las piezas del rompecabezas empiezan a cuadrar (Miles y Huberman, 1994; Kelly y Lesh, 2000).

El ejercicio analítico hace que emerja un cierto orden y permite hacer una reconstrucción o síntesis informada gracias al proceso llevado a cabo. El producto del ejercicio es una posible (no única) "historia" coherente del fenómeno observado, que propone descripciones, ejemplos, rutas, tipos, estructuras conceptuales, relaciones, etc., situadas en el escenario en el que se capturaron los datos. La historia puede ser sometida a escrutinio público una vez comunicada (Denzin y Lincoln, 1998).

En sentido estricto, el análisis comienza antes del registro de la información. Las decisiones sobre la estrategia a seguir, la selección del escenario, la elección de los participantes, la información que se registrará y los momentos de registro, están condicionadas por las primeras comprensiones que tienen los investigadores sobre el fenómeno.

En el periodo de registro de la información también se llevan a cabo análisis. Estos suceden cuando se toman decisiones sobre qué registrar, a quién, cuándo y haciendo qué. Los investigadores suelen reunirse periódicamente para evaluar cómo suceden los acontecimientos. Deciden cómo resolver situaciones fortuitas que pueden afectar el éxito del estudio, hacen ajustes a la estrategia o al diseño mismo, destacan información que cobra importancia, etc. El hecho de que el registro de información se acompañe de análisis hace que eventualmente estos guíen la captura de nueva información a medida que se hacen confrontaciones entre la fundamentación teórica, los intereses del estudio, lo que se ha registrado, lo que falta por registrar y lo que no es necesario. Así, los investigadores mantienen cierto control sobre el registro de la información, que en alguna medida es analítico (Teppo, 2015; Vollstedt, 2015).

Después del registro de la información se hacen análisis en los momentos de reducción y depuración de la información, así como en su fragmentación para constituir las unidades de análisis. Son decisiones analíticas movilizadas por las inquietudes del estudio, el referente teórico con el que se está observando el escenario y la información que se está registrando. La reducción y depuración de información enfocan la mirada, refinan aquello que se quiere estudiar en profundidad y la organizan.

Finalmente se realiza el análisis retrospectivo. Los investigadores se concentran con mayor intensidad en los datos para interpretarlos, hallar patrones, establecer relaciones, hacer inferencias, etc. No se descarta que el análisis conduzca a nuevos procesos de reducción y depuración de información al ir enfocando la mirada en los hallazgos del estudio. En el minicurso se presentan ejemplos obtenidos en las investigaciones de Camargo (2010), Vergel, (2013), Valoyes (2014) y Obando (2015) en donde los datos investigativos se construyeron luego de un primer ejercicio de codificación de la información registrada y transcrita.

Generalmente, los análisis que se llevan a cabo en un estudio investigativo en Educación Matemática avanzan progresivamente por las siguientes tres acciones, hasta donde se necesite o se desee:

Describir los datos a partir de un marco de referencia (general y específico) descomponiendo el todo en unidades más simples con el objeto de: detallar aspectos del fenómeno; representar o modelar alguna situación o asunto; identificar nueva información, condiciones, acciones, interacciones, eventos, prácticas; exhibir y aclarar situaciones específicas en donde el fenómeno en estudio ocurre; verificar o ejemplificar situaciones, tipos, fases, etc. En síntesis, se busca ampliar el estado de conocimiento logrando dar una idea general de sus partes o propiedades. Si el marco de referencia está implícito, las preconcepciones, prejuicios, valores, teorías y hábitos retóricos de los investigadores no se exhiben, aunque siempre están presentes.

Interpretar los datos para develar significados inmersos en gestos, expresiones, escritos, sucesos o procesos y comprender acciones, interacciones y prácticas llevadas a cabo por los participantes en el escenario investigativo. Un todo complejo se descompone en unidades más simples para concebirlo, ordenarlo y entenderlo de manera personal de acuerdo con un marco de referencia emergente o preestablecido, mediante la identificación de patrones. Las comprensiones pueden dar sentido a una serie de eventos, identificar condiciones externas o internas que influyen en un fenómeno, o responder a intereses particulares del estudio. En los tres casos la interpretación vincula la explicación con la información proporcionada por los participantes específicos del estudio.

Inferir relaciones entre los datos para sacar conclusiones estableciendo equivalencias, complementariedades, dependencias, asociaciones, correlaciones, analogías, etc. Estas relaciones conducen a sugerir clasificaciones, proponer tipologías, establecer fases, insinuar relaciones causales, presentar constructos, argumentar afirmaciones y justificar acciones o creencias. En las estrategias clínicas las inferencias hacen que emerjan conceptos, proposiciones e incluso teorías plausibles, fundamentadas en los datos (Strauss y Corbin, 1998); estas relacionan las proposiciones en forma de listas jerárquicamente ordenadas o en redes de enunciados. En los estudios confirmatorios el análisis conduce a completar vacíos de la teoría, aclarar ambigüedades, complementar los modelos, proponer descriptores, ilustrar ideas con ejemplos, identificar excepciones, ampliar tipologías, hallar pruebas de existencia, hacer pruebas de hipótesis, etc. Para evitar que las inferencias sean especulativas o se impongan a los datos más que derivarse de ellos Miles y Huberman (1998) proponen considerar tres fuentes para hacerlas: (i) de la teoría que emerge o se conforma; (ii) de los datos disponibles, explicando las excepciones; (iii) del permanente diálogo entre las ideas que configuran los investigadores y los datos del estudio.

Referencias

Bakker, A. y van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with and example from statistics education. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.). *Approaches to qualitative research in mathematics education. Examples of methodology and methods.* (pp. 429 - 466). Dordrecht: Springer.

Camargo, L (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*. [Tesis doctoral]. Valencia: Universidad de Valencia.

Denzin, N. & Lincoln, Y. (1998). Introduction: entering the field of qualitative research. En N. Denzin y Y. Lincoln (Eds.), *Strategies of Qualitative Inquiry. California.* (pp. 1- 34). Sage Publications.

Kelly, A. & Lesh, R. (2000). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* N.J: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Miles, M.B. & Huberman, A.M. (1994). *Qualitative Data Analysis. An expanded Sourcebook.* California: SAGE Publications Inc. (segunda edición).

Moschkovich, J. & Brenner, M. (2000). Integrating a naturalistic paradigm into research on mathematics and science cognition and learning. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. (capítulo 17, pp. 457 – 486). N.J: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., capítulo 17, 457- 486.

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica.* [Tesis doctoral]. Cali: Universidad del Valle.

Radford, L. & Sabena, C. (2015). The question of method in a vygostkian semiotic approach. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education. Examples of methodology and methods*. (pp. 157 - 182). Dordrecht: Springer.

Strauss, A., Corbin, J. (1998). Grounded theory methodology: an overview. En N. Denzin y Y. Lincoln (Eds.), *Strategies of Qualitative Inquiry. California.* (pp. 158 - 183). Sage Publications.

Teppo, A. (2015). Grounded Theory Methods. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education. Examples of methodology and methods*. (3 - 21). Dordrecht: Springer.

Tobin, K. (2000). Interpretive research in science education. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* N.J: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., capítulo 18, 487 – 512.

Uribe, C.A. (2013). La etnografía de investigación en ciencias sociales. En P. Páramo (Comp.), *La investigación en ciencias sociales: estrategias de investigación.* (pp. 129 - 144). Bogotá: Universidad Piloto de Colombia.

Valoyes, L.E. (2014). *Colombian teachers'expectations of poor and black students'ability to learn algebra.* [Tesis doctoral]. Missouri: Universidad de Missouri.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9 – 10 años).* [Tesis doctoral]. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vollstedt M. (2015). To see the wood for the trees: the development of theory from empirical interview data using grounded theory. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education. Examples of methodology and methods*. (pp. 23 - 48). Dordrecht: Springer.

Una posible zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico[1]

Rodolfo **Vergel** Causado
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá-Colombia
rvergelc@udistrital.edu.co

Resumen

El análisis sobre formas de pensamiento algebraico no evade la discusión de las formas de pensamiento aritmético. Resultados de investigación muestran que la ausencia de indicios espaciales en secuencias numéricas hace recaer la generalización sobre relaciones entre números, lo que facilita implícitamente la emergencia de estrategias de ensayo-error que se erigen en obstáculo al pensamiento deductivo sobre el que reposa la analiticidad (Radford, 2008; Vergel, 2015). A partir de datos provenientes de una investigación doctoral y de un programa de extensión con profesores de matemáticas, se analiza la actividad semiótica de una estudiante y de una profesora de primaria, respectivamente. El análisis sugiere, por un lado, la presencia de una posible zona en la que formas sofisticadas de generalización aritmética estarían muy cerca de proto-formas de pensamiento algebraico, y, por otro lado, profundizar la reflexión epistemológica en aras de lograr una caracterización más inteligible de esta zona conceptual.

Palabras clave: Analiticidad, Generalización aritmética, Generalización algebraica, Pensamiento algebraico temprano, Proto-analiticidad.

Abstract

The analysis about forms of algebraic thinking does not evade the discussion on arithmetical thinking forms. Research results show that the absence of spatial clues in numerical sequences leads to the generalization of relationships between numbers, which implicitly facilitates the emergence of trial-error strategies that stand as an obstacle to the deductive thinking on which analyticity rests (Radford, 2008, Vergel, 2015). Based on data from PhD research and an extension program with mathematics teachers, the semiotic activity of a student and a primary school teacher, respectively, is analyzed. This analysis suggests, on the one hand, the presence of a possible zone

[1] Este trabajo se inspira en las reflexiones epistemológicas y pesquisas adelantadas en el marco de mi estancia posdoctoral, bajo la dirección del Dr. Luis Radford, en Laurentian University, Sudbury, provincia de Ontario, Canadá.

in which sophisticated forms of arithmetic generalization would be very close to proto-forms of algebraic thinking, and, on the other hand, to deepen epistemological reflection in order to achieve a more intelligible of this conceptual zone.

*Keywords***:** Analiticity, Arithmetic generalization, Algebraic generalization, Early algebraic thinking, Proto-analyticity.

Introducción

La generalización puede considerarse como uno de los procedimientos relevantes en términos de producción del conocimiento. De hecho, investigadores de la Educación Matemática confieren un protagonismo didáctico a este proceso y un interés importante, ya que, entre otros aspectos, posibilita analizar procesos de pensamiento matemático de los estudiantes. La "anatomía" o naturaleza de la actividad matemática (en tanto actividad semiótica) de los alumnos se constituye en una preocupación didáctica, principalmente, cuando nos vemos avocados, como maestros en la sala de clase, a tratar de comprender lo que nuestros estudiantes nos quieren comunicar al expresar semióticamente las generalizaciones que producen. En este sentido, tiene relevancia la idea de semiótica como una teoría que intenta explicar cómo los signos significan, es decir, una teoría de la comunicación y significación (Eco, 1988).

Recientemente se reconoce el interés que viene ganando la investigación sobre álgebra temprana (ver, por ejemplo, Ainley, 1999; Cai y Knuth, 2011; Kaput 1998; Kaput, Blanton, & Moreno, 2008; Radford, 2010, 2011, 2018a; Vergel, 2015, 2016a, 2016c). Particularmente, la investigación viene mostrando que, aun cuando las producciones de los alumnos no contienen signos alfanuméricos del álgebra, su pensamiento puede ser genuinamente algebraico. En este contexto de investigación se ha situado el estudio de la generalización, pues como lo sostiene Michael Otte, "la generalización es esencial, ya que es este proceso el que distingue la creatividad matemática del comportamiento mecánico o algorítmico" (Otte, 2003, p. 187).

Este escrito está dividido en tres secciones. En la primera, que he llamado Consideraciones teóricas, planteo algunas caracterizaciones de álgebra y de actividad algebraica, así como una definición de saber algebraico que posiciona, a su vez, una caracterización de pensamiento algebraico, y de generalización algebraica y aritmética de patrones. En la segunda sección presento el análisis de dos ejemplos de actividad semiótica que me permiten discutir una posible zona conceptual en la que se confunden o entrecruzan formas avanzadas de generalización aritmética (como ejemplos de pensamiento aritmético) y proto-formas de pensamiento algebraico. Hacia el final de este trabajo derivo algunas conclusiones y propongo varias consideraciones que sugieren continuar profundizando la discusión alrededor de esta zona conceptual, discusión que puede contribuir al desarrollo de la propuesta de cambio curricular de Álgebra temprana.

Consideraciones teóricas

En el trabajo de aula es frecuente que los profesores, en su ejercicio profesional de enseñar matemáticas, enfaticen, en momentos específicos de la clase, alguna concepción de álgebra. Desde luego, el énfasis sobre alguna concepción de álgebra en particular estaría afincada en la misma naturaleza de la actividad matemática, pues en algunos momentos se debe desplegar un tipo de actividad semiótica que opere con lo indeterminado, sin descuidar, por supuesto, la toma de conciencia sobre los procesos de deducción implicados; en otros momentos de la clase es necesario avanzar en procesos de generalización y simbolización ya sea en presencia o no de números, y en otros episodios de la actividad matemática se puede requerir específicamente concentrar la atención en la identificación de relaciones funcionales entre variables o cantidades, etc.

Considero pertinente señalar, al menos desde el punto de vista teórico, algunas caracterizaciones de álgebra que podrían estar operando cuando abordamos el trabajo de aula en matemáticas: (i) El álgebra es un método para operar sobre formas generales, mientras que la aritmética es un método para operar sobre números concretos (Viète, 1983); (ii) El simbolismo alfanumérico no es una condición para pensar algebraicamente (Mason, Graham, Pimm & Gowar, 1985); (iii) El punto de vista del álgebra concebida como una actividad de razonamiento que involucra la noción de indeterminación (Kieran, 2007). En este caso cabe llamar la atención sobre el proceso de desarrollar un sentido de lo indeterminado, pues éste no se logra súbitamente. “Es más bien un lento y laborioso proceso que está íntimamente ligado al tipo de tareas propuestas en la sala de clase y a la actividad en tanto labor conjunta entre estudiantes y entre estudiantes y profesor” (Vergel, 2016b, p. 511); (iv) El álgebra es inherente a la aritmética […] la aritmética tiene ya un carácter algebraico” (Carraher & Schliemann, 2007, p. 17); (v) La actividad simbólica es algebraica. Aquellas actividades en las cuales la generalización es expresada a través de otros sistemas simbólicos no son consideradas genuinamente algebraicas (son llamadas cuasi-algebraicas) (Kaput et al., 2008); (vi) El álgebra se considera como un fundamento para la aritmética más que como una generalización de la misma (Subramaniam & Banerjee, 2011, p. 87).

Coincido con Luis Radford en caracterizar el saber como un sistema. Para este autor, el saber “es un sistema codificado de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente” (Radford, 2017, p. 101). El término sistema usado aquí quiere enfatizar la idea de movimiento, de proceso, algo dinámico y transformativo, susceptible de ser modificado. El saber se entiende como una capacidad latente incrustada en la cultura, una potencialidad (una posibilidad de hacer algo). Pero el origen de esa posibilidad no se encuentra en un mundo platónico, sino en la práctica política y social, es decir, aun cuando el saber es algo general, un arquetipo, formas generales de hacer algo, no constituye un mundo aparte, aislado de las acciones humanas (Radford, 2017).

Recordemos que para Platón, “el conocimiento de las ideas constituye un mundo aparte, separado del mundo sensible, porque su objeto son aquellas cosas inmutables como la belleza y la naturaleza de los dioses” (Platón, 1983, p. 15). Para Radford (2017, p. 103), “el saber es labor cristalizada”, realizada a través de acciones humanas; el saber “es un sistema de acciones codificadas culturalmente” (Radford, 2017, p. 103). Por eso la idea de proceso, de transformación, cobra relevancia. Por ejemplo, en relación con la aritmética, “estos procesos podrían ser de reflexión, de expresión, y de acción que emergieron en Mesopotamia de actividades humanas específicas, tales como contar ganado o granos, o medir los campos” (Radford, 2017, p. 101). En esta dirección conceptual, tendríamos que entender el saber algebraico como una forma prototípica de acción y reflexión humana que se convierte en potencialidad cultural y, por tanto, sería pura posibilidad para los estudiantes, es decir, posibilidades que se les ofrecen para pensar, reflexionar, plantear y resolver problemas de cierta manera. En términos de sintetizar estas ideas, e inspirados en los desarrollos filosóficos de Luis Radford, para Vergel y Rojas el saber algebraico:

> Es una síntesis evolutiva —sintetiza acción humana, es dinámica, transformativa— y culturalmente codificada —como patrones de acción— de hacer y reflexionar en términos

> analíticos — es decir, la analiticidad en términos del carácter operatorio de lo desconocido— sobre números indeterminados y conocidos (Vergel y Rojas, 2018, p. 51).

Una caracterización del pensamiento algebraico se constituye de tres componentes, estrechamente relacionadas (Radford, 2010): (a) *el sentido de indeterminancia* —objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetros— "como aquello opuesto a la determinancia numérica" (p. 39); (b) la *analiticidad*, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos que comporta procesos de deducción, esto es, partir de ciertas premisas para llegar a ciertos resultados. En otras palabras, la analiticidad refiere al proceso en el cual las cantidades indeterminadas y sus operaciones se manejan de manera analítica y, aun cuando estas cantidades no son conocidas, se suman, restan, multiplican, dividen, etc., como si fueran conocidas; como señala Descartes (1954, p. 8), "sin hacer distinción entre números conocidos y desconocidos"; y (c) la *designación simbólica* o *expresión semiótica* de sus objetos, esto es, la manera específica de nombrar o referir los objetos. En el contexto de las secuencias de patrones, "El pensamiento algebraico temprano se basa en las posibilidades del estudiante para comprender patrones en formas co-variacionales desarrolladas culturalmente y usarlos para tratar con cuestiones de términos lejanos o no especificados" (Radford, 2011, p. 23).

Generalización algebraica y generalización aritmética de patrones

La generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela (Radford, 2010, 2013, 2018a; Vergel, 2015, 2016c; Vergel y Rojas, 2018), pues, entre otros aspectos, posibilita, en el trabajo de aula, aproximarse a situaciones de variación que se erigen como procesos necesarios para el desarrollo del pensamiento algebraico. De hecho, la propuesta de cambio curricular Álgebra temprana sugiere avanzar en estos procesos de generalización a partir del trabajo con patrones (Carraher & Schliemann, 2007; Radford, 2013; Vergel, 2010, 2016c). El trabajo de generalización de patrones nos obliga a precisar, al menos, dos clases de generalización: la algebraica y la aritmética. De acuerdo con Radford (2013), la generalización algebraica de patrones comporta:

1. Capturar o identificar una comunalidad o característica común, notada sobre algunos elementos de una secuencia. Esta toma de conciencia de una propiedad común se nota a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$).

2. La generalización o aplicación de esta comunalidad a todos los términos de la secuencia que está en consideración, es decir, a los términos subsecuentes de la secuencia ($p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \dots$), y

3. La capacidad de usar esa propiedad común a fin de *deducir una expresión directa*[2] que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

[2] Énfasis en el original.

Figura 1. Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales propuesta en Radford (2013)

La generalización de la "comunalidad" a todos los términos es la formación de lo que, en la terminología aristotélica, se llama un género, es decir, aquello en virtud de lo cual los términos se mantienen unidos (Radford, 2010). En otras palabras, la generalización algebraica de un modelo se basa en darse cuenta de una comunalidad local, que luego se generaliza a todos los términos de la sucesión y que sirve como una orden para construir expresiones de los elementos de la secuencia que siguen estando fuera del campo perceptivo. La identificación de la característica común o comunalidad requiere, según Radford (2013), hacer una escogencia entre determinaciones sensibles potenciales. “La generalización de la característica común (que puede ser una o varias) corresponde a lo que Peirce llama una abducción, esto es, algo que es solamente plausible” (Radford, 2013, p. 6). De acuerdo con Radford (2013, p. 7):

> Para que la generalización sea algebraica se requiere […] que la abducción que se hace de la característica común sea utilizada de manera *analítica*.[3] Esto quiere decir que la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término. Como vemos, el punto crucial corresponde al papel epistemológico que desempeña la característica común, C, extraída durante el trabajo efectuado en el terreno fenomenológico. C pasa de entidad plausible a principio asumido, esto es hipótesis, H.

En el proceso de generalización de patrones, es posible identificar casos de producciones matemáticas de estudiantes que no presentan las características de la definición de generalización algebraica de patrones mencionada anteriormente. En este caso, estos estudiantes aún no han ingresado al reino del álgebra, en tanto pueden estar operando aún en el ámbito de la aritmética al intentar generalizar algo, trabajo que podría estar anclado en el nivel de lo concreto. Como dice Vygotsky (1986, p. 133), “El marco del niño es puramente situacional, con la palabra atada a algo concreto, en tanto el marco del adulto es conceptual”. Si bien lo generalizado puede ser una comunalidad local, observada en algunas figuras, esto podría no garantizar la utilización de dicha información para proporcionar una expresión que permita calcular cualquier término de la secuencia. Precisa Radford (2013, p. 7), “Cuando la abducción es simplemente utilizada para pasar de un término a otro (como cuando los alumnos dicen que hay que añadir 2 cuadrados)”. En este sentido estamos frente a una *generalización aritmética* (Radford, 2008). En el recorrido por la Figura 1 estaríamos predicando sólo hasta configurar la generalización de la característica común. En este caso, no hay deducción de una expresión directa que autorice calcular el número

[3] Énfasis en el original.

de elementos (v.g., cuadrados, círculos, números) en cualquier término de una secuencia de patrones. Como señala Radford (2013, p. 7):

> En el caso del procedimiento por ensayo y error, los alumnos producen una fórmula. Pero la fórmula no es deducida. De hecho, la abducción concierne la fórmula misma. Los alumnos proponen una fórmula, que parece plausible, y la someten a un número finito de pruebas. Esta generalización (que corresponde a una de las formas de inducción) no es todavía algebraica.

El tipo de inducción al que refiere Radford se llama *inducción ingenua* (Radford, 2008). El adjetivo se usa para distinguir el tipo de inducción de otros tipos de inducción más sofisticados, por ejemplo, del proceso de inducción matemática o inducción completa, tal y como lo describe Fowler (1994, p. 253):

“If $\mathrm{P}(1)$ and

$\mathrm{P}(n) \rightarrow \mathrm{P}(n+1)$ for all n are both true (valid),

then $\therefore \mathrm{P}(n)$ is true (valid) for all n”.

La inducción ingenua se basa en diversas abducciones que están representadas en propuestas de fórmulas, las cuales parecen plausibles, y son sometidas a un número finito de pruebas. Aun cuando por este razonamiento se podría obtener una fórmula algebraica que corresponda al término general de la secuencia, esta regla es obtenida por inducción, es decir, a través de un procedimiento basado en un razonamiento probable y, como precisa Radford (2008, p. 3), “cuya conclusión va más allá de lo que está contenido en sus premisas”, lo cual, por un lado, marca la diferencia con el proceso de inducción matemática descrito por Fowler (1994), y de otra parte, no sugiere un proceso de deducción (que contiene en su arquitectura la abducción analítica) que sí comporta la generalización algebraica de patrones.

El criterio acerca de la analiticidad, entonces, ofrece un principio operacional para distinguir el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico. Es necesario precisar aquí que detrás de la operación con lo indeterminado, se encuentra esta idea de analiticidad, entendida no sólo como el carácter operatorio de los objetos indeterminados, sino también en términos de procesos de deducción, es decir, el trabajo a partir de algo, que es admitido o supuesto con certeza (Descartes, 1983), para llegar a una conclusión. Por eso sostenía Viète (1983) que lo que era distintivamente algebraico correspondía a la manera analítica en la cual pensamos cuando pensamos algebraicamente.

Permítanme hacer una rápida mirada a la historia del pensamiento babilónico en la idea de intentar mostrar su complejidad y su “confusión” sobre si este tipo de pensamiento es algebraico o aritmético. Quiero insistir en el criterio operacional que ofrece la analiticidad para hacer la distinción hasta donde sea posible. En efecto, los escribas babilónicos realmente pensaron que el número uno representaba lo desconocido en un sentido algebraico (Radford, 2001). La elección numérica para lo desconocido pudo haber permitido a los escribas sistematizar los métodos numéricos de resolución de problemas y alcanzar un paso significativo en términos del desarrollo conceptual del pensamiento proporcional antiguo. En el caso específico del método de la falsa posición, haciendo una revisión histórica al pensamiento babilónico, Radford (2001) muestra cómo el trabajo con símbolos numéricos pone de presente una serie de procedimientos que a los ojos de hoy en día son genuinamente algebraicos.

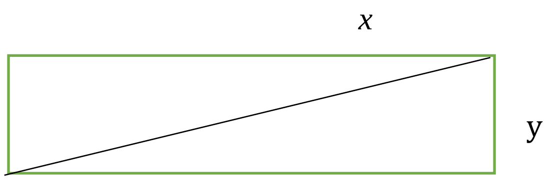


Figura 2. Representación geométrica del problema babilónico

El problema relacionado con el método de la falsa posición, en términos modernos, es el siguiente: *Hallar las dimensiones del rectángulo cuyo ancho es su longitud menos un cuarto de ella y su diagonal es 40.*

En nuestro sistema semiótico alfanumérico moderno, tendríamos el siguiente desarrollo:

$$y = x - \frac{1}{4}x$$
$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x^2 + y^2 = 1600$$
$$x = \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} d$$

El escriba babilónico, en contraste, asume una falsa longitud x_0, lo que sugiere una falsa anchura y_0 y procede haciendo el siguiente cálculo:

$$y_0 = x_0 - \frac{1}{4}x_0 = \frac{3}{4}x_0.$$

Entonces, asumiendo estas premisas (i.e., las condiciones del problema), él calcula la falsa diagonal usando d_0 de la siguiente manera:

$$d_0 = \sqrt{\left({x_0}^2 + (\tfrac{3}{4}x_0)^2\right)} = \frac{5}{4}x_0 = \frac{5}{4}\text{, pues } x_0 = 1$$

La cantidad verdadera (solución exacta al problema) puede ser legítimamente pensada a través de otra cantidad. Las “cantidades falsas” aparecen como metáforas de “cantidades verdaderas”[4] (Radford, 2001). La idea principal, señala Radford, estaba supuestamente apoyada por el hecho de que, en algunos problemas, el escriba toma el número 1 como la solución falsa (como el ejemplo aquí mostrado) y cuando, según procedimientos babilónicos, reemplazamos el número 1 por nuestra moderna x desconocida, los *procedimientos de resolución de problemas se parecen mucho a los procedimientos algebraicos modernos*. Mi llamado de atención reside en el hecho de que, si bien no hay signos alfanuméricos en los procedimientos babilónicos, las formas de operar con el símbolo numérico 1 no distan mucho de las formas de operar actualmente con lo desconocido.

Es claro, entonces, que el símbolo numérico 1 se tomaba en realidad como una representación de lo desconocido. También es claro que si no podemos, de manera directa, ver lo

[4] El pensamiento mesopotámico estaba lleno de metáforas (odas, poemas épicos, textos literarios y religiosos) las cuales muestran un intrincado sistema de expresiones metafóricas. Desde la inferencia histórica, se puede afirmar que el álgebra, al parecer, estaba redactada en un sistema así. Ésta es una de las evidencias que muestra cómo la cultura incide en la naturaleza y el desarrollo del saber matemático.

desconocido, es simplemente porque los escribas babilónicos no tenían un símbolo con el que podrían representarlo (Radford, 2001). Es decir, los procedimientos babilónicos y sus formas de pensar tenían lugar con y a través de los signos que disponían. Por eso, desde una postura sociocultural, las maneras como los individuos llegan a conocer, y lo que conocen, llevan en su constitución sedimentos de formas históricas y culturales de pensamiento y de actividad (Vergel, 2014). Cabe aquí mencionar la premisa epistemológica dialéctico materialista acerca de la cognición y los signos: “La manera, profundidad e intensidad en que un objeto aparece como objeto de conciencia son consustanciales con el material (contenido) semiótico que hace posible que tal objeto se convierta en un objeto de conciencia y pensamiento” (Radford, 2018a, p. 22) [Traducción propia].

La operación con lo desconocido o indeterminado, en este caso con el símbolo numérico 1, implica procesos de deducción, esto es, procesos en los cuales, considerando ciertas premisas (en el caso aquí mostrado, serían las condiciones del problema que son atravesadas por el hecho de que $x_0 = 1$), se llega a ciertos resultados. Si bien el número 1 fungía como lo desconocido para el escriba, es claro que desplegaba también procesos de deducción. Descartes lo diría mejor: “Deducción es todo aquello que se concluye necesariamente de otras verdades conocidas con certeza” (Descartes, 1983, p. 125).

Dos ejemplos de actividad semiótica

En esta sección presento fundamentalmente la producción de una estudiante participante de una investigación (Vergel, 2015), que indagó, desde un análisis multimodal del pensamiento humano (Arzarello, 2006), por las formas de pensamiento algebraico temprano en estudiantes de 4° y 5° de primaria (10-11 años), y la producción de una profesora de básica primaria participante de un programa de extensión (Secretaría de Educación Distrital, SED, en prensa) que pretendía cualificar las prácticas docentes en matemáticas en escuelas y colegios del distrito de Bogotá (Colombia).

El caso de Yaneth

En el contexto de la investigación aludida, una de las producciones de los estudiantes estuvo precedida por el interés de indagar acerca de los medios semióticos de objetivación que podrían emerger durante su actividad matemática, cuando la *tarea* propuesta correspondía a una secuencia de patrones que no contaba con elementos geométricos-espaciales como en el caso de las secuencias figurales apoyadas por representación tabular (Vergel, 2015). En términos generales, la tarea tiene un estatus epistemológico y en tal sentido juega un papel clave en la actividad matemática de los estudiantes. De acuerdo con Vergel y Rojas (2018, p. 76):

> La tarea […] está revestida de una densidad epistemológica, por cuanto su abordaje, por parte de los estudiantes, implica la movilización, a través de signos y de operar con ellos, de ideas matemáticas y procesos matemáticos —p. ej., procesos de deducción y de generalización—, la conjeturación y formulación de hipótesis, el establecimiento de relaciones numéricas, el trabajo analítico con lo desconocido, entre otros aspectos.

En tanto categoría didáctica, la tarea desarrolla, a través de su abordaje, pensamiento matemático. La idea de tarea se inspira en la máxima vygotskyana, según la cual, “la instrucción solamente es positiva cuando va más allá del desarrollo y, de esta manera, despierta y pone en funcionamiento toda una serie de funciones que, situadas en la zona de desarrollo próximo, se encuentran en proceso de maduración” (Wertsch, 1988, p. 87). La idea de instrucción, que es una traducción del vocablo ruso *obucheni*e usado por Vygotsky, comprometida en la caracterización de tarea, refiere a la actividad integrada de interacción en la cual los procesos de enseñanza y aprendizaje se hallan implicados.

La tarea propuesta, denominada secuencia numérica con apoyo tabular, es la siguiente:

2	**5**	**8**
Término 1	Término 2	Término 3

Figura 3. Secuencia numérica con apoyo tabular correspondiente a la tarea implementada en Vergel (2015)

Entre otros requerimientos, se solicitaba encontrar los términos 4 y 5 de la secuencia (que se genera a partir del término general $3n-1$, con $n=1,2,3,\ldots$). La profesora Johanna[5] introduce este tipo de secuencias a partir del siguiente diálogo:

L1. Profesora Johanna: A partir de hoy no vamos a trabajar con las secuencias figurales, es decir ya no vamos a tener figuras ni círculos sino que vamos a empezar a trabajar con una secuencia numérica. ¿Qué significa eso? Que ahora ya no vamos a hablar de figura 1, figura 2, figura 3, etc., sino del término 1, término 2, término 3, (…) entonces miren el término 1 es (…) ¿quién?

L2. Estudiantes en coro: ¡2!

L3. Profesora Johanna: 2, el término 2 ¿quién es?

L4. Estudiantes en coro: ¡5!

L5. Profesora Johanna: El término 3 ¿quién es?

L6. Estudiantes en coro: ¡8!

L7. Profesora Johanna: Entonces con esa nueva secuencia vamos a tratar de hacer ejercicios como lo hicimos en las anteriores.

El diálogo muestra que el desarrollo de la clase de matemáticas que se venía dando estaba basado en secuencias figurales con apoyo tabular, y ahora los estudiantes se topan con otro tipo de secuencias que no cuentan con elementos geométrico-espaciales. La profesora Johanna decide iniciar un *trabajo conjunto* (Radford, 2014a) e intenta resaltar la relación funcional entre el término y el número correspondiente, con el propósito de hacer emerger una toma de conciencia de dicha relación funcional en y entre los estudiantes. El trabajo conjunto es, precisamente, el que posibilita la toma de conciencia, pues ésta se encuentra estrechamente vinculada con la interacción entre los estudiantes, es decir, con la actividad. “La actividad del individuo constituye la substancia de su conciencia” (Leontiev, 1978, p. 96). Esta relación íntima entre individuo, conciencia y actividad participa en el desarrollo o materialización del sujeto, considerado como una “entidad histórico-cultural en perpetua transformación, esto es, una subjetividad en proceso de fabricación” (Radford, 2018b, p. 23) [Traducción propia]. En este sentido, hay que entender la conciencia en términos de relación —relación al mundo. Esta relación concreta con el mundo sugiere que la conciencia debe entenderse como un caso particular de la experiencia social (Vygotsky, 1979).

El sujeto, entonces, no puede ser, no podría desarrollarse sin la presencia de otros sujetos, sin co-participar de los pensamientos de otros sujetos, de pensamientos ajenos. Para Holquist (1994, p. 25), “Ser [es decir, el sujeto] es una simultaneidad, es siempre un co-ser”. Por eso es

[5] La profesora Johanna participó en la investigación referida en su rol de orientadora de las sesiones de trabajo. Su participación también estuvo asociada con el análisis de las tareas que se diseñaron.

que en la actividad o labor conjunta, las intervenciones de la profesora Johanna buscan propiciar relaciones de alteridad a partir de las cuales haya un entrecruzamiento de conciencias; al decir de Bajtín (2009, p. 360), “la conciencia del hombre despierta envuelta en la conciencia ajena”, lo cual sugiere que la conciencia adquiere su identidad dentro de la práctica social reflexiva.

La idea de labor conjunta quiere resaltar el hecho de que “profesores y estudiantes laboran juntos para producir el saber” (Radford, 2014b, p. 11). La actividad o labor conjunta (lo que Radford llama el Particular hegeliano) es, justamente, la que hace que el saber algebraico, como pura potencialidad cultural, se ponga en movimiento. Este es el significado epistemológico que se le confiere a la actividad. Como sostiene Radford (2014b, p. 10), “para convertirse en objeto de conciencia y pensamiento, el saber algebraico tiene que ser puesto en movimiento a través de la *labor conjunta*[6] del salón de clase”.

La labor conjunta sugiere que los actores del proceso de enseñanza-aprendizaje se están transformando, pues aprender algo significa transformación. Esta transformación tiene lugar a través de la interacción y cooperación humanas no alienantes, es decir, a través de una relación de alteridad en la que los sujetos se posicionan críticamente frente a la clase. Radford plantea que:

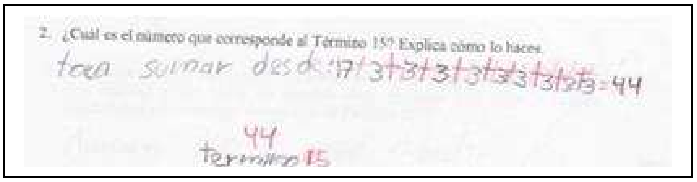
> Es a través de la labor que encontramos los sistemas de ideas de la cultura: sistemas de ideas científicas, legales, artísticas, etc. Es también a través de la labor que encontramos formas culturales de ser. En su sentido ontológico, la labor significa alteridad —el encuentro de eso que no soy yo, y que al encontrarlo, me transforma. Pues estamos hechos tanto de sangre y huesos, como de historia y relaciones sociales y culturales (Radford, 2014a, p. 138).

Después de un trabajo individual por parte de los estudiantes, la profesora Johanna visita varios grupos para indagar qué piensan sobre la secuencia y cómo, a través de sus producciones e intercambios verbales, han abordado la tarea. Este tipo de actividad es un aspecto clave para hacer aparecer el saber algebraico. Cuando se pone en movimiento, el saber algebraico empieza a transformarse, a materializarse. Es eso lo que se materializa (estos es, lo que se actualiza), mediatizado por la actividad, lo que llamamos conocimiento. En consecuencia, el conocimiento es producto de una mediación (la actividad). Este conocimiento, representado en las diversas producciones semióticas de los estudiantes, necesariamente paga tributo a la actividad.

Desde una postura sociocultural tenemos que aceptar que las formas de pensamiento matemático son consustanciales a la naturaleza de la actividad, en otras palabras, la actividad imprime su marca en la actualización del saber (Ilyenkov, 1977). Dependiendo de la naturaleza de la actividad podríamos hacer emerger una toma de conciencia en los estudiantes acerca de una mirada algebraica de las secuencias numéricas. Es en este sentido que hemos constatado que la materialidad de la actividad es la que hace emerger el saber algebraico de cierta manera (Radford, 2018a; Vergel, 2015, 2016a; Vergel y Rojas, 2018), en otras palabras, el amarre entre el saber y la actividad tiene lugar diferente. Dicha materialidad está representada en las preguntas de la profesora, en las intervenciones de los estudiantes, así como en su producción matemática.

A continuación presento la producción de Yaneth (una estudiante participante de la investigación), como parte de la actividad, motivada por responder al número correspondiente al Término 15 de la secuencia.

[6] Énfasis en el original.


2. ¿Cuál es el número que corresponde al Término 15? Explica cómo lo haces.

toca sumar desd 17+3+3+3+3+3+3+3+3+3=44

44
termino 15

Figura 4. Producción de Yaneth al requerimiento del item 2 de la tarea sobre secuencia numérca con apoyo tabular

Yaneth instancia una forma aditiva para responder al número que corresponde al Término 15 (ítem 2, Figura 4). Su producción con respecto al ítem 2, *"toca sumar desde:* $17 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 44$*"*, indica que el número 9, obtenido por la diferencia entre los números 15 y 6, determina las veces que debe repetirse el número 3 en la suma, anclándose en 17 que corresponde al Término 6.

En el proceso de análisis de la secuencia, de cómo cambian los números correspondientes a los términos, esto es, en el proceso de identificación de ciertas determinaciones sensibles potenciales, Yaneth identifica una característica común (aumentar 3) y, a partir de su respuesta al ítem 2, es generalizada y aplicada para encontrar el número que corresponde al término solicitado (Término 15). Sin embargo, esta generalización de la característica común (abducción en el sentido de Peirce), no parece ser utilizada de manera analítica. El término analítico era considerado por Pappus como movimiento, Pappus decía: "El análisis es el movimiento desde lo que es dado hacia lo que es buscado" (Rideout, 2008, p. 62) [Traducción propia]. La producción de Yaneth, si bien no parece usar como hipótesis o principio asumido la generalización de la característica común para deducir una expresión que le permita calcular el número correspondiente a *cualquier* término, es decir, su generalización no parece ser de naturaleza algebraica, sí recurre a lo que, inicialmente, propongo llamar una *generalización aritmética sofisticada*, que se podría describir de la siguiente manera:

Se parte de un término cualquiera conocido T_a (en este caso, T_6) y se quiere hallar T_n (para este caso, T_{15}); entonces esta estudiante procede haciendo: $T_a + (n - a) \times 3 = T_n$

El adjetivo "*sofisticada"* introducido quiere establecer la diferencia en relación con el proceso de generalización aritmética teorizado por Radford (2013, p. 7), para quien "la abducción [generalización de la característica común] es simplemente utilizada para pasar de un término a otro". La ausencia de elementos espaciales o geométricos (que sí comportan las secuencias figurales con o sin apoyo tabular) obliga a la realización de un trabajo de generalización, por parte de Yaneth, basado en relaciones entre números. Además, sus procesos perceptivos quedan anclados, necesariamente, al contexto numérico que enfrenta (en este caso, la secuencia numérica con apoyo tabular). "Los procesos perceptivos también dependen de las formas socio-históricas de vida" (Luria, 1987, p. 18). En casos de producciones de estudiantes que cursan primeros grados de la primaria, sería posible generar una fórmula algebraica tomando en consideración solamente la dimensión aritmética, al notar que se añade siempre 3 a un término para producir el siguiente, sin embargo, este camino resultaría difícil pues requiere un conteo sistemático, el cual, para el caso de la producción de Yaneth, logró transformarse en una expresión aritmética sofisticada: $17 + (15 - 6) \times 3$, pero para estudiantes de los primeros grados de primaria podría resultar difícil, si consideramos, de manera infortunada, la naturaleza todavía emergente de su pensamiento aritmético.

El trabajo a partir de relaciones entre números facilita implícitamente la emergencia de estrategias de ensayo-error, las cuales se erigen en obstáculo al pensamiento deductivo sobre el que reposa la analiticidad (Radford, 2008, 2013; Vergel, 2015). En este caso, no hay posibilidad de transitar de la abducción a la hipótesis. No obstante, la expresión sofisticada que logra producir Yaneth, que se puede representar como $17 + (15 - 6) \times 3$, sugiere la presencia de lo que propongo llamar una *proto-analiticidad* o *analiticidad incipiente*. Observemos que la obligatoriedad evidenciada en su elocución "toca sumar desde $17 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 44$", indica que ha considerado la condición de sumar 3, basada en el análisis de cómo cambian las imágenes (números 2, 5 y 8) de los tres términos dados, para poder producir su expresión sofisticada. Su ejercicio de análisis evidencia una mirada estructural de la secuencia, pues se centra en examinar relaciones no sólo entre las imágenes, sino también entre éstas y sus respectivas pre-imágenes, lo que predica muy bien acerca del uso de pensamiento relacional (Molina, 2009).

Propongo, en consecuencia, pensar en una zona conceptual en la cual se confunden formas sofisticadas de generalización aritmética y proto-formas de pensamiento algebraico (basadas en una proto-analiticidad). El caso de la profesora de primaria que expongo a continuación pretende aportar más evidencias empíricas con el objetivo de substanciar la discusión en relación con la zona conceptual aludida.

El caso de la profesora de primaria

El programa de extensión o proyecto de fortalecimiento curricular en matemáticas aludido anteriormente con profesores de básica primaria (Secretaría de Educación Distrital, SED, en prensa) tenía por objetivo proponer orientaciones didácticas a los maestros de matemáticas de 150 instituciones educativas de la ciudad de Bogotá (Colombia) para el trabajo en sus clases de matemáticas. Más específicamente, el proyecto pretendía aportar elementos didácticos para promover el desarrollo del pensamiento lógico matemático en los estudiantes de todos los grados de la escolaridad. Uno de los aspectos que desarrolló el proyecto consistía en diseñar y validar una serie de tareas que justamente posibilitaran, en su abordaje por parte de los maestros y de los estudiantes, el desarrollo de pensamiento matemático.

Varias de las tareas propuestas en el proyecto de fortalecimiento curricular tenían que ver con secuencias de patrones (tanto numéricas como figurales, ambas con apoyo tabular) y se adelantaron algunas reflexiones con los maestros sobre la importancia didáctica del trabajo en el aula a partir de este tipo de secuencias. Durante el proyecto se planteó a los maestros la siguiente secuencia figural apoyada con representación tabular:

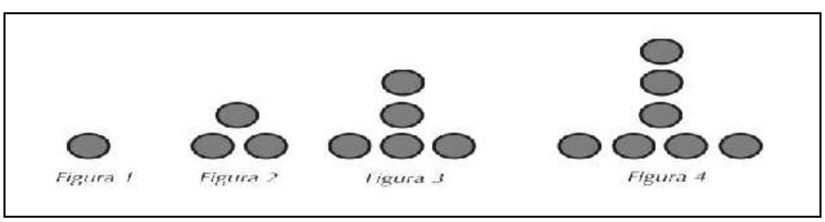


Figura 5. Secuencia figural con apoyo tabular propuesta en el proyecto SED (en prensa)

En su actividad los profesores habían construido las figuras 5 y 6 que fueron solicitadas, y tuvieron la oportunidad de analizar la secuencia, poniendo especial atención a la articulación de las estructuras espacial y numérica en la idea de identificar las variables independiente y dependiente, así como proponer alguna relación entre ellas. Se esperaba que estas reflexiones didácticas sirvieran de insumo para el trabajo posterior que ellos desarrollarían con sus estudiantes a través de la implementación de las tareas, cuyas producciones debían ser analizadas a la luz de las ideas teóricas, provenientes de la didáctica de la matemática, que se discutían previamente en las sesiones de trabajo.

Frente a la pregunta *¿cuántos círculos tiene la figura 100?,* una profesora de básica primaria responde de la siguiente manera:

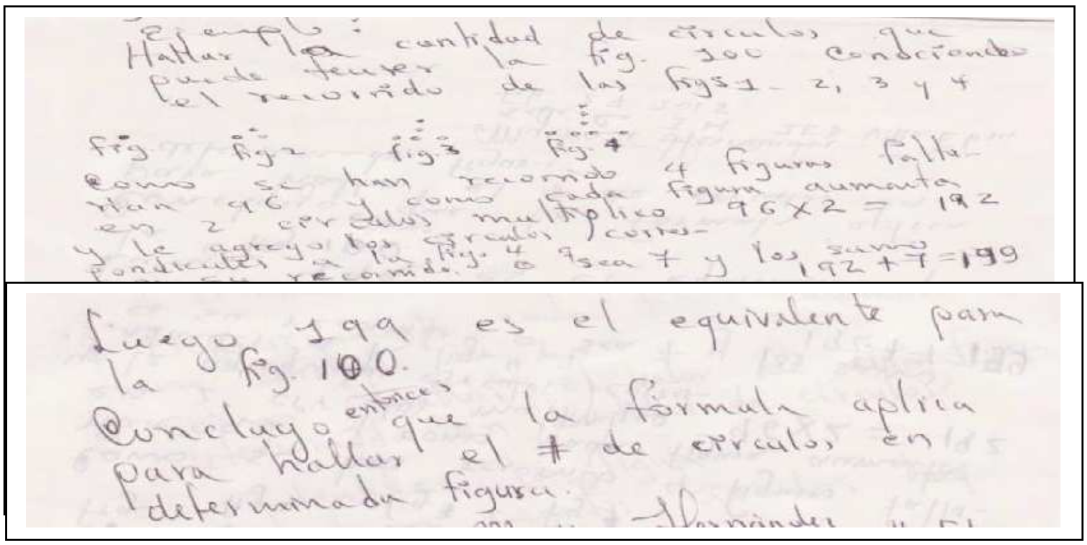


Figura 6. Producción de una profesora de básica primaria que evidencia una generalización aritmética sofisticada

Es clave destacar el sorprendente parecido de la producción sofisticada de esta profesora con la producción de Yaneth analizada anteriormente. Recordemos que la estudiante aborda una secuencia numérica con apoyo tabular, mientras que esta profesora trabaja sobre una secuencia figural con apoyo tabular. En su producción se observa que Yaneth se ancla en 17 que corresponde al Término 6. Por su parte, en su respuesta se observa cómo la profesora se ancla en el número de círculos de la Figura 4 (7 círculos). Ella dice: *"*96 *es lo que le hace falta a* 4 *para llegar a* 100 *y cada figura aumenta de a* 2, *entonces lo que hago es multiplicar* 96×2 *y a ese resultado le sumo* 7 *que son los círculos de la figura 4".* El hecho de contar con índices perceptivos generalizables en las secuencias figurales, propulsa una articulación de las estructuras espacial y numérica, articulación que viene a constituir un aspecto clave en el desarrollo del pensamiento algebraico (Radford, 2010, 2013, 2018a; Vergel, 2015, 2016a, 2016c; Vergel y Rojas, 2018), pues la descomposición de figuras permite la creación de relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas y hacer cálculos *sin distinguir entre éstas* (esto es lo que Descartes llamó lo *analítico*). Como en el caso de la producción de Yaneth, aquí también emerge un tipo de relaciones, basado en una mirada estructural de la secuencia, que confiere un carácter algebraico a lo que se llama pensamiento relacional (Molina, 2009).

Observemos que su testimonio hacia el final, *"Concluyo entonces que la fórmula aplica para hallar el número de círculos en determinada figura"*, sugiere pensar, aquí también, en la *deducción primitiva o incipiente*, la cual, en este caso, proviene de considerar su actividad perceptual sobre el número de círculos en cada una de las cuatro primeras figuras y de un análisis de cómo éstas cambian (ella dice "*entonces lo que hago es multiplicar* 96×2 *y a ese resultado le sumo* 7 *que son los círculos de la figura 4")*. Si bien la forma de predicación algebraica es general, y en tal sentido necesitaríamos las cantidades indeterminadas, este tipo de deducción que propongo quiere enfatizar el hecho de que, aun cuando la deducción en ella misma no implica un pensamiento algebraico, la producción sugiere que estaría muy cerca de este tipo de pensamiento o confundirse con éste.

La profesora procede desde un contexto aritmético y su fórmula es aritmética. No obstante, su producción hacia el final testimonia que esta fórmula aplica para calcular el número de círculos en *determinada figura,* lo cual indica que la fórmula encontrada ha sido deducida de las premisas de la tarea. De otra parte, esta fórmula le permite hallar el número de círculos de cualquier figura. Una vez más, estaríamos ante la presencia de una deducción incipiente o primitiva (proto-analiticidad). Para aclarar esta idea, podemos decir que de la expresión aritmética, por ejemplo, $3 + 8 = 8 + 3$ se puede deducir que $3 + 8 + 2 = 8 + 3 + 2$, pero, insisto, la deducción en ella misma no implica un pensamiento algebraico.

Las dos producciones muestran la diferencia, respectivamente, entre el número o imagen a alcanzar (el número correspondiente al Término 15, en el caso de Yaneth, y el número de círculos de la Figura 100, en el caso de la profesora de básica primaria) y el número del término o número de círculos en el que se anclan las dos (el número correspondiente al Término 6 para el caso de Yaneth y el número de círculos de la Figura 4 en el caso de la profesora). El análisis de las producciones en los dos casos hace pensar que podríamos estar ante la presencia de una *generalización aritmética sofisticada* ($T_{\mathrm{a}} + (n - a) \times 3 = T_n$, para el caso de Yaneth, y $T_a + (n - a) \times 2 = T_n$, para el caso de la profesora) o quizás ante la presencia de unas proto-formas de pensamiento algebraico, caracterizadas por una analiticidad incipiente tal y como lo he mostrado a través del análisis semiótico.

Conclusiones y consideraciones finales

Desde las reflexiones epistemológicas y el análisis semiótico planteados en este trabajo, es posible, por tanto, pensar en lo que propongo llamar una *zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico,* zona que estaría caracterizada fundamentalmente por el solapamiento o entrecruzamiento de estas dos formas de pensamiento matemático y que se puede inscribir en el marco de lo que se ha dado por llamar la zona de emergencia del pensamiento algebraico (Radford, 2010).

Si bien el criterio acerca de la analiticidad, tal y como lo he mostrado, ofrece un principio operacional que es útil para distinguir el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico, habría que decir también que el análisis de las estrategias de generalización en la secuencias numéricas con apoyo tabular sugiere que la estructura de la actividad (lo que Radford llama el Particular hegeliano) juega un papel importante en los tipos de generalizaciones que puedan efectuar los estudiantes. Inicialmente nos topamos con formas sofisticadas de generalización aritmética en las cuales la analiticidad no aparece explícitamente. Estas formas sofisticadas de generalización aritmética parecen estar muy cerca de, o evolucionar hacia, proto-formas de pensamiento algebraico (caracterizadas por una proto-analiticidad o analiticidad incipiente o primitiva). En *Lecciones sobre la historia de la filosofía I*, Hegel plantea que:

> Para comprender qué es la evolución, es necesario distinguir dos estados: uno es el que se conoce como posibilidad, como capacidad, lo que yo llamo el ser en sí, la potentia; el otro es el ser para sí, la realidad (actus) (Hegel, 1955, p. 26).

Y más adelante Hegel precisa que "El ser en sí y el ser para sí son los momentos de la actividad; en la acción se encierran, por consiguiente, estos dos momentos distintos" (Hegel, 1955, p. 28). La idea vygotskyana que, a mi manera de ver, se inspira en los planteamientos filosóficos de Hegel es que la naturaleza de la actividad (instrucción u obuchenie, en términos de Vygotsky) haría propulsar un tipo de pensamiento particular o transformar un estrato específico de generalidad. El análisis presentado en este trabajo brinda una pauta para pensar que es posible una evolución desde una generalización aritmética hacia una generalización aritmética sofisticada y, a su vez, hacia una proto-forma de pensamiento algebraico. Justamente una de las contribuciones de Vygotsky (2001) fue posicionar la relación crucial que existe entre la instrucción y la maduración de las funciones psíquicas listas a madurar. El filósofo ruso sostiene que, con una instrucción conveniente (obuchenie), las funciones psicológicas, que están próximas a desarrollarse, podrán hacerlo. Como lo sugiere Radford (2014a, 2014b, 2017), para remarcarlo una vez más, es el contenido o la materialidad de la actividad o labor conjunta lo que hace aparecer el saber algebraico de cierta manera (ésta es la idea de encarnación). En otras palabras, "Toda actividad se encarna en alguna forma, reviste alguna forma real, se "amortigua" en su producto, como su resultado" (Kelle y Kovalzon, 1974, p. 241).

En términos de desarrollar una mayor sensibilidad frente a los procesos de aprendizaje de los estudiantes, considero pertinente continuar auscultando este tipo de deducción incipiente o primitiva (proto-analiticidad) a través de reflexiones epistemológicas en el contexto de las generalizaciones observadas en las secuencias numéricas y figurales con apoyo tabular. Estas reflexiones de corte epistemológico deben tener en cuenta la idea de analiticidad, que caracteriza el pensamiento algebraico, y a su vez no desestimar las generalizaciones inductivas, las cuales parecen apoyar las generalizaciones de tipo aritmético. Más específicamente, propongo investigar detenidamente la *deducción*, pues ésta podría adquirir significados diferentes en la medida en que una proviene de una abducción mientras que la otra procede de una aserción no abductiva.

Este trabajo está en sus primeros pasos y plantea una discusión necesaria para, entre otras cuestiones, aportar en el desarrollo de una sensibilidad didáctica que nos permita identificar formas de pensamiento de nuestros estudiantes que han quedado invisibilizadas o, para decirlo crudamente, que no hemos sido capaces de comprender, pues quizás no hemos atendido didácticamente lo que nuestros estudiantes producen o nos quieren comunicar. Me parece que se abre una avenida de trabajo e investigación que es necesario recorrer.

El horizonte investigativo de diferenciar entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico se constituye en un verdadero desafío, si aceptamos que la aritmética ya está preñada de un carácter algebraico (Carraher & Schliemann, 2007). Mi insistencia es que es posible, tal y como lo he mostrado, identificar generalizaciones aritméticas muy sofisticadas, o quizás proto-formas de pensamiento algebraico, en los primeros grados de las que ni siquiera somos conscientes, dada la limitación del pensamiento aritmético que se ha adoptado con frecuencia en la investigación sobre álgebra temprana. Dicha limitación debe convertirse en una potencialidad si, por ejemplo, se considera un vínculo explícito entre el pensamiento proporcional y el pensamiento algebraico. La experiencia educativa sugiere que en los currículos escolares se adolece de una tematización acerca de las relaciones entre el pensamiento proporcional y el pensamiento algebraico. En este sentido, me parece que el nexo metafórico histórico entre las proporciones y el álgebra es otro aspecto interesante para explorar, tal y como aparece brevemente, y quizás de manera implícita, en la alusión al pensamiento babilónico. De hecho, Vergel y Rojas (2018, p. 21) señalan que:

> […] desde la aritmética es posible trabajar con cantidades desconocidas y con procesos de variación, por ejemplo, desde la proporcionalidad —en tanto relación entre magnitudes, que además posibilita una conexión con la geometría—, desde el reconocimiento y uso de «unidades múltiples» variables, que pocas veces es tematizado en el trabajo de aula.

Las actividades aritméticas centradas en el uso de pensamiento relacional (Molina, 2009) podría ser otra fuente de estudio que nos puede ayudar a comprender las filiaciones entre el pensamiento aritmético y el algebraico. Las actividades matemáticas que ponen en juego el pensamiento relacional "representan un cambio fundamental de un foco aritmético —procedimental, centrado en el cálculo de respuestas— a un foco algebraico —estructural, centrado en examinar relaciones—" (Molina, 2009, p. 143). Parece que este tipo de pensamiento puede constituir un eslabón entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico (Vergel y Rojas, 2018). De hecho, la idea de pensamiento algebraico que se ha caracterizado en este trabajo comporta necesariamente el análisis de las relaciones entre variables o cantidades. Y no puede ser de otra manera dado que el componente de analiticidad discutido incluye este tipo de relaciones, es decir, asume una mirada estructural (aspecto que le confiere carácter algebraico al pensamiento relacional) exigida, justamente, para llevar a cabo conscientemente procesos de deducción.

Agradecimiento

Quiero expresar un especial agradecimiento al Dr. Luis Radford por su permanente interacción conmigo, materializada en discusiones teóricas y filosóficas, las cuales han posibilitado concretar esta producción académica.

Bibliografía y referencias

Ainley, J. (1999). Doing algebra-type stuff: Emergent algebra in the primary school. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 9–16). Haifa, Israel: PME.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking (*editores invitados: L. Radford y B. D'Amore), pp. 267- 299.

Bajtín, M. (2009). *Estética de la creación verbal.* México: Siglo XXI editores.

Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization.* New York: Springer.

Carraher, D. & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En: F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Descartes, R. (1954). *The geometry*. New York: Dover. [Original work published 1637].

Descartes, R. (1983). *Discurso del método. Reglas para la dirección de la mente*. Barcelona: Ediciones Orbis, S.A.

Eco, U. (1988). *Signo*. Barcelona: Labor.

Fowler, D. (1994). Could the Greeks have used mathematical induction? Did they use it? Critical remarks on an article by S. Unguru. *Physis, 31,* 253-265.

Hegel, G. (1955). *Lecciones sobre la historia de la filosofía I.* México, D. F.: Fondo de Cultura Económica.

Holquist, M. (1994). *Dialogism: Bakhtin and his world*. London: Routledge.

Ilyenkov, E. V. (1977). *Dialectical logic.* Moscow: Progress Publishers.

Kaput, J. (1998). Teaching and learning a new algebra with understanding. Dartmouth, ma: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J., Blanton, M., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D.W. Carraher, & M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19–55). New York: Routledge.

Kelle, V. y Kovalzon, M. (1974). *Sociología marxista. Ensayo sobre la teoría marxista de la sociedad*. Buenos Aires: Cartago.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Leontiev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Luria, A.R. (1987). *Desarrollo histórico de los procesos cognitivos.* Madrid: Akal.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). *Routes to/ roots of algebra.* Milton Keynes, UK: Open University Press.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Otte, M. (2003). ¿Does mathematics have objects? ¿In what sense? *Synthese*, *134*(1-2), 181-216.

Platón (1983). *Diálogos* (M. J. Ribas, Trad.). Madrid: Sarpe.

Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 13-63). Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. En: *ZDM Mathematics Education, 40:* 83-96.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives,* pp. 303-322. Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*, pp. 3-12. Granada, España: Comares.

Radford, L. (2014a). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132-150.

Radford, L. (2014b). On teachers *and* students: An ethical cultural-historical perspective. In Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36 (Plenary Conference)*, Vol. 1, pp. 1-20. Vancouver, Canada: PME.

Radford, L. (2017). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B.

D'Amore y L. Radford (Eds.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial UD.

Radford, L. (2018a). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12- year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. New York: Springer.

Radford, L. (2018b). Semiosis and Subjectification: The Classroom Constitution of Mathematical Subjects. In Presmeg, N., Radford, L., Roth, M., & Kadunz, G. (Eds), *Signs of signification. Semiotics in mathematics education research* (pp. 21-35). Cham, Switzerland: Springer.

Rideout, B. (2008). *Pappus reborn. Pappus of Alexandria and the changing face of analysis and synthesis in late antiquity*. Master of Arts in History and Philosophy of Science (Thesis). University of Canterbury.

Secretaría de Educación Distrital, SED, (en prensa). *Propuesta pedagógica en fortalecimiento curricular para el desarrollo de aprendizajes a lo largo de la vida con énfasis en el desarrollo del pensamiento lógico matemático.* Bogotá: SED.

Subramaniam, K. & Banerjee, R. (2011). The Arithmetic-Algebra Connection: A Historical-Pedagogical Perspective. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives,* pp. 87-107. Berlín: Springer-Verlag.

Vergel, R. (2010). La perspectiva de cambio curricular Early-Algebra como posibilidad para desarrollar el pensamiento algebraico en escolares de Educación Primaria: Una mirada al proceso matemático de generalización. *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Bogotá: Asocolme.

Vergel, R. (2014). El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *Folios, 39*(1), 65-76.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Vergel, R. (2016a). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria: aspectos a considerar.* Bogotá: Editorial UD.

Vergel, R. (2016b). Algunas notas acerca del desarrollo del pensamiento algebraico temprano. In M. Iori (Ed.), *La Matematica e la sua Didattica/Mathematics and Mathematics Education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore,* pp. 509-512. Bologna: Pitagora Editrice.

Vergel, R. (2016c). El gesto y el ritmo en la generalización de patrones. *UNO: Revista de didáctica de las matemáticas, 73*, 23-31.

Vergel, R. y Rojas, P. J. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula*. Bogotá: Editorial UD.

Viète, F. (1983). *The analytic art*. New York: Dover [work published 1591].

Vygotsky, L. S. (1979). Consciousness as a problem in the psychology of behavior. *Soviet Psychology, 17*(4), 3-35.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language* (edición revisada y editada nuevamente por A. Kozulin). Cambridge, Massachusetts: The mit Press. [Obra original publicada póstumamente en ruso en 1934 y en inglés en 1962].

Vygotsky, L. S. (2001). *Obras escogidas* (Vol. 2). Madrid, España: Visor.

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente.* Barcelona: Paidós.

Desarrollo de estándares de matemáticas y finanzas funcionales en adolescentes

Claudia María **Lara** Galo
Coordinadora de matemáticas
Fundación DECA
Guatemala
Claudiamaria.Laragalo@gmail.com

Resumen

Enfocándonos en el contexto en el que se desenvuelven los jóvenes del altiplano guatemalteco, proponemos actividades que les permitan manejar conceptos relacionados con finanzas funcionales para que los apliquen en establecer planes para ahorrar y cumplir sus metas de estudio o trabajo. Las actividades se diseñan para atender a sus necesidades e intereses y desarrollar lo que los empleadores han identificado como estándares mínimos de matemáticas y finanzas funcionales para tener éxito en la vida laboral. Durante el curso se presentan las actividades que se han utilizado en diferentes programas desde modalidades presenciales hasta radiales. Además se comparten experiencias de su aplicación con los jóvenes y sus docentes: logros y dificultades.

Palabras clave: educación matemática, finanzas, estándares, emprendimiento en jóvenes

Justificación

Según los resultados que comparte el Ministerio de Educación de Guatemala en su informe de resultados de la evaluación a graduandos de 2018, los logros del dominio de contenido matemático de los egresados de la secundaria del sistema educativo nacional reflejan que apenas el 11% de los graduandos tienen un dominio de las habilidades esperadas y conocen los temas matemáticos mínimos. Al egresar, con un promedio de 19 años cumplidos, los estudiantes pueden proseguir estudios en la universidad, buscar trabajo o emprender para obtener ingresos por su cuenta. El ingreso a la universidad depende de ser admitidos luego de aprobar varias pruebas escritas y de la capacidad de pago de los estudiantes. El acceso al trabajo varía según cada joven cumpla o no los requisitos esperados por los empleadores y el organizar una microempresa se logra con ideas claras, sanos hábitos financieros y mucha voluntad. Es importante señalar que, además, la población cubierta por el sistema educativo no llega a ser el 25% del total de jóvenes que deberían cursar la secundaria. Muchos factores inciden en esta realidad ya que la pobreza, la falta de cobertura de institutos secundarios oficiales o la mala atención que en dichos institutos se ofrece a los jóvenes limitan el ingreso y favorecen la deserción. Ante esta realidad y sabiendo que hay una fuerte migración ilegal de jóvenes a los Estados Unidos de América, desde hace algunos años ciertas entidades no gubernamentales nacionales e internacionales han orientado sus esfuerzos a formar a los jóvenes para que además de alcanzar los logros (que pueden estar expresados en competencias o en estándares) de matemáticas, puedan desarrollar contenidos y habilidades de finanzas funcionales.

En el marco de estos esfuerzos, un conjunto de siete organizaciones no gubernamentales (ONG)[1] nacionales e internacionales propone un diplomado, de un año de duración, para el emprendimiento: Proyecto Puentes. Dicho diplomado compuesto por cursos variados (que cubren temas como autoestima, identidad, educación sexual y salud, valor del trabajo en equipo, emprendimiento y similares) se trabaja en sesiones fuera de la escuela con facilitadores preparados para coordinarlo y para acompañar a los participantes apoyándoles y orientándoles para que apliquen lo que van aprendiendo. El diplomado es una de las tantas posibles respuestas a las necesidades de los jóvenes del altiplano guatemalteco. Se orienta a desarrollar en ellos, dentro o fuera del sistema escolar, competencias para la vida, competencias laborales y competencias para el emprendimiento. Este minicurso trata específicamente del módulo, dentro del diplomado, para la formación de competencias relacionadas con las finanzas funcionales.

Propuesta del módulo

La propuesta de un módulo diseñado específicamente para lograr que los jóvenes tengan conocimientos, hábitos y habilidades para reconocer oportunidades y generar recursos, manejarlos y mantenerlos, entre otras cosas, podría ser redundante si los adolescentes asistieran a la escuela secundaria (conocida como "el instituto" en Guatemala) y allí se formaran integralmente. Como explicamos, la mayoría de jóvenes no asiste al instituto y, de los que asisten, pocos logran las competencias matemáticas mínimas. Se vuelve entonces, prioritario, sobretodo para satisfacer las necesidades acuciantes de los hombres y mujeres de entre 15 y 24 años de edad que deben tener recursos para sobrevivir, proponer el curso con propósitos claros, metodología y recursos efectivos y medios para evaluar impacto real.

En consenso con las ONG que han propuesto el diplomado y que tienen varios proyectos dirigidos a jóvenes en la región del altiplano guatemalteco, para orientar y definir el módulo de formación en finanzas funcionales se toman en cuenta:

a. Las competencias básicas para la vida adaptadas de lo que instituciones internacionales como la Organización para la cooperación y el desarrollo económicos (OCDE) o el Banco mundial (BM) proponen y que United States Agency for International Development (USAID) integra en sus programas y documentos (ver anexo A).

b. Los estándares internacionales y nacionales de matemáticas, el currículo nacional base, CNB, relacionado con los temas de productividad y desarrollo, emprendimiento, matemáticas y contabilidad básica (ver Anexo B).

c. Como elemento novedoso se toma en cuenta lo que los empleadores de la región del altiplano guatemalteco, donde se implementará el diplomado, sugieren o esperan de sus futuros empleados.

[1] USAID, World Vision, FUDI, Vitrubian consulting, Juárez y asociados, Akebi, Fundasistemas

Con esos insumos se plantean metas de formación, indicadores de logro y contenidos:

Competencias que desarrolla	*Estándar educativo*	*Indicador de logro*
Aplica matemáticas funcionales para la toma de decisiones. Elabora presupuestos en diversas actividades y procesos de producción.	Calcula el balance de ingresos y egresos para llevar el control financiero según un presupuesto. Calcula la relación entre gastos y dinero disponible como parte del presupuesto personal. Calcula el presupuesto considerando el ahorro y otras situaciones emergentes.	Establece un presupuesto personal.

Tabla 1. Competencias, estándares e indicador de logro 1.

Contenido 1: El dinero y tú (qué es y cómo elaborar un presupuesto).

Competencias que desarrolla	*Estándar educativo*	*Indicador de logro*
Desarrolla habilidad para tomar decisiones en sus actividades económicas. Desarrolla el hábito de ahorrar. Tiene la capacidad de planificar en proyectos alternos.	Identifica actores y elementos importantes de su comunidad. Identifica oportunidades laborales en su entorno.	Identifica fuentes de ingreso éticas de acuerdo a sus habilidades. Enuncia su vocación. Valora un proceso de ahorro.

Tabla 2. Competencias, estándares e indicadores de logro 2.

Contenido 2: Tu trabajo y producción, tu vocación (formas éticas y satisfactorias de generar ingresos).

Competencias que desarrolla	*Estándar educativo*	*Indicador de logro*
Analiza registros para tomar decisiones informadas. Administra adecuadamente sus ahorros, inversiones y préstamos. Tiene una cuenta de ahorro que alimenta al menos, trimestralmente.	Compara datos en tablas. Analiza y compara información para tomar decisiones.	Cuantifica lo que necesita para ahorrar para realizar un proyecto específico. Define un plan de ahorro trimestral o mensual. Decide sobre ahorro, préstamos e inversiones.

Tabla 3. Competencias, estándares e indicadores de logro 3.

Contenido 3: Planifica tu futuro, organiza tus finanzas (cómo manejar préstamos, créditos, inversiones).

Competencias que desarrolla	*Estándar educativo*	*Indicador de logro*
Valora el pago de impuestos consciente de su importancia para contribuir a la comunidad.	Selecciona y maneja los dispositivos y sus aplicaciones digitales según sus necesidades personales y laborales.	Enunciar instituciones que recolectan impuestos. Explicar el uso de impuestos. Valorar el pago de impuestos.

Tabla 4. Competencias, estándares e indicadores de logro 4.

Contenido 4: Responsabilidad y compromiso, paga impuestos (ciudadanía e impuestos).

La metodología es, quizás, el reto más grande. Los estándares e indicadores de logro dirigen la atención a contenidos de aritmética fundamental. Este tema se estudia, sin mayor éxito, en el nivel primario. Sacar porcentajes y sus aplicaciones a impuestos y tasas bancarias, aplicar proporciones así como manejar fracciones, moneda y sus equivalencias, y analizar pasivos, activos, deudas, etcétera, no son temas avanzados pero sí son necesarios y conocido es que los jóvenes no los dominan. Es muy importante organizar sesiones de aprendizaje diferentes a las tradicionales clases de matemáticas a las que los jóvenes están asistiendo o han asistido de forma indiferente, realizando actividades memorísticas sin sentido para ellos. Así, para el primer módulo se redacta una guía de actividades para los participantes y una guía para los facilitadores. En dichas guías se plantean varias actividades que, a lo largo del diplomado, proponen y orientan al joven para realizar un plan de vida integrando lo que cada módulo le aporta.

En el módulo de las finanzas funcionales la metodología propone actividades de aprendizaje contextualizadas en cuanto al entorno cotidiano de los jóvenes desde la geografía hasta las tradiciones de grupos culturales de la región. Cada uno de los temas se introduce con un reto o problema que llame la atención de los jóvenes ya sea porque les atañe directamente o porque les ofrece una oportunidad para su futuro. Se trabaja en equipos para dar la oportunidad de practicar diferentes roles (coordinar, redactar, expresar ideas oralmente, ordenar y manejar material, trabajar a tiempo, etcétera) y de generar diálogo usando terminología matemática o financiera. Se favorece el uso de tecnología para encontrar y compartir información (tecnología para la información y la comunicación TIC), para aprender (tecnología para el aprendizaje y la comunicación TAC) usando aplicaciones y software variado para organizarse y empoderar a cada joven (tecnología para el empoderamiento y la participación TEP). Más allá de compartir teoría, el módulo orienta a los jóvenes a observar a su alrededor las fuentes de información, de generación de recursos y a plantear sus metas e ideas en un plan de vida integral. En todo el curso hay oportunidades para evaluar los conocimientos que se van logrando y las habilidades que se van desarrollando. Debido a la edad y posibilidades de los jóvenes, es importante que tengan formas de autoevaluación que les permitan redirigir sus acciones para lograr sus metas. En el módulo encuentran instrumentos y actividades para conocer lo que han avanzado según los propósitos del curso y del diplomado.

En resumen, lo que encuentra cada joven en su guía es:

a. Un reto contextualizado que deberá resolver en grupo

b. Vocabulario indispensable y fuentes de información

c. Oportunidades y recursos en el entorno que deberá identificar

d. Espacio para definir sus metas y propósitos de vida relacionados con el tema

e. Instrumentos para evaluar sus logros y redirigir sus acciones

Logros y pendientes

Inicialmente se realiza en 2017 un plan piloto con 300 jóvenes. Para implementar el plan se forma a los facilitadores utilizando un modelo que denominamos ARR consistente en que el formador o la formadora de los facilitadores actúa (A) o modela una vivencia como la que los jóvenes encontrarán en sus guías para luego dar oportunidad a los facilitadores de reflexionar (primera R) acerca de la misma y comprender los elementos teóricos de las actividades de aprendizaje seleccionadas. Luego, ya en el aula, los facilitadores reaccionarán (la segunda R) replicando, ajustando o mejorando las actividades con los jóvenes. Se les solicita, sobretodo porque es un plan piloto, que registren sus logros, evalúen el material y cómo los jóvenes reaccionan. A los participantes del plan piloto se les aplica una prueba de contenido de acuerdo a los estándares específicos y también una escala de actitud. Ambos instrumentos se realizan antes y después del diplomado.

El plan piloto da información para mejorar el diplomado y, finalmente, en 2018 se atiende 6,035 adolescentes del altiplano guatemalteco. Los resultados de la implementación aún están en proceso de organización y análisis. Sin embargo, pronto, el modelo del diplomado llama la atención de otras ONG que reaccionan al ver la orientación y los contenidos del diplomado y cómo los jóvenes se expresan de los cursos que van recibiendo. El Instituto guatemalteco de educación radial (IGER), adapta el diplomado y el curso de finanzas logrando formar a 4,205 jóvenes que ya formaban parte de sus programas semipresenciales. También los resultados están pendientes de análisis aunque estudios preliminares aún no publicables evidencian mejora en la autopercepción de los jóvenes en cuanto a la posibilidad de trazarse metas y lograrlas así como interés en formarse en los temas de finanzas funcionales para emprender, generar recursos y saber cómo gastar su dinero de forma adecuada además de aumento de contenidos básicos y de finanzas. Algunas de las conclusiones y recomendaciones que resaltan en el borrador del resumen ejecutivo –aún en proceso de construcción y cuya divulgación no es permitida en este momento- se refieren a la metodología y materiales educativos indicando que predomina la valoración positiva de los distintos entrevistados (participante, facilitadores, organizaciones ejecutoras) acerca del diseño curricular, de los temas abordados por los módulos y de la mediación pedagógica de los materiales educativos. Se valida la importancia del módulo ¿Quién soy? como un buen inicio del proceso y se reconoce la utilidad de los demás módulos particularmente el de las finanzas funcionales. Los resultados cuantitativos (pre y postest) y cualitativos de la evaluación confirman diferencias significativas en el desarrollo de las competencias básicas para la vida propuestas por el diplomado. Entre las sugerencias destaca la necesidad de continuar con el perfeccionamiento de una metodología de evaluación de las competencias para la vida y la interpretación de los niveles de aprendizaje alcanzados en este tipo de programas formativos.

Durante el minicurso se modelará la metodología que ha sido bien aceptada haciendo énfasis en aquellas técnicas valoradas como exitosas y en la importancia de la relación facilitador – joven participante.

Referencias y bibliografía

Banco Mundial (2005). *Ampliar oportunidades y construir competencias para los jóvenes: Una agenda para la Educación Secundaria*. Washington, D.F.

Ministerio de Educación de Guatemala. (2018). *Currículo nacional base. Nivel básico.* Guatemala.

________________________________ (2019). *Resultados de la evaluación de graduandos 2018*. Guatemala.

OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico). (2005). *La definición y selección de competencias*. Resumen Ejecutivo. Paris. Disponible en: http://www.deseco.admin.ch/

USAID (United States Agency for International Development). (2008). *Investigación nacional sobre competencias básicas para la vida: Un estudio cualitativo*. Guatemala.

____. (2017). *Propuesta para los estándares laborales para programas de formación dirigidos a jóvenes*. Proyecto Leer y Aprender. Guatemala.

Apéndice A
Competencias básicas para la vida

Figura 1. Competencias básicas para la vida definidas para Guatemala.

Apéndice B
Estándares en matemáticas básicas y finanzas funcionales

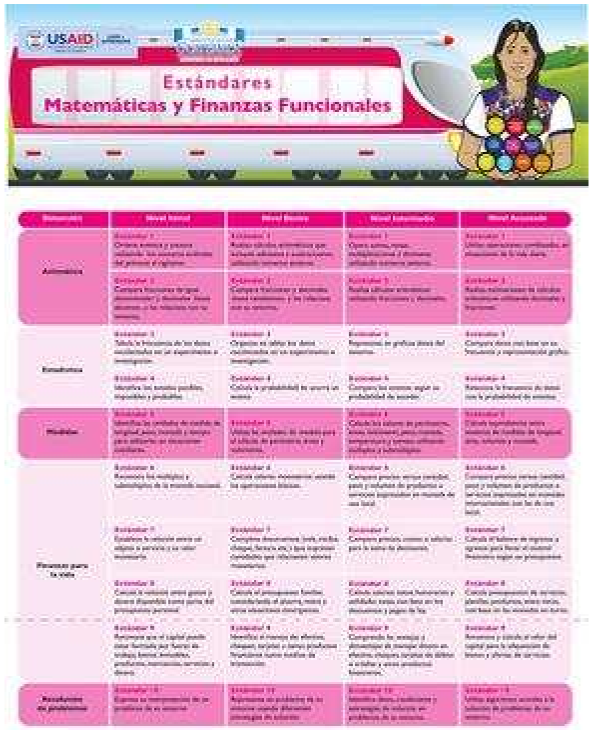
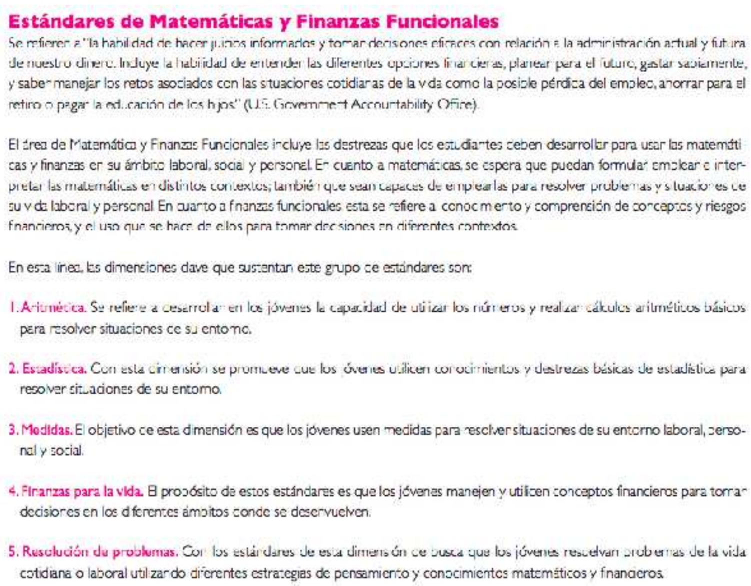


Figura 2. Estándares de matemáticas y finanzas funcionales



Estándares de Matemáticas y Finanzas Funcionales

Se refieren a "la habilidad de hacer juicios informados y tomar decisiones eficaces con relación a la administración actual y futura de nuestro dinero. Incluye la habilidad de entender las diferentes opciones financieras, planear para el futuro, gastar sabiamente, y saber manejar los retos asociados con las situaciones cotidianas de la vida como la posible pérdida del empleo, ahorrar para el retiro o pagar la educación de los hijos" (U.S. Government Accountability Office).

El área de Matemática y Finanzas Funcionales incluye las destrezas que los estudiantes deben desarrollar para usar las matemáticas y finanzas en su ámbito laboral, social y personal. En cuanto a matemáticas, se espera que puedan formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos; también que sean capaces de emplearlas para resolver problemas y situaciones de su vida laboral y personal. En cuanto a finanzas funcionales esta se refiere a conocimiento y comprensión de conceptos y riesgos financieros, y el uso que se hace de ellos para tomar decisiones en diferentes contextos.

En esta línea, las dimensiones clave que sustentan este grupo de estándares son:

1. **Aritmética.** Se refiere a desarrollar en los jóvenes la capacidad de utilizar los números y realizar cálculos aritméticos básicos para resolver situaciones de su entorno.

2. **Estadística.** Con esta dimensión se promueve que los jóvenes utilicen conocimientos y destrezas básicas de estadística para resolver situaciones de su entorno.

3. **Medidas.** El objetivo de esta dimensión es que los jóvenes usen medidas para resolver situaciones de su entorno laboral, personal y social.

4. **Finanzas para la vida.** El propósito de estos estándares es que los jóvenes manejen y utilicen conceptos financieros para tomar decisiones en los diferentes ámbitos donde se desenvuelven.

5. **Resolución de problemas.** Con los estándares de esta dimensión se busca que los jóvenes resuelvan problemas de la vida cotidiana o laboral utilizando diferentes estrategias de pensamiento y conocimientos matemáticos y financieros.

Figura 3. Estándares de matemáticas y finanzas funcionales

La idoneidad didáctica en la formación de profesores de matemáticas

Adriana **Breda**
Universitat de Barcelona
España
adriana.breda@ub.edu
Vicenç **Font** Moll
Universitat de Barcelona
España
vfont@ub.edu
Carmen Eulalia **Calle** Palomeque
Universidad de Cuenca
Ecuador
eulalia.calle@ucuenca.edu.ec

Resumen

En este minicurso, en un primero momento se presentará una actividad con el propósito de conocer los aspectos que los participantes consideran relevantes para implementarla en sus clases; en un segundo momento, se comentan las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas que permiten dar una primera respuesta a lo que se entiende por la mejora de un proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y se observa cuáles han sido utilizadas por los asistentes. En un tercer momento, se profundiza en la pregunta ¿Cómo debe ser una clase de matemáticas idónea? y se introducen los criterios de idoneidad didáctica, con sus componentes e indicadores, como respuesta a esta pregunta. Por último, se trabajan tareas que se han utilizado en la formación de profesores para introducir alguno de dichos criterios y componentes.

Palabras clave: didáctica, matemática, idoneidad, formación, profesores, reflexión.

Introducción

La Didáctica de las Matemáticas es una ciencia que debe responder a dos demandas distintas. La primera demanda es que sus constructos teóricos sirvan para comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y la segunda demanda es que éstos sirvan para guiar su mejora. Se trata de dos demandas diferentes, pero estrechamente relacionadas, ya que sin una profunda comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas no es posible conseguir su mejora (Font y Godino, 2011).

Algunas de las tendencias actuales sobre la formación de profesores proponen la investigación del profesorado y la reflexión sobre la práctica docente como un elemento clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. En esta línea de potenciar la reflexión del profesor sobre su propia práctica, el constructo criterios de idoneidad didáctica (CI) (y su desglose en componentes e indicadores), propuesto en el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero & Font, 2019), puede ser utilizado como una herramienta para organizar la reflexión del profesor – tal como se está haciendo en diferentes procesos de formación en España, Ecuador, Panamá, Chile y Argentina (Breda, Font, Lima & Pereira, 2018).

La noción de CI es una respuesta parcial a la siguiente problemática: ¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia? A priori, los criterios de idoneidad son principios que orientan "cómo se deben hacer las cosas". A posteriori, los criterios sirven para valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado.

Los criterios de idoneidad didáctica (Idoneidad Epistémica, Idoneidad Cognitiva, Idoneidad Interaccional, Idoneidad Mediacional, Idoneidad Emocional e Idoneidad Ecológica) para que sean operativos, exige definir un conjunto de componentes e indicadores observables, que permitan valorar el grado de idoneidad de cada uno de los criterios. Tanto los componentes como los indicadores de los criterios de idoneidad didáctica se han confeccionado teniendo en cuenta las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas, los principios y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas.

En este mini curso, primero se comentará una actividad con el propósito de conocer los aspectos que los participantes consideran relevantes para implementarlo en sus aulas; a continuación, se comentan las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas que permiten dar una primera respuesta a lo que se entiende por calidad de un proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y se observa cuáles han sido utilizadas por los asistentes. Posteriormente, se profundiza en la pregunta ¿Cómo debe ser una clase de matemáticas idónea? y se introducen los criterios de idoneidad didáctica, con sus componentes e indicadores, como respuesta a esta pregunta. Por último, se trabajan algunas tareas que se han utilizado en la formación de profesores para introducir alguno de dichos criterios y componentes.

Marco Teórico

En el campo de la Educación Matemática no hay consenso sobre los métodos para la valoración y mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta problemática puede ser afrontada desde una perspectiva positivista o desde una consensual (Font y Godino, 2011). Desde la primera, la investigación científica realizada en el área de Didáctica de las Matemáticas nos dirá cuáles son las causas que hay que modificar para conseguir los efectos considerados como objetivos a alcanzar. Desde la perspectiva consensual, aquello que nos dice cómo guiar la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, debe emanar del discurso argumentativo de la comunidad educativa, cuando ésta está orientada a conseguir un consenso sobre "lo que se puede considerar como mejor".

La noción de CI propuesta por el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Batanero y Font, 2019) se posiciona en la perspectiva consensual. La opción de considerar que el constructo idoneidad didáctica debe contar con un cierto grado de consenso, aunque sea local, da una manera de generar criterios parciales que permitan responder a la pregunta ¿qué se debe entender por mejora de la enseñanza de las matemáticas?

Para responder a esta pregunta, es cuestión de explorar, en una primera fase, cómo se ha generado un conjunto de tendencias y principios que gozan de un cierto consenso en la comunidad de la Educación Matemática; buscando comprender, qué papel juegan los resultados de la investigación didáctica en la generación de dichos consensos. En una segunda fase, se tiene que relacionar, relativizar, subordinar, etc., estos principios para generar una lista de criterios de idoneidad didáctica, con sus componentes e indicadores, que sirvan al profesor para organizar la reflexión sobre su práctica (Breda, Font y Pino-Fan, 2018).

La noción de idoneidad didáctica es, pues, una respuesta parcial a la siguiente problemática: ¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia? Los CI pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones. En el EOS se consideran los siguientes criterios de idoneidad didáctica (Font, Planas y Godino, 2010): 1)Idoneidad Epistémica, para valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son "buenas matemáticas"; 2) Idoneidad Cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben, y después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar; 3) Idoneidad Interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; 4)Idoneidad Mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; 5) Idoneidad Emocional, para valorar la implicación (intereses, motivaciones,…) de los alumnos durante el proceso de instrucción; 6)Idoneidad Ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional.

Los CI se desglosan en un conjunto de componentes e indicadores observables, que permiten valorar el grado de idoneidad de cada uno de los criterios. Por ejemplo, hay un consenso de que es necesario implementar unas "buenas" matemáticas, pero podemos entender cosas muy diferentes por ello, si no concretamos este principio en componentes e indicadores que lo hagan operativo. En Breda y Lima (2016), Seckel (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa.

Metodología

La razón por la cual los CI funcionan como regularidades en el discurso de los profesores, se puede explicar como mínimo de dos maneras diferentes. Una primera posible explicación está relacionada con los orígenes del constructo, ya que estos criterios, sus componentes e indicadores se han seleccionado a partir de la condición de que debían de contar con un cierto consenso en el área de Didáctica de las Matemáticas. Por tanto, una explicación plausible de que los criterios, sus componentes e indicadores funcionen como regularidades en el discurso del profesor es que reflejan consensos sobre cómo debe ser una buena enseñanza de las matemáticas ampliamente asumidos en la comunidad de educadores matemáticos; y es plausible pensar que el uso implícito que hace el profesor de ellos se debe a su formación y experiencia previa, la cual le hace partícipe de dichos consensos. Otra explicación es que el profesor que utiliza estos criterios, al no haber participado en el proceso de generación de los consensos que los soportan, los asuma como regularidades en su discurso simplemente porque se le presentan como algo naturalizado e incuestionable. En ese sentido, en la formación inicial de profesores, y también en la formación continua, parece razonable que, en lugar de presentar los criterios de idoneidad como principios ya elaborados, se creen espacios para su generación como resultado de consensos en el grupo. Siguiendo esta última idea, el minicurso sigue las siguientes fases:

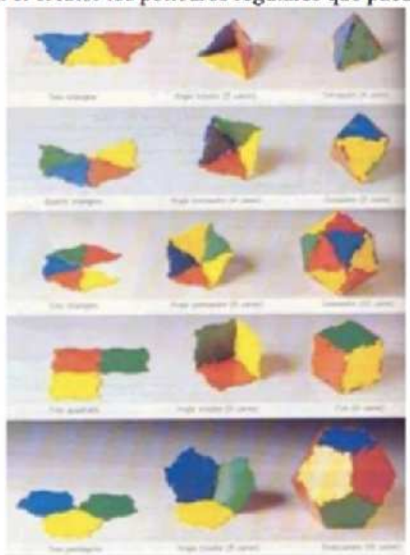
a) *Análisis de casos (sin teoría)*. Se propone a los participantes la resolución y el análisis didáctico de una tarea y se les pide que comenten si la utilizarían ellos y por qué. Se trata de que hagan un análisis a partir de sus conocimientos previos. En particular, la actividad propuesta es la de la Figura 1;

b) *Tendencias en la enseñanza de las matemáticas*. El episodio analizado se ha seleccionado de manera que los asistentes apliquen de manera implícita alguna de las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas. A continuación, se hace un resumen de las principales tendencias en la enseñanza de las matemáticas y se comentan las que han sido utilizadas por los asistentes.

Con relación a las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas se comenta que son una primera manera, un poco difusa, de observar consensos en la comunidad que se preocupa por la educación matemática. Estas tendencias se pueden considerar como regularidades que se pueden hallar en los discursos sobre la mejora de la enseñanza de las matemáticas, ya que se considera que la enseñanza realizada según estas tendencias es de calidad. Las principales tendencias pueden ser inferidas de las publicaciones más relevantes del área (por ejemplo, *handbooks* sobre investigación en educación matemática) y son: la incorporación de nuevos contenidos, presentación de una matemática contextualizada, dar importancia a la enseñanza de los procesos matemáticos (resolución de problemas, modelización matemática etc.), enseñanza y aprendizaje de tipo activo (constructivista), considerar que saber las matemáticas implica ser competente en su aplicación a contextos extramatemáticos, principio de equidad en la educación matemática obligatoria y la incorporación de nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC).

CREATOR O POLYDRON

Actividad: a) Construye con el creator los poliedros regulares que puedas



b) Completa la tabla siguiente:

Nombre	Forma de las caras	N.º caras	N.º vértices	N.º aristas	Caras que se juntan en un vértice
tetraedro					
octaedro					
icosaedro					
hexaedro o cubo					
dodecaedro					

b) Calcula para cada uno de los poliedros anteriores el resultado de: caras + vértices - aristas ¿Qué observas?

REFLEXIÓN Y ANÁLISIS DIDÁCTICO

¿Llevarías estas actividades a un aula de matemáticas (Si la respuesta es sí, especifica el curso)? ¿Por qué? (explica las razones por las que crees que se deben implementar o no)

Figura 1. Teorema de Euler

c) *Teoría (criterios de idoneidad*). Se explican elementos teóricos a los participantes, en concreto se les explican los criterios de idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores.

Se explica que los criterios de idoneidad (Godino, 2013; Breda, Font y Pino-Fan, 2018) se trata de un constructo multidimensional que se tiene que descomponer en idoneidades parciales, componentes e indicadores. Para avanzar en esta dirección, se ha considerado que, dado el amplio consenso que generan, los principios del NCTM (2000), reinterpretados, podían ser el origen de algunos de los criterios de idoneidad didáctica, o bien podían contemplarse como componentes suyos.

Se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje como el grado en que éste (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (adecuado) para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). La lista completa de los componentes e indicadores para todas las idoneidades se puede consultar en Breda y Lima (2016), Seckel (2016) y en Breda, Pino-Fan y Font (2017) ya que, por cuestiones de espacio no se han podido incorporar en este trabajo.

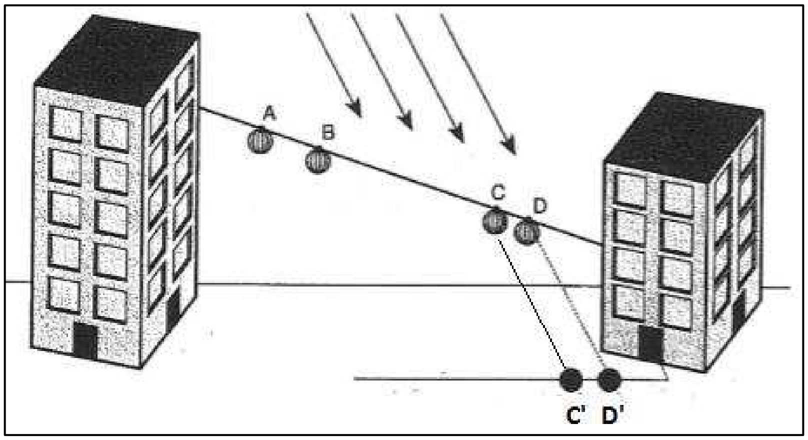
Con relación a los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad se comenta que se necesitan unos descriptores que los hagan operativos ya que, por ejemplo, todos estamos de acuerdo en que hay que impartir unas buenas matemáticas, pero podemos entender cosas muy diferentes por "buenas matemáticas". También se comenta que, para algunos criterios, los indicadores son relativamente fáciles de consensuar (por ejemplo, para el criterio de idoneidad de los medios) y que, en cambio, para otros criterios la cuestión de ponerse de acuerdo no es tan fácil. Mediante diferentes tareas el grupo va acordando diferentes criterios, las cuales suelen encajar fácilmente con los propuestos en Breda y Lima (2016) y en Breda, Pino-Fan y Font (2017), aunque pueden surgir nuevos componentes.

d) Resolución de tareas usadas en la formación de profesores para hacer emerger algunos de los componentes o indicadores de los CI. Se muestran y resuelven algunas tareas para ilustrar cómo los CI se enseñan en la formación de profesores. Se trata de tareas como la siguiente, relacionada con la idoneidad epistémica, en particular, con el componente "muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar".

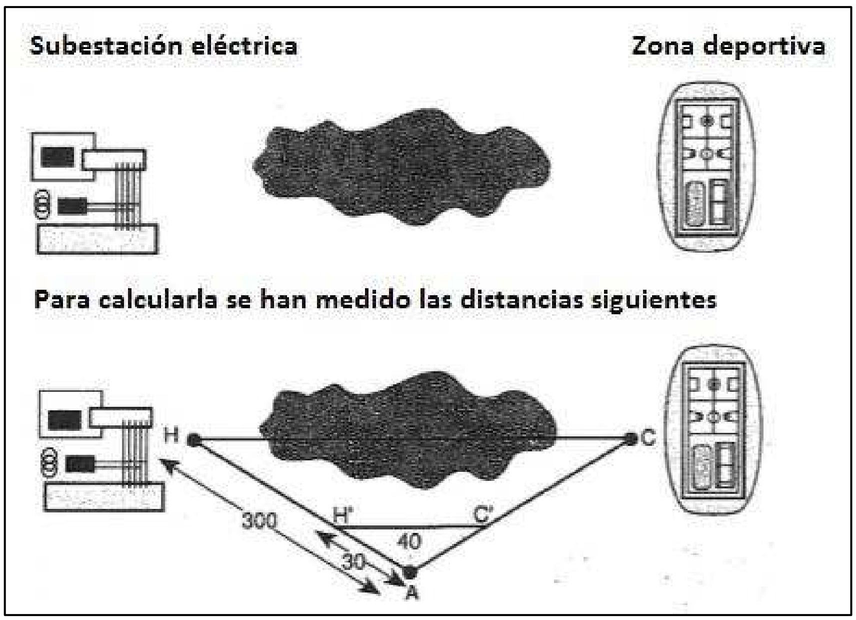
TAREA COMPLEJIDAD DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS (Teorema de Tales)

Las secuencias de tareas que pretenden enseñar el teorema de Tales en la enseñanza básica suelen hacerlo a partir de la idea de figuras semejantes y se llega a que los triángulos en posición de tales, por el hecho de ser semejantes, tienen los lados proporcionales. ¿Un alumno que ha seguido esa secuencia didáctica puede resolver las dos tareas siguientes?

Tarea 1: la tarea representa dos edificios de una calle que celebra las fiestas del barrio y un cable con elementos decorativos (A, B, C y D) de tipo festivo que va de un edificio a otro. Las flechas representan los rayos del sol, C´ es la sombra de C y D' la de D. Sabiendo que AB mide 1,5 metros, que CD mide 0,7 metros y que C'D' mide 0,6 metros, calcula la longitud del segmento de sombra A'B'.



Tarea 2: Una subestación eléctrica tiene que suministrar corriente eléctrica a una zona deportiva. Entre ambas se halla un lago que dificulta la medición de la distancia que las separa. Calcula la distancia que separa la subestación eléctrica de la zona deportiva y explica los instrumentos que utilizarías para realizar esta medición en la práctica.



¿Se trata de dos tareas que necesitan diferentes formulaciones del teorema de Tales? ¿Cómo crees que hay que explicar el Teorema de Tales para cumplir las orientaciones curriculares de la enseñanza básica, las cuales pretenden que el alumno aplique el teorema de Tales a diferentes contextos extra matemáticos?

Figura 2. Tareas sobre la complejidad del objeto matemático Teorema de Tales

e) *Aplicación de los criterios para valorar episodios de aula*. Se propone a los participantes la valoración de la idoneidad interaccional de un episodio descrito en Font, Planas y Godino (2010). En la valoración de este episodio se manifiestan apreciaciones negativas en torno a la práctica profesional del profesor del episodio. Para argumentarlas, se mencionan, entre otros aspectos, el hecho de que el profesor no ha gestionado bien algunas intervenciones de los alumnos o bien que ha creado un clima emocional desfavorable para dos de ellos, o que los ha excluido. Aunque también hay opiniones de que el profesor ha gestionado bien el episodio.

Como resultado de la discusión que se produce, al final se llega a un consenso de que se puede valorar negativamente la gestión del profesor porque ésta ha producido la exclusión de dos de los alumnos.

Conclusiones

La hipótesis que tenemos es que en este minicurso suceda lo mismo que en talleres similares (Breda, Pino-Fan y Font, 2017), en particular: 1) Los participantes, cuando tienen que opinar (sin una pauta previamente dada) sobre una actividad a ser realizada en el aula, expresan comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración. 2) Cuando las opiniones son claramente valorativas, se organizan de manera implícita o explícita mediante algunos indicadores de los componentes de los criterios de idoneidad didáctica. 3) La valoración positiva de estos indicadores se basa en la suposición implícita o explícita de que hay determinadas tendencias y principios sobre la enseñanza de las matemáticas que nos indican cómo debe ser una enseñanza de las matemáticas de calidad.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-100 (MINECO/FEDER, UE) y REDICE18-2000 (ICE-UB).

Referencias y bibliografía

Breda, A., Font, V. & Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*(2), 1-41.

Breda, A., Font, V., Lima, V. M. R. & Pereira, M. V. (2018). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. *Transformación*, *14*(2), 162 -176

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018) Criterios Valorativos y Normativos en La Didáctica de las Matemáticas: el Caso del Constructo Idoneidad Didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278.

Breda, A., & Lima, V. M. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT*, *5*(1), 74-103.

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal Of Mathematics Science And Technology Education*, *13*(6), 1893-1918.

Font, V. y Godino, J. D. (2011), Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato, en J. M. Goñi (ed.), *Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas* (pp. 9-55). Barcelona: Graó.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105.

Godino, J. D. (2013) Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*(11), 111-132.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 35-40.

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school* *mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática.* Tesis de doctorado no publicada. Barcelona, España: Universitat de Barcelona.

Recursos educativos abiertos para matemáticas: impacto y retos

Edison **de Faria** Campos
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Asociación de Matemática Educativa, ASOMED
Costa Rica
edefaria@gmail.com

Resumen

En las dos últimas décadas hemos sido testigos de la evolución de un movimiento que empezó con el desarrollo de software libre y de código abierto hasta llegar a la creación de recursos libres con fines educativos. La esencia del movimiento hacia Recursos Educativos Abiertos (REA) es la idea simple y potente de que el conocimiento es un bien público y la tecnología ofrece una oportunidad extraordinaria para que todos lo compartan de forma libre y gratuita. Este minicurso se enfocará en aquellos recursos educativos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde tres aristas: contenidos educativos, las herramientas utilizadas para su creación y los principales recursos que facilitan su implementación. Compartiremos algunos casos exitosos de REA y el impacto de ellos en el ámbito educativo.

Palabras clave: Recursos educativos abiertos, Recursos educativos libres, TIC y educación,

Introducción

Los Recursos Educativos Abiertos (REA) o de libre acceso son materiales para la enseñanza, el aprendizaje o investigación abiertos, de libre acceso, gratuitos, públicos y accesibles en la Red bajo licencias que permiten su reutilización, adaptación y distribución gratuitas.

En el 2001 el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) creó la iniciativa MIT OpenCourseWare (OCW), que consiste en dar acceso libre y gratuito en la web a los materiales educativos de todos sus cursos oficiales. En marzo del 2019 alcanzó la cifra de más de 2400 cursos publicados de grado y posgrado y unos 300 millones de visitantes (http://ocw.mit.edu). En el mismo año 2001 se fundó la organización sin fines de lucro Creative Commons, que se dedica a promover el acceso y el intercambio de recursos mediante el desarrollo de instrumentos jurídicos gratuitos que facilitan el uso y el compartir de los recursos creados (https://creativecommons.org).

El término Recursos Educativos Abiertos fue adoptado por primera vez en el Foro Mundial sobre el Impacto de materiales formativos abiertos para la Educación Superior en países en desarrollo, organizado por la UNESCO (2002) en París. En esta ocasión la definición recomendada para Recursos Educativos Abiertos fue: la disposición abierta de recursos educativos, permitidos por tecnologías de la información y la comunicación, para la consulta, uso y adaptación por parte de una comunidad de usuarios con fines no comerciales (UNESCO, 2002, p. 24). Son materiales para la enseñanza, aprendizaje o investigación que son de dominio público o que se publican con una licencia de propiedad intelectual que permite su uso, adaptación y distribución gratuitos.

De acuerdo con esta definición, los REA no se refieren exclusivamente a recursos digitales, aunque el concepto generalmente se restringe a los materiales de las TIC, como lo ilustra la definición de la OCDE. (Hylen, Van Dame, Mulder, & D'Antoni, 2012).

En 2002, la Fundación Hewlett (William y Floria Hewlett Foundation) inicia su inversión en recursos educativos abiertos que son materiales de enseñanza, aprendizaje e investigación de alta calidad que las personas de todo el mundo pueden utilizar de forma gratuita y modificar. Además la fundación se ha asociado con varios productores de contenido, así como asesores técnicos y gobiernos para apoyar la creación de un ecosistema de grupos de REA y tiene una definición explícita de los REA:

> Lo REA son recursos para la enseñanza, el aprendizaje y la investigación que se encuentran en cualquier medio – digital o de otro tipo – que son de dominio público o han sido liberados bajo una licencia abierta que permite el acceso, uso, adaptación y redistribución sin costo por parte de otros, sin o con pocas restricciones. Los recursos educativos abiertos incluyen cursos completos, materiales para cursos, módulos, libros de texto, transmisión de video, exámenes, software y cualquier otra herramienta, materiales o técnicas utilizadas para apoyar el acceso al conocimiento (Consultado en el sitio web https://hewlett.org/strategy/open-educational-resources/ el 24 de marzo 2019).

Para Willey (2007), abierto significa que un recurso está disponible de forma gratuita y que los cuatro permisos (llamados las 4R por sus siglas en Inglés: Reuse, Rework, Remix y Redistribute) también están disponibles gratuitamente. Estos permisos son:

- Reutilizar (Reuse): el derecho a reutilizar el contenido en su forma inalterada.
- Revisar (Rework): el derecho a adaptar, ajustar, modificar o alterar el contenido.
- Combinar (Remix): el derecho de combinar el contenido original o revisado con otro contenido para crear algo nuevo.
- Redistribuir (Redistribute): el derecho a compartir copias del contenido original, las revisiones o las remezclas con los demás.

En el primer Congreso Mundial sobre REA realizado en París en 2012 (UNESCO, 2012) se elaboró la Declaración de París sobre los Recursos Educativos Abiertos. Las siguientes fueron las recomendaciones dadas a los Estados miembro: fomentar el conocimiento y el uso de los REA; crear entornos propicios para el uso de las TIC; reforzar la formulación de estrategias y políticas sobre REA; promover el conocimiento y la utilización de licencias abiertas; apoyar el aumento de capacidades para el desarrollo sostenible de materiales de aprendizaje de calidad; impulsar alianzas estratégicas a favor de los REA; promover la investigación sobre los REA; facilitar la búsqueda, recuperación y el intercambio de REA; promover el uso de licencias abiertas para los materiales educativos financiados con fondos públicos.

El segundo Congreso Mundial sobre los Recursos Educativos Abiertos, realizado en setiembre de 2017 en Liubliana, Eslovenia, fue organizado conjuntamente por la UNESCO y el Gobierno de Eslovenia con los siguientes objetivos: examinar soluciones para abordar los desafíos de la integración del contenido y las prácticas de REA en los sistemas educativos de todo el mundo; destacar las mejores prácticas mundiales en cuanto a políticas, iniciativas y expertos en REA y adoptar recomendaciones con miras a la integración transversal de los REA.

El tema del Congreso fue "Los REA para una educación inclusiva y equitativa de calidad: del compromiso a la acción" y el documento final producido en el evento, conocido como *Plan de acción de Liubliana 2017 sobre los REA*, contiene varias recomendaciones de posibles acciones para afrontar los retos que se plantean en el ámbito de los REA (UNESCO, 2017), acciones orientadas a desarrollar la capacidad de los usuarios para encontrar, reutilizar, crear y compartir REA; disponibilidad de los recursos en diversos idiomas; garantizar el acceso inclusivo y equitativo de REA de calidad; desarrollar modelos de sostenibilidad y entornos de políticas de apoyo.

Algunos sitios de REA para matemáticas

Algunos sitios son buscadores de recursos educativos abiertos, otros son sitios de REA, repositores de recursos y algunos de ellos son catálogos de libros de texto abierto o libre.

1. Google

   Como los REA son simplemente recursos educativos que utilizan licencia Creative Commons, podemos utilizar la búsqueda avanzada de Google. Escribimos el tema que queremos buscar, utilizamos búsqueda avanzada en preferencias y en derechos de uso seleccionamos Páginas que se pueden usar, compartir o modificar. Finalmente se activa en Búsqueda avanzada y Google buscará el tema únicamente en páginas que son libres para usar, compartir o modificar, es decir, recursos que usan licencia Creative Commons.

2. OER Commons

   Este es uno de los sitios más populares. Basta entrar el tema, disciplina, nivel educativo y buscar. El sitio permite descubrir, descargar, crear y subir todo tipo de contenido y de herramientas.

Figura 1. Usando OER Commons para buscar REA.

3. Khan Academy (https://es.khanacademy.org/math)

   Un sitio con muchos videos para matemáticas de nivel básico y medio,

4. PhET Interactive Simulations (https://phet.colorado.edu)

   Fundado en 2002 por el Premio Nobel de Física en 2001 Carl Wieman, el proyecto PhET Interactive Simulations de la Universidad de Colorado Boulder crea simulaciones interactivas de matemáticas y ciencias. Los simulacros de PhET se basan en una extensa investigación educativa y atraen a los estudiantes a través de un entorno intuitivo y de juego donde los estudiantes aprenden a través de la exploración y el descubrimiento.

5. Connexions (https://cnx.org).

   Contiene muchos libros de texto para temas matemáticos. Además contiene un conjunto de herramientas de software gratuito para ayudar a los autores a publicar y colaborar. Los instructores construyen rápidamente y comparten cursos personalizados y los estudiantes exploran los vínculos entre conceptos, cursos y disciplinas.

6. Educacion 3.0 (https://www.educaciontrespuntocero.com)

7. Merlot (https://www.merlot.org/merlot/index.htm).

   Creado por la Universidad Estatal de California, contiene material teórico y estrategias prácticas de aprendizaje. Los docentes y estudiantes de esta universidad son los encargados de compartir la información.

8. MIT Open Course Ware (https://ocw.mit.edu/index.htm)

   Sitio con material pedagógico libre de los cursos del MIT. Existen cursos para aprendizaje autónomo con recursos multimediales interactivos y es para nivel universitario. Podemos buscar recursos por tema, departamento o por número de curso. En el portal del educador existen recursos para docentes. Muchos de estos cursos fueron traducidos por Universia (una red constituida por 1.341 universidades de 23 países, que representan a 19,2 millones de estudiantes y profesores) cuyo sitio es https://www.universia.net.

9. Open Learning Initiative (https://oli.cmu.edu)

   Es una iniciativa de la Universidad Carnegie Mellon y ofrece cursos introductorios sobre teorías de aprendizaje a cargo de docentes de la institución. También ofrece cursos para estudiantes que no son estudiantes regulares de la universidad pero que quieren aprender de forma independiente sin el interés en obtener certificados.

10. TEMOA (http://www.temoa.info/es)

    Es un portal de REA desarrollado por el Tecnológico de Monterrey para la educación universitaria. Categoriza por temas, área de conocimiento, nivel educativo entre otros. También permite crear comunidades.

11. Curriki (https://www.curriki.org)

    Una comunidad que permite crear, compartir y explorar contenidos para la educación elemental, media y secundaria.

12. OpenEd (https://open.umn.edu)

Iniciativa de la Universidad de Minnesota. Es una fuente de libros de texto con licencia Creative Commons para ser descargados y usados gratuitamente. Por ejemplo para matemáticas la página web es https://open.umn.edu/opentextbooks/subjects/mathematics.

Una experiencia novedosa de recursos educativos libres y gratuitos relacionados con las matemáticas es la que se describe en la siguiente sección.

Recursos Libres de Matemáticas (RLM)

En el año 2013 se inició la implementación de la reforma del currículo de matemáticas en Costa Rica aprobado por el Consejo Superior de Educación (CSE) el 21 de mayo del 2012 (MEP, 2012), una reforma que ha recibido la aprobación de varios investigadores lationamericanos (De Faria, 2017; Rosario, Scott & Vogeli, 2015; Planas, 2016; Martínez-Ruiz y Camarena-Gallardo, 2015; Ruiz, 2017, 2018; Borba, Askar, Engelbrecht, Gadaninis, Llinares & Sánchez-Aguilar, 2016; Hernández & Scott, 2018).

Desde los inicios de la implementación del currículo de matemáticas, el Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (PREMCR) ha desempeñado un rol fundamental en varios aspectos relacionados con esta puesta en marcha, entre ellos ha asumido el liderazgo en la elaboración y ejecución de distintos tipos de recursos educativos.

Algunos de estos recursos importantes de mencionar son: el diseño y ejecución de cursos bimodales con sesiones presenciales y en línea para docentes de la educación primaria y secundaria, utilizando la plataforma Moodle, desde el 2012; diseño y ejecución de cursos virtuales para docentes y para estudiantes conocidos como Cursos Masivos Abiertos y en Línea (MOOC por sus siglas en Inglés) desde el 2014, inicialmente utilizando la plataforma Class2go y posteriormente con la plataforma Open edX, cursos considerados pioneros en América Latina. A partir del año 2016 fueron creados recursos educativos en línea para los estudiantes que necesitan realizar pruebas nacionales que los acrediten cuando se egresan de la Educación Secundaria.

Desde el 2017 el PREMCR ofrece cursos virtuales para estudiantes y docentes mediante una nueva modalidad conocida como MiniMOOC. Son cursos que tienen todas las ventajas de los MOOC pero son más compactos, versátiles y autosuficientes, se concentran en pocos temas y pueden realizarse en periodos cortos de tiempo.

Las nuevas necesidades surgidas debido a cambios en las políticas educativas de Costa Rica, principalmente en la forma de evaluar a estudiantes de la educación Primaria y Secundaria y a la participación del país en las pruebas PISA, ha llevado a los integrantes del PREMCR a buscar otras formas innovadoras que sirvan de soporte para docentes y estudiantes dentro de este nuevo escenario, lo que condujo al nacimiento de los Recursos Libres de Matemáticas.

Los Recursos Libres de Matemáticas (RLM) son distintos de los MiniMooc que mencionamos anteriormente y, en general, de los Recursos Educativos Abiertos (REA) en Español y Open Educational Resources (OER) en Inglés. Pero ¿cuáles son los elementos que hacen tan singulares los RLM? ¿Cuáles son sus principales características?

Son totalmente virtuales, de acceso libre, gratuito, el participante no tiene que matricularse como ocurre con los MOOC, MiniMooc y otros tipos de REA, favorecen el aprendizaje independiente, pueden ser utilizados en cualquier momento, saca provecho de las posibilidades de Internet, contienen recursos con recomendaciones pedagógicas para el planeamiento y gestión de aula de parte del docente. Los videos son cortos y dinámicos y se utilizan para generar aprendizaje o para movilizar y aplicar los conocimientos adquiridos.

Los RLM están organizados por niveles educativos, años 7^0, 8^0 y 9^0 de Tercer Ciclo, 10^0 y 11^0 de la Educación Diversificada. Dentro de cada año la estructura se establece con base en las áreas matemáticas de los Programas y dentro de ellas se incluyen los temas específicos de los mismos. Cada año educativo contiene sus áreas matemáticas de los Programas y en cada área se encuentran los respectivos temas.

Figura 2. Sitio web de Recursos Libres de Matemáticas.

Figura 3. Menú lateral con organización por niveles educativos y temas generales.

Para cada tema se diseña la *Unidad Virtual de Aprendizaje* (UVA) que contiene las siguientes secciones:

- *Inicio tema:* introducción a la unidad
- *Problema*: situación para desencadenar aprendizajes o movilización de estos
- *Solución problema*: solución o soluciones detalladas
- *Desarrollo tema*: explicaciones sobre los conceptos, procedimientos, habilidades o capacidades involucradas
- *Prácticas*: autoevaluación con ítems representativos de la temática, respuestas desarrolladas y realimentación
- *Videos recomendados*: videos elaborados por el PREMCR que apoyan este tema

- *Recursos adicionales*: materiales de otras fuentes que pueden coadyuvar en este tema
- *Glosario*: principales términos y conceptos utilizados en este tema
- *Para docentes*: una sección con recursos y orientaciones para el docente

La sección "Para docentes" incluye las siguientes subsecciones:

- *Inicio*: introducción a los materiales que encontrará el docente
- *Elementos didácticos*: indicaciones sobre los conocimientos, habilidades, capacidades, procesos, niveles de complejidad y enfoques que el problema seleccionado y el tema plantean
- *Otros recursos*: materiales elaborados por el PREMCR o fuentes externas que pueden servir de apoyo al docente para enseñar el tema

Los RLM con sus UVA establecen una novedosa y potente estrategia de apoyo a los estudiantes para el desarrollo de habilidades matemáticas que promuevan capacidades cognitivas superiores y a los docentes para su gestión de aula.

Conclusiones

La implementación de políticas de Recursos Educativos Abiertos ha aumentado en todo el mundo y se fundamenta en el principio de que todo el material que es financiado por recursos públicos debe ser accesible a todos.

Los REA constituyen una alternativa para el derecho al acceso a la información, cultura y derecho a una educación de calidad en el ámbito de la cultura digital. Los REA sirven de soporte para una educación de calidad, equitativa, inclusiva, libre y participativa.

Como se recomienda en el Plan de acción de Liubliana 2017 sobre los REA (UNESCO, 2017) es fundamental capacitar a las personas encargadas de formular las políticas educativas, los docentes, formadores de docentes, investigadores, estudiantes, padres y otras partes interesadas para que se sensibilicen sobre como los REA pueden aumentar los accesos a recursos educativos de calidad, mejorar el rendimiento de los estudiantes y reducir los costos de materiales además de proporcionar habilidades a los usuarios para que participen en la creación de conocimientos. Es fundamental que los docentes, formadores de docentes, investigadores y estudiantes sean capacitados para encontrar, crear, modificar, mantener y compartir REA y que las buenas prácticas de REA sirvan de modelo para los encargados de las políticas educativas en nuestros países.

Referencias y bibliografía

Borba, M., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadaninis, G., Llinares, S. & Sánchez-Aguilar, M. (2016, Junio). Blended learning, e-learning and mobile in Mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM Mathematics Education)*. Springer. DOI 10.1007/s11858-016-0798-4

De Faria, E. (2017). Cursos virtuales masivos para capacitar en matemáticas. *Memorias II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. Cali, Colombia.

Hylen, J., Van Dame, D., Mulder, F., & D'Antoni, S. (2012). Open Educational Resources: Analysis of responses to the OECD country questionnaire.*OECD Education Working Papers*, No. 76, OECD Publishing. Retrieved from http://dx.doi.org /10.1787/5k990rjhvtlv-en.

Hernández, L. & Scott, P. (2018). Review of agents and processes of curriculum design, development, and reforms in school mathematics in Costa Rica. *Proceedings of the ICMI Study 24 Conference*. Japan: University of Tsukuba. Descargado de https://drive.google.com/file/d/1za-Jlip112xg53NrZ1szjAOK3rOeTWc0/view el 20de marzo 2019.

Martínez-Ruiz, X. y Camarena-Gallardo, P. (Coord.) (2015). *La educación matemática en el siglo XXI*. México: Instituto Politécnico Nacional.

MEP (2012). Programas de estudio de Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica: autor.

Planas, N. (Coord.). (2016). *Avances y realidades de la educación matemática*. España: Editorial Graó.

Rosario, H., Scott., P. & Vogeli, B. (Eds.) (2015). *Mathematics and Its Teaching in the Southern Americas*. London: World Scientific Publishing.

Ruiz, A. (Ed.). (2017). *Teacher preparation in Mathematics Education in Central America and the Caribbean*. The cases of Colombia, Costa Rica, Dominican Republic and Venezuela. Switzerland: Springer International Publishing.

Ruiz, A. (2018). *Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de matemáticas que enfatiza capacidades superiores*. México: Comité Interamericano de Educación Matemática. Descargado de https://www.angelruizz.com/wp-content/uploads/2019/02/Angel-Ruiz-Evaluacion-y-pruebas-2018.pdf el 20 de marzo 2019.

UNESCO (2002). *Forum on the Impact of Open Courseware for Higher Education in Developing Countries. Final report.* Descargado de https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000128515 el 5 de marzo 2019.

UNESCO (2012). *Declaración de Paris de 2012 sobre los REA.* Congreso Mundial sobre Recursos Educativos Abiertos (REA). Paris. Descargado de https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000246687_spa?posInSet=1&queryId=647d4131-2960-45ac-b470-32f49d1d01ea el 10 de marzo 2019

UNESCO (2017). *Plan de acción de Liubliana 2017 sobre los REA*. Liubliana, Slovenia. Descargado de http://aprender3c.org/wp-content/uploads/2018/07/260762s.pdf el 15 de marzo 2019

Wiley, D. (2007). *Open education license draft*. Blog. *Iterating toward openness*. Consultado el 24 de marzo de 2019 en https://opencontent.org/blog/ archives/355

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Dime con qué gráfica andas y te diré que función eres

Eduardo **Basurto** Hidalgo
CRESUR
México
basurto.e@gmail.com

Resumen

Una articulación fluida entre los registros de representación numérico, algebraico y gráfico en objetos matemáticos, como por ejemplo funciones, es una capacidad deseable en los estudiantes de educación media, de hecho algunas investigaciones en Educación Matemática registran aportes respecto de la comprensión de dichos objetos matemáticos vía la realización de tareas que involucran el manejo de las representaciones, junto con lo anterior se presume un vínculo muy conveniente entre el uso de tecnología digital y la comprensión de ciertos aspectos de las funciones, es por eso que el propósito de este minicurso es mostrar algunas ideas de como fortalecer la comprensión de la funciones en específico de sus gráficas a partir de las prestaciones dinámicas y de retroalimentación inmediata que nos brindan algunas herramientas tecnológicas de última generación.

Palabras clave: funciones, gráficas, tecnología, retroalimentación inmediata.

Introducción

Dentro de la enseñanza de las matemáticas existen dificultades y obstáculos de distinta naturaleza dependiendo de la rama de esta disciplina que se estudie, pero algo en común a cualquiera de dichas ramas es que algunas de estas dificultades y obstáculos son provocadas por un tratamiento didáctico deficiente de los contenidos curriculares. Un ejemplo de esto se observa en muchos estudiantes que reflejan poco éxito en la parte final de su educación media superior principalmente en materias de Cálculo Diferencial e Integral, buena parte se debe a su escaso conocimiento del comportamiento de las funciones.

Es sabido que, “Uno de los conceptos centrales en el aprendizaje de las matemáticas es el de función. Después de los conocimientos de aritmética y álgebra, la construcción del concepto de función es la base para la posterior comprensión sobre otros temas de matemáticas” Hitt (2002). El estudio de las funciones en nivel secundaria se hace presente en el Programa de estudios SEP (2017) vigente en México, por medio del eje *Sentido numérico y pensamiento algebraico*, donde los alumnos profundizan en el estudio del álgebra con los tres usos de las literales, conceptualmente distintos, además se resuelven problemas que requieren el análisis, del concepto de función, a partir de los vínculos entre las representaciones gráficas, numéricas y algebraicas.

Respecto al estudio del concepto de función así como de sus representaciones, es importante mencionar que evaluaciones a nivel nacional realizadas a estudiantes mexicanos de tercer grado de secundaria por parte del Instituto Nacional para la Evaluación Educativa (INEE) como la prueba Excale así como a estudiantes de 6º semestre de bachillerato con la prueba ENLACE muestran que solamente en promedio 30% o menos de los estudiantes contestan correctamente reactivos correspondientes a situaciones tales como, identificar la función que corresponde a una gráfica o viceversa, identificar la función que corresponde a una tabla de valores o viceversa, resolver problemas que impliquen identificar la función que modele una tabla de valores, etc.

Fundamentación

A lo largo de la formación matemática de los estudiantes de secundaria se puede observar que son enfrentados a una ***polisemia*** de las literales, en específico de las variables e incógnitas al pretender formar en ellos concepciones de las literales tales como las de Küchemann (1981) y el modelo de los tres usos de la variable de Ursini y Trigueros (2006). Investigadores que en general comparten la visión de las literales en tres usos principales: ***Incógnitas específicas***, donde la literal tiene un valor desconocido específico como en las ecuaciones. ***Números generalizados***, donde la letra puede tomar más de un valor, como en el caso de la expresión de patrones en sucesiones numéricas o figurativas. ***Variables***, donde las literales son usadas para representar un rango específico de valores y se observa una relación existente entre dos conjuntos de valores.

Todavía en la secundaria, pero principalmente durante el bachillerato, a la polisemia anterior se unen otro tipo de literales llamados ***Parámetros***, los cuales como ya se mencionó han emergido esporádicamente en la secundaria y hacen presencia de manera más formal al introducir a los estudiantes en la exploración de entidades aún más generales, que poseen significados propios capaces de agrupar en familias, expresiones algebraicas en un nivel aún más abstracto.

Esto se realiza en asignaturas como Geometría analítica o Funciones mediante una presencia abundante de ***Parámetros,*** en objetos tales como familias de funciones, lugares geométricos e incluso en expresiones algebraicas que modelan diversos fenómenos o situaciones.

Este conflicto que enfrentan los estudiantes, no sólo de poder distinguir entre incógnitas y variables sino a la vez, tener que distinguir éstas de los parámetros, pensamos que es uno de los obstáculos en la conceptualización de los mismos, así como en la comprensión de conceptos matemáticos fundamentales como lo son las funciones.

Conceptualización de los parámetros como parte fundamental en la comprensión de las gráficas de funciones

La conceptualización de los ***parámetros,*** así como su diferenciación de variables o incógnitas, ha dado lugar a ciertas investigaciones en las que se destacan diversos aspectos sobre los significados que pueden tener dichos objetos matemáticos:

- Bloedy-Vinner (2001), para quien *"por un lado, el parámetro es un argumento de una función (de segundo orden), y al variar, éste, determina ecuaciones o funciones, por otro lado, dentro de cada ecuación o función, que corresponde a un valor específico del parámetro, el parámetro es una constante, mientras las otras letras son incógnitas o variables"*.

- En Drijvers (2001) se observa que "El parámetro es una variable extra en una expresión algebraica o función que generaliza toda una clase de expresiones, toda una familia de funciones o un grupo de gráficas. El parámetro puede ser considerado una meta – variable: por ejemplo, *a* en *y=ax+b* puede jugar los roles de una variable ordinaria, un fijador de posición (placeholder), una cantidad desconocida o que cambia, pero ésta actúa en un nivel más alto que el caso de una variable. Por ejemplo, un cambio del valor del parámetro no afecta sólo un punto en particular sino completamente a la gráfica. El concepto de parámetro además es adecuado para resaltar la abstracción de situaciones concretas, así que representaciones algebraicas más formales y generales se vuelven parte natural del mundo matemático de los estudiantes" Drijvers (2001, p. 222).

Dentro del fenómeno ***parámetro*** podemos identificar tres pasos esenciales en la trayectoria de aprendizaje del mismo: el parámetro como un fijador de posición (placeholder), como una cantidad que cambia y como un generalizador.

Tabla 1

Rol del Parámetro según Drijvers (2001)

Rol del parámetro	***Por ejemplo:*** ***a en y = a x + b***	***Modelo gráfico***
Fijador de posición.	***a*** contiene valores específicos, uno por uno	Una gráfica, que es remplazada por otra.
Cantidad que cambia. Parámetro que se desliza.	***a*** transita a traves de un conjunto de manera dinámica	Gráfica dinámica como cuando se pasan rapidamente las páginas de un "comic".
Generalizador. Parámetro que determina una familia.	***a*** representa un conjunto, generaliza toda la situación	Un grupo de gráficas juntas.

Desarrollo del minicurso

Dado el potencial que se tiene hoy en día con herramientas tecnológicas abiertas como Geogebra o bien comerciales como HP Prime, el manejo de las ideas de funciones relacionadas con los parámetros asociadas a las mismas que pueden determinar su forma, normalmente se inicia con el tratamiento de las mismas aprovechando las ventajas dinámicas asociadas a deslizadores como es el caso de Geogebra, colocando ciertas expresiones controladas por deslizadores que impactan de forma inmediata en las gráficas y bajo cuestionamientos indicados se busca que los estudiantes encuentren las relaciones y patrones que describan la influencia que cada parámetro tiene en la gráfica desde su variación en la expresión algebraica como se ve en las figuras 1 y 2.

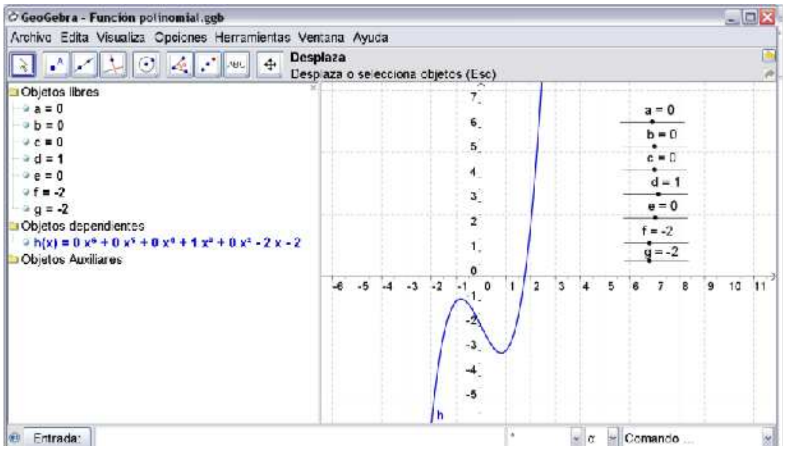


Figura 1. Función controlada por deslizadores

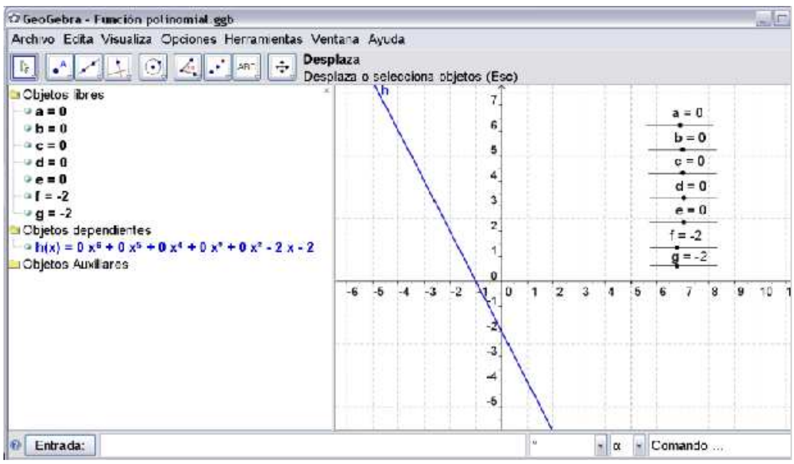


Figura 2. Función controlada por deslizadores

Esta metodología de trabajo en la que se estudian las funciones versus la expresión algébrica de las mismas, controladas de manera dinámica vía deslizadores aporta una retroalimentación inmediata entre ambas representaciones muy rica que permite reconocer ciertos comportamientos que dan luz sobre el conocimiento de cierto tipo de familias de funciones generalizándolas los objetos matemáticos.

No obstante, es un acercamiento que inicia desde la parte simbólica (algebraica) de estos objetos matemáticos, lo cual puede poner en juego mucho del bagaje algebraico que pueda haber consolidado el estudiante, lo cual, si es muy precario, como es el caso de muchos estudiantes de nivel medio, pondrá en dificultades a los estudiantes y podría alejarlos del objetivo de la actividad.

Después de explorar y discutir estas ideas en el minicurso, pondremos en el centro otro tipo de actividad proveniente de un avance tecnológico puesto a disposición recientemente, el cual permite esbozar gráficas, ya sea con el dedo en sistemas touch o con el mouse en aquellos dispositivos que no lo sean.

La tecnología de HP_Prime permite realizar este tipo de esbozos que son ajustados automáticamente por el dispositivo en el entorno gráfico, a diferencia de Geogebra que permite realizar diseños a mano alzada, pero sin un ajuste automático.

La actividad consiste que en el entorno gráfico de la aplicación de funciones, se esboza una recta que pase solo por los cuadrantes I y III de plano rectangular como se ve en la Figura 3.

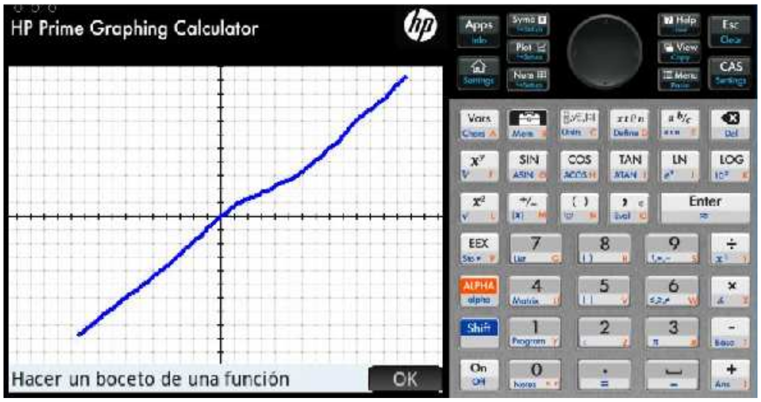


Figura 3. Esbozo de una recta que pasa por los cuadrantes I y III

Una vez que están satisfechos con el esbozo, se pide que intenten generar un esbozo de una gráfica de paralela a la primera por arriba y otra por abajo, algo similar a lo que se realiza en la Figura 4.

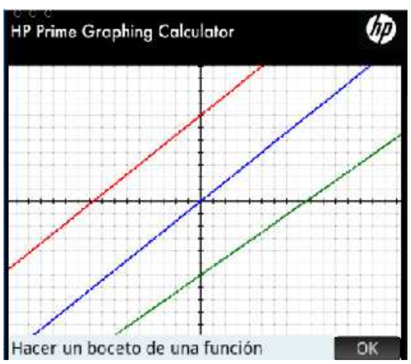
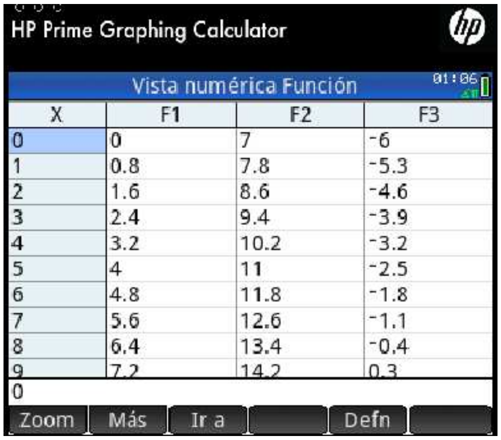


Figura 4. Esbozo de dos rectas paralelas.

El paso siguiente es pedir que se analice la representación numérica de dichas gráficas, antes de llegar a las partes simbólicas como se vería en la Figura 5.



X	F1	F2	F3
0	0	7	-6
1	0.8	7.8	-5.3
2	1.6	8.6	-4.6
3	2.4	9.4	-3.9
4	3.2	10.2	-3.2
5	4	11	-2.5
6	4.8	11.8	-1.8
7	5.6	12.6	-1.1
8	6.4	13.4	-0.4
9	7.2	14.2	0.3

Figura 5. Análisis de la representación numérica.

En esta representación se debe observar, analizar y determinar, si las tres rectas son paralelas, solo dos, o ninguna de las tres, observando la variación.

Este tratamiento ayuda a tener un principio diferente que es la gráfica, anclada a un cierto lenguaje gráfico, después migrando al análisis numérico, lo cual ya lo hace diferente, y por último arribar a la representación simbólica, en la que deberán relacionar lo ya constatado en las representaciones gráfica y numérica. Figura 6.

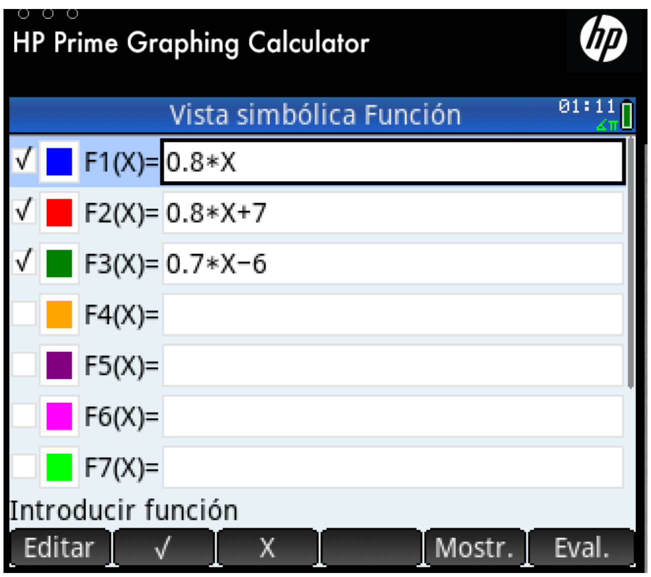


Figura 6. Análisis simbólico.

El paso siguiente en el análisis del minicurso, tratando de ponernos en un lugar empático con lo que consideran los asistentes basados en su experiencia como docentes y/o investigadores, proponer incluir una recta paralela más a las ya plateadas anteriormente, una mediante el esbozo gráfico y otra vía una propuesta desde la vista simbólica.

Evidentemente este tipo de tareas pondrá de manifiesto la generación de conjeturas, que estarán muy probablemente relacionadas con aquellas partes de la expresión que corresponde a los parámetros, pero con una aproximación diferente a la que se da tradicionalmente e incluso diferente a la que se mostro como una posibilidad en GeoGebra.

¿Qué se espera del minicurso?

Dentro la realización del minicurso se mostrará tanto el desarrollo de las actividades entes mencionadas como otras relacionadas con la función cuadrática, buscando una aproximación distinta basada en las prestaciones que actualmente nos brindan ciertas herramientas de tecnología digital, como es el caso de los esbozos a mano alzada con y sin ajuste automático, el tránsito y retroalimentación inmediata por varias representaciones, la posibilidad de tener el campo grafico como una ventana de entrada directa sin tener que pasar previamente por las partes simbólicas o numéricas, así como el uso de herramientas tecnologías relegadas a los entornos gráficos como es el caso de ZOOM ahora ya incluida en entornos numéricos.

Estas nuevas prestaciones de la tecnología digital, pensamos que empiezan a abrir ventanas por las cuales podemos acercarnos de maneras distintas a las ya conocidas con tecnología digital que lleva más de una década en la Educación Matemática como es el caso de Geogebra, lo cual no significa abandonarlas, sino enriquecerlas con las nuevas prestaciones, como menciona Basurto (2015), "*incluso con los sistemas touch que permiten esta generación de esbozos con ajuste automático y comenzar a pensar en ideas como una especie de estimación gráfica, es decir, la estimación proviene de un ambiente totalmente numérico, la cual nos permite pensar en un resultado cada vez más plausible, pero ahora esto podrá extenderse al entorno gráfico"*. Estas ideas consideramos que pueden ser exploradas, y así como la estimación numérica es de gran ayuda en el desarrollo del sentido numérico, al parecer los esbozos gráficos ajustados y retroalimentados en otras representaciones vía tecnología digital pueden coadyuvar en el desarrollo del pensamiento gráfico.

Referencias y bibliografía

Basurto (2015). *Funciones polinomiales en estudiantes de bachillerato vía un entorno tecnológico dinámico.* Tesis Doctoral. Departamento de Matemática Educativa. CINEVSTAV. México.

Bloedy-Vinner, H. (2001). *Beyond Unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra"*, R. Sutherland et al. (eds.), Perspectives on school Algebra, 177-189. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Drijvers, P. (2001). The concept of parameter in a computer algebra enviroment. H. Chick et al. (eds.), Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Vol. 1. The University of Melbourne, Australia, pp, 221-227.

Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto.* Prentice Hall. México.

Küchemann, D. (1981). Algebra, en Hart, (ed.), pp 102-119

SEP, (2017). *Matemáticas. Educación básica. Secundaria*. Programas de Estudio.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). *Enseñanza del algebra elemental. Una propuesta alternativa.* Ed. Trillas. México.

Computer science for all
Computer science and computational thinking for STEM integration

Paige **Prescott**
PhD student, Organization, Information and Learning Sciences, University of New Mexico
Albuquerque, New Mexico
pprescott@unm.edu

Abstract

There is increasing pressure on schools to expand access to computer science education. Governments are rapidly making policies to include computer science as part of their national curriculum and to require schools to address computational thinking as well. Integration of computational thinking concepts into existing content area courses such as math and science is seen as authentic to the computer science field where science and math professionals are increasingly using computation in their work. This paper is a literature review which starts with an exploration of the literature relating to computer science education, research in this field as well as computational thinking. It ends with a focus on the literature connected to integrating computer science and computational thinking into Science, Technology, Engineering and Math (STEM) classes and gives suggestions for areas in need of more advanced research.

Keywords: computational thinking, STEM, computer science education

Introduction

Computer science (CS) and computational thinking (CT) are increasingly becoming part of education K-12. In recent years, the expansion of computer science education resources has allowed schools to bring these topics into the classrooms to allow students at a young age to start learning these concepts. With the growth of the technology-related jobs, there is growing pressure to keep expanding the computer science options in schools. Most of the computer science experiences for students started in the informal education space through summer camps and afterschool clubs. This avenue helped to create foundational practices for both teachers and researchers. However, there is more need to understand how computer science and computational thinking can be part of the in-school experience for all students. Integrating computer science activities into content classes is a rich area for expansion and has the potential to impact all students in a school as opposed to the select few that participate in out-of-school experiences. The newest science standards for the United States, Next Generation Science Standards (NGSS) has identified computational thinking as an important part of scientific inquiry and is one of the eight scientific practices that all students should be engaged in while learning science content (Lead States, 2013).

The goal of this paper is to explore the literature of CS and CT education research in order to understand the current state of this field of research as it pertains to integrated learning experiences for students in elementary or middle school STEM classes in which the computing content is not separate from the lesson but is intrinsic to acquisition of the core content knowledge such as science or engineering design in addition to CT and CS.

Computer science and constructionism

The concept of CS education as a foundation, belonging in the educational setting, began with Perlis' 1961 MIT Sloan School lecture "Computers and the World of the Future" where he insisted that all undergraduates should learn to program because he saw it as a foundational understanding needed as the automation of processes was certain to become more ubiquitous (as cited in Guzdial, 2008). Seymour Papert, fresh from Piaget's educational lab, embarked on a new era of education in which he combined the new concepts of computer programming through the lens of Piaget's constructivism to create a new paradigm which he called 'constructionism.' In the early 1970's he created a new computer programming language, Logo, to use as an educational tool. His influential work, "Mindstorms: Children, computers and powerful ideas" lead to a quiet revolution in education that continues to inform and inspire educational initiatives to bring computer science into schools. Despite its publication in 1980, the ideas Papert writes about still feel modern and fresh compared to where much of formal education is now, with siloed content areas and teacher-directed learning. He continued to refine constructionism, establishing his Media Lab at MIT in 1985 which emphasized play and learning as inextricably linked. Constructionism is similar to constructivism in that learning is done through building on existing knowledge structures (Papert & Harel, 1991). However, constructionism differs in that the "constructionism boils down to demanding that everything be understood by being constructed." (p. 2) and is informed by his experiences watching art classes and, in turn, how students were learning to program graphics by teaching themselves angles in which 'learning-by-making' is the simplest definition (Papert & Harel, 1991). This approach to education was formalized in a partnership with Lego in which programmable robotics kits used Logo and were based on the ideas from MIT's Media Lab. This connection between programming and physical devices lead to a large infiltration of robotics into schools as learning devices and can be seen in modern kits such as Lego's EV3, Vex, Dash & Dot, Ozobots, Spheros, mBot, and hundreds of other variations.

Papert's work still resonates and has informed generations of computer scientists and educational researchers not only in his philosophy of education but also in computer science educational software design. Kafai and Resnick (1996) continued to build on the concepts embedded in constructionism and came up with three key principles for designing computer-based learning environments in computer science: create a learning culture, design tools with powerful ideas and allow for personal expression. In 2007, the Lifelong Kindergarten group at the MIT Media Lab launched the Scratch programming environment with the intent that it be "tinkerable, more meaningful, and more social than other programming environments"(Resnick et al., 2009). This approach led to an explosion of use in educational settings and created the foundational experience in computer science for many young students.

CT Defined

The work of Papert, DiSessa, Kafai and Resnick lead directly towards the concept of CT in which problem-solving techniques are ultimately put into practice through computers. Although Jeannette Jeannette M Wing (2006) is often attributed with coining the phrase 'computational thinking' it was, in fact, Seymour Papert who first wrote about it in 1996 (Papert, 1996). The concepts of CT have been embraced relatively rapidly into the education lexicon but there isn't a deep consensus on its definition nor how it is measured or evaluated programmatically.

CT was initially articulated as a skill that everyone, not just computer scientists, should have because it involves "problem solving, designing systems, and understanding human behavior, by drawing on the concepts fundamental to computer science."(Jeannette M Wing, 2006) Wing also calls out the concepts of abstraction and decomposition as fundamental to computational thinking. However, as the concept matured, no clear agreement developed around the topic (Barr & Stephenson, 2011; National Research Council, 2010). Brennan and Resnick (2012) recognized the lack of consensus around this topic and developed a framework for CT based on their study of 'interactive media designers' on Scratch. There are three key dimensions for their framework: computational concepts, computational practices and computational perspectives. Computational concepts are further defined into seven topics, mostly relating to computer science concepts, which are: sequences, loops, parallelism, events, conditionals, operators and data. They then further define these concepts and give examples using the Scratch code blocks.

Researchers and thought leaders in CT have tended to come back to the core four concepts of abstraction, decomposition, automation and analysis (CSTA, 2011; Lee et al., 2011; National Research Council, 2010; J.M. Wing, 2011; Yaşar, 2017). Alongside these definitions many also include dispositions for student that include persistence, collaboration, dealing with open-ended problems and ambiguity (Barr & Stephenson, 2011; CSTA, 2011; Lee et al., 2011).

The concepts of CT are often confused with just learning to program a computer because of the emphasis on the coding environment that is used (Aho, 2012; Lee et al., 2011; Voogt, Fisser, Good, Mishra, & Yadav, 2015). However, other researchers have tried to decouple CT from programming and have focused on activities that emphasize non-computer or 'unplugged' lessons to understanding some of these concepts (Brackmann et al., 2017).

CT is flexible enough to be approached through integration into different content area such as science, math and media arts (Lead States, 2013; Orton et al.; Schanzer, Fisler, Krishnamurthi, & Felleisen, 2015; Wagh, Cook-Whitt, & Wilensky, 2017; Weintrop et al., 2016; Wilensky, Brady, & Horn, 2014). And can also be done in the informal education space through afterschool clubs and summer camps (Denner, Werner, & Ortiz, 2012; Gallup, 2015; Kafai, Peppler, & Chiu, 2007; Repenning & Ioannidou, 2008).

CT Integration in STEM

Computer science (CS) is often taught in a decontextualized manner in which the CS topics are presented in a CS class that is separate from other content areas. This approach is problematic in that students do not see the usefulness and connection of CS across many fields and do not perceive CS as a creative and applicable topic that can help solve problems in various contexts. When CS is applied in science or mathematics classes there is greater understanding of the content concepts as well as CS concepts than when taught as separate topics (Blikstein, 2012; Guzdial, 1994; Orton et al.; Schanzer et al., 2015; Webb, Repenning, & Koh, 2012). Thus, integrating CS into existing classes is an important strategy when considering options for implementing CS in diverse educational settings.

CT education has been approached through informal learning as well as during the school day. The newest science standards from the United States are Next Generation Science Standards (NGSS) which explicitly calls out CT in their practices. There are many that are seeking to understand how CT can happen in a regular science classroom (Lead States, 2013). Some, like Project GUTS (Growing Up Thinking Scientifically), have designed curriculum that is aligned to both the NGSS and the Computer Science Teachers Association computer science standards that emphasizes computational modeling as a tool to engage students in CT (Lee et al., 2011). This approach is supported by Wilensky et al. (2014) who see that integrating CT practices within science classes with be a more authentic experience in terms of how CT is used by professional scientists. Other studies have shown that integrating CT and science not only advances the students' knowledge in CT but also promotes deeper learning of science concepts (DiSessa, 2001; Grover, Pea, & Stephen, 2015; Weintrop et al., 2016; Wilensky et al., 2014). There are many that feel that the effectiveness of integration with science and computer science is understudied (Grover & Pea, 2013; Voogt et al., 2015).

The use of visual programming languages like Scratch, StarLogo Nova and Alice have been seen as tools to develop the interests of young learners in CS and CT as well as increasing the motivation of students and their general learning outcomes (Resnick, 2013). Lewis and Shah (2012) showed that Scratch programming was highly correlated to increased math scores. Calao, Moreno-León, Correa, and Robles (2015) were also able to show that coding in middle school math classes led to improved understanding of mathematical processes.

Professional development for teachers

The core components of teacher PD in CS typically focus on increasing teachers' knowledge around computer science concepts (Barr & Stephenson, 2011). It is important to increase the self-efficacy through content knowledge of the teachers which will in turn have an impact on their instructional practices (Ekmekci, Parr, & Fisher, 2018; Garet, Porter, Desimone, Birman, & Yoon, 2001). In terms of PD, scaffolded PD was significantly superior to PD through self-study in terms of teacher beliefs and motivation, instructional quality, and student achievement (Kleickmann, Tröbst, Jonen, Vehmeyer, & Möller, 2016). PD effects on student learning were mediated only slightly by teacher beliefs. However, teachers' instructional practice emerged as a substantial mediator of PD effects on student achievement (Kleickmann et al., 2016). Providing scaffolded support increases the success of implementations (Lee et al., 2011; Lee, Psaila Dombrowski, & Angel, 2017). Although there has been an emphasis on increasing the content knowledge of teachers in computer science concepts, this does not sufficiently address why there are differences in implementation.

Conclusion

CT and CS education are dynamic areas of research, with many avenues to explore and many gaps to address, especially when these concepts are integrated into STEM classes. Despite efforts from a number of curriculum designers and education researchers, there is insufficient information on effective models for integration of CS/CT across content areas. Initial data shows that integration is an effective way for students to learn both the content knowledge as well as CS and CT however more work is needed to understand which STEM concepts are more supported by which CS or CT strategies. Teacher professional development models have mainly focused on improving teacher content knowledge in CS rather than the integration of CS/CT into their content area. Ongoing teacher support is needed during the academic year to allow for teachers to effectively implement CS/CT curriculum. There are few professional development models that simultaneously address STEM content knowledge along with CS/CT.

References

Aho, A. V. (2012). Computation and computational thinking. *The Computer Journal, 55*(7), 832-835.

Barr, V., & Stephenson, C. (2011). Bringing computational thinking to K-12: what is Involved and what is the role of the computer science education community? *ACM Inroads, 2*(1), 48-54.

Blikstein, P. (2012). *Bifocal modeling: a study on the learning outcomes of comparing physical and computational models linked in real time*. Paper presented at the Proceedings of the 14th ACM international conference on Multimodal interaction, Santa Monica, California, USA.

Brackmann, C. P., Rom, M., #225, n-Gonz, #225, lez, . . . Barone, D. (2017). *Development of Computational Thinking Skills through Unplugged Activities in Primary School*. Paper presented at the Proceedings of the 12th Workshop on Primary and Secondary Computing Education, Nijmegen, Netherlands.

Brennan, K., & Resnick, M. (2012). *New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking.* Paper presented at the Proceedings of the 2012 annual meeting of the American Educational Research Association, Vancouver, Canada.

Calao, L. A., Moreno-León, J., Correa, H. E., & Robles, G. (2015). Developing mathematical thinking with scratch. In *Design for teaching and learning in a networked world* (pp. 17-27): Springer.

CSTA, I. (2011). Computational thinking. Teacher resources. . Retrieved from http://csta.acm.org/Curriculum/sub/CurrFiles/472.11CTTeacherResources_2ed-SP-vF.pdf.

Denner, J., Werner, L., & Ortiz, E. (2012). Computer games created by middle school girls: Can they be used to measure understanding of computer science concepts? *Computers & Education, 58*(1), 240-249.

DiSessa, A. A. (2001). *Changing minds: Computers, learning, and literacy*: Mit Press.

Ekmekci, A., Parr, R., & Fisher, A. (2018). *Results from Rice University WeTeach_CS: A Computer Science Teaching Collaborative Serving Teachers with Different Needs through Variety of Pathways.* Paper presented at the Society for Information Technology & Teacher Education International Conference.

Gallup. (2015). *Searching for Computer Science: Access and Barriers in U.S. K-12 Education*. Retrieved from https://services.google.com/fh/files/misc/searching-for-computer-science_report.pdf

Garet, M. S., Porter, A. C., Desimone, L., Birman, B. F., & Yoon, K. S. (2001). What makes professional development effective? Results from a national sample of teachers. *American educational research journal, 38*(4), 915-945.

Grover, S., & Pea, R. (2013). Computational Thinking in K–12 A Review of the State of the Field. *Educational Researcher, 42*(1), 38-43.

Grover, S., Pea, R., & Stephen, C. (2015). Designing for deeper learning in a blended computer science course for middle school students. *Computer Science Education, 25*(2), 199-237.

Guzdial, M. (1994). Software-realized scaffolding to facilitate programming for science learning. *Interactive Learning Environments, 4*(1), 001-044.

Guzdial, M. (2008). Education Paving the way for computational thinking. *Communications of the ACM, 51*(8), 25-27.

Kafai, Y. B., Peppler, K. A., & Chiu, G. M. (2007). High tech programmers in low-income communities: Creating a computer culture in a community technology center. In *Communities and technologies 2007* (pp. 545-563): Springer.

Kafai, Y. B., & Resnick, M. (1996). *Constructionism in practice: Designing, thinking, and learning in a digital world*: Routledge.

Kleickmann, T., Tröbst, S., Jonen, A., Vehmeyer, J., & Möller, K. (2016). The effects of expert scaffolding in elementary science professional development on teachers' beliefs and motivations, instructional practices, and student achievement. *Journal of Educational Psychology, 108*(1), 21.

Lead States, N. (2013). Next generation science standards: For states, by states. In: The National Academies Press Washington, DC.

Lee, I., Martin, F., Denner, J., Coulter, B., Allan, W., Erickson, J., . . . Werner, L. (2011). Computational thinking for youth in practice. *ACM Inroads, 2*(1), 32-37. doi:10.1145/1929887.1929902

Lee, I., Psaila Dombrowski, M., & Angel, E. (2017). *Preparing STEM Teachers to offer New Mexico Computer Science for All.* Paper presented at the 48th ACM Technical Symposium on Computing Science Education, Seattle, Washington, USA.

Lewis, C. M., & Shah, N. (2012). *Building upon and enriching grade four mathematics standards with programming curriculum.* Paper presented at the Proceedings of the 43rd ACM technical symposium on Computer Science Education.

National Research Council. (2010). *The Scope and Nature of Computational Thinking*. Retrieved from Washington, D.C.:

Orton, K., Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M., Jona, K., & Wilensky, U. Bringing Computational Thinking Into High School Mathematics and Science Classrooms. *Transforming Learning, Empowering Learners*.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*: Basic Books, Inc.

Papert, S. (1996). An exploration in the space of mathematics educations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1*(1), 95-123.

Papert, S., & Harel, I. (1991). Situating constructionism. *Constructionism, 36*(2), 1-11.

Repenning, A., & Ioannidou, A. (2008). *Broadening participation through scalable game design.* Paper presented at the ACM SIGCSE Bulletin.

Resnick, M. (2013). Learn to code, code to learn. *EdSurge, May, 54*.

Resnick, M., Maloney, J., Monroy-Hernández, A., Rusk, N., Eastmond, E., Brennan, K., . . . Silverman, B. (2009). Scratch: programming for all. *Communications of the ACM, 52*(11), 60-67.

Schanzer, E., Fisler, K., Krishnamurthi, S., & Felleisen, M. (2015). *Transferring skills at solving word problems from computing to algebra through bootstrap.* Paper presented at the Proceedings of the 46th ACM Technical symposium on computer science education.

Voogt, J., Fisser, P., Good, J., Mishra, P., & Yadav, A. (2015). Computational thinking in compulsory education: Towards an agenda for research and practice. *Education and Information Technologies*, *20*(4), 715-728.

Wagh, A., Cook-Whitt, K., & Wilensky, U. (2017). Bridging inquiry-based science and constructionism: Exploring the alignment between students tinkering with code of computational models and goals of inquiry. *Journal of Research in Science Teaching*.

Webb, D. C., Repenning, A., & Koh, K. H. (2012). *Toward an emergent theory of broadening participation in computer science education*. Paper presented at the Proceedings of the 43rd ACM technical symposium on Computer Science Education, Raleigh, North Carolina, USA. http://delivery.acm.org/10.1145/2160000/2157191/p173-webb.pdf?ip=64.106.111.2&id=2157191&acc=ACTIVE%20SERVICE&key=B63ACEF81C6334F5%2E1447575D8884B3D4%2E4D4702B0C3E38B35%2E4D4702B0C3E38B35&CFID=720483329&CFTOKEN=29890755&__acm__=1485297960_b916c414e21769a21d104d044440a6f9

Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M., Orton, K., Jona, K., Trouille, L., & Wilensky, U. (2016). Defining Computational Thinking for Mathematics and Science Classrooms. *Journal of Science Education and Technology*, *25*(1), 127-147. doi:10.1007/s10956-015-9581-5

Wilensky, U., Brady, C. E., & Horn, M. S. (2014). Fostering computational literacy in science classrooms. *Communications of the ACM, 57*(8), 24-28.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33-35.

Wing, J. M. (2011). Research notebook: Computational thinking—What and why? . *The Link Magazine*.

Yaşar, O. (2017). The essence of computational thinking. *Computing in Science & Engineering*, *19*(4), 74-82.

CANP 5: La formación docente inicial y continua en Educación Matemática en Bolivia, Ecuador, Paraguay y Perú

María del Carmen **Bonilla**
APINEMA: Asociación Peruana de Investigación en Educación Matemática
Perú
mc_bonilla@otmail.com

Resumen

En el minicurso, inicialmente, se dará a conocer la problemática de la formación docente inicial y continua en el área de Matemática en Bolivia, Ecuador, Paraguay y Perú, analizada por educadores y matemáticos, administradores educacionales y profesores que estuvieron reunidos en el 5th Capacity and Networking Project (CANP 5) realizado en febrero del 2016 en la ciudad de Lima. Posteriormente, se generará una discusión sobre ella, y se comparará con la problemática de las otras regiones. El CANP 5 fue organizado por la Comisión Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas (ICMI) con la finalidad de construir una red regional andina y de Paraguay que desarrolle las potencialidades locales para enfrentar mejor los problemas y desafíos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La exposición sobre cada país se inicia con una visión histórica de la formación del profesorado, se presenta la estructura actual de la formación inicial y la formación continua de los docentes en ejercicio, culminándose con la presentación de las fortalezas, debilidades presentes y los retos a futuro.

Palabras clave: Bolivia, Ecuador, Paraguay, Perú, ICMI, 5th Capacity and Networking Project, formación docente inicial y continua.

Introducción

CANP es un foco de desarrollo importante promovido por matemáticos y educadores matemáticos de la Unión Internacional de Matemáticas (IMU) y la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) con la UNESCO, como respuesta a los desafíos actuales en la educación matemática (EM) básica. Tiene como objetivos: mejorar la EM en todos los niveles en los países en desarrollo para que sus habitantes puedan enfrentar los desafíos actuales, desarrollar las capacidades de los formadores de docentes en matemáticas, y crear redes regionales sostenidas y efectivas de maestros, educadores matemáticos y matemáticos, en coordinación con la ayuda internacional.

Del 2011 al 2016 se han organizado cinco CANP, en el África subsahariana, en Centroamérica y el Caribe, en el Sudeste de Asia, en África Oriental y el CANP 5 en la Región

Andina y Paraguay celebrado en Lima en febrero del 2016. Producto del CANP 5, se elaboraron informes sobre la formación docente inicial y continua en Bolivia (Cordero et al., 2018), Ecuador (Martínez et al., 2018), Paraguay (Gómez et al., 2018) y Perú (Osorio et al., 2018), documentos que servirán de base en el minicurso para la discusión y comparación con modelos educativos de otras regiones.

La formación inicial y continua de profesores de matemáticas en Bolivia

El Estado Plurinacional de Bolivia está conformado por una población con un porcentaje considerable de pertenencia indígena originaria y que tiene un gasto público en educación del 6,5% de Producto Interno Bruto.

Antecedentes históricos

La Formación Docente en Bolivia pasó por tres momentos: la Revolución Nacional de 1952, la ley de reforma educativa de 1994 y la ley Avelino Siñani-Elizardo Pérez del 2006. La Educación tuvo al inicio un carácter elitista, que solo preparaba maestros para áreas urbanas. A partir de 1952 se preparó a docentes en normales urbanas y rurales. En 1994 las escuelas normales se convirtieron en Institutos Normales Superiores y fueron administradas por las universidades. El 2006 los institutos superiores fueron renombrados como Escuelas Superiores de Formación de Maestras y Maestros (ESFM). La educación tiene un carácter étnico inclusivo, destacando la educación bilingüe y la cultura nativa.

Estructura del Sistema Educativo

Los niveles de la Educación Regular están formados por Inicial en Familia Comunitaria, la Primaria Comunitaria Vocacional y la Secundaria Comunitaria Productiva. La Educación es descolonizadora, comunitaria, intracultural, intercultural y plurilingüe, productiva y territorial, científica, técnica, tecnológica y artística, entre otras características; y tiene como uno de sus elementos clave la Educación para la convivencia con la naturaleza y la salud comunitaria. En la Estructura Curricular las matemáticas se encuentran en el Área del Conocimiento *Ciencia, Tecnología y Producción*. En Secundaria se trabajan 4 o 5 horas semanales de matemática, en total, un promedio de 120 horas en cada año.

Estructura de la Formación Docente

La Formación Docente pertenece al Subsistema de Educación Superior de Formación Profesional- SEP, que prepara a los maestros para la Educación Regular, Educación Alternativa o Educación Especial, a lo largo de tres etapas: Inicial, Continua y Posgrado. La *Formación Inicial* está supervisada por la Dirección General de Formación Docente del Ministerio de Educación (DGFM), la cual está a cargo de las Escuelas Superiores de Formación de Maestras(os) (ESFM) y las Unidades Académicas (UAs), únicas encargadas de la preparación académica inicial del profesorado en programas de cinco años y que finalizan con la licenciatura. Actualmente, hay un exceso de oferta de profesores de matemáticas.

Los profesores de aula de Primaria enseñan varias asignaturas. Del conjunto de horas de instrucción, les corresponde 440 horas (9% del total) para el área de Ciencia, Tecnología y Producción – Matemáticas, distribuidas en cuatro unidades de formación. Los futuros docentes de Educación Secundaria después de cinco años de estudios obtienen el título de Bachiller (Licenciatura) en Educación Secundaria Comunitaria Productiva con especialización en Matemáticas. En el Plan de Estudios, en el Campo de Conocimiento *Cosmos y Pensamiento*, en el cuarto año se desarrolla el curso de Enseñanza de las Matemáticas (160 horas). En el Campo de Conocimiento *Ciencia, tecnología y producción* se desarrollan 16 cursos con un total de 2 280 horas, que significan el 42,2 % del total de horas de instrucción. La Práctica Educativa Comunitaria se realiza durante 600 horas a lo largo de los cinco años, en forma progresiva de menor a mayor número de horas.

La *Formación Continua* docente está dirigida por la Unidad Especializada de Formación Continua-(UNEFCO), unidad descentralizada del Ministerio de Educación que ofrece cursos basados en la demanda docente. De igual manera, la *Red de Maestros* proporciona formación profesional virtual para maestros en servicio registrados en el Ministerio (software matemático). Solo las entidades gubernamentales pueden ahora ofrecer desarrollo profesional que tenga un contenido curricular. Desde el 2012, aquellos maestros que tienen un título de enseñanza en un nivel inferior, o un título de alguna otra disciplina, pueden llegar al nivel de una licenciatura con el *Programa de Formación Complementaria para Maestras(os) en ejercicio* (PROFOCOM) que dura dos años. Este programa ha tenido éxito, capacitando a más de 135 000 docentes a partir del 2014. En los cursos del programa hay una fuerte presencia ideológica y política. Muchas decisiones académicas y técnicas están contaminadas con la política.

Los *estudios de posgrado* están a cargo de la Universidad Pedagógica. Comenzó a operar desde el 2015 y depende directamente del Ministerio de Educación. Ofrece la Maestría en Matemática para Educación Secundaria Comunitaria Productiva, que tiene una duración de cinco semestres, y, además, la Especialidad de Matemática Aplicada para Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

A pesar de la mejora en la infraestructura, Bolivia es un país con uno de los índices de rendimiento más bajos en educación matemática, situación que se debe en gran parte a las deficiencias en la preparación docente. Por lo tanto, la preparación continua del maestro es vital para lograr cambios en la educación. Es necesario tener en cuenta las fortalezas, debilidades, oportunidades y amenazas del sistema educativo (Tabla A1). Se han presentado propuestas que consideran situaciones de aprendizaje que conducen a una reflexión sobre la teoría y la práctica para mejorar la enseñanza en el aula, desafiando el modelo actual de educación repetitiva y de rutina que predomina en las escuelas. Desde esa visión, el uso de las tecnologías de la comunicación y la información en el aula (Geogebra, etc.), que es actualmente mínimo, debe maximizarse en la comunicación y el aprendizaje de las matemáticas.

La formación inicial y continua de profesores de matemáticas en el Ecuador

La República del Ecuador es un país atravesado por la Cordillera de los Andes, que según datos del Banco Interamericano de Desarrollo gasta en el sector público de educación el 4,8% de su Producto Interno Bruto.

Resumen histórico

Antes de 1863 el docente ecuatoriano enseñaba todas las ciencias en el aula. En 1863 fue reestructurada la educación pública, estableciéndose en 1871 la educación primaria gratuita. En 1884 fue creado el Ministerio de Instrucción Pública y en 1899 se fundaron los institutos de formación de maestros o Normales dirigidos por religiosos. En 1928 fue creado el Instituto de Pedagogía, parte integrante de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad Central de Quito y en 1930 se enfatizó en la educación rural. La Universidad Central creó la Licenciatura en Ciencias de la Educación en 1974 y decrecieron los institutos normales. El 2014 se eliminaron las normales en beneficio de la formación universitaria.

Estructura educativa

El Sistema Educativo está respaldado por cinco documentos normativos, y dentro del sistema, la educación escolar preuniversitaria está formado por tres niveles: Educación Inicial, Educación General Básica (EGB) y Bachillerato General Unificado (BGU). La educación escolar es obligatoria, laica y gratuita desde el 2015. Los estudiantes de EGB llevan de ocho a seis horas semanales de matemática, de más a menos horas de acuerdo con el grado. En BGU las horas semanales son cuatro. Se establecieron ejes para el área de matemática en EGB y Bachillerato (Martínez et al., 2017, p. 17)

Formación Inicial Docente en Matemáticas

Todo postulante que desea ingresar a cualquier Institución Superior de Educación Pública debe rendir el Examen Nacional de Educación Superior para que, de acuerdo con el puntaje obtenido, pueda ingresar a las carreras ofrecidas. Actualmente, para ingresar a la carrera de educación el postulante tiene que obtener 800/1000 puntos, esa condición pretende que los mejores bachilleres opten por ser profesores y así elevar el nivel en la formación universitaria.

Treinta y una universidades brindan carreras de pregrado y posgrado relacionadas a Educación, 15 tienen carreras en EM, 8 ofrecen posgrados en Educación y, de ellas, 2 se refieren a Matemática. Las universidades se encargan de la formación del docente en el área de matemáticas. Se otorgan los títulos de Licenciatura en Ciencias de la Educación o en EGB- (antes educación primaria) para formar docentes que enseñan de 1ro a 7mo grados, y la Licenciatura en Ciencias de la Educación con Mención en Física y Matemáticas o Licenciatura en Física y Matemática (antes educación secundaria), para formar docentes que enseñan de 8vo a 10mo grados y Bachillerato. La carrera dura entre 8 a 10 semestres.

En los estudios de la Licenciatura en Ciencias de la Educación en EGB, las materias destinadas a las matemáticas alcanzan un porcentaje total aproximado del 5 % de su estructura curricular y un 3% de pedagogía en matemáticas, mientras que, en la Licenciatura en Ciencias de la Educación con Mención en Física y Matemáticas, el porcentaje es del 30% con un 2% adicional. La deficiente formación en matemática de los docentes de EGB lleva a que el 62 % de docentes tenga un conocimiento insuficiente de matemáticas según el Instituto Nacional de Evaluación Educativa, situación que también se aprecia en los docentes del BGU. Las prácticas preprofesionales equivalen aproximadamente al 7 % de las horas totales asignadas en la carrera, que son consideradas insuficientes.

La Universidad de Cuenca, la Universidad Central del Ecuador, la Universidad Técnica del Norte, la Universidad Estatal de Bolívar, la Universidad Nacional de Chimborazo y la Universidad Técnica de Manabí conforman una red que está rediseñando las mallas curriculares con nuevas asignaturas como Didáctica de la Matemática y la Física, Software para la enseñanza de la Matemática y la Física, Etnomatemática, Matemáticas Discretas y Matemáticas Financieras.

Cuatro universidades ofrecen estudios de Maestría en Docencia o Enseñanza de las matemáticas. De igual manera, dos universidades desarrollan investigaciones en EM, aunque, en términos generales no existen líneas claras de investigación en EM. A pesar del avance no existe conexión entre los investigadores en educación y las políticas educativas del Ministerio de Educación.

La Formación continua del docente de matemáticas

Aunque no existe una estructura claramente definida para la formación continua de docentes, las universidades han venido ofertando cursos, talleres, diplomados, así como maestrías. Desde el Ministerio de Educación se han realizado diversas acciones que buscan mejorar la enseñanza de las matemáticas como: el Sistema Integral de Desarrollo Profesional Educativo SíPROFE (2010 – 2013), que pasó a llamarse Formación Docente desde el 2014, y que hasta el 2015 capacitó al 60% de los docentes, tanto de EGB como a los docentes de matemáticas del BGU; el Programa de Maestrías con universidades españolas desde el 2014, por el cual se estableció convenios con la Universidad de Barcelona, la Universidad Autónoma de Madrid, la Universidad Complutense de Madrid y la Universidad Nacional de Educación a Distancia, habiendo culminado sus estudios 2 322 profesores.

Es importante lograr la colaboración del Estado, la educación privada, la Academia y los profesores para poner en práctica el Plan Nacional del Buen Vivir que busca mejorar la calidad de la educación en todos los niveles y modalidades, invirtiendo más en la calidad docente que en la infraestructura educativa. Para ello es necesario considerar las fortalezas, debilidades, oportunidades y amenazas del sistema educativo ecuatoriano (Tabla B1).

La formación inicial y continua de profesores de matemáticas en Paraguay

Paraguay es una nación bilingüe que tiene como idiomas oficiales al español y al guaraní, hablado por el 80% de la población. Según estudios del Banco Interamericano de Desarrollo se destina el 5,2% del Producto Interno Bruto al sector público en educación.

La formación docente en su contexto histórico

La educación en la colonia estaba a cargo de las órdenes religiosas, siendo las escuelas primarias lugares de adoctrinamiento y de aprendizaje de oficios. A partir de 1811, desde la independencia de España, se crearon los primeros institutos de formación para el nivel primario (1812). La Escuela Normal de Paraguay se abrió en 1870, siendo creadas más Escuelas Normales en el siglo XIX. En la década de 1970 las escuelas normales se convirtieron en instituciones de educación superior. En 1968 se creó el Instituto Superior de Educación (ISE), como órgano rector que supervisará la implementación de las políticas docentes promulgadas por el Ministerio de Educación. En los 70 se cerraron Escuelas Normales y se abrieron Institutos de Formación Docente (IFD). En medio del Plan de Desarrollo Educativo y las Innovaciones educativas de los 70’ los maestros fueron controlados por la dictadura de Stroessner y guardaron silencio sobre las fallas en el currículo y en la formación de los maestros. En 1998, se aprueba la Ley General de Educación y las universidades e institutos superiores, así como el ISE, por su autonomía, pueden ofrecer Licenciaturas en Ciencias de la Educación.

Estructura del Sistema Educativo de Paraguay

La educación paraguaya se compone de tres niveles: Nivel 1, que incluye Educación Inicial, el primer y segundo ciclo de la Educación Escolar Básica (EEB); Nivel 2, tercer ciclo de la EEB y la Educación Media; y nivel 3, la Educación Superior. En los años 90 la educación pública básica, gratuita y obligatoria se incrementó de seis a nueve años. En el 2010, se incluyó los niveles de Educación Inicial y Educación Media.

A pesar de que la Ley N ° 1725-01 del 2003 establece que los educadores profesionales deben poseer una certificación, muchos maestros en la mayoría de los niveles educativos no cumplen con esa condición. El mayor número de maestros certificados trabajan en el nivel de la

EEB - Primer y Segundo Ciclo, seguidos por los maestros que trabajan en la EEB - Tercer ciclo. En la EEB – Tercer ciclo los docentes del área de matemática certificados representan el 43% del total (2 300 de 5 300).

Los Institutos de Formación Docente

A inicios de la década del 90 habían 17 IFD, sólo uno de ellos era privado. La escolarización se elevó hasta el 9° Grado, por ello aumentó la demanda docente. En el 2006 existían 135 IFD, el 30% eran públicos. Ante el exceso de oferta docente, se suspendió la creación de nuevos IFD y la formación de maestros de EEB - Primer y Segundo Ciclo. Al 2011 había 41 *IFD* públicos y 80 privados. Actualmente, las universidades, los institutos superiores y los IFD pueden preparar docentes. Los IFD preparan maestros para Educación Inicial, EEB y Educación Media, así como, para la educación en servicio. No son autónomos. También se han creado siete Centros Regionales de Educación (CRE) con la finalidad de fomentar la experimentación y la innovación. Atienden a una gran población estudiantil.

Así mismo, se ofrecen cuatro programas diferentes, Profesorados, para la formación inicial de maestros para Educación Inicial, Preescolar y 1° y 2° ciclo de EEB, 3° ciclo de EEB (con especialización en Matemática) y Educación Media (con especialización en Matemáticas), que tienen una duración de tres años. También hay programas de formación docente (generalmente desarrollados por el IFD) para maestros en servicio que solo tienen un diploma de Educación Media. Los maestros de Preescolar y 1° y 2° ciclo de EEB están preparados para ser generalistas y no se especializan en EM. De igual manera, se ofrecen programas de Licenciatura en Ciencias de la Educación que brindan una especialización en Matemáticas para profesores del 3° ciclo de EEB y Educación Media, en universidades e Institutos Superiores de Educación, en colaboración con especialistas del ministerio.

Formación continua docente e investigación

El Ministerio de Educación considera cuatro posibilidades de formación continua: *cursos de desarrollo*, de al menos 100 h para fortalecer aspectos específicos*; cursos de actualización*, para incorporar competencias pedagógicas innovadoras; *cursos de profesionalización*, dirigidos a maestros que no están certificados en ciertas áreas, y; *cursos de especialización*, para quienes ya tienen un título universitario y desean especializarse en ciertas áreas.

Con respecto a la investigación, la formación docente en Paraguay tiene como un problema la falta de capacidad para producir investigación relevante. En realidad, en la actualidad la investigación es casi inexistente. Aun así, las perspectivas para el futuro son favorables. La apertura reciente de dos programas de maestría podría ayudar a revertir esa situación, uno de ellos es una Maestría en Matemáticas en la Universidad Nacional de Asunción, y el otro programa es la Maestría en Enseñanza de las Ciencias de la Universidad Nacional de Concepción.

La educación paraguaya tiene muchos desafíos que enfrentar y oportunidades que aprovechar, lo importante es tener la voluntad de cambio y eso ya se ha logrado (Tabla C1)

La formación inicial y continua de profesores de matemáticas en Perú

Perú es un país andino ubicado entre Ecuador y Bolivia, herederos de un pasado común. Según estudios realizados, Perú gasta un 3,7% de su PIB en educación.

La formación del profesorado en su contexto histórico

Desde 1822 hasta 1871 diversos gobiernos crearon Escuelas Normales que tuvieron un corto periodo de duración. En 1876 surge la Escuela Normal de Mujeres, que en 1928 viene a ser el Instituto Pedagógico Nacional de Mujeres. En 1905 se crea la Escuela Normal de Varones en Lima, que en 1967 pasa a ser la Universidad Nacional de Educación. En 1876 se abre la cátedra de Pedagogía en la Universidad de San Marcos, que se convierte en 1946 en la Facultad de Educación. A partir de 1950 se crean dos clases de escuelas normales, las rurales y las urbanas en diferentes partes del país, administradas por el Ministerio de Educación (Minedu) o por congregaciones religiosas con fondos públicos. En el futuro serán los Institutos de Educación Superiores Pedagógicos (IESP). También se abren Facultades de Educación (FU) en diferentes universidades. En la década del 70, producto de la Reforma Educativa, se crea el Instituto Nacional de Investigación y Desarrollo de la Educación que busca respuestas a la diversidad cultural y lingüística de la realidad peruana, sin embargo, fue cerrado en los 90.

Estructura educativa del país

En los años 60 se dio la gratuidad en todos los niveles de enseñanza. El sistema educativo de Perú se divide en dos etapas, Básica y Superior, y cada una de ellas en varias modalidades (Osorio, 2017, p. 52). En 1995 se inicia una Reforma Curricular (Osorio, 2017, p. 69) que culmina en la publicación el 2016 del Currículo Nacional de Educación Básica, en donde se señalan las cuatro competencias matemáticas que se desea desarrollar en los estudiantes. A pesar del esfuerzo desplegado, las evaluaciones nacionales indican que en el 2015 sólo el 27% de los estudiantes de Educación Primaria (EP) y el 10% de los estudiantes de Educación Secundaria (ES) logran un nivel satisfactorio en matemáticas.

La estructura de la formación inicial de profesores de matemáticas

La ley de Reforma Magisterial (2012) regula que la formación docente para todos los niveles y modalidades se realiza en los IESP y en las FE de las universidades acreditadas por el Sistema Nacional de Evaluación y Acreditación de la Calidad Educativa (SINEACE). El Minedu tiene competencia sobre los IESP y, desde la nueva Ley Universitaria (2014), tiene competencia sobre las universidades a través de la Superintendencia Nacional de Educación Superior (SUNEDU).

La ley de la Reforma Magisterial (2012) creó el Programa Nacional de Evaluación y Certificación Profesional Docente en todo el país, ya que las evaluaciones son requisito para acceder a la nueva carrera pública y para permanecer en ella. La Ley del Profesorado del 2013 indica que solo los docentes titulados pueden ingresar a la Carrera Magisterial. Los docentes de EP enseñan todas las materias y un profesor de ES, de acuerdo con sus estudios, puede ser especialista de matemática, de matemática y física o de matemática e informática. Muchos profesores deciden estudiar educación no tanto por vocación sino por la estabilidad laboral, la menor carga de trabajo y la flexibilidad de horario que ofrece el Estado. En los IESP menos del 20% de los ingresantes presentan un nivel de rendimiento satisfactorio. Con la finalidad de promover el acceso de estudiantes de alto rendimiento, desde el 2014 el Estado ofrece becas, tales como Vocación Maestro y para la formación docente en Educación Intercultural Bilingüe.

Tanto en los IESP como en las FE la carrera dura 10 semestres. En el caso de los IESP el plan de estudios es único, llamado Diseño Curricular Básico Nacional. Las universidades tienen autonomía. En los IESP y las FE los cursos de Matemática y Didáctica de la Matemática representan en el Plan de Estudios de EP un bajo porcentaje (7%). En el Plan de Estudios de ES el porcentaje es mayor pero no suficiente (25 %).

La Formación continua

El Proyecto Educativo Nacional al 2021 plantea la necesidad de reestructurar y fortalecer la formación docente en servicio articulada a la formación docente inicial en forma permanente, con la finalidad de organizar y desarrollar, a favor de los profesores en servicio, actividades de actualización, capacitación y especialización. La Dirección General de Desarrollo Docente y la Dirección de Coordinación Universitaria del Minedu se encargan del Plan Nacional de Formación Docente en Servicio en coordinación con los Gobiernos Regionales.

Los programas de formación continua se han desarrollado en modalidades presencial, semipresencial a distancia y virtual, como por ejemplo el PLANCAD, el programa de Formación en Servicio, el PRONAFCAP con Especialización en Matemáticas e Investigación Educativa, y el PELA o Programa de Formación de Formadores de Acompañantes Pedagógicos, con enfoque intercultural bilingüe e inclusivo o el Programa de Segunda Especialidad en Acompañamiento Pedagógico (Osorio, 2017, p. 66). La Encuesta Nacional Docente (2014) evaluó la participación de los profesores en los programas desarrollados desde 1995, así como se pudo conocer la temática más solicitada por ellos para futuros cursos de capacitación (Osorio, 2017, p. 67).

En la Red Peruana de Universidades hay universidades que ofrecen Maestrías en Educación (9) y en EM (6), universidades que dirigen Doctorados en Educación (7) o en Ciencias de la Educación (6), y tienen registradas 5 Institutos de Investigación en Educación. Se están desarrollando muchos cambios en la EM en Perú, lo importante es conocer las fortalezas, debilidades y oportunidades existentes (Tabla D1).

Referencias y bibliografía

Busso, M., Cristia, J., Hincapié, D., Messina, J. & Ripani, L. (2017). *Aprender mejor: políticas públicas para el desarrollo de habilidades.* Banco Interamericano de Desarrollo.

Cordero, S., Michel, G., Grigoriu, B., Valenzuela, M., Guzmán, R., Mamani, V. & Giacomán, H. (2018). Report on Mathematics Teacher Preparation in Bolivia. En: Y. Yamamoto & U. Malaspina (Eds.), *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay*, pp. 1-18. Switzerland: Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97544-3_1

Gómez, G., Giménez, D., Vega, O., Sanabria, M., Santa Cruz, M., Maidana, E. Mello, J. & Solís, R. (2018). Report on Mathematics Teacher Preparation in Paraguay. En: Y. Yamamoto & U. Malaspina (Eds.), *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay*, pp. 47-74. Switzerland: Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97544-3_3

Martínez, M., Castillo, P., Trelles, C., Gonzales, N., Calle, E., Ayala, A., Rivadeneira, F., Auccahuallpa, R. & Flores, M. (2017). Informe sobre la formación inicial y continua de profesores de matemáticas en el Ecuador. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 12(16), 11-45.

Martínez, M., Castillo, P., Trelles, C., Calle, E., Ayala, A., Rivadeneira, F. & Auccahuallpa, R. (2018). Report on Mathematics Teacher Preparation in Ecuador. En: Y. Yamamoto & U. Malaspina (Eds.), *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay*, pp. 19-45. Switzerland: Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97544-3_2

Osorio, A. (2017). Perú: La formación inicial y continua de los profesores de Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 12(16), 49-82.

Osorio, A., Aredo, M., Bonillla, M., Castro, O., Isidro, L., Quintanilla, C., Sabino, C & Villavicencio, M. (2018). Report on Mathematics Teacher Preparation in Perú. En: Y. Yamamoto & U. Malaspina (Eds.), *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay*, pp. 75-103. Switzerland: Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97544-3_4

Apéndice A
Fortalezas, Debilidades, Oportunidades y Amenazas - Bolivia

Tabla A1

Fortalezas, Debilidades, Oportunidades y Amenazas en la Formación Docente en Bolivia

Fortalezas
• El desarrollo docente es posible mediante estudios de posgrado y cursos profesionales.
• El sistema educativo ofrece mejores condiciones de trabajo en infraestructura y tecnología.
• La mayoría de los maestros, en todas las disciplinas y en todos los niveles, reciben una computadora para utilizarla en su enseñanza.
Debilidades
• El desempeño de los docentes no se evalúa y no se considera en su salario. La ubicación del docente en la escala salarial no está bien definida. La afiliación sindical es obligatoria
• No hay un sistema de seguimiento para evaluar la formación de los maestros y la actualización de sus conocimientos. No hay estadísticas actualizadas de los centros de formación dónde los maestros recibieron su preparación ni sobre el trabajo que realizan.
• El examen que evalúa la promoción docente solo considera aspectos administrativos, pedagógicos y filosóficos, pero no el conocimiento de la disciplina que se está enseñando.
• Hay una carga ideológica excesiva en el currículo de los futuros maestros. Dada la politización de los docentes, muchas decisiones académicas y técnicas están contaminadas con la política.
• La Olimpiada de Matemáticas se percibe como una carga docente adicional, mal remunerada.
• La enseñanza en el aula se basa en la memorización algorítmica, no desarrolla el pensamiento matemático. La enseñanza de la geometría tiene debilidades. Los materiales didácticos en uso dan prioridad a la aritmética y al álgebra, separadas de la geometría. La lógica simbólica formal se ha eliminado del plan de estudios de matemática.
• La tecnología no se usa en la enseñanza de las matemáticas. Pocos docentes asisten a los cursos sobre el uso de la tecnología en la enseñanza.
• La preparación del profesor de matemáticas ha sido eliminada por la ESFM.
Oportunidades
• En la Red de Maestros se encuentran materiales de instrucción y cursos en línea que están disponibles para maestros que desean utilizar recursos tecnológicos.
• La Universidad Pedagógica ofrece un Máster en Matemáticas para profesores en servicio.
Amenazas
• Hay un exceso de oferta laboral de profesores y pocas oportunidades para trabajar las ciudades.
• Hay una necesidad de profesores de matemáticas especializados en áreas rurales que tengan responsabilidad y compromiso. Las remuneraciones de los docentes son bajas.
• Los alumnos tienen terror a las matemáticas y hay maestros con actitud amenazadora en la clase.
• El currículo para la preparación inicial y de posgrado de los maestros es administrado por el gobierno. El Ministerio de Educación tiene la responsabilidad exclusiva en la formación de los futuros maestros. Solo los cursos impartidos por el Ministerio de Educación se consideran en el aumento de la remuneración docente.
• No hay suficientes cursos de postgrado en EM, así como cursos en línea o presenciales para el aprendizaje del uso de un software para la enseñanza de las Matemáticas.
• Muchas escuelas tienen instalaciones eléctricas inadecuadas y muchos maestros no usan herramientas tecnológicas. El Internet a menudo no está disponible en las escuelas, particularmente en las áreas rurales.

Fuente: Cordero et al. 2018, pp. 15-17.

Apéndice B
Fortalezas, Debilidades, Oportunidades y Amenazas - Ecuador

Tabla B1

Fortalezas, Debilidades, Oportunidades y Amenazas de la Formación Docente en Ecuador

Fortalezas
• Existe un número apreciable de jóvenes docentes que están motivados y cuentan con la energía necesaria para incursionar en procesos de formación y actualización de conocimientos. • Los referentes académicos de las universidades poseen experiencia, base sólida para fortalecer a los jóvenes docentes de educación media.
Debilidades
• Falta de profesores especializados en Matemática, la mayoría de los profesores de matemática tiene títulos solo de educación. No hay datos oficiales de la demanda para los próximos años. • Decrecimiento de la proporción de profesoras a medida que se incrementa el nivel de estudios. Es importante promover carreras en ciencia y tecnología dentro del género femenino. • Poco reconocimiento social y remunerativo del profesor. • Falta de interés por parte de estudiantes en educación por desarrollar destrezas matemáticas, debido a la forma mecanicista y algorítmica de las clases. • Escasa participación de matemáticos en la formación continua brindada por las universidades. • Con frecuencia la capacitación ofertada no se acompaña de procesos de seguimiento o de medición de impactos ni cuenta con asesoría y apoyo permanente a los docentes. • Falta de infraestructura adecuada, bibliotecas físicas y virtuales como demanda el siglo XXI. • Carencia de maestrías y doctorados en el área de EM accesibles al docente promedio. • Ausencia de líneas de investigación en EM y escasa integración en redes • Falta de un currículo generalizado y fortalecido para la carrera de Licenciatura en Ciencias de la Educación, mención Físico Matemático. • Deficiente dominio cognitivo en matemáticas de un porcentaje apreciable de profesores. El puntaje nacional es 547/1000 y el porcentaje de profes ores con rendimiento bajo es del 62 %.
Oportunidades
• La tendencia por parte del gobierno y los medios masivos a valorar el pensamiento científico, técnico y tecnológico, demanda a estudiantes y docentes a prepararse mejor en esta área. • El reconocimiento de la educación como un área prioritaria del plan de gobierno con la consecuente asignación de mayor presupuesto al área de capacitación docente. • Muchos profesores de la costa y sierra han obtenido títulos de cuarto nivel por convenios ofrecidos por el ministerio de educación y universidades nacionales e internacionales. • El rediseño curricular debe ser con una visión teórica-práctica integrada como una sola unidad, aumentar las horas prácticas analizando y seleccionando materias correctamente. • Las universidades buscan crear programas de postgrado y doctorado en el área de ciencias.
Amenazas
• El incremento de horas prácticas preprofesionales en el programa de formación docente (de 400 a 1800 horas) lleva a disminuir horas en materias teóricas importantes, o a inventar materias que se denominan prácticas, aunque realmente no desarrollen destrezas prácticas. • Los continuos cambios realizado sobre la Ley Orgánica de Educación Superior y su Reglamento, generan incertidumbre pues establecen nuevas jornadas y exigencias de trabajo. • Falta de comunicación coherente entre los principales involucrados en el tema de la educación y, en particular, la problemática de los profesores de matemáticas.

Fuente: Martínez et al., 2018, pp. 38, 40, 41.

Apéndice C
Desafíos y Oportunidades de la Formación Docente en Paraguay

Tabla C1
Desafíos y Oportunidades de la Formación Docente.

Desafíos y oportunidades
• Los programas de formación de maestros en Paraguay han tenido poco impacto en la práctica en el aula. Se enfatiza en la formación teórica sin una incidencia específica suficiente en la práctica. • Los estudiantes que ingresan a los *IFD* tienen dificultades por carecer de habilidades que no han sido desarrolladas en la escuela secundaria, situación que no les permite satisfacer las demandas de formación docente en matemáticas y otras áreas. • Muchos estudiantes postulan a los IFD porque no han sido admitidos en una universidad y necesitan obtener un empleo para ganarse la vida. No son los mejores estudiantes. • La formación continua no es considerada como un aspecto relevante por el Ministerio de Educación y Cultura. Es vista como una herramienta para corregir debilidades, y no se proporciona una ilación entre la formación inicial y la continua. Además, en tanto no se evalúa, existe evidencia limitada sobre el impacto que la formación continua tiene en la práctica en el aula. • Un aspecto que limita la formación inicial y continua docente está relacionada con la situación socioeconómica de los docentes en formación y en servicio, pues provienen, en su mayoría, de clases medias y bajas, y las remuneraciones son también bajas. • La formación académica de los profesores de formación docente es uno de los factores más importantes para garantizar la calidad de la formación docente. Por lo general los profesores de formación docente no tienen títulos de posgrado. Las áreas más afectadas son las Matemáticas y las Ciencias Naturales y Sociales. • Una de las razones por las que muchos docentes no superan las pruebas dadas como parte del proceso de solicitud del Ministerio para cargos docentes, es la formación inadecuada de los maestros. Hay muchos programas de formación para maestros, pero tienen una cobertura limitada, son discontinuos y carecen de un enfoque sistémico. • Los resultados de las pruebas dadas a aquellos que solicitan puestos docentes y administrativos, desde 2009, muestran deficiencias en la formación de maestros y administradores. La mayoría de los solicitantes no pasaron las pruebas y no fueron elegibles para ser contratados. Es necesario concentrar la atención en la formación inicial y continua de los maestros. • Los informes del Ministerio de Educación y Cultura en 2010 señalaron que en muchas escuelas paraguayas los maestros no tienen una formación específica para el nivel en el que están enseñando. En la Educación Inicial el 51% de los maestros no están debidamente certificados. El porcentaje de docentes no certificados para el 3° ciclo de EEB es del 38% y es del 47% para Educación Media (Tabla H1). • Otro desarrollo reciente y prometedor con respecto a la formación inicial de los maestros es que los Institutos de Formación de Maestros (*IFD*) están siendo evaluados. El informe de diagnóstico oficial y las recomendaciones con respecto a esta situación iniciarán cambios radicales y profundos que son necesarios. • Los maestros están pidiendo un desarrollo profesional futuro que comienza llenando los vacíos en el conocimiento del contenido que se perdió en su formación inicial. A continuación, quieren un enfoque específico en la enseñanza de las matemáticas. Finalmente, les gustaría recibir más ayuda para incorporar la tecnología en su enseñanza y apreciarían una introducción a algunas áreas que aún son nuevas en EM en Paraguay, como la resolución de problemas y el modelado.

Fuente: Gómez et al., 2018, pp. 67-70.

Apéndice D
Fortalezas, debilidades y oportunidades de la formación docente en Perú

Tabla D1

Fortaleza, debilidades y oportunidades de la formación docente en Perú

Fortalezas
• Hay instituciones educativas que buscan alcanzar un estándar de calidad satisfactorio. Esta actitud es una muestra de que las cosas pueden mejorar y serían un ejemplo a seguir. • El Sistema Nacional de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad Educativa (SINEACE) tiene la tarea de acreditar a la totalidad de carreras profesionales dentro de universidades e institutos del país. En caso de que una carrera no logre alcanzar su acreditación luego de tres evaluaciones, será clausurada
Debilidades
• Tomando en cuenta los resultados de la Evaluación de Egreso 2013, aplicada por el Ministerio de Educación a los alumnos que culminaban sus estudios en los IESP, se ha comprobado que los egresados tienen competencias insuficientes. • La existencia de un DCBN único en los IESP supervisados por el Minedu y, a su vez, las diferentes mallas curriculares propuestas por las universidades, en el uso de la autonomía que les otorga la ley, producen diversidad curricular. • Las instituciones de formación docente no participan en las reformas curriculares de la EBR. • La práctica profesional en la mayoría de las instituciones se da de manera formal, ya que son pocas las instituciones de formación docente que cuentan con centros de aplicación o tienen convenios con redes de centros educativos para que sus alumnos puedan aplicar la formación teórica. • Existen formadores de docentes que se resisten al cambio y buscan reproducir las prácticas pedagógicas de quiénes les enseñaron. • Mayormente la infraestructura de los institutos superiores pedagógicos privados es precaria. El 2004, se encontró que el 38 % de ellos funcionaban en locales no adecuados: viviendas, edificios comerciales y otros establecimientos. La situación inversa se presenta en los institutos públicos, ya que el 95 % había sido construido para ofrecer formación profesional. • La formación docente en la especialidad adolece del dominio en temas de matemáticas. • De igual manera es evidente la falta de preparación en el aspecto didáctico matemático (o del conocimiento especializado).
Oportunidades
• Es necesario buscar elementos que permitan unificar los diversos currículos existentes de los Institutos Superiores Pedagógicos y las facultades de Educación que forman a los docentes. • Sería importante profundizar en el dominio de las matemáticas durante la formación docente. • Es una tarea pendiente incorporar en la preparación de los docentes los aspectos didácticos de la matemática • Promover la mejora de la infraestructura de los institutos superiores pedagógicos privados. • Brindar oportunidades para que los formadores de formadores se desarrollen profesionalmente. • Seguir mejorando los incentivos para que estudiantes de alto rendimiento ingresen a la formación docente, por ejemplo, a través de becas. • Trabajar por la mejora de las competencias matemáticas de los egresados de los IESP. • Elevar la calidad de los espacios de práctica profesional de los docentes en formación. • Buscar la presencia de las instituciones de formación docente en la reforma curricular de la Educación Básica Regular.

Fuente: Osorio et al., 2018, pp. 100-101.