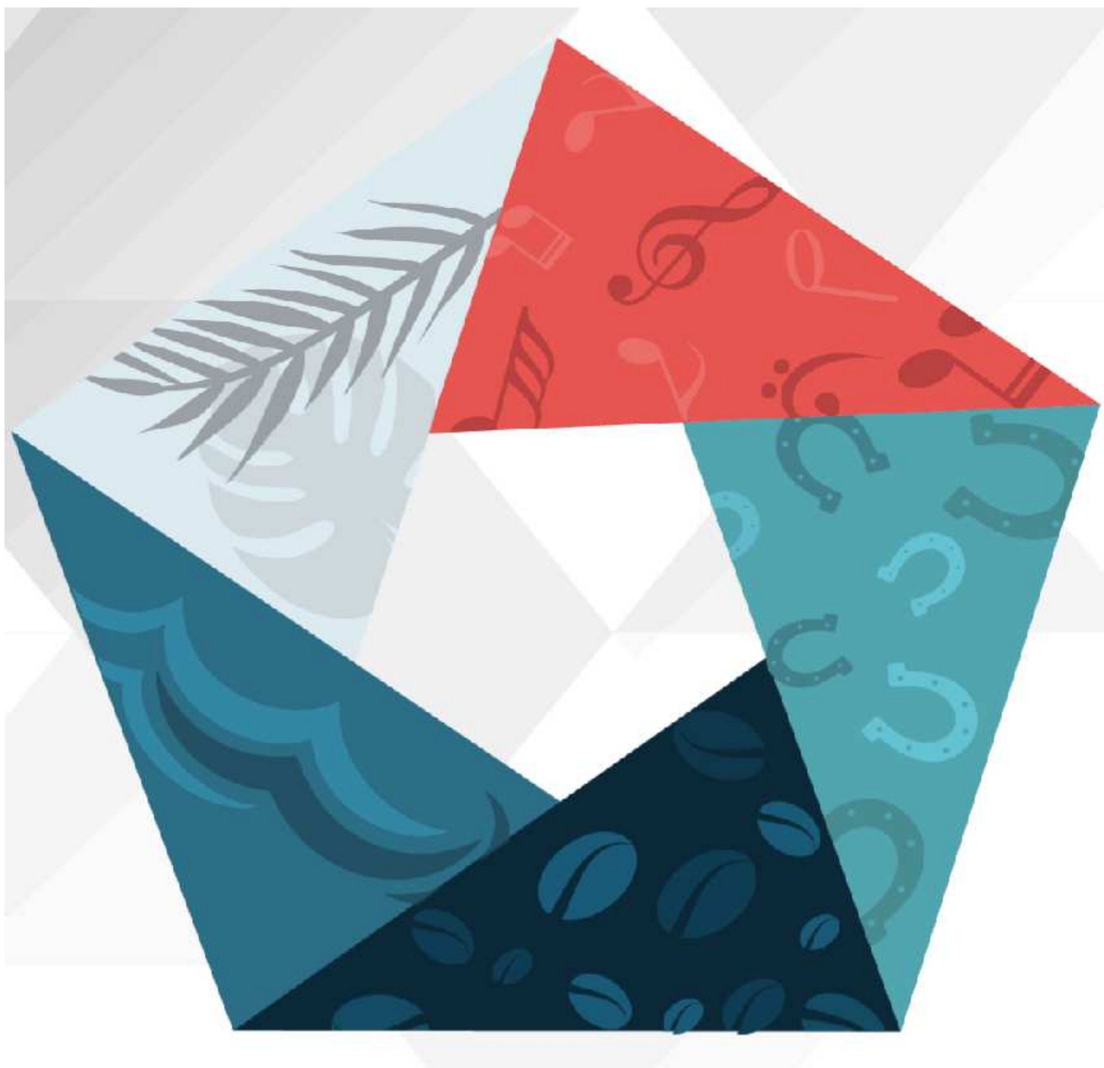
Educación Matemática en las Américas 2019

Volumen 3: Conferencias paralelas



CIAEM
ACME
desde - since 1961

Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO
www.ciaem-iacme.org

Educación Matemática en las Américas 2019
Volumen 1: Formación inicial de profesores
Editado por Yuri Morales-López y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN: 978-9945-09-413-8

El *Comité Interamericano de Educación Matemática* (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la *International Commission on Mathematical Instruction*. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera al CIAEM y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no fue previamente publicado en otro medio; y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Se respetaron los metadatos (nombres, apellidos, títulos, entre otros) que los autores proporcionaron cuando postularon su trabajo en la plataforma del evento.

Para citar este libro:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2020). *Educación Matemática en las Américas 2019.* Editores: Yuri Morales-López y Ángel Ruíz. República Dominicana: Autor.

ISBN: 978-9945-09-413-8
9 789945 094138

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LAS AMÉRICAS 2019

Presentación

Para el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es un placer y un honor ofrecer a la comunidad educativa este Volumen de *Educación Matemática en las Américas 2019*, en donde se pueden encontrar muy importantes insumos para comprender el momento histórico que atraviesa la Educación Matemática desde la perspectiva de las Américas.

La *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática* se realizó entre el 5 y 10 de mayo del 2019 en Medellín, Colombia. La Universidad de Medellín y la Universidad de Antioquia fueron las organizaciones académicas anfitrionas del evento. Las sesiones fueron realizadas en el campus de la Universidad de Medellín. Participaron 700 personas provenientes de 25 países de cuatro continentes: Europa, Asia, África y las Américas. Participaron centenares de docentes en servicio de la ciudad de Medellín y del Departamento de Antioquia.

Alrededor de 400 trabajos fueron presentados: conferencias plenarias y paralelas, mesas plenarias, minicursos, sesiones temáticas, comunicaciones cortas, talleres y posters. Unas 50 personalidades del mayor nivel en la comunidad internacional de Educación Matemática expusieron sobre sus investigaciones. Entre ellas Jill Adler (Suráfrica), Ferdinando Arzarello (Italia), Salvador Llinares (España), Yoshinori Shimizu (Japón), Michael Shaughnessy (EUA), Luis Rico (España), Fidel Oteiza (Chile), Carlos Vasco (Colombia), Carlos Sánchez (Cuba), Luis Carlos Arboleda (Colombia), Edwin Chaves (Costa Rica), Nelly León (Venezuela), Vilma Mesa (EUA). Aunque físicamente no pudo estar presente envió su contribución en forma de video Ubiratan D'Ambrosio (Brasil). Los trabajos dentro de la plataforma del congreso se pueden consultar en https://ciaem-redumate.org/conferencia/index.php/xvciaem/xv/schedConf/presentations

La revisión científica de todos los trabajos fue responsabilidad de un Comité Asesor Internacional, un Comité Internacional del Programa y el Comité Ejecutivo del CIAEM. Se contó con la coordinación central de Directores de tema y la Dirección de la plataforma científica realizada por el académico Yuri Morales con el apoyo de la profesora Johanna Mena (ambos de Costa Rica) y con la participación voluntaria de muchísimos revisores científicos de muchos países.

Este volumen incluye trabajos que fueron efectivamente presentados en ese congreso.

Expreso mi agradecimiento a todos los miembros de los comités científicos, directores de tema, revisores científicos, y directores de la plataforma científica. También deseo agradecer por su apoyo en el registro de este libro a Sarah González y a la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra en República Dominicana. Agradezco mucho a todos los autores que decidieron compartir su trabajo en las instancias que abrimos

mediante la XV CIAEM. También a Yuri Morales quien técnica y formalmente generó este volumen para su registro.

En las diversas dimensiones del congreso, de cuya realización este libro es producto, quiero aprovechar esta ocasión para reconocer la valiosa contribución de las Universidades de Medellín y de Antioquia y al Comité Organizador Local de la XV CIAEM, y, además, agradecer al equipo humano del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* que ha sido durante muchos años un sostén crucial en la organización de todos los eventos del CIAEM y de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*; y en particular de este libro que hoy sacamos a la luz pública.

Este volumen es una parte del libro de *Memorias* completo (son 15 volúmenes que se pueden ver/descargar). Se ha respetado aquí la paginación del libro completo. Y las referencias *deben hacerse con base en el libro y su paginación*. No es necesario indicar el volumen específico donde se cita pues esta es una versión funcional al servicio de una mejor visualización o descarga de este valioso material.

Invitamos a los lectores de este libro a promoverlo en sus diversas actividades de docencia, investigación, extensión y divulgación en todos sus países.

Con afecto

Ángel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática
Presentación del 17 de julio de 2024
Costa Rica

Índice

Basado en la información suministrada durante la postulación de cada trabajo

Conferencias paralelas

Textos escolares desde una visión crítica de la Matemática

Nelly **León** Gómez
Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico de Maturín
Venezuela
nellyleong@hotmail.com

Resumen

Se inicia la disertación con una visión general del sistema educativo venezolano y del proceso de transformación curricular del nivel de Educación Media en Venezuela. Luego, se hace referencia a los libros de Matemática de la Colección Bicentenario (CB), editados por el Ministerio del Poder Popular para la Educación en el marco de dicha reforma con carácter de textos escolares, concebidos bajo una aproximación crítica y realista de la Educación Matemática. Se presentan y discuten los resultados más relevantes de un estudio valorativo de dichos textos, realizado por León y Vicent (2015) siguiendo el modelo de Monterrubio y Ortega (2009), entre los que destacan como elementos positivos el lenguaje natural accesible al alumno, la contextualización de la matemática y la promoción de valores y, como aspectos negativos, desarrollo incompleto de los temas matemáticos, limitaciones en la formalidad y el lenguaje matemático y, sobre todo, la intencionalidad política de los textos.

Palabras clave: Educación Matemática Crítica, Matemática Realista, textos escolares, Colección Bicentenario.

Introducción

La aprobación en el año 1999 de la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (CRBV) significó el punto de partida del proceso de cambios que derivaron en una nueva concepción educativa en ella expresada y que condujo al establecimiento de lo que se conoce como Educación Bolivariana. Esta se sustenta en la corriente de la pedagogía crítica como medio de concientización hacia una nueva comprensión de los conflictos sociales, de los mecanismos de dominación y de ideologización y de la depredadora relación del hombre con el ambiente (Mora, 2005). Obviamente, los cambios implícitos son de gran envergadura y chocan con los esquemas establecidos durante largo tiempo.

Para el año 2007, se propone el Currículo Nacional Bolivariano (CNB) como una guía en la que se establecen los objetivos formativos y los medios de acción para lograrlos (MPPE, 2007), en atención al tipo de sociedad que se prefigura en la CRBV y del ser humano que ésta dibuja: crítico, democrático, con conciencia social y ambiental, entre otras características.

Han sido muchos los vaivenes por los que ha pasado la implementación de este currículo debido a las cambiantes normativas educativas y al rechazo derivado de confrontaciones políticas ineludibles. Para el año 2014, como producto de una amplia consulta a nivel nacional, se da inicio al proceso de cambio curricular del nivel de Educación Media General y al año siguiente se presenta el Plan de Estudios correspondiente, visto más como un documento orientador de la aproximación curricular que se desea desplegar, en el entendido de que es el propio docente quien hace el currículo (MPPE, 2015).

Tales orientaciones curriculares también quedan reflejadas en los libros de textos de la denominada Colección Bicentenario, que acompañan dicha transformación como recurso didáctico con un enfoque realista y transdisciplinar y acorde a los principios de la Teoría Crítica de la Educación, según los señalamientos de sus autores.

En una sociedad tan polarizada políticamente como la de Venezuela, estos textos han sido alabados por un sector de la comunidad nacional y ferozmente atacados por otro, por diversas razones entre las que sobresalen una supuesta intención ideologizante y un tratamiento inadecuado e incompleto de los contenidos de las diversas áreas de conocimiento para los que han sido editados, entre ellas la Matemática (Andonegui, en entrevista a Pérez Terán, 2014).

Ante esta situación, desde el Núcleo de Investigación de Educación Matemática (NIEMAT) de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico de Maturín (UPEL-IPM), hemos realizado una investigación con el propósito de hacer una valoración de los textos de Matemática de Educación Media de dicha colección y proponer a los autores algunas ideas y sugerencias a tomar en cuenta en futuras ediciones de los mismos.

La investigación se enfocó desde una perspectiva fenomenológica centrada en los puntos de vista de la muestra (12 profesores de Matemática de la UPEL-IPM, que actuaron como revisores y los cuales se identifican como Rij, donde i representa el año del texto revisado y j el número asignado al revisor para ese año: R12 corresponde al segundo revisor del libro de primer año), tratando de interpretar a partir de sus testimonios su percepción respecto a dichos textos y destacando los alcances, limitaciones, aciertos, desviaciones, errores, entre otros aspectos, para su uso por los estudiantes y los profesores como texto oficial en el aprendizaje de los temas matemáticos.

Dado que se buscó hacer juicios de valor, se consultó distintos modelos y trabajos sobre evaluación de libros de textos escolares (Andonegui, 2015; Beyer, 2004; Miguez, 2004; Pinto y González, 2013; Ramírez, 2002 y 2012 y Monterrubio y Ortega, 2009), escogiéndose el modelo expuesto por los dos últimos autores, adaptando las categorías previas a las particularidades de la CB: contenidos, conexiones, actividades, aspectos metodológicos, lenguaje y motivación. Más adelante se presentan los resultados más destacados en relación a las siguientes categorías emergentes: Contextualización de la Matemática, Desarrollo de los Contenidos Matemáticos, Matemática e Ideologización en los textos de Matemática de la CB.

La matemática en el Diseño Curricular Bolivariano (DCB)

La Matemática, como área de formación en el DCB, atiende a los principios de la filosofía de la Educación Crítica (Skovsmosse , 1999; Skovsmosse y Valero, 2001; Mora, 2005; Becerra (2005) y al Enfoque Realista (Freudenthal, 1991). En tal sentido, contrario a la visión predominante como ciencia netamente formalista, abstracta y deductiva de esta ciencia, en la acción de enseñar y aprender se busca acercarla a otra que satisfaga las expectativas de formación de ciudadanos hacia la comprensión dialéctica de la sociedad y hacia su participación democrática y comprometida en procesos de transformación por el bienestar individual y comunitario y la preservación del planeta (Skovsmose, 1999); es decir, una visión humanista, culturalmente situada y necesaria para la sostenibilidad de la vida presente y futura del hombre (MPPE, 2007).

La educación matemática bajo una perspectiva crítica sustenta "la participación social, la comunicación horizontal entre los diferentes actores, … la humanización de los procesos educativos, la contextualización del proceso educativo y la transformación de la realidad social" (Ramírez, 2008, p. 109). Así emerge la relación educación matemática-democracia, expresada en el dialogo continuo entre profesores y estudiantes que conlleva a la atribución de sentido y a la comprensión individual y colectiva a través de la negociación de significados y el respeto de normas y formas de actuación (Sierpinska,1998). El respeto por el otro, por sus opiniones y sus diferencias conlleva al desarrollo pleno de la persona, suministrándole herramientas para aprender a pensar, comprender, razonar, de manera que vea a la Matemática y sus aplicaciones como una materia significativa en el devenir de la sociedad (Skovsmose, 2011). Esta biyección entre educación matemática y democracia trasciende hacia una formación en la que se es capaz de cuestionar lo que se enseña, lo que se lee, de relacionar hechos y situaciones reales, de buscar nuevas ideas a partir de lo aprendido. De allí la pertinencia de estimular en los jóvenes la criticidad de lo que se expone, desde el mismo objeto matemático hasta la forma de matematizar situaciones del contexto (Serrano, 2016).

Dentro de los fines de la educación en Venezuela, establecidos en la Ley Orgánica de Educación (LOE), está "Desarrollar la capacidad de abstracción y el pensamiento crítico mediante la formación en filosofía, lógica y matemáticas, con métodos innovadores que privilegien el aprendizaje desde la cotidianidad y la experiencia". (LOE, 2009, pp. 19-20). Cotidianidad y experiencia que le imprimen sentido a los conocimientos de la disciplina, al separarla del "paradigma del ejercicio" (Skovsmose, 2000) que pone énfasis en ejercicios rutinarios y descontextualizados carentes de sentido más allá del aula. Igualmente se busca separar la enseñanza de la Matemática de la corriente estructuralista enclaustrada a partir de la reforma de la Matemática Moderna, según la cual se privilegian los aspectos formales y abstractos de la disciplina; por el contrario, se aboga por el uso de métodos inductivos y de reconstrucción de conceptos en situaciones contextualizadas y mediante el trabajo cooperativo (MPPE, 2015).

Es recurrente en el discurso de la transformación curricular de Educación Media el presentar los temas matemáticos unidos al contexto y a las vivencias de los estudiantes y al mundo extra-matemático en general. La corriente de la Matemática Realista de Hans Freudenthal ha hecho interesantes aportes en este sentido. Se propone partir de la realidad, buscar modelos y esquemas que permitan profundizar en el conocimiento de la misma y aprender la Matemática en contextos de aplicación.

En este marco conceptual se organiza el currículo atendiendo entre otros a los siguientes elementos: temas generadores, tejido temático y referentes teórico-prácticos.

Los temas generadores, como su nombre lo indica, generan aprendizajes con sentido y pertinencia con respecto a los considerados temas indispensables y los enlaza a los referentes teórico-prácticos a través del tejido temático (MPPE, 2015), con el que se busca la integración interdisciplinar a través de la Matemática. Veamos esto con algunos ejemplos correspondientes a las Unidades de Aprendizaje 1 y 3 de cuarto año de Educación Media:

UA	Tema generador-Tejido temático	Referentes teórico-práctico
1	**Análisis de factores de riesgo en la comunidad** Situaciones que aumentan las probabilidades de afectación de la salud. Determinación de los resultados posibles y probabilidades en cuanto a factores de riesgos. Tratamientos de fenómenos sociales y naturales. Ley de Gestión Integral de Riesgos Socionaturales y Tecnológicos (2009). Toma de decisiones en función de estudios estadísticos.	Estadística: análisis descriptivo univariante. Distribución de probabilidades. Distribución binomial Series de tiempo. Números índices.
3	**Sistemas económicos y sociales en el mundo** Crecimiento de la población mundial y la generación de riqueza vs satisfacción de necesidades. Indicadores económicos vs solución de problemas sociales en el planeta. Índice de desarrollo humano. Las desigualdades y desequilibrios en el mundo. Capitalismo, socialismo. Variación de los salarios mínimos en los últimos cinco años en la República Bolivariana de Venezuela.	Gráficos Proporción, fracción, porcentaje Mapas Índices. Lectura de índices. Variaciones interanuales Proyecciones Funciones exponenciales y funciones logarítmicas.

En los textos de la Colección Bicentenario encontraremos la misma organización de los contenidos, como veremos más adelante.

Los textos de Matemática de la Colección Bicentenario

Partimos de considerar el papel de los libros de texto en el proceso de enseñanza y aprendizaje al actuar como una importante guía para el docente en la planificación y puesta en escena de las unidades didácticas o lecciones de matemática en el aula (Cabero, Duerto y Romero, 2002; López, 2007). Los libros de texto direccionan la selección y secuenciación de contenidos matemáticos a la par que muestran la visión de la Matemática que tiene el autor y su posición filosófica, pedagógica y didáctica (Gascón, 2001), por lo que estipulan el tipo de enseñanza que asume el profesor (Parcerisa, 1996). Más aún, como señala Schubring (1987), éstos determinan en la práctica la enseñanza de la Matemática por encima de cualquier disposición institucional al respecto. Por eso, debido al poder del libro de texto como soporte del conocimiento y modelador de procesos de enseñanza, cabe preguntarse si es siempre apropiado el contenido que aparece en este recurso didáctico y la forma como es presentado al lector. Autores como Ramirez (2012) llaman la atención sobre las limitaciones didácticas, los sesgos ideológicos y los intereses comerciales latentes en dichos textos; mientras que para Torres (1991), citado por Duarte y Bustamante (2013), los libros de texto llegan a actuar como filtros de conocimientos según los intereses formativos de los grupos de poder en un momento socio-histórico determinado.

Precisamente, en el contexto socio-político actual de Venezuela nace la Colección Bicentenario como un programa del gobierno nacional que acompaña la implementación del Currículo Nacional Bolivariano. Consiste en una serie de textos de las diferentes áreas del conocimiento, entre ellas la Matemática, que abarca todos los años escolares de los niveles de Educación Primaria (1° a 6° grado) y de Educación Media General (1° a 5° año), de distribución gratuita a nivel nacional en las escuelas y liceos públicos del país y con un carácter de textos guía para ambos grupos de actores del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática: estudiantes y docentes (León y Vicent, 2015). En esta oportunidad sólo nos referiremos a los libros de Matemática para Educación Media General. Éstos fueron elaborados por un grupo de profesores y egresados de la UPEL que además forman parte del Grupo de Investigación de Educación Matemática (GIDEM). Este grupo "defiende una matemática inclusiva, al servicio de la humanidad, que nos sirva para entender el universo, que acabe con su monopolio ideologizante, que nos sea útil para la emancipación, para la transformación" (Fondo Editorial del IPASME, citado por Aguirre, 2014, p. 59), principios de la Educación Matemática Crítica que, como veremos, quedan reflejados en dichos textos.

La estructura de los textos de Matemática dista mucho de la de los libros tradicionales. En estos últimos aparece en el índice la secuenciación detallada de los contenidos contemplados en programas anteriores. Por ejemplo, los textos de la Editorial Santillana plantean la siguiente metodología de trabajo: 1) Desarrollo de conceptos y planteamiento de ejercicios resueltos; 2) Propuesta de actividades para desarrollar habilidades de razonamiento, modelación, análisis, interpretación y argumentación 3) Actividades que muestran la matemática en su vinculación con otras ciencias y 4) Solución de problemas. (Álvarez y otros, 2012). Por su parte, en el índice de los libros de la CB aparecerán los nombres de las unidades (que no necesariamente coinciden con las planteadas en el CNB, asociados a temas generadores, acompañados de los temas matemáticos que se desarrollarán. El esquema de las unidades es el siguiente: se inicia con el tema generador de aprendizajes y enseñanza, se sigue con trabajo investigativo extradisciplinario; análisis, formalización conceptual; desarrollo de actividades dentro y fuera de las disciplinas; Trabajo intramatemático (conceptualización y formalización), y se cierra con Trabajo de consolidación, ejercitación, ejemplificación y ampliación.

En los mensajes dirigidos tanto a los estudiantes como a los representantes y los docentes, los libros se presentan como *instrumento para la liberación* donde los contenidos matemáticos se desarrollan partiendo de un tema generador vinculado a la realidad venezolana. En los textos, la Educación Matemática se guía bajo ciertas premisas como la contextualización real de la Matemática, no una pseudo-contextualización; el aprendizaje de la Matemática como posibilidad de generación de valores en consonancia con la formación de una ciudadanía crítica y una sociedad verdaderamente democrática; y el aprendizaje de la disciplina mediante actividades de investigación, no solo en el ambiente tradicional del aula sino también en espacios alternos donde se desarrolla la vida cotidiana del estudiante. (MPPE, 2012a,b,c,d,e)

Impacto de la Colección Bicentenario en la sociedad venezolana

Como reacción inmediata a la aparición de los textos de la CB, producto de las confrontaciones políticas en el país, se generaron dos matrices de opinión completamente opuestas entre aquellos que los aceptan a ciegas y los que los rechazan a priori, con pocos matices entre ellos. Por un lado se les califica como *textos para la liberación* o *vanguardia de la educación revolucionaria;* mientras que por el otro se les asigna epítetos como *textos de la discordia* o *libros para perpetuar la pobreza.*

Aparte de la diatriba política también se ha generado una discusión más académica en torno a este recurso didáctico. Martín Andonegui, destacado educador matemático de la UPEL, en entrevista a Pérez Terán (2014), destaca algunos elementos referidos a: 1) *contenido matemático*: se reflejan algunos aciertos en el abordaje contextualizado, pero también fallas de profundización y de dar significado matemático a los contenidos; 2) *procesos cognitivos*: no se establecen de forma adecuada los parámetros psicológicos de aprendizaje sobre la zona de desarrollo próximo, ya que no se enfrenta al niño a problemas de mayor complejidad matemática; 3) *variables afectivas y de tipo sociocultural*: se ven reflejadas en los textos a través de las lecturas e ilustraciones y en problemas que se adecuan a las realidades del país mediante la inclusión.

Sumamos a esto la diatriba sobre si dichos libros deben considerarse como libros de texto de uso obligatorio, o libros de consulta o complementarios de empleo discrecional o en conjunto con otros textos comerciales.

Revisión de los textos de matemática de la Colección Bicentenario: un estudio necesario

A partir del análisis de las diversas categorías preestablecidas en esta investigación para la valoración de los textos de Matemática de la Colección Bicentenario y de los aportes de todos aquellos que participaron en este estudio, se presenta a continuación la percepción general sobre los textos con sus aciertos y desaciertos. Esta visión general la resumimos en tres renglones: conexiones (una valoración positiva), desarrollo de los contenidos matemáticos (una valoración no tan favorable) y elementos políticos-ideologización (una valoración negativa)

Conexiones

Una de las intencionalidades declaradas en la CB es ofrecer a los estudiantes una matemática con un enfoque transdisciplinar y en estrecha vinculación con el contexto, sus vivencias e intereses. Esto nos ha motivado a pulsar la opinión de los revisores de los textos, guiándonos por tres dimensiones concretadas en las posibilidades de conexión intra y extra matemática que se generan a partir de la forma como son tratados los diversos temas, y la vinculación de éstos con temas transversales como lenguaje, ambiente, trabajo, valores y tecnología.

Este parece ser el elemento que caracteriza a los textos objeto de estudio y de alguna manera marca distancia con libros de editoriales comerciales que se distribuyen en Venezuela. Nada más al tomar uno de los libros de la CB, ver su carátula y observar el título, el lector se percata que está ante un libro de Matemática diferente. Las opiniones de los revisores sobre las cuestiones tratadas en esta sección del trabajo son bastante favorables.

En algunas lecciones se observa la intención de establecer cierta relación entre conceptos matemáticos; no obstante, varios revisores coinciden en señalar que en estos libros se presentan muchas ocasiones para establecer este tipo de conexión, pero que éstas no se aprovechan debidamente, y con el ánimo de darle mayor cohesión a los tópicos matemáticos se recomienda a los autores que en futuras ediciones de los textos se profundice en ese tipo de conexión intra-matemática, con la finalidad que los estudiantes se percaten de que los conceptos que estudian en esta materia no son parcelas aisladas, sino un entramado de ideas que se soportan entre ellas para darle solidez al “edificio matemático”.

Para los revisores, la incorporación de reseñas biográficas de destacados matemáticos que han hecho aportes significativos a los tópicos que se estudian permite que los estudiantes adviertan que la Matemática es una construcción del hombre; que todos los objetos matemáticos son productos de la mente humana, que se han generado en determinadas circunstancias sociales, contextuales e históricas. Igualmente las semblanzas a personajes que han contribuido con la Educación Matemática en Venezuela es motivo de regocijo.

Hay otro tipo de reseñas de personas o hechos históricos no vinculados directamente a la Matemática o a la Educación Matemática que aportan a la cultura general y a la formación integral de los educandos, a la vez que pueden incentivar el gusto por la lectura (R43, R12, R22). No obstante, algunos revisores piensan que estas reseñas pueden convertirse en elementos distractores y desviar el verdadero propósito de los libros; mientras que para otros estarían bien siempre que, de alguna manera, se vinculen a la temática tratada y no se abuse de ellas (R31, R52.

Los revisores perciben claramente que hay relación con otras disciplinas como Química, Economía, Geografía, Física; con algún oficio como la pesca y la construcción; o con situaciones del contexto y de la vida diaria a las cuales se van hilvanando los conceptos matemáticos. Esto se visualiza con más claridad en los primeros niveles, pero a medida que la complejidad del contenido se hace mayor esta contextualización se vuelve menos palpable a pesar de seguir sustentando el desarrollo matemático sobre una situación contextual de partida (R51). Se aboga por la incorporación de lecturas sobre la historia de la Matemática que permita a los estudiantes conocer el proceso de creación de los conceptos que están estudiando, pues, "Cuando se trata del rigor y la formalidad matemática, se debe apegar a la verdadera historia de la Matemática, según el tema a tratar" (R42).

Otras lecturas se relacionan a consideraciones extra-matemática inmersas dentro de lo que podríamos llamar la fenomenología didáctica del tópico matemático de interés. Estas lecturas permiten abordar temas transversales como lengua, ambiente, trabajo, valores y tecnología. Con el eje trabajo hay conexión pero podría insistirse más (R42). Hay interés por crear consciencia sobre la preservación del ambiente (R42, R12).

Algunos revisores cuestionan algunas actividades extra-matemática, sobre todo el peso que éstas tienen en algunas lecciones en comparación con el contenido matemático propiamente dicho. También cuestionan el carácter temporal de algunas de ellas, "por lo que pueden quedar obsoletas a poco caminar, o carecer de relevancia con sólo pasar algunos años" (R51). Para evitar que los textos se desactualicen rápidamente, los revisores sugieren presentar situaciones más estables en el tiempo. Un claro ejemplo de esta cuestión son las actividades enunciadas en el contexto de la economía nacional, referidas a costos de productos y servicios o al salario mínimo, que claramente quedaron desvirtuados en la realidad hiperinflacionaria que actualmente reina en el país.

Por otro lado, las lecturas van acompañadas de una profusión de ilustraciones cuyo uso en los textos hemos querido analizar desde dos ángulos que se complementan: como elemento motivador y como coadyuvante a la contextualización. Con excepción de un revisor, hay acuerdo sobre la pertinencia en el uso de las ilustraciones pues potencian el alcance de los textos en términos de ubicar el conocimiento matemático en el contexto, se aprovecha el impacto visual que hace que el mensaje llegue con más facilidad a los lectores (sobre todo en aquellos que tienen un estilo de aprendizaje marcadamente visual), y en ese mismo sentido se convierten en vectores hacia la motivación del estudiante a la vez que los invita "al diálogo sobre lo que se reseña en las mismas" (R43). En el ánimo de mejorar los textos y hacer un uso más provechoso del espacio en cuanto al desarrollo matemático en sí, se recomienda a los editores revisar el tamaño de algunas de las ilustraciones. Algunos opinan que no hace falta exagerar en cuanto al tamaño y la cantidad de ellas pues el mensaje igualmente se logra siendo más ponderados en su uso.

Contenidos

Todos los libros de Matemática de la CB siguen la misma estructura: un título que hace una referencia general a la contextualización de la mayoría de las lecciones consideradas en ellos; dos mensajes: uno dirigido a los estudiantes y otro a los profesores y las familias; un índice en el que aparece un listado de temas identificados con un título que hace referencia a una situación contextualizada, resaltada en un tamaño de letra grande en comparación con el del contenido matemático (R41).

En los mensajes ya referidos se leen unos "propósitos macros" (R12) sobre la intencionalidad que se persigue con el estudio de la Matemática; además, "Hay un planteamiento que es el desarrollo de la capacidad investigativa del estudiante" (R51). No obstante, los objetivos que se espera lograr y las competencias que deben alcanzar los estudiantes en términos del aprendizaje de las diferentes temáticas en cada año escolar no son enunciados explícitamente.

Detengámonos ahora en la organización y secuenciación de los contenidos. Los revisores llaman la atención de que los contenidos no mantienen una secuenciación del todo apropiada, los temas se desarrollan parcialmente dejando vacíos que pueden generar confusión en los estudiantes (R11, R22), por lo que se requiere que se incluyan desarrollos explicativos que garanticen la secuencia lógico-matemática (R51). Se evidencia la falta de coherencia interna con los temas, pues "no se profundizan hasta finalizarlos, sino que se cortan y luego se retoman" (R21).

Igualmente se señala que los contenidos no están secuenciados en su totalidad atendiendo al nivel de complejidad. Además, en la estructura del libro, cada tema es tratado más que todo en conexión con la situación generadora que se presenta al introducir cada lección; en tal sentido "tratan de 'fundamentarlo' en hechos propios del entorno" (R32), en menoscabo de la interconexión entre ellos desde la matemática misma (R22, R42).

Casi unánimemente los revisores concuerdan en que se hace énfasis principalmente en las representaciones, un poco menos en los significados y, definitivamente, insuficiente abordaje conceptual, lo cual genera preocupación entre los evaluadores.

Igualmente hay acuerdos en cuanto a la claridad que se evidencia en la exposición de los temas, haciéndolos manejables y claros para el nivel cognitivo de los estudiantes. Pero, ésta no es una opinión unánime. R51, refiriéndose al libro de 5° año, considera que las exposiciones matemáticamente son claras "pero se requiere una buena base tanto en conocimiento como en madurez matemática para su aprendizaje efectivo mediante este texto". Desde otra óptica, R23 argumenta que en el ánimo de contextualizar los contenidos se cae en situaciones extra-matemáticas que desvirtúan la presentación de algunos de ellos. Sólo los revisores del libro de 5° año consideran que el nivel de complejidad, el rigor y la formalidad matemática están más allá de ese nivel educativo. Para los grados inferiores, la mayoría coincide en que los temas se presentan con un grado de complejidad acorde con el nivel cognitivo del grupo al cual van dirigidos; no así en lo que toca al rigor y a la formalidad.

Ahora bien, en concordancia con los principios de la didáctica centrada en procesos, como lo estipula la Ley Orgánica de Educación (2009) en su artículo 14 se cuestionó: ¿se procura una enseñanza que promueva el desarrollo de los procesos de pensamiento y su uso consciente por el estudiantado?. El revisor R43 afirma que el texto promueve no sólo el razonamiento inductivo y deductivo, sino también el relacional y el crítico. Igualmente R12, sostiene que, al comulgar con una visión crítica de la educación Matemática, la CB en su conjunto fomenta este tipo de pensamiento que, de alguna manera, lleva implícito el pensamiento relacional y el razonamiento inductivo; pero no así el pensamiento deductivo que es inherente a la producción del conocimiento matemático a través de la argumentación lógica. Ateniéndose a los alcances de la pregunta planteada, la mayoría de los revisores reconocen que la forma como se presentan los contenidos, a partir de una situación motivadora de la que se deriva un problema o un ejercicio específico, favorece el razonamiento inductivo, habiendo poco espacio para el deductivo. Además, al plantear situaciones del contexto del estudiante o más generales para que sean matematizadas, pudiera traducirse, en opinión de la mayoría, como un intento por consolidar el pensamiento flexible, reversible y divergente, "aunque a veces se cae en la imposición" (R51), al tratar estos conceptos o sus propiedades que no son fáciles de visualizar o derivar de manera inductiva. En los libros hay oportunidades que podrían aprovecharse mejor en el intento de favorecer estos tipos de pensamiento.

En general, hay cierto descuido en la formalidad matemática, en el lenguaje matemático y en la simbología, problemas en el abordaje de los contenidos matemáticos, desarrollos incompletos, saltos en la presentación de los conceptos, secuenciación algunas veces no apropiada, ausencia de modelos de resolución de problemas, presencia insuficiente de problemas y ejercicios propuestos y resueltos, poca diversidad en las actividades propuestas que puedan servir para la evaluación, en particular la auto-evaluación.

Elementos políticos - ideologización

Otro cuestionamiento tiene que ver con la "intencionalidad política" que perciben algunos revisores, lo cual se refleja en testimonios como los siguientes: "Sí hay vinculación. Sin embargo, hay que tener cuidado con su presentación, pues se observan claramente 'elementos políticos' que pueden, según el lector, desvirtuar el mensaje" (R23); "Hay, sin embargo, planteamientos que pueden producir rechazo en el estudiante y en el grupo familiar. Son aquellos de contingencia política donde podría presentarse una vinculación forzosa o problemas políticos filosóficos" (R51); En el libro de 5° año, "A raíz de un problema de programación matemática se recomienda 'estudiar' y discutir, entre otros, los escritos de Marx, Istvan Meszaros y Luis 'Ludovico' Silva. ¿A qué viene esta sugerencia?" (R52); "Es notorio que, tal como se señala en el mensaje a los estudiantes, el texto persigue una formación crítica a través del estudio de la Matemática, pero esto quiere lograrse en muchos casos realzando la acción del gobierno y rechazando lo que se opone a su filosofía y a su pensamiento, lo que deriva en algunos matices de intolerancia" (R12); "… esto quiere lograrse con un sesgo político que incline la balanza hacia una nueva forma de ideología, que condena todo aquello que se opone" (R32). Estos comentarios recogen una crítica al elemento político partidista que pudiera desplegarse en los textos y sin el cual los mismos tendrían una mayor aceptación entre los usuarios de este importante recurso educativo pensado para todos los venezolanos que cursan el nivel de Educación Media.

En fin, en opinión de los revisores se destacan los esfuerzos sostenidos por mostrar los logros de una gestión de gobierno (aun cuando para algunos ya hay evidencias de que no se han cumplido); el énfasis en lo político-ideológico, la intencionalidad de anular la pluralidad de ideas y la disensión, desde lo político partidista; el intento de constituirse en libro único, rechazado por los docentes de Educación Media quienes ven la necesidad y la pertinencia de usarlos conjuntamente con otros textos de Matemática de editoriales comerciales que permitan variaciones en la didáctica, rellenar lagunas conceptuales y la ejercitación.

Reflexiones finales

Concebida bajo las premisas de la Educación Matemática Crítica, la Colección Bicentenario ha sido presentada como una serie de libros con una aproximación didáctica y pedagógica que conlleva la intencionalidad de lograr una formación matemática *participativa, colaborativa, activa, productiva, inter* e *intra cultural, intra* e *inter disciplinaria*, pero además "liberadora, emancipadora, revolucionaria, comunitaria, antiimperialista". (Miguez y Duarte, 2014, p. 76)

Como hemos visto en los resultados de la valoración de dichos textos, los calificativos destacados en cursivas hacen de estos libros un recurso propicio para una enseñanza-aprendizaje de la matemática contextualizada, democrática, más humanizada y afectiva, modeladora de valores, ambientalista. Recurso que debe complementarse con la consulta de otros libros de matemática escolar para complementar el abordaje disciplinar sobre el cual se han detectado muchas fallas, limitaciones y errores.

Son los últimos calificativos los que se constituyen en la manzana de la discordia, pues develan la direccionalidad hacia una ideologización acorde con el modelo económico y social que se viene construyendo o imponiendo, según se vea, en el país. Como reflexiones de cierre nos preguntamos ¿Por qué es esto tan cuestionable?, ¿Debe la educación ser aséptica en este sentido?, ¿No ha habido siempre mecanismos de ideologización a través de la Educación Matemática y en particular en los libros de texto de la disciplina?, y si es así ¿Por qué no ha habido con anterioridad un rechazo tan marcado como ahora?.

Wladimir Serrano, coordinador de la CB en Matemática, en entrevista concedida a Barrios (s/f), afirma que "Marcamos una diferencia sustancial con el enfoque que caracterizaba la educación matemática en los libros de las grandes casas comerciales y que hoy siguen publicando con todo el aparato ideológico", y complementa esto destacando que "en estudios que han realizado a textos publicados por editoriales transnacionales, de 20 imágenes que se presentan, en 19 aparecen hombres, y solo en una, una mujer. El sexo femenino es presentado realizando actividades que lo dejan en minusvalía frente al hombre, y su fenotipo obedece a patrones eurocéntricos". Nos questionamos, ¿No lleva esto implícito una profunda carga ideológica, pero que la hemos tomado de una manera natural acorde al orden establecido?. . En la misma entrevista, Norberto Reaño, uno de los autores de los libros, se pregunta "¿Qué tiene de malo que señalemos un Café Venezuela o un Chocolate Cimarrón, o enseñemos fracciones con las pastillas del CDI? ¿Qué tiene de malo que aparezca el Satélite Simón Bolívar o Miranda? En los libros de sellos privadas reseñan a un transbordador que dice USA o NASA y me parece bien porque habla de avance tecnológico". Quizás aquí esté el punto de quiebre, pues parece ser que lo que más se cuestiona no es que los textos estén contextualizados en la realidad venezolana, sino que, en opinión de algunos revisores, con la cual concuerdan los detractores de la CB, "promocionan descaradamente la acción del gobierno"(R21) e "intentan anular la pluralidad de ideas buscando pasar de la ideologia predominante hasta ahora a una nueva forma de ideologización, rechazada por un grueso de la población"(R32). **Al respecto queda mucho por discutir…..**

Bibliografía y referencias

Andonegui, M. (2015). Los libros de texto de Matemática. El caso de la Colección Bicentenario. Ponencia presentada en la X Jornada Centro Occidental de Educación Matemática. Barquisimeto: UPEL-IPB, Departamento de Matemática

Álvarez R. y otros (2012). *Matemática 1*, Caracas: Santillana.

Aguirre, M. (2014). *Libros para perpetrar la pobreza*. Foro Cerpe, Serie EDUCALIDAD, Cuaderno nº 1. Caracas.

Barrios, A, (s/f). Coordinador de la Colección Bicentenario: "Estos textos escolares explican y eso es terriblemente revolucionario". Entrevista a Wladimir Serrano y Noeberto Reaño para Agencia Venezolana de Noticias. Disponible en https://www.noticias24.com/venezuela/noticia/196300/coordinador-de...

Becerra, R. (2005*). La Educación Matemática Crítica. Orígenes y Perspectivas*. En "Didáctica Crítica, Educación Crítica de las Matemáticas y Etnomatemática. D. Mora (Coord.). 165-203. Bolívia: Editorial Campo Iris.

Beyer, W. (2004). *Algunos antecedentes de los libros de aritmética usados en Venezuela en el período 1826-1969: descripción de las aritméticas de Romero y Serrano de Landáez y de algunos catálogos.* En II Simposio de Investigación en Educación Matemática. Pp. 13-32- Caracas: UNA

Cabero, J.; Duarte, A. y Romero, R. (2002, Junio 9). Los Libros de Texto y sus Potencialidades para el Aprendizaje. [Documento en línea]. Disponible: http://tecnologiaedu.us.es/revistaslibros/public5.htm [Consulta: 2018, Octubre 17].

Duarte, A. y Bustamante, k.(2013). Colección Bicentenario: una mirada desde los libros de Matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 23-30.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*: China Lectures, Kluwer, Dordrecht, Reidel Publishing Co.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 4 (2), 129-159.

León, N. y Vicent, R. (2015). *Aportes para la revisión de los textos de matemática de la Colección Bicentenario.* Conferencia presentada en el IX Congreso Venezolano de Educación Matemática. Barquisimeto: Venezuela.

Ley Orgánica de Educación (2009). Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela N° 5929 (Extraordinario), 15 de agosto de 2009.

López, A. (2007). Libros de texto y profesionalidad docente. *Revista Adide* nº 6

Miguez, A. (2004) . *Los ejemplos, ejercicios, problemas y preguntas en los libros de texto de Matemática*. En II Simposio de Investigación en Educación Matemática. Pp. 67-78- Caracas: UNA.

Miguez, A. y Duarte, A. (2014) Análisis del tratamiento de la aritmética en los libros de matemática de la Colección Bicentenario. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 27, 73-81.

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2007). *Subsistema de Educación Secundaria Bolivariana: Liceos Bolivarianos: Currículo*. Caracas: Autor

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2012a). *Matemática para la vida: 1er año*. Caracas: Autor

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2012b). *Conciencia Matemática: 2do año*. Caracas: Autor

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2012c). *La Matemática de la Belleza: 3er año*. Caracas: Autor

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2012d). *Naturaleza Matemática: 4to año*. Caracas: Autor

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2012e). *La Matemática y el vivir bien: 5to año*. Caracas: Autor

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2015). *Plan de estudios de la Educación Media*. Caracas: Autor.

Monterrubio, M y Ortega T (2009). *Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones*. [Documento en Línea] Ponencia presentada en el 13 SEIEM. Disponible: http://www.revistaeducacion.educacion.es/ doi/358_087.pdf [Consulta: 2014, noviembre 20]

Mora, D. (2005). *Didáctica Crítica y Educación Crítica de las Matemáticas*. En "Didáctica Crítica, Educación Crítica del as Matemáticas y Etnomatemática. D. Mora (Coord.) 17-164. Editorial Campo Iris: Bolívia.

Parcerisa, A. (1996). Materiales Curriculares: como elaborarlos, seleccionarlos y usarlos. Barcelona:Graó.

Pérez Terán, Daniel (2014, junio 30). Análisis de los textos bicentenario: Matemáticas con defectos de exigencia y razonamiento [Entrevista a Prof. Martín Andonegui]. *El Impulso*. Disponible: http://elimpulso.com/articulo/matematicas-con-defectos-de-exigencia-y-razonamiento [Consulta: 2015, junio 11]

Pinto, E. y González, F. (2013). Historia social de la educación matemática en Iberoamérica: Las ecuaciones lineales en los libros de texto de matemáticas para Educación Básica en Venezuela. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 35, 177-201.

Ramírez, R. (2008). La pedagogía crítica: una manera ética de generar procesos educativos. *Folios*, Segunda Época, N° 28, 108-119.

Ramírez, T. (2002). El Texto Escolar como Objeto de Reflexión e Investigación. *Docencia Universitaria*, Vol. III, Nº 1, 101-124.

Ramírez, T. (2012). *El texto escolar en Venezuela. Políticas Públicas y Representaciones Sociales*. Saarbrücken, Alemania: Editorial Académica Española.

Serrano, W. (2016). *La educación crítica de la Matemática en el contexto de la sociedad venezolana: hacia su filosofía y praxis.* Caracas:GIDEM

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una Filosofía de la Educación Matemática Crítica* (2da Ed.) (P. Valero, Trad.). Bogotá: Una Empresa Docente.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6 (1), 3-26.

Skovsmose, O. (2011). *Educação Matemática Crítica a questão da Democracia* (6ta edición). Campiñas: Papirus.

Skovsmose, O. y Valero, P (2001). Breaking Political neutrality: The critical engagemnete of Mathematics Education With Democracy. Disponible en http://www.learning.aau.dk/download/Medarbejdere/Paola-Valero/Breaking_Political_Neutrality.pdf.

Sierpinska, A. (1998). *Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism*. In H. Steinbring, M. G. B. Bussi & A. Sierpinska (Eds.), Language and communication in the mathematics classroom (pp. 30-62). Reston, VA: NCTM.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbook. Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics.*7(3), pp 41-51.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Criterios valorativos y normativos en la didáctica de una disciplina científica

Vicenç **Font** Moll
Facultad de Educación, Universidad de Barcelona
España
vfont@ub.edu

Resumen

A la Didáctica de las Matemáticas se le pide que dé respuesta a dos demandas diferentes. La primera pretende que sus constructos teóricos sirvan para comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y la segunda que éstos sirvan para guiar la mejora de dichos procesos. La primera demanda exige herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que sirva para responder ¿qué ha ocurrido aquí, ¿cómo y por qué? La segunda necesita herramientas para una didáctica valorativa que sirva para responder la pregunta ¿qué se podría mejorar? Se trata de demandas diferentes, pero estrechamente relacionadas. En este trabajo se reflexiona sobre el constructo criterios de idoneidad didáctica en el marco de la problemática del papel que deben jugar las valoraciones y los principios normativos en la práctica del profesor (segunda demanda). Más en general, se realiza un trabajo de desarrollo teórico del constructo idoneidad didáctica: cómo se originó, hacia qué nos conduce y cómo puede afectar a la práctica del profesor de matemáticas.

Palabras clave: criterios normativos, idoneidad didáctica, enfoque ontosemiótico.

Introducción

En la revista *For the Learning of Mathematics* recientemente se han publicado varios artículos (Bartolini, 2018; Davis, 2018; Gascón y Nicolás, 2017; Godino, Batanero y Font, 2019; Oktaç, Trigueros y Romo, 2019) que reflexionan sobre la siguiente pregunta: ¿Hasta qué punto, en qué forma y en qué condiciones, la didáctica puede (o incluso debe) proponer juicios valorativos y normativos que proporcionen criterios sobre cómo organizar y gestionar los procesos de estudio? Se trata de una cuestión sobre el carácter prescriptivo de los resultados consolidados de la investigación científica en Didáctica de la Matemática (Gascón y Nicolás, 2017, p. 26).

En el artículo citado, Gascón y Nicolás analizan las respuestas dadas a la pregunta anterior por varios autores, aplicando la perspectiva específica de la Teoría Antropológica de lo

Didáctico. Finalizan el trabajo planteando cuestiones más específicas para concretar la cuestión general acabada de comentar , que pueden ser abordadas desde diferentes marcos teóricos, con la intención de iniciar un debate de articulación de teorías. Concretamente plantean las siguientes preguntas (p. 30): ¿Cuáles son los principios o asunciones básicas de cada uno de los enfoques o teorías didácticas? ¿Qué fenómenos didácticos se proponen explicar y qué problemas prioriza? ¿Cómo inciden dichos principios sobre los fines de la educación que cada enfoque considera «valiosos» (lo que puede dar lugar a prescripciones normativas) y sobre el tipo de problemas de investigación que el enfoque en cuestión privilegia? Las asunciones básicas de los diferentes enfoques o teorías didácticas y los correspondientes fines que propugnan, ¿son compatibles entre sí? En caso contrario, ¿en qué medida podemos afirmar que los diferentes enfoques forman parte de la misma disciplina? Dichas cuestiones implican una concepción de la Didáctica de la Matemática como campo de investigación, y, por tanto, asumir la naturaleza de los resultados de dicha investigación, como conocimientos didácticos.

En Godino, Batanero y Font (2019) se responde a la cuestión general formulada por Gascón y Nicolás (2017) a partir de los principios y herramientas teóricas desarrolladas por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013). Según estos autores, El EOS asume una concepción amplia de la Didáctica de las Matemáticas (DM) como ciencia y tecnología, al considerar que esta disciplina debe abordar cuestiones descriptivas, explicativas, predictivas, propias del conocimiento científico, y también prescriptivas y valorativas, propias del conocimiento tecnológico. Dicho de otra manera (Font y Godino, 2011), la DM tiene que dar respuesta a dos demandas diferentes. La primera pretende que sus constructos teóricos sirvan para comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y la segunda que éstos sirvan para guiar su mejora, lo cual nos lleva a una reflexión sobre valores y normas que funcionan como una guía para obrar que orienta acerca de qué acciones son correctas (buenas) y cuáles son incorrectas (malas). Se trata de dos demandas diferentes, pero estrechamente relacionadas, ya que sin una profunda comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas no es posible conseguir su mejora.

En general, los enfoques teóricos que se han generado en la DM están más cómodos con la primera demanda que con la segunda. La razón es que con la segunda demanda (concepción de la didáctica como generadora de criterios normativos) es, usando la metáfora de la moral, que nos adentramos en un terreno en que los términos a utilizar son más bien propios del discurso moralista, ya que son del tipo: calidad, bien, mal, mejor, peor, correcto, incorrecto etc. Es decir, nos adentramos en una reflexión sobre valores y normas que funcionan como una guía para obrar que orienta acerca de qué acciones se deben hacer. Dicho de otra manera, dejamos el terreno firme de la ciencia (sea esta de tipo positivista o antipositivista) para adentrarnos en un terreno menos firme.

Ahora bien, hay programas de investigación que consideran que la razón de la primera demanda (concepción de la didáctica como ciencia descriptiva/ explicativa) es poder afrontar la segunda. Una revisión de la literatura muestra que una parte importante de los trabajos de investigación relacionan ambas demandas de facto, aunque en muchos casos sin justificar fundadamente dicha conexión.

Hay dos aserciones que, probablemente, pueden ser aceptadas por la mayoría de marcos teóricos en Didáctica de las Matemáticas: a) cuanto mejor podamos describir, comprender y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje (primera demanda), estaremos en mejores condiciones para conseguir una mejora de la enseñanza (segunda demanda), b) los resultados generados como consecuencia de la primera demanda influyen, de alguna manera, en la generación de valores y normas que guían la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Es decir, en general se asume algún tipo de conexión entre las dos demandas, aunque los diferentes enfoques teóricos difieren en la manera de fundamentarla.

En el EOS, se considera que la naturaleza del conocimiento que se pretende construir tiene un carácter científico y, además, tecnológico. Esto quiere decir que, por una parte, se abordan problemas teóricos de clarificación ontológica, epistemológica y semiótica sobre el conocimiento matemático, en cuanto tales problemas tienen relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje (componente científico, descriptivo, explicativo, predictivo), y, por otra parte, se trata de intervenir en dichos procesos para hacerlos lo más efectivos posible (componente tecnológico - prescriptivo). Se entiende que la descripción, explicación y predicción, son los fines de la actividad científica, mientras que la prescripción y valoración, son los principales objetivos correspondientes a la actividad tecnológica, aunque ésta también incluye elementos de investigación aplicada a la resolución de problemas concretos. Por tanto, en el marco del EOS se ha decidido afrontar la segunda demanda a partir de la generación de constructos teóricos, siendo el más relevante el constructo criterios de idoneidad didáctica (CI). En los apartados siguientes explicaremos primero un breve resumen de este constructo y, a continuación, profundizaremos en su génesis y desarrollo, para finalizar con unas consideraciones generales.

Problema de optimización del aprendizaje: criterios de idoneidad didáctica

El constructo *idoneidad didáctica* surge como respuesta a la siguiente pregunta *¿Qué tipo de acciones y recursos se debería implementar en los procesos de instrucción para optimizar el aprendizaje matemático?* En el sistema teórico que configura el EOS se ha incluido la noción de *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de optimización de un proceso de instrucción matemática. Se define como el grado en que dicho proceso (o una parte de este) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (*aprendizaje*) y los significados institucionales pretendidos o implementados (*enseñanza*), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (*entorno*).

La Didáctica puede ofrecer principios provisionales (normas que son llamadas en el EOS criterios de idoneidad) consensuados por la comunidad interesada en la educación matemática, que pueden servir, primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje y, segundo, para valorar sus implementaciones. Estos principios son útiles en dos momentos:1) a priori, los criterios de idoneidad orientan cómo se debe llevar a cabo un proceso de instrucción, 2) a posteriori, los criterios sirven para valorar el proceso de enseñanza y aprendizaje efectivamente implementado e identificar posibles aspectos de mejora en el rediseño. Para generar estos principios los investigadores en educación matemática deben dialogar y colaborar con todos los demás sectores interesados en la mejora de la enseñanza de las matemáticas (profesores, padres, administración, etc.). Esto permitirá crear consensos que generen principios para orientar y valorar los procesos de instrucción, con la finalidad de conseguir una enseñanza idónea de las matemáticas. Se reconoce, no obstante, que la identificación de criterios de idoneidad, tanto generales como específicos, requiere de una agenda de investigación que se abre a discusión y desarrollo en la comunidad de educación matemática.

Dicho constructo general de idoneidad se ha particularizado en seis criterios parciales, lo cuales a su vez se concretan en componentes e indicadores (Godino, 2013; Breda, Font y Pino-Fan, 2018). Por ejemplo, para el criterio de idoneidad epistémica se puede formular el siguiente criterio parcial (componente): Los significados de los objetos institucionales pretendidos en cada contexto educativo deben ser una muestra representativa del significado de referencia global del objeto y tener en cuenta las restricciones de los contextos y sujetos implicados.

El logro de una alta idoneidad didáctica requiere un equilibrio entre los diferentes criterios parciales, teniendo en cuenta el contexto en que tiene lugar. Supongamos, por ejemplo, que hay consenso en que uno de los criterios es que los alumnos hayan aprendido (criterio cognitivo), que otro sea que se les haya enseñado unas matemáticas relevantes (con resolución de problemas, modelización, etc.) (criterio epistémico) y otro sea que se debe motivar a los alumnos para conseguir su implicación (criterio afectivo). Es relativamente fácil conseguir alguno de estos tres criterios por separado, pero lo que es más difícil y valioso es conseguir un cierto equilibrio entre los tres. Metafóricamente, un barco se hunde si no lleva la carga equilibrada.

La idoneidad es relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo que requiere una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor y demás agentes que comparten la responsabilidad del proyecto educativo. Implica la asunción de una racionalidad axiológica en educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, y en definitiva responder a la pregunta genérica, ¿sobre qué aspectos se puede incidir para la mejora progresiva de los procesos de instrucción matemática?

La noción de idoneidad está inspirada en la teoría consensual de la verdad de Peirce y de sus desarrollos y adaptaciones posteriores realizadas por autores como Apel (1991) y Habermas (1979). En esta teoría, "verdadero" es, en principio, un enunciado para un usuario cuando cree que cualquier otro sujeto racional estaría dispuesto a asignar el mismo predicado al enunciado. La verdad no se piensa en relación a un mundo separado de ideas, no como "conformidad" con ideas trascendentes, sino como aquello que podría ser defendido ante un conjunto de interlocutores y aceptado por ellos.

Génesis y desarrollo del constructo idoneidad didáctica

Las decisiones adoptadas para delimitar las bases que han permitido el desarrollo del constructo idoneidad didáctica han sido (Breda, Font y Pino-Fan, 2018):

1) La primera decisión es que debe ser un constructo que permita al profesor reflexionar sobre su práctica y poder guiar su mejora en el contexto donde se realiza.

2) La segunda decisión, derivada de la primera, es utilizar un término que tenga un cierto aire de familia con el término calidad, pero en el que los aspectos contextuales sean más predominantes que los estructurales o inherentes. Por esta razón, se optó por el término idoneidad para introducir el constructo CI.

3) La tercera decisión es considerar que lo que nos dice cómo guiar la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje debe emanar del discurso argumentativo de la comunidad científica, cuando éste se orienta a conseguir un consenso sobre lo que se puede considerar como mejor. Desde esta perspectiva, la DM nos puede ofrecer principios provisionales (un tipo de normas llamados aquí criterios de idoneidad) consensuados por la comunidad interesada en la educación matemática, o bien por un sector importante de ella, que pueden servir primero para

guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones.

4) La cuarta decisión es que el constructo de idoneidad didáctica ha de ser multidimensional y, por tanto, ha de descomponerse en idoneidades parciales y, a su vez, cada una de ellas hacerlo en componentes e indicadores.

5) la quinta decisión es que un proceso de instrucción se considera idóneo cuando se consigue un cierto equilibrio entre los diferentes criterios parciales de idoneidad, y no cuando sólo se dan algunos de ellos.

6) La sexta decisión es que los criterios de idoneidad parciales (en tanto que consensos a priori) pueden entrar en conflicto con el contexto en que trabaja el docente, lo cual comporta, primero, tratar los CI de manera conjunta (y no como criterios independientes como frecuentemente se hace en el caso de la calidad) y, segundo, a cuestionar o relativizar la validez de un determinado criterio en un contexto específico, lo cual lleva a dar pesos relativos diferentes a cada criterio en función del contexto.

Esta sexta decisión es posible porque los CI se consideran como normas que son principios en lugar de normas que son reglas. Los principios tienen un aspecto de peso o importancia que las reglas no tienen, de modo que los conflictos entre principios se resuelven por peso. Dicho de otra manera, los CI, en tanto que principios, no son binarios, son graduales.

7) La posible contradicción entre la quinta y la sexta decisión se puede resolver mediante el rediseño del proceso de enseñanza y aprendizaje. En efecto, de acuerdo con la sexta decisión, el mayor peso dado a algunos principios en función del contexto inclina las decisiones en una dirección. Ahora bien, los principios con menor peso sobreviven intactos aun cuando no prevalezcan, lo cual permite darles más peso en un rediseño del proceso de enseñanza y aprendizaje de cara a una implementación futura más equilibrada.

La opción de considerar que el constructo idoneidad didáctica debe contar con un cierto grado de consenso, da una manera de generar criterios parciales que permitan responder a la pregunta ¿qué se debe entender por mejora de la enseñanza de las matemáticas? ya que es cuestión de explorar, en una primera fase, cómo se ha generado un conjunto de tendencias y principios que gozan de un cierto consenso en la comunidad relacionada con la educación matemática; clarificando, a ser posible, qué papel juegan los resultados de la investigación didáctica en su generación. En una segunda fase, se tiene que relacionar, relativizar, subordinar, etc., estos principios para generar una lista de CI, con sus componentes e indicadores, que sirvan al profesor para organizar la reflexión sobre su práctica.

A continuación, explicamos brevemente estas dos fases que han llevado al constructo CI, compuesto por seis criterios de idoneidad didáctica parciales, cada uno, a su vez, desglosado en componentes e indicadores, cuya función es señalar aspectos a mejorar en la práctica del profesor.

Para el desarrollo del constructo CI, se han considerado las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas, los principios del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) y los aportes de los diferentes enfoques teóricos del área de la DM (Breda, Font y Pino-Fan, 2018).

Las principales tendencias que se tuvieron en cuenta fueron: la incorporación de nuevos contenidos, presentación de una matemática contextualizada, dar importancia a la enseñanza de los procesos matemáticos (resolución de problemas, modelización matemática, etc.), enseñanza y aprendizaje de tipo activo (constructivista), considerar que saber las matemáticas implica ser competente en su aplicación a contextos extramatemáticos, principio de equidad en la educación matemática obligatoria y la incorporación de nuevas tecnologías de la información y la comunicación.

El caso paradigmático de reconversión de algunas de estas tendencias en principios explícitos es el caso de los principios del NCTM (2000): currículum, enseñanza, aprendizaje, evaluación, tecnología e igualdad. En el EOS se consideró que, dado el amplio consenso que generan, los principios del NCTM, reinterpretados, podían ser el origen de algunos de los CI, o bien podían contemplarse como componentes suyos. En concreto, se reinterpretaron los principios del NCTM como se explica en Breda, Font y Pino-Fan (2018). Por ejemplo, el principio del currículum del NCTM señala claramente la idea de unas matemáticas importantes. Por esta razón, este principio, en la propuesta de criterios de idoneidad, se descompone en dos. Uno llamado criterio de idoneidad epistémica, que se relaciona con la idea de matemáticas importantes, y otro, llamado criterio de idoneidad ecológica, que se refiere al hecho de que los procesos de enseñanza y aprendizaje tienen que tener en cuenta el entorno en que se realizan. Por entorno se entiende todo aquello que está alrededor del aula, condicionando la actividad que se desarrolla en ella, en particular el currículum oficial.

Además de las tendencias y principios comentados anteriormente en el área de la DM se han generado conocimientos y resultados que gozan de amplio consenso. Algunos de los aportes de los diferentes enfoques del área de la DM también se han tenido en cuenta para el desarrollo del constructo CI (Godino, 2013).

Consideraciones finales

En diversas investigaciones (Seckel y Font, 2015; Morales y Font, 2017; Breda, Pino-Fan y Font, 2017; Morales y Font, en prensa) se ha observado el uso implícito de los criterios de idoneidad didáctica por parte del profesorado de matemática en formación inicial y continua cuando reflexionan sobre su propia práctica o la de otros; puesto que los criterios de idoneidad didáctica funcionan como regularidades en el discurso de los profesores, cuando estos tienen que justificar que sus propuestas representan una mejora, sin habérseles enseñado el uso de esta noción para guiar su reflexión . Una posible explicación está relacionada con los orígenes del constructo ya que estos criterios, sus componentes e indicadores se han seleccionado a partir de la condición de que debían de contar con un cierto consenso en el área de Didáctica de las Matemáticas, aunque fuese local. Por tanto, una explicación plausible de que los criterios, sus componentes e indicadores funcionen como regularidades en el discurso del profesor es que reflejan consensos sobre cómo debe ser una buena enseñanza de las matemáticas ampliamente asumidos en la comunidad de educadores matemáticos; y es plausible pensar que el uso implícito que hace el profesor de ellos se debe a su formación y experiencia previa, la cual le hace partícipe de dichos consensos. Ahora bien, otra explicación también plausible es que el profesor que utiliza estos criterios, al no haber participado en el proceso de generación de los consensos que los soportan, los asuma como regularidades en su discurso simplemente porque se le presentan como algo naturalizado e incuestionable. Esta última explicación donde más plausible parece es en la formación de futuros profesores, ya que es evidente que ellos no han participado en la generación de los consensos que son el soporte de los criterios de idoneidad didáctica. Por tanto, en la formación inicial de profesores, parece razonable que, en lugar de presentar los criterios de idoneidad como principios ya elaborados, se creen espacios para su generación como resultado de consensos en el grupo.

Con relación a la cuestión de cómo afecta a la práctica del profesor un constructo como el de idoneidad didáctica, la primera consideración es que es una herramienta que se puede enseñar a los profesores en formación y en servicio para organizar la reflexión sobre su práctica (Breda, Font y Lima, 2015). En particular, los criterios de idoneidad didáctica se están enseñando como contenido para organizar la reflexión del profesor sobre su propia práctica en diferentes postgrados.

La segunda, es que su aplicación concreta debe ser situada. Es decir, la aplicación, priorización, relegación etc., de dichos criterios depende del contexto institucional en el que se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje, y del criterio pedagógico y didáctico del profesor que los debe tener en cuenta. Se trata de contrastar el ideal con la realidad, pero en lugar de responsabilizar al profesor del desfase inevitable entre ambos, el uso de los criterios de idoneidad didáctica le da la posibilidad al profesor de reflexionar y decidir, de manera autónoma y en función del contexto, acciones para conseguir una mejora de sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Los criterios de idoneidad son una guía de orientación para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y no unos principios o criterios que produzcan la frustración del profesor normal al no poder alcanzarlos.

En cada contexto el profesor puede cuestionar ciertas verdades que tienen un amplio consenso. Por ejemplo, puede haber un gran consenso en que organizar la clase en forma de proyecto de trabajo y dando mucho peso a la modelización es, a priori, lo más deseable; pero, si tenemos que hacerlo con un grupo de alumnos heterogéneos, en los que la capacidad de concentración dura poco tiempo, quizás esta verdad deba ser cuestionada en este contexto particular. Con este ejemplo se pretende señalar que un consenso asumido en el área de la Didáctica de las Matemáticas como una buena manera de enseñar las matemáticas puede funcionar de modo incoherente o producir contra efectos no previstos, al encarnarse en unas prácticas de enseñanza en un contexto de aula (espacio-temporal) determinado.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-100 (MINECO/FEDER, UE) y REDICE18-2000 (ICE-UB).

Referencias y bibliografía

Apel, K.O. (1991). *Teoría de la verdad y ética del discurso*. Barcelona: Paidós e I.C.E. de la Universidad de Barcelona.

Bartolini, M. G. (2018). Answer to Gascón & Nicolás. *For the Learning of Mathematics*, 38 (3), 50-53.

Breda, A., Font, V. & Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*(2), 1-41.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios Valorativos y Normativos en La Didáctica de las Matemáticas: el Caso del Constructo Idoneidad Didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278.

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal Of Mathematics Science And Technology Education*, *13*(6), 1893-1918.

Davis, B. (2018). What sort of science is didactics? *For the Learning of Mathematics*, 38 (3), 44-49.

Font, V. y Godino, J. D. (2011), Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato, en J. M. Goñi (ed.), *Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas* (pp. 9-55). Barcelona: Graó.

Font, V., Godino, J. D. & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124.

Gascón, J. & Nicolás, P. (2017). Can didactics say how to teach? The beginning of a dialogue between the anthropological theory of the didactic and other approaches. *For the Learning of Mathematics*, 37 (3), 26-30.

Godino, J. D. (2013) Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*(11), 111-132.

Godino, J. D. Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Autores (en prensa).

Habermas, J. (1997). Teorías de la verdad. En, J. A. Nicolás y M. J. Frápoli (Eds.), *Teorías de la verdad en el siglo XX* (pp. 543-596). Madrid: Tecnos.

Morales, Y. y Font, V. (2017). Análisis de la reflexión presente en las crónicas de estudiantes en formación inicial en educación matemática durante su periodo de práctica profesional. *Acta Scientiae*, *19*(1), 122-137.

Morales, Y. y Font, V. (en prensa). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. *Educaçao e Pesquisa*.

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Oktaç, A., Trigueros, M. & Romo, A. (2019). APOS Theory: connecting research and teaching. *For the Learning of Mathematics.* 39 (1), 30-34.

Seckel, M.J. y Font, V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Práxis educacional*, 19, 55-75.

Aprendizagem profissional do professor de Matemática e o ensino de Álgebra: buscando articulações entre a escola básica e a universidade

Alessandro Jacques **Ribeiro**
Universidade Federal do ABC (UFABC)
Brasil
alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

Resumo

A literatura internacional tem indicado a carência de pesquisas que se proponham a investigar e a desvelar qual é e como se constitui a gênese da aprendizagem profissional dos professores para o ensino de álgebra na escola básica. Há também um importante desafio a ser enfrentado que é o distanciamento entre a matemática ensinada na formação inicial e as práticas matemáticas das salas de aula. Com isso, temos desenvolvido estudos que tematizam e consideram a aprendizagem profissional do professor como sendo construída na prática da sala de aula e a partir dela, e que essa aprendizagem é mediada por tarefas de aprendizagem profissional, por discussões matemáticas coletivas e pelo papel e as ações do formador durante processos de formação. Serão apresentados durante a conferência resultados de investigações (i) sobre à aproximação da matemática escolar e da matemática acadêmica e (ii) sobre a presença e a interlocução da prática como um componente essencial nos conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores para o ensino de álgebra, da escola básica à universidade.

Palavras-chave: aprendizagem do professor, ensino de álgebra, matemática universitária e matemática escolar, formação de professores.

Pretende-se, nesta conferência, colocar em discussão resultados de pesquisas que temos desenvolvido no Brasil[1] (Alves; Aguiar; Ribeiro, 2018; Elias; Ribeiro; Savioli, 2019; Ferreira; Ribeiro, M.; Ribeiro, A., 2017; Lautenschlager; Ribeiro, 2017; Pazuch; Ribeiro, 2017; Ribeiro; Aguiar; Pazuch, 2018; Ribeiro; Bezerra; Gomes, 2017; Ribeiro; Cury, 2015), as quais tem

[1] *"FORMATE - Formação Matemática para o Ensino"*, grupo de pesquisa credenciado no CNPq e que desenvolve pesquisas sobre conhecimentos profissionais do professor de matemática. Disponível em 13 mar. 2019, em: <http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/8814738426604861>

apontado para as especificidades dos conhecimentos e das práticas dos professores que ensinam matemática, da escola básica à universidade, no que tange ao ensino de álgebra.

Ainda que se tenha dado um grande destaque à formação de professores que ensinam matemática nas últimas décadas (Fiorentini; Passos; Lima, 2016; Gellert; Hernandéz; Chapman, 2013; Ponte, 2014; Stahnke; Schueler; Roesken-Winter, 2016), é possível perceber que há ainda uma demanda por pesquisas que priorizem a prática do professor como elemento fundante e como ponto de partida para a compreensão do que esse professor conhece, de como ele conhece e de para que ele conhece (Cochran-Smith; Lytle, 1999; Lampert, 2010; Ponte; Chapman, 2008).

Buscando-se particularizar ainda mais a problemática acerca da formação - inicial e continuada - de professores que ensinam matemática, há de se desenvolver (novas) investigações que se proponham a desvelar qual é e como se constitui a gênese da aprendizagem profissional dos professores (Opfer; Pedder, 2011; Webster-Wright, 2009) para o ensino de Álgebra na escola básica (Mc Crory et al., 2012). Um dos elementos centrais investigados em nossas pesquisas fazem referência aos conhecimentos matemáticos e didáticos (Ball; Thames; Phelps, 2008; Ponte, 1999) desses professores que ensinam matemática.

A preocupação que parece justificar os esforços envidados em nossos estudos emergem de resultados apontados por pesquisas acerca dos processos de ensino e de aprendizagem de álgebra, resultados estes que demonstram o insucesso dos estudantes na aprendizagem deste tema (Cyrino; Oliveira, 2011; Dorigo; Ribeiro, 2010; Kaput, 2008; Matos; Ponte, 2009; Stephens; Ribeiro, 2012), ao mesmo tempo que documentam as dificuldades encontradas pelos professores no ensino de álgebra nos diferentes níveis escolares (Barbosa; Ribeiro, 2013; Doerr, 2004; Mccrory et al., 2012; Pazuch; Ribeiro, 2017; Ponte; Branco, 2013; Ribeiro, 2012; Ribeiro; Cury, 2015; Ribeiro; Oliveira, 2015; Wasserman, 2015).

Quando se atua na e se investiga a formação de professores que ensinam matemática, um dos principais desafios a superar é o distanciamento entre a matemática ensinada nos cursos de formação inicial de professores (as Licenciaturas) e as práticas matemáticas efetivamente relacionadas à atuação na Escola Básica. Tal situação já chamava a atenção de pesquisadores há quase um século, quando Felix Klein ([1932]- 2004) e, em nosso grupo, temos nos debruçados sobre questões desta natureza, por exemplo, nos trabalhos de Elias, Ribeiro e Savioli (2019), Lautenschlager e Ribeiro (2017), Ribeiro e Oliveira (2015).

Ao retomar o objeto de estudo de nosso grupo, quer seja, a aprendizagem profissional dos professores, nota-se que tal temática tem sido estudada, discutida e investigada há mais de duas décadas (Opfer; Pedder, 2011). Dentre os resultados de estudos sobre a temática, no campo da Educação Matemática, emergiu uma perspectiva de aprendizagem profissional de professores fortemente ancorada na prática da sala de aula (Ball; Cohen, 1999; Lampert, 2010; Ponte; Chapman, 2008; Smith, 2001) e facilitadora de uma “aprendizagem profissional autêntica” (Webster-Wright, 2009).

Em seu estudo, Webster-Wright (2009) destaca ainda, que a formação inicial na universidade é apenas a primeira fase do processo de aprendizagem da vida profissional de muitos trabalhadores, como é o caso dos professores, uma vez que a eficácia dessa aprendizagem ocorre ao longo de muitos anos e no contexto da prática profissional. Essa visão holística sobre a aprendizagem profissional, em especial do professor, é também sustentada por Opfer e Pedder (2011), os quais defendem uma análise da aprendizagem profissional docente como um sistema complexo, e não como eventos episódicos.

Mas como se possibilitar uma aprendizagem profissional do professor que, ao mesmo tempo, tenha início na universidade, considere a prática da sala de aula, e seja desenvolvida (e acompanhada) em sua vida profissional futura? Nesse sentido, temos buscado debruçar nossas atenções para a importância de elaborar e desenvolver oportunidades de aprendizagem profissional, fundamentadas na prática dos professores, de modo a proporcionar aprendizagem profissional aos docentes ao longo de suas carreiras (Loucks-Horsley, 1997). Tal perspectiva é corroborada por Bruce et al. (2010), que indicam em seu estudo, que o ambiente da sala de aula deve ser considerado como base para construir oportunidades de aprendizagem profissional para os professores, de modo que eles se envolvam com o "uso de ciclos interativos de planejamento, desenvolvimento e reflexão [de aulas]" e que isso possibilite "conhecer como essas oportunidades de aprendizagem impactam para a eficiência dos professores e desempenho dos alunos (p. 1599)".

Fundamentado na literatura discutida até o momento, adotamos um entendimento que nessas oportunidades de aprendizagem profissional (OAP) há de se considerar o papel-chave das tarefas de aprendizagem profissional (TAP), as quais consideramos como sendo "tarefas que envolvem professores no trabalho do ensino, podem ser desenvolvidas a fim de encontrar um objetivo específico para a aprendizagem do professor e levam em consideração o conhecimento prévio e a experiência que os professores trazem de sua atividade" (Ball; Cohen, 1999, p. 27). Como apontam Watson e Mason (2007), há uma lacuna considerável na literatura acerca de estudos que analisem o papel das tarefas na aprendizagem dos professores, diferentemente da significativa produção relativa ao papel das tarefas na aprendizagem dos estudantes. Alguns resultados acerca desta temática, no que tange ao ensino de álgebra, podem ser melhor compreendidos em Ribeiro e Ponte (2019, no prelo).

Em nosso trabalho de investigação, temos tomado por base, um entendimento de que a aprendizagem do professor situa-se na prática diária, incluindo aí não apenas os momentos de sala de aula, mas também planejamento, avaliação, colaboração com colegas, entre outros (Davis & Krajcik, 2005); e que a aprendizagem do professor está distribuída entre indivíduos, bem como em artefatos, como o caso de tarefas que são preparadas para sua formação (Putnam & Borko, 2000); consideramos a aprendizagem do professor como algo que:

envolve o desenvolvimento e a integração de uma base de conhecimento sobre conteúdo, ensino e aprendizagem; tornando-se [o professor] capaz de aplicar esse conhecimento em tempo real para tomar decisões no ensino; participar do discurso do ensino; e tornar-se enculturado (e engajado) em uma variedade de práticas de professores (Davis & Krajcik, 2005, p. 3).

Atualmente, como resposta às lacunas identificadas na literatura e, ao mesmo tempo, como uma necessidade vivenciada em nosso grupo de pesquisa, temos buscado organizar um *framework*, que chamamos de *"Oportunidades de Aprendizagem do Professor (OAP)",* o qual tem por tem por intenção se constituir como um modelo teórico-metodológico para dar apoio para (i) organizar o *design* de processos formativos que objetivem promover aprendizagem aos professores e (ii) identificar se e avaliar como as três dimensões do *modelo* geram oportunidades para os professores aprenderem durante os processos formativos. O *modelo* que está sendo proposto contempla, de forma articulada e interativa, as três dimensões que o compõem: (a) Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP), (b) Interações Discursivas entre os Participantes (IDP), (c) Papel e Ações do Formador (PAF).

Com isso, fica o convite para que participem da conferência paralela a ser realizada na *XV*

Conferencia Inter-Americana de Educação Matemática (XV CIAEM), na qual poderão conhecer resultados já alcançados, questões em aberto, assim como nossa agenda de pesquisa.

Referencias

Alves, K. A.; Aguiar, M.; Ribeiro, A. J. (2018). As dimensões do conhecimento do professor que ensina matemática: o *knowledge quartet* como ferramenta de análise da prática docente. *Acta Scientiae* – ULBRA, Canoas, v. 20, 22-42.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). *Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education.* In G. Sykes & L. Darling-Hammond (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3-32). San Francisco, CA: Jossey Bass.

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Barbosa, Y. O., & Ribeiro, A. J. (2013). Multisignificados de equação: Uma investigação acerca das concepções de professores de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, *15*, 379-398.

Bruce, C. D., Esmonde, I., Ross, J., Dookie, L., & Beatty, R. (2010). The effects of sustained classroom-embedded teacher professional learning on teacher efficacy and related student achievement. *Teaching and Teacher Education*, *26,* 1598-1608.

Cochran-Smith, M., & Lytle, S. L. (1999). Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. *Review of Research in Education*, *24*(1), 249-305.

Cyrino, M., & Oliveira, H. (2011). Pensamento algébrico ao longo do ensino básico em Portugal. *Bolema*, *24*(38), 97-126.

Davis, E. A., & Krajcik, J. S. (2005). Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Educational Researcher*, 34(3), 3–14.

Doerr, H. M. (2004). Teachers' knowledge and teaching of algebra. In K Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Ed.). *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 267-289). Boston, MA: Kluwer,

Dorigo, M.; Ribeiro, A. J. (2010). Significados de equação: um estudo realizado com alunos do Ensino Médio. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, São Paulo, v. 3, 154-182.

Elias, H. R.; Ribeiro, A. J.; Savioli, A. M. P. D. (2019, no prelo). Epistemological Matrix of Rational Number: a Look at the Different Meanings of Rational Numbers. *International Journal of Science and Mathematics Education.* DOI: 10.1007/s10763-019-09965-4

Ferreira, M. C. N.; Ribeiro, C. M.; Ribeiro, A. J. (2017). Conhecimento matemático para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Zetetiké* (on line), v. 25, 494-511.

Fiorentini, D.; Passos, C. L. B.; Lima, R. C. R. (Org.). (2016). *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática:* Período 2001 a 2012. 1. ed. Campinas: FE-Unicamp, v. 1, 488p.

Gellert, U.; Hernandéz, R. B.; Chapman, O. (2013). Research methods in mathematics teacher education. In: CLEMENTS, M. A. et al. (Ed.). *Third international handbook of mathematics education*. New York, NY: Springer, 327-360.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge.

Lampert, M. (2010). Learning teaching in, from, and for practice: What do we mean? *Journal of Teacher Education*, 61(1-2) 21–34

Lautenschlanger, E.; Ribeiro, A. J. (2017). Formação de professores de matemática e o ensino de polinômios. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 19, 237-263.

Loucks-Horsley, S. (1997). Teacher change, staff development, and systemic change: Reflections from the eye of the paradigm. In S. N. Friel & G.W. Bright (Eds.), *Reflecting on our work: NSF teacher enhancement in K-6 mathematics* (pp. 133–150). Lanham, MD: University Press of America.

Loucks-Horsley, S., Hewson, P. W., Love, N., & Stiles, K. E. (1998). *Designing professional development for teachers of science and mathematics*. Thousand Oaks: Corwin Press.

Matos, A. S., & Ponte, J. P. (2009). Exploring functional relationships to foster algebraic thinking in grade 8. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*, Itália, Supplemento n.2 al n. 19,.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D., & Senk, S. L. (2012). Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(5), 584-615.

Opfer, V. D., & Pedder, D. (2011). Conceptualizing teacher professional learning. *Review of Educational Research*, 81(3), 376-407.

Pazuch, V.; Ribeiro, A. J. (2017). Conhecimento profissional de professores de matemática e o conceito de função: uma revisão de literatura. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 19, pp. 465-496.

Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In J. Tavares (Eds.). *Investigar e formar em educação: Actas do IV congresso da SPCE* (pp. 59-72), Porto: SPCE.

Ponte, J. P. (2014). Formação do professor de matemática: perspectivas atuais. In: PONTE, J. P. (Org.). *Práticas profissionais dos professores de matemática*. Lisboa: IE/UL, 343-358.

Ponte, J. P.; Branco, N. (2013). Pensamento algébrico na formação inicial de professores. *Educar em Revista*, Curitiba, n. 50, 135-155.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In: English, L. D. (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed. pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Putnam, R., & Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? Educational Researcher, 29(1), 4–15.

Ribeiro, A. J. (2012). Equação e Conhecimento Matemático para o Ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. *Bolema*, *26*(42), 535-557.

Ribeiro, A. J., & Cury, H. N. (2015). *Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ribeiro, A. J.; Aguiar, M.; Pazuch, V. (2018). O uso de vídeos em um processo formativo sobre o ensino de álgebra. In: Silva, R. S. R. (Org.). *Processos formativos em educação matemática: perspectivas filosóficas e pragmáticas*. Porto Alegre, RS: Fi, 213p.

Ribeiro, A. J.; Oliveira, F. A. P. V. S. (2015). Conhecimentos mobilizados por professores ao planejarem aulas sobre equações. *Zetetiké*, Campinas, v. 23, n. 44, 311-327.

Ribeiro, A. J.; Ponte, J. P. (2019, no prelo). Professional learning opportunities in a practice-based teacher education programme about the concept of function. *Acta Scientiae*.

Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Stahnke, R.; Schueler, S.; Roeskâ Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM*, Heidelberg, v. 48, n. 1, 1-27.

Stephens, M., & Ribeiro, A. J. (2012). Working towards algebra: The importance of relational thinking. *RELIME*, *15*, 307-401.

Wasserman, N. H. (2015). Unpacking teachers' moves in the classroom: navigating micro-and macro-levels of mathematical complexity. *Educational Studies in Mathematics*, Rotterdam, n. 90, p. 75-93.

Watson, A.; Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education,* Springer Netherlands, v. 10, n. 4-6, 205-215.

Webber, E., Tallman, M. A., & Middleton, J. A. (2015). Developing elementary teachers' knowledge about functions and rate of change through modeling, *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(1), 1-33, DOI: 10.1080/10986065.2015.981940

Webster-Wright, A. (2009). Reframing professional development through understanding authentic professional learning. *Review of Educational Research*, *79*(2), 702–739.

Categorías para análisis de los contenidos didácticos en el currículo de matemáticas

Luis **Rico**
Universidad de Granada
España
lrico@ugr.es

Resumen

Al preparar esta presentación me interrogué sobre mi papel en este encuentro y el interés que una reflexión sobre el currículo de matemáticas –experiencias, conocimientos, significados y apreciaciones– pudieran tener para los congresistas del XV CIAEM. Entiendo que mi presencia aquí es a título de experto, actuación que de mí se espera, con la que enfoco estas ideas. Ahora bien, considero que la interpretación del currículo en el campo de la educación matemática, con criterios de demarcación todavía en discusión, es una cuestión abierta. Por eso, como contribución al debate, presento unas ideas y observaciones para su clarificación.

El título del trabajo consta de cuatro términos: Categorías; Análisis; Contenidos didácticos; y Currículo de matemáticas. Sobre cada uno de ellos haré unas reflexiones, estableceré ciertas relaciones y concluiré con una síntesis. Estas consideraciones me han llevado a optar por argumentos derivados de esas nociones, pensados para la formación de profesores de matemáticas en el sistema escolar, durante el periodo de la educación obligatoria.

Palabras clave: currículo, educación matemática, estructura del currículo, organizadores curriculares, análisis didáctico, significado y comprensión.

Currículo en educación matemática

Noción general de currículo

En sentido educativo general, ‘currículo’ es un término establecido para denotar la *planificación y puesta en práctica de un programa de formación*. Un currículo consiste en una propuesta de actuación educativa y su realización; se sitúa entre la declaración de principios generales y su traducción práctica, entre lo que se prescribe y lo que sucede realmente en el aula. Cada currículo concreta una serie de principios ideológicos, pedagógicos y psicopedagógicos que, en su conjunto, proponen una orientación para el sistema educativo o para una institución (Stenhouse, 1984).

Cuestiones a las que responde un currículo de matemáticas

En la planificación de las matemáticas escolares un currículo consiste en una formulación de respuestas operativas y concretas a las siguientes preguntas: ¿para qué aprender matemáticas?, ¿qué conocimientos matemáticos?, ¿cuándo y cómo enseñar y organizar el trabajo docente?, ¿cuáles criterios de evaluación muestran el desarrollo de competencias y cuáles el logro de los objetivos?
Objetivos y competencias responden a la pregunta ¿para qué aprender?
Los contenidos atienden a la pregunta ¿qué conocimientos matemáticos?
La metodología didáctica se ocupa de ¿cómo y cuándo llevar a cabo la enseñanza?
Los estándares de aprendizaje y criterios de evaluación consideran ¿cuáles datos muestran el desarrollo y logro de los aprendizajes?
A cada documento curricular corresponde plantear respuestas claras y precisas sobre las cuestiones anteriores, si bien hay diversidad de respuestas para cada una de las preguntas clave.

Dimensiones del currículo

Las cuatro cuestiones examinadas requieren estudios específicos que, a su vez, forman parte de disciplinas académicas especializadas, relacionadas mediante la noción general de currículo. Las cuestiones anteriores se consideran sustantivas y permiten postular dimensiones para estudiar y analizar una propuesta curricular. Esas dimensiones organizan los contenidos sobre currículo, marcan un objeto de estudio y, en cada caso, establecen unas variables para su análisis. Las cuatro dimensiones quedan recogidas en la figura 1.

Dimensiones del currículo de matemáticas			
Cognitiva	Cultural/Conceptual	Ética/Formativa	Social

Figura 1. Esquema con las dimensiones del currículo institucional

Niveles de reflexión curricular

Los niveles de reflexión que se abordan y estudian desde un marco curricular son diversos. Los niveles se presentan al trabajar documentos curriculares concretos.
Así, cuando se asume el currículo como plan de trabajo para el profesor, como plan de acción, la *actuación en el aula* es su nivel de precisión. La normativa suele regular la concreción curricular, centra el plan de trabajo para unas condiciones espacio temporales dadas y lo expresa mediante unos contenidos, objetivos, metodología y criterios de evaluación propios.
La administración educativa marca otro nivel, que contempla el currículo como instrumento de *actuación en el sistema escolar* y propone otro nivel de concreción curricular. Los conocimientos se sistematizan mediante materias y asignaturas, los aprendizajes escolares se organizan por niveles y ciclos, los profesores asumen responsabilidades, el centro escolar realiza la evaluación.
También el currículo se trabaja desde un nivel de *reflexión disciplinar y académica*, donde se estudian sus fundamentos teóricos y su implementación técnica desde distintas disciplinas.
Dimensiones y componentes proporcionan una estructura conceptual adecuada para organizar las respuestas a las cuestiones curriculares básicas en cada nivel (Rico, 1997, pp. 377-409).

Estructura del currículo de matemáticas

Para formar profesores de matemáticas consideramos necesario disponer de un marco compartido de ideas bien fundadas, basadas en conceptos y relaciones, que estructure el plan que propone cada currículo, sistematice su estudio, lo caracterice y facilite su comparación con otras propuestas distintas. Las dimensiones y niveles curriculares proporcionan una primera estructura para el marco conceptual que proponemos. Igualmente, en cada dimensión y nivel, elegimos un concepto central como objeto de análisis preferente para organizar la información disponible. Dicho concepto se manejará con el método de análisis, mediante el cual se identificarán, extractarán y sintetizarán las nociones subordinadas y las representaciones intencionales relevantes relacionadas. Tal método de análisis se sustenta en la identificación, organización, secuenciación, clasificación y jerarquización de las proposiciones elementales o unidades de información intencionales obtenidas de textos, documentos y materiales curriculares, según dimensiones, categorías y componentes didácticos, haciendo parte de la estructura conceptual derivada de la noción de currículo. Cada propuesta se ha de ubicar en la estructura conjunta y responder a un mismo marco interpretativo (Rico, 2016).

Análisis didáctico en educación matemática

Análisis conceptual

El análisis es un *método que trabaja y profundiza sobre conceptos*, es decir, una técnica de escrutinio, reducción e interpretación, para lograr precisión, expresión adecuada y dominio en nociones y conceptos específicos (Beaney, 2018). Al iniciar una investigación o al profundizar sobre un tema en educación matemática se requiere analizar los conceptos centrales que tienen cierta relevancia por el conocimiento que proporcionan (Rico, 2001).

Características del análisis conceptual en educación matemática

El análisis conceptual es una herramienta metodológica que controla la complejidad semántica, selecciona sentidos, y dispone de aparato teórico para una investigación educativa.
Unidades para el análisis conceptual son los enunciados textuales, las descripciones, definiciones, listas extensivas, ejemplos de uso, contraposición de textos con significados alternativos y formulaciones simbólicas, relativas al aprendizaje, enseñanza y evaluación de las matemáticas escolares. No son datos empíricos, ni de naturaleza sensible. Vienen expresados por oraciones que aseveran un estado de cosas que tienen lugar en un cierto momento temporal.
En mi trabajo he llevado a cabo análisis conceptuales de distintos conceptos relevantes para la educación matemática. Ejemplos documentados de análisis conceptuales se muestran para las nociones de *error en el aprendizaje* (Rico, 1995, pp. 69-96), de *modelo matemático* (Rico, 2001, pp. 187-191), de *representación* (Rico, 2009, pp. 1-14), de *expectativas de aprendizaje* (Rico y Lupiáñez, 2010, pp. 61-106), de *análisis* (Rico y Fernández-Cano, 2013, pp. 1-22).

Cuestiones que aborda el análisis conceptual

El análisis conceptual ayuda al investigador en la consecución de varios logros:

- Proporciona un conocimiento amplio de un campo de estudio para enunciar un problema de investigación de modo coherente.
- Establece un marco teórico fundado en conceptos en el que plantear cuestiones significativas.
- Evita la polisemia de conceptos que se utilizan en investigación educativa.
- Objetiva el conocimiento: los conceptos científicos son públicos, son el tipo de cosas que muchas personas pueden compartir y comparten y que pueden manejarse normativamente.

- Rechaza la atribución arbitraria de significado o la desconsideración de significados centrales que, como usos patológicos, han de quedar eliminados.

El análisis conceptual es un método para trabajar y profundizar sobre los conceptos, que emplea las opciones técnicas del método analítico para conseguir precisión y dominio en su uso. Al iniciar una investigación o al profundizar sobre un tema en educación matemática corresponde identificar y analizar aquellos conceptos centrales en que se fundamenta, o bien escoger un sistema de interpretaciones ya validadas por otros autores (Rico, 2001).

Contenidos didácticos y dimensiones del currículo

Desde hace más de un siglo la comunidad de expertos en educación matemática ha fijado su atención y centrado sus indagaciones en determinados conceptos educativos nucleares y ciertas nociones matemática básicas, aceptadas como relevantes en educación matemática, a las que llamaremos *contenidos didácticos*.

El carácter central de esos contenidos lo reconocemos por su ubicuidad en documentos y textos que organizan, desarrollan y comunican la riqueza y diversidad de conocimientos vigentes sobre el currículo escolar de matemáticas; también se seleccionan por su amplitud y profundidad conceptual, por la abundancia de sus relaciones; igualmente, destacan por su adecuación a las dimensiones curriculares postuladas.

Dimensiones curriculares			
Dimensión cognitiva	Dimensión cultural/ conceptual	Dimensión ético/ formativa	Dimensión social
Objeto de estudio/ contenidos didácticos			
Expectativas y condiciones de aprendizaje para las matemáticas escolares	Significados de los contenidos matemáticos escolares	Planificación e implementación para enseñanza de las matemáticas	Evaluación y toma de decisiones en base a los logros de aprendizaje
Modalidad de análisis didáctico			
Análisis cognitivo del contenido	Análisis conceptual del contenido	Análisis metodológico del contenido	Análisis evaluativo del contenido

Figura 2. Contenidos didácticos y modalidades de análisis según dimensiones

Textos y documentos curriculares abordan sistemáticamente las expectativas de aprendizaje, los significados de las nociones matemáticas, el diseño y la planificación de las tareas escolares o los fundamentos para la toma de decisiones en base a la valoración de los logros alcanzados. Todas son nociones didácticas actuales, teórica y técnicamente hablando. Los textos escolares de matemáticas no trabajan solo nociones matemáticas, ya que se refieren a la educación y al hecho cultural del aprendizaje de las matemáticas por los escolares, a su enseñanza y evaluación.

Los expertos han profundizado en los contenidos didácticos vigentes guiándose por las dimensiones del currículo, articulados según los niveles citados; trabajan sobre los contenidos didácticos de acuerdo con diferentes tipos de categorías u organizadores curriculares que estudian y sus análisis los llevan a término a través de componentes, sistemas y elementos, teóricamente articulados y confrontados en la práctica con la experiencia y la investigación.

Categorías para clasificar los contenidos didácticos

Organizadores curriculares

¿Qué son los organizadores del currículo? Por organizadores curriculares entendemos aquellos conceptos que se adoptan como categorías para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas. Para detectar la presencia en los textos normativos y en los manuales de cada una de esas dimensiones del currículo y analizar así su utilidad y sus funciones, elegimos y trabajamos con unas categorías denominadas *organizadores curriculares* que vinculamos con las dimensiones del currículo. Esas categorías reconocen y clasifican las unidades de información que, en cada documento, trabajan en las dimensiones consideradas.

¿Para qué sirven los organizadores del currículo? Los organizadores aportan información objetiva y fundada sobre cada contenido didáctico de la matemática escolar relacionándolo con las dimensiones mencionadas, con lo cual contribuyen a profundizar sobre el conocimiento considerado. A su vez, han de proporcionar diversas opciones, con vistas a planificar su enseñanza y aprendizaje. Los organizadores aportan un método para identificar el conocimiento didáctico, relevante para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares

¿Cómo trabaja el experto los organizadores? En su práctica el experto, para cada programa matemático escolar, o cada tema o unidad didáctica en cuestión, realiza un análisis según distintas dimensiones y organizadores, lo cual lleva a cabo mediante los textos a su alcance. Mediante esos análisis, obtiene información útil para elaborar propuestas didácticas, apropiadas para su implementación bien en el aula de matemáticas, bien en el sistema educativo o en una investigación. Una vez obtenida esa información procederá a realizar una síntesis, que concreta en su plan de acción.

Organizadores según dimensiones

Cada una de las cuatro dimensiones –cognitiva, cultural, ética y social– requiere un tipo de análisis específico, que se concreta y detalla por medio de organizadores propios. En lo que sigue describimos los organizadores seleccionados para cada una de las dimensiones.

Categorías cognitivas para estudiar los contenidos sobre aprendizaje

La información y los conocimientos didácticos destacables sobre el aprendizaje de un conocimiento matemático escolar se estudian a través de organizadores propios, que suministran categorías cognitivas, convenientes para analizar y establecer los contenidos didácticos propios del aprendizaje matemático escolar en cada tema (Rico, 2016). Por su relevancia destacan:

Expectativas sobre el aprendizaje de los escolares, que destacan por su carácter intencional; suelen venir expresadas mediante capacidades o competencias. Las expectativas expresan proyectos y compromisos (Rico y Lupiañez, 2010)

Limitaciones en el aprendizaje que se presentan a los escolares, las cuales abarcan tanto las dificultades como los errores que pueden surgir en el proceso (Rico, 1995).

Oportunidades de aprendizaje con que el alumno puede contar y que promueve el profesor para incentivar el aprendizaje del contenido por los escolares, generalmente planteadas en forma de retos y tareas matemáticas escolares.

Categorías para estudiar los significados de los contenidos matemáticos

Para estudiar la dimensión cultural/conceptual es importante disponer de datos generales sobre la historia de los conceptos implicados, conocimiento que identifica e interpreta los hechos relevantes, destaca los momentos históricos y muestra la evolución del contenido matemático.

La dimensión cultural-conceptual se ocupa de los significados de los conceptos que conforman el contenido matemático escolar que, en cada caso, estudia y analiza (Rico, 2016). Esta dimensión trabaja con diversas categorías curriculares, como son:

Estructura formal y cognitiva de los conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos y actitudes que articulan los contenidos matemáticos escolares.

Sistemas de representación, sistemas de signos gráficos o simbólicos, utilizados en cada concepto, relación o estructura, sus reglas de transformación internas, las traducciones entre distintos sistemas, junto con algunas modelizaciones usuales de los correspondientes conceptos (Rico, 2009)

Sentidos y modos de uso, categorías que examinan el empleo de los conceptos, los fenómenos de los que surgen, los contextos en que se realizan, las situaciones en que se aplican y que dotan de sentido a los contenidos matemáticos.

Categorías para los contenidos sobre instrucción y enseñanza

Igualmente, para estructurar los aspectos formativos y de instrucción relativos a una determinada estructura o concepto matemático escolar, es decir, para sistematizar los contenidos, técnicas y prácticas, sobre su enseñanza, se consideran los organizadores de instrucción (Rico, 2016). Esos organizadores determinan los procesos formativos y regulan las correspondientes enseñanzas; entre ellos destacan:

Las *variables, funciones y tipos de tareas matemáticas escolares* que pueden ponerse en juego, junto con su organización mediante secuencias (Rico, 2001).

Diversidad de *materiales y de recursos* que pueden emplearse en su enseñanza.

Modos de *organización y gestión* de la actividad escolar para conseguir interacciones y procesos de comunicación acordes con las expectativas concebidas sobre aprendizaje.

Categorías para estudiar los contenidos sobre evaluación

Para organizar y estructurar la dimensión social en relación con un determinado tema matemático escolar, es decir, para sistematizar los conocimientos sobre su evaluación y su análisis estratégico de resultados, se consideran los organizadores evaluativos (Rico, 2016):

Modalidades y diseño de la evaluación, que vienen establecidos por las *funciones, normativa y* los *momentos* que caracterizan los procesos de valoración.

La *intervención y toma de decisiones*, determinados por los *criterios e instrumentos* que permiten diagnosticar, orientar y valorar los aprendizajes matemáticos de los escolares.

Los *indicadores de calidad* del sistema y estrategias para revisar el proceso formativo, determinados por el rendimiento escolar, los resultados de aprendizaje y otros indicadores de calidad, verificados por estudios comparativos internacionales.

Análisis didáctico

Por *análisis didáctico de un contenido matemático escolar* entiendo un método para identificar, escudriñar, estructurar e interpretar, dentro de un marco curricular, sus contenidos didácticos con el propósito de su planificación, su implementación en el aula y/o su evaluación, que hacen parte de las matemáticas escolares. El análisis didáctico es una variante del análisis de contenido, precedido por un análisis conceptual de aquellos conceptos o contenidos didácticos que sean relevantes en cada caso.

Las informaciones obtenidas en cada contenido matemático según las distintas dimensiones que conforman su análisis didáctico, constituyen sus *contenidos didácticos*.

El análisis didáctico se lleva a efecto cuando se sigue un procedimiento de análisis en la estructura que establecen las dimensiones curriculares, la totalidad de sus organizadores y las relaciones entre ellos. El profesor de matemáticas desarrolla y mejora sus competencias profesionales mediante el análisis didáctico, de modo especial su competencia de planificación. (Rico, 2016, pp. 95-99).

Significar y comprender

Intencionalidad

El término intencionalidad expresa una característica distintiva de las ideas: el hecho de que 'son relativos a' o 'representan cosas', lo cual es previo a su comprensión; el carácter distintivo de esos estados consiste en que no se puede creer, desear o esperar, sin creer o desear algo. "Creencias, deseos, esperanzas y cosas semejantes se llaman *estados intencionales* (Honderich, 2001, pp. 553-554). "La intencionalidad consiste en la referencia a un objeto, existente o no, común a percepciones y fantasías, recuerdos y esperanzas, deseos y decisiones, conceptos y juicios" (Mosterín y Torreni, 2002, p. 304).

Significado de un concepto matemático escolar

Entender un concepto matemático es conocer su definición, representarlo, mostrar su operaciones, relaciones y propiedades y sus modo de uso, interpretación y aplicación a la resolución de problemas. El profesor necesita un dominio en profundidad sobre los contenidos que se propone enseñar, a partir de los cuales planificar y orientar el aprendizaje de los escolares. El contenido didáctico en cada concepto se inicia mediante el análisis y demarcación de sus significados (Rico, 2016). "A un signo (nombre, unión de palabras, signo escrito), además de lo designado, que podría llamarse la referencia del signo, va unido lo que yo quisiera llamar el sentido del signo, en el cual se halla contenido el modo de darse. (…) Un nombre propio (palabra, signo, fila de signos o expresión) expresa su sentido, se refiere a su referencia o la designa. Con un signo expresamos su sentido y designamos su referencia" (Frege, 1996). "Referencia, representación y sentido son los tres organizadores o categorías semánticas que empleamos para el estudio e interpretación del significado de los contenidos matemáticos escolares" (Rico, 2016). Comprender un contenido matemático en profundidad implica interpretar sus conceptos y ejecutar sus procedimientos con significado coherente, "entender algo significa asimilarlo en un esquema apropiado" (Skemp, 1987).

La comprensión de los escolares

Las unidades básicas de información para llevar a cabo el análisis didáctico de un proceso formativo las obtenemos de las manifestaciones que hacen alumnos, profesores u otros agentes educativos participantes cuando se les interroga al efecto; se manifiestan mediante expresiones verbales las cuales transmiten las ideas o representaciones mentales del sujeto que las manifiesta. Hay oraciones que aseveran un *estado de cosas que tienen lugar en un cierto momento del tiempo*; son oraciones que aseveran la existencia de una *idea* o *estado mental.*

Opiniones, creencias, conocimientos, percepciones, deseos, intenciones, etc. son tipos de estados mentales. Cuando esos estados mentales son relativos al aprendizaje, enseñanza y evaluación de nociones o contenidos matemáticos escolares se dice que son ideas didácticas. El contenido de las ideas sobre educación matemática se obtiene de las oraciones que los expresan. Un sujeto se dice que comprende un concepto cuando lo describe y procesa en una estructura significativa.

Es en virtud de la proposición que expresan los enunciados (también aquellos sobre educación matemática) que *representan* el mundo como siendo de un modo u otro; y es en virtud de cómo lo representan (i.e. de la proposición que expresan) –y, naturalmente, de cómo de hecho es el mundo– que el enunciado es verdadero o falso. De modo similar puede decirse que opiniones, percepciones, conocimientos, deseos o intenciones representan el mundo como siendo de un cierto modo, y en virtud de cómo lo representan, y de cómo de hecho es el mundo, que las opiniones y las percepciones son verdaderas o falsas. (Honderich, 2001, pp. 553-554)

Organizar el pensamiento del profesor de matemáticas en torno a juicios, textos y documentos sobre el currículo de matemática para sistematizar sus capacidades de análisis y abordar ese estudio como campo de conocimiento, es nuestro propósito. Los resultados de tales análisis impulsan la investigación y desarrollan las competencias profesionales del docente de matemáticas, con las cuales efectuar el diseño y puesta en práctica de unidades didácticas.

El contenido de las ideas sobre educación matemática se obtiene de las oraciones que lo expresan y de los procedimientos con que los procesan. Un sujeto se dice que comprende un concepto cuando lo describe y procesa en una estructura significativa. Comprender un concepto es requisito necesario para su análisis didáctico.

Referencias y bibliografía

Beaney, M., "Analysis", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL= https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/analysis/

Honderich, T. (Ed.) (2001). Intencionalidad. En: *Enciclopedia Oxford de Filosofía*, pp. 553-554. Madrid: Tecnos.

Mosterín, J. y Torreni, R. (2002). Intencionalidad. En: *Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencia*, p. 304. Madrid: Alianza.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En: J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.) *Educación Matemática,* 69-96. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Rico, L. (1997). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En: L. Rico (Ed.) *Bases teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria.* Madrid: Síntesis.

Rico, L. (2001). Análisis Conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática. En: P. Gómez y L. Rico (Eds.) *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro,* pp. 179- 193. Granada: Editorial Universidad de Granada.

Rico, L. (2009) Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA 4(2)*, pp. 1-14.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013) Análisis Didáctico y Metodología de Investigación. En: L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular*, pp. 1-22. Granada: Comares.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2010). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Madrid: Alianza Editorial.

Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En: L. Rico y A. Moreno, (Eds.) *Elementos de Didáctica de la Matemática para el Profesor de Secundaria*. Madrid: Pirámide

Skemp, R. (1987). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Stenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del currículo*. Madrid: Morata.

Experiencias de modelización en la formación de futuros profesores de matemática

Mónica E. **Villarreal**
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba
Argentina
mvilla@famaf.unc.edu.ar

Resumen

El desarrollo de actividades y proyectos de modelización matemática en la formación de futuros profesores resulta de vital importancia debido a que, tanto en documentos curriculares para la formación inicial de profesores de matemática, como en documentos curriculares para la educación secundaria, se recomienda la introducción de aplicaciones y modelización para la enseñanza de la matemática. Estudios desarrollados por diversos investigadores indican desde hace tiempo que, si se pretende que los futuros profesores diseñen actividades de modelización para sus clases en la escuela secundaria, es necesario que tengan experiencias de modelización durante su formación inicial, pasando por un ciclo completo de modelización matemática. En base a datos recopilados durante siete años, en esta conferencia presentaré experiencias de modelización llevadas adelante por futuros profesores. Centraré la atención en los contenidos matemáticos que utilizaron o necesitaron aprender para dar cuenta de los problemas formulados, el tipo de temas que seleccionaron, el papel de las tecnologías y las dificultades detectadas en el desarrollo de sus proyectos de modelización.

Palabras clave: educación, matemática, modelización matemática, formación de profesores, tecnologías

Breve introducción: problemática y contexto

Esta conferencia aborda aspectos de la problemática de la formación de futuros profesores de matemática en torno a la modelización matemática como proceso científico y como abordaje pedagógico. Desde hace unos diez años un grupo de docentes e investigadores de la Universidad Nacional de Córdoba (UNC), del cual soy integrante, investiga en torno a la temática del desarrollo profesional de futuros profesores de matemática que llevan adelante proyectos de modelización[1], esto es, actúan como modelizadores; o que diseñan e implementan actividades de modelización durante el transcurso de sus primeras prácticas docentes en aula. Estas investigaciones han sido desarrolladas con estudiantes[2] que cursan la carrera de Profesorado en Matemática en la UNC. Esta carrera tiene una duración de 4 años, siendo que el 66% de las disciplinas que componen el plan de estudios son cursos de matemática impartidos por matemáticos, y el 34% restante, cursos de carácter didáctico-pedagógico impartidos por pedagogos o educadores matemáticos.

En las siguientes secciones, se presentan algunas discusiones que vinculan modelización, curriculum y formación inicial de profesores de matemática. Se hace referencia a los desafíos que implica la modelización para el trabajo docente y se describe un escenario de modelización particular creado en un contexto de formación inicial de profesores. Finalmente se reportan algunos resultados de investigaciones desarrolladas en ese escenario de modelización.

Modelización y curriculum

Según Kaiser (2014), la importancia de la modelización a nivel internacional se ve reflejada en muchos curriculum nacionales, sin embargo, todavía no es claro cómo integrar la modelización en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En el ámbito local (Argentina), y en coincidencia con lo observado por Kaiser, la modelización es mencionada en documentos curriculares destinados a la educación secundaria. Por ejemplo, en el Diseño Curricular para la Educación Secundaria de la Provincia de Córdoba se encuentran propuestas de situaciones de enseñanza relacionadas con la modelización, y se señala que el docente:

- Considerará la ***modelización*** para resolver problemas tanto externos como internos a la matemática. Además, propiciará el estudio de límites del modelo matemático para explicar un problema o fenómeno que se intenta resolver o explicar. Para que el estudiante pueda describir, analizar o predecir el fenómeno de la realidad modelado (por ejemplo, fenómenos sociales y/o naturales) mediante la matemática puesta en juego, se requiere que los estudiantes observen la realidad; la describan en forma simplificada; construyan un modelo; trabajen matemáticamente con él para arribar a resultados y conclusiones matemáticas; interpreten los resultados; evalúen la validez del modelo para poder explicar esa realidad.
- Incluirá problemas que se modelen matemáticamente para el ***tratamiento del álgebra***, acudiendo a generalizaciones y contemplando una perspectiva amplia del álgebra como instrumento de modelización. Desde esta postura, las variables, ecuaciones y funciones, son instrumentos de modelización de problemas desde dentro y fuera de la matemática. Su visión como instrumento de modelización, implica que el docente deberá proponer tareas que apunten a cada uno de los pasos de la modelización matemática: identificación y designación de variables que caracterizan el sistema a modelizar, establecimiento de relaciones entre variables, trabajo a partir de expresiones simbólicas que permiten conocer el sistema modelado, interpretación y aplicación del trabajo realizado con el modelo algebraico. (Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba, 2011, p. 48, énfasis en el original).

En el primer ítem se destaca la propuesta de trabajar tanto con modelización intra-matemática como extra-matemática. Asimismo, se menciona el estudio de los límites de un modelo para explicar un determinado fenómeno de la realidad, y se explicitan las fases de un proceso de modelización. En el segundo ítem, el proceso de modelización se vincula más

[1] Para evitar repeticiones, a veces se usa "modelización" en lugar de "modelización matemática".
[2] De no mediar una aclaración, "estudiantes" se refiere siempre a "futuros profesores".

específicamente al álgebra como instrumento privilegiado para modelizar y se especifica la necesidad de proponer tareas que den cuenta de las fases del proceso para ese caso particular.

Ante las propuestas de enseñanza como las que se acaban de citar, cabe preguntarse, ¿qué perspectiva de modelización subyace en las mismas? Por un lado, el proceso de modelización es visto en estos diseños curriculares como un *vehículo* para aprender matemática (Julie y Mudaly, 2007), lo que se busca es ofrecer aplicaciones de contenidos matemáticos ya estudiados. Aquí puede verse que se denomina modelización al uso de modelos ya creados para resolver ciertos problemas reales. En estos casos estamos en presencia de la aplicación de un modelo matemático ya estudiando que resulta adecuado para resolver un problema. Se trata de lo que Muller y Burkhardt (2007) denominan *aplicaciones ilustrativas*.

Por otro lado, se pone de manifiesto una postura que busca que los estudiantes se adentren en un proceso de modelización y sean creadores de modelos para fenómenos de la realidad. El desarrollo de este proceso en clases de matemática promueve lo que Muller y Burkhardt (2007) denominan *modelización activa*. Estos autores afirman que en este caso puede existir una variedad de herramientas matemáticas útiles para dar cuenta del problema y que elegirlas y usarlas apropiadamente es el mayor desafío para los estudiantes. En este caso, interesa la modelización en sí, como actividad matemática y como *contenido* a ser abordado (Julie y Mudaly, 2007). Si se espera que los profesores lleven adelante procesos de modelización activa en sus clases, es necesario que ellos mismos vivan esa experiencia. En esta conferencia me voy a referir a este tipo de experiencia de modelización con futuros profesores de matemática.

Modelización y formación inicial de profesores de matemática

Los requerimientos de diseños curriculares para la educación secundaria en relación con la modelización –tales como los mostrados en la sección anterior–, la existencia de diferentes perspectivas asociadas a ese proceso y la variedad de tareas de modelización destinadas para clases de matemática (ver, por ejemplo, Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes, A. y Sánchez-Cardona, 2017) plantean desafíos para la formación de futuros profesores. ¿Qué ambientes de aprendizaje es necesario crear en el ámbito de la formación inicial si se pretende que los futuros profesores tengan condiciones para dar cuenta de requerimientos curriculares en torno a la modelización? Estos desafíos también son mencionados en el contexto internacional y muchos investigadores manifiestan sus preocupaciones, propuestas y reflexiones en relación con la modelización matemática en la formación de futuros profesores.

Doerr (2007) afirma que es necesario que los futuros profesores encuentren “experiencias de modelización que proporcionen una variedad de contextos y herramientas y que los involucren en análisis de meta-nivel de su actividad de modelización” (p. 77). Niss, Blum y Galbraith (2007) enfatizan que, si se pretende que los profesores de matemática incluyan “aplicaciones y modelización en sus agendas de enseñanza de manera eficiente, exitosa y reflexiva, necesitan oportunidades para desarrollar esa capacidad durante su educación inicial y a través de actividades regulares de desarrollo profesional en servicio” (p. 7). Blum (2015) se refiere a la necesidad de proporcionar a los futuros profesores el conocimiento profesional necesario para llevar adelante actividades de modelización y desarrollar experiencias de enseñanza con modelización. Por su parte, Gastón y Lawrence (2015) sostienen que la formación de los futuros profesores debería incluir conocimientos acerca de qué es la modelización matemática, cómo puede ser incorporada en la enseñanza y cómo se pueden evaluar las actividades de modelización. Estos autores afirman que es deseable que los futuros profesores ganen experiencia significativa con la modelización, sea a través de la realización de actividades de modelización en cursos de matemática, o a través de cursos específicos de modelización. Se puede decir que todos los autores presentados en esta revisión coinciden en la necesidad de ofrecer a los futuros profesores oportunidades para experimentar la modelización durante su formación inicial. La próxima sección presenta una propuesta para la formación inicial de profesores de matemática que pretende atender esa necesidad.

Un escenario de modelización para la formación de futuros profesores

Las recomendaciones de los expertos en relación a la formación de futuros profesores de matemática en torno a la modelización, e incluso la presencia formal de la modelización en los estándares locales para la formación de profesores no garantizan su tratamiento en el trayecto de la formación inicial. La realidad en nuestro contexto local, en particular, en el programa de formación de profesores en la UNC, está lejos de atender esos requerimientos. Los cursos disciplinares específicos de matemática ofrecen escasos ejemplos de aplicaciones de la matemática en la resolución de problemas extra-matemáticos y, además, se brinda poco (o ningún) espacio para la modelización activa.

Dadas las dificultades que significa intentar introducir cambios en los formatos pedagógicos y contenidos de los cursos de matemática que forman parte del plan de estudios del Profesorado en Matemática de la UNC, y a fin de ofrecer oportunidades de vivenciar experiencias con el proceso de modelización matemática, en 2010 decidimos crear un ambiente de aprendizaje especial, un *escenario de modelización*[3], en el marco del curso de Didáctica de la Matemática (DM). Desde entonces hemos mantenido esta práctica y hoy en día este escenario de modelización matemática está consolidado.

El curso de DM tiene modalidad anual, se dicta en el tercer año del plan de estudios y se extiende por 30 semanas con dos clases de cuatro horas por semana. En este curso, se estudian diferentes tendencias en educación matemática: resolución de problemas, educación matemática crítica, uso de tecnologías en la educación, modelización matemática.

Nociones de modelo, modelo matemático y proceso de modelización matemática son debatidas en el curso. Las fases de un proceso de modelización matemática son descriptas y discutidas con los estudiantes en base al trabajo de Bassanezi (2012). Según este autor, un proceso de modelización consta de varias fases. Comienza con la *selección de un tema o fenómeno* del mundo real[4], que por algún motivo sea de interés, y continúa con la *formulación de problemas* o preguntas asociadas con el mismo. Posteriormente se inicia una búsqueda de datos o se diseña un experimento para obtenerlos (*experimentación*). Una fase de *abstracción* comienza cuando se seleccionan variables y se levantan hipótesis o conjeturas. Al traducir las preguntas o problemas enunciados en lenguaje natural para el lenguaje matemático, se inicia un proceso de *matematización* para obtener un modelo matemático. La aceptación o rechazo de tal modelo es la *validación*. Si el modelo es rechazado, puede comenzar una fase de *modificación* y un nuevo ciclo se inicia.

Una vez presentadas las fases de un proceso de modelización matemática, se muestran

[3] La noción de *escenario de modelización* que aquí se emplea fue desarrollada por Esteley (2014).
[4] Blum (2003) denomina *mundo real* a "todo lo que tiene que ver con la naturaleza, la sociedad o la cultura, incluyendo la vida cotidiana, así como la escuela y la universidad o disciplinas científicas y académicas diferentes de la matemática" (p. 152, traducción propia).

experiencias de actividades de modelización en diferentes contextos educativos y se resuelven varios problemas que requieren la creación de un modelo. Por último, se invita a los futuros profesores a que desarrollen sus propios proyectos de modelización, siguiendo las fases del proceso y utilizando libremente tecnologías digitales, si así lo desean. Para ello, se pide a los estudiantes que formen pequeños grupos y seleccionen un tema del mundo real de su interés, formulen problemas relacionados con este tema, seleccionen variables, planteen hipótesis, diseñen experimentos (si es necesario), busquen información, recopilen y procesen datos, resuelvan el problema y trabajen en una fase de validación.

Algunas de las actividades relacionadas con los proyectos de modelización son realizadas por los estudiantes de forma autónoma en horarios extra-clase. Los profesores de DM actúan como guías que pueden ayudar a formular o reformular los problemas, informar sobre posibles fuentes de datos y sugerir nuevas preguntas para que los estudiantes se involucren en procesos de modelización más complejos.

Al final del proceso, cada grupo escribe un informe y hace una presentación oral para toda la clase. Durante estas presentaciones, que duran unos 40 minutos, el resto de la clase hace preguntas y comentarios sobre el proyecto que está siendo presentado. En muchos casos, surgen discusiones sobre la modelización como parte de la futura tarea docente en la escuela, o reflexiones sobre el papel de la tecnología en el proceso de modelización. La ejecución de todas las actividades de modelización descritas anteriormente requiere aproximadamente seis semanas.

En síntesis, se puede decir que el escenario propuesto está caracterizado por: (a) la naturaleza abierta de los proyectos a desarrollar, debido a la libre elección de un tema del mundo real para estudiar y formular preguntas; (b) la ausencia de contenidos matemáticos predeterminados que deban ser enseñados, el foco está puesto en la modelización como una actividad matemática que merece ser enseñada en sí misma; (c) el carácter interdisciplinario del trabajo; (d) la promoción de la reflexión sobre la matemática, los modelos creados y el papel social de la matemática y la modelización; y (e) el dominio del proceso completo de modelización. Este escenario creado con fines educativos, también se tornó en un escenario a ser investigado. La próxima sección se refiere a este aspecto.

El escenario de modelización como escenario investigado

Las experiencias de modelización llevadas adelante en el escenario de modelización descrito en la sección anterior, se han registrado de diferentes maneras: informes finales escritos de los estudiantes, notas de campo durante las clases, vídeos de las presentaciones orales finales. Estas fuentes de datos nos han permitido desarrollar diferentes estudios en el periodo 2010-2016. En Villarreal, Esteley y Smith (2015) abordamos las siguientes preguntas de investigación: ¿qué contenidos matemáticos utilizan los futuros profesores en sus proyectos?, ¿qué tipo de temas eligen y por qué razones? y ¿qué dificultades u obstáculos experimentan durante el proceso de modelización? El estudio, se basó en 11 proyectos desarrollados por 41 estudiantes de las cohortes 2010, 2011 y 2012. La Tabla 1 muestra, de manera sintética, el tema de cada proyecto, el tipo de problemática abordada y el contenido matemático involucrado en cada uno.

El análisis reveló que la libre elección de un tema para iniciar un proyecto de modelización fue un obstáculo importante para los estudiantes, pero también fue posible constatar que la creación de escenarios de modelización en el curso de DM habilitó espacios de reflexión en torno al rol docente en tales escenarios.

Tabla 1

Problemáticas abordadas y contenidos matemáticos involucrados en los proyectos de modelización.

Proyectos de modelización de los futuros profesores	Problemática	Contenido matemático
Captación de agua en zonas secas	Socio-económica	Función de dos variables
Consumo de agua en el hogar	Ecológica	Estadística
Consumo de energía eléctrica en el hogar		Estadística
Basura y recolección de residuos reciclables		Funciones de proporcionalidad directa e inversa
Tiempo de espera en el comedor universitario	Interés personal	Función lineal
Abastecimiento de gas en garrafas en una localidad rural		Función lineal
Consumo de soja		Función lineal
Transmisión genética y características humanas		Probabilidad
Gastos de viaje escolar de fin de curso	Preocupación didáctica	Programación lineal
Juegos de lotería	Matemática	Probabilidad
Recuperación de la inversión para un cierto negocio		Funciones exp y log

Fuente: elaboración propia en base a resultados presentados en Villarreal, Esteley y Smith (2015).

En las sucesivas cohortes del curso de DM, a partir de 2010, fue posible observar que el uso de tecnologías digitales fue aumentando de manera significativa en los proyectos de modelización. Así, en Villarreal, Esteley y Smith (2018) se abordaron las siguientes cuestiones: ¿qué tecnologías seleccionan los futuros profesores para utilizar en sus proyectos de modelización, y con qué propósitos?, y ¿en qué fases del proceso de modelización el uso de tecnologías fue significativo? En este trabajo se analizaron 32 proyectos de modelización que involucraron a 108 estudiantes del Profesorado en Matemática a lo largo de siete cohortes consecutivas, entre 2010 y 2016.

Las tecnologías utilizadas en los proyectos se clasificaron en cuatro categorías: Internet, planillas de cálculo, software matemático (GeoGebra, Mathlab) y lenguajes de programación (Python y Octave). El uso de Internet se manifestó en el 75% de los proyectos, principalmente como fuente de datos e información relacionada con el tema elegido. Las planillas de cálculo se emplearon en el 56% de los proyectos. La Tabla 2 muestra una categorización de los propósitos de uso de Internet o planillas de cálculo, indicando la fase del proceso de modelización que se vio enriquecida por ese uso. La tabla pone en evidencia que las fases del proceso de modelización en las cuales estas tecnologías resultaron más significativas fueron las fases de experimentación y de matematización.

El software matemático y los lenguajes de programación se utilizaron principalmente en la fase de matematización y no se crearon categorías específicas ya que los propósitos de uso estaban relacionados con el tema particular de cada proyecto.

Tabla 2

Categorías de usos de Internet y planillas de cálculo y fases del proceso de modelización.

Tipo de tecnología	Propósitos de uso (fase del proceso de modelización)
Internet	Buscar datos o información para iniciar la construcción del modelo (Formulación-Experimentación). Seleccionar variables (Abstracción). Formular o reformular el problema (Formulación-Modificación). Generar datos usando aplicaciones on-line (Experimentación). Validar el modelo (Validación).
Planilla de cálculo	Mostrar datos usando tablas o diferentes tipos de representación gráfica para comunicar resultados (Matematización). Realizar cálculos sencillos utilizando las prestaciones automáticas de las planillas de cálculo (Matematización). Programar funciones personalizadas utilizando las funciones originales de la planilla para realizar cálculos de una manera más eficiente, ejecutar simulaciones o aplicar el modelo creado (Matematización - Validación).

Fuente: elaboración propia en base a resultados presentados en Villarreal, Esteley y Smith (2018).

En los dos artículos aquí citados (Villarreal, Esteley y Smith, 2015, 2018) pueden verse análisis detallados de algunos de los proyectos desarrollados por los estudiantes.

En los años 2017 y 2018, nuevos proyectos de modelización fueron desarrollados por los futuros profesores que cursaban DM. En particular, en 2018, solicitamos a los estudiantes que manifestaran qué habían aprendido durante el proceso. Los futuros profesores reconocían haber aprendido a aplicar contenidos matemáticos ya conocidos y que eso les había permitido dar sentido a esos contenidos (por ejemplo: grafos o regresión lineal). También señalaron como aprendizajes: el manejo de datos de la realidad, el empleo de prestaciones de programación en las planillas de cálculo y la aplicación de lenguajes de programación. Todos los grupos destacaron sus aprendizajes en torno a los temas específicos elegidos (recorridos en parques nacionales de la Patagonia argentina, termotanques solares, autos eléctricos, aborto inducido, viajes en Argentina). En el caso del proyecto dedicado al aborto, la pregunta formulada fue: ¿Cuántos abortos inducidos se producen por año en Argentina? La complejidad de la misma condujo hacia el estudio de un modelo ya existente que presenta la construcción de un multiplicador que es utilizado para estimar el número “real” de abortos a partir de datos proporcionados por hospitales y encuestas a agentes de salud. Así, en el escenario de modelización en el marco de DM, no solo se crearon modelos, sino que también se estudiaron y aplicaron modelos creados por otros.

Concluido el curso de DM, al año siguiente, los estudiantes cursan la materia llamada *Metodología y Práctica de la Enseñanza*, en el marco de la cual desarrollarán sus primeras prácticas docentes en la escuela secundaria. Algunos de los estudiantes que en el año anterior han vivenciado la experiencia de un proyecto de modelización, tendrán la posibilidad de diseñar e implementar propuestas didácticas de modelización en escuelas secundarias. Este es un segundo escenario de modelización para los futuros profesores. Debido a limitaciones de espacio no es posible extenderse en el análisis de este segundo escenario, pero algunos resultados pueden verse en Villarreal y Esteley (2017); Smith, Esteley y Villarreal (2013); Villarreal y Mina (2013).

Reflexiones finales

Algunos de los proyectos de modelización llevados a cabo por los futuros profesores y sus reflexiones, expresadas durante las presentaciones orales o escritas en el informe final, son evidencia de experiencias transformadoras. En particular, algunos estudiantes dieron sentido a la experiencia previendo posibles implicaciones para su futuro como profesores, tal es el caso de dos estudiantes que, en las conclusiones de su trabajo, escribieron:

> Consideramos que es muy importante haber experimentado el proceso de modelización ya que nuestras experiencias personales influirán en la forma en que seremos como profesores en el futuro. Al experimentarlo, sentimos y vivimos el proceso como lo harían nuestros futuros alumnos, y este hecho nos convenció de que la modelización matemática puede ser implementada como una estrategia pedagógica.

La experiencia vivida por los estudiantes les permitió visualizar que la modelización podría ser una propuesta pedagógica en su futuro como profesores. Mientras tanto, también es importante reconocer que no todos los estudiantes vivieron una experiencia transformadora en el escenario de modelización creado en DM. En estos casos, podía observarse que los estudiantes no se involucraban en sus proyectos de modelización.

Diferentes razones pueden explicar estas situaciones: gran demanda de tiempo, dificultad para seleccionar un tema de interés y plantear problemas relacionados con él, dificultad para trabajar en colaboración con colegas. Asimismo, la ausencia de aplicaciones y actividades de modelización extra-matemáticas en los cursos de matemática y el escaso uso de tecnologías en la carrera del Profesorado en Matemática podrían actuar como barreras para la propuesta. Es posible que muchos estudiantes no estuvieran convencidos de la relevancia de la modelización y de la importancia de las tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, o quizás los profesores no fuimos capaces de hacer evidente la esencia de esta propuesta abierta y guiarlos hacia un proceso exitoso.

Es importante reconocer también, que el tipo de actividad de modelización propuesto quizás significa un salto en relación a las actividades matemáticas a las que los estudiantes están habituados. Tal vez sea necesario desarrollar previamente pequeños proyectos, más acotados y sencillos, que aborden las distintas fases de un proceso de modelización de manera más gradual y que preparen el camino para luego poder abordar proyectos de modelización completos. Tal como lo señalan Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes, A. y Sánchez-Cardona (2017), los tipos de tareas de modelización matemática recorren un abanico de posibilidades, del cual los proyectos abiertos es solo uno.

A pesar de las dificultades mencionadas, y en base a la evidencia positiva obtenida a lo largo de estos años, puede afirmarse que la implementación de actividades de modelización y el uso de tecnologías proporcionan aportes significativos para la formación inicial, por muchas razones: pueden potenciar el aprendizaje de los estudiantes, pueden contribuir a una educación inclusiva y pueden hacer que los futuros profesores sean sensibles hacia diferentes maneras de dar sentido a la matemática.

Referencias y bibliografía

Bassanezi, R. (2012). *Temas y modelos*. Campinas, Brasil: UFABC.

Blum, M. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: what do we know, what can we do? En

S.J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Cham: Springer.

Blum, W. (2003). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education–discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51*(1–2), 149–171.

Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 69–78). New York: Springer.

Esteley, C. (2014). *Desarrollo profesional en escenarios de modelización matemática: voces y sentidos*. (Tesis doctoral). Facultad de Filosofía y Humanidades - Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Recuperado de: https://ffyh.unc.edu.ar/editorial/wp-content/uploads/sites/5/2013/05/EBOOK_ESTELEY.pdf

Gastón, J., & Lawrence, B. (2015). Supporting teachers' learning about mathematical modeling. *Journal of Mathematics Research*, 7(4), 1–11.

Julie, C., & Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 503–510). New York: Springer.

Kaiser, G. (2014). Mathematical modelling and applications in education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 396-403). New York: Springer.

Ministerio de Educación del Gobierno de la Provincia de Córdoba (2011). *Diseño Curricular. Ciclo Básico de la Educación Secundaria*. Recuperado de: http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/EducacionSecundaria/DiseniosCurricSec-v2.php

Muller, E. & Burkhardt, H. (2007). Applications and modelling for mathematics. En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education - The 14th ICMI Study* (pp. 267-274). New York: Springer.

Niss, M.; Blum, W & Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, M. Niss (Eds.) *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp. 3-32). New York: Springer.

Smith, S.; Esteley, C. & Villarreal, M. (2013) Modelización matemática en la formación de futuros profesores: desarrollo de proyectos y prácticas profesionales docentes con modelización. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Montevideo. p. 4526-4535.

Villa-Ochoa, J., Castrillón-Yepes, A. & Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemática. *Espaço Plural*, Año XVIII, 36, 219-251.

Villarreal, M., & Esteley, C. (2017). Futuros profesores de matemática: narrativas de sus primeras prácticas en escenarios de modelización. En D. Fregona, S. Smith, M. Villarreal, F. Viola (Eds.). *Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios. Aportes para la Educación Matemática* (pp. 25-50). Córdoba: FAMAF-UNC.

Villarreal, M., Esteley, C., & Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2): 327-341.

Villarreal, M.; Esteley, M. & Smith, S. (2015) Pre-service mathematics teachers' experiences in modelling projects from a socio-critical modelling perspective. En Stillman, G.; Blum, W. y Biembengut, M. (Eds). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice. Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 567-578). Cham: Springer.

Villarreal, M. & Mina, M. (2013). Modelización en la formación inicial de profesores de matemática. *Actas de la VIII Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática*. 16 páginas.

Interpretando o letramento estatístico dentro do currículo de matemática do ensino básico: *um projeto internacional de ensino integrado sobre o tema de energia com dados reais*.

Yuriko Yamamoto **Baldin**
Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos
Brasil
yuriko@dm.ufscar.br

Resumo

O tema de produção de energias de natureza renovável se liga à discussão sobre a sustentabilidade do planeta e a educação escolar para cidadania responsável, quando um problema de consumo responsável de energia pode ser trabalhado dentro do currículo de ensino básico, promovendo uma postura crítica na leitura de dados reais e sua interpretação. O conceito de letramento estatístico em nível básico, no contexto de ensino de matemática integrado com temas interdisciplinares, implica desafios de interpretação e análise de propostas de aulas inovadoras. Este texto tem como objetivo discutir um projeto de colaboração internacional entre Chile, Brasil e Japão, realizado em 2017, trazendo referências teóricas do letramento estatístico para interpretar uma aula-pesquisa realizada em classes de 6º ano do ensino básico. O projeto utilizou a metodologia de Lesson Study em uma aula STEM, mediada por tecnologia de comunicação à distância. A aula alcançou resultados replicáveis em outros contextos.

Palavras chave: letramento estatístico em ensino básico; ensino integrado STEM; educação para cidadania; Lesson Study e sequência didática; aula mediada por tecnologia de comunicação.

Resumen

El tema de la producción de energía renovable está vinculado a la discusión sobre la sostenibilidad del planeta y con la educación en la escuela para la ciudadanía responsable, cuando se puede elaborar un problema de consumo responsable de energía en el currículo de Educación básica, promoviendo una postura crítica en la lectura de datos reales y su interpretación. El concepto de letramento estadístico en el nivel básico, en el contexto de la enseñanza integrada de las matemáticas, implica retos de interpretación y análisis de clases innovadoras. Este texto pretende debatir un proyecto de colaboración internacional entre Chile, Brasil y Japón, realizado en 2017, buscando referencias teóricas del letramento estadístico para interpretar una clase para sexto año de la Básica. El proyecto utilizó la metodología de Lesson Study en una clase STEM, mediada por la tecnología de comunicación a distancia. La clase ha logrado resultados replicables en otros contextos.

Palabras clave: letramento estadístico en la educación básica; enseñanza STEM integrada; Educación ciudadana; Lesson Study y la secuencia didáctica; clase mediada por la tecnología de comunicación.

Introdução

A Estatística se consolidou durante o século 20 como uma disciplina que possui características próprias, entre as quais no tratamento de dados, especialmente dos dados numéricos que, por se expressarem por notações e operações/fórmulas matemáticas, aparecem como parte do currículo escolar em níveis desde iniciais a secundários, e com mais ênfase em nível superior, sendo ensinado em nível de escola básica como tópicos de matemática (Garfield & Ben-Zvi, 2007; Garfield & Ben-Zvi, 2008). Segundo (Garfield & Ben-Zvi, 2008), a Educação Estatística, que cresceu a partir das investigações da Educação Matemática, distingue uma diferença essencial da disciplina Estatística em relação à Matemática na abordagem do estudo sobre dados numéricos, o que leva ao conceito de *letramento estatístico*, que será elaborado adiante. Na página 8 da referência citada, encontramos citação de Moore que aponta a diferença entre a abordagem matemática de dados numéricos, que os trabalha como números em abstrato, regidos pela estrutura matemática, e a da estatística, que trabalha dados como "números com contexto", quando o contexto traz significados para os números que representam dados, não podendo estes ser analisados sem levar em consideração "como foram coletados" e "o que representam (Cobb & Moore, 1997 apud Garfield & Ben-Zvi, 2008). Garfield e Bem-Zvi (2008) argumentam que as diferenças essenciais entre a matemática e a estatística levam necessariamente a uma análise diferenciada das dificuldades de *ensino da estatística*, quando consideradas como parte da formação de professores, e do estudo das dificuldades de aprendizagem dos alunos, que por sua vez, reagem diferentemente em relação a atividades de matemática e de estatística. Enquanto o ensino da matemática se fundamenta na estrutura subjacente da teoria matemática que se manifesta por meio de definições, fórmulas, expressões e resolução de problemas através de procedimentos de operações e raciocínios abstratos, as atividades de estatística trabalham com incertezas, análise de dados obtidos em contextos reais, a variabilidade de dados, a leitura de condições por trás dos dados e inferências a partir da análise de dados. As diferenças percebidas pelos avanços nas investigações sobre Educação Estatística implicaram maior compreensão sobre as necessidades de reformas curriculares em todos os níveis para focar o letramento estatístico, em paralelo ao letramento matemático e de alfabetização. Documentos como (NCTM,2000) e (CBMS, 2012) são contribuições que detalham orientações sobre as tendências dos currículos atuais, refletindo os conhecimentos gerados pela pesquisa, reforçando a preparação dos professores em Ensino Básico no Conhecimento Pedagógico de Conteúdo para Matemática e Estatística.

No Brasil, o recente documento de Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil-

MEC, 2018) é um documento que estabelece, para o Ensino Fundamental e Médio, as orientações para o ensino de tópicos básicos de matemática, no eixo *Probabilidade e estatística*, que substitui a denominação anterior da área *Tratamento de Informação*, estabelecendo as competências e habilidades alinhadas com os conceitos do letramento estatístico, Há, entretanto, muito a investigar durante a implementação do novo Currículo para constituir um conhecimento sólido que promova mudanças significativas e efetivas na prática escolar.

A questão de pesquisa que focamos neste trabalho se origina a partir de um projeto de parceria internacional (Baldin, Isoda, Olfos & Estrella, 2018), tendo como objetivo um estudo de caso para interpretar os conceitos do letramento estatístico:

"*Como podemos desenvolver as competências indicadas pelo letramento estatístico dentro do currículo de matemática em nível básico?"*

O texto está organizado em seguintes seções: Fundamentação teórica do conceito de letramento estatístico; Projeto de ensino integrado sobre o tema de consumo responsável de energia; Metodologia de Lesson Study (Pesquisa de Aula) para uma aula cross-border; Análise da aula segundo os princípios do letramento estatístico; Conclusão.

Fundamentação teórica do conceito de letramento estatístico

Seguimos fundamentalmente (Garfield & Ben-Zvi, 2007) para conceituar o letramento estatístico. Segundo estes autores, o letramento estatístico constitui "uma habilidade essencial esperada de cidadãos em sociedades imersas em informações, e é frequentemente considerado um resultado esperado da educação escolar como um componente necessário de letramento numérico e estatístico". O letramento estatístico envolve em especial o reconhecimento e a capacidade de interpretar diferentes representações de dados.

Entendemos também as perspectivas de outros autores como a de Gal (2002) que consideramos complementar à definição de letramento estatístico: "Letramento estatístico constitui habilidade para interpretar, avaliar criticamente e comunicar sobre informação estatística e mensagens". Além disso, o letramento estatístico permite a uma pessoa desenvolver uma habilidade de avaliar informações de caráter estatístico que aparecem na mídia, assim como apreciar o valor do conhecimento estatístico na vida cotidiana, cívica e profissional como consumidores e produtores de dados (del Pino & Estrella, 2012). Esta visão conecta o letramento estatístico à educação escolar para formação de cidadão consciente e responsável.

Para elucidar a posição de letramento estatístico como base da educação estatística e sua distinção da matemática e letramento numérico, Garfield e Ben-Zvi (2007) ressaltam os conceitos de "raciocínio estatístico (*statistical reasoning*)" e de "pensamento estatístico (*statistical thinking*)" que fazem parte da teoria de educação estatística, que se juntam ao "letramento estatístico", apresentando hierarquias entre eles, assim como suas interseções. O pensamento estatístico, próprio da disciplina Estatística como ciência, não será abordado neste trabalho, por não implicar primariamente na análise do projeto de ensino que é objeto de estudo de caso.

O conceito de "raciocínio estatístico" corresponde a um avanço do estágio de habilidade básica de um cidadão para a habilidade de raciocinar com ideias estatísticas, atribuindo sentidos e significados para informação estatística (Garfield & Ben-Zvi, 2007). O raciocínio estatístico pode envolver o conectar um conceito a outro, ou combinar ideias sobre os dados e a chance. O raciocínio estatístico significa também compreender e explicar processos estatísticos, e também interpretar resultados estatísticos. Em especial, quando a exploração de dados é feita por representação gráfica, Shaughnessy (2007) oferece um critério de quatro níveis de leitura de gráficos para a análise de informações extraídas da leitura: a) leitura de gráfico/dados; b) leitura *dentro* do gráfico/dados; c) leitura *além* do gráfico/dados; d) leitura *por trás* do gráfico/dados. Os níveis representam gradativamente as competências que se aprofundam na direção do letramento estatístico, que iniciando com a identificação dos dados representados graficamente, avançam para o nível de compreender os significados (ler dentro) para poder inferir para além dos dados iniciais(ler além), e finalmente conjecturar outros contextos ou as causas do fenômeno cujos dados estão representados (ler por trás).

No estado atual da investigação em Educação Estatística, há um crescente desenvolvimento no estudo sobre o letramento estatístico, raciocínio e pensamento dos alunos, voltado para promover mudanças no ensino, da “estatística procedimental” com fórmulas, técnicas e cálculos para um desenvolvimento da “compreensão conceitual” na direção do letramento estatístico (Garfield & Ben-Zvi, 2007).

Projeto de ensino integrado sobre o tema de consumo responsável de energia

O tema de produção de energias de natureza renovável se liga à discussão sobre a sustentabilidade do planeta e a educação escolar para cidadania responsável, quando um problema de consumo responsável de energia pode ser trabalhado dentro do currículo de ensino básico, promovendo uma postura crítica na leitura de dados reais e sua interpretação. Entretanto, o planejamento de uma aula que incorpore os princípios de letramento estatístico desde o ensino básico em contexto de interdisciplinaridade é um desafio inovador para pesquisadores e professores em exercício.

Shaugnessy, na página 11 de (Rossman & Shaughnessy, 2013) discute o desafio de trabalhar o letramento estatístico em níveis básicos do ensino escolar, pela preparação insuficiente em matemática dos professores que atuam nos anos iniciais, e pelo fato do conteúdo escolar relacionados à aquisição de habilidades do letramento estatístico estar “embutido dentro do amplo eixo de *Medidas e Dados,* com progressão orientado para medição (linear, área e medida de volume) do que para estatística. ... (...) recomendações para coleta e apresentação de dados são orientadas para representar frações e decimais na reta numérica ...sem raciocínio sobre a distribuição de dados.”

No contexto desse desafio, com o tema de Energia para Sustentabilidade, e objetivo de investigar e produzir experiências didáticas para nível básico, o APEC- Lesson Study Project (http: //www.criced.tsukuba.ac.jp) trabalha as aulas interdisciplinares na perspectiva STEM (Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática) com características de letramento estatístico, com colaboração internacional de vários países e realizações trans-fronteira (cross-border). O artigo (Isoda, Araya, Eddy et al., 2017) traz uma experiência de Aula Pública sobre Eficiência Energética, realizada à distância, com transmissão via Skype, entre uma classe em Chile e outra nos Estados Unidos. Nesse artigo, as características de uma Aula Pública nos moldes concebidos como Lesson Study, em que uma aula demonstrativa é observada por professores colaboradores e convidados, e é comentada após a aula, são detalhadas de forma a implicar em comunidades de aprendizagem coletiva que reduz o isolamento de professores e de salas de aula.

Ainda em 2017, González e Isoda realizaram para o Projeto APEC uma oficina de tarefa estatística que utilizou tabelas de dados reais sobre os gastos com energia elétrica em escala internacional, para instigar os participantes a "explorar os dados" para raciocinar com conceitos estatísticos, como de "percepção sobre indícios de variabilidade dos dados", "desenvolvimento e compartilhamento de pensamentos sobre as fontes de variação dos dados em períodos de tempo", e "desenvolvimento de raciocínio informal de inferência usando os dados como recursos para estimativas, predições e generalizações".

A oficina utilizou recursos de representação gráfica para leitura de dados, apoiada nos critérios de Shaughnessy (2007) para desenvolver o letramento estatístico em nível de ensino secundário, o que motivou o projeto de uma Aula-pesquisa para 6º ano do ensino fundamental com o tema de "consumo responsável de energia", que destacasse as etapas de Lesson Study, desde a fase de planejamento até a análise final, com enfoque STEM e de letramento estatístico, e em caráter trans-fronteira (cross-border) entre Chile e Brasil. A avaliação qualitativa do projeto focou nas evidencias da possibilidade de replicar a aula em diferentes contextos e dentro do currículo de matemática dos países participantes. (Baldin et al, 2018)

Metodología de Lesson Study (Pesquisa de Aula) para uma aula cross-border

As etapas de Lesson Study (Fernandez & Yoshida, 2004) basearam a estrutura do projeto de Aula-pesquisa, que assim se denomina por ser uma aula especialmente desenhada coletivamente por pesquisadores e professores de sala de aula, em busca de evidências para fundamentar a análise de resultados desejados de uma aula inédita. Resumidamente, as etapas da Lesson Study constituem de: *Pesquisa para o plano de aula; Elaboração do plano de aula com estabelecimento de questão/problema norteador da atividade em sala de aula; Implementação do plano de aula acompanhada por observação e registro da atividade; Análise pós-aula com reflexão e síntese dos resultados com auxílio de folhas atividade dos alunos questionários aos professores e observadores.*

A metodologia de Lesson Study para implementação de uma aula-pesquisa com tema interdisciplinar de energia, além de estar alinhado com os conhecimentos esperados para 6º ano do ensino básico de países diferentes, facilita a análise de conceitos de letramento estatístico que é o foco deste trabalho.

A ***pesquisa*** para a elaboração do plano de aula envolveu extenso intercâmbio, entre os dois grupos de estudo no Brasil e no Chile, de estudos sobre o conteúdo curricular dos dois países, assim como de desenho especial dos objetivos da aula que deixem claros os conceitos de letramento estatístico.

Após filtrar os conhecimentos previstos para 6º ano (11 ~12 anos de idade) em duas escolas públicas, do Brasil e Chile, assim como considerar os conhecimentos prévios das duas turmas, o ***plano de aula*** foi desenhado com as características de execução simultânea, comunicação sincronizada, gravação da aula durante a execução, socialização interativa facilitada pela tecnologia de comunicação, tradução simultânea de espanhol e português na sala brasileira.

Os dados reais de produção e consumo de energia renováveis e não renováveis dos dois países, nos anos 1990 e 2013, foram extraídas da base de dados do Banco Mundial (//wdi.worldbank.org/table/3.6) e apresentados aos alunos com representação em barras de coluna, acessíveis ao conhecimento dos estudantes, ilustrados na Figura 1. Esta parte faz parte da pesquisa para o planejamento da aula para adequar o conteúdo e as estratégias didáticas ao conhecimento dos alunos e ao currículo escolar.

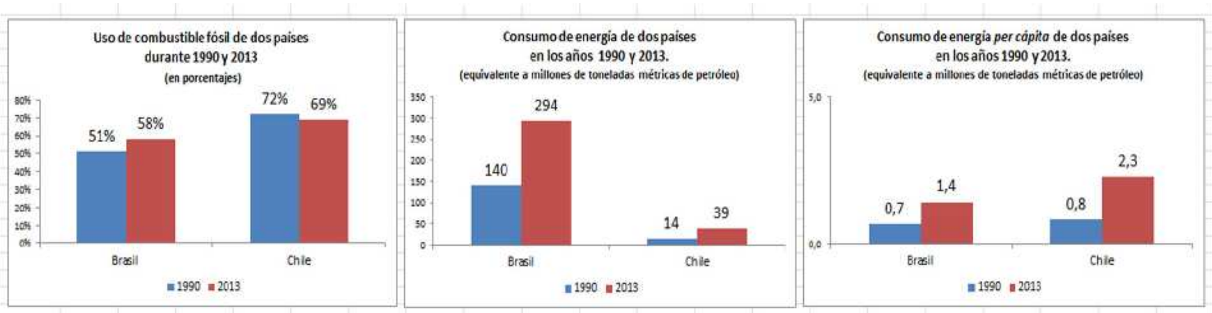


Figura 1 Gráficos de colunas duplas para trabalho dos alunos.

O objetivo disciplinar foi estabelecido como “analisar e extrair informação a partir de gráficos de barras duplas que representam os dados”, enquanto o objetivo transversal da atividade foi “argumentar e comunicar as conclusões”.

A tarefa/problema da atividade foi estabelecida como responder à questão: “*Temos sido consumidores responsáveis?*”. Esta questão aberta instiga os alunos a trabalhar colaborativamente, reflexivamente, e interpretar os dados para respostas que conectem a aula a questões mundiais de sustentabilidade do planeta, e a utilizar conhecimentos de matemática curricular como de porcentagem, estudo de unidades de medida não usuais para energia, escalamento de unidades nos eixos gráficos, uso de representações decimais na comparação entre os consumos e conceitos de proporcionalidade, conceito de *per capita* que exige o conhecimento de razão para sua representação, entre outros, para argumentar, justificar e comunicar.

O plano elaborado foi resultado do trabalho colaborativo entre dois Grupos de Estudo em projetos de Lesson Study, respectivamente no Brasil e Chile. A aula foi organizada para 60 minutos, com previsão dentro do plano de eventuais dificuldades dos alunos e estratégias de intervenção das professoras em sua classe por meio de questionamentos que estimulem o raciocínio.

A ***execução da aula-pesquisa*** foi gravada, com transmissão sincronizada com tecnologia Skype que permitiu interação direta dos alunos durante a aula, com diálogos e compartilhamento de respostas e ideias. As folhas atividades com os gráficos da Figura 1 e questionamentos para responder foram trabalhadas individual e em grupo e entregues para as respectivas professoras.

A ***análise posterior a aula*** foi realizada por meio de questionários semiestruturados para orientar os observadores nas avaliações do plano executado, desempenho da classe, e resultado global obtido. Esta opção se alinha a (Sharma,2010) que discute teorias de avaliação de pesquisa qualitativa em educação estatística.

Desta forma, as etapas básicas da metodologia Lesson Study estiveram presentes na Aula-pesquisa, e se conectam com as tendências recentes da investigação em educação estatística sobre como a compreensão e o raciocínio sobre conceitos estatísticos poderiam ser “desenvolvidos através de sequencias de atividades cuidadosamente planejadas e como essas poderiam ser levadas para a sala de aula” (Garfield et al, 2008).

Análise da aula segundo os princípios do letramento estatístico

Os princípios da aula STEM utilizando representação gráfica de dados, alinhados com os conceitos de letramento estatístico permearam o desenho do plano de aula:

- Entender a problemática da eficiência energética no planeta (*leitura de gráfico*);
- Entender a comparação entre os dados estatísticos representados por gráficos de colunas duplas, explorando, lendo as propriedades das medidas e escalas dos gráficos e interpretando-as em contexto real dos dados (*leitura dentro dos dados*);
- Avaliar criticamente as informações para responder a uma questão aberta, justificando a resposta e comunicando aos colgas (*leitura além e por trás dos dados*).

A execução da aula mostrou a possibilidade de levar atividades que trabalham as competências em tratamento estatístico de dados reais para sala de aula de 6º ano, com questões que estimulam os alunos a pensar sobre o consumo responsável de energia, fontes de energia não poluente, e também o desenvolvimento de senso de cidadania num mundo global, por meio de interação sincronizada com colegas de países diferentes, com população e condições geográficas diferenciadas. A análise comparativa na leitura de dados por meio de barras duplas propiciou oportunidades de reflexão crítica aos alunos.

Para as professoras e os participantes observadores das aulas, a aula pesquisa permitiu esclarecer as dimensões do conhecimento pedagógico de conteúdo para entender os conteúdos de matemática curricular relacionados ao desenvolvimento de conceitos estatísticos, assim como os processos de aprendizagem dos alunos na compreensão e raciocínio estatístico.

Conclusão

As respostas dos alunos e suas reações obtidas na experiência de Aula Pública com enfoque de Lesson Study sobre o tema de Eficiência Energética (Isoda, Araya et al. 2017), do projeto APEC- HRD, que se assemelham aos obtidos na Aula Pesquisa, nos animam a arriscar que, a aula, estudada neste texto à luz dos princípios de letramento estatístico, corrobora indícios de que a metodologia de Lesson Study e aulas interdisciplinares auxiliam a trazer significados na interpretação de dados reais no contexto que educam para a cidadania, e contribuem para desenvolver o conhecimento pedagógico de conteúdo para a formação dos professores. O plano de aula mostrou-se ainda replicável em contexto de estudo comparativo entre três países, com os dados em barras triplas, envolvendo dados de Brasil, Chile e Peru, o que mostra a robustez do desenho da aula pesquisa, e possibilidade de generalizar o estudo para anos subsequentes com outras formas de representação de dados. A questão posta para discussão na introdução ofereceu um estudo que abriu caminhos para mais investigações sobre o letramento estatístico, raciocínio e pensamento.

Referencias e bibliografía

Baldin, Y. Y., Isoda, M. Olfos, R. & Estrella, S. (2018). A STEM Cross-Border Lesson on Energy for Basic Education under APEC Lesson Study Project. In *Proceedings of 8th ICMI-EARCOME*, vol 1, p. 236-247. Taipei- Taiwan: Dept of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Brasil-MEC (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasilia: Ministério de Educação.

CBMS (2012). *The Mathematical Education of Teachers II*. Providence, RI: American Mathematical

Society. http://www.cbmsweb.org/MET2/met2.pdf

del Pino, G. & Estrella, S. (2012). Educación estadística: Relaciones con la matemática. Pensamiento Educativo. *Revista de Investigación Educacional Latinoamericana*, 49 (1), p. 53-64.

Fernandez, C. & Yoshida, M. (2004). *Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Gal, I. (2002). Adult´s Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review*, 70, 1. P. 1-51. The Netherlands: International Statistical Institute.

Garfield, J., Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students´ statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer Science + Business Media B. V. doi: 10.1007/978-1-4020-8383-9

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2007)). How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics. *International Statistical Review75, 3, p. 372-396* doi:10.1111/j.1751-5823.2007.00029.x

González, O. & Isoda, M. (2017) How to Develop Statistical Tasks on Energy Resiliency Using Data from the APEC Energy Database, http://www.criced.tsukuba.ac.jp/,ath/apec/apec2017/GonzalezWorkshop

Isoda, M., Araya, R., Eddy, C., Matney, G., Williams, J., Calfucura, P., Aguirre, C., Becerra. P., Gormaz, R., Soto-Andrade, J., Noine, T., Mena-Lorca, A., Olfos, R., Baldin, Y, Malaspina, U. (2017) Teaching Energy Efficiency: A Cross-Border Public Class and Lesson Study in STEM. *Interaction Design and Architecture(s) Journal- IxD&A,* N. 35, p. 7-31.

Mochizuki, Y. (2017) Understanding SDGs and SDG Target 4.7, http://www.criced.tsukuba.ac.jp/,ath/apec/apec2017/MochizukiKeyNote.pdf

NCTM (2000). *Principles and Standards of School Mathematics*. Reston VA: National Council of Mathematics.

Rossman, A. & Shaughnessy, M. (2013). Interview with Mike Shaughnessy, *Journal of Statistics Education*, 21:1, doi: 10.1080/10691898.2013;1188967-1

Sharma, S. (2010), Qualitative Methods in Statistics Education Research: Methodological problems and Possible Solutions. *In C. Reading (Ed) Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eight International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8).*

Shaughnessy, J. M. (2007) Research on Statistics Learning and Reasoning. In F. Lester (Ed) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* P. 957-1009. Reston VA: national Council of Teachers of Mathematics.

Simetría y transformaciones geométricas en el plano, algunas ideas para su enseñanza

Hugo **Barrantes** Campos
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Costa Rica
habarran@gmail.com

Resumen

El estudio de las transformaciones geométricas en el plano ocupan un lugar cada vez más importante en los programas de Matemáticas de la educación general básica en diversos países. Los conceptos y técnicas involucrados no corresponden, en general, a los temas clásicos en ese nivel educativo. Esto hace que en muchas ocasiones los docentes muestren reticencias a la hora de enfrentar el trabajo de aula en relación con esta temática.

Se exponen aquí algunas ideas que pueden ser útiles a los profesores en la enseñanza aprendizaje de las transformaciones en el plano. Se enfatiza el enfoque de resolución de problemas, así como el uso de construcciones con regla y compás, las cuales se pueden realizar de modo equivalente con software de geometría dinámica mediante el uso de rectas y circunferencias, como un medio de comprender el concepto general de simetría.

Palabras clave: educación matemática, transformaciones geométricas, simetría, isometría, geometría dinámica.

Transformaciones geométricas en el currículo escolar

El estudio de las transformaciones geométricas se han ido introduciendo paulatinamente en diversos currículos escolares en diversas partes de mundo. Diversos elementos relacionados con este tema se mencionan en currículos latinoamericanos, por ejemplo, en Chile (Ministerio de Educación, República de Chile, 2011), Perú (Ministerio de Educación, 2016), Colombia (Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 1998), Costa Rica (MEP, 2012). Lo que hay en mente con la consideración de este tema de estudio es la búsqueda del desarrollo de diferentes capacidades matemáticas superiores en el sentido señalado por Ruiz (2018), referidas a plantear y resolver problemas, razonar y argumentar, conectar, comunicar y representar (p. 75). De tal manera, el currículo de Matemáticas de la educación primaria y media costarricense establece que:

Además de trabajar con problemas con distintos niveles de complejidad es necesaria

> la introducción de contenidos matemáticos que juegan un papel crucial en la formación escolar moderna. Por ejemplo, tópicos de geometría de coordenadas y de transformaciones que, además de incluir una visión moderna de la Geometría, favorecen el tratamiento de otros conceptos y procedimientos matemáticos, brindando instrumentos para poder usar las Matemáticas en diversos contextos. Un tratamiento adecuado de las relaciones y funciones es otro propósito que debe enfatizarse y cultivarse adecuadamente desde el inicio de la formación escolar, pues éstas resultan centrales para la formación matemática moderna. (MEP, 2012, p. 15)

Por otra parte, en Ministerio de Educación Nacional de Colombia, (1998) se enuncia que:

> En la actualidad, gran parte de la geometría escolar se ha ocupado del movimiento de figuras geométricas desde una posición a otra, y de movimientos que cambian el tamaño o la forma. El estudio de las transformaciones de figuras ha ido progresivamente primando sobre la presentación formal de la geometría, basada en teoremas y demostraciones y en el método deductivo. (p. 40)

En la enseñanza media se podría definir formalmente el concepto de transformación como una aplicación inyectiva del plano sobre sí mismo; sin embargo, este enfoque formal que permite un estudio profundo del tema, carece de la riqueza didáctica del enfoque más visual e intuitivo que ve una transformación como un movimiento de los puntos o las figuras manteniéndolas congruentes a sí mismas, en el caso de las isometrías, o al menos manteniendo su forma como en el caso de las homotecias. Al respecto, Yanik y Flores (2009) en un estudio con futuros profesores encontró que todos los participantes concebían las transformaciones como movimiento; explicaban que las isometrías podían describirse como movimientos de todos los puntos del plano más que como aplicaciones del plano sobre sí mismo (p. 55).

En ese sentido, en MEP (2012) se menciona lo siguiente:

> El movimiento de puntos y entidades geométricas permite construir nuevas entidades (curvas por ejemplo) y visualizar las usuales de otras maneras: un sentido dinámico de algunas propiedades geométricas como las posiciones relativas y transformaciones de puntos y formas. (MEP, p. 52)

La introducción de este tema, que no ha sido tradicional, en los planes de estudio de la enseñanza primaria y media, implica que el docente observe al menos partes de la geometría elemental con una perspectiva novedosa para lo cual a menudo no está suficientemente preparado, de ahí la importancia del aporte de recursos que lo apoyen en su labor de aula.

Otra perspectiva para el estudio de temas tradicionales

Las transformaciones geométricas son interesantes para ser estudiadas en sí mismas, pero también sirven como una herramienta para el estudio de otros temas de la geometría euclidiana desde otra perspectiva. Al respecto en NCTM (2010) se subraya su importancia al señalar que las transformaciones geométricas representan una forma alternativa para el estudio de la congruencia, semejanza y simetría (p. 62). Agregamos que puede ser útil también para visualizar otras propiedades y conceptos tales como el cálculo de áreas, según veremos más adelante.

Se ilustra el uso de esta perspectiva mediante dos situaciones.

Congruencia de triángulos

La congruencia se puede estudiar desde el punto de vista de la simetría. Para ello recordamos que la reflexión, traslación y rotación conservan las medidas de los ángulos y reciben el nombre de isometrías.

Se dice que dos triángulos ABC y *A'B'C'* son **isométricos** si *A'* es la imagen de A, *B'* es la imagen de B y *C'* es la imagen de C mediante una misma isometría. La noción de triángulos isométricos es equivalente a la de triángulos congruentes.

A partir de aquí se pueden estudiar las congruencias a partir de las isometrías y sus propiedades.

Lo interesante de este enfoque es que algunos problemas sobre congruencias pueden ser resueltos de manera sencilla mediante el uso de isometrías o con una combinación de ambos enfoques.

Un ejemplo. En la figura 1 se tiene que ΔABC y ΔADE son isósceles, ambos con ápice en A. Además $AD = 2AB$.

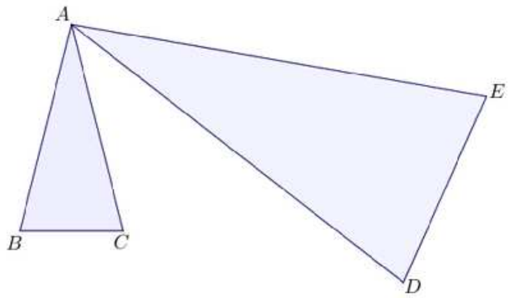


Figura 1. Dos triángulos isósceles.

Hay que demostrar dos cosas:

a) Los triángulos BAD y CAE son isométricos y, por lo tanto, $BD =$ [illegible] .

b) SI I y J son respectivamente los puntos medios de CE y BD entonces los triángulos AIC y AJB son isométricos y por lo tanto ΔAIJ es isósceles.

Para a), sea $\alpha = m\angle BAC =$ [illegible] $\angle DAE$. Considere la rotación con centro en A y amplitud α (considerada en dirección anti horario). Bajo esta rotación, A lleva a A pues A es el centro de la misma y por lo tanto permanece invariante, B lleva a C y D lleva a E. Se concluye que los triángulos BAD y CAE son isométricos. Como B y C son homólogos y E y C son homólogos mediante esta isometría, entonces B[illegible] .

Para b) considere la misma isometría. A lleva a A, B lleva a C y J lleva a I. Observe que I y J son equidistantes de A y por lo tanto ΔAIJ es isósceles.

El teorema de Viviani

Este teorema establece que dado un triángulo equilátero y un punto P en su interior, entonces la suma de las distancias de P a lados del triángulo es igual a la altura del triángulo.

Hay un prueba simple, elegante y muy visual de este teorema, la cual utiliza isometrías. Considere el triángulo equilátero dado en la figura 2 (a) y trace paralelas a los lados del triángulo que pasen por P (figura 2 (b)).

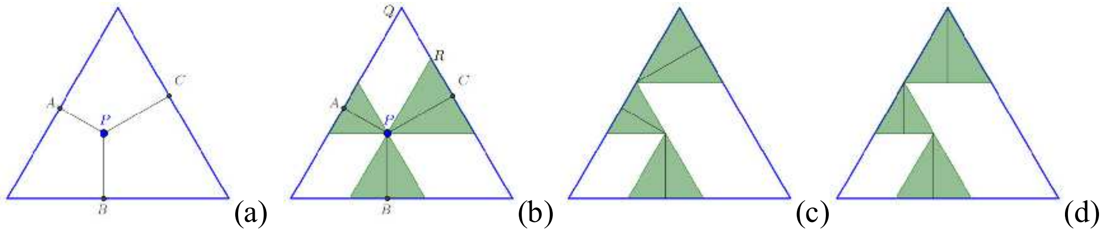


Figura 2. Según el teorema de Viviani $AP + B$▯ es igual a la altura del triángulo equilátero.

Los tres triángulos destacados en la figura 2 (b) son equiláteros y sus alturas son los segmentos AP, BP y CP. Se traslada el triángulo verde a la derecha según el vector $\overrightarrow{RQ}$, se obtiene la figura 2 (c). Posteriormente se rota ese mismo triángulo alrededor de su centro un ángulo de 60º y finalmente el triángulo verde a la izquierda se rota 60º alrededor de su centro. Así se obtiene la figura 2 (d) en la cual se puede verificar que $AP + B$▯ es igual a la altura del triángulo equilátero dado.

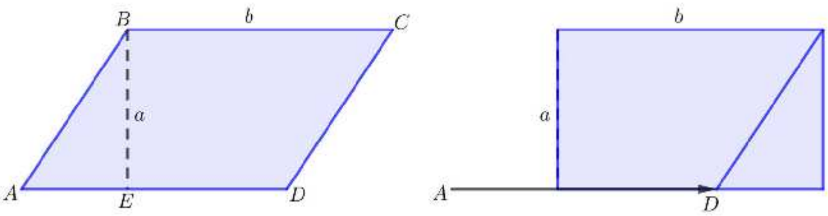
Isometrías y áreas de figuras planas

Se enseña el cálculo de áreas de figuras planas básicas de diversas maneras. A menudo se enseñan las fórmulas sin más, pero en ocasiones se trata de que los estudiantes comprendan dichas fórmulas mediante, por ejemplo, el uso del tangrama o el doblado de papel. Otra forma útil puede ser el uso de transformaciones isométricas puesto que, dado que la imagen de un polígono mediante una isometría es congruente al polígono original entonces se preserva el área. Ilustramos esto a continuación.

Área del paralelogramo

Se supone conocido que el área de un rectángulo es igual al producto de la medida de su base por su altura.

Para determinar la forma en que se calcula el área del paralelogramo, consideramos uno de base b y altura a.



(a) (b)

Figura 3. Cálculo del área del paralelogramo de base b y altura a.

Con la notación de la figura 3 (a), consideremos el triángulo ABE y trasladémoslo según el vector $\overrightarrow{AD}$, si luego eliminamos el ΔABE obtenemos la figura 3 (b), que corresponde a un rectángulo de base b y altura a.

El área del rectángulo es $b \cdot a$ y, puesto que en el proceso de trasladar y eliminar, el área se conserva, entonces el área del paralelogramo es $b \cdot a$.

Con el uso de un software de geometría dinámica, por ejemplo *Geogebra*, esto se puede visualizar mejor. Se define un deslizador que determine el segundo extremo del vector $\vec{u}$ que inicia en A y mediante él se puede visualizar cómo el triángulo se va trasladando hasta ocupar su posición final cuando $\vec{u}$ sea igual a $\overrightarrow{AD}$.

Área del trapecio

A partir del área del paralelogramo y mediante una isometría se puede obtener el área del trapecio.

Considere un trapecio de base mayor c, base menor b y altura a.

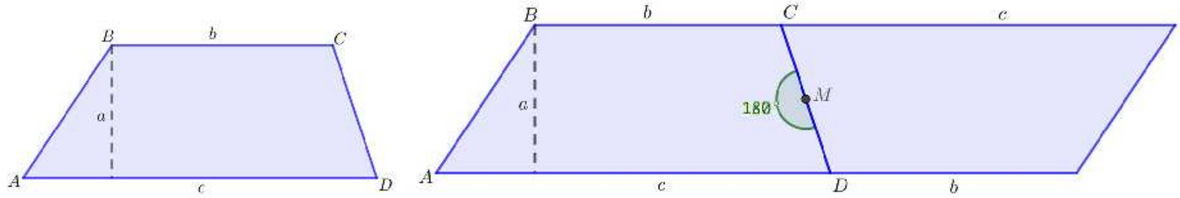


Figura 4. Cálculo del área del trapecio.

Con la notación de la figura 4 izquierda, marquemos el punto medio M del lado CD y luego apliquemos una rotación al trapecio de amplitud 180º en sentido horario con centro en M, se obtiene un paralelogramo como el de la figura 4 derecha, de base $b + c$ y altura a.

El área de este paralelogramo es $(b + c) \cdot a$ y puesto que está formado por dos trapecios congruentes, entonces el área del trapecio es igual a $\frac{1}{2}(b + c) \cdot a$.

Con *Geogebra* se visualiza esto de manera dinámica mediante un deslizador que defina el ángulo de la rotación con centro en M.

Simetría y diseños

Siguiendo a Askew (2016) se puede decir que, en general, el término simetría evoca formas armoniosas y, particularmente, a la simetría axial en el contexto de la geometría euclidiana, pero a los matemáticos les gusta aplicar conceptos en un nuevo contexto. De tal modo, la palabra cotidiana "simetría" obtiene un significado matemático más amplio a través de la conexión con el reflejo y la rotación. Un objeto matemático es simétrico con respecto a una operación matemática particular si conserva ciertas propiedades, en este caso la apariencia, después de que se haya aplicado la operación. Las formas básicas de simetría -reflexión, rotación, cambio de escala, desplazamiento- y su combinación, forman la base del estudio de la geometría euclidiana, la consideración de tales simetrías es la geometría con la que tiene que ver la educación escolar pero también se pueden usar para deducir hechos menos conocidos, por ejemplo, el que enuncia que, en esencia, solo hay catorce patrones diferentes de "tapizados" (pp. 8-9).

En Kappraff (2015) se propone una serie de diversos diseños en el plano que siguen patrones. Tales diseños se pueden realizar con regla y compás o con un software como *Geogebra* que simule estos instrumentos. También se puede utilizar dicho software para reproducir estos diseños mediante recta y circunferencias y el uso de las transformaciones en el plano.

Diseños en redes de triángulos equiláteros

Un red de triángulos equiláteros es una teselación del plano mediante triángulos rectángulos. Se puede construir usando regla y compás o simulándolos con *Geogebra* (por ejemplo). Para ello se construye una circunferencia de un radio r dado, se selecciona un punto de esa circunferencia y con centro en ese punto se traza otra circunferencia del mismo radio r que la primera. Estas circunferencias tienen dos puntos de intersección, con el mismo radio r, se dibujan dos circunferencias cuyos centros son esos puntos de intersección. Se continúa de esa forma dibujando circunferencias de radio r con centros en los puntos de intersección que han resultado del paso previo. Luego se conectan mediante rectas los centros de las circunferencias y finalmente se borran estas para obtener la red.

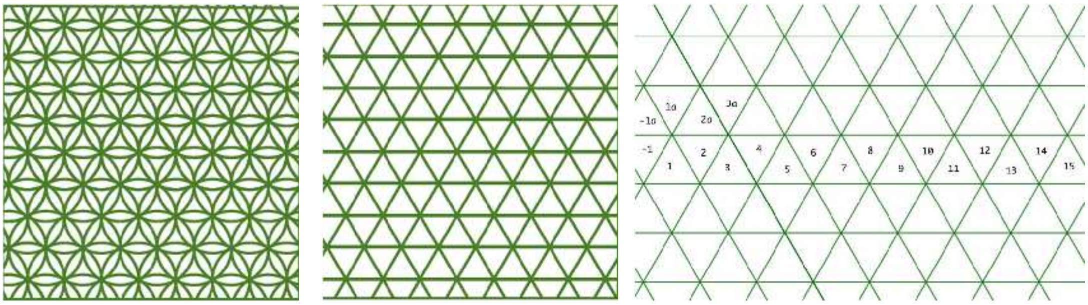
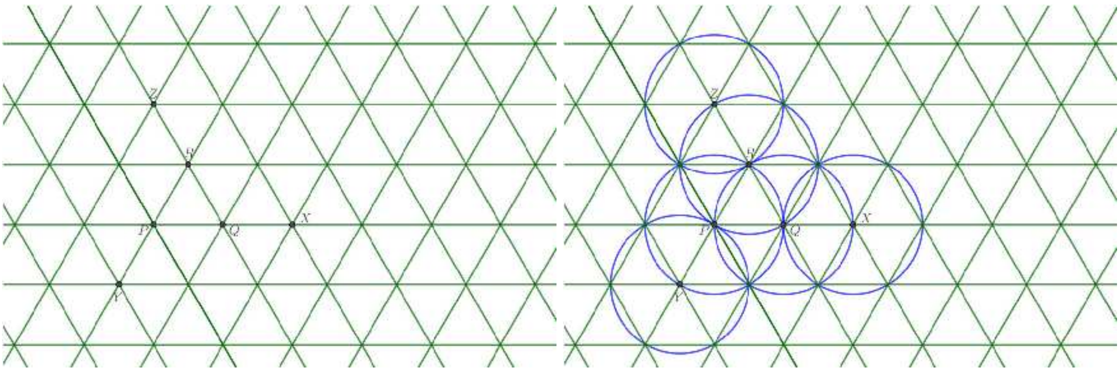


Figura 5. Proceso para la creación de una red de triángulos equiláteros utilizando regla y compás o reflexiones.

También se puede crear esta red mediante reflexiones a partir de un triángulo equilátero base (vea la figura 5 derecha).

Se traza el triángulo 1, éste se refleja sobre su lado derecho para obtener el 2 y así sucesivamente hacia la derecha. El triángulo 1 se refleja sobre su lado izquierdeo para obtener el -1 y así hacia la izquierda y sucesivamente para obtener una hilera de triángulos. El 2 se refleja sobre su base para obtener el 2a y luego se procede como antes para obtener otra hilera. El proceso se repite hacia arriba y hacia abajo.

Utilizando esta red se pueden crear diseños artísticos muy interesantes. Por ejemplo, marque los vértices de uno de los triángulos de la red y denótelos por P, Q y R. Luego marque otros puntos como se ve en la figura 6 (a). Con centro en cada uno de esos puntos y radio igual al lado del triángulo trace las seis circunferencias que se observan en la figura 6 (b). Borre las circunferencias con excepción de los arcos indicados por la figura 6 (c). Se obtiene una figura básica que podemos denominar como triángulo volador.



(a) (b)

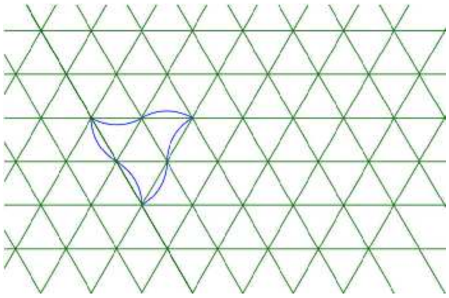
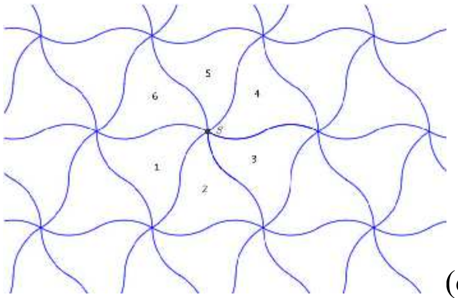

(c)

(d)

Figura 6. Proceso para la creación de un triángulo volador.

Se marca uno de los vértices del triángulo volador y se aplica al mismo una rotación de 60º con centro en dicho punto (S en la figura 6 (d)), se obtiene un triángulo volador 2, este se rota 60º alrededor de S, y así sucesivamente hasta obtener los primero 6 triángulos voladores. Rotaciones de 60º con centros apropiados producen en diseño completo. Finalmente se elimina la red de triángulos para obtener la figura 8. Diseños más intrincados se pueden obtener de esta manera.

Además de la propia belleza de los diseños que se pueden obtener, este tipo de construcciones permiten visualizar, repasar o introducir conceptos y propiedades. Por ejemplo, pueden surgir preguntas tales como ¿por qué en cada vértice confluyen exactamente seis figuras (que equivale al número de triángulos que comparten cada vértice)?, ¿cuánto mide cada uno de los arcos que constituye cada triángulo volador?, entre otras que permiten ver más profundamente en el diseño elaborado.

Diseños en redes de cuadrados

Un red de cuadrados es una teselación del plano mediante cuadrados. La construcción de esta red es más sencilla que la de triángulos equiláteros.

Utilizando regla y compás se puede construir a partir de dos rectas perpendiculares entre sí. Se dibuja una circunferencia con centro en el punto de intersección de estas rectas. Luego se dibujan cuatro circunferencias con el mismo radio que la primera y cuyos centros son los puntos de intersección entre ambas rectas y el círculo original. Finalmente, se dibujan circunferencias con el mismo radio y centros en los puntos de intersección de las circunferencias que van resultando, en todas direcciones.

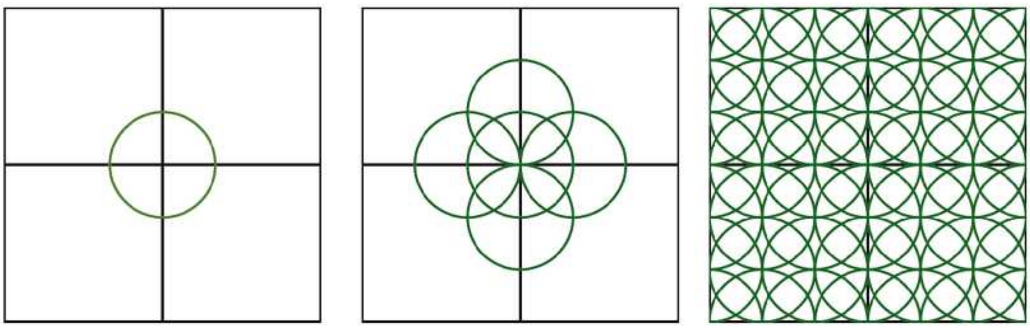


Figura 7. Base para la elaboración de una red de cuadrados.

Conectando mediante rectas los centros de las circunferencias que son tangentes se obtiene una red de cuadrados en el plano. Desde luego, esta red se también puede obtener a partir de un cuadrado base mediante traslaciones en diferentes direcciones.

Con esta red de cuadrados y las circunferencias que la originaron se pueden crear diseños interesantes como el de la figura 8 izquierda.

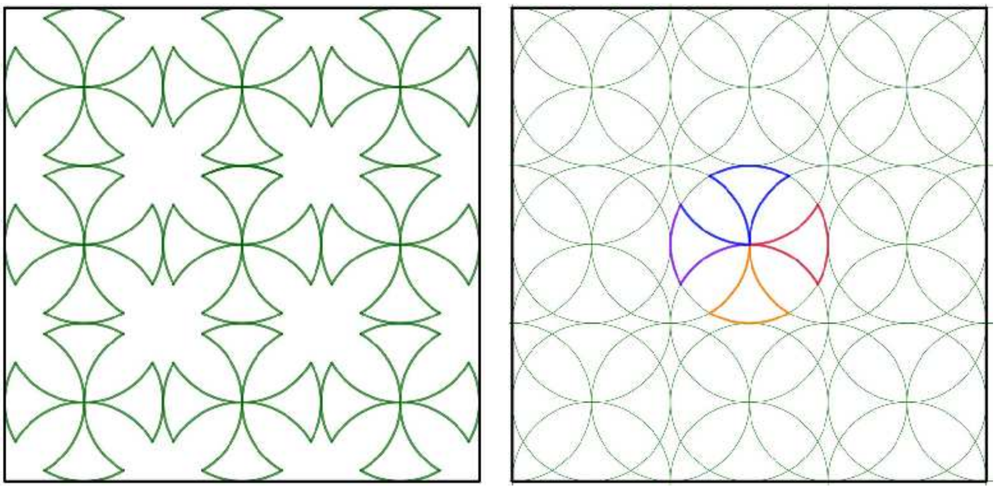


Figura 8. Diseño a partir de una red de circunferencias.

Se identifican tres arcos que formen el triángulo curvo (en azul en la figura 10). Luego se rota este triángulo 90º en el sentido horario con centro en el vértice inferior para obtener el rojo. Alrededor del mismo punto se rota el rojo 90º en sentido horario para obtener el anaranjado y este se rota 90º alrededor del mismo punto para obtener el violeta. Esto produce un figura básica que se puede trasladar en diferentes direcciones para obtener el diseño completo. Al eliminar las circunferencias de la red se obtiene el diseño de la figura 8 derecha.

Conclusión

La introducción en el currículo de nociones relativas a transformaciones en el plano – ísometrías y homotecias – obedece, en general, a diferentes aspectos. Por una parte está el afán por modernizar el currículo en cuanto a geometría se refiere pero esta modernización conlleva la necesidad de incursionar en temas o herramientas que permitan un abordaje de la geometría más ameno pero también más útil en la comprensión conceptual y que permita al final un mayor desarrollo en la consecución de competencias y capacidades matemáticas en los estudiantes.

El abordaje de estos temas, y su uso para el estudio de temas más clásicos desde otra perspectiva, requiere también nuevas capacidades por parte de los docentes y exige, necesariamente, que se tengan recursos que puedan ayudarle en su labor.

Lo expuesto en este trabajo pretende dar algunas nociones de lo que se puede realizar mediante el uso de las transformaciones.

Referencias y bibliografía

Askew, M. (2016). *Geometrie. Von Pi bis Pythagoras*. Berlin: Librero IBP.

Kappraff, J. (2015). *A participatory Approach to Modern Geometry*. New Jersey: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Ministerio de Educación, Chile (2011). *Matemática, Programa de Estudio para Primer Año Medio Unidad de Currículum y Evaluación*. Clile: autor. Descargado de https://educrea.cl/wp-content/uploads/2015/04/programa-de-estudio-1-medio-matematica-191115.pdf

Ministerio de Educación Nacional, Colombia (1998). Lineamientos curriculares, Matemáticas. Colombia: autor. Descargado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Pública, Costa Rica (2012). Programas de estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado. Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación, Perú. (2016). *Programa curricular de Educación Secundaria*.Perú: autor. Descargado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf

NCTM (2010). *Focus in High School Mathematics. Reasoning and sense making*. (2nd ed) Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Ruiz, A. (2018). Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. Ciudad de México: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Yanik, H. B. y Flores, A. (2009). Understanding rigid geometric transformations: Jeff's learning path for translation. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*, 41-57. doi:10.1016/j.jmathb.2009.04.003

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Creación de tareas por futuros docentes de matemáticas a partir de contextos reales

José **Chamoso** Sánchez
Universidad de Salamanca
España
jchamoso@gmail.com

María José **Cáceres**
Universidad de Salamanca
España
majocac@usal.es

Resumen

Atendiendo al interés de vincular el aprendizaje de matemáticas a situaciones cotidianas, la creación de tareas matemáticas a partir de contextos reales puede ser un elemento formativo para futuros docentes e incluso convertirse en un eje de formación. En este trabajo se analizó una experiencia con futuros docentes de matemáticas en la que grupos de estudiantes crearon tareas, a partir de contextos reales, mediante un proceso basado en una Propuesta Inicial, discusión con los compañeros y, fruto de la reflexión sobre el propio trabajo, una Propuesta Final. El proceso desarrollado consiguió una alta motivación en los estudiantes ante las posibilidades que ofrecen los contextos reales para aprender matemáticas y unas tareas interesantes que, en diversos sentidos, mejoran las de los manuales escolares. Ello abre perspectivas de futuro como, por ejemplo, vertebrar la formación de docentes de matemáticas a partir de la reflexión sobre la creación de tareas en contextos reales.

Palabras clave: Educación Matemática, formación de docentes, creación de tareas, reflexión, contextos reales.

Introducción

En las últimas décadas, las recomendaciones para el aprendizaje de matemáticas dan cada vez más relevancia a la conveniencia de vincular las matemáticas escolares con contextos reales (por ejemplo, MECD, 2015; NAEYC y NCTM, 2013; OCDE, 2013). Una forma de hacerlo es a partir de la creación de tareas, que exige creatividad y evita la consideración primordial de las habituales de los libros de texto que, en muchos casos, suelen ser rutinarias, académicas y alejadas del mundo real (por ejemplo, Niss, 2001; Villa-Ochoa, 2015).

Es reconocida la importancia de la tarea con la que el estudiante construye el aprendizaje matemático (Christiansen y Walther, 1986; Hiebert y Wearne, 1997; Sullivan, Clarke, Clarke y O'Shea, 2010). Diseñar tareas matemáticas requiere poseer Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Conocimiento Común del Contenido para utilizar correctamente los contenidos matemáticos, Conocimiento Especializado del Contenido para establecer los diversos procedimientos con los que podrán ser abordadas y Conocimiento del Horizonte Matemático para que estén vinculadas a la realidad) y Conocimiento Pedagógico del Contenido (Conocimiento del Contenido y del Curriculum para decidir el nivel de enseñanza, Conocimiento del Contenido y Enseñanza para llevarlas al aula de manera adecuada, y Conocimiento del Contenido y Estudiantes para tener en cuenta las peculiaridades de los estudiantes; más detalle, modelo MKT de Hill, Ball y Schilling, 2008). Por ello es recomendable trabajarlo desde la formación inicial de docentes (Malaspina, 2015).

Algunos estudios reflejaron que las tareas que los estudiantes crean suelen ser rutinarias, pero otros mostraron que pueden proponer tareas interesantes cuando se da posibilidad de hacerlo (Isik y Kar, 2012). Esa posibilidad puede facilitarse a partir de la reflexión que incluye, por ejemplo, la revisión del propio trabajo (Cáceres, Chamoso y Azcárate, 2010; Chamoso y Cáceres, 2009). Un ejemplo de revisión del propio trabajo cuando estudiantes para maestro crearon tareas auténticas a partir de contextos reales se muestra en Cáceres, Chamoso y Cárdenas (2015).

Investigaciones recientes se han interesado por la clasificación de tareas matemáticas. Por ejemplo, el análisis de las tareas propuestas en libros de texto de Wijaya, Heuvel-Panhuizen y Doorman (2015) mostró que el 45% demandaban Procesos cognitivos (TIMSS, 2015) de *Conocer* y solo 2l.2% de *Razonar*, y que únicamente un 10% consideraban un Contexto *Real*. En los trabajos del análisis de las tareas de libros de texto de López y Contreras (2014), referido a contenidos de geometría plana, y Guerrero, Carrillo y Contreras (2014), referido a ecuaciones lineales, la mayor parte de las tareas se centraban en *Aplicar* y solo una de ellas era *Abierta*. En otro sentido, el estudio de Vicente, Rosales, Chamoso y Múñez (2013), referido a las tareas seleccionadas por maestros de Primaria en el desarrollo de una unidad didáctica, más del 81% de ellas eran de *Conocer* y el 19% de *Aplicar*. Vicente, Dooren y Verschaffel (2008) mostraron que la mayor parte de los problemas que aparecían en los libros de texto de Primaria únicamente exigían *Conocer*. Referido al estudio de tareas creadas por futuros docentes a partir de contextos reales durante su formación inicial, únicamente se conoce el trabajo de Chamoso y Cáceres (2018) donde los Procesos cognitivos que desarrollaban eran de *Conoce*r (62%) y solo un 5% de *Razonar*; además, el 18% eran de respuesta *Abierta*.

Objetivo

Caracterizar las tareas creadas, a partir de contextos reales, por estudiantes para maestro.

Metodología

Contexto y muestra

73 estudiantes para maestro (en adelante EpM; 3 hombres, 4%, y 70 mujeres, 96%) de 2º curso del Grado en Maestro de la Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca, España, en la asignatura Matemáticas y su Didáctica para Educación Infantil, de 6 créditos, curso

2017-18, distribuidos en 20 grupos de trabajo de 3-4 personas, participaron en el estudio. El grupo fue establecido según la organización del centro. Su media de edad fue de 19,7 años. Al principio de curso, ningún EpM había tenido formación previa en crear tareas para el aprendizaje matemático.

La asignatura es la única directamente relacionada con matemáticas que figura en el plan de estudios y su objetivo es desarrollar capacidades para la enseñanza de matemáticas en Educación Infantil. Se impartió en sesiones de dos horas a lo largo de 15 semanas, una sesión en la que el profesor trabajaba con todos los EpM (sesiones formativas) y otra en la que el profesor lo hacía con la mitad de los EpM (sesiones prácticas, con 10 grupos de trabajo en cada caso; una sesión semanal para los EpM y dos para el profesor). Toda la información sobre el desarrollo del curso figuraba en el campus virtual de la propia Universidad. La experiencia fue desarrollada por el profesor habitual de la asignatura.

Propuesta formativa

Los EpM debían desarrollar competencias, tanto matemáticas como profesionales, para enseñar matemáticas (Cáceres et al., 2010, adaptado de Hill et al., 2008). Para adquirir esas competencias, el curso se organizó con el objetivo de crear tareas para aprender matemáticas a partir de contextos reales. Con ese objetivo, las sesiones formativas abordaron aspectos como, por ejemplo, conocimiento de la matemática escolar y organización curricular, tratamiento de los contenidos y procesos matemáticos con un enfoque globalizado, metodologías de enseñanza para aprender matemáticas e instrumentos de evaluación, y materiales didácticos y tipos de tareas para aprender matemáticas.

Las sesiones prácticas se organizaron en torno al desarrollo de un proyecto donde los EpM, en grupos, debían crear tareas para aprender matemáticas. En concreto, este proyecto se desarrolló en 4 partes durante 12 semanas, cada una de las partes a partir de un contexto cercano a la realidad (1. Episodios, 2. Cuentos, 3. Materiales y 4. Ruta). Las demás sesiones consistieron en una sesión inicial explicativa y organizativa, y dos sesiones finales de valoración del trabajo realizado y evaluación. Cada una de las partes se desarrolló a lo largo de 3 semanas consecutivas con la siguiente estructura:

Sesión 1: Creación de tareas matemáticas (2 horas):

a) Formación (profesor, gran grupo, 45 minutos).
b) Creación de tareas para aprender matemáticas en el aula a partir de un contexto cercano a la realidad (Propuesta Inicial; cada grupo de trabajo, 60 minutos; entrega).
c) Reflexión conjunta del trabajo realizado (profesor, gran grupo, 15 minutos).

Sesión 2: Experimentación y evaluación de las tareas creadas (2 horas):

a) Experimentación de la Propuesta Inicial de cada grupo de trabajo: Cada grupo de trabajo propuso las tareas creadas, de la misma forma que se haría en un aula, a 3 grupos de trabajo que las resolvieron. A la vez, cada grupo resolvió las tareas creadas por otros 3 grupos (grupos de trabajo, 60 minutos).
b) Coevaluación de la Propuesta Inicial de cada grupo de trabajo por sus compañeros a partir de una rúbrica de valoración: Cada grupo de trabajo valoró, según los criterios establecidos para ello, las tareas en que había participado (cada grupo de trabajo, 20 minutos; entrega de la Coevaluación a cada grupo y al profesor).

c) Reflexión conjunta del trabajo realizado (profesor, gran grupo, 30 minutos).

d) Autoevaluación de cada grupo de su Propuesta Inicial y planteamiento de mejora (cada grupo de trabajo, 10 minutos; entrega de la Autoevaluación al profesor).

Sesión 3: Reflexión y revisión del propio trabajo (2 horas):

a) Elaboración de una Propuesta Final de tareas creadas a partir de la experimentación y valoración realizada (Propuesta Final; cada grupo de trabajo, 60 minutos; entrega).

b) Presentación pública de la Propuesta Final (50 minutos).

c) Reflexión final (10 minutos).

Los EpM conocían, desde principio de curso, los criterios e instrumentos de valoración de las tareas creadas (teniendo principalmente en cuenta sus objetivos y conexión con el curriculum, adecuación al nivel de enseñanza, aspectos metodológicos y evaluación), así como la estructura que debía seguir la Propuesta Inicial y la Propuesta Final de cada parte del proyecto.

Datos

Los EpM crearon 696 tareas en su Propuesta Final. Dichas tareas abordaron, principalmente, contenidos de Numeración (31%), Medida (27%) y Geometría (25%) y, en menor proporción, Álgebra (8%) y Organización de la información y probabilidad (10%).

Algunos ejemplos de tareas creadas a partir de un episodio (Figura 1) y de un cuento tradicional (Figura 2) fueron:

EPISODIO	TAREAS CREADAS
Dos niños están jugando en su casa y la madre les pone zumo en dos vasos, uno más estrecho y largo que el otro, pero ambos de la misma capacidad: Niño: Yo quiero el vaso más largo porque tiene más. Mamá: Tienen lo mismo los dos. Niño (junta los vasos para ver que el zumo de un vaso está más alto que el del otro): ¡No, no es verdad! Este es más largo y tiene más. Mamá (coge un vaso igual que el otro y lo echa para que el niño vea que hay la misma cantidad y le dice): ¿Ves como hay lo mismo? Niño: Ahora sí hay lo mismo, antes no.	1. En recipientes de diferentes tamaños pero con la misma capacidad, se vierte el agua de unos en otros para comprobar que realmente tienen la misma capacidad haciendo preguntas a los niños en cada paso. 2. Si dos niños beben agua de dos vasos iguales que estaban llenos y ahora uno tiene más agua que el otro, ¿quién ha bebido más agua? ¿Y si los vasos no fueran iguales? 3. Buscar ejemplos en que algo tenga que ser antes y algo tenga que ser después.

Figura 1. Tareas creadas a partir de un episodio

CUENTO	TAREAS CREADAS
	1. Dibuja los tres cerditos teniendo en cuenta su tamaño: Cerdito mayor, mediano y pequeño. Dibuja también el lobo.
	2. Sopla con todas tus fuerzas a una pelota pequeña, una de ping-pong, y otra más grande. ¿Cuál se desplaza más? ¿Por qué?
	3. Dibuja la casa de cada uno de los tres cerditos utilizando figuras geométricas. Dibuja también la casa en la que te gustaría vivir.
	4. ¿Cómo podrías hacer para que el lobo y los tres cerditos hagan las paces?

Figura 2. Tareas creadas a partir del cuento “Los tres cerditos”

Análisis de datos

Las tareas creadas por los EpM se analizaron en tres sentidos:

a) Contexto (Wiest, 2001): *Puramente Matemático* (cuando únicamente tenía sentido en el aula), *Real* (cuando podría darse o imaginarse en el mundo real; incluía contexto *Fantástico* cuando simulaba un mundo imaginario).
b) Procesos cognitivos que activa su resolución (adaptado de TIMSS, 2015): *Conocer* (Co, entendida como la capacidad de definir, reconocer o comprender nociones básicas), *Aplicar* (Ap, entendida como la capacidad de clasificar, comparar, ordenar o representar) y *Razonar* (Ra, entendida como la capacidad de transformar, relacionar o resolver problemas).
c) Apertura de la respuesta (Yeo, 2017): *Cerrada*, con una única posibilidad correcta y *Abierta*, con varias posibilidades correctas.

Las tres tareas planteadas en la Figura 1, a partir de un episodio, las tres se consideraron de Contexto *Real*; la tarea 1 desarrolla capacidades de *Razonar* y *Cerrada*, la 2 de *Conocer* cuando los vasos son iguales y *Razonar* si son diferentes, en ambos casos *Cerrada*, y la 3 de *Aplicar* y *Abierta*. Las de la Figura 2 se consideraron de Contexto *Fantástico*. Un ejemplo de tarea con Contexto *Puramente Matemático* fue: "*En un papel continuo con diferentes figuras geométricas con tamaños grande y pequeño, y les pediremos pintar con los dedos de verde las grandes y de rojo las pequeñas"*.

Fiabilidad

El análisis fue realizado por los autores de este trabajo de forma independiente y se obtuvo un acuerdo del 98% en Contextos, 90% en Procesos cognitivos, 97% en Apertura de la respuesta; coeficiente kappa de Cohen > 0,80). Los desacuerdos se resolvieron mediante consenso.

Resultados

En este trabajo, futuros docentes crearon tareas para el aprendizaje matemático en un contexto de trabajo colaborativo, donde se implementaron unas Propuestas Iniciales que fueron valoradas por los compañeros y por ellos mismos en procesos de coevaluación y autoevaluación, y donde se produjo un proceso reflexivo que conllevó la revisión del propio trabajo. Esta forma de desarrollar competencias profesionales produjo alta motivación en los EpM, que trabajaron activamente en la construcción de tareas que en cada parte del proyecto consideraron los contenidos globalizados. En sus reflexiones, los EpM valoraron positivamente las oportunidades de implementación y evaluación de sus Propuestas Iniciales al permitirles descubrir aspectos que podrían mejorar como, por ejemplo, la precisión en la redacción de la tarea, la mejora en el dinamismo de su aplicación o la elección de recursos que podrían ser más apropiados para su desarrollo. Además, los EpM apreciaron la importancia del contexto utilizado para la creación de tareas (por ejemplo, *"las situaciones cotidianas pueden convertirse en oportunidades de aprendizaje matemático, donde se trabajan aspectos variados de las matemáticas y no solo contar, sumar y restar"*, Grupo G3)

Las tareas creadas por EpM en el marco de un proyecto centrado en contextos cercanos a la realidad se vincularon fundamentalmente a Contexto *Real* (70%, del que el 13% fue *Fantástico* en las tareas creadas en la Parte 3, a partir de Cuentos) y, en menor proporción, a *Puramente Matemático* (30%). Desarrollaban capacidades principalmente de *Aplicar* (57%) y, en menor medida, de *Conocer* (25%) y *Razonar* (18%). Fueron mayoritariamente de respuesta *Cerrada* (88%). Estos datos muestran la influencia del contexto en el que los futuros docentes crearon tareas.

El Contexto *Real* se utilizó en mayor porcentaje que el *Puramente Matemático* en todos los bloques de contenido, pero, en mayor medida, en las tareas relacionadas con Medida y Análisis de datos y probabilidad (más del 80%) y, en menor, en Numeración y Cálculo (58%). Por otro lado, la mayoría de tareas que desarrollaban capacidades de *Conocer* fueron de Geometría (53%) y, las de *Razonar*, de Numeración y Cálculo (30%), en lo que pudo haber tenido influencia la profundidad del conocimiento de los EpM de los respectivos bloques de contenido. Además, las de *Razonar* utilizaron igualmente Contextos *Puramente Matemático* y *Real*. Las tareas *Abiertas* fueron escasas en todos los bloques de contenido, pero los mayores porcentajes se alcanzaron en Geometría (18%) y Medida (17%). Esta diferencia en las características de las tareas relacionadas con los diversos bloques de contenido pudo deberse no sólo al dominio matemático de los EpM de cada uno de ellos sino también a su percepción del uso de los mismos en situaciones cotidianas.

La evolución de la creación de tareas por los EpM durante el desarrollo del proyecto atendiendo a los aspectos considerados permite observar que el porcentaje que utilizó un Contexto *Real* aumentó progresivamente en las cuatro partes del proyecto del 47% a 84%, por lo que se entiende que la formación en el uso de contextos reales para aprender matemáticas fue asimilada por la mayoría de EpM aunque más investigación sobre ello sería necesaria. Esta evolución no se produjo en el desarrollo de Procesos cognitivos ya que el porcentaje de tareas de *Conocer* se mantuvo en un 27%, pero el de *Razonar* se redujo de un 28% a un 11%, aspecto en el que podría haber influido la escasa formación recibida en ese sentido, algo que podría ser considerado en una futura investigación. Por otro lado, atendiendo a la Apertura en la respuesta, un aspecto que los EpM están poco acostumbrados a considerar, las tareas *Abiertas* aumentaron del 5% al 18%, lo que significa que ese aspecto solo se desarrolló en algunos grupos de EpM.

Esta evolución general en la creación de tareas durante el desarrollo del proyecto no fue homogénea en todos los grupos de trabajo. Referido a Contexto *Real*, de los 20 grupos, los que tuvieron un porcentaje superior al 75% ascendió de, inicialmente 3 a finalmente 16, mientras que los que utilizaron ese Contexto en menos del 25%, descendió de 5 a 0. Ello muestra una evolución interesante. En concreto, llama la atención la evolución de los grupos G6, G8 y G16 que, inicialmente, propusieron el 0% de tareas con Contexto *Real*, porcentaje que aumentó progresivamente en las cuatro partes del proyecto hasta llegar en la Parte 4 a, respectivamente, 100% (G6), 67% (G8) y 86% (G16). Por el contrario, el grupo G19, que inicialmente no propuso ninguna tarea en Contexto *Puramente Matemático*, lo hizo en las demás partes hasta llegar al 100% en Parte 2, 67% en Parte 3 y 21% en Parte 4. Ello refleja una evolución diferente de cada grupo que podría considerarse en futura investigación. En el caso de los Procesos cognitivos, no se apreció evolución en ningún sentido en las diversas partes del desarrollo del proyecto. Referido a la Apertura de la respuesta, no se percibió una evolución destacable ya que, en las dos primeras partes del proyecto, el máximo porcentaje de tareas *Abierta* fue inferior a 50% y un único grupo, en cada caso, superó el 25%; en la tercera parte, todas las tareas fueron de respuesta *Cerrada* y, en la cuarta, 5 grupos superaron el 25%, uno de los cuales superó el 50%.

Conclusiones

Este trabajo presenta una forma innovadora de enseñanza mediante el desarrollo de un trabajo por futuros docentes en grupos colaborativos, su implementación y evaluación por los compañeros y por ellos mismos, y la reflexión y revisión del propio trabajo a partir del proceso seguido. Dada la gran aceptación por los EpM de esta forma de trabajo, quizás podría ser utilizada con otros objetivos para la formación inicial o desarrollo profesional de docentes.

En el proyecto de creación de tareas para el aprendizaje matemático desarrollado, una tarea típica creada tuvo Contexto *Real*, desarrollaba capacidades de *Aplicar* y era de respuesta *Cerrada*, características que las distinguen de las de libros de texto donde solo un 10% eran de Contexto *Real* (Wijaya et al., 2015), la mayoría desarrollaba capacidades de *Conocer* (Guerrero et al., 2015; López y Contreras, 2015; Vicente et al., 2008; Vicente et al., 2013) y eran de respuesta *Cerrada*. Sin embargo, los resultados son similares a los de Chamoso y Cáceres (2018) en cuanto a la Apertura de la respuesta, aunque más ricas en cuanto a los Procesos cognitivos. Esto nos hace pensar que la forma de trabajo y el situarse en contextos próximos a la realidad puede enriquecer las tareas que los EpM crean teniendo en cuenta las que sugieren los libros de texto, quizás por la influencia de un contexto que puede ser más cercano a los estudiantes.

Se aprecia una evolución en el Contexto *Real* de propuesta de tareas creadas por los EpM, así como capacidad para proponer tareas *Abiertas*, si bien los grupos de trabajo se comportaron de forma heterogénea. Esta evolución no parece igual en los Procesos cognitivos que activan su resolución, aspecto que quizás debería ser considerado con más profundidad en la formación inicial de docentes.

Una limitación de este trabajo es que no considera el proceso formativo para la creación de tareas en la reconsideración y mejora de la Propuesta Inicial. Ello puede abrir futuras líneas de investigación para estudiar la influencia de ese aspecto de la creación de tareas en la Propuesta Final analizando, por ejemplo, las modificaciones que los EpM realizan en sus tareas creadas de su Propuesta Inicial a partir del proceso reflexivo desarrollado por la experimentación con iguales, la coevaluación y la autoevaluación.

Como perspectivas de futuro, se podría analizar el tratamiento de los contenidos en las tareas creadas por los EpM en los diversos contextos reales considerados a partir de, por ejemplo, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje propuestas por Clements y Sarama (2015). También se podrían analizar las resoluciones que los escolares hacen de las tareas creadas a partir de contextos reales, quizás a partir de los modelos de resolución de Blum y Leiss (2007) u OCDE (2012), y compararlas con resoluciones que se proponen habitualmente en el aula de matemáticas. Otra posibilidad sería comparar estos resultados con los obtenidos al analizar las tareas matemáticas creadas a partir de contextos reales por futuros docentes de matemáticas de otros niveles educativos atendiendo al Contexto utilizado, Procesos cognitivos y Apertura o Realismo de la respuesta. También se podrían analizar la revisión y mejora de las tareas creadas por futuros docentes a partir de contextos reales atendiendo, por ejemplo, a los Procesos cognitivos.

En otro sentido, vertebrar la influencia de la propuesta de formación de docentes de matemáticas a partir de la reflexión sobre la creación de tareas en contextos reales también puede ser analizado como futura investigación. Además, esta forma de trabajo podría repetirse teniendo como eje el proyecto de creación de tareas, pero considerando otras partes diferentes del mismo que también partiesen de contextos cercanos a la realidad.

Agradecimientos

RED8-Educación matemática y formación de profesores (EDU2016-81994-REDT), Proyecto 2017/00111/001 (463AC01, Universidad de Salamanca), Proyecto European Union. Erasmus (2017-1-ES01-KA203-038491), Proyecto Ministerio de Economía y Competitividad España (PSI2015-66802-P)

Referencias

Blum, W. y Leiss, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? En C. Haines et al. (Eds), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics*. (pp. 222-231). Chichester: Horwood.

Cáceres, M.J., Chamoso, J.M. y Azcárate, P. (2010). Analysis of the revisions that pre-service teachers of Mathematics make of their own project included in their learning portfolio. *Teaching and Teacher Education, 26*(5), 1186-1195.

Cáceres, M.J., Chamoso, J.M. y Cárdenas, J.A. (2015). Situaciones problemáticas auténticas propuestas por estudiantes para maestro. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.*), Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 201- 210). Alicante: SEIEM.

Chamoso, J.M. y Cáceres, M.J. (2009). Analysis of the reflections of student-teachers of Mathematics when working with learning portfolios in Spanish university classrooms. *Teaching and Teacher Education, 25*(1), 198-206.

Chamoso, J.M. y Cáceres, M.J. (2018). Propuesta de tareas matemáticas en contextos reales de estudiantes para maestro. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 17*, 83-94.

Christiansen, B. y Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, y M. Otte (Eds.), Perspectives on Mathematics Education (pp. 243-307). Dordrecht, Netherlands: D. Reidel.

Clements, D. y Sarama, J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad: El enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje*. Learning Tools LLC. (Obra original de 2009).

Guerrero, A.C., Carrillo, J. y Contreras, L.C. (2014). Problemas de sistemas de ecuaciones lineales en libros de texto de 3º ESO. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 395-404). Salamanca: SEIEM.

Hiebert, J. y Wearne, D. (1997). Instructional tasks, classroom discourse and student learning in second grade arithmetic. *American Educational Research Journal*, *30*(2), 393-425.

Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualising and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Isik, C. y Kar, T. (2012). The Analysis of the Problems Posed by the Pre-Service Teachers About Equations. *Australian Journal of Teacher Education, 37*(9), 93-113.

López, M.E. y Contreras, L.C. (2014). Análisis de los problemas matemáticos de un libro de texto de 3º ESO en relación con los contenidos de geometría plana. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 425-434). Salamanca: SEIEM.

Malaspina, U. (2015). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Tutxla Gutiérrez, Chiapas, México. Mayo 2015.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la educación infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 1-23.

Niss, M. (2001). Issues and Problems of Research on the Teaching and Learning of Applications and Modelling. En J. F. Matos, W. Blum, K. Houston & S. Carreira (eds.). *Modelling and Mathematics Education. International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications, ICTMA 9: Applications in Science and Technology* (pp. 72-89). Chichester: Horwood Publishing.

MECD (2015). *Marco General de la evaluación de tercer curso de Educación Primaria*. Madrid: MECD. INEE.

OCDE (2012). *PISA 2012. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Informe español.* Madrid: MECD. INEE.

Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. y O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA, 4*(4), 133-142.

TIMSS (2015). *Estudio internacional de tendencias en Matemáticas y Ciencias. IEA*. Madrid: MECD.

Vicente, S., Dooren, W. y Verschaffel, L. (2008). Utilizar las matemáticas para resolver problemas reales. *Cultura y Educación, 20*(4), 391-406.

Vicente, S., Rosales, J., Chamoso, J.M. y Múñez, D. (2013). Análisis de la práctica educativa en clases de matemáticas españolas de Educación Primaria: una posible explicación para el nivel de competencia de los alumnos. *Cultura y Educación, 25*(4), 535-548.

Villa-Ochoa, J. A. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 8*(16), 133-148. Disponible en http://goo.gl/mIeL6j

Wiest, L. (2001). The role of fantasy contexts in word problems. *Mathematics Education Research Journal, 13*(2), 74–90.

Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 89*(1), 41-65.

Yeo, J. B. (2017). Development of a framework to characterise the openness of mathematical tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(1), 175–191.

GeoGebra como recurso para favorecer la interpretación matemática

Agustín **Carrillo** de Albornoz Torres
Universidad de Córdoba
España
agustincarrillo@telefonica.net

Resumen

Incorporar recursos como GeoGebra supone modificar determinados aspectos en el desarrollo de los contenidos sin olvidar los que los alumnos deben adquirir, aunque requiere algunos cambios en la forma de trabajo en el aula tanto para el profesorado como para el alumnado.

Una actividad habitual en el aula es el estudio y representación de funciones que comienza con la determinación de los apartados correspondientes a dominio, puntos de corte, asíntotas, extremos, crecimiento, etc., hasta llegar a completar los elementos necesarios que permitan su representación gráfica; mientras que con ayuda de programas como GeoGebra el proceso cambia, lo primero que se obtiene es la gráfica de la función, por lo que algo debemos modificar en el proceso de enseñanza para que los alumnos sean capaces de interpretar la gráfica para determinar qué deben estudiar.

Algo parecido ocurre con otros contenidos habituales en los distintos niveles educativos que expondremos en este trabajo.

Palabras clave: GeoGebra, TIC, interpretación.

Introducción

La realidad sobre el uso de las tecnologías en las aulas no es la que todos pensamos, se habla mucho de distintos programas y aplicaciones, pero la situación es otra, ya que tras muchos años aún no hay una implementación generalizada del uso de estos recursos para aprovechar las posibilidades que ofrecen.

El papel escrito que había tenido una gran importancia en la forma de difusión de la información está siendo sustituido por la pantalla del ordenador, del móvil, etc. Las personas ya no son meros receptores de información, se han convertido también en emisores, al crear contenidos y sobre todo al difundirlos y compartirlos.

En la sociedad actual, el sistema educativo no puede seguir utilizando, exclusivamente, los métodos de enseñanza del pasado, sin considerar todos los estímulos e influencias que afectan directa e indirectamente al alumnado.

Los estudiantes de hoy son diferentes, quieren usar la tecnología de su tiempo y no les gusta, ni despierta interés, una educación que no se relaciona bien con el mundo real en el que viven. Necesitan nuevos objetivos y nuevas estrategias.

Se hace imprescindible el uso de las TIC en las escuelas desde distintos puntos de vista; tanto para manejar la información que se encuentra al alcance del alumnado, de modo que aprendan a desenvolverse en esta nueva sociedad del conocimiento como ciudadanos con un espíritu crítico, como para potenciar el aprendizaje en las distintas materias del currículo.

Llevamos años cambiando para lograr una escuela que refleje el mundo en el que vivimos, pero la realidad es ¿hemos incorporado nuevos recursos y cambiado la metodología de trabajo para lograrlo?

Cualquier cambio metodológico es lento y al profesorado le cuesta cambiar para adaptarse a los cambios y en este caso a lo que supone incorporar las TIC.

Somos conscientes de la importancia de la tecnología en la sociedad actual y también de la necesidad de su presencia en el aula, pero nos planteamos algunas cuestiones como qué utilizamos, para qué y cómo.

El uso de las tecnologías, si queremos, puede estar presente en todos los ejes y núcleos de contenidos, ya que permitirá mejores visualizaciones sobre las cuales elaborar conjeturas, prever propiedades, descartarlas o comprobarlas. Al utilizar estas herramientas, se desplaza la preocupación por la obtención de un resultado y la actividad se centra en la construcción de conceptos y en la búsqueda de nuevas formas de resolución.

GeoGebra como recurso TIC

Este software como es evidente no tiene exclusividad como recurso TIC aunque está claro que la comunidad que se ha creado a su alrededor está ayudando a producir cambios en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Todos conocemos sus principales características entre las que destaca ser software libre y estar disponible para distintos sistemas operativos, además de su continua evolución, sin perder la sencillez de las primeras versiones.

A todo esto hay que añadir los miles de recursos creados por otros usuarios que facilitan el aprendizaje y también su uso sin necesidad de excesivos conocimientos.

Quisiera destacar dos aspectos importantes que pueden ayudar a que GeoGebra se haga más presente en las aulas. Por un lado la amplia oferta de formación y de recursos, y por otro, el que las editoriales se estén interesando por este software incorporándolo a sus nuevos libros.

Utilizar programas como GeoGebra permitirá arrinconar los procesos mecánicos para promover una enseñanza basada en la comprensión de conceptos, para los que fomentar la interpretación de lo que se observa será fundamental.

La sociedad, en general, asigna a la matemática significados discutibles que la colocan en un lugar casi inalcanzable para el común de las personas. Estas concepciones, en gran parte, tienen su origen en los aprendizajes que se produjeron durante la escolaridad.

Por lo general la matemática escolar se caracteriza por una profusión de definiciones abstractas, procedimientos mecánicos, desarrollos unívocos y acabados, y demostraciones formales junto con un uso apresurado de la simbología.

La sociedad, en general, asigna a la matemática significados discutibles que la colocan en un lugar casi inalcanzable para el común de las personas. Estas concepciones, en gran parte, tienen su origen en los aprendizajes que se produjeron durante la escolaridad.

Por lo general la matemática escolar se caracteriza por una profusión de definiciones abstractas, procedimientos mecánicos, desarrollos unívocos y acabados, y demostraciones formales junto con un uso apresurado de la simbología.

El uso de las tecnologías y en concreto de software como GeoGebra promueve el trabajo autónomo de los alumnos y permiten el establecimiento, comprobación y validación de hipótesis por parte de los estudiantes, mediante el uso de las herramientas matemáticas adecuadas. Además, se podrán incorporar, con distintos grados de complejidad a la enseñanza de la Matemática, el desarrollo de preguntas, formulación y tratamiento de problemas, así como para la obtención, proceso y comunicación de la información generada.

La calculadora, y programas como GeoGebra son herramientas al alcance de los alumnos, por lo que su uso estará presente en todos los ejes y núcleos de contenidos, ya que permitirán mejores visualizaciones sobre las cuales elaborar conjeturas, prever propiedades, descartarlas o comprobarlas.

Al utilizar estos recursos, se desplaza la preocupación por la obtención de un resultado y la actividad se centra en la construcción de conceptos y en la búsqueda de nuevas formas de resolución.

A veces en el proceso de enseñanza se presta más atención a los métodos algorítmicos que al propio concepto o contenido que se está exponiendo o estudiando, lo que supone que un alumno conoce el proceso pero desconoce lo que acaba de hacer o para qué lo ha hecho.

Promover la interpretación matemática será el objetivo de los ejemplos que se describen a continuación.

La interpretación de conceptos en matemática

Un primer ejemplo, favorecido por la sencillez que ofrece GeoGebra, puede ser el conocer e interpretar el significado de los distintos coeficientes en una función cualquiera, desde ejemplos sencillos como la función lineal para comprender el significado de los a y b en su expresión $y = a\,x + b$, como de una función cuadrática expresada en la forma $y = a\,x^2 + b\,x + c$, o mejor como $y = a\,(x - b)^2 + c$, ampliable según el nivel de los alumnos con los que se trabaje a otras familias de funciones como $y = a\,sen(b\,x + c) + d$.

Promover otro tipo de interpretación en la que se pedirá a los alumnos que con lápiz y papel, estimen cuál será el resultado, se puedo lograr con ejemplos como los siguientes:

a. D es un punto de una circunferencia, ¿Qué rastro determina el segmento CD cuando C es interior, al mover el punto D? ¿Y cuando C es un punto exterior?
b. A partir de una circunferencia de centro A y radio 2, se dibuja una nueva circunferencia de centro C y radio 1, siendo un punto de la circunferencia inicial. ¿Cuál es el rastro de la segunda circunferencia al mover el punto C?
c. ¿Qué rastro determina la circunferencia de centro C y radio CD al mover D, siendo D un punto de otra circunferencia y C exterior a dicha circunferencia? ¿Qué ocurre cuando C es un punto interior a la circunferencia inicial? ¿Y cuando C está también sobre la misma circunferencia que el punto D?
d. Determina el rastro de la circunferencia de centro C y radio CD al mover C, siendo C y D puntos de otra circunferencia.

Intuir los rastros resultará una actividad interesante que posteriormente se podrá comprobar con GeoGebra a partir de construcciones sencillas, que requieren pocos pasos y por tanto, pocas herramientas.

Este será el éxito del uso de GeoGebra en el aula ya que si se utilizan construcciones que requieran poco tiempo, permitirán dedicar el resto del horario a conceptos y contenidos matemáticos y no al uso del programa.

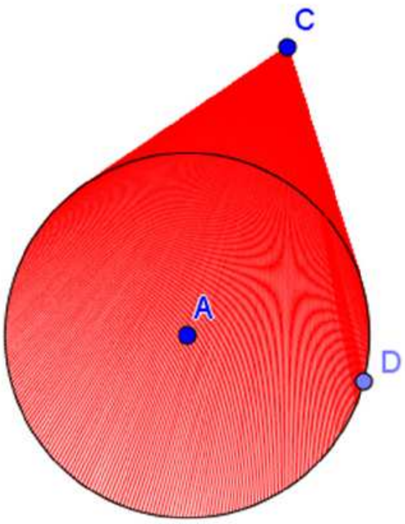


Figura 1. Lugar descrito en el ejemplo a.

Figura 2. Lugar descrito en el ejemplo c.

Algo parecido ocurre al resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones a las que se dedica excesivo tiempo al mecanismo de la resolución algebraica sin hacer mención a qué representa la ecuación y sobre todo, cuál es el significado de la solución en caso de existir.

Por ejemplo, si se plantea la resolución de la ecuación $3x - 6 = 0$, el proceso seguido por el alumnado será:

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

La respuesta será que la ecuación tiene solución y su valor es 2.

Si aprovechamos las posibilidades que ofrece GeoGebra, se podrá representar la función correspondiente a la ecuación que se desea resolver, obteniendo la repr4esentación de la recta $y = 3x - 6$; a partir de la que se podrá trabajar el significado de "resolver la ecuación" y sobre todo determinar, sólo con mirar la gráfica si tiene o no solución, así como dónde estará la solución, tal y como aparece en la figura 3.

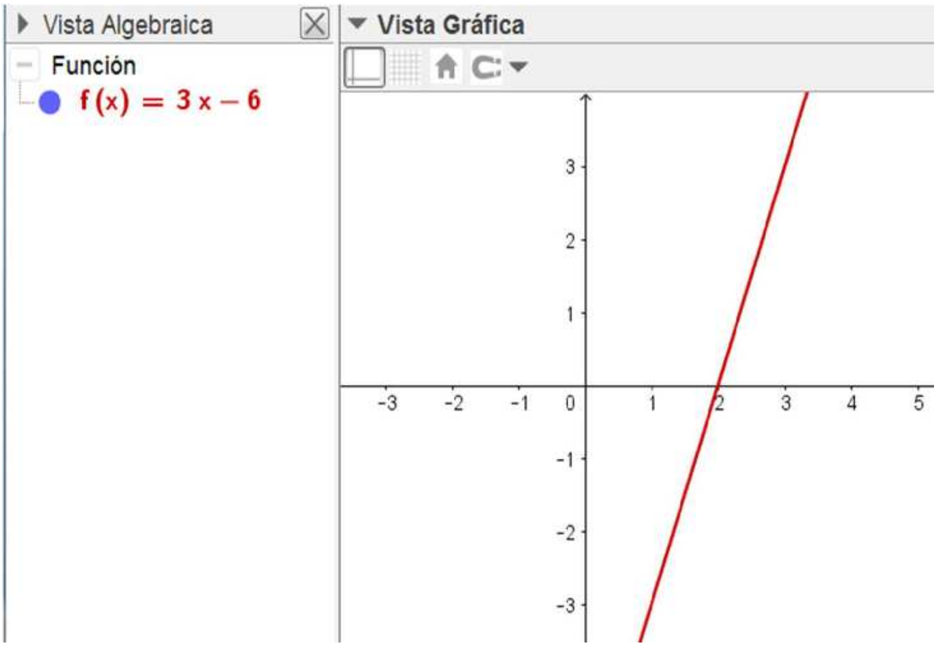


Figura 3. Resolución de una ecuación.

De manera similar se podrá relacionar la representación gráfica de dos rectas al resolver un sistema en la que el segundo miembro no sea 0, o la resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con la representación en el plano de dos rectas para estudiar su posición relativa, algo que a menudo no se hace ya que se trata de contenidos correspondientes a bloques de contenidos diferenciados.

Polinomios, ecuaciones y funciones

Estos tres contenidos corresponden a bloques de contenidos distintos, por lo que es habitual hablar sólo de uno de ellos, sin relacionarlo con los otros dos, sin darnos cuenta que conceptos como raíz de un polinomio, solución de una ecuación o punto de corte de una función con el eje X, representan lo mismo.

Descomponemos en factores polinomios, resolvemos ecuaciones y representamos funciones y, en estas tareas en muchas ocasiones proponemos la misma expresión tanto para el polinomio, como para la ecuación como para la función y nos olvidamos de recurrir a la representación para observar la gráfica obtenida a partir de la representación del polinomio, de la expresión de la ecuación o de la función, interpretando lo que aparece y por tanto, lo que debemos obtener.

Utilizar GeoGebra como recurso permitirá fomentar la interpretación matemática para lograr que un alumno al observar la gráfica de una función, reconozca todas sus propiedades y los elementos que debe calcular, tal y como ocurre en la figura 4 en la que al observar la imagen debe interpretar lo que observa.

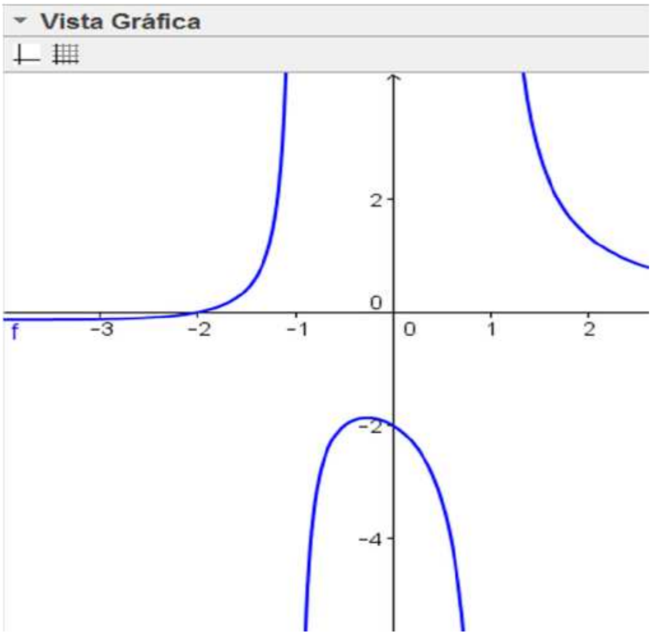


Figura 4. Gráfica de una función.

Esto significa que se debe producir un cambio con respecto a la metodología tradicional en la que el proceso para estudiar y representar una función comienza por determinar el dominio, recorrido, corte con los ejes, simetrías, crecimiento, asíntotas, etc., para finalizar con la representación gráfica a partir de todos los datos previamente obtenidos. Sin embargo al utilizar cualquier graficador de funciones, GeoGebra es un buen programa para esta tarea, lo primero que se obtiene es la representación de la función que se desea estudiar, por lo que al menos el proceso debe cambiar. Por este motivo una buena interpretación de la imagen obtenida será un primer paso para lograr determinar todas las propiedades y elementos de la función.

Determinar cuándo una función es continua o cuando es derivable a partir de la representación gráfica de la función será de gran ayuda para exponer estas características, así como para obtenerlas de manera analítica, si es el caso. Algo similar ocurre si se desea establecer si existen simetrías en una función o para estudiar si cumple o no un determinado teorema, también para determinar si una función tiene inversa o no, ya que basta comprobar si la función y su inversa son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Relacionado con el estudio de funciones está el cálculo de límites. El proceso normal para calcular un límite es aplicar los procedimientos conocidos para determinarlo en función del tipo de función o de la determinación que haya aparecido. Lo que nos es usual es representar previamente la función para interpretar si existe o no el límite que hay que obtener. La razón es evidente, la representación requiere más tiempo que aplicar el proceso para determinar el valor del límite, lo que conlleva a repetir procesos mecánicos sin saber lo que se está haciendo y lo que se está obteniendo y sin comprobarlo de manera gráfica.

Al utilizar programas como GeoGebra en el que la representación de una función es inmediata, facilitará su análisis y por tanto, si previamente se han trabajado estos conceptos con los alumnos, serán capaces al ver la gráfica de poder decidir si existe o no el límite pedido. Es por tanto otro ejemplo más de la importancia que la interpretación de los conceptos matemáticos tiene frente a los procesos repetitivos y algorítmicos.

Por ejemplo, si se desea obtener el $\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^2}{x^3+x}$, se podrá representar la función $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^3+x}$ para observar que ocurre en el infinito, tal y como muestra la figura 5.

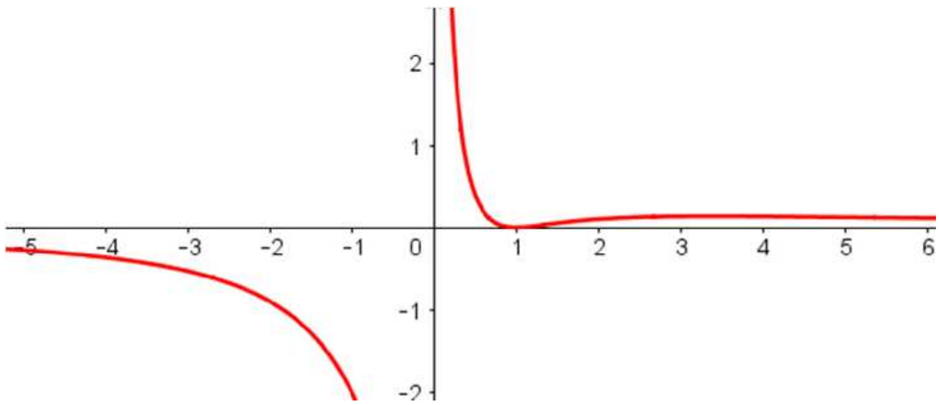


Figura 5.

No olvidemos que este programa permite incorporar imágenes de la realidad, por lo que se podrán analizar si existen curvas que se ajusten a determinados diseños o edificios, en los que a partir de la imagen insertada en GeoGebra se podrá buscar la familia de funciones que pueda modelizarla.

Por ejemplo, podemos intentarlo con ejemplos como los mostrados en las figuras 6 y 7.

Figura 6.

Figura 7.

Conclusión

A veces dedicamos excesivo tiempo a los procesos mecánicos y nos olvidamos de los conceptos, nos preocupa más obtener un resultado que saber lo que se está haciendo y sobre todo lo que representa el valor que se ha obtenido.

Interpretar una imagen de una función es tan importante o más que obtener sus característica ya que si el alumno desconoce a que corresponde cada valor, poco sentido tendrán los cálculos por muy bien que estén realizados.

En necesario cambiar los procesos utilizados en la enseñanza de las matemáticas, sobre todo cuando se utilizan nuevos recursos, no es posible seguir haciendo lo mismo.

Es necesario aprovechar las posibilidades que ofrecen las tecnologías para cambiar los métodos y modelos de enseñanza, afrontando los cambios que sean necesarios para que las matemáticas dejen de ser abstractas, aburridas, complicadas, ineficaces,…

Aunque la tecnología es importante en nuestra vida, también debe serlo en nuestro trabajo, sin olvidar que la tecnología no debe prevalecer sobre la enseñanza sino que tiene que servirnos para mejorarla.

Referencias y bibliografía

Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación. PNA, 1(4), 139-158.

NCTM. (2003). Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

La fértil sencillez de las irracionalidades enteras y el uso de las prácticas argumentativas en el aula

Carlos Sánchez Fernández
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana
Cuba
csanchez@matcom.uh.cu

Resumen

La sencillez es uno de los atributos que le dan realce a la argumentación matemática, pero a veces nuestra endeble cultura matemática no nos permite apreciar que un asunto matemático con apariencia sencilla esconde muchas alternativas no menos atractivas que el tema original. Nuestro interés es compartir experiencias con el recurso didáctico de la historia de la matemática empleado para estimular el desarrollo de prácticas argumentativas en el aula, tanto de enseñanza secundaria, como universitaria. Trataremos varios problemas aritméticos relacionados con las irracionalidades enteras aparentemente muy sencillos, pero con variadas alternativas que permiten desarrollar prácticas argumentativas a diferentes niveles de enseñanza.

Palabras clave: argumentación matemática, irracionalidades enteras, números metálicos, números de Pisot-Vijayaraghavan.

Acerca de la importancia de las prácticas argumentativas

Según la experiencia acumulada hasta el momento consideramos que deberíamos enfocar una atención prioritaria a lograr que los alumnos, con creciente independencia, aprendan a razonar lógicamente y se acostumbren a usar criterios científicos a la hora de tomar decisiones. Uno de los medios primordiales para desarrollar este pensamiento científico es la comprensión y realización de la argumentación matemática para explicar, convencer y no solo para justificar la veracidad de las proposiciones. La experiencia y las reflexiones de muchos especialistas en el tema de la argumentación y la prueba matemáticas (ver p. e. el *19th ICMI Study* editado por Hanna & Villiers, 2012) nos hace pensar que en la práctica docente el uso de la argumentación y la prueba matemáticas debe atemperarse tomando en consideración los contextos concretos.

En general, el nivel universitario suele incluir demostraciones, aunque a veces son demasiado formales y pierden atractivo para los jóvenes; el nivel primario frecuentemente -es una pena que no sea siempre- prepara para iniciar las prácticas argumentativas, aprovechando la natural curiosidad de los niños expresada en los insistentes *¿por qué?*, … pero en el nivel intermedio o secundario ¿qué ocurre? Pues que, con asiduidad, nos olvidamos del valor de la argumentación científica y, por una u otra justificante, no se adiestra y a veces ni se incluye explícitamente en los programas, ni aparece en todos los textos oficiales.

Asumimos que todos conocemos la existencia de diferentes "categorías" en las prácticas argumentativas, que van desde una argumentación informal heurística a una prueba formal totalmente rigurosa, es decir, desde una simple explicación plausible hasta una justificación con toda la precisión lógica. En nuestra opinión, para encontrar diferentes argumentaciones dignas, y modos de presentar estas en un aula, además del conocimiento del grupo de alumnos, los contenidos y las prácticas matemáticas correspondientes, *nos deberíamos auxiliar de la historia de la matemática*. Y no solo la historia antigua, sino también la historia más reciente, incluidas las aplicaciones prácticas que casi siempre aparecen mucho después. Y esto debe hacerse siempre con adecuación a las circunstancias concretas, haciéndolas más accesibles y atractivas al estudiante en un nivel escolar dado. Nuestros argumentos sobre este asunto los hemos venido exponiendo en diferentes escenarios y los más recientes se pueden encontrar en Sánchez (2018) y en Sánchez & Valdés (2016), aquí solo haremos una breve síntesis de nuestras ideas.

¿Para qué recurrir a la historia de la matemática?[1]

Las diferentes pruebas existentes de un determinado teorema o proposición no se realizan en un vacío atemporal, por tanto, nosotros podemos recrear ese contexto histórico en el aula, hacer "una reconstrucción racional" en la complicidad maestro-alumnos, para simular que descubrimos la idea y su efecto, con el asombro y la emoción de la primera vez.

Pero, ¡atención! no se trata de reproducir los detalles históricos, hacer un cuento minucioso y seguir con la forma tradicional de la demostración deductiva; si lo hiciéramos de tal forma, en lugar de propiciar la inteligibilidad del asunto, complicamos la situación didáctica: hemos añadido un valor que significa algo más para aprehender. El maestro competente realiza a priori un análisis de los momentos principales del desarrollo histórico de las pruebas conocidas, realiza la *transposición didáctica* y determina lo que expondrá en el aula. De forma tal que *lo histórico, lo lógico y lo didáctico* del asunto de la clase quede integrado en una sinergia constructiva.

El conocimiento de las diversas pruebas que se han sucedido en la historia nos provee de una cultura matemática sobre el teorema o proposición correspondiente que sobrepasa con creces el simple conocimiento de una sola de las pruebas –sobre todo si la única conocida es la más concisa y más formal-. Por ejemplo, en el texto de J. W. Dawson (2015) podemos encontrar razones contundentes para recomendar el conocimiento de diferentes demostraciones de una misma proposición, por muy simple que parezca su enunciado.

Es necesario *atemperar y acondicionar* el discurso matemático en el salón de clase, de forma que las prácticas argumentativas sean atractivas y eficaces en cada nivel de enseñanza; para esto consideramos que el recurso de la historia es un ingrediente eficaz. En su origen y desarrollo los hechos matemáticos pasan por diferentes etapas, en la clase no tenemos que reproducir todas estas fases que tienen relación con la actividad investigativa, pero su conocimiento amplio y profundo, posibilita una clase más rica y atractiva. Eso es precisamente el principal objetivo del maestro: *facilitar la comprensión del hecho matemático*.

Ilustremos estas ideas a través del tratamiento del tema de los números irracionales que aparece en casi todos los currículos de enseñanza secundaria y es retomado posteriormente en el

[1] Un artículo muy lúcido y explicativo es Grabiner (2012) que hemos usado como sustento de nuestras reflexiones y puede aclarar mejor al interesado.

nivel universitario. Un tema que cuándo se le comprende bien transparenta simpleza e importancia, tanto en el plano didáctico, como en el plano lógico e histórico. La primera parte se piensa puede ser favorable para maestros del nivel secundario y el tratamiento de los números de Pisot-Vijayaraghavan sería una motivación a la introducción de temas muy fértiles asociados al álgebra conmutativa y al análisis armónico en un nivel universitario.

Las “inexpresables” raíces de los polinomios irreducibles con coeficientes enteros

¿Hay algo más sencillo que resolver ecuaciones como x^n-p=0, dónde p es un número entero? En el caso que el entero p es una potencia enésima de otro entero es sumamente fácil encontrar al menos una raíz. Pero, ¿si p no es una potencia enésima? Aparentemente sigue siendo simple, basta tomar las raíces enésimas del número p, lo que puede reducirse al conocimiento de las raíces enésimas de la unidad. Temprano en la enseñanza secundaria aprendemos que este problema casi nunca tiene una solución racional, es decir, no es un número expresable como cociente de dos números enteros. Más adelante comprendemos que este problema sencillo está relacionado con la misma esencia de unos “números inexpresables” que, con aparente desestimación, se acostumbra a llamarles “números irracionales” y “números complejos”.

¿Cómo podemos trasmitir la importancia matemática de estos números inexpresables? ¿Cómo podemos mostrar su profundidad conceptual sin lastrar su sencillez originaria? ¿Qué debemos revelar en cada nivel educacional? Estas interrogantes y muchas otras se pueden responder mejor con el conocimiento de su historia y de sus diferentes pruebas.

En un principio número y magnitud estaban ineludiblemente ligados. Se suele decir que fue en la Grecia Clásica dónde se “descubrieron” los números inexpresables asociados a las magnitudes inconmensurables. Pero mucho antes, los babilonios “inventaron” métodos para enunciar con cierta precisión las *magnitudes inexpresables* con números enteros o fraccionarios.

Por ejemplo, los babilonios utilizaron la relación pitagórica en triángulos con hipotenusa irracional y sus aproximaciones a las raíces cuadradas usando sucesiones recurrentes con números fraccionarios que pueden considerarse pasos heurísticos hacia el descubrimiento que nunca hicieron. En una tablilla de arcilla, datada en un momento cercano al 1800 a.C., que se conserva en la Universidad de Yale aparece la aproximación en fracciones sexagesimales para la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de cateto unitario que con la notación actual es:

$$\sqrt{2} \approx 1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3} \approx 1{,}41421296296$$

Muy cercana al valor aproximado que hoy conocemos en representación decimal

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237 .$$

También en Egipto, la India y en China se han encontrado documentos antiquísimos que atestiguan el interés originario de dar un valor aproximado a esos “números inexpresables” de manera racional, aunque ¿no es *completamente racional* buscar una medida aproximada? En muchas culturas antiguas y medievales ese era un procedimiento natural y muy racional. Pero hoy nos aferramos a desarrollar el origen histórico de los números irracionales mencionando solo la idea del valor exacto inexpresable como cociente de enteros, enfoque que nos llega desde la Hélade Clásica. Por supuesto, esta idea no es descabellada y también podemos utilizarla aderezándola con el condimento histórico. Veamos.

Al parecer fue el pitagórico Teodoro de Cirene (siglo V a. C.), maestro de Platón, uno de los primeros en plantear una argumentación para el estudio de números inexpresables que será recogida en los Elementos de Euclides. En particular, con sus conocimientos de geometría demostró que *los lados de los cuadrados cuya área era un número primo era inconmensurable con el lado del cuadrado de área unidad*. Otro alumno de Teodoro, Teeteto de Atenas (s. IV a.C.) clasificó las irracionalidades. No consideraba lo mismo $\sqrt{17}$, que $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ o $\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}$. Esto tiene fácil comprensión si lo llevamos al campo del álgebra de los polinomios con coeficientes enteros: $\sqrt{17}$ es raíz de un polinomio irreducible de segundo grado, $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ es raíz de un polinomio de grado mínimo igual a cuatro, $\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}$ satisface un polinomio con coeficientes enteros de sexto grado como mínimo.

Platón en su diálogo "Teeteto" glorifica uno de los argumentos más socorridos para probar la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2:

> Demostración (en su esencia presentada por Platón). Si 2 fuese racional representable en la forma $\sqrt{2}= m/n$ con mcd (m, n) = 1, se cumpliría $m^2=2n^2$, luego m sería par m=2k y de ahí se obtendría que $2k^2=n^2$ y n también sería par, contradiciendo la suposición de que m y n no tenían factores comunes.

Desde entonces acá han proliferado las pruebas de la irracionalidad de las raíces de números que no son potencia de números primos. En el caso de la raíz cuadrada de 2, por ejemplo, podemos clasificar los tipos de prueba en cinco clases:

1. Las que como la prueba de Teeteto suponen la representación irreducible como fracción y deducen que esta fracción irreducible es reducible, llegando a una contradicción;

2. Las pruebas basadas en el método de descenso infinito, es decir, suponen la expresión racional y prueban la existencia de otra menor, proceso que puede continuarse indefinidamente, lo cual es absurdo porque en todo conjunto de números enteros positivos hay un elemento mínimo;

3. Las pruebas visuales sobre la imposibilidad geométrica de encontrar dos cuadrados de lados enteros, tales que el área del mayor duplique el área del menor;

4. Pruebas con argumentos puramente aritméticos, por ejemplo, que si expresamos los números en un sistema de base 3, entonces los cuadrados terminan en 0 o en 1, por tanto, no pueden ser iguales al doble de un número cuadrado perfecto que terminaría en 2;

5. Pruebas que conjugan dos o más de estos procedimientos.

Nos parece conveniente que en el aula de secundaria se manejen varios tipos de argumentación. Por ejemplo, después de hacer referencia al origen del problema y relatar alguna de las anécdotas se puede plantear la prueba como la cuenta Platón, subrayar el basamento en la lógica bivalente para llegar a contradicción. Preguntar si será posible alguna otra prueba que no use el mismo argumento, dejar pensar y al rato, si no hay propuestas, introducir otro argumento, por ejemplo, hacer uso de que el numerador es mayor que el denominador, sea n=m+p para p > 0, elevar al cuadrado $m^2+2mp+p^2=n^2=2m^2$ e inferir que m>p. Consecuentemente, y razonando análogamente, para algún entero positivo a>0, m=p+a y n=2p+a, luego

$$(2p+a)^2=2(p+a)^2 \rightarrow a^2=2p^2$$

y el proceso puede repetirse indefinidamente: n>m>a>p>… lo que es un absurdo pues todo conjunto de números naturales tiene un elemento mínimo. Seguidamente se puede buscar una interpretación geométrica de esta prueba: si existen dos cuadrados uno teniendo el doble de área que el otro, entonces siempre existe otro par de cuadrados más pequeños con la misma propiedad. En el capítulo 4 del clásico texto de Hardy & Wrigth (1938) se encuentran varias demostraciones y exquisitos comentarios históricos.

El problema enseguida se puede generalizar a la determinación de la no racionalidad de otras raíces cuadradas y cúbicas como $\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{5}$ y otros números como $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ conocido como el número de oro. Se puede proceder de diversas formas, por analogía, por generalización, por adaptación y sustituyendo los argumentos que no sean aplicables. De tal forma, con naturalidad, se pasa a raíces de polinomios con coeficientes enteros.

Decimos que α es un *entero algebraico* si cumple $\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots b_1\alpha + b_0 = 0$, para ciertos b_i todos enteros. Obsérvese que en esta definición se exige que el polinomio sea *mónico*, es decir, el coeficiente principal, $b_n = 1$. Por supuesto, los números enteros son enteros algebraicos, pues son solución de la ecuación $x - n = 0$, y son los únicos números racionales que satisfacen una ecuación lineal con coeficientes enteros, por ello se llaman *racionales enteros,* los demás se suelen llamar *irracionales enteros,* denominación por cierto aparentemente contradictoria si nos mantenemos con la mentalidad de la aritmética clásica. Reafirmemos que un aporte significativo de la introducción histórica en el siglo XIX de estos nuevos tipos de números es precisamente el fomento de un cambio radical de la mentalidad dogmática aferrada a los clásicos campos numéricos, dónde se cumplen propiedades como la representación única en factores primos o la no existencia de divisores de cero, que en algunas de estas nuevas estructuras numéricas no se conservan.

Consideramos que el tratamiento de estos hechos históricos adaptándolos al contexto escolar tiene un valor didáctico incuestionable. El maestro interesado tiene mucha literatura a su disposición, en particular, recomendamos nuestra biografía de uno de los responsables en difundir las bondades de tales números Richard Dedekind (Sánchez & González, 2015, pp. 81-93).

Es sencillo probar que los enteros algebraicos o son racionales enteros o irracionales enteros, es decir, no pueden ser racionales fraccionarios como 2/3 o -7/5. Para argumentar esto, basta suponer $\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots b_1\alpha + b_0 = 0$ para $\propto = \frac{p}{q}$, sustituir en la ecuación y llegar a que el denominador q solo puede ser 1 y el numerador debe ser un entero divisor del término independiente b_0. A este resultado tan sencillo se suele llamar *Teorema de la raíz racional* o se asocia al *Lema de Gauss* para la factorización de polinomios, aunque muchos otros matemáticos lo usaron anteriormente sin formalizar su idea.

Los enteros algebraicos cumplen propiedades interesantes, como es que son estables por adición y multiplicación, por tanto, toda potencia entera de tales números es también un entero algebraico . Existen muchos ejemplos atractivos y simples de irracionalidades enteras que pueden estudiarse en el aula de secundaria, no solo raíces elementales de números libres de potencias. Por ejemplo todos los *números metálicos* definidos como raíz positiva de la ecuación $x^2 - Nx - 1 = 0$, donde N es un entero no negativo y son determinados por la fórmula:

$\delta_N = \dfrac{N+\sqrt{N^2+4}}{2}$. Para *N*=1 obtenemos el número de oro $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887$. Cuando *N*=2, $\delta_2 = 1+\sqrt{2} \approx 2{,}4142135624$ *número de plata*. Para *N*=3, $\delta_3 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3{,}3027756377$ es conocido como *número de bronce*. Todos los números metálicos se pueden aproximar por cocientes racionales formados por términos consecutivos de sucesiones de Fibonacci. Así, por ejemplo, si F(1)=F(2) y F(n+1)=F(n)+F(n-1), se prueba que $\lim_n \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$ y generalizando se toma la sucesión recurrente G(n) definida por: G(n+1)=kG(n)+G(n-1) para n>1, G(1)=G(2)=1, que para cada k>1, genera a uno de los miembros de la familia de números metálicos como límite del cociente $\frac{G(n+1)}{G(n)}$.

La ecuación cúbica semejante $x^3 - x - 1 = 0$ define un irracional entero conocido como número plástico *pl* y cuyo valor puede expresarse por la fórmula encontrada en el siglo XVI para la solución de la ecuación cúbica:

$$pl = \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx 1{,}324718...$$

El concepto de número plástico fue descrito primeramente por el monje benedictino holandés Hans van der Laan en 1928 cuando era un novicio aficionado a la arquitectura. Con esta *proporción plástica* diseñó la abadía de San Benito en Holanda. Posteriormente el número plástico fue estudiado con mayor profundidad por el arquitecto inglés Richard Padovan (n. 1935), quién definió una sucesión de número enteros cuyos cocientes aproximan al número plástico. La sucesión de Padovan se define de forma análoga a la sucesión de Fibonacci por medio de una relación de recurrencia A(n+1)=A(n−1)+A(n−2), para n>2 y A(1) = A(2) = A(3)= 1. Entonces el cociente $\frac{A(n+1)}{A(n)} \to pl \approx 1{,}3247$. Por supuesto, mientras mayor sea n, la aproximación del entero irracional por fracciones racionales es más precisa.

En la literatura especializada se pueden encontrar familias de números irracionales enteros con una fértil y atractiva historia. Por ejemplo, familias de números plásticos (Spinadel & Buitrago, 2009) con múltiples usos en diseño, arquitectura y en el estudio de cuasi cristales. Una de las clases de enteros irracionales que más nos sorprende por sus múltiples aplicaciones a dominios de la ciencia tan disímiles, es la clase más amplia consistente de los números de Pisot-Vijayaraghavan (Bertin et al. 1992).

Hace precisamente un siglo, en 1919, el matemático inglés G. H. Hardy encontró que la clase de los posteriormente denominados *números de Pisot* era efectiva para la solución de problemas de aproximaciones numéricas. Posteriormente el indio Tirukkannapuram Vijayaraghavan alumno de Hardy extendió estos resultados. Aproximadamente, por la misma época el joven francés Charles Pisot en su tesis de doctorado (1938) hizo un estudio muy amplio de tales números encontrándoles aplicación en el análisis armónico. Desde entonces en la literatura occidental se les llama *números de Pisot* y pocas veces números de Pisot-Vijarayaraghavan, por simplificación histórica y retórica. Esta clase sorprendente de números irracionales enteros, gracias a los adelantos tecnológicos de las ciencias de la computación, se ha convertido en un modelo ideal para interpretar las características de la estructura ordenada, pero aperiódica de los cuasi cristales, rompiendo un paradigma clásico de la cristalografía (El lector curioso puede encontrar agradable la historia matemática de los cuasi cristales como es narrada por el brillante matemático ruso Vladimir Igorevich Arnold y que aparece traducida al inglés en Arnold, 1990).

Comentemos algunas características de los números de Pisot que no hemos encontrado en ningún texto de enseñanza secundaria o universitaria, nos parecen muy atractivas y además sabemos son muy útiles para comprender mejor ciertos conceptos de álgebra abstracta, aunque sus mayores aplicaciones actualmente tienen que ver con asuntos ligados a la cristalografía. Ante todo, definamos qué entendemos por *números de Pisot*: son los enteros algebraicos p>1 cuyo polinomio mínimo irreducible, no tiene otra raíz (real o compleja) que sea de módulo mayor o igual a 1, es decir, si llamamos *conjugados de p* a todas las otras raíces de su polinomio mínimo, entonces p es un número de Pisot si sus conjugados son todos de módulo estrictamente menor que la unidad. Por ejemplo, si p es un irracional cuadrático tiene un único conjugado irracional entero p' y el par de raíces reales puede ser de solo dos formas:

Caso 1. (p=a+√D, p'=a-√D) o Caso 2. ($p=\frac{a+\sqrt{D}}{2}$, $p'=\frac{a-\sqrt{D}}{2}$).

Ejemplos de irracionales enteros p son el número de oro $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y el número de bronce $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ en el segundo caso, mientras que el número de plata 1+√2 y el número de cobre 2+√5 son ejemplos del primer caso. El número plástico *pl* es un ejemplo de irracional cúbico y sus dos conjugados algebraicos son los respectivos complejos conjugados uno del otro como ocurre con todas las raíces complejas de polinomios con coeficientes reales. Se conoce que *pl* es el mínimo número de Pisot-Vijayaraghavan.

Es fácil argumentar la propiedad de aproximación de enteros mediante las potencias enteras de un número de Pisot p^n que son también números de Pisot. Como todos sus conjugados tienen módulo menor que la unidad al elevarlos a la potencia n-ésima se hacen cada vez más y más pequeños. Además, la suma de todas las potencias de las raíces del polinomio mínimo asociado es un entero, por tanto, se acercan a un determinado número entero y con velocidad exponencial.

Los estudiantes secundarios pueden muy bien apreciar el atractivo computacional de esta propiedad y en particular pueden comprobarla tomando las potencias de los números metálicos o plásticos. Podemos observar mejor esta propiedad al hacer una tabla:

Tabla 1
Parte fraccionaria de algunas potencias del número de oro

	Valor de $\{\phi^n\}$
10	0,991 869 …
11	0.005 025…
20	0,999 953…
21	0,003 614…
30	0,999 999…

31	0,000 000…

Se observa en la Tabla 1 que la parte fraccionaria de las potencias impares tiende a cero y que la parte fraccionaria de las potencias pares tiende a uno, por tanto, se subraya que estas potencias se aproximan cada vez más y mejor a números enteros. Algo similar ocurre con todos los números irracionales enteros de P-V como se puede argumentar refiriéndose a las *identidades de Newton* (que fueron usadas 40 años antes que Newton por el francés Albert Girard).

Una vez que los irracionales enteros se convirtieron en una herramienta fundamental y se le encontraron disímiles aplicaciones, la comunidad matemática se interesó por su estudio sistemático, sobre todo usando técnicas computacionales (un texto atractivo y actualizado sobre el uso de herramientas computacionales es el de Borwein, 2002, cuyo capítulo 3 se dedica a los números de Pisot) ¿Pero qué les sucede a muchos maestros de nivel secundario que los discriminan y prefieren etiquetarlos como "dificiles", solo porque son *irracionales*? ¿Por qué los profesores de Álgebra Superior en sus cursos sobre polinomios no introducen los polinomios de Pisot asociados a los irracionales enteros de Pisot? Sin embargo, ¿no creen ustedes que cuándo se conoce bien su origen y desarrollo lógico-histórico, así como algunas de sus aplicaciones más recientes, nos damos cuenta que su fertilidad nos puede ayudar en la elevación de la cultura matemática de nuestros alumnos y además darles una *formación matemática útil*?

Referencias y bibliografía

Arnold, V.I. (1990) *Huygens and Barrow, Newton and Hooke: Pioneers in mathematical analysis and catastrophe theory from evolvents to quasicrystals*, Eric J. F. Primrose translator, Birkhäuser Verlag.

Bertin, M. J. et al. (1992) *Pisot and Salem Numbers*. Basel. Springer Verlag.

Borwein, P. (2002). *Computational Excursions in Analysis and Number Theory*. CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag. Cap. 3.

Dawson, J. W. (2015). *Why Prove It Again? Alternative Proofs in Mathematical Practice*. Dordrecht: Birkhauser.

Grabiner, J. V. (2012) Why proof? A Historian's Perspective. En Hanna & Villiers. *Proof and Proving in Mathematics Education*. (pp. 147-167). Dordrecht: Springer.

Hanna, G. & Villiers, M. de (Eds.) (2012) *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. Dordrecht: Springer.

Hardy, G. H. & Wright, E. M. (1938) *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press. En su 70 aniversario apareció una 6ta. ed. complementada por Andrew Wiles et al.

Sánchez Fernández, C. (2018) ¿Probar o argumentar? ¿Vencer o convencer? Reflexiones sobre las prácticas docentes. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, año 13, n°17, 17-34.

Sánchez Fernández, C. & González Ricardo, L. G. (2015) *Dedekind. El arquitecto de los números*. Madrid. Ed. Nivola.

Sánchez Fernández, C. & Valdés Castro, C. (2016). Problematización histórica de temas matemáticos fértiles. UNIÓN. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n° 46, 09-32.

Spinadel, V. W. de & Buitrago, A. R. (2009) Towards van der Laan's Plastic Number in the Plane. *Journal for Geometry and Graphics*. Vol. 13, N2, 163-175.

Undergraduate teaching and learning of mathematics with open source textbooks: Uso de textos universitarios de matemáticas

Vilma **Mesa**
School of Education, University of Michigan
Ann Arbor, Michigan, USA
vmesa@umich.edu

Resumen

In the Undergraduate Teaching and Learning in Mathematics with Open Software and Textbooks project we study the use of open source computational resources in the teaching and learning of mathematics at undergraduate level (Beezer et al., 2018). The project gathers (a) real-time, individualized viewing data from three dynamic undergraduate textbooks for calculus, linear algebra, and abstract algebra; (b) ongoing surveys of users' descriptions of the textbook use; (c) users' questionnaires (beliefs and attitudes towards mathematics, technology, teaching, and learning); and (d) student performance (tests of knowledge and grades). The textbooks have been enhanced with WeBWorK, Geogebra, and interactive Reading Questions for which instructors can see the responses in real time, and computational cells. In this article I highlight features of the textbooks and the theoretical and methodological approaches to answer two questions: How do students and instructors use textbooks? and How can we develop textbooks that will improve teaching and learning?

Palabras clave: open-source textbooks, textbook use, data analytics, calculus, linear algebra, abstract algebra

Within the array of resources for teaching and learning, the textbook continues to be the most prevalent one for instructors and students. Textbook formats have been changing from paper to digital, open source formats, including sophisticated tools such as computing cells, annotation tools, and powerful search engines, easing access at relatively low cost. Importantly, open source textbooks never expire or go out of print and can be distributed at no cost to students, making them practically fully accessible. The study we report here is part of a large U.S. funded project that seeks to describe how instructors and students use two open-source, technologically enhanced textbooks: Active Calculus (Boelkins, 2018), Linear Algebra (Beezer, 2017), and Abstract Algebra (Judson, 2017). These textbooks have been created in a markup language called PreTexT that allows for the textbooks to be viewed in any device and in any platform.

We use Rezat and Strässer's (2012) didactical tetrahedron to investigate how resources support instruction (Cohen, Raudenbush, & Ball, 2003), which is depicted in the base of the tetrahedron Figure 1)

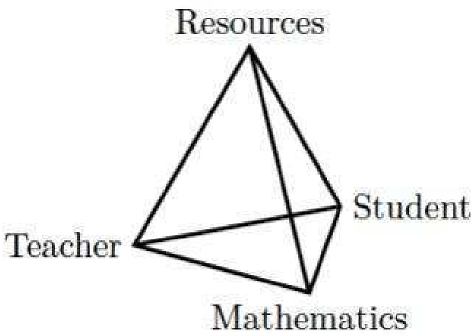


Figure 1. Resources can mediate instruction; the didactical tetrahedron (Rezat & Strässer, 2012, p. 241)

We follow Gueudet and Trouche (2009) in their definition of documents: the combination of a set of resources plus the schemes of utilization. Resources are defined as the collection instruments gathered for a particular purpose (e.g., textbook, past lecture notes, syllabi). Schemes of utilization include the processes that users engage in as they use the resources. These schemes have three distinct components, a material component (how the physical textbook or software is manipulated), a mathematical component (e.g., how the mathematical definitions are changed from canonical definitions), and the didactical component (e.g., how specific features are used). We seek to describe two documentation processes, *instrumentation*, that considers the influences on the user of the set of available resources, and *instrumentalization*, how the users change the resources as they use them (see *Figure 2*).

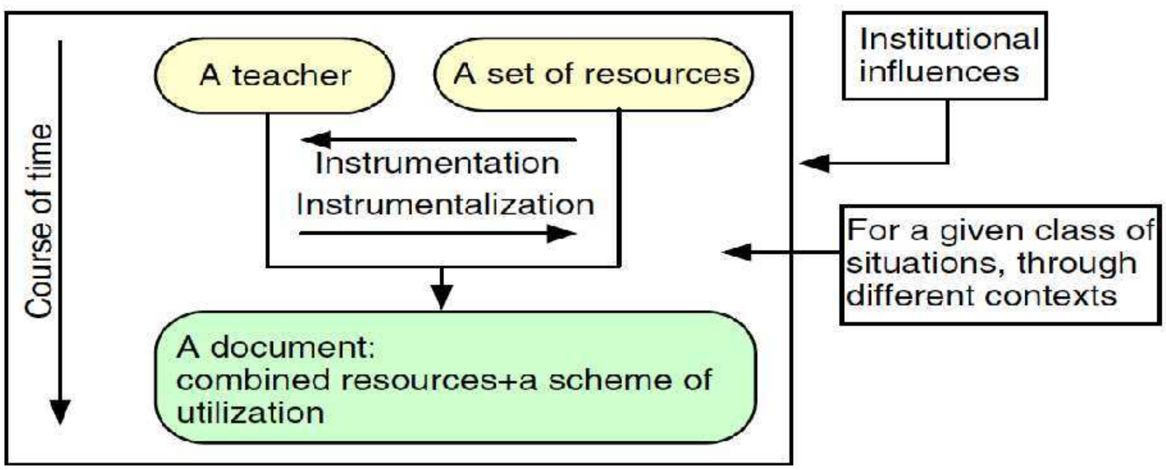


Figure 2: The documentational approach (Gueudet and Trouche 2009).

We do these by attending to two areas of instructors' work, lesson planning and its enactment seeking to identify operational invariants, instructors' beliefs that shape the design and use of resources (e.g., beliefs about ways with which students better understand definitions).

Methods

We use a mixed method design to gather use data from students and instructors as they engage with the textbooks (see Figure *3*).

	Beginning of term	2	4	6	8	10	12	14 End of term
Teacher surveys	X							
Teacher logs		X	X	X	X	X	X	
Course syllabi	X							
Computer-generated data of teacher and student textbook viewing								
Student logs		X	X	X	X	X	X	
Student survey					X			
Student tests	X							X

Figure 3. Data collection over a full term.

Instructors and students fill out surveys at different points in time to describe their beliefs and attitudes towards mathematics and technology. We collect tests of students' knowledge at the beginning and at the end of the semester to gather information about their knowledge growth. In addition we collect student and instructor logs (online surveys with four to seven questions about the use of the textbook during the past two weeks). In addition we collect computer generated viewing data (See *Figure 4*) which can be navigated at the user level (see *Figure 5*), time spent and number of clicks done on each textbook section and element (see *Figure 6*).

To analyze the data we use ongoing natural language processing (Blei, Ng, & Jordan, 2003) to gather themes from all the student responses to logs. Instructors' responses are analyzed manually, to identify the schemes of use of their textbooks. We aggregate across semesters to identify recurring themes and triangulate the log and viewing data with the time data to corroborate themes and patterns of viewing.

Results

I report briefly on findings from (1) the analysis of bi-weekly log data from 102 students from four instructors in four different states who were using a dynamic linear algebra textbook (Beezer, 2017) in the Spring semester of 2018. The textbook includes common linear algebra chapters (e.g., systems of linear equations, matrices, vector spaces, etc.) and (2) the various documents that instructors and students created as they used the textbooks.

Analysis of bi-weekly log data

The analysis of the viewing data revealed, unsurprisingly, that viewing tended to occur during the days when the classes were offered (mostly during class sessions), close to exams days, or when homework was due. The students mainly used solutions of exercises—in 17,405 viewings, 81% of the viewing time was for solutions of exercises, 15% for examples, and 5% for all the other elements. In the log responses students reported that they checked the textbook the day before class or the last day of their break; they also used it to study for the upcoming class, or when they were stuck, missed class, or had not understood their instructor's explanation. Students reported using mainly problems, exercises, and examples as they were preparing for class. When asked about their use of theorems, definitions, and examples, students said those were mainly used when producing notes for later use because they wanted to make sure they were connecting ideas and knew the basic definitions.

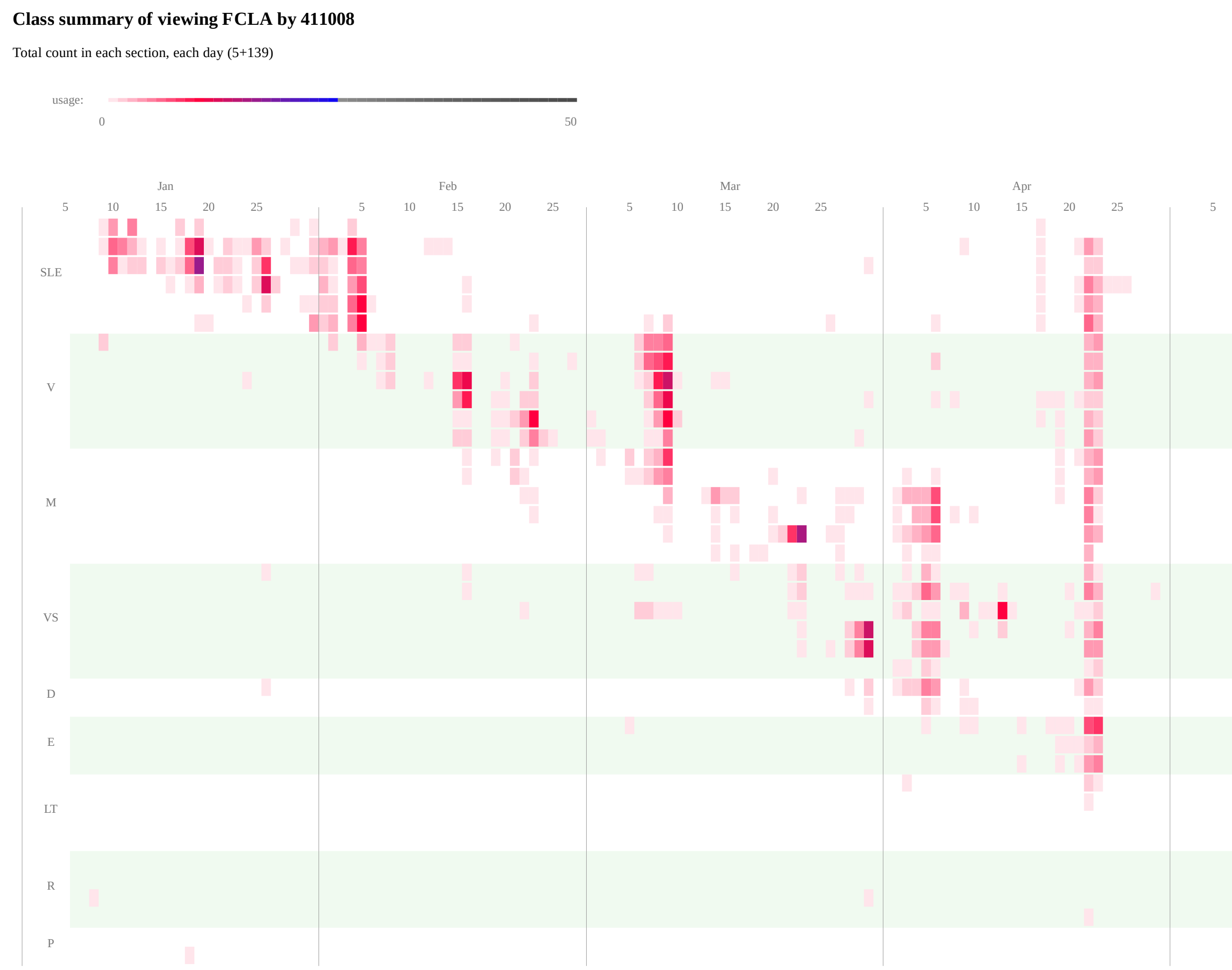


Figure 4. Viewing data for a course using the linear algebra textbook.

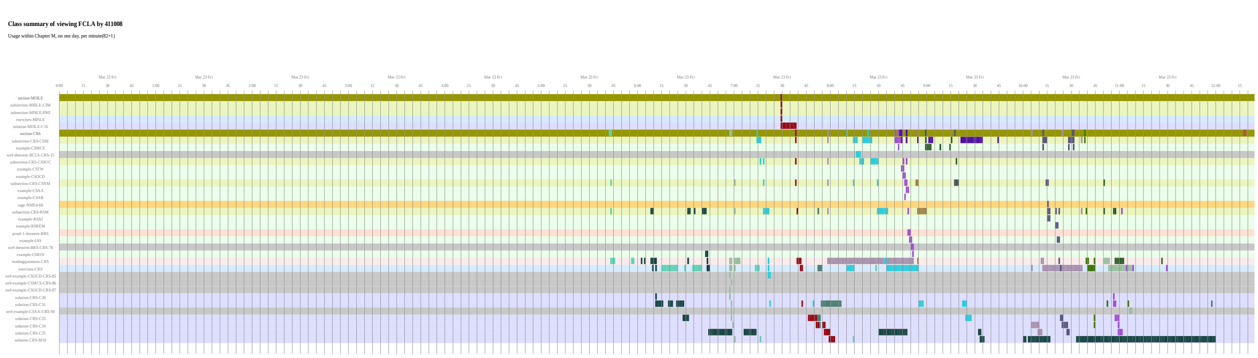


Figure 5. Viewing data at the individual level for a course using the linear algebra textbook.

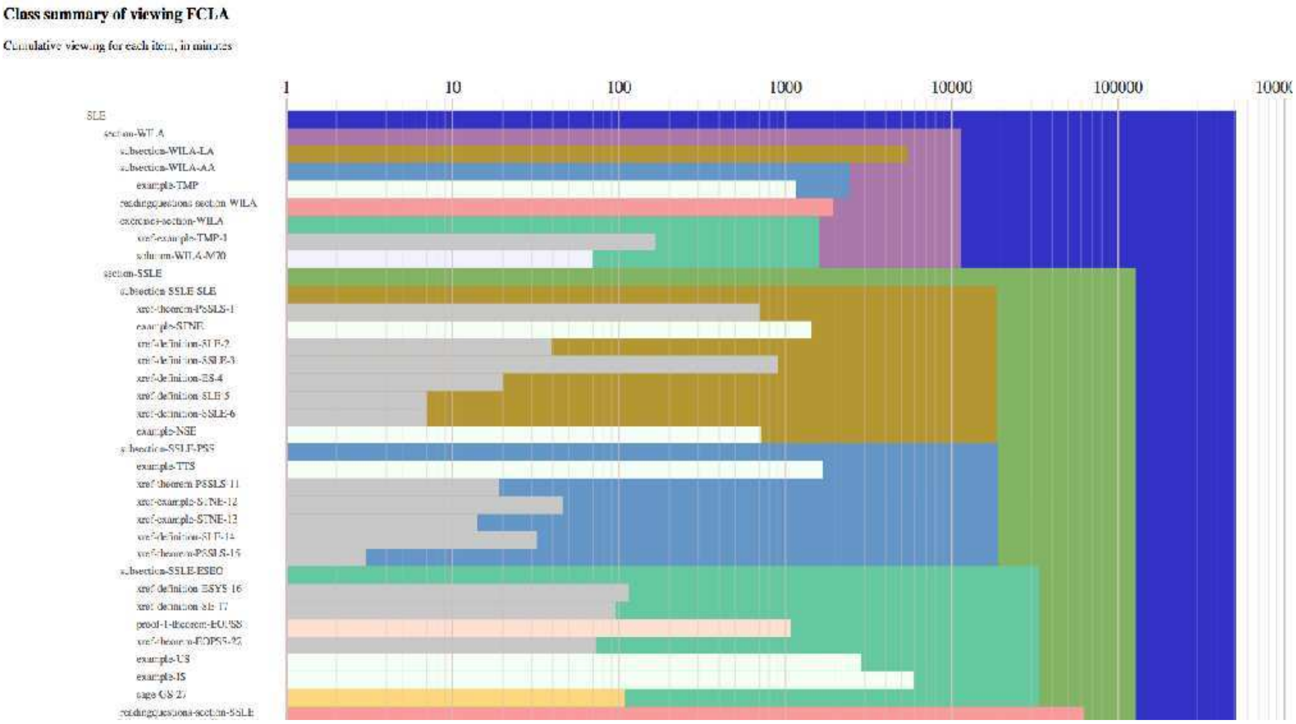


Figure 6. Data collection over a full term.

We found six themes in the analysis of student responses to their viewing of the linear algebra textbook (n = 120). The students indicated:

- Theme 1: viewing the textbook to study the material (58%); in addition, they mentioned some ways in which they do so. Students said that they:
- Theme 2: Start viewing examples (skipping text); then attempt the examples; and if need be, view the text to clarify ideas (17%).
- Theme 3: Start viewing homework; if the solution is wrong, read solution in detail to understand what problems they had (10%)
- Theme 4: Viewing to read word for word (8%)
- Theme 5: Viewing to cross-reference with class work (5%)
- Theme 6: Viewing formulas and definitions and keep track on personal document (3%)

Here are some illustrative examples:

- “I normally spend a couple of hours studying the book, I don’t have a set schedule or timetable for my studying. I also use my textbook to review and touch up on things I haven't looked at in a while.” (Theme 1)
- “Feb 19 Mon, Chapter M 6-9 PM: I was looking over example problems to help me prepare for my quiz, and I looked at definitions and theorems to help explain notation and solutions.” (Theme 2)

Analysis of documents

Instructors created lecture notes, syllabi, personal notes, and assessments, all with the goal of facilitating their teaching of the course. Students created class notes, homework documents or solutions, and textbook notes in order to improve their understanding, for practice, and reminders or memorization. Both students and instructors used many other resources. In terms of the instructors, they relied on colleagues, past notes, notes from when they were students, other textbooks, Wolfram alpha and other mathematical programs such as Sage, Maple or Mathematica, the textbook authors, and programming software, such as Python. Students mentioning working with classmates, the Internet, Google, YouTube, Chegg, Khan Academy, class lecture videos, other printed and HTML textbooks, family members, and their instructors. Students did not use the open-source feature and infrequently used computational cells.

Figure 7 summarizes the instrumentation and instrumentalization processes for the document lecture notes that we have found. They range from the less to more dynamic uses; the figure also highlights how instructors made use of their textbook.

Less to More Dynamic

Lecture Notes	Connection to the Textbook
Handwritten notes in paper (from points of reference to full notes)	References to the textbook
Online videos using the textbook	• Whole parts of the textbook • Practice problems from the textbook in accompanying problem sheets
Beamer/Power Point presentations	Hyperlinks to the textbook
Sage worksheets	• Hyperlinks to the textbook • Capabilities for the production of graphs and calculations of the textbook

Figure 7. Variation in use of the document *Lecture notes*, from less to more dynamic, and connections to the textbooks.

During classroom, some instructors copied their notes on the blackboard, whereas some distribute them ahead of time to the students, either as PowerPoints that they could annotate by printing them, or as Sage worksheets that students could manipulate in real time. The rules of actions and the reasons students and instructors had to use various documents are given in Figure 8.

	Rules of Action	When/Why
Students	"Read"	Study for examinations/class (study notes)
	Look for definitions	Clarify meaning to work out homework (homework solution)
	Study examples/proofs	Work out the homework (homework solution)
Instructor	Identify major course topics	Create syllabus before the term starts
	Identify theorems and definitions	Create lecture notes to be consistent
	Identify examples	Clarify definitions/theorems in class (lecture notes) Visualize definitions (lecture notes)

Figure 8. Rules of action and reasons for using documents by students and instructors.

Discussion

In general, the students and instructors seemed reluctant to take full advantage of novel features (such as the programming cells) or the reading questions. We speculated that by itself, the design of the textbooks is insufficient for facilitating the adoption of different ways of using these textbooks in teaching and learning. We noticed that students did not use features that were not required by their instructors and that they used those that their instructors said were important to use (e.g., definitions, theorems, examples, proofs).

Instructors might need training about ways to take advantage of the open nature of the textbooks. Some instructors, for example, only associated open source with the free access of the textbooks. We are planning gatherings and conversations with designers, authors, and instructors, so that the process of creating the textbooks becomes more transparent. Textbook production is expensive, and thus, research that documents how open access textbooks can be made widely available is important. Yet, without knowing how to best take advantage of the new technologies, we might not realize their potential within mathematics classrooms.

Acknowledgment

Funding for this work has been provided by the National Science Foundation (IUSE 1624634). Any opinions, findings, and conclusions or recommendations expressed in this material are those of the author(s) and do not necessarily reflect the views of the National Science Foundation. Thanks to David Farmer and the American Institute of Mathematics for their research support.

References

Beezer, R. (2017). *First course in linear algebra*. Gig Harbour, WA: Congruent Press. Available at http://linear.pugetsound.edu. HTML available at http://linear.ups.edu/html/fcla.html.

Beezer, R., Judson, T., Farmer, D., Morrison, K., Mesa, V., & Lynds, S. (2018). Undergraduate Teaching and learning in Mathematics with Open Software and Textbooks (UTMOST): National Science Foundation (DUE 1821706,1821329,1821114,1821509).

Blei, D. M., Ng, A. Y., & Jordan, M. I. (2003). Latent Dirichlet allocation. *Journal of machine Learning research*, *3*(Jan), 993-1022.

Boelkins, M. (2018). *Active Calculus*. Available at https://activecalculus.org/single/: CreateSpace Independent Publishing Platform.

Cohen, D. K., Raudenbush, S. W., & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *25*, 119-142.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71*, 199-218.

Judson, T. (2017). *Abstract algebra: Theory and applications*. Available at http://abstract.pugetsound.edu. HTML available at http://abstract.ups.edu/aata/. Orthogonal Publishing L3C.

Rezat, S., & Strässer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: Artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM Mathematics Education, 44*, 641-651. doi:10.1007/s11858-012-0448-4

Weinberg, A., Wiesner, E., Benesh, B., & Boester, T. (2012). Undergraduate students' self-reported use of mathematics textbooks. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 22*(2), 152-175. doi:10.1080/10511970.2010.509336

The Big Ideas in the statistics education of our students: Which ones are the biggest?

J. Michael **Shaughnessy**
Portland State University
United States of America
mikesh@pdx.edu

Summary

Five decades of research and curriculum development on the teaching and learning of statistics have produced many recommendations from both researchers and national organizations for the statistical education of our students as well as how statistics should be taught. Within the last ten years work by both statisticians and statistics educators has been focusing more on a collection of big ideas that are the most important concepts and processes to develop statistical thinking for our students, for our work force, and for the lifelong statistical literacy of our citizens. In this paper I look back at the roots of big ideas in statistics education and then identify what I believe are the two most important overarching ideas that can orchestrate the statistical education of our students starting from the elementary years into tertiary. The paper includes research on student thinking about big ideas in statistics and recommendations for the future of teaching and research in statistics education.

Key Words: Statistics education, distribution, inference, variability, expectation, sampling, statistical investigation processes.

Recommendations for the Big Ideas in Statistics Education: A Retrospective

Prior to the 1960's there was almost no statistics included in the school curricula of the nations of the world. In their historical review What is Statistics Education? Zeiffler, Garfield, and Fry (2018) point to recommendations starting in the 1960's in which several curriculum projects in the UK recommended the inclusion of probability and statistics in schools for students ages 11 – 16. In 1967 the American Statistical Association (ASA) and the National Council of Teachers of Mathematics created the Joint Committee on the Curriculum in Statistics and Probability in the U.S. and Canada. The Joint Committee began to spearhead the publishing of materials for teaching statistics in the early 1970's such as *Statistics: A Guide to the Unknown* (Tanur, Mosteller, Kruskal, Link, Pieters, & Rising, 1972), and *Statistics by Example* (Mosteller, Kruskal, Link, Pieters, & Rising, 1973). The Joint Committee has continued to sponsor and promote statistics education and the professional development of teachers to this day with curriculum materials such as *The Quantitative Literacy Project* (Ganadesikan et. al., 1995) and the recommendations for the teaching and learning of statistics in the GAISE documents, *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* (Franklin, Kader, Mewborne, Moreno, Peck, Perry, & Schaeffer, 2007).

Early attempts to include statistics in the education of school age students prompted research into the teaching and learning of statistics which began in the1970's (particularly in the UK, Germany, Israel, and the U.S. For details see Shaughnessy, (1992)). The growing international interest in teaching and research in statistics education eventually gave birth to the *First International Conference on Teaching Statistics* in Sheffield, England in 1982, ICOTS I. Since that time an ICOTS has been convened every four years up to the most recent ICOTS X which was held in Hiroshima in 2018. When the next ICOTS is held in Rosario, Argentina in 2022, an ICOTS will have been held on every continent, and in 11 different countries.

NCTM Standards for Statistics Education of K-12 Students

Over the fifty years since the birth of statistics education as a discipline both the research and practitioner communities have been continually honing in on the most important ideas in statistics for our students and citizens to know and be aware of. Starting with its *Agenda for Action* document (NCTM, 1980), and subsequently with its *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989), the National Council of Teachers of Mathematics began to advocate for specific recommendations for teaching statistics to Grades K–12 in the United States and Canada. The 1989 standards were NCTM's first foray into establishing goals for school mathematics. With regard to statistics, NCTM included the following recommendations:

For grades K – 4:

- Formulate and solve problems that involve collecting, describing and analyzing data
- Construct, read and interpret displays of data
- Explore the concepts of chance

For grades 5—8:

- Systematically collect, organize and describe data
- Construct, read and interpret tables, charts, and graphs
- Make inferences and convincing arguments, and evaluate the arguments of others based on data analysis
- Develop an appreciation for statistical methods as powerful means for decision making

For grades 9 – 12

- Construct and draw inferences from charts, tables and graphs that summarize data from real world situations
- Use curve fitting to predict data
- Understand and apply measures of central tendency, variability, and correlation
- Understand sampling and recognize its role in statistical claims
- Design a statistical experiment to study a problem
- Analyze the effects of data transformations on measure of center and variability
- Test hypotheses using appropriate statistics

The 1989 standards started with a data analysis perspective in grades K–8, but took quite a jump in depth and abstraction in grades 9–12 with statistical design, mathematical transformations on parameters, and traditional hypothesis testing. Many introductory college instructors would probably be quite happy if their students mastered these original NCTM grade 9–12 statistics standards. These 1989 standards are predominantly a list of content, concepts and procedures that students should know and be able to do. However, the process of making inferences is included for grades 5–12. It will be interesting to look back at these 1989 NCTM standards from the point of view of later recommendations about the big ideas in statistics.

Ten years later NCTM produced its second round of standards recommendations in *Principles and Standards for School Mathematics* (*PSSM*), (NCTM, 2000). This time NCTM's standards for statistics were organized under four broad big ideas at grades K–2, 3–5, 6–8, and 9–12, with additional lists that further explicate each of these four expectations at each grade level. *PSSM* recommended these that instructional programs from prekindergarten through grade 12 should enable all students to do the following in Data Analysis and Probability:

- Formulate questions that can be addressed with data and collect, organize and display relevant data to answer them
- Select and use appropriate statistical methods to analyze data
- Develop and evaluate inferences and predictions based on data
- Understand and apply basic concepts of probability

This time NCTM organized the big ideas in statistics education more from a statistical processes point of view than just a list of concepts and statistics content as in 1989. While the organizational headings remain the same throughout all for grade bands, the sophistication in addressing the big ideas of course grows up through the later grades. For example, NCTM presents this trajectory across the grade bands for the process of developing and evaluating inferences and predictions based on data:

PreK–2. Discuss events related to students' experiences as likely or unlikely

Grades 3–5. Propose and justify conclusions and predictions based on data and design studies to further investigate conclusions or predictions

Grades 6–8. Use observations about differences between two of more samples to make conjectures about the populations from which the samples were taken.
Make conjectures about possible relationships between two characteristics of a sample on the basis of scatterplots and approximate lines of fit.
Use conjectures to formulate new qu3estions and plane new studies to answer them.

Grades 9–12. Use simulations to explore the variability of sample statistics from a known population and to construct sampling distributions.
Understand how sample statistics reflect the values of population parameters and use sampling distributions as the basis of informal inference.
Evaluate published reports that are based on data by examining the design of the study, the appropriateness of the data analysis, and the validity of the conclusions.
Understand how basic statistical techniques are used to monitor process characteristics in the workplace.

Notable in the *PSSM* standards when compared to the earlier standards is the growing emphasis and detail on making and testing data-based conjectures and the introduction of the term "distribution", especially in regard to creating sampling distributions via simulations and using them to make inferences about populations.

The Central Role of Variability—Recommendations from the American Statistical Association

During the 1980's and 1990's much of the statistics education in school curricula concentrated on measures of center and mostly neglected the important role that variability plays in statistics. This was particularly true in elementary school mathematics curricula that introduced statistics to students by calculating mode, median, and mean. In his position paper on statistics content and pedagogy, David Moore (1997) a president of the ASA emphasized the crucial role that variability plays in statistics education, without variability statistics would not even exist. The writings of Moore and others sounded a clarion call for rethinking what the big ideas in statistics education really were. Subsequently statistics education researchers began to concentrate more on investigating students reasoning about variability. (See for example Shaughnessy, Watson, Moritz & Reading, 1999; Melitou, 2002; Toruk & Watson, 2000; Watson, Kelly, Callingham & Shaughnessy, 2003; Watson & Kelly, 2004; Reading & Shaughnessy, 2004). Thus, when the GAISE document (*Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education)* was published the American Statistical Association (Franklin et al, 2007), it appropriately highlighted variability as a central organizing idea of statistics education. The GAISE recommendations focus on teaching statistics through the cycle of four components of the statistical investigation process while highlighting the important role that variability plays in each step of the process.

I. Identify a Statistical Question—*Anticipate Variability,*
formulate questions that can be answered with data

II. Collect Data—*Acknowledge Variability,*
Design for differences and plan to collect appropriate data

III. Analyze Data—*Account for Variability by Using Distributions*
--select appropriate graphical and numerical methods to analyze the data

IV. Interpret Results—*Allow for Variability as you look beyond the data*
--interpret the analysis and relate it back to the original question

Figure 1. The statistical investigation process.

The GAISE for statistics education chose to focus on statistical processes rather than a list of specific statistical concepts and procedures as the organizing principles for teaching statistics in K–12. GAISE describes three levels (A, B, and C) of sophistication and growth for each of these four components in the statistical investigation cycle. The three levels roughly correspond to recommendations for grades K–4, 5–8 and 9–12 respectively.

Recommendations for the big ideas from research on the teaching and learning of statistics

Along with the increased attention to statistics education in schools around the world and the accompanying recommendations for pursuing the big ideas in statistics the research literature in statistics education has grown exponentially from its initial roots in the 1970's. There are opportunities to present research in statistics education at international conference such as the ICOTS conferences and *Psychology and Mathematics Education* (*PME),* national conferences such as the *US Conference on Teaching Statistics (USCOTS),* the NCTM *Research Conference,* the *Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA),* and *Conferencia*

Interamericana Educacíon Matematica CIAEM, as well as many other mathematics education conferences throughout the world. Statistics education research has several dedicated journals for publications including the *Statistics Education Research Journal (SERJ)* and the *Journal of Statistics Education* (JSE). *SERJ* is published by the *International Association of Statistics Education (IASE)*, a branch of the *International Statistics Institute (ISI), JSE* is published by the ASA. In addition, journals that are predominantly in mathematics education such as *The Journal of Research in Mathematics Education (JRME), Mathematical Thinking and Learning (MTL),* and *Educational Studies in Mathematics (ESM)* as well as many other international journals have routinely included articles on research in statistics education. Research in statistics education has been reviewed and synthesized over the years and numerous recommendations for the teaching and learning of statistics have been cited in those reviews (Shaughnessy; 1992, Shaughnessy, Garfield, and Greer, 1996; Ben-Zvi and Garfield, 2004; Shaughnessy, 2007; Garfield & Ben Zvi, 2008; Langrall, Makar, Nilsson, & Shaughnessy, 2017; Biehler, Frischmeier, Reading & Shaughnessy, 2018). Among the Big Ideas in statistics for recommended for practitioners to concentrate on are those from Garfield & Ben-Zvi (2008) and Watson, Fitzallen & Carter (2013). In their book *Developing Students' Statistical Reasoning* Garfield and Ben-Zvi argue that the teaching of statistics at all levels should concentrate on nine central concepts:

- Data
- Distribution
- Variability
- Center
- Statistical Models
- Randomness
- Co-variation
- Sampling
- Inference

Many of the groups that made recommendations about the big ideas in statistics prior to Garfield & Ben- Zvi concentrated on important statistical processes such as posing statistical questions, gathering data, and analyzing data. Garfield & Ben-Zvi returned to an emphasis on the most important statistical concepts for students and teachers in statistics education to address. It is clear that any lists for the big ideas in statistics education must consider both statistical processes and statistical concepts. These two perspectives on organizing what is most important in statistics interact with and support one another. Watson et al (2013) identified five big ideas in statistics that they modeled as the vertices of a pentagon with edges connecting each pair of vertices (resulting in a pentagram). Their five Big Ideas for statistics education are variation, expectation, distribution, randomness, and inference. To the notion of a distribution Watson et al (2013) added the importance of making inferences from distributions of data and from comparisons across several distributions of data. They thus tied distributions to the realm of hypothesis testing, starting at the level of informal inference, and anchored in expectation and variation in the data. Is a distribution of data predominantly due to chance alone, or is something else accounting for the aspects of the distribution such as the shape, the variability, or clustering of the data? It is interesting to compare and contrast Watson et al.'s approach to big ideas with that of Garfield & Ben-Zvi. There is agreement between these sets of authors that variation, distribution, randomness and inference are among the big ideas in statistics. Watson et al use the term expectation, while Garfield and Ben-Zvi prefer to refer to use center. Although the word center may evoke notions of procedures like calculating means and medians, I suspect that Garfield & Ben-Zvi were thinking of center in a wider sense, similar to the term expectation used by Watson. Watson's model of the big ideas in statistics is informed by her research on the tension that students experience between variation and expectation when they make predictions or analyze data sets (Watson, 2009).

NCTM's Essential Understandings recommendations for teachers of statistics

As the implementation of more statistics has grown in school mathematics programs, many of our mathematics teachers have found themselves in the position of having to teach statistics concepts when they have little or no preparation in statistics themselves. In order to provide some professional development and assist middle and secondary school mathematics teachers in adding statistics to their teaching repertoire the National Council of Teachers of Mathematics included statistics in their series on the *Essential Understandings* in school mathematics. (The *Essential Understandings* books cover algebra, geometry, number and operation, proportional reasoning, and mathematical reasoning as well as statistics.) Both *Essential Understanding of Statistics Grades 6–8* (Kader & Jacobbe, 2013) and *Essential Understanding of Statistics Grade 9–12* (Peck, Gould, & Miller, 2013) identify the big ideas in statistics that all teachers should know and be able to teach at their respective grade levels. Both books include copious sample tasks for teachers to explore the big ideas themselves, and to use in teaching their students. In the grade 6–8 book, Kader & Jacobbe identify four big ideas for teaching statistics to middle school students:

- Variability in Data and Distributions
- Comparing Distributions
- Associations between Two Variables
- Samples and Populations

The concept of a distribution plays a prominent role in all four of these recommendations if one considers that bivariate distributions of data form the basis for exploring associations between variables. Peck et al describe a collection of statistical processes that form the foundation of the big ideas in the grade 9–12 *Essential Understandings of Statistics* book. They are especially interested in strengthening our teachers' knowledge and comfort with these ideas:

1. Data consists of structure and variability
2. Distributions describe variability
3. Hypothesis tests answer the question, "Do I think this could have happened by chance?"
4. The way data are collected matters.
5. Evaluating an estimator involves considering bias, precision, and sampling method.

For Peck et al these five organizational big ideas are interrelated. Statistical models describe and account for variability in both populations and in the values of sample statistics depicted in sampling distributions. Hypothesis testing is the basis for making decisions under uncertainty based on the limitations of the data provided. The data upon which statistical decisions are made are only as good as the care with which they are produced, so that attention to sources of bias and precision in estimating parameters such as measures of center and variation is critical. Peck et al describe finer grain detail for the essential understandings within each of these five big ideas and provide examples for teachers to consider for their own understanding, as well as for use with their students.

The two BIGGEST ideas in statistics education

Suppose that you were asked to pick two ideas in statistics that you thought were the most important ones for our students to learn and our citizens to be competent in understanding. What would be your choice? What are your two BIGGEST ideas in statistics education? The most important goal for statistics education is to enable our students and citizens to understand that making decisions under conditions of uncertainty is based upon samples of data. We rarely have access to information about the entire population under consideration when making statistical decisions or estimating the likelihood that some event occurred by chance alone. Statistics does not appeal to mathematical proof based on deterministic reasoning anchored in axiomatics. Statistics involves making decisions that we perceive are most likely to be true based on data that is generated under conditions of uncertainty. Given that the pre-eminent goal of statistics education is to understand decision making under uncertainty, I claim that the two biggest ideas in statistics education are *distribution* and *inference* because these two ideas are the heart and soul of statistical decision making. I base this conclusion in part on the analysis above of the trajectory and development of the recommendations of various organizations and groups of researchers throughout the history of statistics education, but also on some more recent research in statistics education that gives added support to the claim that *distribution* and *inference* are the two biggest overarching ideas in statistics education.

Examples of research on students' reasoning about big ideas in statistics

Beginning in the 1990's researchers began to investigate students' understandings of big statistics concepts from a developmental perspective. Research on student understanding of concepts such as average and variability has found trajectories of student reasoning, levels of student understanding that become deeper over time. Furthermore, concepts such as expectation and variation are components of bigger ideas such as distribution and inference. Examples of some of these reasoning trajectories of big ideas in statistics from research are discussed below.

Expectation.

The term expectation encompasses research on measures of center such as mean, median, and mode as well as considerations of any expected clumping in the data, as many distributions of data have bimodal or even multimodal characteristics. Mokros & Russell (1995) discovered one of the first trajectories of students' understanding of average. Using interview tasks that involved "messy situations" from everyday familiar contexts with grades 4, 6, and 8 students Mokros & Russell identified five different ways that students thought about average: average as *mode* (mosts), average as *algorithm*, average *as reasonable*, average as *midpoint*, and average as *balance point*. Watson & Moritz (2000) interviewed about a hundred students grades 3, 5, & 7 over time and found their conceptions of average moved from telling idiosyncratic stories about average to thinking of average as 'mosts or middles', and eventually to average as representative of a data set. Reflecting upon the research on students' conceptions about expectation, Konold & Pollatsek (2002) proposed that students' thinking about the mean includes average as *typical value,* average as *fair share,* average as *data reducer,* and average as *signal amid noise.* It is clear from the research on students reasoning about expectation that students possess a rich collection of conceptions about centers which teachers can build upon. (For a more detailed discussion about research on students' conceptions of average, see for example Shaughnessy, 2007).

Variation.

Three developmental frameworks for students reasoning about variability are presented and compared by Langrall et al (2018, p. 494) in the NCTM *Compendium of Research in*

Mathematics Education. In his framework Ben-Zvi (2004) notices at first students just recognize variability across various data values. Later students use variability to compare groups, next they combine measures of spread and center to compare groups, and eventually they consider variability as a construct within and between distributions of data. Watson, Callingham, & Kelly (2007) describe a progression of student thinking that encompasses both expectation and variation. Students first acknowledge just one or the other, then recognize that both expectation and variation are present in data, later on students begin to see an interaction between centers and variability as they develop proportional reasoning. Reid & Reading (2008) investigate students' consideration of variation in data and describe a hierarchy of student reasoning ranging from no consideration of variation, to recognition of variation within a group, to recognition of variation between groups that leads to considering inference. In an analysis of the research on students' conceptions of variability, Shaughnessy (2007) outlined eight types of conceptions of variability that were identified in research including:

1. Variability in *particular values* in a data set
2. Variability as *change over time*
3. Variability as the *whole range* of a data set
4. Variability as the *likely range* of a sample
5. Variability as *distance from some fixed point*
6. Variability as *sum of residuals*
7. Variability as *covariation or association*
8. Variability as *distribution*

The first four of types of variability in this list involve an exploratory data analysis perspective, while the last four types refer primarily to ways to measure variability. The terms variability and variation are sometimes used almost interchangeably, however some authors (e.g., Reading and Shaughnessy, 2004) prefer to use the term variability as the tendency for a characteristic to change while the word variation refers to a measurement of a changing characteristic. Thus, the first four types above refer to variability, while the last four involve variation, some type of measurement of change. Research on type 4, variability as the *likely range of a sample*, led to further research on students' conceptions of sampling distributions. A closer look at some research tasks and student responses to those tasks may provide insight into why distribution is one of the two biggest ideas in statistics education.

100 candies, 20 yellow, 50 red, and 30 blue, are put in a jar and mixed together. A student pulls 10 candies from the mixture, counts the number of reds, and writes that number on the board. Then the student puts the candies back in the bowl and mixes them all up again. Four more students also draw a sample of 10 candies, and write their number of reds on the board. What numbers would you predict for the number of reds in each of those five samples of 10 candies? Write your predictions in the spaces below.

_________ _________ _________ _________ _________

Why do you think those would be the numbers of reds in the five samples?
Fig 2. The candy sampling task.

This task and variations of it were given to hundreds of students in grades 4, 5, 6, 9, & 12 in Australia, New Zealand, and the United States (Shaughnessy, Watson, Moritz, & Reading, 1999). The task was used to determine what students perceived as the *likely range* of values that would occur in a repeated sampling scenario. Student responses fell into clusters that were deemed *narrow, wide, high, low,* and *reasonable.* For example, some students said they'd expect the results to be 6, 7, 5, 8, 9 because 'there are a lot of red in the jar.' This is typical of a *high* response as all the sample predictions are above the expected value of 5 red. High responses were based on thinking about 'mosts', not about the proportion of reds in the mixture. In *low* responses like 3, 4 ,3, 5, 2 students felt that the other colors would overwhelm red, as there were two of them. Students who predicted *wide*, like 1, 5, 7, 10, 2, did so because 'anything can happen.' On the other hand, some students predicted results like 5, 5, 6, 5, 6, or even 5, 5, 5, 5, 5 because 'that's what is supposed to happen.' Such *narrow* predictions put too much weight on the theoretical probability of obtaining 5 red candies on any one pull, and neglected the possibility of variability in outcomes. Overall, some students attended to centers too much, some to variability too much, and some students did predict a *reasonable* range of sample outcomes around the center with predictions such as 3, 7, 5, 6, 4. Research on tasks such as the candy sampling task helped to spawn further research into students' conceptions about distributions, in particular their conceptions about sampling distributions. The candy sampling task also points to the tension that can arise between attending to expectation and attending to variability in data, especially when students are asked to make predictions for samples (Watson & Kelly, 2004).

Distribution.

Comparisons across several hypothesized developmental frameworks of the concept of distribution are provided in Langrall et al (2018, p. 494). In each of these developmental frameworks the researchers acknowledge that the idea of distribution in statistics encompasses the aspects of shape, variability, and expectation, and that integration of all of these aspects is required for students to be able to reason about and make inferences from distributions. Reading and Reid's framework (2006) for understanding distributions starts with students acknowledging one parameter of a distribution, then several parameters, then integrating centers and spreads when considering data aggregates, and finally to a second cycle of reasoning development which involves students' growth in making inferences from distributions. A framework for distributional thinking was proposed by Noll & Shaughnessy (2012) based on their research on students' conceptions of sampling distributions (See Figure 3). According to Noll & Shaughnessy, students' development of the concept of distribution involves the gradual integration of shape, centers, and spread. Students at first notice them as individual aspects of a distribution, then learn to make predictions for sampling distributions by relying on both expectation and variation. Students' reasoning progresses through four levels from *additive* to *proportional* and finally to *distributional* reasoning in the progression identified by Noll & Shaughnessy.

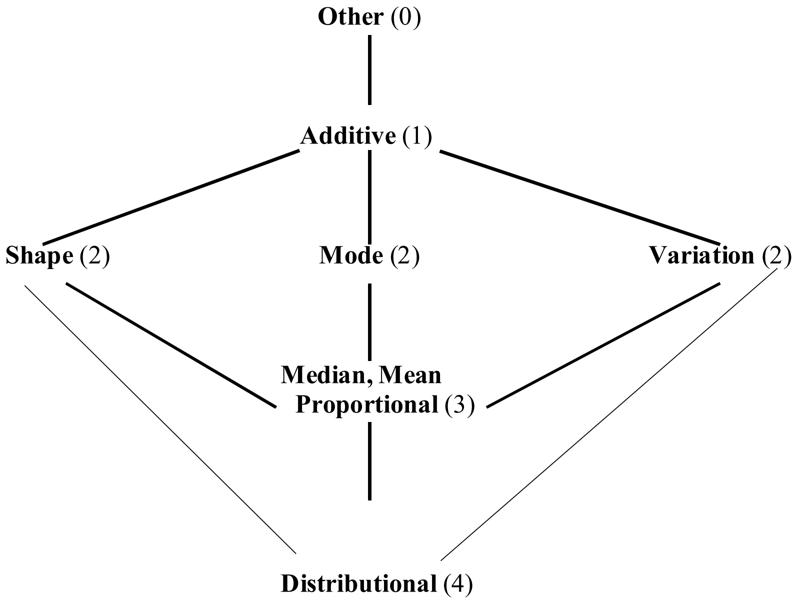


Figure 3. Lattice of student reasoning when making predictions about sampling distributions.

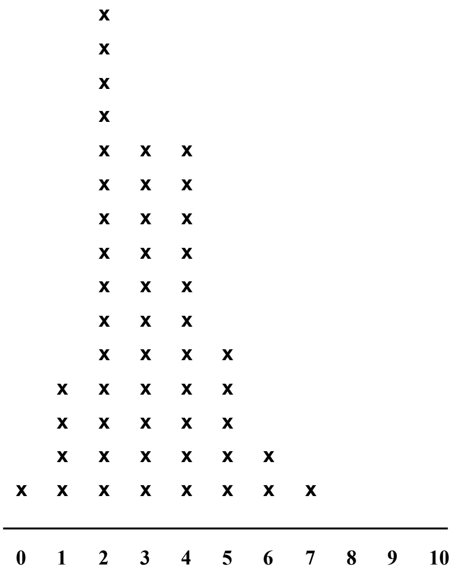
The lattice indicates the development of conceptions of expectation from 'more' to 'most' (mode) to 'means and medians' which involves proportional reasoning, and finally to reasoning about distributions which includes the coordination of aspects of shape, expectation, and variation. Student responses to tasks like the *Prediction Task* and the *Mystery Mixture* task led Noll & Shaughnessy to the development of this reasoning lattice. A version of each of these tasks is presented here.

Working in small groups, students in a class pull samples of 10 candies from a jar that has 1000 candies. They pull 50 samples of ten. The jar has 250 yellow and 750 red candies in it. Each time they put the sample back and remix the jar.
Consider the number of reds in each handful. Where would you expect 95% of the handfuls of ten candies to be?

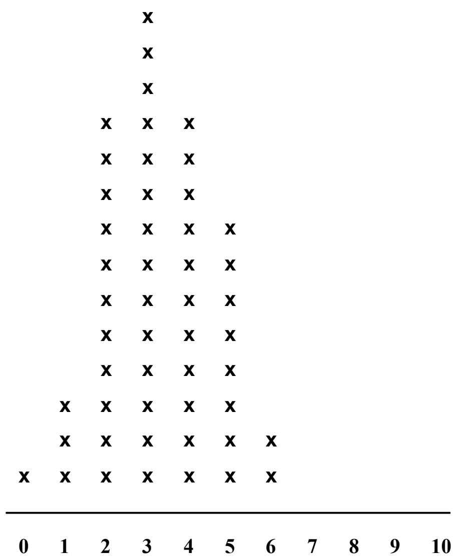
From __________ # reds   To _______________# reds (Fill in the blank spaces).
Why do you think that?
Complete the frequency chart below to show what you think the numbers of reds in 50 trial handfuls might look like. (Note: students were provided labeled graph paper).

Figure 4. The Prediction Task

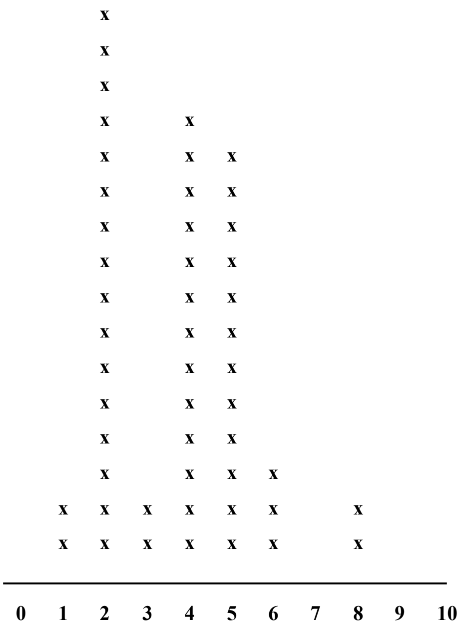
The four frequency graphs below all came from a class that is trying to estimate a mystery mixture of 1000 red and yellow candies in a large jar. They pulled 50 samples of size 10, recorded the number of reds in each sample, and then replaced and remixed each time.



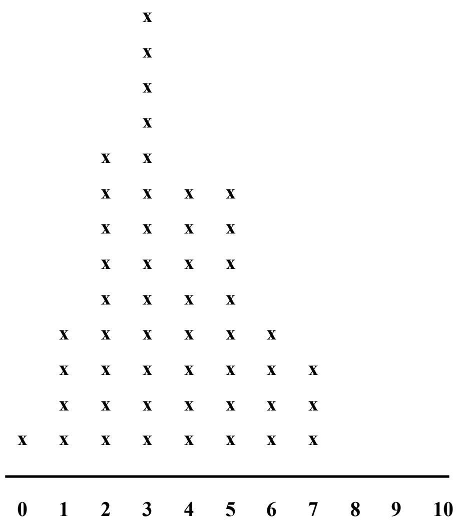
(Graph 1)



(Graph 2)



(Graph 3)



(Graph 4)

a) What do you think the mixture in the jar might be? b) Explain why you think this.

Figure 5. The Mystery Mixture Task

In the Prediction task students are given the proportions of colors in the parent population and then asked to predict what a sampling distribution for sample proportions will look like. Most students' responses fell into the prediction categories *wide, narrow, and reasonable* for both their predicted range for the # of red in handfuls, and in the graphs that they constructed for 50 sample proportions. In the Mystery mixture task students are provided with the results from multiple sampling distributions and asked to use this information to infer what the parent population is. Students who predicted 200-250 reds in the mystery mixture reasoned using a 'mosts' point of view, and were usually heavily influenced by the graphs of distributions 1 & 3 which have a mode of 2 reds in handfuls. Student who looked for 'balance points' of the graphs reasoned proportionally and tended to predict around 300 reds in the mixture. Still other students noticed that the graphs tended to be skewed to the right, they integrated shape as well as center and spread into their reasoning and inferred that the mixture likely had more than 300, perhaps even 350 - 400 reds in it. In both the Prediction task and the Mystery Mixture task students had opportunities either to focus solely on one of the aspects of the sampling distributions (shape, centers, variability) or to integrate them into their predictions and inferences.

Inference.

The Mystery Mixture task above is an example in which students are asked to make an inference beyond the data at hand, in this case beyond the given sampling distributions of a sample statistic. There is no formal hypothesis testing here, students are simply asked what they believe the composition of the parent population is and why they believe it. Researchers and curriculum developers now refer to this type of inference as 'informal inference'. Informal inference has its roots in exploratory data analysis, often in the exploration of data that have been produced from simulations. Students can estimate likelihoods from samples of data without resorting to a test statistic or working with a probability distribution. Cobb (2007) argued that introductory statistics courses should start with inference early on prior to any hypothesis testing that resorts to theoretical distributions. Since the logic of formal statistical inference has always been a difficult stumbling block for statistics students, educators have been experimenting with various approaches to the early introduction of inference that avoid some of the cognitive complexity and pitfalls in formal inference. Rossman (2008) promotes introducing simulations of randomization tests as a more transparent informal approach to statistical inference. Zeiffler, Garfield, Del Mas, & Reading, (2008) define informal statistical inference as students using their informal statistical knowledge about observed samples to make arguments to support inferences about unknown populations. Makar and Rubin (2018) point out that there is general agreement that the important characteristics of informal inference are: i) a claim is made that goes beyond the data at hand; ii) the data are used as evidence to support the claim; iii) the claim involves the articulation of uncertainty—estimated likelihoods or probabilities are involved; iv) decisions or inferences are based upon aggregates in the data, variability, or shape so decisions are based upon aspects of distributions of data; v) contextual knowledge plays a role in the analysis and inference integrated with the information in the sample of data. Makar and Rubin share examples from research with both elementary and middle grade students who reasoned about tasks and made informal inferences from data that they had collected. Inference is one of the two biggest ideas in statistics because students even at a very young age can begin to make inferences based on data that they have collected on a statistical question that they themselves posed. The statistical investigation cycle outlined in the GAISE document—pose a question, collect data, analyze the data, make conclusions—is even more powerful for students when it includes making inferences in the analysis and conclusions phases.

Recommendations for future research and teaching the big ideas in statistics

The future of research in statistics education

Many of the big conceptual ideas in statistics such as distribution, expectation, variation, and randomness identified above reside predominantly in the third stage of the GAISE statistical investigation cycle, in the stage of analyzing the data. However, in addition to these conceptual big ideas, there are process big ideas in the statistical investigation cycle, such as posing a statistical question, generating appropriate data to answer a statistical question and communicating the results and conclusions of the investigation to others. These big statistical processes ideas must also be included in the statistical education of our students, as well as in the professional development of our classroom teachers. Unlike the big conceptual ideas such as expectation, variability, and distribution there has not been much research into developing students' ability to pose statistical questions or on their ability to communicate and defend their their inferential conclusions. The first and last phases of the statistical investigation cycle have not yet been adequately explored by research, especially when compared to how much research has been conducted on the the collecting and analyzing phases. The ASA conducts a Statistics Poster contest each year at the elementary, middle, and secondary student levels. The poster contest could provide a fertile ground for research on what students learn from their involvement in the statistical investigation cycle. Posters provide information on both the statistical question posed, and the results communicated. More research is needed on students' thinking processes as they pose a statistical question,and as they communicate their results. Overall, more research into student thinking about both the concepts and processes of the entire statistical investigation cycle would be beneficial to both the teaching and research communities.

Over the last twenty-five years research has concentrated on particular areas and obtained results robust enough to support the existence of developmental frameworks for students reasoning about expectation, variation, and distribution (Langrall et al, 2017). More research is needed to further validate the developmental frameworks that have already been proposed. Meanwhile the next 'big idea' in this research progression appears to be inference, in particular informal inference. A special issue of the *Statistics Education Research Journal* was dedicated to articles about informal inference, particularly within statistical modeling contexts (*SERJ* 16 (3), November, 2017). Various definitions of informal inference have been proposed and some of the components of informal inference have been identified. However, a developmental framework for students' reasoning about inference analogous to those for variability and distribution does not yet exist. Case & Jacobbe (2018) report a framework for understanding students' difficulties when making inferences from simulations. However, much more research is needed about how inferential reasoning develops starting with young children and up through the grades in order to identify potential levels of student reasoning about inference.

The future of teaching statistics

Teaching is a social process, it involves countless interactions between students and their instructors. Any recommendations for teaching statistics must include considerations about the teacher as well as the students. Our teachers are on the front line of statistics education, and many of the teachers in our current work force do not have very much experience with statistics, much less actually teaching statistics. Most of them are mathematics teachers. As Cobb & Moore (1997) pointed out so well, mathematics and statistics are very different disciplines. Mathematics is grounded in certainty, deductive reasoning based on assumed axioms and previously established results builds toward new certain truths. Statistics on the other hand lives in the realm of uncertainty, statistical results are couched in terms of likelihoods, probabilities, confidence intervals. Mathematics and statistics are epistemologically and philosophically different from one another. Our teachers need experiences themselves in carrying out statistical investigations—perhaps in conjunction with their students—in order to immerse themselves in thinking about drawing conclusions from data. In this regard, teachers need to develop both their content knowledge and their pedagogical content knowledge of statistics. The NCTM *Essential Understandings* series includes books on the big ideas in statistics that can provide some content knowledge support for middle and secondary school teachers of statistics (Kader & Jacobbe, 2013; Peck et al, 2013). The ASA GAISE document provides support for developing teachers' pedagogical content knowledge in statistics. It provides many examples of tasks that can be implemented in the classroom using the statistical investigation cycle, and outlines a progression of levels of student understanding about the statistical investigation cycle.

As for our future teachers of statistics, the ASA recently developed and published *The Statistical Education of Teachers (SET)* which lays out recommendations for the statistical education of all perspective teachers, elementary, middle, and secondary teachers alike (Franklin, Bargagliotti, Case, Kader, Scheaffer, & Spangler, 2015). *SET* recommends both coursework and statistical modeling experiences for all teachers. Coursework should begin with a first course that using a data analytic approach (all teachers), and the recommendations for middle and secondary school teachers include additional coursework in statistical methods and statistical modeling. The ASA has taken a very futuristic view in the *SET* document that projects that the need for statistics education will continue to grow throughout the world, and that our teaching profession will need to know much more about statistics and statistical thinking in the future to prepare students and citizens to better understand and be able to work in our data intense world.

What about our students, our learners, our future workers and citizens? What does our walk through the history and research on Big Ideas in statistics suggest for the teaching and learning of statistics?

Start with the big ideas. Right away introduce the concept of a statistical question, a question that requires data to be answered. Make sure that students understand the difference between mathematics and statistics, that they are two different disciplines, that they involve two different types of reasoning. Give students opportunities to reason about distributions of data and to make informal inferences early on. Provide students with multivariate data sets to explore and have them collect multivariate data themselves and then ask them, "What do you notice? What do you wonder about?" Get students to make comparisons between data sets, across distributions, early on. Get students involved in generating sampling distributions from repeated samples from both known and unknown populations, and then making informal inferences from the samples they've obtained. Have students recognize and attend to the important aspects of distributions such as shape, centers, and variability, then begin to introduce ways of measuring expectation and variation. Use the developmental frameworks from research on the big ideas of expectation, variability, and distribution as a guide to instruction. Investigate how students are reasoning about them, then provide tasks that will challenge how they are currently reasoning so that they grow in their understanding along the levels in the research frameworks. Get students in the habit of posing their own statistical questions and using the statistical investigation cycle from GAISE to explore and answer their statistical questions. Make sure that attention to variability is foremost throughout the statistical investigation cycle. Most of all, empower students to be competent and confident with the big concepts and processes of statistics, and with the nature of statistical argumentation.

References

Ben-Zvi, D. (2004) Reasoning about variability in comparing distributions. *Statistics Education Research Journal, 3*(2), 42-63.

Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (Eds.). (2004). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, & Thinking.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Biehler, R., Frischmeier, D., Reading, C., & Shaughnessy, J. M. (2018). Reasoning about data. In D. Ben-Zvi, K. Makar, &, J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 139-192). Cham, Switzerland: Springer International.

Case, C. & Jacobbe, T. (2018). *Statistics Education Research Journal*, *17*(2), 9-29. Retrieved from https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ17(2)_Case.pdf

Cobb, G. (2007). The introductory statistics course. A Ptolemaic curriculum? *Technology Innovations in Statistics Education,* 1(1), Article 1. Retrieved from http://escholarship.org/uc/item/6hb3k0nz

Cobb, G. & Moore, D. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly,104*(9), 801-823.

Franklin, C., Kader, G., Mewborne, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education.* Alexandria, VA: ASA.

Franklin, C.A., Barbabliotti, A. E., Case, C. A., Kader, G. D., Scheaffer, R. L., & Spangler, D. A. (2015). *The Statistical Education of Teachers.*

Ganadesikan, M., Scheaffer, R. L., Landwehr, J. M., Watkins, A. E., Barbella, P. Kepner, J., Newman, C. M., Obremski, T. E., & Swift, J. (1995). *Quantitative Literacy Series.* New York: Pearson Learning (Dale Seymour Publications).

Garfield, J., & Ben-Zvi. D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning. Connecting Research and Practice.* Springer.com.

Kader. G., & Jacobbe, T. (2013). *Developing Essential Understanding of Statistics Grades 6-8.*
Reston, VA: NCTM

Konold, C., & Pollatsek, A. (2002). Data analysis as a search for signals in noisy processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(4), 259-289.

Langrall, C. W., Makar, K., Nilsson, P., & Shaughnessy, J. M. (2017). Teaching and learning probability and statistics: An integrated perspective. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education.* Reston, VA: NCTM.

Makar, K., & Rubin. A. (2018). Learning about statistical inference. In D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield (Eds.). *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 261-294). Cham, Switzerland: Springer International.

Melitou, M. (2002). Conceptions of variation. A literature review. Statisics Education Research Journal, *1*(1), 46-52.

Mokros, J., & Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 20-39.

Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistics Review, 65*(2), 123-165.

Mosteller, F., Kruskal, W. H., Link, R. F., Pieters, R. S., & Rising, G. R. (1973). *Statistics by Example.* Reading, MA: Addison-Wesley.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An Agenda for Action.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for school Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Noll, J., & Shaughnessy J. M. (2012). Aspects of students' reasoning about variation in empirical sampling distributions. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 509-556.

Peck, R., Gould, R., & Miller, S. J. (2013). *Developing Essential Understanding of Statistics Grades 9-12*. Reston, VA: NCTM.

Reading C., & Reid, J. (2006). An emerging hierarchy of reasoning about distribution: From a variation perspective. *Statistics Education Research Journal, 5*(2), 46-68.

Reid, J., & Reading, C. (2008). Measuring the development of students' consideration of variation. *Statistics Education Research Journal, 7*(1), 40-59.

Reading, C., & Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, reasoning and thinking (pp. 201-226).* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's point of view. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 5-19.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 465-494). New York, NY: Macmillan.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Reston, VA: NCTM.

Shaughnessy, J. M., Garfield, J., & Greer, B. (1996). Data handling. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 205-237). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Shaughnessy, J. M., Watson, J., Reading, C. & Moritz, J. (1999. April). School mathematics students' Acknowledgement of statistical variation: There's more to life than centers. Paper presented at the research pre-session of the 77th annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, San Francisco, CA.

Tanur, J., Mosteller, F., Kruskal, W. H., Link, Pieters, R. S., & Rising, G. R. (1972). *Statistics: A Guide to the Unknown.* San Francisco, CA: Holden-Day.

Toruk, R., & Watson, J. M. (2000). Development of the concept of statistical variation: An exploratory study. *Mathematics Education Research Journal. 9*, 60-82.

Watson, J. M., (2009). The influence of variation and expectation on developing awareness of distribution. *Statistics Education Research Journal, 8*(1), 32-61.

Watson, J, M., & Kelly, B. A. (2004). Expectation versus variation: Students' decision making in a chance environment. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 4,* 371-396.

Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding average. *Mathematical Thinking and Learning, 2,* 11-50.

Watson, J. M., Callingham, R. A., & Kelly, B. A. (2007). Students appreciation of expectation and variation as a foundation for statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(2), 83 – 130.

Watson, J. M., Kelly, B. A., Callingham, R. A, & Shaughnessy, J. M. (2003). The measurement of school Students' understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(1), 1-29.

Watson, J. M., Fitzallen, N., & Carter, P. (2013). *Top Drawer Teachers: Statistics.* Adelaide, Australia: Australian Association of Mathematics Teachers and Services Australia. Retrieved from http://topdrawer.aamt.edu.au/Statistics

Zeiffler, A., Garfield, J., Del Mas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 40-58.

Zeiffler, A., Garfield, J., & Fry, E. (2018). What is statistics education? In D. Ben-Zvi, K. Makar, and J. Garfield (Eds.). *International Handbook of Research in Statistics Education,* 37-70.

Princípios didáticos para uma prática matemática transdisciplinar

Ettiène **Guérios**
Universidade Federal do Paraná
Brasil
ettiene@ufpr.br

Resumo

Caracterização de práticas matemáticas em perspectiva multi, inter e transdisciplinar, diferenciando-as no contexto da docência em sala de aula. Princípios e relações didáticas estabelecidas na tríade professor, aluno e conhecimento matemático no processo de ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas. Ação didática com intencionalidade educativa como possibilidade de desenvolvimento cognitivo e de significação do conhecimento matemático escolar. Reflexão sobre resolução de algoritmos e compreensão matemática na aprendizagem dos alunos escolares. Sustentabilidade, Educação Matemática Ambiental, Educação Matemática Financeira e Literatura com Matemática como exemplos de projetos de docência para uma prática transdisciplinar.

Palavras chave: didática, docência, educação, matemática, cognição, transdisciplinaridade, formação.

. Introdução

Este artigo, escrito na modalidade de ensaio , tem sua nascente em pesquisas realizadas por esta autora no Programa de Pós Graduação em Educação e no Programa de Pós Graduação em Educação: Teoria e Prática de Ensino, da Universidade Federal do Paraná (Brasil). A formação de professores que ensinam matemática é o foco que investigo, tendo como eixo norteador a aderência entre processo de formação, práticas didático-metodológicas, cognição, aprendizagem e desenvolvimento humano. A abordagem teórica neste artigo está nucleada em ideias acerca de criatividade, discisplinaridade, transdisciplinaridade, complexidade, problematização e resolução de problemas. Os aportes advém de Ribeiro e Moraes (2014), Nicolescu (1988), Petraglia e Vasconcelos (2017), Morin (1998), Guérios (2002), Guérios e Medeiros (2016), Guérios e Modtkoski (2017) e Puchkin (1969).

Parto do pressuposto que a docência em matemática, desde a Educação Infantil até a Universitária, pode vincular vertente didática e vertente educativa em um processo único e simultâneo cuja abordagem transcenda a organização disciplinar estabelecida nas matrizes curriculares. Nesse escopo, há uma simbiose entre ambas em que uma fundamenta a outra. Ou seja, ao educar para a vida, ensina-se matemática que, por sua vez, dá sentido à própria existência e possibilita o desenvolvimento de valores como fundamento de uma educação que, como diz Petraglia (2017, p. 67), pretende a *participação do sujeito no universo sociocultural e político, considerando sua consciência, liberdade e autonomia para o exercício de uma formação complexa, ética e planetária*.

Nesse sentido, fundamentos do pensamento complexo postulados por Edgar Morin no conjunto de suas obras ampliaram meu horizonte teórico para ultrapassar o entendimento de que a competência docente poderia se estabelecer apenas pelo conhecimento da matéria que ensina e pela habilidade técnica instrumental, que constitui uma dimensão mecânica da ação didática, não raras vezes, prescritiva. No entanto, o imponderável e o imprevisível imperam na sala de aula e situações não previstas revelam movimentos cognitivos nem sempre esperados, cuja prescrição pedagógica estática e fragmentada no âmbito disciplinar não absorve tampouco considera. Esta ultrapassagem está no cerne de uma reforma paradigmática que

> *ultrapassa a dimensão mecânica do ato didático e tem o ato de criar como desencadeador de aprendizagem [...] Nas situações que fogem ao tradicional modelo de cerceamento das ideias para garantir um andamento programado, o inesperado tende a ser a mola mestra para desencadear ações didáticas compatíveis com o emergir do pensamento dos alunos* (Guérios, 2002, p. 177-179).

O reflexo do que apontei brevemente até o momento está na discussão que desenvolvo a seguir.

Caracterização de práticas matemáticas em perspectiva multi, inter e transdisciplinar

Importante ressaltar características constitutivas e conceituais dos termos, estabelecidas pelos seus prefixos "multi", "inter" e "trans", chamando atenção para a complementaridade existente entre elas. Trago à luz palavras de Nicolescu que auxiliam na compreensão dos termos. Diz o autor que a interdisciplinaridade

> *Concierne la transferencia de métodos de una disciplina a otra.[...]Como la pluridisciplinariedad, la interdisciplinariedad desborda las disciplinas pero su finalidad permanece también inscrita en la investigación disciplinaria. Por éste su tercer grado, la interdisciplinariedad contribuye al big bang disciplinario.[…] La transdisciplinariedad* concierne, como el prefijo "trans" lo indica, lo que *está* a la vez *entre* las disciplinas, *a través* de las diferentes disciplinas y *más allá* de toda disciplina. Su finalidad es la comprehensión del mundo presente en el cual uno de los imperativos es la unidad del conocimiento (Nicolescu 1998, p. 35).

No que diz respeito à ação didática, ou seja, à docência , a transdisciplinaridade está no cerne da possibilidade *da transgresión de las fronteras entre las disciplinas, de una superación de la pluri y de la interdisciplinariedade* (Nicolescu, 1988, p. 3). A criatividade é potencializadora para que essa transgressão ocorra. Sim, pois processos cognitivos criativos propiciam autonomia no fazer docente por meio do desenvolvimento de estratégias que possibilitam a ultrapassagem de ações didáticas estáticas, preocupadas apenas com o cumprimento do conteúdo curricular hierarquizado nas disciplinas escolares. Trago de Morin (1998, p. 220) que o desenvolvimento de estratégias *se fundamenta num exame das condições, a um só tempo, determinadas, aleatórias e incertas* [...] *A estratégia pode modificar o roteiro de ações previstas, em função das novas informações que chegam pelo caminho que ela pode inventar.* Nesse sentido, o desenvolvimento de estratégias pressupõem diálogo e elaboração de conjecturas e hipóteses, além de que, *o desenvolvimento das competências heurísticas tornadas aptas para encarar várias estratégias possíveis, isto é, para criar condições de vida, vai permitir a emergências de liberdades. (p. 304)*

Na verdade, a concepção que se tem sobre o conhecimento é determinante no modo como o compreendemos, o que reflete na prática do professor. Compreendo que há uma simbiose entre o modo como se concebe o conhecimento – a ciência – e o modo como pensamos e agimos. Daí, que o conhecimento pode ser concebido pelo docente como disciplinar ou como transdisciplinar, possibilitando ou não, como diz Nicolescu, a compreensão do mundo em sua unidade. Sob esta perspectiva, a da transdiciplinaridade, Ribeiro e Morais (2014, p. 249) *concebem a criatividade como a expressão de uma vivência de natureza complexa, de um conhecimento de natureza transdisciplinar, que se materializa a partir das atividades desenvolvidas e das relações emergentes.*

Associo a esta discussão minha defesa de que a ação docente pode ser composta por dois vetores, sendo um deles o compromisso com a aprendizagem matemática dos alunos e o outro o compromisso educativo. Nesse sentido, a ação didática com intencionalidade educativa torna-se propulsora do desenvolvimento cognitivo dos alunos, o que lhes possibilita a significação do conhecimento matemático escolar. Sim, *o método é atividade pensante e consciente* (Morin, 1988, p.339). Ou seja, educar para a vida e para a aprendizagem como ato conexo que transcende a dimensão disciplinar, ao mesmo tempo em que coloca em relação o conhecimento matemático escolar e a própria existência, considerando triadicamente o homem, o indivíduo e a sociedade na composição do pensamento sobre o universo. Ou seja, a transdisciplinaridade não é apenas a *transgresión de las fronteras entre las disciplinas, mas também, es la transgresión de la dualidad oponiendo los pares binarios: sujeto-objeto, subjetividad-objetividad, materia-conciencia, naturaleza-divinidad, simplicidad-complejidad, reduccionismo-holismo, diversidad-unidad. Esta dualidad está transgredida por la unidad abierta englobando el Universo y el ser human (Nicolescu, 1988 p. 44).*

Em minhas pesquisas, intrigou-me a identificação de que há algo subtendido que rege a ação didática dos professores, independente do método que utilizem. Algo que é construído como em uma malha que articula conhecimentos formais com prática vivenciada, com a experiência. Identifiquei que constroem princípios que fundamentam a prática que desenvolvem como resultantes da postura que têm diante do que fazem em sala de aula (Guérios, 2002). Tais princípios podem resultar em práticas disciplinares prescritivas para confirmação de verdades consolidadas ou em práticas que consideram a complexidade da sala de aula e tem a criatividade como propulsora das ações. Uma professora, por exemplo, compõe um princípio didático a partir de sua convicção de que *conteúdos fragmentados, dissociados de seu contexto estrutural, não produzem sentido conceitual* (idem, p. 190). Qualquer que seja a modalidade didática que ela desenvolve, o princípio que rege sua ação é o investigativo. Até na aula expositiva oral é possível partir de questões investigativas e tornar o conhecimento vivo e significativo para os alunos (e para ela mesma), diz ela, o que difere de práticas fragmentadas, prescritivas e dissociadas das situações que emergem na sala de aula. Trago palavras de Guérios e Modtosky para selar o que expus até o momento:

> *Prescrição pedagógica. Eis um termo que nos incomoda. Complexidade educativa. Eis um termo que nos provoca. Prescrição, em um contexto de verticalidade e externalidade à prática educativa do professor, significa ordem e determinação. É dogmático, visto seu caráter de certeza absoluta. Tem sentido de normatizações curriculares a serem seguidas, de ofertas didáticas a serem reproduzidas, de caminhos a serem caminhados, sem que processos transformativos sejam inerentes à prática didática que se faz a cada tempo e a cada circunstância. Prescrição, nesse sentido, nos parece engessante para o ato criativo, se concebermos que a prática pedagógica é dinâmica e que é, o ato criativo, elemento nuclear para tal dinamização*. (GUÉRIOS & MODTOSKY, 2017, p.116).

O compromisso com a aprendizagem matemática e com a educação dos alunos em uma perpsctiva transdisciplinar pode ser alcançado por meio de situações próprias da complexidade do mundo real ao qual os alunos são parte que, problematizadas, se convertam em situações didáticas mediadas pela Resolução de Problemas, sobre o que abordarei a seguir.

Princípios e relações didáticas no processo de ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas.

No que diz respeito a Resolução de Problemas como possibilidade para a docência em Matemática, esta autora e Medeiros (2016) investigaram aspectos didáticos na prática de professores em contraponto com a atividade cognitiva dos alunos. Configuramos uma tríade de elementos triangulados formada por alunos de 6º e 7º anos do ensino fundamental, seus professores e o conhecimento matemático escolar, tendo a resolução de problemas como constitutiva de um caminho de aprendizagem. Como ação investigativa, buscamos compreender a atividade heurística dos alunos e identificar relações didáticas estabelecidas pelos professores nessa tríade.

A identificação dessas relações didáticas possibilitou perceber múltiplas facetas de uma metodologia de ensino mediada pela resolução de problemas e colaborou para a tomada de consciência dos professores *sobre a complexidade da dinâmica das relações, inter-relações e conexões em que sua própria atuação está compreendida*. (Guérios e Medeiros, 2016, p 228). Trouxemos de Puchkin (1969) constructos teóricos sobre "ato de criação", "situação problemática" e "pensamento criador" e percebemos que há conexão entre eles em situações configuradas na vida e na escola. Ouso afirmar que a vida transcende os muros da escola, a significa e é significada por ela.

Identificamos movimentos diferentes nas resoluções dos alunos. Ora o de busca de palavras chaves ou de números dos enunciados para operá-los de algum modo, ou realização de resoluções algorítmicas sem preocupação com o sentido das situações configuradas nos enunciados; nesse caso, a ação didática foi linear, prescritiva, enclausurada nas amarras e nas fronteiras da organização disciplinar. Ora o de criação de estratégias resolutivas; nesse caso, as situações didáticas criativas transcenderam os limites disciplinares expressos nos enunciados, favoreceram a percepção da realidade pelos alunos, significaram-na e possibilitaram a compreensão conceitual de conteúdos curriculares. *Configuramos, assim, uma simbiose entre a atividade educativa do professor e sua ação didática em aulas de matemática, que estabelece conexões de sentido com vistas a dinamicidade num processo de aprendizagem* (Guérios e Medeiros, 2016, p. 220) viabilizada pelo desenvolvimento de estratégias de pensamento.

Estabeleço um paralelo entre o exposto e a atividade educativa dos professores em uma dimensão transdisciplinar. Diz Nicolescu (1988, p. 61) que a transdisciplariedade *es una transgresión generalizada, que abre un espacio ilimitado de libertad, de conocimiento, de tolerancia y de amor*.

> De toda evidencia, la metodología transdisciplinaria no reemplaza la metodología de cada disciplina, que permanece como lo que ella es. Pero, la metodología transdisciplinaria fecunda estas disciplinas, proveyéndoles esclarecimientos nuevos e indispensables que no pueden ser producidos por la metodología disciplinaria. La metodología transdisciplinaria podría conducir aún a verdaderos descubrimientos en el seno de las disciplinas. Esto es natural porque un aspecto de la transdisciplinariedad es la investigación de lo que atraviesa las disciplinas (idem, p.102).

Como resultado de nossa investigação, concluímos que princípios e relações didáticas estabelecidas na tríade *professor, aluno e conhecimento matemático* no processo de ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas podem ser potencialmente heurísticas, criadoras e motivadoras (Medeiros e Guérios, 2016, p.228). **Potencialmente heurísticas,** por mobilizarem a descoberta, o desenvolvimento da autonomia e a criação de diferentes estratégias para um mesmo problema; **criadoras,** por serem capazes de modificar e transformar conceitos vazios de significado em situações-problema com a valorização do senso-lógico das respostas; **motivadoras,** por darem sentido aos diversos problemas que a Matemática dá conta de resolver. (grifos meus)

Projetos de docência para uma prática transdiciplinar

Apresento agora exemplos de projetos de docência desenvolvidos em perspectiva interdisciplinar com vistas ao desenvolvimento de uma prática transdisciplinar. Um deles é o denominado “Literatura e Matemática”, realizado em salas de aula do 5º ano do Ensino Fundamental. Com a intenção de estabelecer um diálogo interdisciplinar entre Matemática e Literatura, este projeto propiciou aos alunos o aprimoramento da concentração e o desenvolvimento da leitura atenta de histórias e poesias cuja compreensão possibilitou a interpretação de informações. Uma das atividades que destaco foi a elaboração de um livro-jogo cuja autoria foi coletiva, de todos os alunos da turma. O enredo foi criado em função de problematizações da literatura lida sendo que o conteúdo emergiu na interface entre literatura e matemática. O cenário criado foi estimulado por um “princípio de escolha”, em que o leitor pode escolher o caminho que desejasse seguir, participando, assim, da construção do livro, que para os alunos, não poderia ser pronto e acabado, mas curioso, instigante e com diferentes caminhos. Os resultados foram perceptivelmente positivos, pois os alunos extrapolaram o objetivo inicial da atividade, que durou inúmeras aulas. Houve outros projetos, como o que articulou Matemática com Arte e o que resultou na construção de um quebra cabeça decorrente da análise criteriosa da capa de um livro. O que destaco é que, no decorrer das atividades, conteúdos matemáticos curriculares tais como operações elementares, sequência numérica, quantificação, simetria, gráficos, conceitos e unidades de medidas, foram desenvolvidos em uma perspectiva conceitual, sempre por meio de situações-problemas. Percebemos que os alunos desenvolveram o prazer pela leitura e o interesse pela matemática por meio de práticas educativas.

Outros projetos de docência tiveram como temática a sustentabilidade ambiental, a financeira, a social e a econômica, cuja dimensão transdisciplinar se fez presente pela intencionalidade educativa com vistas ao desenvolvimento de valores para a cidadania associada à aprendizagem matemática. A problematização das situações surgidas durante as atividades foi o princípio didático norteador que gerou ações investigativas resolvidas por meio de Resolução de Problemas, o que possibilitou *aprendizagem conceitual dos conteúdos curriculares provendo-os de significabilidade* (Guérios e Medeiros, 2016, p. 209). Uma das intenções foi sensibilizar os alunos para a preservação dos recursos naturais da natureza com vistas à mudanças de atitude que gerem benefícios à população, vinculando consumo e aproveitamento consciente . Nesse sentido, no decorrer do processo, percebemos a necessidade de que conceitos específicos desse campo de conhecimento, como os 4 R´s da sustentabilidade (reciclar, reutilizar, repensar e reduzir) fossem conceitualmente desenvolvidos para que as relações matemáticas fossem estabelecidas na confluência de ambos, e não como aplicação de um campo no outro. Pode-se dizer que a multidimensionalidade do real se fez presente nesta necessidade de integração de campos não previstos, mas que emergiram e foram considerados, alterando a rota estabelecida. Com a perspectiva descrita e realizada em diferentes turmas em anos diferentes, conteúdos matemáticos curriculares foram desenvolvidos, tais como operações aritméticas, números decimais, frações, porcentagem, formas geométricas, unidades de medida, sistemas monetários, tratamento de informações (tabelas e gráficos), conceitos de geometria plana (medidas, ampliação e redução, polígonos, ângulos, área e perímetro) e espacial (faces, arestas e vértices de sólidos geométricos).

Finalizo a exemplificação com o projeto que desenvolveu o ensino da matemática financeira na escola em uma perspectiva de educação para vida. Nesse caso, as situações problematizadas foram referentes ao dia a dia dos alunos e as aspirações pessoais de cada um para o tempo presente (seus desejos que poderiam ser alcançáveis) e para um futuro prospectado a partir do estudo matemático de viabilidade financeira. Por meio da resolução de problemas decorrente das problematizações efetivadas, foram discutidos temas como orçamento familiar, poupança, economia, sendo que os professores foram agregando argumentos e conhecimentos associados aos vínculos que os alunos estabeleciam entre as referências advindas da vivência em seus mundos próprios, a vivência coletiva e o conhecimento matemático escolar. Também aqui, temos uma simbiose entre perspectiva educativa e aprendizagem matemática, uma significando a outra.

Concluo com palavras de Morin (1998, p. 192) ao afirmar que *A estratégia é a arte de utilizar as informações que aparecem na ação, de integrá-las, de formular esquemas de ação e de estar apto para reunir o máximo de certezas para enfrentar a incerteza*.

Considerações Finais

Este artigo oferece subsídios para se pensar a docência em matemática em uma perspectiva transdisciplinar que vincula vertente educativa e vertente da docência dos conteúdos matemáticos escolares, pela via da significação de uma pela outra, que posso chamar de recíproca.

Respeitando o fato de que o movimento cognitivo dos alunos é um processo individual e singular, o que implica em diferentes modos de pensar matematicamente uma mesma situação em uma mesma sala de aula, as práticas desenvolvidas oportunizam que alunos e professores desenvolvam análise de circunstância, conjecturem, elaborem estratégias para soluções de situações configuradas e procedam a uma análise reflexiva circunstanciada.

A criatividade é a tônica para que a prática didática e a aprendizagem dos alunos alcancem uma dimensão transdisciplinar que oportunize a construção de significados concretos de acordo com a realidade em que as experiências vividas. Em nosso caso, intencionamos desenvolver um conceito de sustentabilidade vinculado a preceitos de uma formação cidadã que parte do Eu para o coletivo. Ribeiro e Moraes (2014, p. 250) afirmam, com o que concordo, que *ao nos implicarmos no desenvolvimento de uma atividade criativa, um fluxo de informações surge, atravessando, assim, os diferentes níveis de realidade ou de materialidade do objeto ali presente.* De fato, Morin (1988) nos alerta sobre a multidimensionalidade do real e sobre a imprevisibilidade dele constitutiva. Ribeiro e Moraes seguem afirmando que o desenvolvimento de uma atividade criativa pode requerer conhecimentos de outras áreas, o que vivenciamos com frequência sempre que aceitamos o imponderável, admitimos o imprevisível e incorporamos situações e fatos que emergiram. Nesse caso, dizem as autoras, *a dinâmica passa a ser explorada a partir da religação de determinados aspectos disciplinares do diálogo com os objetos, colocando-os em interação, buscando descobrir potencialidades, convergências, divergências, em busca de um conhecer mais global, integrado e abrangente* (2014, p. 250).

O princípio investigativo, se construído como dinamizador da atividade docente, permite que as relações didáticas estabelecidas na tríade professor, aluno e conhecimento matemático sejam ser potencialmente heurísticas, criadoras e motivadoras, como Medeiros e Guérios (2016) identificaram. É possível afirmar que se a criatividade é constitutiva do fazer docente dos professores, são significativas as chances de os alunos também a desenvolvam. Ao serem criativos, a potencialidade heurística é acentuada na proporção do desenvolvimento do pensamento estratégico. Nesse sentido, Guérios e Modtosky (2017) chamam atenção para o fato de que *o desenvolvimento do pensamento complexo, a partir do qual, é possível apreender a multidimensionalidade do real e relacioná-la, sem reduzir o conhecimento do todo ao de suas partes, ou a considerar o todo, em que as partes percam a dimensão de totalidade que lhes compõem.* É um princípio complexo que encontra ressonância na afirmação de Nicolescu (p. 3) de que a transdiciplinaridade é *la transgresión de la dualidad oponiendo los pares binários[...] que abre un espacio ilimitado de libertad, de conocimiento*. Os exemplos aqui apresentados em que transdisciplinaridade, segundo Ribeiro e Moraes (2014, p. 249) se materializou *a partir das atividades desenvolvidas e das relações emergentes evidencia o dito de Nicolescu.*

Finalizo com uma afirmação de Edgar Morin (1998, p.192) que sintetiza o que abordei. Diz ele que *A estratégia é a arte de utilizar as informações que aparecem na ação, de integrá-las, de formular esquemas de ação e de estar apto para reunir o máximo de certezas para enfrentar a incerteza*.

Referencias y bibliografía

Guérios, E. (2002). Espaços oficiais e intersticiais da formação docente: histórias de um grupo de professores na área de ciências e matemática. Tese (Doutorado). UNICAMP: Campinas. Disponível em http://repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/253667

Guérios, E., & Medeiros Jr, R. J.(2016). Resolução de Problemas e Matemática no Ensino Fundamental: uma perpsctiva didática. In Brandt, C., Moretti, M. (orgs), *Ensinar e Aprender Matemática: possibilidades para a prática educativa*. Ponta Grossa: UEPG, Cap. 10, 209-232. Disponível em http://books.scielo.org/id/dj9m9/pdf/brandt-9788577982158.pdf

Guérios, E., & Modtkoski, H. h. (2017) Conexões entre Gaston Bachelard, Edgar Morin e o pensamento complexo. In Guérios, E., Piske. F H., Soek. A.M. & Silva E. *Complexidade e Educação:Diálogos Epistemológicos Transformadores*. Curitiba: CRV.Cap. 6, 115-136

Morin, E. (1998). *Ciência com consciência*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil.

Nicolescu, B. (1988). *La Transdisciplinariedad. Manifesto*. Paris: Du Rocher.

Petraglia, I., Vasconcelos, M.A. (2017). Um pensamento complexo para o conhecimento e a educação. In Guérios, E., Piske. F H., Soek. A.M. & Silva E. *Complexidade e Educação: Diálogos Epistemológicos Transformadores*. Curitiba: CRV. Cap. 3. 67-80

Puchkin, V. N. (1969). *Heurística: a ciência do pensamento criador*. Rio de Janeiro: Zahar.

Ribeiro, O., Moraes, M. C. (2014). *Criatividade em uma perspectiva transdisciplinar*. Brasília: Liber Livro e UNESCO.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Capacidades superiores matemáticas en la enseñanza de la Probabilidad

Edwin **Chaves** Esquivel
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Costa Rica
echavese@gmail.com

Resumen

El currículo vigente de Matemáticas de Costa Rica fue aprobado en 2012, ha planteado importantes retos a las autoridades del Ministerio de Educación Pública de ese país. En este sentido, los docentes han enfrentado complicaciones para diseñar situaciones de aprendizaje congruentes con los fundamentos teóricos curriculares. Seguidamente se muestra un ejemplo de un problema matemático para ser desarrollado en los solones clase, cuya solución articula diferentes elementos curriculares. Se describe el momento y la intensidad en que cada uno de estos elementos participa. Entre otros aspectos se ejemplifica un modelo desarrollado por el Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica que relaciona una serie de indicadores con tres niveles de complejidad, para evaluar el nivel de participación de los procesos y capacidades matemáticas en la solución del problema.

Se espera que este ejemplo sea ilustrativo para favorecer una mejor comprensión de la puesta en práctica de este currículo y apoye una planificación educativa coherente con él.

Palabras clave: educación matemática, didáctica de la matemática, currículo matemático, planificación de tareas matemática.

Introducción

Desde el 2013 en Costa Rica se inició la implementación de un nuevo currículo matemático para la educación preuniversitaria. A pesar de que han transcurrido ya más de seis años desde que se inició este proceso, todavía quedan importantes retos para plasmar en los salones de clase lo establecido en el currículo. Una de las labores más importantes para este trabajo de aula consiste en la planificación de tareas o problemas dirigidos a los estudiantes que vengan a articular apropiadamente los diferentes elementos curriculares. En el presente documento se ejemplifica la interacción de diferentes los elementos curriculares en un problema que ha sido propuesta para trabajar con estudiantes de décimo año en concordancia con el currículo de matemática de Costa Rica.

Síntesis de la propuesta curricular

Los fundamentos teóricos que sustentan el currículo matemático de Costa Rica promueven la generación de capacidades cognoscitivas superiores en procura de lograr una competencia en el uso de las Matemáticas para la vida, consiste en promover la capacidad para utilizar la disciplina para un mejor entendimiento del entorno y favorecer la toma de decisiones (MEP 2012).

Los conocimientos matemáticos incluidos en el currículo pertenecen a cinco áreas: *Geometría, Números, Relaciones y Álgebra, Medidas y Probabilidad y Estadística*. Para cada de ellas se definen dos tipos de habilidades: específicas y generales. Las primeras son capacidades para desarrollar en el corto plazo e interactúan con los conocimientos matemáticos del área. Las segundas se plantearon para ser logradas a lo largo de un ciclo educativo[1], normalmente están constituidas por un grupo de habilidades específicas donde se establecen diversas formas de integración (Ruiz 2018). La cantidad y calidad de los conceptos o conocimientos matemáticos ha sido formulada en función del progreso de las capacidades que se desean desarrollar.

Para una adecuada puesta en práctica del currículo se estableció como estrategia didáctica la *resolución de problemas* a partir de cuatro momentos: *presentación del problema, trabajo independiente de los estudiantes, contrastación y comunicación de estrategias, y cierre o clausura* (MEP 2012. p.13). Par los problemas en el aula, se consideran dos etapas: en la primera se plantea uno o más problemas organizados para la generación de nuevos conocimientos o habilidades, en donde el estudiante pueda construir el aprendizaje y lograr habilidades en la búsqueda de soluciones a los problemas. En la segunda etapa se promueven problemas encaminados a la movilización de los conocimientos o habilidades adquiridas previamente, con el propósito de consolidar lo aprendido y su implementación (MEP 2012).

Para lograr una adecuada transición entre interacción de los conocimientos matemáticos y habilidades específicas con las habilidades generales en camino a la competencia matemática, los estudiantes deben adquirir ciertas capacidades superiores transversales que permitan avanzar progresivamente. Estas capacidades se asocian a lo que el currículo consigna como *procesos matemáticos* (colecciones de acciones que fomentan las capacidades) y se activan al momento en que los estudiantes adquieren habilidades específicas en la implementación de conocimientos matemáticos mediante la resolución de problemas. En resumen, los procesos matemáticos constituyen actividades cognitivas que realizan los individuos dentro de las distintas áreas matemáticas. Se consideren cinco procesos

- *Razonar y argumentar: incluye actividades mentales que desencadenan formas del pensamiento matemático para desarrollar capacidades en la comprensión de una justificación, además desarrollar argumentaciones y conjeturas, entre otras.*
- *Plantear y resolver problemas: Refiere al planteamiento de problemas y el diseño de estrategias para resolverlos. Aquí se dará un lugar privilegiado a los problemas en contextos reales. Se trata de capacidades para determinar las estrategias y métodos más adecuados al enfrentar un problema.*
- *Comunicar: es la expresión y comunicación oral, visual o escrita de ideas, resultados y*

[1] La educación primaria está constituida de dos ciclos de tres años cada uno y la secundaria académica incluye un ciclo de tres años y el último de dos años.

argumentos matemáticos. Busca generar la capacidad para expresar ideas y sus aplicaciones usando el lenguaje matemático de manera escrita y oral a otras personas.

- *Conectar: pretende el entrenamiento estudiantil para la obtención de relaciones entre las diferentes áreas matemáticas. De igual manera, persigue motivar conexiones con otras asignaturas y con los distintos contextos.*
- *Representar: Pretende fomentar el reconocimiento, interpretación y manipulación de representaciones múltiples que poseen las nociones matemáticas (gráficas, numéricas, visuales, simbólicas, tabulares). También pretende desarrollar capacidades para traducir una representación en términos de otras, comprendiendo las ventajas o desventajas. (Chaves 2017. p.4)*

La participación de los procesos matemáticos en forma sistemática permite generar las capacidades superiores (que llevan los mismos nombres de los procesos). Sin embargo, para alcanzar estas capacidades es necesario que en las tareas matemáticas o problemas que se utilizan en la acción educativa posean diferentes niveles de complejidad que, a su vez, son producto de la activación de estos procesos en diferentes grados. Los niveles considerados en el currículo se resumen en:

- Reproducción: se refiere a ejercicios relativamente familiares que demandan la reproducción de conocimientos ya practicados.
- Conexión: remite a la resolución de problemas que no son rutinarios, pero se desarrollan en ambientes familiares al estudiante, la conexión entre los diversos elementos, en particular, entre distintas representaciones de la situación.
- Reflexión: incluye la formulación y resolución de problemas complejos, la necesidad de argumentación y justificación, la generalización, el chequeo de si los resultados corresponden a las condiciones iniciales del problema y la comunicación de esos resultados. (MEP 2012).

Propuesta para la valoración de problemas

Debido a la importancia con conlleva el diseño de tareas o problemas matemáticos que sean consistentes con los fundamentos curriculares en cada una de las etapas, ya sea en el trabajo de aula o para la evaluación misma; a lo interno del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, se ha diseñado un modelo que permite evaluar los problemas en consonancia con los diferentes elementos curriculares. Para ello se incluyen indicadores que valoraran la intervención de cada uno de los procesos matemáticos de acuerdo con el nivel de complejidad con que se activa en la solución del problema. Entonces, el modelo está constituido por dos elementos:

- 61 indicadores que consignan la intervención de los procesos matemáticos en un problema organizados en tres grados distintos.
- 5 criterios para que a partir de los indicadores y de la estructura de su intervención se pueda realizar valoración (Ruiz 2018. p. 103).

La siguiente figura ilustra que se pueden establecer tres grados de complejidad creciente de la intervención de los procesos o capacidades.

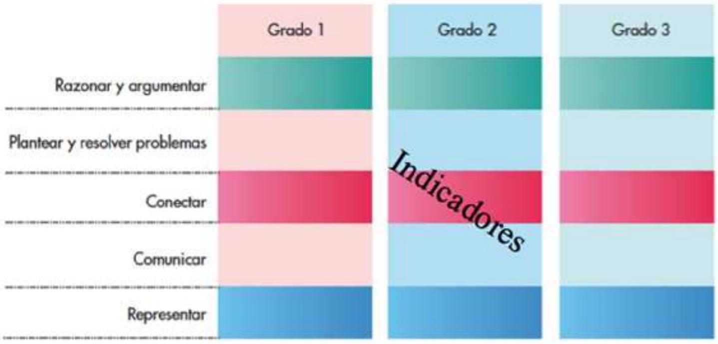


Figura 2. Grados de procesos/ capacidades superiores. Ruiz 2018. p.118

Para el diseño de estos indicadores se ha tomado en cuenta los principios establecidos en el currículo, donde se incluyen ciertas pautas generales relacionadas con los niveles de complejidad de un problema. El siguiente cuadro resume estas pautas:

Tabla 1: Niveles de complejidad: indicadores en el currículo

Nivel A: Reproducción	Nivel B: Conexión	Nivel C: Reflexión
Reconocer objetos o métodos matemáticos equivalentes. Identificar objetos matemáticos o propiedades matemáticas sencillas dentro de una situación familiar dada. Realizar procedimientos rutinarios y aplicar algoritmos estándar, en ambientes familiares al estudiante. Identificar y escribir de manera sencilla aunque coherente matemáticamente, expresiones que poseen símbolos, fórmulas y cómputos no complicados.	Interpretar una situación matemática con exigencia mayor que en el nivel de reproducción. Resolver problemas que no son rutinarios pero se desarrollan en ambientes familiares al estudiante. Conectar distintas representaciones de una situación (algebraicas, numéricas, gráficas, etc.). Conectar elementos matemáticos dentro de un área o que relacionan dos o más áreas matemáticas.	Plantear y resolver problemas complejos. Argumentar, justificar, y generalizar la resolución de problemas complejos. Comprobar si los resultados obtenidos corresponden a las condiciones de partida del problema. Comunicar los resultados de la aplicación de estrategias con lenguaje matemático y precisión matemática. Conectar elementos matemáticos de dos o más asignaturas.

Fuente: MEP, 2012

Una vez que la participación de cada proceso ha sido valorada, para evaluar el problema completo se realiza una ponderación según con el grado que presentó en cada proceso, donde se consideran los criterios:

- NC1: cuando en un problema la intervención de los procesos no supera el grado 1, se acepta que el problema es de reproducción.
- NC2: cuando en un problema la intervención en al menos dos procesos es de grado 2 y se pueden identificar al menos tres indicadores en ese grado, se acepta que el problema es de conexión.
- NC3: cuando en un problema la intervención en al menos dos procesos es de grado 3 y se pueden identificar al menos tres indicadores en ese grado, se acepta que el problema es de reflexión. (Ruiz, 2018, p. 124-125)

Si no se satisfacen estas condiciones se definen nuevos criterios para clasificarlo, se toma en consideración los indicadores del mayor grado y valoraciones particulares en cada problema, los procesos "Razonar y argumentar" y "Plantear y resolver problemas" ocupan un lugar preponderante en esta etapa.

Ejemplo de implementación de la propuesta en Probabilidades

Las Probabilidades fueron incluidas dentro del área denominada Estadística y Probabilidad, con el propósito de estudiar la incertidumbre y el azar en diferentes contextos. No se plantea llevar a cabo un estudio profundo y abstracto de este tema. Se inicia con análisis intuitivos en los primeros años de la primaria y paulatinamente se van construyendo diferentes conocimientos que permitan concluir, a finales de la secundaria, con ideas claras de conceptos como: diferencias entre azar y determinismo, el papel del azar en fenómenos aleatorios, definiciones: clásica y frecuencial de probabilidad, Axiomas de Kolmogorov, teoremas básicos sobre probabilidades, ley de los grandes números, entre otros. Con el logro de habilidades planteadas en currículo se espera que los estudiantes sean capaces de utilizar las probabilidades para modelar situaciones aleatorias simples y valorar su papel en la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.

Seguidamente se muestra un problema que está estructurado para ser aplicado a estudiantes de décimo año (cuarto año de secundaria) en el área de Estadística y Probabilidad. Concretamente este problema se ha ubicado dentro del estudio de las probabilidades; sin embargo, como se verá más adelante intervienen también otras áreas.

Problema: lanzamiento de un dardo

Considere que usted, junto a un grupo de amigos, generan un juego que consiste en lanzar un dardo a una figura que se encuentra sobre el piso a una distancia de 10 metros. La figura está constituida por un rectángulo de 50 centímetros de ancho y 150 centímetros de largo. Las figuras internas son un hexágono regular, un círculo y un cuadrado, tal como muestra:

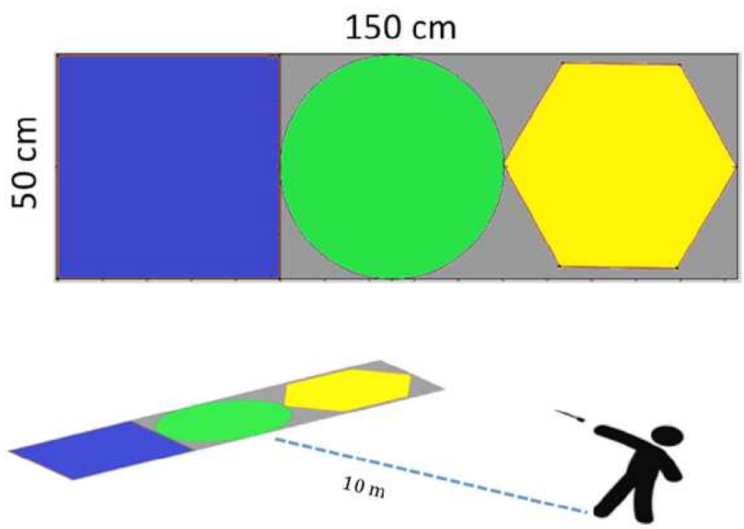


Figura 3. Lanzamiento de un dardo

Participan cuatro jugadores, a cada uno se le asigna aleatoriamente una región, cada vez *que el dardo caiga en dicha región se asigna un puntaje al jugador correspondiente independientemente de quién lance, gana el jugador con mayor puntaje después de varios lanzamientos.*

Si usted tuviera que establecer este puntaje (entre cero y cien) a cada color o región dentro del rectángulo, para que el juego sea equitativo (probabilísticamente honesto) para quienes lo practiquen ¿cuáles serían los valores correspondientes a cada color?

Primeramente establezca los supuestos estadísticos o probabilísticos para que el juego sea aleatorio.

Solución

Antes de realizar el análisis curricular se requiere analizar una de las posibles soluciones.

Supuestos

Tal como fue diseñado el juego, cabe la posibilidad de que el dardo caiga fuera de la región original o incluso en una línea divisoria que sea imperceptible de identificar la región en la que se encuentra. Entonces el primer supuesto sería:

1) *Si el dardo cae fuera de la figura o justo sobre una línea divisoria entre regiones se repite el lanzamiento tantas veces como sea necesario.*

Por otro lado, debido a las características de las regiones y a las variantes en las distancias desde el punto de lanzamiento a cada una de ellas, en necesario suponer que:

2) *Es igualmente probable que el dardo caiga en cualquier punto del rectángulo original.*

Tomando en cuenta estos supuestos, de acuerdo con las dimensiones dadas para las regiones, para que exista equidad o justicia en el puntaje que se asigne a cada color (o región dentro del rectángulo), el mismo debe estar en una escala inversamente proporcional a la probabilidad de que el dardo caiga en cada una de las regiones o (lo que es equivalente) a la proporción de área que representa cada región. Por esta razón, para resolver el problema, primeramente se requiere determinar el área de cada una de las regiones.

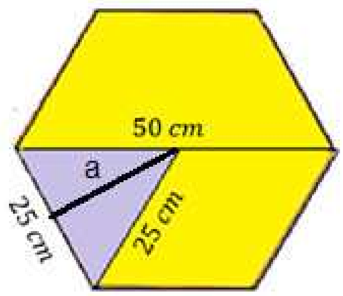
Las dimensiones del rectángulo son 50 cm de ancho y 150 cm de largo. Por esta razón, la figura de color azul corresponde a un cuadrado de 50 cm de lado, por lo que su área viene dada por:

$$50\ cm \cdot 50\ cm = 2500\ cm^2$$

Por otro lado, la figura de color verde es un círculo de 50 cm de diámetro, por ello su área viene dada por:

$$\pi \cdot 25^2 cm^2 \approx 1963{,}49\ cm^2$$

Para el hexágono se sabe que las diagonales miden 50 cm, al tratarse de un hexágono regular, el lado mide 25 cm.



La medida de la apotema del hexágono viene dada por:

$$a = \sqrt{25^2 - 12{,}5^2}\ cm \approx 21{,}65\ cm$$

El área del hexágono aproximadamente sería:

$$\frac{6 \cdot 25\ cm \cdot 21{,}65 cm}{2} = 1623{,}75\ \ cm^2$$

Finalmente, el área de la región gris corresponde al complemento de la suma de las áreas de las tres figuras con respecto al área de la región rectangular que las incluye.

El área de las tres figuras (cuadrado, círculo y hexágono) mide aproximadamente:

$$2500\ cm^2 + 1963{,}49\ cm^2 + 1623{,}75\ \ cm^2 = 6087{,}24\ cm^2$$

El área total del rectángulo en donde se incluyeron las figuras es:

$$150\ cm \cdot 50\ cm = 7500\ cm^2$$

El área de la región gris sería aproximadamente:

$$7500\ cm^2 - 6087{,}24\ cm^2 = 1412{,}76$$

De acuerdo con lo anterior y según establece la definición clásica de probabilidad, se tendría:

Región	***Área en cm^2***	***Probabilidad de ocurrencia*** $\left(\frac{área\ de\ región}{Area\ total}\right)$
Azul (cuadrado)	*2500,00*	*0,333*
Verde (círculo)	*1963,49*	*0,262*
Amarilla (hexágono)	*1623,75*	*0,217*
Gris	*1412,76*	*0,188*
Total	***7500,00***	***1,000***

Seguidamente se deben utilizar estos valores para determinar los puntajes correspondientes a cada región, lo cuales deben estar en relación inversa a las probabilidades:

Región	***Relación inversa a la probabilidad*** $\left(\frac{1}{Probabilidad}\right)$	***Peso relativo por región***	***Puntaje por región en escala 0 a 100***
Azul (cuadrado)	*3,00*	*0,179*	*17,9*
Verde (círculo)	*3,82*	*0,228*	*22,8*
Amarilla (hexágono)	*4,61*	*0,275*	*27,5*
Gris	*5,32*	*0,318*	*31,8*
Suma	***16,75***	***1,000***	***100***

Análisis didáctico del problema

1. Conocimientos y áreas incluidas

Primeramente se van considerar las áreas matemática que intervienen en la solución del problema. Este problema resulta ilustrativo para observar esta integración de conocimientos y habilidades en diferentes áreas matemáticas. Además de Probabilidad y Estadística la solución integra las áreas de Geometría y Relaciones y Álgebra. Los conocimientos correspondientes a cada una de ellas son:

Estadística y Probabilidad

- *Reglas básicas de probabilidad y otras propiedades (MEP 2012. p. 436).*

Geometría

- *Polígonos: área (MEP 2012. p. 389).*

Relaciones y Álgebra

- *Proporcionalidad inversa (MEP 2012. p. 329).*

En concordancia con lo anterior, aparecen en el los programas de estudios habilidades relacionadas con las tres áreas, tanto específicas como generales.

2. Participación de los procesos

Seguidamente se describe la forma en que se activa cada uno de los procesos matemáticos y su nivel de complejidad. Para ello se consideran los indicadores que se elaboraron dentro del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Los códigos que aparecen son los que se utilizan en dicha propuesta tal como se puede observar en Ruiz[2] (2018). Hay que tener presente que para la clasificación se consideran los indicadores de mayor grado; es decir, puede ocurrir que haya dos indicadores de grado 1 que corresponde a un proceso, pero si hay un indicador de grado 2 que se satisface también, entonces solamente se incluye aquel o aquellos correspondientes al mayor de los grados.

Razonar y argumentar:

La información no está en forma explícita, esto obliga a los estudiantes a plantear e implementar diferentes argumentos vinculados con el cálculo de áreas y con la proporcionalidad inversa. En este sentido el problema la situación resulta novedosa para los estudiantes de décimo año (RA3.1). Por esta misma razón, se requiere desarrollar argumentos que utilizan integradamente distintos conceptos o métodos matemáticos para resolver el problema (RA3.2). Además, requieren identificar los supuestos que deben considerarse para hacer viable el juego, por ello precisan demostrar que comprenden la amplitud y límites de los problemas aleatorios (RA3.4). Grado 3

Plantear y resolver problemas

El problema planteado resulta novedoso, se requiere implementar diferentes estrategias que incluyen: el análisis visual, el cálculo de áreas, la identificación de la probabilidad de las regiones, la identificación del inverso multiplicativo de las probabilidades y su uso para determinar como el peso relativo de cada región (PRP3.1). Grado 3

Conectar

Se debe realizar la conexión entre diferentes matemáticos que se aplican para la solución

[2] Si el lector desea conocer con mayor detalle la propuesta para la valoración de las tareas matemáticas, la descripción detallada de los indicadores con los respectivos niveles de complejidad, la nomenclatura y otros detalles asociados, se le invita consultar Ruiz (2018)

y una situación de un contexto lúdico, para resolver un no estudiado y relativamente complejo (C3.1). Grado 3

Comunicar

Se ponen en juego diferentes conceptos que tienen gran trascendencia dentro de los análisis matemáticos. En primer lugar, en el análisis de los supuestos surge la idea de equiprobabilidad de los puntos dentro del rectángulo (uniformidad probabilística), el cálculo de las áreas para determinar directa o indirectamente la probabilidad que el dardo caiga en cada región, la identificación de que los valores buscados están en proporción inversa con estas probabilidades y su determinación posterior. Por ello, se requiere seguir una secuencia de razonamientos matemáticos abstractos y complejos que no han sido estudiados (COM 3.1), además expresar ideas, acciones, argumentos y conclusiones usando lenguaje matemático y precisión matemática (COM3.2). Grado 3.

Representar

En el desarrollo del proyecto se debe hacer una adecuada lectura de la información textual y visual para la determinación de áreas de cada región, pasar luego a las probabilidades o las proporciones correspondientes del área de cada región en relación al rectángulo que las incluye, luego deben convertir estos valores en nuevas representaciones que son sus inversos multiplicativos y finalmente determinar los pesos relativos de cada región en la escala de 0 a 100. (R3.1 y R3.2) Grado 3.

Con el propósito de simplificar la redacción, en la descripción anterior los indicadores del apéndice han sido parafraseados y resumidos. Sin embargo, en ella se muestra el aporte de este problema a la consecución de las capacidades superiores en cada caso.

3. Nivel de complejidad del problema

Tal como se observa en la descripción previa, todos los procesos se activan con el mayor grado, esto es una muestra de que el problema se puede ubicar con un nivel de complejidad alto, es decir es un problema de Reflexión.

4. Acción de aula y momentos de la lección

El análisis de este problema permite que los estudiantes alcancen un nivel superior de razonamiento. Este es un claro ejemplo por medio del cual se relacionan conceptos geométricos, algebraicos y probabilísticos para resolver un problema que, aunque hipotético, ejemplifica una situación lúdica que requiere de mucha destreza matemática y del dominio de diferentes habilidades para encontrar la solución.

Aunque los cálculos no son complejos, el mayor reto se enfoca a la identificación y planificación de la estrategia matemática que se debe implementar para encontrar la solución. Por esta razón, es necesario otorgar el tiempo necesario para que los estudiantes puedan debatir en la interpretación del problema y en la búsquela de una estrategia de solución. Es posible que inicien con estrategia de ensayo y error que les ayude a identificar la ruta correcta. El docente debe estar atento para apoyar este proceso.

Dada la complejidad del problema que se ha incluido en el proyecto, no es adecuado utilizarlo para la generación de conocimiento nuevo sino para una etapa posterior que permita la movilización y aplicación de las habilidades adquiridas en diferentes áreas matemáticas. Con esto se demuestra que los problemas de movilización no siempre son problemas de reproducción de conocimientos, sino que es conveniente retar al estudiante para utilice los conocimientos y habilidades adquiridas en situaciones de mayor complejidad que le permitan alcanzar capacidades mayores de razonamiento.

Conclusión

En el marco de un currículo enfocado a la generación de capacidades superiores como el de Costa Rica, la posibilidad de realizar una descripción y clasificación en las diferentes tareas matemáticas que se proponen, ya sea para la acción de aula o para las evaluaciones, se convierte en un instrumento de vital importancia para apoyar la acción docente y su puesta en práctica de dicho currículo.

En particular, para el caso Costa Rica, estas o otras valoraciones semejantes permiten realizar un planeamiento educativo acorde con los fundamentos teóricos del dicho currículo. Estas acciones permitirían al docente dosificar el trabajo de aula de manera que exista un adecuado equilibrio entre tareas o problemas de diferentes niveles de complejidad, un equilibrio en la participación de los procesos matemáticos y de los ejes disciplinares. Al mismo tiempo, ofrece la oportunidad de evaluar la adquisición de los aspectos más tangibles como es la relación entre conocimientos matemáticos y habilidades específicas, pero más importante aún permite visibilizar el tránsito entre esta relación que ocurre en el corto plazo hacia la adquisición de las habilidades generales y de la competencia matemática en el mediano y largo plazo. Esto se consigue gracias la interacción de los procesos matemáticos y sus niveles de complejidad en los diferentes problemas, y por ende, la consolidación de las capacidades de orden superior. Todo esto privilegiando la acción estudiantil quienes son partícipes directos de todo el proceso.

Por otro lado, un planeamiento equilibrado como el que se indicó en el párrafo anterior, donde se valore la pertinencia de cada permite al docente valorar la pertinencia de cada una ellas, ya sea para la acción de aula o para las evaluaciones, en un marco mucho más amplio como es un planeamiento educativo en congruencia con los fundamentos del currículo. La capacidad de precisar el grado de participación de cada proceso matemático permite mapear las acciones que se estarían estableciendo para avanzar de acuerdo con las posibilidades de los estudiantes hacia el logro de capacidades matemáticas. Desde el punto de vista de una sana planificación educativa, la realización de esta práctica permite ir haciendo los ajustes necesarios para consolidar la intervención de los procesos en el corto, mediano y largo plazo, por lo que apunta sólidamente al fortalecimiento de la competencia matemática. Al mismo tiempo, en el caso de la evaluación, los resultados que se puedan obtener mediante la puesta en práctica de este proceso de planificación en las acciones de aula, suministran información sobre el avance de los estudiantes y su rendimiento, de modo que se puedan establecer las acciones correctivas correspondientes.

La propuesta para la valoración de las problemas es un importante insumo que se espera venga a contribuir en la articulación de una estrategia evaluativa que sea congruente con el potencial de los principios curriculares que se han plasmado en los programas de estudio.

Referencias y bibliografía

Chaves, E. (2017). Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica: 2010-2017. *Memorias del II CEMACYC.* Cali, Colombia, 2017. Descargado de http://ciaem-redumate.org/cemacyc/index.php/ii_cemacyc/iicemacyc/paper/viewFile/494/154

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado. Costa Rica: autor. Descargado de http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Ruiz, A. (2018). Evaluación y Pruebas Nacionales para un Currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. Comité Interamericano de Educación Matemática. Ciudad de México, Mexico. Descargado de https://www.angelruizz.com/wp-content/uploads/2019/02/Angel-Ruiz-Evaluacion-y-pruebas-2018.pdf

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Refletindo sobre a inclusão das tecnologias digitais no currículo de matemática

Claudia Lisete **Oliveira** Groenwald
Universidade Luterana do Brasil Canoas, Rio Grande do Sul
Brasil
claudiag@ulbra.br

Resumo

Este artigo discute a incorporação das tecnologias digitais na formação de professores de Matemática no Brasil, bem como, no planejamento didático para estudantes da Educação Básica. Apresentando exemplos de ações que podem ser inseridas em cursos de Licenciatura em Matemática.

Palavras chave: educação matemática, currículo, tecnologias da informação e comunicação.

Introdução

As Tecnologias têm alterado o modo de interação e de pensamento do ser humano em relação ao mundo que o rodeia. Neste período de informatização tecnológica, no qual as atividades têm migrado para o formato digital, a Educação, e a Educação Matemática, também necessitam adequar-se a essa realidade.

Segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996) a Educação no Brasil tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.

Desse modo, a Educação e a inserção na sociedade digital implicam em uma adequação da sala de aula à realidade tecnológica, cujo uso da tecnologia pelos docentes é condição necessária para essa adequação.

Embora o Ministério da Educação (Brasil, 2013) considere importante a utilização de tecnologias de qualidade objetivando a melhoria da Educação, o mesmo adverte que o uso de recursos tecnológicos, de forma isolada e desalinhada com a proposta pedagógica da escola, não garante a qualidade da Educação.

Ao utilizar as tecnologias para proporcionar condições favoráveis à aprendizagem, o professor deve, antes de tudo, definir o objetivo instrucional desejado para então organizar as ações e recursos para atingir seus objetivos. E, para isto, é fundamental conhecer as possibilidades que as tecnologias oferecem e quais tecnologias são adequadas aos estudantes, ao conteúdo a ser desenvolvido e ao nível de ensino a que se destina.

Nesse sentido essa conferência apresenta uma discussão sobre a importância de incluir, nos cursos de formação inicial de professores, ações que os oportunizem utilizarem as tecnologias em seu planejamento didático.

Torna-se fundamental que os professores evidenciem as mudanças no processo de ensino e aprendizagem da Matemática quando se utilizam tecnologias digitais, apontando possibilidades que estes recursos oferecem para a Educação Básica e se sintam capacitados a utilizar os recursos tecnológicos em seus planejamentos docentes.

Formação de professores no Brasil

A responsabilidade em formar professores de Matemática, no Brasil, está a cargo das Universidades, em cursos de Licenciatura. Tais cursos habilitam professores para lecionarem na Educação Básica, na Educação de Jovens e Adultos (EJA) e a desenvolverem pesquisas na área de Educação Matemática, podendo atuar no ensino superior na formação de professores.

Os cursos de Matemática Bacharelado habilitam profissionais para lecionarem no ensino superior e a realizarem pesquisas em Matemática pura. Importante salientar que os profissionais formados em cursos de Licenciatura em Matemática possuem habilitação para lecionarem nas séries finais do Ensino Fundamental (6º, 7º, 8º, 9º anos), com estudantes de 10 a 13 anos, Ensino Médio, com estudantes de 14 a 16 anos, na EJA e no ensino superior na área de Educação Matemática.

Segundo o MEC/CNE (2001) "Desde o início do curso o licenciando deve adquirir familiaridade com o uso do computador como instrumento de trabalho, incentivando sua utilização para o ensino de Matemática, em especial para a formulação e solução de problemas. É importante também a familiarização do licenciando, ao longo do curso, com outras tecnologias que possam contribuir para o ensino de Matemática". Neste sentido faz-se necessário discutir as formas de desenvolver, nos futuros professores de Matemática, durante a sua formação inicial, experiências que desenvolvam a competência para atuarem com tecnologias, associadas a metodologias de ensino. Se requer um desenvolvimento profissional significativo que se centre nos usos matemáticos específicos das ferramentas e da tecnologia para que estas tenham um emprego eficaz nas salas de aula. Importante, também, que os professores se sintam seguros para incorporar ao planejamento docente o uso de tais recursos, possibilitando que os estudantes desenvolvam o pensamento matemático desenvolvendo investigações das ideias matemáticas, generalizando múltiplas representações de um constructo matemático e resolvendo problemas.

Faz-se necessário uma reflexão do modo em que os alunos podem utilizar estas ferramentas e como podem incorporar-se ao currículo de um modo significativo.

Neste sentido, segundo o NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) (2015) sem um conhecimento forte em relação as questões do uso das ferramentas e da tecnologia os docentes podem sentir-se inseguros com o emprego das mesmas em suas salas de aula.

Uso de tecnologias digitais na Educação Básica

A integração das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na Educação mostra-se irremediavelmente associada à necessidade de reforço da profissionalização docente e de uma (re)organização das dinâmicas escolares (Nóvoa, 2007). Segundo o autor torna-se importante perceber que ações se mostram necessárias para promover a efetiva inclusão das TIC no contexto escolar, mais especificamente, estudos de como se pode promover o desenvolvimento profissional docente para trabalhar, com eficiência e sustentabilidade dessa inclusão no planejamento escolar.

Perrenoud (2000), com base no pensamento de Tardif, salienta que as tecnologias demandam e, ao mesmo tempo, oportunizam uma mudança de paradigma, em relação às aprendizagens e não às tecnologias. Para o autor as TIC contribuem com os trabalhos pedagógicos e didáticos porque permitem criar situações de aprendizagem diversificadas.

Segundo o NCTM (2015) para uma aprendizagem significativa da Matemática, as ferramentas e a tecnologia devem ser consideradas como características indispensáveis para a sala de aula. Consideram que os Computadores, os Tablets, podem ser utilizados para reunir dados, fazer pesquisas na sala de aula e para utilizar aplicações que façam cálculos, simulações, assim como para fomentar a visualização, permitindo que os alunos se envolvam com jogos que exijam habilidades para resolução de problemas.

Os Computadores e Tablets, telefones inteligentes e calculadoras avançadas, segundo o NCTM (2015), tornam acessíveis uma gama de aplicações que auxiliam aos usuários a explorar Matemática, dando sentido aos conceitos e procedimentos, e a envolvê-los com o raciocínio matemático.

Considera-se, portanto, que as TIC se constituem em importantes recursos que auxiliam o professor em seu trabalho docente, colaborando com mudanças significativas na educação.

Nas tecnologias têm-se os dispositivos dedicados, que são aparatos tecnológicos com uma função específica e destinados a uma única finalidade, como o DVD, e os dispositivos informáticos multifuncionais, como os computadores e afins, que em conjunto com um determinado *software* de aplicação, ou aplicativos, adquirem as características e funcionalidades específicas para atender a uma determinada finalidade.

Atualmente, para a escolha de um aplicativo, considera-se importante a verificação da característica de multiplaforma, ou seja, que esteja disponível para as diversas plataformas de dispositivos informáticos, como o *Android*, *iOS* e *Windows Mobile* para dispositivos móveis, e *Windows, Linux* e *OS X* para os computadores pessoais, possibilitando o uso do mesmo em diversos ambientes tecnológicos. Nesse sentido um *software* que se adapta a essas características é o Geogebra.

A seguir apresentam-se exemplos do uso de tecnologias, em específico o *software* Geogebra.

Exemplos do uso de tecnologias digitais no planejamento escolar na Educação Básica

A Figura 1 apresenta a área de triângulos. Apresenta-se um objeto de aprendizagem, desenvolvido no Geogebra, onde é possível que o estudante visualize a transformação do triângulo em um paralelogramo e que perceba que a medida da área do triângulo é a metade da área do paralelogramo. É possível que o estudante realize as transformações optando por uma das alturas do triângulo em relação a uma das bases.

Importante salientar que permite ao estudante observar que dependendo da base escolhida, obtêm-se diferentes alturas, permanecendo a mesma medida da área.

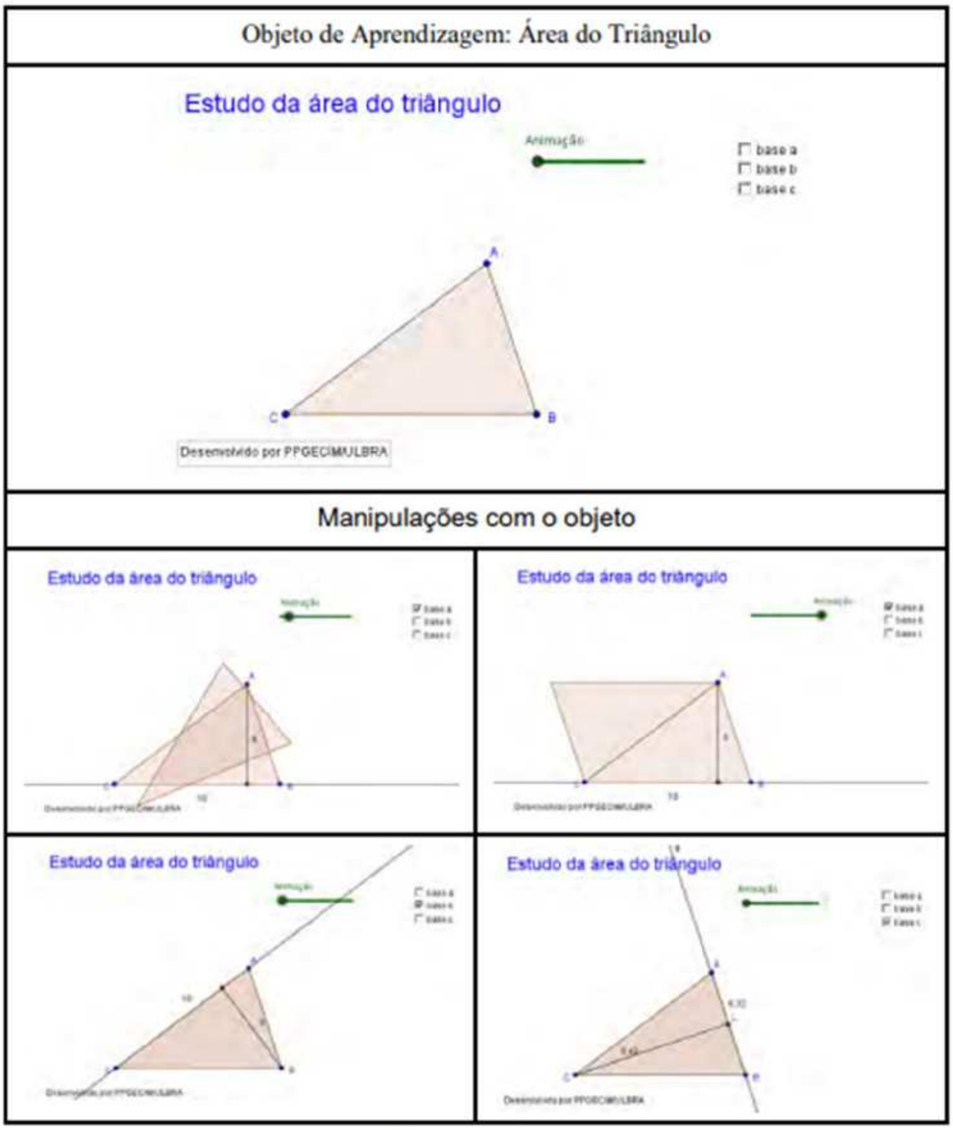


Figura 1. Objeto de Aprendizagem Área do Triângulo. Fonte: Repositório de Objetos de Aprendizagem do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil.

Outro exemplo, do uso de tecnologias na Educação Básica, é no estudo de funções no Ensino Médio, o professor pode fazer com que os estudantes tracem gráficos, utilizando um *software*, por exemplo o Winplot, ou o Geogebra.

O aluno deve perceber os tipos de crescimento e decrescimento, bem como, representar as funções na forma algébrica, geométrica e com linguagem natural. Recomenda-se que os estudantes possam analisar o que acontece quando se altera os parâmetros em uma função, identificando os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando se altera os coeficientes.

A Figura 2 apresenta um exemplo com função quadrática.

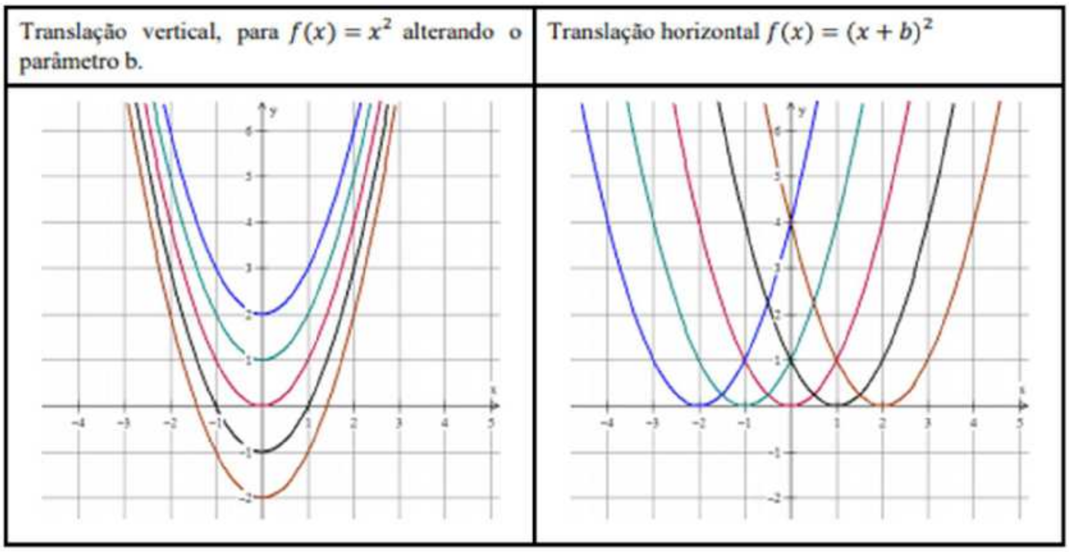


Figura 2. Translações com função quadrática. Fonte: Autora.

Outro exemplo, apresentado na Figura 3, é a construção do Tangram, que possibilita que os estudantes construam objetos geométricos seguindo passos que o levam a realizar generalizações.

A ideia é a construção de um quebra-cabeça com as peças do Tangram, no software Geogebra disponível para Tablets. A atividade se constitui na construção das figuras que compõem o Tangram e a solução do problema da disposição das peças construídas em um quadrado fixo. Para a construção das peças, que compõem o Tangram, recomenda-se que o professor oriente as ações necessárias. Descreve-se a construção das peças do Tangram e do quadrado fixo que servirá como tabuleiro para ser montado o quebra-cabeça, com lados de dimensões 4 unidades. As ações indicadas, para a construção dos polígonos a seguir, estão propostas para estudantes do Ensino Fundamental e, por isto, as dimensões utilizadas são números inteiros, tomando-se o cuidado para não trabalhar com números irracionais. Por exemplo, na construção do quadrado com lado $\sqrt{2}$ unidades, optou-se pela construção pelas diagonais do quadrado, facilitando a construção com estudantes do Ensino Fundamental.

Construindo o Tangran no software Geogebra: exemplos de construções	
1 Construindo um quadrado pelas diagonais, com comprimento 2 unidades (a construção do quadrado pelas diagonais justifica-se porque o lado do quadrado possui dimensão $\sqrt{2}$ unidades):	2 Construindo dois triângulos retângulos isósceles, com hipotenusa de comprimento 2 unidades de comprimento e altura 1 unidade de comprimento:
- defina um segmento de comprimento 2 com a ferramenta *segmento com comprimento fixo;* - marque o ponto médio entre os extremos do segmento com a ferramenta *ponto médio ou*	- defina um segmento de comprimento 2 com a ferramenta *segmento com comprimento fixo;* - marque o ponto médio entre os extremos do segmento com a ferramenta *ponto médio ou*

centro; - defina a mediatriz entre os extremos do segmento com a ferramenta *mediatriz*; - defina um círculo de raio 2 e centro no ponto médio com a ferramenta *círculo dado centro e raio*; - marque a intersecção entre a mediatriz e o círculo com a ferramenta *intersecção de dois objetos*; - defina o quadrado utilizando os pontos das intersecções e os pontos do segmento inicial com a ferramenta *polígono*; - deixe aparente apenas o quadrado e os pontos do segmento inicial.	*centro*; - defina a mediatriz entre os extremos do segmento com a ferramenta *mediatriz*; - defina um círculo de raio 1 e centro no ponto médio com a ferramenta *círculo dado centro e raio*; - marque uma das intersecções entre a mediatriz e o círculo com a ferramenta *intersecção de dois objetos*; - defina o triângulo utilizando o ponto de intersecção e os pontos do segmento inicial com a ferramenta *polígono*; - deixe aparente apenas o triângulo e os pontos do segmento inicial; - selecione a ferramenta polígono rígido e de um clique obre o triângulo recém criado para duplicá-lo.

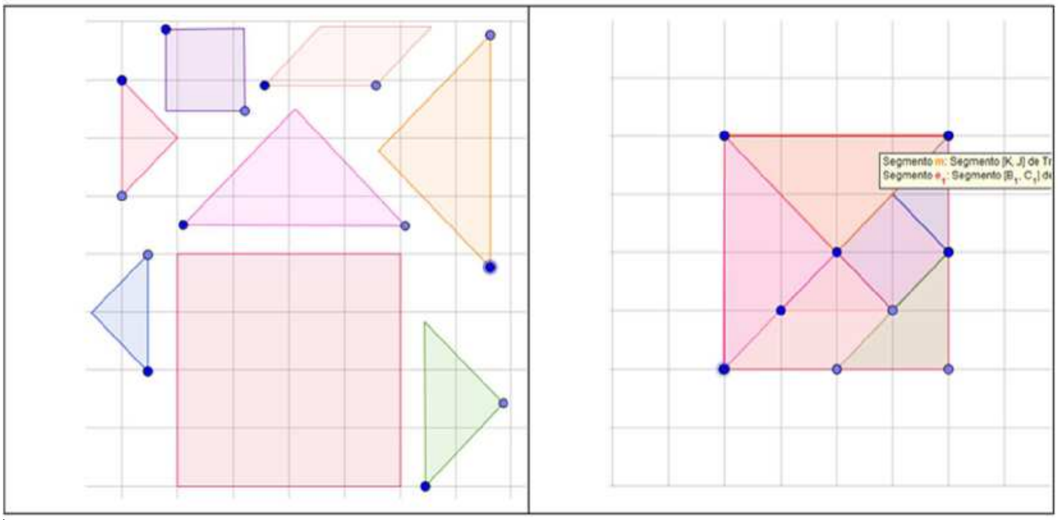


Figura 3. Construção do Tangram. Fonte: Autora.

Para finalizar, ressalta-se que o professor deve estar preparado para inserir esses recursos em sala de aula, mas também não deve ter como objetivo utilizar a tecnologia apenas pelo uso, sem uma intenção clara e bem estruturada.

Nesse sentido Barboza Jr (2009, p. 19), ressalta que: as tecnologias fornecem vários recursos que podem ser aplicados na educação, porém cada um desses recursos devem ser estudados e analisados pelos professores antes de serem usados em sala de aula, caso contrário, só servirá para informatizar o que era feito no modelo tradicional de educação.

Referências

Barboza Jr., A. T. (2009). Ambientes Virtuais de Aprendizagem um estudo de caso no Ensino Fundamenta e Médio. *Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Matemática*, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

Brasil (1996). *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. doi.org/10.1002/job.

Brasil (2013). *Guia de Tecnologias Educacionais da Educação Integral e Integrada e da Articulação da Escola com seu Território*. Retrieved from http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13018 &Itemid=948.

MEC/CNE-Ministério Da Educação, Conselho Nacional De Educação (2001). *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura*. Parecer número CNE/CES 1.302/2001.

NCTM (2015). *Principles to actions: Ensuring mathematical sucess for all*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Nóvoa, A. (2007). *Desafios do Trabalho do Professor no Mundo Contemporâneo*. Palestra de António Nóvoa, 1–24.

Perrenoud, P. (2000). *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artes Médicas.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Modelación en la Educación de las Ciencias y Matemática en la Primaria

Maria Salett **Biembengut**
FURB – Blumenau (SC)
Brasil
salett@furb.br

Resumen

En este artículo se presentan los principales resultados de una investigación cuyos datos empíricos fueron obtenidos de una experiencia pedagógica usando modelación en la educación con 36 niños de los 3º y 4º grados de los años iniciales de la Enseñanza Básica, integrando matemática y ciencias. El objetivo de la investigación fue comprender como los niños perciben el medio ambiente, explicitan y lo representan usando conceptos de matemática y ciencias. A partir de actividades didácticas sobre el tema embalaje, dos profesoras aplicaron la propuesta y obtuvieron datos durante un semestre lectivo. Los niños se involucraron en situaciones en las cuales pudieron relatar sus experiencias, percepciones y comprensiones del medio ambiente. Las actividades desarrolladas les permitieron: observar, interpretar símbolos y significados, relacionar e integrar los datos y evaluar situaciones de diversos contextos. Y por fin, dotadas de censo imaginativo, pudieron atreverse a crear algo, proponiendo un embalaje para un producto, involucrándose en la asociación de elementos que la componen.

Palabras clave: Modelación Matemática, años iníciales de la enseñanza básica.

Introducción

El niño se da cuenta de su medio ambiente, capta informaciones, identifica objetos y respectivas denominaciones, asimila los más diversos entes que la rodean y desarrolla significados específicos a las palabras y a las ideas. Y a medida en que tales informaciones, ideas, palabras, la instigaron a comunicarse, el lenguaje la conduce a estructurar su pensamiento, construir generalizaciones sobre su entorno y hacer conexiones entre sus ideas, llevándola a concebir y crear símbolos u objetos, formar conceptos, dar la forma, el color, el sentido al mundo en que vive (Biembengut, 2007).

La comprensión del niño sobre su entorno es mediada por sus interacciones sociales. El diálogo y la comunicación están en el ámago de sus interacciones. La continua interacción entre sus representaciones internas de pensamiento y sus experiencias diarias; modifica y perfeccionan la comprensión del niño sobre su mundo y su realidad. La relación entre el pensamiento y la palabra en un proceso dinámico, en un ir y venir del pensamiento a la palabra, de la palabra al pensamiento, se manifiesta en el aprendizaje del niño, continuamente.

En esa dinámica continua de reelaborar conceptos, cada vez más compleja y refinada, facilitada por su comunicación con entes alrededor, el conocimiento del niño ocurre. Y la continua afluencia de nuevos conocimientos, enraizada en su ambiente social, caracteriza su interacción entre lo que ya sabe y lo que está por aprender. En este ambiente, desarrolla la consciencia de la realización de sus procesos mentales y aprende a usar operaciones específicas mentales. Su concepción sobre ciertas relaciones, conceptos, objetos, a *groso modo* 'se refina', (re)conceptuando sus conocimientos existentes (Van Der Veer; Van Oers, 1991).

La matemática, por ejemplo, está presente en muchas actividades realizadas por el niño al jugar, al conversar, al resolver situaciones-problema que se presentan en su día a día. El medio ambiente es rico en formas, tamaños y colores; un escenario repleto de símbolos, signos y significados. En las acciones del niño, en casi todos los momentos, están presentes el contar, comparar, clasificar, medir, representar los más diversos entes. Este conocimiento matemático informal del niño deriva de todos los aspectos de su medio circundante, de sus experiencias diarias. Y traerá esas experiencias que forman la base de su entendimiento matemático a la escuela al pasar a frecuentarla. Y así siendo, en la escuela, esos conceptos intuitivos o espontáneos pueden tornarse conceptos científicos para el niño, si los procedimientos metodológicos utilizados para la enseñanza de ese niño le dispusieran un cuadro más abstracto de sus concepciones espontaneas, de una nueva forma de expresar lo que ya sabe sobre el medio circundante (Vygotsky, 1986).

Para eso, la escuela precisa atender esa cuestión y crear condiciones para que el niño vivencie el ambiente que lo rodea, capacitándolo para hacer asociaciones y transferencias que posibiliten la adquisición de mecanismos interpretativos y formadores de conceptos e imágenes en su mente. El aprendizaje de la matemática, por ejemplo, depende de acciones que caractericen el 'hacer matemática': probar, interpretar, visualizar, inducir, conjeturar, abstraer, generalizar y en fin demostrar y representar.

Aun, en algunas escuelas, la enseñanza de la matemática, por ejemplo, ha sido practicada de forma disociada a la realidad del niño, un acumulativo de conceptos, justificado por la secuencia de los contenidos previstos en el currículo escolar. Esta forma de enseñanza, muchas veces, lleva al niño a responder, de cierto modo, las cuestiones específicas (en general de aritmética) sin considerar la cantidad de informaciones que ya recibe de su medio ambiente, tampoco sus capacidades singulares. Eso contribuye para la pasividad e inhibición en la resolución de cuestiones efectivamente significativas.

Diversas investigaciones que tienen como fuente las prácticas de sala de aula reconocen la importancia de la intersección entre el conocimiento formal, que hace parte de los programas curriculares, y el conocimiento que el niño dispone de las influencias y de los estándares de interacción social y cultural. La perspectiva sociocultural del aprendizaje, por ejemplo, reconoce la necesidad que la escuela establezca un ambiente de aprendizaje para apoyar y orientar al niño en los primeros años de escolaridad en su desarrollo intelectual. A partir de una continua y dinámica relación entre pensamiento y expresión, orientarla, cada vez más, para una mejor comprensión de los contenidos. Echevarría y Graves (1998) destacan que un estímulo para que el niño interactúe con los demás en este proceso de aprendizaje, socialmente mediadas por el lenguaje, es sano para el desarrollo intelectual.

Así, utilizar las situaciones cotidianas o del medio circundante puede contribuir, por ejemplo, para una mejor formación del conocimiento del niño en cualquier fase de la escolaridad, desde: identificar, describir, comparar y clasificar los objetos y cosas alrededor; visualizar y representar los más diversos entes; representar y resolver situaciones-problema y, especialmente, comprender mejor los entes que la rodean. Al final, el niño tiene amplia gama de conocimientos y experiencias anteriores al usar formas para solucionar las situaciones-problema.

Kamii, Rummelsburg y Kari (2005) promovieron la utilización de resolución de problemas para desarrollar en los niños de los años iniciales de la Enseñanza Básica la capacidad de clasificar, crear una serie de objetos, descubrir y decidir sobre las relaciones espaciales y temporales. Con base en investigaciones como la referida, se puede afirmar que la capacidad de los niños en los años iniciales de la Enseñanza Básica de compartir sus pensamientos, sus ideas, eficazmente, uno con otros, demanda tiempo y procedimientos metodológicos de enseñanza que les permitan desarrollar formas de lenguaje y comunicación formal, en el ámbito escolar. En esa perspectiva, la enseñanza de matemática y ciencias precisa ser por medio de actividades que le permitan entender el medio ambiente que lo rodea en el sentido cuantitativo y llevarla a representar, por medio de símbolos matemáticos, los entes o artefactos que observa y por los cuales se interesa.

Así, se considera la Modelación Matemática y Ciencias en el ámbito escolar, en los Años Iníciales de la Enseñanza Básica. La modelación ha estado presente en los documentos oficiales educacionales, como proceso o método de enseñanza en las diversas fases de escolaridad. En los años iniciales, su propósito es crear condiciones para que aprenda a investigar y pase a comprender el significado de lo que está estudiando. Una vez que las actividades envueltas en el proceso buscan llevar al niño a entender una situación o un contexto y conocer el lenguaje de la matemática que le permita describir, representar, resolver una situación o un asunto de su contexto e interpretar/lidiar el resultado dentro de ese contexto (Biembengut, 2007).

Cada persona procesa la información que percibe de un modo, de acuerdo con sus propias funciones. En la realización de cualquier actividad es requerida de la persona una serie de procedimientos que empieza por la cuidadosa observación de la situación a ser realizada, después por la interpretación y por la representación del que la realizó. Aunque ese proceso ocurra sin que la persona se dé cuenta de esas fases, de la forma como realiza cada actividad requerida expresa sus percepciones de la realidad, del deseo de comprensión y representación.

En el proceso de percibir un fenómeno, comprender y explicar por medio de una teoría y respectivos lenguajes o sistemas de símbolos además de describir o representar externamente, se puede reconocer los mismos procesos mentales que se realizan para construir lo percibido. Basada en la literatura sobre el proceso cognitivo, prescribió las fases de la Modelación Matemática para los años iniciales de la Enseñanza Básica, como siguen.

1ª fase: *Percepción y aprehensión.* Precisa estimular la percepción y el interés de los niños sobre algún ente o tema de su contexto, elegido para que valga como guía. Las actividades propuestas buscan envolverlas con la naturaleza de este tema (belleza, encanto, harmonía) y con los símbolos contenidos en temas que les sean familiares, aguzando la observación y la atención para las cosas que aún no se haya dado cuenta. Esto significa que este tema valga como algo que las motiven, en otra instancia, a prender matemática, ciencias, entre otros. Fase en que los niños se adentran en el tema y obtienen datos.

2ª fase: *Comprensión y explicación.* Consiste en llevar a los niños a identificar algunos elementos de este tema de su contexto en el sentido cuantitativo y cualitativo y, con base en las ideas las cuales ya poseen, enseñarles lo que aún desconocen: conocimientos que hacen parte del contenido curricular y también no curricular, pero que se hacen presentes en su entorno. En la medida en que se enseña cada contenido, lleva a los niños a explicitar estos contenidos, de las más diversas formas: oralmente, cuestionándolas, o escrito, por medio de dibujos, ejercicios, entre otros.

3ª fase: *Representación y modelación.* Trata de despertar el sentido creativo de los niños para resolver cuestiones sobre entes que observan y se interesan y hacer representaciones de algún ente en términos de un modelo. Es el momento de impulsarlos a reorganizar variedades de situaciones, plausibles de ser traducidas en el lenguaje de la matemática y de las ciencias que les permitan hacer uso de estos conceptos para aprender más sobre tantas otras cosas de su entorno fuera del contexto escolar.

Por considerársele condición natural del proceso cognitivo, *¿cómo el niño de los años iniciales de la Enseñanza Básica por medio de la Modelación percibe algunos entes del medio, explicita y se representa utilizándose de conceptos matemáticos y de ciencias de la naturaleza?* Basados en la aplicación de la Modelación por medio de esas tres fases, en esta investigación el objetivo fue comprender como los niños de los años iniciales de la Enseñanza Básica perciben el medio que las circunda, explicitan y representan ese medio usando conceptos de matemática y ciencias de la naturaleza.

Procedimientos metodológicos

Para alcanzar ese objetivo, la investigación fue organizada en tres etapas: la *primera*, elaboración de las actividades didácticas y preparación de profesoras, colaboradoras de la investigación en la aplicación; la *segunda*, aplicación en aula para dos grupos de estudiantes; y la *tercera*, para estudio y análisis de los datos, como está explicitado enseguida.

1ª Etapa: Actividades didácticas y preparación de la profesora

Se hizo un material didáctico, sobre el tema-guía: *embalaje*, considerando las fases *percepción y aprehensión, comprensión y explicación y significación y expresión* con enfoque en los contenidos de matemática y ciencias, simultáneamente. En seguida, fueron invitadas las profesoras de los Años Iníciales de la Enseñanza Básica a participar de un curso para que conozcan este proyecto. El curso con duración de 45 horas contó con la participación de 18 profesoras. A partir de las explicitaciones, reflexiones y sugestiones de las profesoras durante el curso y al final de este, se buscó perfeccionar el material.

Todas las profesoras aplicaron las actividades didácticas y participaron en las reuniones quincenales con el grupo de la coordinación de esta investigación, a fin de informar los sucesos. Sin embargo, se optó por acompañar y analizar los datos de las aplicaciones didácticas de dos profesoras la misma escuela pública a 2 km de la institución en que la coordinación de esta investigación pertenecía, facilitando hacerse presente a las clases durante la aplicación de la propuesta para observar los sucesos. Las profesoras aplicaron la propuesta durante el segundo semestre lectivo de 2017 y ofrecieron datos durante el proyecto y al final de este.

2ª Etapa: Aplicación e información de los resultados

Participaron de esta investigación 36 niños, subdivididos en dos clases, de cada una de las profesoras: 20 del 3º grado y 16 del 4º grado de la Enseñanza Básica. La dirección de la Escuela, bien como los padres o responsables de los niños acataron y apoyaron el proyecto. Se destaca que el material didáctico les sirvió de guía a las profesoras. El material didáctico, dividido en 10 actividades, envuelve conceptos matemáticos (aritmética, geometría y sistemas de medidas) y de ciencias.

Las profesoras reorientaron cada actividad en diversas subactividades, considerando los tiempos requeridos por los niños para darse cuenta y entender tanto las propuestas como los contenidos programáticos, sin limitarse al programa a ser cumplido. Aunque las profesoras hayan recibido el aval de la dirección escolar y de los familiares de los niños, optaron por aplicar la propuesta de Modelación dos días por semana, por dos razones: desarrollar los demás contenidos del programa curricular de acuerdo con el libro didáctico en los otros tres días lectivos y evitar posibles contratiempos con los familiares de los niños.

Quincenalmente, las profesoras relataban a la coordinación de esta investigación: sucesos, actividades realizadas por los niños y cambiaban ideas y sugerencias. Los datos se derivaron de observaciones realizadas por la coordinación, informes de las profesoras, trabajos realizados por los niños y evaluación escrita realizada por los niños conteniendo cuestiones que envolvían los contenidos curriculares. Las profesoras disponían de un formato para registrar los sucesos, conteniendo: fecha, subactividad, contenidos desarrollo de los sucesos. Entre los sucesos las profesoras registraban dificultades y avances de aprendizaje de los niños y tiempo requerido.

3ª Fase: Análisis de los datos

Para comprender como esos niños de los años iniciales de la Enseñanza Básica, por medio de la Modelación en las ciencias de la naturaleza y matemática percibieron, explicitaron y representaron las actividades didácticas, se apoyó en la esencia de los procesos cognitivos (*percepción, comprensión*, *representación*) presentados por algunos investigadores de ciencia cognitiva e investigadores de educación matemática que se fundamentan en teorías sociocognitivas. Para cada fase, fueron establecidos criterios e indicadores que permitiesen comprender los datos obtenidos por medio de las observaciones realizadas por la coordinación, de los informes descriptos por las profesoras y de los trabajos y evaluaciones escritas realizadas por los niños. Para establecer indicadores que pudiesen verificar cambios en cada fase, se utilizaron las orientaciones de los Documentos Oficiales sobre los contenidos programáticos que estudiantes de estos años escolares (3º y 4º) precisan saber. Los criterios en cada fase y los respectivos indicadores se encuentran en orden creciente de dificultad.

En la fase *percepción y aprehensión* del embalaje: colores, formas geométricas, palabras, símbolos, orientaciones sobre el producto y direcciones. El análisis de esta fase fue basado en los sucesos en sala de aula de todo el grupo de niños, mediante observación y registro de la coordinación de la investigación. La razón de basarse en la percepción del grupo y no de cada niño se debió al hecho de que, al ser instigadas a expresarse oralmente su percepción, respondían casi sincrónicamente.

En la fase *comprensión y explicación* de los contenidos programáticos de ciencias y matemática: respuestas o cuestionamientos de forma oral en las clases, resolución de actividades escritas individual. El análisis de esta fase tuvo como fuente los registros de las profesoras sobre las evaluaciones orales y escritas realizadas por los niños.

En la fase *representación y modelación* del embalaje: hechura de embalajes en grupos de 4 o 5 niños y evaluación de contenidos, individual. En el análisis de los embalajes elaborados por los grupos los criterios fueron: forma y tamaño, detalles (datos, marca), originalidad. Y de los contenidos de ciencias y matemática: resolución de cinco situaciones-problema con algunos tópicos tratados durante el proyecto. Esta evaluación fue preparada por la coordinación de la investigación, en conjunto con cada una de las profesoras, aplicada al final del proyecto, para ser elaborada individualmente. El análisis consideró, también, las entrevistas concedidas por los 43 niños, las dos profesoras y la directora de la escuela, al final del proyecto.

Descripción y Discusión de los Resultados

Se presentan, a seguir, (a) relato y discusión de las actividades realizadas por las dos clases conjuntamente, (b) síntesis de los principales resultados, de acuerdo con los criterios e indicadores adoptados. Las diferencias de las aplicaciones entre cada clase (3º y 4º grados) ocurrieron en la extensión de los contenidos de matemática y ciencias y en el tiempo requerido para que cada clase aprenda y realice las actividades propuestas. Debido a las similitudes de los sucesos y por razón de espacio, la descripción y la discusión de los resultados son hechas en las dos clases conjuntamente, destacando confluencias de acontecimientos y desarrollo de las actividades en cada una de las tres fases: *percepción y aprehensión*, *comprensión y representación*, y *representación y significación*. Vale destacar que esas tres fases ocurrieron en cada actividad, en un proceso circular de construcción de relaciones entre cada componente, cada contenido curricular o no curricular enseñado.

(1ª) *Percepción y aprehensión*

Esta fase pretendió estimular la percepción de los niños de entes que envuelven un embalaje. Ocurrió en diversos momentos durante el semestre lectivo, a cada cuestionamiento sobre embalaje, a cada contenido programático que se pretendía desarrollar. En los dos primeros días del inicio de la propuesta para los niños, esa fase tuvo un carácter especial. Por ejemplo, las profesoras empiezan la propuesta cuestionando a los niños sobre: *lo que es un embalaje, para que sirve y cuales conocían*. Este momento fue de euforia: todos querían decir las respuestas de las cuestiones al mismo tiempo; que conocían diversos embalajes, destacar cuales eran los productos. En secuencia, las profesoras explicitaron la propuesta (aprender los conceptos de matemática y ciencias de la naturaleza a partir de embalajes) y que deberían traer algunos embalajes en la próxima clase.

En la clase siguiente, organizados en grupos, los niños empezaron a manipular los embalajes, observándolos y decir lo que perciban en ellos. La primera percepción enfoca los colores y las imágenes sugestivas del producto que viene contenido el embalaje. Pero, siguiendo, otros ítems impresos fueron percibidos, como: formas geométricas, palabras (dirección, descripción del producto), números (descripción de cantidades). Dos grupos del 4º grado identificaron el código de barras y símbolo de porcentaje, medidas; y uno del 3º grado, tamaños de los embalajes. Diálogo y comunicación contribuyeron para que los niños aguzasen sus percepciones y, así, los conocimientos (Sfard, 2001).

En la secuencia, los niños describieron y registraron lo que identificaron en los embalajes, permitiéndoles a las profesoras saber lo que los niños ya conocían. Y de este punto, las profesoras presentaron la cuestión- guía que permitiría desarrollar la propuesta de Modelación: ¿*Qué es preciso para hacer un embalaje*? Y después de instigarlas a la respuesta, las profesoras escribieron las sugerencias de los niños en el pizarrón e incluyeron algunas otras. Entre éstas:

(Q_1) *¿Embalaje para qué producto y qué consumidor?* (Q_2) *¿Cómo deben ser la forma, el color y las imágenes?* (Q_3) *¿Cuál es el material necesario?* (Q_4) *¿Cuáles son las informaciones que deben ser impresas?* (Q_5) *¿Cuáles deben ser las dimensiones: área, volumen, capacidad, masa?* (Q_6) *¿Cuál es la cantidad de material?* (Q_7) *¿Si este embalaje será transportado, cómo embalarlo?* (Q_8) *¿Cuánto tiempo tardará para llegar a destino?* (Q_9) *¿De dónde viene y para dónde irá?* (Q_{10}) *¿Sobre el código de barras: qué es? ¿Qué informaciones trae? ¿Cómo inferir las informaciones*? (Q_{11}) *¿Qué destino se le puede dar al embalaje después de utilizado?* A partir de esas cuestiones, cada profesora estableció un orden para que se pudiera desarrollar con su respectiva clase de estudiantes (3º o 4º grados) los contenidos programáticos de matemática y ciencias, durante el semestre lectivo.

Esa fase, *percepción y aprehensión*, no ocurrió a la par de los demás; durante todo el proyecto, siempre que fuera pertinente, las profesoras los llevaban a percibir algo más en los asuntos tratados, para así abstraer y saber aplicar esos conocimientos de ciencias y matemática en la solución de situaciones-problema propuestas. Por ejemplo, en la primera clase, cuando los niños observaban y manipulaban los embalajes, ninguno mencionó sobre la descripción de los productos (valores nutricionales). Pero, en el momento en que cada una de las profesoras fue a enseñar esos contenidos de ciencias, los niños percibieron esas informaciones descriptas en los embalajes de varios productos.

Los sucesos registrados mostraron que los niños percibieron y aprendieron los aspectos de los embalajes. Eso se comprobó en la evaluación escrita y en el embalaje creado. Al final del proyecto, las profesoras les cuestionaron a los niños sobre qué es lo que percibieron de los embalajes. Y entre los diversos aspectos levantados, uno de los grupos de niños del 5º grado llamó la atención sobre la cantidad de basura que los embalajes traían, alertando que deberían reciclarlos. Dice Gombrich (1986) que primero se mira para el objeto con una mirada atenta y después para otros elementos que lo componen.

(2ª) *Comprensión y explicación*

Esta segunda fase consistió en enseñarles a los niños a entender los diversos elementos característicos de embalajes en el sentido también cuantitativo y llevarlos a representar, basados en los conceptos aprendidos de matemática y ciencias, respuestas a las once cuestiones (presentadas anteriormente). Estas cuestiones les permitieron a las profesoras tratar, discutir y enséñarles a los niños todos los contenidos programáticos de matemática y ciencias, bien como otros varios tópicos de las disciplinas del período escolar de cada grupo de niños (3º o 4º grado), teniendo como referencia los PCN (*Parâmetros Curriculares Nacionais*), que aunque no fueron parte directa del proyecto, justificaron integrarlas.

Se citan algunos de los tópicos de los contenidos programáticos tratados en cada cuestión. Sobre ciencias de la naturaleza: Q_3 – constitución, resistencia del material (cartón, plástico, metal); Q_4 – composición de los productos, nutrientes; Q_{11} – basura, reciclaje, protección del medio ambiente, recomendaciones a la salud. Sobre matemática: Q_5, Q_6, Q_7 – formas geométricas, operaciones con números racionales, medidas lineales, superficie, volumen, capacidad y masa; Q_7, Q_8 – espacios geográficos, escala, mapa, tiempo. Otras asignaturas: todas las cuestiones permitieron enseñar algo sobre la lengua materna y formas de lenguaje no verbal (diseño gráfico, código de barras); Q_7, Q_8 e Q_9 – geografía (localización, distancia, producción); Q_1 e Q_2 – artes (composición, colores, estética); Q_{11} – ética (responsabilidad social, protección al medio ambiente). Las respuestas a estas cuestiones formuladas por los niños sobre la orientación de las profesoras permitieron conferir indicaciones de los PCNs (*Parâmetros Curriculares Nacionais*) referentes a los objetivos generales de la Enseñanza Básica.

Durante todo el período de desarrollo de las actividades, los niños disponían de diversos tipos de embalaje, los cuales eran manipulados, consultados, en la medida en que los contenidos eran desarrollados, no desvinculándolo de la realidad. Con apoyo del laboratorio de informática, fueron planificados momentos en que los niños pudieron buscar más informaciones sobre las diversas cuestiones en sitios electrónicos por medio de *internet*. Las profesoras formalizaban los contenidos y presentaban un conjunto de ejercicios complementarios en el momento en que juzgaban necesario. Además de eso, procuraban instigar en los niños un sentido investigativo y la explicitación de sus hechos unos a los otros. Fueron momentos importantes en que los niños estuvieron orientados a socializar conceptos aprendidos y estimulados a explicitar verbalmente entre ellos los conceptos nuevos.

Como ya fue dicho anteriormente, en cada actividad, basadas en las cuestiones levantadas, las profesoras, de acuerdo con sus proyecciones, aplicaron evaluaciones de forma oral y escrita para verificar lo que los niños habían aprendido en relación a los contenidos de matemática y ciencias. Para efecto de esta investigación, los resultados de estas evaluaciones orales y escritas constaron en la descripción de sucesos realizadas por las profesoras.

En las evaluaciones orales, cada profesora llevaba su grupo de niños a algún ambiente de la escuela y/o presentaba algún material (película, revistas, imágenes del medio ambiente) y efectuaba cuestiones sobre elementos de ese ambiente o de esos materiales, cuyas respuestas implicaran conceptos matemáticos y de ciencias desarrollados. Todos los niños participaban respondiendo las cuestiones. La profesora efectuaba las cuestiones de acuerdo con el asunto abordado, dirigiéndose a todos los niños y solicitaba que levanten la mano caso quisieran responder. Si algunos niños dejaban de responder alguna cuestión, a medida en que uno presentaba la respuesta correcta, la profesora cuestionaba a los demás sobre la validad de la respuesta del compañero/a, envolviendo al grupo en la validación. Kieran (2001) y Lerman (2001) destacan cuan productivas son las discusiones entre los estudiantes al buscar comunicar sus ideas a los demás, y cuan capaces los tornan en la realización de las tareas propuestas, inclusive en sus actividades fuera del ambiente escolar.

En las evaluaciones escritas, cada profesora elaboraba un conjunto de cuestiones relativas a los contenidos que constaban en los respectivos programas curriculares de ciencias y matemática del período lectivo del grupo de niños (3º o 4º grados), no sólo relacionado al tema embalaje. En esas evaluaciones, cada niño, individualmente, debería resolver las actividades aplicando esos contenidos de ciencia y matemática. Fueron realizadas cuatro de estas evaluaciones escritas, una al final de cada mes. Al final de cada actividad, en la evaluación escrita, más de 30 de los 43 de niños efectuaban correctamente casi todas las cuestiones de matemática y ciencias, alcanzando el índice de acierto superior a 80%. Y apenas seis niños (cuatro del 3º y dos del 4º) presentaron índice de acierto inferior a 25%.

Las dos profesoras disponían de un tablero con el nombre de cada niño para anotar el índice de desempeño de ciencias y de matemática, en cada evaluación escrita; y otro tablero, constando el grupo, respectivos nombres de los niños, e índice de desempeño del grupo. Esas actividades realizadas por los niños mostraron sus manifestaciones resultantes de sus percepciones y comprensiones. Según George (1973), la percepción está estrechamente relacionada con el pensamiento, la resolución de problemas y los procesos decisorios. La diferencia entre esos puntos reside en el grado de complejidad de la percepción y su relación con la situación real de la resolución de problemas - lo que se cristaliza en torno de la naturaleza de la percepción influenciada por las emociones, proyectos, deseos y/o intenciones inconscientes.

(3ª) *Significación y modelación*

En esta fase, los niños fueron encorajados a representar los diversos datos obtenidos de cada actividad y/o subactividad propuesta y también a reconocer contenidos matemáticos y de ciencias de la naturaleza aprendidos en otros asuntos, otras cuestiones, basados en el conocimiento y en las referencias de los aportes sobre embalajes. Significó, construir relaciones entre los contenidos curriculares y el contexto a partir de una subyacente concepción de matemática y ciencias de la naturaleza, con la que proviene la integración del conocimiento dentro de la estructura teórica.

Al final del semestre lectivo, les fue propuesto a los niños la creación de un embalaje para algún producto. Reunidas en grupos de tres o cuatro, deberían elegir un producto que utilice algún embalaje, analizar este embalaje e imaginarlo con otro para el mismo producto. Deberían discutir sobre forma, tamaño, colores, estética, datos que puedan constar en el nuevo embalaje a ser creado. Formaron cuatro grupos en el 4º grado y cinco en el 5º grado. Los embalajes elegidos fueron para los productos que tenían acceso, como: golosinas (2), biscochos (2), gaseosas o jugo (4), jabón (1).

Los niños trajeron a las clases los embalajes de productos que eligieron y, durante tres días lectivos, respectivamente 6 horas/aula en cada grupo, analizó los diversos elementos presentes en el embalaje, discutió sobre lo que se podía cambiar y por qué cambiarlo. En secuencia, pasaron a esbozar posibles versiones del modelo de embalaje. Este diseño fue una primera expresión en el respectivo grupo. Y de este diseño buscaron utilizar materiales que pudiesen crear un nuevo embalaje. Por medio de este modelo geométrico, cada grupo pudo aplicar los diversos conceptos aprendidos, efectuar interpretaciones geométricas y la compresión de lo que es simbólico. Eso se mostró en los cambios de ideas entre ellos durante la elaboración de los embalajes.

Los embalajes creados por los nueve grupos se centraron en el modelo geométrico, en la expresión estética (colores, formas y tamaños de las fuentes de letras) y en la creación de otra marca al respectivo producto. Apenas un grupo del 3er grado presentó una forma prismática de embalaje para gaseosas. Los demás grupos alteraron sólo los tamaños. En todas constaron los dados que aparecen en los embalajes, copiando algunos, alterando otros, como: las descripciones sobre la composición del producto, la dirección, la marca y un conjunto de líneas para representar el código de barras. Los nove trabajos de los niños muestran que la mayoría se expresó bien las palabras en la descripción de los productos y en los registros constantes en embalajes.

La actividad cognitiva empezó con la experiencia de los niños, pasó de la experiencia vivida por palabras, en la comunicación de sus ideas a los profesores y entre ellas al grupo y continuó conectándose con la representación de datos, culminando con la elaboración de un modelo geométrico de embalaje haciendo constar los diversos elementos requeridos. Como la representación externa – modelo, antes de todo depende de cómo el niño percibe el ambiente, comprende, representa y procura comunicarlo, los embalajes creados no dejan de ser una simplificación de lo que conocieron, de lo que percibieron y aprendieron. Los embalajes criados, en este caso, son desprovistos de detalles refriéndose a lo que percibieron, comprendieron, los resultados aseguran verdad en muchas situaciones isomorfas (Engel; Vogel, 2007).

Al final del proyecto, fue organizada por la coordinación de esta investigación, conjunto con esas profesoras, una evaluación escrita para cada grupo de niños (3º y 4º grados), especialmente con la finalidad de verificar el aprendizaje de todos los contenidos de matemática y ciencias tratados en el período lectivo de vigencia del proyecto. Esta evaluación tuvo fines apenas para el análisis del proyecto. La evaluación de cada uno de los grupos fue compuesta por cinco situaciones-problema relativas al tema embalaje, cada una constaba de dos cuestiones que requerían aplicación de algún tópico de matemática y de ciencia para solucionarlas. Ejemplo de una de las cuestiones para el grupo del 4º grado: *Observe, en la imagen del embalaje de galletitas impresa a seguir, respectivos datos sobre sus medidas lineares (largo y ancho) expresas en el esquema y datos en el cuadro de valores. (1ª) ¿Qué cuantidad de material fue necesario para este embalaje (medida de la superficie)? (2ª) ¿Cuáles son los nutrientes que esa galletita trae?*

Las correcciones de esas evaluaciones fueron realizadas por las respectivas profesoras conjuntamente con la coordinación de la investigación. Los porcentajes de cuestiones resueltas de forma correcta: de los 20 niños de 3º grado, 9 alcanzaron arriba de 70% de matemática y 80% de ciencias, 11 entre 50 a 65% de matemática y en torno de 70% de ciencias y 4 niños en torno de 35% de matemática y 45% de ciencias; de los 20 niños del 4º grado, 7 alcanzaron arriba de 70% de matemática y de 85% de ciencias, 09 entre 50 y 70% de matemática y entre 60 a 70% de ciencias, y 4 abajo de 30% de matemática y en torno de 40% de ciencias. Las dificultades de la mayoría de los niños del 3º grado fueron en operaciones aritméticas que envolvían medidas de superficie y volumen; y del 4º grado, operaciones que envolvían números racionales en la forma decimal. En ciencias, las dificultades en recordar algunos conceptos relativos a los componentes del medio ambiente y de la preservación de la salud.

La coordinación de la investigación con las dos profesoras reflejaba sobre los resultados de esta evaluación y de las cuatro evaluaciones escritas realizadas al final de cada parte del contenido programático que muchos de esos niños que no supieron aplicar algún concepto de matemática y ciencia en esta evaluación, resolvieron acertadamente cuestiones similares contenidas en una de las cuatro evaluaciones escritas. Por ejemplo, 60% de los niños del 4º grado que no supieron calcular área - referente a la cuantidad del material del embalaje, resolvieron cuestiones similares en la 3ª evaluación escrita. Eso indicó que comprendieron y memorizaron tales contenidos, pero por no continuar usándolos, por medio de ese abordaje, se olvidaron. Es preciso aprender para hacer y hacer para aprender. Un proceso cíclico, en que el conocimiento se va formando harmónico, estructural, vital y orgánico.

Las profesoras consideraron que el tiempo planeado para enseñar estos tópicos a los niños, así como el número de actividades propuestas sobre los asuntos no fueron suficientes. Asimismo, posterior a la corrección de esta evaluación, las profesoras les solicitaron a los niños que se agrupen para rehacer las cuestiones que no supieron hacer durante la evaluación escrita. En lo grupos, rehicieron las cuestiones acompañado por la coordinación de investigación. Según Cobb y Yackel (1996) y Van Oers (2001), los niños, en las interacciones de las prácticas de sala de aula, reestructuran sus creencias y sus propios conocimientos, mejoran sus capacidades de comunicar unos con los otros, internalizan los conceptos, desarrolla sus sentidos crítico y creativo y también aprenden a escucharse, unos con otros, reafirmando su pensamiento y práctica de diferentes maneras. Comunicar una idea, una comprensión de algo a otro requiere una dinámica siempre en cambios y extremamente sensible al contexto y a la comprensión.

Síntesis de los principales resultados

En síntesis, los resultados presentados por esos 36 niños, integrando matemática y ciencias naturales por medio de los procedimientos envueltos en la Modelación durante un semestre lectivo: de los trabajos realizados por (embalajes) al final del período lectivo, de la evaluación escrita conteniendo los contenidos desarrollados en el semestre lectivo y, especialmente, de la descripción de las sucesos observados y registrados por las profesoras en cada actividad, justifican y motivan a continuar con esta propuesta para los años iniciales de la Enseñanza Básica. Algunos resultados que se evidenciaron:

Los niños realizaron todas las actividades en un clima de motivación e interés. Continuamente querían relatar sus ideas y sus trabajos y, gradualmente, sentían que sus ideas eran importantes y válidas. Entre tantos dichos de los niños, las profesoras remarcaron: *En el embalaje que hicimos para poner caramelo nosotros diseñamos un caramelo rojo y que es rico; pero nosotros sabemos que no se puede comer siempre porque estropea los dientes* (niño C_1, nueve años*); Nosotros vimos un montón de embalaje, sirve para lo que está adentro no se estropee cuando hay que viajar de una ciudad* (niño C_2, ocho años). *¿Lo que son estas rayitas negras del lado de esta caja, tiene unos finitos y otros gorditos?* (niño C_3, diez años).

La concepción de matemática y de ciencias se fue formando a partir del proceso de enseñanza utilizado, llevando al niño continuamente a percibir y aprender los diversos entes que traen los embalajes, que van más allá de la cuestión estética y de la conservación del producto, especialmente, sobre la responsabilidad de todos con el medio ambiente y con la salud.

Los contenidos de ciencias naturales, como: diferentes ambientes naturales de los seres vivos, componentes que se presentan en estos ambientes (agua, luz, calor, solo), funciones de alimentación, sustentación, locomoción y reproducción, preservación de la salud y del medio ambiente, entre otros, fueron desarrollados de forma integrada, sin desvincularse de la matemática y de las prácticas de oralidad, lectura y escrita de la lengua materna.

Los niños recorrieron etapas da investigación científica, según la propuesta de los PCN (Brasil, 1998) al ser instigadas durante todo el proceso a formularles preguntas y suposiciones sobre los diversos elementos que envuelven un embalaje; buscar y recolectar datos por medio de observación directa o lectura de textos; organizar y registrar esos datos a través de diseños, cuadros, esquemas, listas y pequeños textos; interpretar estos datos y al comunicarse oralmente y por escrito sus ideas, datos, resultados.

Los trabajos hechos por los niños muestran que percibieron y comprendieron los contenidos desarrollados a partir de las cuestiones relativas al embalaje y también supieron crear: concebir las formas, los colores; representar ese medio a partir de la técnica y de los conceptos aprendidos. Con base en su percepción y composición del modelo geométrico del embalaje, cada niño pudo comprender mejor los conceptos de la matemática y ciencias, mejorar el entendimiento sobre la responsabilidad de todos con el medio ambiente y con la salud de las personas.

Las profesoras voluntarias se mostraron motivadas con el proceso y los resultados, asumiendo la propuesta como parte de su programa curricular. Si por acaso en algún momento, tuvieran que tomar decisiones sobre lo que deberían enseñar, a quien orientar y como responder determinadas solicitaciones de cada uno de los niños. Todas esas tareas las motivaban a entender el contexto, a fin de ser capaces de enseñar a los niños y, al mismo tiempo, permitirles hacer sus diseños de acuerdo con sus ideas, sus voluntades. De acuerdo con las profesoras: *Aunque la Modelación exigió más de mí en tener que estudiar, prepararme para enseñar y al mismo tiempo responder a muchas preguntas de los alumnos, verlos aprendiendo fue maravilloso* (profesora P_1 del 3º grado). *Aprendí bastante con esta propuesta, de hecho más que los niños; desde que soy profesora hace diez años ensañaba a cada momento una materia, y esta vez fui viendo que las materias se integran para resolver un problema, para crear alguna cosa, los otros días que tenía que enseñar otras materias continuaba usando los embalajes porque tiene todo* (profesora P_2 del 4º grado).

Los dirigentes pedagógicos de la Escuela se mostraron satisfechos no sólo por el resultado positivo en relación con el buen estado motivacional de los niños, sino, principalmente, por haber sido un trabajo que instigó el sentido creativo y el valor de la cuestión ambiental y de la salud. Como dijo la directora: *Fue lindo ver a los niños de las dos clases motivadas, manipular los embalajes y procurando saber todo sobre los mismos: palabras, números, colores, diseños, tipo de material; después al final, llevándolos al basurero y enseñándoles a los otros alumnos la importancia de dejar todo limpio para tener salud y el reciclaje para proteger la naturaleza. Proyectos como éste deberían estar siempre en las escuelas, con profesores de la universidad trabajando con nosotros para mejorar la educación*.

Consideraciones Finales

Los documentos generados durante la vigencia de este proyecto permiten afirmar que a medida en que fue estimulada la curiosidad de aquellos 36 niños de la Enseñanza Básica en percibir y comprender el medio en que habitan, representar diferentes acontecimientos o informaciones percibidas y elaborar categorías propias (símbolos y mensajes), la mayoría de los niños exhibieron avances en su habilidad de entender y de responder las actividades propuestas. Eso afeto tanto la evaluación de lo que conocían como de lo que desconocían.

Esos niños se envolvieron en situaciones en las cuales pudieron relatar sus propias experiencias directas, sus propias percepciones y comprensiones del medio circundante, para entonces aprender los conceptos de matemática y ciencias, describiendo o interpretando ese medio. Las actividades desarrolladas les permitieron intensificar y ensanchar sus entendimientos y la utilidad de estos contenidos desarrollados, bien como aprender a observar, a interpretar símbolos y significados, a relacionar e integrar los datos del medio externo, a resolver y evaluar situaciones de diversos contextos e intereses. Dotadas de sentido imaginativo, pudieran atreverse a crear algo, proponiendo un embalaje para un producto, envolviéndose en la asociación de elementos que las componen.

Fundamentada en los resultados de la aplicación de ese proyecto con ese grupo de niños y en las producciones de investigación similares aquí referenciadas, esa investigación indica, una vez más, que la educación escolar precisa tener como punto de partida el conocimiento intuitivo de los niños y, a partir de actividades que les permitan percibir, comprender, representar su medio ambiente, llevarlos a ampliar sus conocimientos y sus habilidades en utilizarlos. Una educación que desarrolle el potencial inherente a los niños, de tal modo que puedan perfeccionar sus conocimientos continuamente; conocimientos que les aseguren sus independencias personales, sus propias existencias en el recorrer de la vida.

Dewey, en 1922, sustentaba que la educación tiene dos aspectos: *uno* consiste en estimular el proceso cognitivo del niño, y el *otro* en derivar ese estímulo de la situación social en que se encuentra el niño. Estos dos aspectos se completan y no son más que visiones de un mismo, proceso apreciado sobre dos puntos de vista. De esta perspectiva, la Modelación en la matemática y en las ciencias de la naturaleza guía a los niños de los años iniciales de la Enseñanza Básica a adquirir conocimiento en torno de un tema o un ente de contexto que les despierte interés. Interés que le permita al profesor estimular el proceso cognitivo de estos niños (en percibir, comprender, representar), desarrollarle el conocimiento (el contenido curricular y no curricular) que juzgue necesario y, además de todo, propiciarles que efectúen conexiones con otros temas, otros conocimientos, aprendiendo la investigación.

Referencias y bibliografía

Biembengut, M. S. Modelling and applications in Primary Education. In: HAINES, C. *et al. Modelling and Apllications in Mathematics Educacion*. New York: Springer, 2007, p.451-456.

Blum, W., et al. Modelling and applications in Mathematics Education. New York: Springer, 2007.

Brasil. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros curriculares nacionais: primeiro e segundo ciclos: matemática* / Secretaria de Educação Básica. – Brasília: MEC/SEF, 1998.

Dewey. J. *Human nature and conduct*. New York: Henry Holt and Co., 1922.

Echevarria, J.; Graves, A. sheltered content instruction: teaching English language learners with diverse abilities. Boston, MA: Allyn & Bacon, 1998.

Engel, J.; Vogel, M. Mathematical problem solving as modeling process. In: BLUM, W. *et al*. *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer, 2007. p. 275-284

George, F. *Modelos de pensamento*. Tradução de Mario Guerreiro. Petrópolis: Vozes, 1973.

Gombrich, E. H. *Arte e ilusão*. Tradução de Raul de Sá Barbosa. São Paulo: Martins Fontes, 1986.

Kamii, C.; Rummelsburg, J.; Kari, A. Teaching arithmetic to low-performing, low-SES first graders. *Journal of Mathematical Behavior. v. 1, n. 24, p.*39-50, 2005.

Kieran, C. The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics. v.46, n.* 1-3, p.187-228, 2001.

Lerman, S. Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics.* LOCAL, v. 46, n. 1-3, p. 87-113, 2001.

Sfard, A. There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational studies in mathematics. v.46, n.1-3,* p.13-57, 2001.

Van Oers, B. Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational studies in mathematics.* v.46, n. 1-3, p.59-85,1991.

Vygotsky, L. *Thought and language.* KOZULIN, A. (org), Cambridge: MIT Press, 1986.

El Programa Cronotopía: un enfoque modelo-teorético para las matemáticas, su epistemología, su historia y su didáctica

The Chronotopy Program: A model-theoretic approach to mathematics, its epistemology, its history and its didactics

Carlos Eduardo **Vasco** Uribe
Profesor Emérito y Doctor H.C. de la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá
Colombia
carlosevasco@gmail.com

Resumen

Desde distintos puntos de vista de la historia y la epistemología de las matemáticas, en los últimos CIAEM he venido proponiendo un enfoque global para las matemáticas mismas y para su epistemología, su historia y su didáctica: "El Programa Cronotopía". Este tiene como marco una filosofía sincrético-analítica que se concreta en una Metafísica con su ontología de procesos y sistemas, una Metagnósica con su gnoseología y su epistemología de modelos y teorías y una Metasémica con su semiología de representaciones e interpretaciones.

En esta conferencia paralela me propongo presentar los avances logrados hasta ahora en este Programa de Investigación en el sentido de Lakatos, Balzer, Moulines y Sneed, para desarrollar una disciplina académica que se llamaría "la Cronotopía".

Palabras clave: educación, matemática, filosofía, ciencias, modelos, teorías, didáctica.

Abstract

From different viewpoints of the History and Epistemology of Mathematics, in the last few IACME-CIAEM conferences I have been formulating a global approach to Mathematics, its Epistemology, its History and its Didactics: "The Chronotopy Program". It is framed in a syncretic-analytic philosophy specified in a Metaphysics with its Ontology of Processes and Systems, a Metagnosics with its Gnoseology and Epistemology of Models and Theories, and a Metasemics with its Semiology of

Representations and Interpretations.

In this parallel lecture I intend to communicate the advances achieved up to now in this Research Programme in the sense of Lakatos, Baltzer, Moulines and Sneed in order to develop an academic discipline that would be named “Chronotopy”.

Keywords: education, mathematics, philosophy, science, models, theories, didactics.

Mapa General de la Cronotopía y del “Programa Cronotopía”

El “Programa Cronotopía” se propone construir una ciencia —en el sentido de una disciplina académica o saber explícito, serio, sistematizado y disciplinado que pretende pasar de *doxa* —o mera opinión subjetiva— a *episteme* —o saber fundamentado y compartido que incrementa las probabilidades de éxito de quienes se apoyan en él para orientar sus prácticas— acerca de todos los aspectos del espacio-tiempo mental interno individual y subjetivo y de su proyección al espacio-tiempo físico externo u objetivo.

El “Programa Crontopía” comienza por el examen de las experiencias internas de quien escribe el texto que pretende “ser científico”, y no por la observación empírica con la que creemos estar en contacto directo con el espacio-tiempo externo o físico, el cual parece ser el mismo espacio y tiempo “públicos” o “sociales”. A pesar de toda la imagenología de los TAC, PET, RMN, MEG y otras tecnologías actuales, eso no lo sabemos ni lo podemos verificar (o, al menos, yo no lo sé y no se me ocurre cómo verificarlo). A lo más, podemos tratar de confirmar esa relación entre lo que yo creo percibir mentalmente en mis modelos internos y lo que sucede “allá afuera” según el éxito o fracaso de ciertas prácticas individuales y sociales que se han configurado según ese saber explícito. Esa ciencia se llamaría “la Cronotopía”, nombre en el que se combinan las raíces griegas de *tiempo (chronos)* y de *espacio* (*topos)*.

Así pues, esta muy nueva —pero a la vez muy antigua— ciencia de la Cronotopía pretende estudiar solamente el espacio-tiempo interno, a veces llamado “psicológico” o “psíquico”, al que, siguiendo una sugerencia de Bakhtin, llamo “mi cronotopo” y, de allí, se propone sacar consecuencias sobre todo lo que se diga o escriba por cualquier otro autor o autora acerca de su propio cronotopo interno y acerca del espacio-tiempo externo.

Siguiendo a Piaget, además de la única fuente profunda de mis introspecciones sobre las vivencias, experiencias, intuiciones e imágenes que experimento en mi cronotopo privado, las tres fuentes auxiliares de esta disciplina son: la primera, la psicogénesis u ontogénesis de los cronotopos mentales en los niños, niñas y adolescentes; la segunda, la sociogénesis o filogénesis del espacio-tiempo en la historia de las matemáticas como ciencias formales y en la de las ciencias fácticas y, la tercera, la teoría formal de procesos y sistemas, con sus sustratos, sus estructuras y sus dinámicas, que es la manera como interpreto “las estructuras formales” en Piaget.

El “Programa Cronotopía” intenta emular el “Programa de Erlangen” de Félix Klein para la geometría y la topología; el “Programa de la Relatividad General” de Einstein para el espacio-tiempo; el "Programa o Enfoque Onto-Semiótico EOS" de Godino, Batanero y Font; el "Programa Noético-Semiótico" de Duval; el "Programa Semiótico-Cultural" de Luis Radford; el "Programa Socio-epistemológico" de Cantoral y Farfán y el "Programa Etnomatemática" de Ubiratán d'Ambrosio y Paulus Gerdes como visiones globales de todas las matemáticas, su práctica, su historia y su epistemología, con las consecuencias que tiene cada programa para su pedagogía y su didáctica. Por lo anterior, es claro que el "Programa Cronotopía" tiene pretensiones muy ambiciosas, y no estaría muy desacertado quien lo tildara de megalomaníaco.

En mi cronotopo interno parecen fundirse como totalidades indiferenciadas —"sincréticas", diría Piaget— el espacio, como contenedor aparentemente vacío y sin límites asignables, las distintas formas de la materia y la energía, los líquidos y gases, los cuerpos sólidos o blandos, el cambio y el movimiento, y el tiempo en todas sus acepciones. Desde este punto de vista, el análisis cronotópico se podría calificar como "sincrético-analítico", pues parte de las totalidades sincréticas que creo percibir internamente e intenta superar los enfoques analíticos y los sintéticos para las matemáticas, su epistemología, su historia y su didáctica. Ese mismo análisis de mis imágenes y modelos mentales y del trasfondo desde donde parecen surgir también podría llamarse "modelo-teorético", pues juega dialécticamente con distintas teorías tratando de interpretarlas en distintos modelos y con distintos modelos tratándolos de expresar por medio de distintas teorías, a veces mutando los modelos para que se ajusten mejor a las teorías y a veces mutando las teorías para que correspondan mejor a los modelos.

Para ello partí de la teoría de modelos en lógica matemática, ante todo del texto de Chang y Keisler explicado por Xavier Caicedo, y de la reinterpretación epistemológica de la relación entre modelos y teorías de Balzer, Moulines y Sneed en su arquitectónica de la ciencia.

Ese trasfondo difuso de mi cronotopo es el que me permite representarme, imaginarme o *modelar* mentalmente los procesos externos y representarme a mí mismo en forma privada todo el mundo externo o público, por medio de distintas imágenes y modelos mentales, pensados o imaginados o imaginarios que creo proyectar activamente sobre ese trasfondo con mi imaginación como proyector multimodal y multimedial, o que parecen surgir espontáneamente de él. Aunque solo puedo testificar sobre mi propia experiencia, y por eso solo podría hablar de mí mismo y de las vivencias subjetivas de mi trasfondo cronotópico y las imágenes y modelos que percibo, es en ese trasfondo en donde creo que cada uno de nosotros se imagina todos los aspectos de las matemáticas antiguas y modernas como ciencias formales, y todos los aspectos de la física antigua o astronomía y de la física moderna —o mejor "las físicas", por ser incompatibles la mecánica newtoniana, la relativista y la cuántica—, así como las demás ciencias fácticas. Solo digo que "creo" que cada uno de mis lectores y lectoras se imagina algo parecido sobre un trasfondo parecido, pero no puedo comprobarlo ni menos afirmarlo con alguna seguridad.

Creo también que esos modelos mentales imaginados e imaginarios son los que guían y regulan mi actividad en todo momento e intermitentemente tengo que "echarlos a correr" ("run") para "navegar" en el mundo externo, trayéndolos de la memoria a largo plazo a la memoria de trabajo, poniéndolos en marcha rápidamente y conectándolos de alguna manera con mis músculos y mis miembros para poder sobrevivir. Las pesadillas y el sonambulismo, así como la expresión "soñar despierto", dan mucho material para pensar en la reformulación cronotópica de las matemáticas y las físicas. Por ello, las preguntas de investigación sobre la interfaz sensorial entre el mundo exterior y el interior y la interfaz cerebral entre los módulos sensoriales del cerebro y los módulos motores del cerebro y el cerebelo son esenciales al Programa Cronotopía.

Para decirlo con una sola imagen, supongamos que yo vivo en una casa de dos pisos. El Programa Cronotopía me dice que yo no subo y bajo por las escaleras de mi casa, sino que subo y bajo por la imagen sensomotriz de las escaleras que forma parte de mi modelo mental de mi casa.

Corrección: Mi *avatar* es el que sube y baja en ese modelo mental de las escaleras, y si funcionan bien mis conexiones interactivas intermitentes entre el mundo externo y el interno por los órganos de los sentidos y mi conexión interna entre cerebro y músculos, yo puedo subir y bajar las escaleras exitosamente. Esas son las mismas preguntas de fondo del Programa Cronotopía por la naturaleza y el funcionamiento de la interfaz sensorio-motriz.

Clave hermenéutica 1. Aunque ese avatar no suele revelarse espontáneamente a la atención interna, no es conveniente olvidar que mi avatar es el que me representa en mi cronotopo interno para cualquier formulación o reformulación cronotópica de las matemáticas y las físicas, especialmente en la construcción de sistemas de referencia con sus coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas. Pero hay un filtro cerebral de tipo *Gestalt* que rápidamente oculta al avatar cuando tratamos de examinar un modelo y entrever el trasfondo.

Corolario 1. Todo predicado P(–) de cualquier lengua articulada L que aparentemente sea n-ario o de n-puestos (“slots”) es al menos (n+1)-ario, porque está situado en una vecindad cronotópica mental que incluye al sujeto enunciador y al avatar z que lo representa en el modelo mental. Para decirlo de otra manera, todo modelo mental activado en mi imaginación es siempre cronotópico y está *situado* en una vecindad cronotópica que involucra una región limitada del espacio-tiempo en la que está contenido mi avatar z y los objetos de atención que me afectan. Por ello, todo predicado aparentemente unario P(–) atribuido a cierto objeto mental x, P(x), se refiere a una relación binaria entre ese objeto x y mi avatar z, relación que está situada en una vecindad cronotópica delimitada por fronteras difusas.

Clave hermenéutica 2. Este primer corolario es clave para la interpretación de los predicados monádicos o unarios $\mathrm{P}^1(–)$ y las proposiciones atómicas respectivas $\mathrm{P}^1(x)$ de cualquier lenguaje articulado L, pues los predicados monádicos o unarios $\mathrm{P}^1(–)$ pasarían a ser en realidad predicados cripto-diádicos o cripto-binarios (el prefijo *-cripto* se refiere al ocultamiento de la polaridad entre el objeto mental x y el avatar z). La polaridad adicional con respecto al sujeto enunciador y a su avatar z que lo representa, la cual se sitúa en la vecindad cronotópica implícita en el modelo mental, borra la distinción usual entre los predicados monádicos o unarios $\mathrm{P}^1(–)$ y las proposiciones atómicas respectivas $\mathrm{P}^1(x)$ y las relaciones binarias $y\mathrm{R}^2x$ or $\mathrm{R}^2(x,\ y)$; las proposiciones $\mathrm{P}^1(x)$ pasarían a ser relaciones cripto-diádicas o cripto-binarias, $\mathbf{R}^2[\mathrm{P}^1](x;\ z)$, y las segundas pasarían a ser relaciones cripto-triádicas o cripto-ternarias $\mathbf{R}^3[\mathrm{R}^2](x,\ y;\ z)$. Los operadores n-arios $@^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que producen un resultado y, representables como relaciones (n+1)-arias $\mathrm{R}^{n+1}[@^n](x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ pasarían a ser relaciones (n+2)-arias $\mathbf{R}^{n+2}[@^n](x_1, x_2, \ldots, x_n, y;\ z)$. En un lenguaje articulado L no habría pues sino términos simples y compuestos y predicados relacionales de distintas ariedades.

Clave hermenéutica 3. Esta inyección de los operadores n-arios $@^n](–)$ en el sistema de relaciones $R^{n+1}[@^n](–)$, que pertenecen a la estructura de otro sistema de orden superior, muestra que la dinámica de un sistema todavía no es suficiente para modelar la actividad o funcionamiento de un sistema en acción, en acto, lo que sería la cinemática o kinemática del modelo. En el Programa Cronotopía, esta distinción entre dinámica y cinemática, que corresponde a la potencia y al acto en la Metafísica y la Ontología clásicas, ya no solo sería utilizable en las ciencias físicas, sino que también se extendería a las matemáticas.

Si ahora quiero seguir avanzando en la reformulación de las matemáticas, su historia y su epistemología, el Programa Cronotopía me dice que el punto de partida son las experiencias subjetivas de mi cronotopo interno que vivo yo mismo cuando me involucro en actividades o prácticas que se suelen llamar “matemáticas, etnomatemáticas, matematizables” o de cualquier otra manera, como contar, medir, jugar ciertos juegos con reglas, resolver ciertos tipos de problemas o ejercicios, repetir rutinas según instrucciones explícitas u otras actividades parecidas. Sobre estas prácticas o actividades habría que citar numerosas referencias a los libros y artículos de Alan Bishop, Paul Ernest, Ubiratán D’Ambrosio, Paulus Gerdes, Yves Chevallard, Ricardo Cantoral, Teresa Farfán y muchos otros autores. La diferencia se da en la atención prioritaria que el Programa Cronotopía presta a las vivencias subjetivas de quien está involucrado en esas actividades, más que a las expresiones y formulaciones públicas, gráficas, verbales o de cualquier otra modalidad semiótica de esas prácticas o actividades, a las de los artefactos utilizados o a las de los resultados obtenidos por esas prácticas o actividades.

Además, el Programa Cronotopía me dice que yo no cuento, mido y juego con las líneas y figuras geométricas; ni calculo con las letras y los números u otros símbolos que aparecen en las superficies planas de los cuadernos, libros, pizarras y tableros; ni trabajo con las reglas, compases, calculadoras u otros artefactos, sino que manipulo imágenes tridimensionales en mis modelos mentales cronotópicos allá dentro de mi cerebro, intentando modular, regular y guiar ese procesamiento con la información que tengo en la memoria y con la información que recibo del exterior en tiempo real. Luego, trato de externalizar esas manipulaciones mentales y sus resultados imaginarios con palabras, gestos y dibujos, con el fin de examinarlas mejor yo mismo, de compartirlas con otros y someterlas a prueba por parte de mis interlocutores y del flujo de los procesos físicos naturales en los que estoy inmerso. Nótese que la palabra *manipulación* que utilicé ya es metafórica, a menos que usted piense que el homúnculo sensorial en los lóbulos posteriores del cerebro también tiene dos pequeños apéndices que se puedan llamar “manitos” o “manitas”.

Corolario 2. Una primera conclusión podría ser que en el Programa Cronotopía no hay palabras unívocas ni definiciones únicas y unívocas; en particular, no hay números reales distintos de los imaginarios: todos los números que nos enseñen o que nos inventemos son siempre imaginarios e imaginados.

Sin embargo, si usted considera que sus imágenes mentales son “reales” en su cerebro, entonces, para usted, también todos los números imaginarios serían reales en ese sentido restringido. Pero desde el punto de vista sincrético-analítico, los llamados “números reales R” serían más bien una simplificación de los llamados “números complejos C”, y no los segundos una complexificación de los primeros. Ni siquiera habría una definición de cero ni de uno, ni sabríamos si los números de contar empiezan por cero, o por uno, o tal vez por dos. La proposición matemática que introduce esta incertidumbre entre el cero, el uno y el dos (y también entre el menos uno, el cero y el más uno) es la siguiente: "En cualquier base b, el logaritmo en base b de uno es cero". Todavía estoy manipulando mis modelos mentales y ejercitando mis limitados conocimientos semióticos para interpretar esa proposición de manera coherente con la aritmética, el álgebra y el análisis que aprendí en la universidad.

Esta incertidumbre, esta proposición, los dos corolarios anteriores y muchos más enigmas que voy encontrando en la historia de las matemáticas y en las preguntas y explicaciones de los estudiantes me han venido imponiendo un principio matemático, lógico y filosófico muy difícil de aceptar, pero que se confirma en mi mente a medida que avanzo en el Programa Cronotopía:

Postulado 1. Toda expresión o formulación o fórmula bien formada (fbf o wff) con la que intento expresar algo acerca de una imagen o modelo cronotópico, una vez graficada y escrita deja de ser *verdadera* o *falsa*, y queda totalmente dependiente de la interpretación subjetiva del lector o lectora en alguno de los modelos mentales que le sugieran las gráficas o grafías y los términos y las fórmulas escritas. Esta clave hermenéutica paradójica podría llamarse "el Postulado de la Relatividad Absoluta" de la Cronotopía.

Este postulado tiene un problema grave: que el lector o lectora no le va a hacer mucho caso a ninguna de las afirmaciones que me he atrevido a escribir en este documento, puesto que ni siquiera yo mismo las propongo como verdaderas; pero podría tener una ventaja que para mí es crucial: que cuando algún lector o lectora crea que alguna afirmación mía es falsa, se detenga unos segundos y le dé una segunda oportunidad para ver si, dándole otra interpretación creativa, la puede considerar subjetivamente como verdadera en esa interpretación.

Corolario 3. Este postulado crea un problema grave para mi interpretación del Teorema de Incompletitud de Gödel de 1931, pues por bien formulado que esté dicho teorema, y por más validez formal que se le otorgue, el dominio de las verdades de la aritmética de Peano estaría vacío. Ninguna formulación escrita de la aritmética de Peano, formalmente demostrable o no, sería verdadera, y por lo tanto ninguna máquina de cálculo numérico podría permitirnos concluir que hay una verdad no demostrable; peor todavía, que no hay ninguna verdad demostrable, pues lo único demostrable es una fórmula sintácticamente bien formada y bien conectada a otras en un grafo dirigido. Eso no tiene nada qué ver con la verdad o la falsedad.

Recuerdo la frase de Bertrand Russell acerca de que toda fórmula matemática es de la forma "si p, entonces q", pero que no sabemos lo que estamos diciendo ni sabemos si es verdad o no. Al menos en mi interpretación subjetiva, creo que el Postulado de la Relatividad Absoluta de la Cronotopía estaba ya muy bien formulado en las obras de Bertrand Russell, lo cual tampoco quiere decir que alguna frase que el dejó escrita sea verdadera, sino todo lo contrario: ninguna es verdadera, pero tampoco es falsa.

Un poco de memoria histórica

Intentemos devolvernos hacia el pasado para intentar vivir por unos momentos en nuestro modelo mental de lo que nos imaginamos que sería el planeta Tierra hace un millón de años. ¿Sabemos qué es "un millón"? ¿Qué es *año*? ¿Qué es tiempo o a qué llamamos tiempo, *tempus*, *chronos*? ¿Cómo lo medimos? ¿Qué es medir? Preguntas permanentes —y acuciantes— del Programa Cronotopía, que, más que respuestas verbales a quien nos hace la pregunta, producen exámenes mentales atentos al cronotopo interno de cada uno de nosotros.

Reconstruyamos pues un modelo mental de lo que sería el lugar, el ambiente, el *topos* en donde vivían nuestros antepasados del orden de los primates hace un millón de años. Algunas especies de un cierto género de antropoides, homínidos u homininos lograron ir separando algunos tiempos para el trabajo de supervivencia como cazadores y recolectores y otros para el ocio, el disfrute, el descanso, el ritual, la fiesta, la música y la danza. Me atrevería a decir que el proceso de hominización de los primates de nuestro género *Homo* se revela precisamente en ese cambio en la conciencia del tiempo libre y en su utilización.

En la medida en que en esos ratos de ocio empezaron nuestros conspecíficos a dedicar más y más tiempo para la reflexión mental sobre todas sus actividades conscientes e inconscientes y sobre sus sueños diurnos y nocturnos, se fueron perfeccionando los lenguajes *análogos* multimodales de todas las artes y afinando sus productos, como la música, el baile, la mímica, el grabado o pintura y el moldeado o modelado o escultura. Así empezaron a multiplicarse las huellas, los rasguños, las gráficas o grafías relativamente estables y duraderos, que no propiamente eran lenguas ni lenguajes, pero sí podríamos llamarlos por su carácter semiótico *lenguajes analógicos*. Hasta ese momento, y por muchos milenios después, la única grabadora de audio y video existente era la memoria situada en el cerebro de esos primates, que grababa también en forma multimodal y multisensorial los modelos mentales en reposo y en movimiento.

Más tarde, talvez hace menos de cien mil años, se fueron configurando los lenguajes *articulados* (o digitalizados o cuantizados o discretizados en sonidos separados, discretos, inicialmente sílabas y fonemas cortos y luego en lo que hoy llamamos "las palabras") que posibilitaron el cuento, el rumor, el chiste, la instrucción, la amenaza, la poesía, la canción y el teatro para intentar expresar en forma externa y pública las impresiones, las afectaciones, las emociones y conmociones, las representaciones y valoraciones subjetivas internas de los fenómenos externos perceptibles directamente por el cerebro de cada uno de los miembros de esa especie privilegiada del género *Homo,* mal llamada "*sapiens*" porque seguimos siendo muy poco sapientes (más bien: muy ignorantes, insipientes (con ese), insápidos e insípidos).

Por ejemplo, no sabíamos entonces nada —y todavía no sabemos prácticamente nada— acerca del espacio, el tiempo, el cambio y el movimiento "allá afuera"; por lo menos yo poco sé de todo eso, porque vivo encerrado en mi estrecha caja craneana, y solo tengo alguna vivencias o experiencias con alguna consciencia difusa y esporádica de lo que vivo yo, o al menos lo que parece vivir mi pequeño avatar, un homúnculo más entre las sombras, duendes y maniquíes de este oscuro y estrecho teatro mental que parece encerrado en una bóveda hemisférica de una capacidad aproximada de un decímetro cúbico. ¿Sé qué es "bóveda" o "hemisferio", o "capacidad" o "decímetro cúbico"?

Como decía Sócrates, "solo sé que nada sé" de lo que pasa por fuera de esa caverna de Platón. ¿Será que mi caverna es como la de Platón, o como la de cada uno de los que me lee o escucha? Ni siquiera sé cómo sabía Platón —o cómo sé yo— qué es *caverna* o qué es *teatro* y que no lo es. Peor todavía, por más que haya logrado avanzar en el Programa Cronotopía, todavía no sé qué es propiamente "avanzar" ni "Programa", y menos "avanzar en un Programa". ¿Ustedes sí? Los felicito, y los envidio, pero no acabo de creerles.

No quiero, ni mucho menos, silenciar sus respuestas a las preguntas, sino que, por más atención que les pongo y aunque me las repitan varias veces, en virtud del Postulado 1 o Principio de la Relatividad Absoluta me abstengo de declarar sus respuestas ni como verdaderas ni falsas. Pero sí necesito la ayuda de las reacciones y rechazos que nazcan sinceramente de la perplejidad o el escepticismo de otros sujetos como mis lectores y lectoras que traten de interpretar lo que yo digo sobre mi cronotopo mental y lo comparen con lo que ellos y ellas experimenten en el suyo, para poder reconstruir la métrica, la geometría, la medición, o en general, la *metría* de mi propio cronotopo mental, con la ayuda de dibujos, grabados o grafías y expresiones verbales orales y escritas para compartir esas experiencias; esas expresiones formarían las *grafías* y las *logías* que pretendo acumular para avanzar hacia una ciencia de la Cronotopía, y con ellas y sobre ellas pasar a la *metría* (o métrica o metrización) y luego a la *nomía* (o formulación de las regularidades, leyes y normas de una futura Cronotopía).

Le adelanto al lector o lectora que, aunque logremos avanzar conjuntamente en el Programa Cronotopía con la acumulación, discusión y depuración de múltiples grafías y logías, ese avance sería apenas el comienzo de la tercera fase de la Cronotopía como ciencia, la cual, como creo yo de toda ciencia, incluiría cuatro fases: la cronografía y la cronología, la topografía y la topología, la cronometría y la topometría; luego vendría la fase principal: la crononomía y la toponomía.

Postulado 2. En el Programa Cronotopía, la epistemología de modelos y teorías le asigna las mismas cuatro fases: la X-grafía, la X-logía, la X-metría y la X-nomía a toda ciencia X que haya aparecido en Occidente desde el siglo XVII, y a las disciplinas antiguas del Quadrivium o Tétrodos pitagórico que se sistematizaron hacia el siglo VII A.C. en la llamada "Magna Grecia" del Mediterráneo. El enigma epistemológico principal es por qué más de mil años de la Astrografía y la Astrología antiguas se concretaron en la Astrometría y la Astronomía para configurar una ciencia ya muy desarrollada al final de la Edad Antigua, unos dos mil años antes de que Galileo Galilei, Francis Bacon e Isaac Newton comenzaran a configurar las nuevas ciencias de la Edad Moderna europea.

Corolario 4. A pesar de las disputas sobre la originalidad del mal llamado "descubrimiento" de la derivada, la derivada de Leibnitz sería muy distinta de la de Newton; la derivada de Leibniz (*dy/dx*) no puede ser una velocidad, porque es geométrica y pretende solo resolver el problema geométrico del trazado de rectas tangentes a gráficas curvas no circulares propuesto por Fermat y Roverbal. Así, la derivada de Leibnitz es equivalente a la tangente trigonométrica de un ángulo local en un plano coordinatizado y, por lo tanto, sería solo topométrica, mientras que la derivada o fluxión de Newton (notada '$\dot{x}$' con un punto encima de la *x*) sí pretende ser crono-topométrica y representar la rapidez, celeridad o velocidad de un punto de masa que se mueve en el espacio tridimensional, que podríamos llamar "velocidad lineal". Pero ninguna de esas dos derivadas se parece a la velocidad areal de la Astronomía antigua, llamada también metafóricamente "velocidad de barrido", que le sirvió a Kepler para refutar la propuesta copernicana de las órbitas circulares de los planetas, calculando (sin disponer de ecuaciones cartesianas) que la forma de las órbitas era elíptica y que las velocidades areales eran constantes.

Corolario 5. Si la mecánica de Einstein es incompatible con la de Newton, y ambas con la mecánica cuántica, tampoco la '*c*' de Lorentz y Einstein puede ser una velocidad, y menos la mal llamada "velocidad de la luz", porque en la teoría de la relatividad no hay nada que sea "la velocidad" ni nada que sea "la luz", o por lo menos yo no las veo. Tampoco las vio Leopold Infeld, quien le dijo a Einstein que Minkowski lo había traicionado, pues al espacializar el tiempo como cuarta dimensión *ict*, la velocidad desaparecía y solo quedaba la tangente de un ángulo.

Efectivamente, si se toma la constante c como la tangente del ángulo de 45 grados, $c = 1$, y todos los cálculos de la relatividad especial y de la relatividad general funcionan perfectamente con ese valor unitario de la constante c, que, por lo tanto, no tendría nada de velocidad, rapidez o celeridad.

Lo que sucede es que, como decía Leibnitz, todos somos ciegos y sordos respecto del futuro, y solo tenemos unas estrechas ventanitas hacia el pasado. Pero al menos esas ventanitas por las que nos entra una información exigua también nos abren una puerta para emprender el camino hacia la sabiduría, si acaso es posible alcanzarla o por lo menos avanzar algo en ella, de lo cual también podría dudarse, como lo hicieron los agnósticos y los cínicos en Grecia; pero podemos ser más optimistas, pues, por ejemplo, ya desde hace unos 4000 años podemos, por medio de cálculos mentales topométricos y cronométricos con sus grafías y sus logías, imaginando modelos mentales de trayectorias invisibles de los planetas y sus satélites, conjeturar las fechas precisas y las horas aproximadas de algunos eventos futuros como los eclipses de sol y de luna. El enigma epistemológico es por qué, si somos ciegos hacia el futuro, y si esas grafías y logías matemáticas no son ni verdaderas ni falsas, esos eventos sí suceden en las fechas y horas aproximadas que calculamos muchos años antes.

Confiemos pues en que, a pesar de que las afirmaciones científicas, una vez formuladas por escrito, no deban ya considerarse ni verdaderas ni falsas, sí podemos al menos avanzar un poco en sabiduría y en ciencia y evolucionar positivamente como especímenes del género *Homo* y su especie *sapiens*. En vez de desanimarnos ante las evidencias de un millón de años de ignorancia sobre el espacio, el tiempo y el espacio-tiempo "allá afuera", cada uno de nosotros puede comenzar ahora mismo un programa de investigación (previsiblemente interminable y que no garantiza nada) en el que nos empeñemos en analizar por lo menos el cronotopo interno de cada uno de nosotros y tratar de "comparar notas" con lo que nos externalicen los otros miembros de nuestra especie a través de grafías y logías. Tal vez así podamos reconstruir algo de ese largo camino de cien mil años desde las primeras representaciones y artefactos culturales de los astrónomos antiguos, hasta llegar a las matemáticas y a las físicas actuales. Seamos un poco más modestos: intentemos comprender algo de nuestras experiencias cronotópicas internas en los últimos diez mil años, o al menos de los diez últimos años de nuestra vida interior y sus vivencias matemáticas. Esa es la meta del Programa Cronotopía.

Las grafías y las logías en la evolución humana

Volviendo a la historia de nuestra especie, en los últimos cien mil años se fueron configurando múltiples manchas, tallas, pinturas, grabados, relieves, estatuas y otras configuraciones táctiles y visuales, que en la Cronotopía se llaman "grafías": dibujos, rasguños, pinturas, esculturas y diagramas que permiten externalizar y hacer públicas las imágenes y modelos mentales que proyectan hacia adentro los cerebros cada vez más grandes de los especímenes del género "*Homo*". En cien millones de años ya nuestro cerebro ha evolucionado a mil centímetros cúbicos de volumen y cien mil millones de neuronas. Pero necesitamos que pasaran cien mil años para poder decir esto último, aunque todavía no entendamos muy bien qué significa todo eso (pues creo que apenas estamos llegando a la fase de configuración de las distintas métricas, que en la Cronotopía se llaman "metrías").

¿Qué significa mil, cien mil, cien millones o cien mil millones? ¿No serán más bien cien billones en el Brasil o en los Estados Unidos? Poco sabemos de aritmética, de geometría, de métrica o metrización o metría. Pero parece que sí sabemos mucho, por lo menos desde que se estableció el Sistema Internacional de Unidades SI en 1960. Esa es otra pregunta permanente del Programa Cronotopía, que no requiere respuestas verbales inmediatas sino una reflexión personal atenta y obstinada para llegar de la geometría escolar a la topometría; del calendario y los relojes a la cronometría, para reconstruir la aritmética antigua y la moderna desde la música, la acústica y el ritmo y la astronomía antigua y la moderna desde la óptica, la pintura, la escultura y la arquitectura. La pretensión de avanzar en la cronometría y la topometría es que así podemos llegar a las nomías, que nos permitirían reformular las matemáticas, su epistemología, su historia y su didáctica.

Corolario 6: Si eso es así, sería mejor comenzar el Quadrivium o "Tétrodos" matemático como lo hacía Pitágoras hace 2500 años, con la música, la fónica o la fonética, la rítmica o la ritmética de los números en movimiento, y habría que llamar a la teoría de los números fijos, quietos y estáticos no "aritmética" sino "arritmética".

La rítmica o ritmética, la música y la danza, el ritmo y el tambor funcionan muy bien para empezar las matemáticas en preescolar y avanzar rápida y motivadamente en ellas, como lo mostradlo a lo largo de 30 años la investigadora del MIT Jean Bamberger y como lo he podido comprobar repetidamente con niños, niñas y maestros y maestras de preescolar.

En forma más general, ¿cuáles son los mínimos requisitos neuronales, cognitivos o gnósicos que debe cumplir nuestro cerebro para producir, mantener y estudiar los modelos mentales y los lenguajes análogos y digitales o articulados con que tratamos de domesticarlos y comunicarlos a través de las matemáticas y las físicas? Esa es la pregunta permanente del Programa Cronotopía, de nuevo, no para contestarla verbalmente, sino para pensarla introspectivamente.

Al mismo tiempo que las grafías, nuestros antepasados se inventaron múltiples narrativas, relatos, admoniciones, prescripciones e instrucciones en distintos lenguajes orales ya digitalizados o articulados para acerca del espacio y el tiempo, los usos y costumbres, que en la Cronotopía se llaman "logías": sartas de sonidos, sílabas y palabras articuladas oralmente,

acompañadas con gestos, gritos, cambios de tono y de ritmo que nos permiten compartir las imágenes y modelos mentales entre los miembros cercanos de nuestra especie “sapiens”.
Esas grafías y esas logías comenzaron a ayudar a nuestros antepasados a hacer mejores refugios, a cazar con más eficacia y menos riesgos, a domesticar plantas y animales, a perfeccionar herramientas, a desarrollar la agricultura, a construir las primeras edificaciones y los primeros asentamientos o ciudades e, infortunadamente a diseñar mejores armas para matar más gente más rápidamente.

Hablamos, pues, de las técnicas, la techne, con sus tecno-grafías y tecno-logías, según la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard, Gascon y Bosch. Pero no son tan nuevas esas técnicas como sus tecno-logías escritas: las grafías, las logías, las técnicas, tecnografías y tecnologías se desarrollaron en el neolítico hace unos diez mil años.

Hace solo cinco o seis milenios, con la invención de la escritura o “logografía”, que es la grafía de las logías, empiezan las primeras civilizaciones, las élites y las castas sacerdotales y se inician los primeros imperios. Nuestros antepasados perfeccionaron las medidas y los instrumentos de medición, los números y los cálculos o cuentas, que, como ya vimos, en la Cronotopía se llaman “las metrías”, y se van multiplicando las expresiones de las regularidades, leyes, normas y esquemas que en la Cronotopía se llaman “las nomías”. Esa sería la cuarta y última fase de toda ciencia, en particular de las dos subdisciplinas de la Cronotopía, la Crónica y la Tópica, cada una con sus cuatro fases, que, al articularlas, van completando la Cronotopía.

En menos de mil años, del año 5000 al 4000 antes de Cristo se desarrollaron simultáneamente las Físicas, la Astronomía, la Geometría y la Aritmética antiguas en la China, la India y Mesopotamia. Hace unos 4000 años pasaron estos saberes a Egipto, y hacia el año 700 A.C. a toda el Asia Menor y a las ciudades del Peloponeso, sobre todo a Atenas y, más tarde, a Alejandría. Ya desde esa misma época se extendieron y refinaron esos saberes a toda la Magna Grecia mediterránea, inicialmente con Tales y Pitágoras, culminando con los maestros atenienses, alejandrinos y sicilianos, entre los que sobresalen Eudoxo, Euclides, Apolonio y Arquimedes.

Desde el punto de vista de la Cronotopía, excepto por el desarrollo de mejores tecnologías y notaciones más diferenciadas, es poco lo que han progresado las tres disciplinas matemáticas más antiguas, la Astronomía, la Geometría y la Aritmética que practicamos los matemáticos actuales en nuestros modelos mentales cronotópicos. Más bien podría decirse que desde las aritméticas de Boecio y Nicómaco en la Edad Media europea, o sea del año 400 al año 1600, y en todos los 300 años de las matemáticas centroeuropeas que llamamos “Modernas”, desde 1600 hasta el “Programa de Erlangen” de Lie, Klein y Poincaré en 1872, con muy contadas excepciones de parte de unos pocos matemáticos geniales, no parece que hubiéramos progresado mucho en la exploración de ese mundo mental tridimensional que estudia, analiza y trata de reconstruir y practicar el “Programa Cronotopía”.

La Ciencia y las ciencias

Esas externalizaciones de los cronotopos mentales de los que llamamos desde la Antigüedad "sabios", "astrólogos", "gurúes" o "magos" hasta el Renacimiento europeo de los siglos XV y XVI conformaban las únicas ciencias entonces conocidas: las tres disciplinas del Trivium o Triodos: Gramática, Retórica y Dialéctica, y las cuatro del Quadrivium o Tetrodos: la Astronomía, la Geometría, la Música o Ritmética y la Aritmética o Arritmética.

No se encuentra antes del año 1600 ningún uso de la palabra "ciencia" en el sentido actual de la palabra. La palabra latina "Scientia" y sus derivadas en los idiomas vernáculos se refería a todo tipo de conocimiento. Solo después de la invención de la imprenta y la expansión de los libros impresos, comenzó la Ilustración de los siglos XVI y XVII. A comienzos del siglo XVII se configuró en Europa central "la ciencia nueva" de los fenómenos terrestres y celestes estudiados por la astronomía de Copérnico, Galileo, Kepler y Tycho Brahe.

Esa "nueva ciencia" que se anuncia con Galileo y empieza a balbucear con Descartes, se formuló explícitamente en Inglaterra con el "Novum Organon" de Francis Bacon, que pretendió desplazar al antiguo "Organon" de Aristóteles y a toda la sabiduría filosófica y astronómica medieval. Su primer gran producto fue la Mecánica newtoniana, refinada en la Mecánica analítica leibniziana y lagrangiana con una fantástica producción de nuevas formulaciones matemáticas. Luego vino la explosión científica del siglo XIX con las teorías del campo electromagnético de Maxwell y la termodinámica de Boyle, Hooke, Black, Watt, Sadi-Carnot, Thompson, Clausius, el mismo Maxwell, Bolzmann, Joule y Kelvin. A comienzos del siglo XX surgen las teorías de la relatividad de Lorenz, Poincaré y Einstein. Poco después, aparecen las dos variantes de la Mecánica cuántica del siglo XX, con Schrödinger y Heisenberg, con Louis de Broglie, Weyl, Pauli y Dirac, que nos han legado otro diluvio de formulaciones matemáticas alucinantes.

El Programa Cronotopía intenta incluir y sistematizar todas esas matemáticas del siglo XX con las europeas de 1600 a 1900, con las antiguas que se dieron en la China, la India y Mesopotamia desde el segundo milenio antes de nuestra Era, las de Egipto y la Magna Grecia del Mediterráneo en los seis o siete últimos siglos antes de Cristo, desde Parménides, Heráclito y Zenón, Tales y Pitágoras, Eudoxo y Euclides y luego Arquimedes. Pero como no toma ninguna formulación por verdadera o falsa, también intenta relativizarlas, contrastarlas, criticarlas y hacer nuevas propuestas matemáticas, epistemológicas, históricas y didácticas.

La apuesta es a que no han cambiado mucho nuestros cerebros ni hemos progresado mucho en esas matemáticas construidas y reconstruidas solo con la exploración de nuestro cronotopo privado interno; pero es claro que ahora tenemos innumerables ventajas técnicas y simbólicas de finales del siglo XIX, entre otras impensables antes: la fonografía o grafía del sonido de Edison (1877) y la cinematografía o grafía del movimiento de los hermanos Lumière (1895). En la segunda mitad del siglo XX contamos con muchas otras ayudas técnicas, tecnográficas y tecnológicas invaluables: las nuevas tecnologías de la información y la comunicación actuales o las TIC. Con esa ayuda, ahora podemos reconstruir en unos ocho o diez años de estudio los 4000 años de la Astronomía antigua y los 400 de las matemáticas y las físicas modernas. Cada estudiante —o al menos cada estudioso— podría ahora con la ayuda de Internet y las TIC a reformular y sistematizar en 40 años esos 4000 años, y luego reconstruir los desarrollos de las matemáticas y las físicas que llamamos "Modernas", que nacieron en los países de Europa

Central de 1600 al 2000 y, ojalá, sin esperar a que esa reconstrucción y reformulación se complete, lleguemos pronto a inventar nuevos desarrollos.

Nos parece invenciblemente que todos esos hechos y fenómenos de la Astronomía, las matemáticas y las físicas ocurren en el espacio-tiempo "allá afuera", en el espacio extramental o extracraneano, pero también nos parece invenciblemente que de alguna manera tienen que ocurrir en forma comprimida, sucesiva y paralela en el interior del cráneo de cada uno de nosotros. Nuestro cerebro tiene que recibir informaciones externas, calcular mentalmente y luego echar a andar modelos mentales con sus proyecciones dinámicas internas que estén conectadas con los nervios y los músculos para reaccionar a tiempo a los peligros y prever los cursos de acción para el futuro inmediato. Eso no es solo para las matemáticas y las físicas, sino para todas las prácticas individuales y sociales; pero es más evidente en las ciencias formales que construyen modelos mentales muy refinados, aunque parece que "no sirven para nada" en la realidad cotidiana. Recordar, repasar y reflexionar sobre esos modelos mentales y las maneras de expresarlos en grafías y logías, para desarrollar metrías y nomías sobre el espacio-tiempo, el cambio y el movimiento, esa es la tarea del Programa Cronotopía.

Primeros resultados generales del Programa Cronotopía

Mi cronotopo mental es accesible solo a mi propia atención y reflexión. Es un fenómeno exclusivo de mi cerebro encerrado en su caja craneana, atestiguado solo a mi consciencia individual y subjetiva que es la única que ve, oye o sabe acerca de lo que sucede en mi mundo mental privado. No sé cómo son los fenómenos mentales que ocurren en otros cerebros, ni puedo saberlo, por más observaciones, disecciones, radiografías u otras neuroimágenes del cerebro de otros sujetos humanos ni del mío propio. Solo puedo suponer que son muy parecidos a los míos, al menos por la semejanza fisiológica de los cerebros humanos. Esas especulaciones proyectivas sobre la posible mente de otros seres vivientes se han llamado "Teoría de la Mente", y alguna forma de Teoría de la Mente podría darse en otros animales con cerebros muy desarrollados, como los perros, los caballos, los elefantes, los gorilas, chimpancés y bonobos, y en las ballenas y los delfines.

Entre los pocos y muy dudosos resultados que puedo reportar después de 60 años de acumular grafías, logías y metrías, y de 20 años de tratar de formular nomías, podría apenas comunicarles que en mi cronotopo interno observo "como por el rabillo del ojo interior" el trasfondo claro y a la vez oscuro en el que yo mismo (o al menos mi avatar) como agente noético-semiótico, como sujeto individual en su reflexión mental consciente, experimento internamente los fenómenos que considero "externos" como si ocurrieran "allá afuera", aunque solo sé con certeza que ocurren "aquí adentro" de mi cabeza como imágenes y modelos que surgen de ese trasfondo a la vez temporal y espacial que he llamado "mi cronotopo mental privado".

Mi cronotopo mental me parece ser algo así como un recipiente muy grande e ilimitado pero que tiene que ser lo suficientemente pequeño para que "el mundo me quepa en la cabeza". La bóveda estrellada parece tener por unos diez mil millones de años-luz, pero mi bóveda craneana por dentro solo parece tener diez centímetros de radio. Lo que o veo desde por dentro de ese recipiente cóncavo parece ser un fondo o trasfondo vago, gris o negro en el que de la sombra surgen luces y colores, imágenes y modelos mentales, pero a la vez experimento ese espacio-tiempo de mi cronotopo como si estuviera aparentemente vacío o talvez lleno de algún gas o aire tenue, una especie de fluido o líquido imperceptible, que los antiguos llamaron "el éter", "el aire", "lo ilimitado", que está a la vez poblado de multitud de imágenes multimodales sensorio-motoras, que se combinan, se aglutinan o se integran en totalidades conscientes como modelos mentales estáticos y dinámicos. No estoy seguro de que haya éter, o "materia prima" o "prote hyle", que mis maestros de física y química llamaban "Protilo", pero tampoco les creo a los que me dicen que no lo hay.

Pareciera que nuestro cerebro estuviera continuamente produciendo toda clase de proyecciones intermitentes de lo que nos parecen películas o videos acompañados de toda clase de sensaciones y percepciones de nuestros sentidos externos e internos. Esas imágenes parecen ser más coherentes y repetibles cuando estamos despiertos, pero mucho menos en las ensoñaciones, sueños y pesadillas cuando estamos relajados o dormidos. Como diría el neurólogo colombiano Rodolfo Llinás, nuestro cerebro es una incansable "máquina de sueños" que funciona 24 horas al día 7 días por semana, desde el nacimiento y hasta por 120 años. En eso sí estoy de acuerdo con el Dr. Llinás, así no entienda bien lo que quiere decir, pero sí creo que estamos de acuerdo, al menos en la manera como trato de interpretarlo.

Un poco de historia personal

Devolvamos la película unos sesenta años, al año 1959. Yo también tuve 20 años. El intento actual que me guía en el Programa Cronotopía —el de reconstruir todas las matemáticas y las físicas antiguas y modernas a partir de mis propios modelos mentales que puedo examinar y analizar en mi cronotopo mental privado— tiene ya una larga historia en mi vida académica. Comenzó con el estudio de la Dialéctica en 1959, con un curso de lógica guiado por el Padre Jesús Sáenz en la Universidad Javeriana, que se basaba en las "Summulae Logicales" de Pedro Hispano, un texto de hace mil años. Me acuerdo aún del hexámetro latino que codificaba las formas válidas del silogismo aristotélico: "Barbara, Celarent, Darii, Ferio Baralipton". Imposible comprimir más información en menos letras.

Mi tesis de pregrado en filosofía sobre el espacio-tiempo en la Relatividad Especial, dirigida por mi maestro Carlo Federici en 1960, me llevó a analizar el espacio tiempo como ser de razón con fundamento en la realidad, "*ens rationis cum fundamento in re*". Después, continuó con mi tesis de doctorado, que terminé en 1968, en la que analicé todas las posibles fórmulas algebraicas que combinaran productos conmutativos o no, asociativos o no asociativos, de dos y tres variables, sin importar su interpretación, sino solo sus propiedades formales. Por eso llamo a esa rama del álgebra no asociativa "el álgebra abstracta e inútil", pero les garantizo que ha sido muy entretenida y me ha ayudado muchísimo para desarrollar el Programa Cronotopía.

Corolario 7: Toda ecuación con números o letras, inclusive la ecuación $X = 10$, tiene un número ilimitado de interpretaciones, y en cada interpretación que se le dé, esa misma ecuación puede tener no una sino muchas soluciones diferentes.

Que me perdone Gauss por arruinarle su Teorema Fundamental del Álgebra, según el cual una ecuación de grado dos, tres o n tendría exactamente dos, tres o n soluciones —no necesariamente diferentes— en los números complejos.

Estudiemos, por ejemplo, la ecuación de primer grado X = 10. Esta ecuación tiene una solución única y obvia para cualquier aprendiz de aritmética que utilice la numeración romana: que la 'X' es igual a diez. Parece no haber más soluciones. ¿Tendría razón Gauss? Les aseguro que, si le doy otra interpretación como ecuación lineal de primer grado, equivalente a X – 10 = 0, cualquier número de contar de dos en adelante es una solución de esa ecuación X = 10.

Veámoslo. Si se propone que ese número X sea, por ejemplo, el dos, tomado como base de la numeración binaria de la computación electrónica, podemos comprobar que el dos sí es una solución de la ecuación X = 10, porque el dos se escribe '10' en código binario; si se toma el número diez, nuestra base usual de numeración, también es una solución obvia, y me temo que Gauss pensaba que era la única. El número sesenta, tomándolo como base de la numeración en la astronomía antigua, también es una solución. Efectivamente, sesenta en base sexagesimal se escribe '10' y, por pura diversión, ustedes pueden comprobar que el número dieciséis en base hexadecimal en cualquier computador actual también se escribe '10'. Desde la Cronotopía y el álgebra abstracta e inútil, el Príncipe de las Matemáticas resultó demasiado tacaño.

Cuando regresé a Colombia en 1971, empecé a trabajar de nuevo con mi antiguo gran maestro Federici y con un nuevo gran maestro, el Dr. Alberto Campos del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá. El Dr. Campos me invitó a colaborarle con los cuatro cursos de Lógica y Matemática I a IV que él había diseñado para los estudiantes de Filosofía de la Universidad Nacional. Sin los cursos, discusiones y escritos de Alberto Campos de 1972 a 1992, no me hubiera adentrado en la historia de las matemáticas, comenzando desde los Presocráticos, Tales, Pitágoras y Euclides; pero con esos aportes me atreví a preparar y escribir mi trabajo de ascenso sobre la historia del álgebra del Renacimiento, y desde entonces no he dejado de estudiar y disfrutar la historia de las matemáticas, su epistemología, su práctica y su didáctica, intentando reconstruirla desde la investigación de lo que ocurre en mi propio cronotopo con sus imágenes y modelos mentales. Para ello, como me lo enseñó Piaget, las preguntas y ocurrencias de los niños y las niñas han sido mis mejores estímulos, y las maneras de escribir formulaciones matemáticas en los manuscritos antiguos, en los libros impresos y en la pantalla de los computadores han sido la materia prima para incontables chispazos cerebrales, así la mayoría de las veces resulten haber sido solo cortocircuitos.

En especial, con el Programa Aritmo-Geométrico pitagórico que aprendí con el Dr. Campos, he venido tratando de reconstruir las Aritmética actual como Arritmética antigua, y todas las demás matemáticas actuales a partir de la Astronomía Antigua, mucho más antigua que Tales y Pitágoras, descubriendo cada vez más profundidad en la teoría talesiana y eudoxiana de las razones, las proporciones y las desproporciones, en la de las razones cruzadas, la armonía y la anarmonía.

Algo parecido a la reconstrucción de las matemáticas me sucedió con su filosofía. En ella me introdujo mi maestro Federici, pero sin los mencionados cursos de filosofía y epistemología de las matemáticas que el Dr. Campos logró establecer en la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá, y sin las oportunidades de dirigir yo mismo algunos de esos cursos, no hubiera empezado a investigar y a enseñar en distintas universidades mis cursos de epistemología de las matemáticas. En ellos presentaba las cuatro escuelas dominantes en los siglos XIX y XX: el Platonismo en sus dos variantes, el Formalismo, el Logicismo y el Intuicionismo y, luego, otros cursos más generales de epistemología.

Hacia una filosofía de las matemáticas

En esos cursos y lecturas fui impulsado y retado por mis maestros Carlo Federici y Alberto Campos a intentar formular mi propia filosofía de las matemáticas, de tal manera que, teniendo en cuenta esas cuatro escuelas de filosofía de las matemáticas, lograra superar sus vacíos y limitaciones, ante todo para tener en cuenta la producción de nuevas matemáticas del siglo XX desde el Programa de Erlangen en 1872.

El profesor Fernando Zalamea fue el que me señaló la ausencia de las matemáticas del siglo XX en la historia y la filosofía de las matemáticas, y quién lo creyera, hasta en la docencia de las matemáticas universitarias en toda Latinoamérica. En la educación media o bachillerato y en los cuatro primeros años de las universidades, inclusive en las carreras llamadas "de matemáticas puras", solo aparecen matemáticas elaboradas antes del final del siglo XIX.

El profesor Zalamea me ganó muy pronto la carrera de producir una nueva filosofía de las matemáticas que incluyera los desarrollos matemáticos de 1870 al año 2000, cuando publicó su filosofía sintética de las matemáticas en el año 2010. Apenas ahora, 60 años después de ese remoto comienzo de mi camino de exploración en 1959, que reinicié en la Universidad Nacional de Colombia en 1972 con mis maestros Federici y Campos; 25 años después de mi trabajo sobre la Teoría General de Procesos y Sistemas de 1995, y diez años después del desafío de la filosofía sintética de Fernando Zalamea, estoy intentando configurar una filosofía propia que llamo "sincrético-analítica", basada en tres teorías generales: la Teoría General de Procesos y Sistemas (como Metafísica), la de Modelos y Teorías (como Metagnósica) y la de Representaciones e Interpretaciones (como Metasémica).

Los detalles filosóficos habrá que dejarlos para otros escritos, pero para la Cronotopía, la idea central es la de volver a examinar la lógica, las matemáticas, la teoría de la información y las físicas antiguas y nuevas, comenzando no desde la ciencia actual de los siglos XX y XXI, sino desde la Astronomía Antigua, pasando por Heráclito, Parménides y Zenón, por Tales, Pitágoras, Eudoxo, Euclides, Apolonio y Arquimedes, hasta las modernas teorías matemáticas y físicas, incluyendo las cosmológicas, relativistas y cuánticas. No se trata de preguntarse si son verdaderas o no, ni quién inventó quién y en dónde, sino de reinventarlas uno mismo en su propio cerebro, utilizando la exploración de su cronotopo privado con la ayuda de la filosofía sincrético-analítica formulada en esas tres teorías generales: la de procesos y sistemas, la de modelos y teorías y la de representaciones e interpretaciones.

Esas tres teorías generales me han permitido ir aprendiendo, reformulando y refinando lo mejor del Platonismo, tanto en su vertiente realista como en la idealista; lo más refinado del Logicismo de Frege y Russell, del Formalismo de Hilbert y del Intuicionismo de Brouwer, Heyting, Poincaré y Michael Dummett. Explico un poco más esos aportes de las filosofías ya clásicas de las matemáticas a la filosofía sincrético-analítica.

El Logicismo, quitándole los "ismos" y los "fanatismos", me ha ayudado a reinterpretar a Peano, a Cantor y a Piaget, que consideraban la lógica como anterior a las matemáticas, y a la vez como una rama de ellas, llamada "lógica matemática" o "lógica formal". Recordemos la formulación de Bertrand Russell, equivalente al Principio de la Relatividad Absoluta.

El Formalismo de Hilbert me ha llevado a perfeccionar la sémica y la metasémica, con las escrituras discretas codificables en bytes con bits binarios en un computador, y por lo tanto la articulación del Programa Cronotopía con la teoría de la información de Shannon y Weaver.

El Intuicionismo de Brouwer, Heyting, Poincaré y Dummett me ha llevado a explorar con cada vez más refinados métodos y técnicas mi cronotopo personal privado con sus imágenes y modelos, y a confiar en ellos mucho más que los Formalistas y Logicistas nos lo permitirían. He encontrado en el manejo intuitivo —no "intuicionista"— de mis modelos mentales, y a encontrar múltiples afinidades con todos los Astrógrafos, Astrólogos, Astrómetras y Astrónomos de la antigüedad y con los gigantes de las matemáticas del siglo XX después del Programa de Erlangen, así como múltiples reinterpretaciones muy impactantes de sus textos, diagramas, fórmulas y ecuaciones.

He podido retomar así lo más valioso de esas filosofías ya clásicas de las matemáticas, para formular con mayor cuidado mi filosofía sincrético-analítica con sus tres teorías generales y sus herramientas sémicas y metasémicas.

En pocas palabras, este contraste entre las escuelas filosóficas me ha venido cambiando la filosofía y la epistemología de las matemáticas y las físicas, y me ha permitido releer la historia de las matemáticas en forma impensable hace 20 años.

Algunas consecuencias pedagógicas y didácticas

Ese cambio en la formulación de la filosofía y la epistemología de las matemáticas me ha permitido no solo reformular muchos campos de las matemáticas antiguas y modernas, sino también reformular su pedagogía y su didáctica.

Desde el punto de vista de la pedagogía y la didáctica de las matemáticas, he visto que es necesario partir de los modelos intuitivos de los estudiantes y no de las expresiones verbales o puramente simbólicas de las matemáticas usuales, buscando, por supuesto, las encrucijadas en donde se separan los razonamientos formalmente válidos de los razonamientos con y sobre los modelos mentales imaginables y contrastarlos uno contra otro, sin darle valor de verdad a los razonamientos formales ni tampoco a las conclusiones intuitivas a partir de "echar a correr" los modelos mentales míos y los de cada estudiante. Se trata más bien de montar y realizar experimentos mentales, de manera que pueda sentir yo mismo y facilitarles a ellos sentir interiormente la resonancia y armonía de lo la teoría predice con el flujo del modelo mental puesto en acto por la dinámica de la teoría que lo expresa y en la que se interpreta.

Ante todo, me ha cambiado la percepción de que los niños y las niñas de preescolar no saben prácticamente nada de matemáticas; todo lo contrario: a los cinco años ya saben muchas matemáticas, pero he podido comprobarlo y disfrutarlo sin caer en el bloqueo iniciado por Sócrates cuando dijo que todos ya habíamos aprendido las ideas matemáticas fundamentales en pretendidos viajes "hiperuránicos" ("más allá de los cielos") antes de haber nacido o en sucesivas reencarnaciones. El diálogo socrático parte de ese supuesto innecesario y estorboso, y con preguntas muy "cargadas" o "capciosas" va sacándole "con tirabuzón" al estudiante una solución a un problema que coincida con la del maestro, sin caer en la cuenta de que con esa técnica va a fijar la atención en una sola solución, ocultando muchas otras posibles, y va a impedir el cuestionamiento del problema o de la pregunta misma que podría llevar a un florecimiento de la creatividad matemática del estudiante hasta llegar a superar a su mismo maestro.

Trato de reconstruir yo mismo las ciencias que Federici llamaba "formales y fácticas pre-antrópicas" —o por lo menos las abióticas— no solamente desde el acumulado escrito producido en los siglos XVII al XX, sino desde su reinterpretación interna en los modelos mentales que fabrica esa "loca de casa", que llamaría Santa Teresa, mi imaginación personal y privada, mi "máquina de sueños". Lo que me da la ilusión de avanzar en este programa (que ahora sí se ve claramente que es sin duda megalomaníaco) es mi Teoría de la Mente: a partir de ella confío en que cada niño o niña, adolescente o persona adulta neurológicamente sana tiene una máquina de sueños igual o mejor que la mía. No creo poder enseñarle nada a ninguno de ellos y ellas, pero sí he aprendido a hacerles preguntas que los lleven a poner en ejercicio su propia máquina de sueños y a disfrutar esa gimnasia mental que es francamente adictiva. El Programa Cronotopía propone nada menos que esa adicción es la más apropiada para evitar o superar cualquier otra adicción, pues lo impulsa a una a seguir aprendiendo más y más de todas las ciencias.

Corolario 8: En la aritmética digital antigua y moderna no está bien definido cuál es la mitad de un número par.

Este corolario me lo enseñó una niña de seis años, cuando le pregunté cuál es la mitad de diez. Miró sus dos manos un largo rato, moviendo los dedos (para mí, esa es la aritmética digital antigua y moderna: la de los diez dedos). De pronto dijo: "No puede ser cinco, porque el cinco está a este lado". Pensó otro rato y se preguntó "¿Será cinco y medio?" ¿Ustedes qué dicen?

Así he tratado en estos últimos 20 años de reconstruir en poco tiempo las largas cuatro fases por las que supongo que va pasando toda ciencia del pasado o del futuro: la acumulación de logías y grafías, como serían la Cronología y la Cronografía para la vivencia del tiempo y la Topología y la Topografía para la vivencia del espacio, para avanzar luego en el desarrollo de las métricas o las metrías, para refinar la Cronometría y la Topometría. Esas tres etapas nos permitirían establecer las regularidades, patrones, esquemas, leyes o nomías, que configurarían, en nuestro caso, la Crononomía y la Toponomía. Así se avanzaría en una Cronotoponomía del futuro.

Mi conjetura actual y mi apuesta de vida en los pocos años que me queden, es que en ese esfuerzo de el avance de la tercera a la cuarta fase del Programa Cronotopía, que consiste en ir perfeccionando las metrías para pasar a la síntesis de las nomías con la ayuda de las tres Teorías Generales —la de Procesos y Sistemas, la de Modelos y Teorías y la de Representaciones e Interpretaciones— podrían sistematizarse todas las ramas de lo que ahora llamamos las matemáticas, la lógica, la teoría de la información y las físicas matemáticas, tanto las clásicas como las relativistas y las cuánticas, incluyendo en ellas la cosmología o astrofísica.

Pero no es tanto el resultado esperado, tal vez inalcanzable, sino es el proceso mismo de aprender y disfrutar de las matemáticas el que me ha venido enseñando cada vez más a mi, y me ha llevado a enseñar cada vez menos a los niños y a las niñas.

Esa actitud de no enseñar sino diseñar y guiar actividades o situaciones didácticas que lleven a que los estudiantes pasen al momento adidáctico en donde se apropian del control y el disfrute de la actividad de aprender me ha permitido disfrutar y aprender muchísimo con los niños y las niñas y los maestros y maestras del proyecto de fracciones de la Universidad del Norte con el patrocinio de la empresa *Promigas*. Los niños y las niñas nos sorprendieron a maestros y maestras —y a mí como su guía turístico— señalándonos dos tipos de animales de un zoológico mental entretenidísimo: los números gordos y los números flacos, y luego otros dos tipos: los números quietos y los números monstruos, de los cuales también hay varias especies, como los monstruos achicadores y agrandadores que yo ya conocía, y los monstruos empujadores que yo no conocía. Para mi sorpresa, los niños y niñas de Barranquilla me devolvieron inopinadamente a la distinción pitagórica sobre los números en reposo y los números en movimiento y me señalaron una nueva especie de números monstruos equivalentes a los enteros Z tomados como operadores activos que empujan trenes de cubitos sobre una línea recta graduada dibujada en una mesa. Sobre estos cuatro tipos de animales mentales estoy terminando mi primer libro que puede llamarse *producto* de esta investigación del Programa Cronotopía: se titula “El Zoológico Numérico”.

Pero prefiero terminar aquí la conferencia, dejándoles la expectativa de comenzar cada uno de ustedes su propio Programa Cronotopía, por ejemplo, visitando cada uno, ojalá con algunos niños y niñas clarividentes, su propio Zoológico Numérico mental, como si nunca hubieran sabido la variedad de monstruos maravillosos que nos habíamos perdido, y explorando con confianza y admiración sus propias creaciones mentales cronotópicas.

¡Que las disfruten!

Carlos E. Vasco

Introducción histórica del método analítico en la Enseñanza de las matemáticas en Colombia[1]

Luis Carlos **Arboleda**
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
luis.carlos.arboleda@gmail.com

Resumen

Se estudian las distintas modalidades de enseñanza del método analítico por José Celestino Mutis (1732-1808) en la cátedra de matemáticas del Colegio del Rosario de Bogotá durante la segunda mitad del siglo XVIII. Como marco de referencia para apreciar mejor las transformaciones de esta enseñanza, se empezará por recordar algunas de las características históricas y filosóficas más importantes de la distinción cartesiana entre lo analítico y lo sintético en el pensamiento matemático. Mutis empieza introduciendo el enfoque logicista del *Discurso del Método* de Wolff. Luego explica las reglas cartesianas del análisis y la síntesis, para lo cual traduce fragmentos del *Comentario* de Rabuel de la *Geometría* de Descartes. También presenta las ideas de Newton sobre el método analítico, tanto en la modalidad experimental de la *Óptica* como en la perspectiva físico-matemática de los *Principia*. Se analizará el esfuerzo que pudo haber significado la comprensión de este cambio de perspectiva en el proceso de lectura y traducción de los *Principia* por parte de Mutis. Enseguida se muestra que al centrarse la enseñanza en los *Elementos de Matemáticas* de Bails –como consecuencia de la reforma del plan de estudios de la cátedra promovida por Mutis-, se termina adoptando la modalidad operatoria del análisis como aplicación del álgebra a la geometría. Se concluye que la introducción del texto de Bails conlleva una transformación de fondo en el enfoque epistemológico, cognitivo y pedagógico de la enseñanza por el método analítico en la cátedra del Rosario, comparada con la obra de Wolff en su etapa fundacional.

Palabras clave: historia y educación matemática, método analítico, Cátedra del Rosario, Mutis.

Introducción

En esta charla se analiza la recepción, circulación, uso y apropiación de nociones relativas al método analítico en uno de los momentos históricos decisivos de la enseñanza

[1] Este texto ha sido propuesto a la revista *Historia y Memoria de la Educación* para ser publicado en el monográfico sobre Historia de la Educación Matemática en Iberoamérica.

moderna de las matemáticas en Colombia y, al mismo tiempo, en uno de los establecimientos emblemáticos en la institucionalización de esta enseñanza: la cátedra de Matemáticas del Colegio del Rosario.

Este momento corresponde a la divulgación de la ciencia colonial ilustrada entre las élites criollas del virreinato de la Nueva Granada en la segunda mitad del siglo XVIII. El catedrático José Celestino Mutis promueve inicialmente un enfoque logicista de la formación matemática basado en el *Discurso del método* de Wolff. Luego explica las reglas cartesianas de análisis y síntesis como parte de sus lecciones de geometría analítica. Llama entonces la atención sobre la necesidad de distinguir el método matemático y la geometría algebraica de Descartes, de su orientación escolástica y su filosofía de sistema.

En un ambiente ideologizado, dominado por las polémicas con las comunidades religiosas que se resistían a la divulgación local de las ideas de Copérnico y Newton, Mutis enseña los fundamentos de la nueva física. En estas circunstancias el discurso sobre el método matemático abandona la perspectiva logicista de Wolff y Mutis con sus alumnos más destacados se consagran a interpretar el uso que le da Newton a los procedimientos de análisis y síntesis en el estudio de los fenómenos de la mecánica racional.

Un evento excepcional producto de esta etapa es la traducción inédita e incompleta de los *Principia* de Newton, la primera en castellano por muchos años. Las reformas de los planes de estudio con lo traumáticas e inestables que fueron, favorecieron en todo caso transformaciones en el pensamiento local del método analítico a través del uso y apropiación en la enseñanza de tratados de matemáticas como los *Elementos de Matemática* de Bails, con un enfoque epistemológico, cognitivo y pedagógico diferente a un curso tradicional como el de Wolff.

Para mejor apreciar los alcances de la enseñanza del método analítico por Mutis en la cátedra de matemáticas del Rosario, es conveniente hacer antes algunas consideraciones generales sobre la importancia de esta cuestión en las transformaciones de la práctica matemática en la segunda mitad del siglo XVIII y comienzos del XIX. Por la misma razón se hace necesario fijar las concepciones de Pappus y Descartes sobre la distinción entre lo analítico y lo sintético en el pensamiento matemático.

El método analítico según Pappus y Descartes

La distinción entre análisis y síntesis tiene una larga y compleja historia en las matemáticas y la filosofía. Michael Otte y Marco Panza han formulado una propuesta de clasificación de las modalidades bajo las cuales ha sido abordada esta relación: fenomenológica, genética, representacional, pragmática, programática, direccional, configuracional, lógico-teórica, lingüística y disciplinaria .(Otte & Panza, 1997, ix-xiii). El propósito central de discutir estas interpretaciones radica en el problema histórico-filosófico que se encuentra en el fondo de la cuestión, esto es, el problema de la objetividad matemática como forma de conocimiento. Así pues, la importancia de estudiar la distinción análisis-síntesis para estos autores radica en mejorar nuestra comprensión sobre la complementariedad entre medios y objetos de la matemática como actividad de razonamiento humano. (Otte & Panza, xii).

Se sostiene que el creciente alejamiento de las ciencias naturales del enfoque tradicional de las matemáticas que se puso en vigor en la segunda mitad del siglo XVIII, no podría entenderse si no se tiene en cuenta el desarrollo complejo de la experiencia y la práctica científica como consecuencia del incremento en las innovaciones en los métodos, técnicas y teorías, así como los cambios en el procesamiento de la información y la organización espacial del conocimiento. Por otro lado, en los mismos años se dieron transformaciones sustanciales en las formas de pensamiento matemático. Hacia comienzos del siglo XIX el pensamiento relacional ya había operado rupturas radicales con el pensamiento tradicional de las sustancias en tanto sujeto de predicación. La ciencia de las formas se alejó de la ciencia de los fenómenos, y las teorías empezaron a ser consideradas como realidades *sui generis*; evidentemente teniendo en cuenta que toda teoría corresponde a un modelo del mundo real y, en consecuencia, es el producto de una actividad subjetiva.

En los orígenes más directos de este pensamiento relacional se encontraban las innovaciones del «cálculo geométrico» introducido por Descartes en la *Geometría* (Descartes, 1954) con el propósito de establecer la distinción entre geometría y álgebra. Tales innovaciones –representadas en técnicas algebraicas para analizar problemas geométricos, conectar la construcción de curvas con sus respectivas ecuaciones algebraicas y clasificar las curvas según el grado de las ecuaciones que las representan–, resultan de la fecunda aplicación del método de análisis y síntesis a la solución del siguiente problema de Pappus (Descartes, 27), (Arboleda, 2013):

> Encontrar el lugar de los puntos tales que, si a partir de cada uno de ellos se trazan rectas que se cortan en ángulos dados, respectivamente con otras cuatro rectas dadas en posición, el producto de los dos segmentos que van desde el punto a dos de estas rectas, es igual al producto de los dos segmentos que van desde el punto a las otras dos.

Recordemos que la distinción analítico-sintético se origina en la filosofía griega. Esta tradición se revela en el siguiente escolio al libro 13 de los *Elementos* de Euclides (Klein, 1968, 259)): "El análisis, entonces, consiste en tomar como admitido lo que se busca para llegar por vía de consecuencia a algo cuya verdad ya ha sido admitida, mientras que la síntesis consiste en tomar algo admitido y pasar por vía de consecuencia a algo admitido como verdad".

Por otra parte, es al comienzo del libro 7 de sus *Mathematicae Collectiones* (traducción de Comandino de 1589) que Pappus formula sus ideas sobre las nociones de análisis-síntesis (Klein, 1968, 260, nota 7), las cuales usualmente se interpretan en los siguientes términos (Hintikka & Remes, 1974, 8-10):

> En el análisis, al suponerse que lo que se busca ya ha sido obtenido, examinamos aquello de donde procede y de nuevo las premisas de donde esto procede, hasta que remontamos de esta manera a algo ya conocido o que cumple la función de principio. A la inversa, en la síntesis se supone ya obtenido lo que en el análisis se busca como último término. Colocando en el orden natural (deductivo) los antecedentes del análisis en lugar de consecuentes, y relacionando unos y otros, llegamos a la meta que es la construcción del objeto buscado.

El esquema lógico del método de análisis y síntesis propuesto por (Hintikka & Remes, 1974, 22-26) e interpretado por (Gardies, 2001, 28-29) es el siguiente:

1. Enunciar aquello que nos es dado: D (D', D'' partes de D).
2. Enunciar aquello que se busca: z.
3. La etapa del Análisis: $D' \Rightarrow (z \Rightarrow d)$.
4. La etapa de la *resolución*: $d \Rightarrow D$.

5. La etapa de la *construcción*: Fin del Análisis; inicio de la Síntesis.
6. Demostración por medio de la síntesis: $D'' \Rightarrow (d \Rightarrow z)$.

Los resultados 6 y 3 permiten concluir que se llega a una equivalencia lógica entre z y d, cuando se parte de lo que nos es dado D o de sus partes D' y D''. Observemos también que la etapa 3 del análisis se inicia cuando a partir de una parte de lo dado y considerando lo buscado como dado, se deduce una afirmación que, en virtud de la resolución, se comporta como principio de lo dado.

La caracterización cartesiana de la relación análisis-síntesis en la *Geometría* es la siguiente (Descartes, 1954, 6-9):

> Si, entonces, deseamos resolver cualquier problema, suponemos primero que la solución ya se ha efectuado y damos nombres a todas las líneas que parecen necesarias para su construcción, tanto a las desconocidas como a las que se conocen. Luego, sin hacer distinciones entre líneas conocidas y desconocidas, debemos desentrañar la dificultad de una manera que muestre lo más naturalmente posible las relaciones entre estas líneas, hasta que encontremos posible expresar una única cantidad de dos maneras. Esto constituirá una ecuación, ya que los términos de una de estas dos expresiones son uno y otro iguales a los términos de la otra.

Anotemos finalmente que en su reconstrucción del procedimiento analítico empleado para la solución del problema de Pappus en los libros 1 y 2 de la *Geometría*, Gardies considera que Descartes utiliza dos modalidades de análisis. La primera consiste en aceptar como dado el lugar geométrico de los puntos que aportan solución al problema, para remontarse a partir de allí a la ecuación general de segundo grado como principio. La segunda modalidad de análisis consiste en remontarse del principio (la ecuación general) a otros principios, las ecuaciones restringidas de cada uno de los lugares geométricos que representan la solución. No obstante, Descartes no aporta la deducción lógica de cada lugar geométrico a partir de su ecuación, limitándose a exhibirlo como dado mediante una construcción (Gardies, 2001, 107-116).

El discurso wolffiano del método matemático y la instauración de la cátedra de Mutis

La creación de la cátedra de Matemáticas en el Colegio del Rosario de Santafé de Bogotá (1762) marca un momento decisivo en la introducción en Colombia de una enseñanza de las matemáticas dentro de los cánones del pensamiento ilustrado. El fundador y encargado de la cátedra por varios decenios fue José Celestino Mutis (1732-1808), un joven médico del virrey Mecía de la Cerda, que llegó al país dotado de una sólida formación en la nueva ciencia (botánica, física, astronomía y matemáticas) obtenida en Cádiz y Madrid, y que con el tiempo se convertiría en el director de la célebre Expedición Botánica de la Nueva Granada (1783) y del Observatorio astronómico (1803), el primero en América.

El 13 de marzo de 1762 Mutis pronuncia el *Discurso preliminar* o de inauguración de la cátedra en el cual expone sus ideas sobre la utilidad práctica de las matemáticas y su importancia en todo pensamiento racional sobre la naturaleza. (Hernández de Alba, 1982, 33-42), (Quevedo, 1993, 13-172). Nos interesa destacar el tratamiento que da Mutis en este discurso a lo que él denomina los "métodos sintético y analítico", según la expresión de Christian Wolff el autor de los *Elementa Matheseos Universae*, obra de referencia en los primeros años de la cátedra (Wolff, 1713-1715)(Wolffii, 1743-1752)(Wolff, 1757).

En primer lugar, se trata de explicar la conexión de estos métodos con el modo lógico en que se expresa el entendimiento de las cosas: "[En las matemáticas] se acostumbra el entendimiento a proceder sin error, conduciéndose siempre de unas verdades a otras, de la más simple hasta la más compuesta, o al contrario, según la aplicación de los dos métodos sintético y analítico". (Hernández de Alba, 1982, 36).

Con el fin de aclarar la secuencia de los términos sintético-analítico, Mutis anota a continuación que la geometría (euclidiana) es la parte de las matemáticas en donde se observa este «ajustado método de proceder» (sintético).

Luego en su lección sobre el "Método matemático", se dedica a precisar algunos aspectos del método expuestos de manera general en la inauguración: la naturaleza y características del discurso matemático, su constitución, organización, lenguaje y criterios de validación interna. En un trabajo anterior (Arboleda, 1993) hemos mostrado que Mutis se basa esencialmente en el enfoque logicista del *Discurso del método* que antecede los *Elementa* de Wolff. (Wolff, 1757, tomo 1, i-xii).

Al inicio de la lección Mutis afirma: "Todo el artificio de las matemáticas, su certidumbre y solidez consisten en el admirable orden de que usan los matemáticos para enseñar sus dogmas". Este orden del método geométrico se desenvuelve en dos componentes, resolución (análisis) y demostración (síntesis) (Hernández de Alba, 1982, 125):

> El orden con que se procede en las resoluciones y demostraciones es tan exacto y riguroso, que nada se admite, nada se deja pasar sin prueba. Ha merecido esta ciencia por la solidez que le es muy particular, calificar todo el método exacto en cualquier materia que sea. Y este modo de proceder los matemáticos es lo que se llama método geométrico.

El enfoque wolffiano del método que aprendieron los primeros alumnos en la etapa fundacional de la cátedra se centró en los siguientes principios: el método matemático es universal y provee un conocimiento sólido de las cosas; forma hábitos de orden y exactitud de juicio que producen «una facilidad y una viveza admirable para percibir la verdad en otras ciencias a las que se aplica»; otras prácticas y ciencias "muy útiles al comercio de la vida» no podrían por ellas mismas, sin la intervención del método matemático, proporcionar «esa fuerza de imaginación, esa vivacidad y ese hábito de invención" que se obtienen a través del pensamiento deductivo; "hay dos métodos generales para buscar las verdades en las matemáticas, a saber la Síntesis y el Análisis". (Arboleda, 1993, 48-49).

De acuerdo con Wolff, Mutis explica en su lección que el método matemático es el orden exacto y riguroso que los matemáticos utilizan en la presentación de sus conceptos. Primero las definiciones, seguidas de los axiomas y postulados en el caso de las matemáticas puras, o de experimentos y observaciones en las matemáticas mixtas y, finalmente, los teoremas y problemas. Establecer la verdad de una proposición consiste en demostrarla como teorema mediante una cadena de inferencias a partir de definiciones y axiomas. Este procedimiento se adelanta "observando cuidadosamente las reglas que proponen los lógicos para hacer sus silogismos". (Hernández de Alba, 1982, 132). En este discurso wolffiano del orden la prioridad no reside en el axioma o postulado euclidiano sino en la definición, la cual, más allá de aclarar los conceptos, cumple un papel inferencial. Para Mutis un "teorema" es "una proposición teórica deducida de muchas definiciones comparadas entre sí". (Hernández de Alba, 1982, 130).

En el discurso wolffiano tal como Mutis lo interpreta y divulga en la Nueva Granada, la noción de orden tiene una connotación especial, en tanto dispositivo fundamentador de las matemáticas que, en el desarrollo del análisis de los conceptos, se expresa en categorías de principios bien determinadas. Es tal vez en esta dirección que apunta la afirmación de (Cantù, 2018, 373) de que el orden en Wolff correspondería a un cierto propósito de fundamentar el conocimiento en una jerarquía de conceptos básicos de aritmética, geometría y todas las demás ramas del conocimiento humano. Esta autora sugiere una conexión entre este punto de vista de Wolff, y la concepción de Hilbert de fundamentar la geometría en grupos de axiomas relativos a las nociones de incidencia, orden, congruencia, paralelismo y continuidad. Así mismo, la creencia de Wolff en la posibilidad de un análisis de conceptos para determinar las nociones primitivas entre todas las demás no estaría alejada de otras concepciones fundacionales del programa de Hilbert; por ejemplo, en cuanto a que la noción geométrica de semejanza sea jerárquicamente superior a la noción de congruencia y que, en consecuencia, todos los teoremas que dependen de la primera anteceden a aquellos que dependen de la segunda. (Cantù, 2018, 373).

Recordemos a este respecto el famoso epígrafe de Kant a los *Fundamentos de la Geometría* en donde Hilbert afirma que los "principios básicos simples" sobre los que se funda la geometría, sus axiomas, son un ejemplo de que "todo conocimiento humano se inicia con intuiciones, pasa de éstas a los conceptos y termina en las ideas". (Hilbert, 1950, 1). Pero el sistema de axiomas de la geometría solo se establece como tal, a través del "análisis lógico de nuestra intuición espacial". Es el análisis lógico el que permite pasar de la intuición espacial –en donde los objetos aparecen como dados– a los principios que le sirven de fundamento a los conceptos e ideas geométricas. (Hilbert, 1950, 2-17).

Al comienzo de su lección del Colegio del Rosario sobre el método, Mutis explica la noción de análisis conceptual de los principios en términos de las tres reglas generales que fundamentan el método geométrico (Hernández de Alba, 1982, 125-126):

> La primera es que de las ideas más sencillas y más generales se ha de subir a las más compuestas y menos generales. La segunda es que en la definición de los términos nada quede oscuro, nada quede ambiguo. La tercera es que todas las proposiciones, cuyas verdades no constan a primea vista por la significación y percepción de los mismos términos con que se enuncian, se hayan de probar demostrando muchas verdades y, por medio de las definiciones supuestas, los axiomas concedidos y las proposiciones ya demostradas.

Mutis pudo confirmar el rol de las definiciones en función del ideal filosófico de Wolff al enseñar sus lecciones de aritmética con base en el primer capítulo de los *Elementa Matheseos*. El manuscrito con la traducción de estas lecciones bajo el título de «Elementos de aritmética», fue identificado recientemente en el Fondo Mutis del Real Jardín Botánico de Madrid por Sebastián Molina, y es analizado a profundidad en su tesis doctoral junto con otros documentos de la cátedra (Molina, 2018, 103-118). El carácter inferencial y al mismo tiempo filosófico de las definiciones ha debido hacérsele evidente, por ejemplo, en la traducción de la definición 2 del concepto de número uno (Molina, 2018, 109):

> Uno es aquello, que siendo algo no puede al mismo tiempo ser otra cosa dejando de ser lo mismo que es. Leibniz se explica en estos términos: supóngase por un instante que A es B, supóngase también que B no es D; supuesto esto si no se supone que A es D, vendremos en conocimiento de

> que A no es B, sino uno diverso del otro llamado B. Y aplicando la definición nuestra a términos más precisos, diremos, que A es uno, porque siendo A que es ser algo, no puede ser B que sería ser otra cosa, diverso de A o de aquello mismo que es.

Desde nuestra perspectiva de la aritmética formal esta traducción mutisiana aparece embarazosa y poco clara. Sin embargo, también sabemos que la dificultad epistemológica de esta definición para tratar de expresar la propiedad característica del concepto de "uno", radicaba en disponer para ello únicamente de los recursos limitados de la lógica de predicados, la única disponible en el contexto de la época. Por otra parte, el hecho de que Mutis trate a continuación de aclarar la definición apelando al análisis leibniziano, ilustra bien que ha captado la función pedagógica que Wolff le asigna al análisis conceptual.

La distinción análisis-síntesis en las lecciones de Mutis sobre la *Geometría* de Descartes

En sus lecciones de la cátedra consagradas a enseñar la geometría analítica Mutis hace nuevos planteamientos sobre el método de análisis y síntesis con respecto a los mencionados anteriormente. Comienza diciendo que expondrá el tema de manera "fácil y perceptible" en atención a los alumnos que emprenden por primera vez su estudio. En la más fiel aplicación de la "regla del análisis" al acto de enseñar, dice que procederá "examinando por partes, y poniendo en cada lugar, todo lo que me parece útil para hacer inteligible su doctrina" (Arboleda, 1993, 52 y 66).[2]

Esto corresponde a un propósito pedagógico de no fundamentar la enseñanza directamente en la presentación del original, ya que siendo la *Geometría* la más importante de las obras de Descartes, es la de más difícil lectura. Por otra parte, en el discurso del *Método matemático*, Mutis se había referido a la «regla de síntesis» interpretándola igualmente en un contexto pedagógico: "[Que] todas las proposiciones cuyas verdades no constan a primera vista por la significación y percepción de los mismos términos con que se enuncian, se hayan de probar demostrando muchas verdades, y por medio de las definiciones supuestas, los axiomas concedidos y las proposiciones ya demostradas". (Hernández de Alba, 1982, 126)(Arboleda, 1993, 53). Mutis advierte que no es su intención hacer ningún elogio a Descartes, primero porque no lo podría hacer al nivel de lo que ese gran hombre se merece, pero ante todo porque «el mejor elogio será el explicar bien su Geometría». Parece que Mutis quiso así dejar en claro a sus alumnos que comprender al geómetra es una cosa y combatir al filósofo de sistema es otra.

Para la realización del primer propósito –explicar bien la geometría cartesiana y facilitar su comprensión entre sus alumnos– Mutis probablemente aprovechó las *Lecciones de matemáticas* (La Caille, 1747), un texto de reconocida utilidad pedagógica en su época, y al cual se refiere en varios de sus escritos. La Caille le habría aportado una visión menos especulativa y más

---

[2] En este trabajo nos referimos de manera incidental al manuscrito con las notas de la enseñanza de Mutis de la geometría cartesiana, titulado *Comentarios a la Geometría de Descartes*. Este manuscrito se conserva en el Fondo Mutis del Real Jardín Botánico de Madrid. Recientemente Molina realizó su completa identificación, así como el primer estudio histórico pormenorizado del mismo, en el marco de su tesis doctoral (Molina, 2018, 118-124). Agradecemos a doña Irene Fernández de Tejada de Garay, Unidad de Archivo, Real Jardín Botánico, CSIC, el habernos facilitado una copia de este manuscrito [RJB III 7, 1, 5, ff. 397r-416v] para la preparación del presente trabajo.

orientada al abordaje del método analítico en la enseñanza del álgebra y la geometría analítica. Anotemos que existen evidencias de que este texto fue consultado en otros momentos de la cátedra y en la formación autodidacta por varios miembros de la élite criolla a lo largo de los decenios siguientes; incluso ya bien entrada la república –alrededor de los años 1850– Lino de Pombo lo utilizó en la enseñanza de la geometría analítica en el Colegio Militar (Pombo, 1850)(Arboleda, 2018).

Retornemos al manuscrito de Mutis titulado *Comentarios a la Geometría de Descartes* [RJB III 7, 1, 5, ff. 397r-416v]. Gracias a (Molina, 2018, 118-124) hoy sabemos que estas "notas de enseñanza" de la geometría cartesiana por parte de Mutis en la cátedra del Colegio del Rosario, corresponden efectivamente a la traducción inédita al español, hecha por él mismo, de los *Comentarios* que Rabuel consagró a la *Geometría* de Descartes (Rabuel, 1730). Hay que advertir que la traducción de Mutis no incluye, entre otros apartes, el texto sobre el procedimiento empleado en la *Geometría* en la solución del problema de Pappus. Como hemos aclarado anteriormente fue precisamente aquí donde Descartes utilizó el análisis para obtener el principio de la solución, es decir la curva algebraica cuya fórmula general es la ecuación de segundo grado; para luego deducir de esta ecuación, mediante un procedimiento de síntesis, las secciones cónicas que satisfacen la solución y finalmente construirlas con regla y compás.

Por otra parte, Mutis solo traduce 8 de las *12 Reglas generales para la solución de los Problemas* en las cuales Rabuel se propone sistematizar la explicación de Descartes sobre "Cómo se ha de llegar a las igualaciones que sirven para resolver los Problemas". No traduce en particular la Regla XII en donde Rabuel comenta precisamente la noción de *fórmula general*; es decir, aquella que manteniendo una estrecha relación con el método analítico, "hace evidente todas las combinaciones que pueden tener los términos y los signos de una clase de ecuaciones, y que involucran todos los casos que se pueden presentar en la resolución o construcción de un Problema. Aquella que expresa los distintos grados de las curvas a las cuales se da el mismo nombre" [Traducción de LCA]. No obstante lo anterior, la traducción contiene las reglas del I al VIII en donde Rabuel tematiza las explicaciones de Descartes sobre su método de resolución geométrica mediante el análisis algebraico (Maronne, 2017, 111-161 y 349-355 (Annexe)).

Las variaciones del enfoque newtoniano sobre el método analítico en la cátedra de Mutis

En el aparte anterior hemos señalado que Mutis fue claro, desde los primeros años de la cátedra, que enseñar la geometría de Descartes no era incompatible con su empeño en rebatir su filosofía de sistema. Precisamente en las lecciones de 1764 sobre los *Elementos de la filosofía natural*,[3] Mutis consagra varios apartes a rebatir el método de los escolásticos de construir sistemas globalmente explicativos «inventados por la fuerza del ingenio». Argumentando contra las pretensiones cartesianas de deducir la explicación de los efectos a partir de causas formuladas dentro de sistemas a priori, Mutis vuelve a referirse al método analítico-sintético,

[3] José Celestino Mutis, Elementos de la filosofía natural, que contienen los principios de la física demostrados por las matemáticas y confirmados con observaciones y experiencias: dispuestos para instruir a la juventud en la doctrina de la filosofía newtoniana en el Real Colegio del Rosario de Santa Fe de Bogotá en el Nuevo Reino de Granada, año de 1764. (Hernández de Alba, 1982, 43-68). Citado en este trabajo como *Elementos.*

pero ahora no en la perspectiva logicista sino relacionándolos con su interpretación newtoniana en el estudio de la naturaleza. Todo indica que se basó en la "cuestión 31" de la *Óptica* de Newton (Newton, 2003), aunque está por esclarecerse cuál de las ediciones utilizó entre las que se encuentran en los fondos Mutis y de libros raros y curiosos de la Biblioteca Nacional de Colombia en Bogotá.

En la continuación de este aparte de los *Elementos* que más nos interesa, Mutis afirma que el estudio de la naturaleza de acuerdo con el método de análisis y síntesis es el más seguro y que por ello permite abandonar para siempre todo tipo de disputas. Se comienza, dice Mutis, por el examen de las causas o efectos de los fenómenos para luego pasar al descubrimiento de sus potencias o causas. Observemos que Mutis no utiliza la equivalencia que establece Newton al comienzo de la "cuestión 31" entre las terminologías de "análisis y síntesis" y su equivalente "resolución y composición". Mutis omite igualmente la consideración de Newton sobre el papel de la inducción en la obtención de conclusiones generales a partir de los experimentos. Su explicación de la idea de Newton sobre análisis y síntesis se reduce a lo siguiente (Hernández de Alba, 1982, 51):

> [Newton] estableció... que de las causas particulares se fuera subiendo a otras más generales; y de éstas finalmente a las más generales entre todas. Este es el método analítico. Después de haber descubierto estas causas se debe bajar por un orden contrario, considerándolas ya como principios establecidos para explicar por este medio las causas menos generales, y después los fenómenos que son sus consecuencias; haciendo ver de este modo la solidez y firmeza de estas explicaciones. Este es el método sintético.

A continuación Mutis advierte que en la aplicación de este método en cualquier materia de las matemáticas o de la física –los términos originalmente empleados por Newton son «física natural» y «física experimental»–, hay que tener en cuenta que existe una jerarquía epistemológica del momento de análisis con respecto a la síntesis. Esta argumentación viene a reforzar el propósito de los *Elementos* de presentar la filosofía natural en un contexto de crítica radical a la vieja filosofía, pues la primacía del análisis ofrece la garantía de reconocer y utilizar principios que efectivamente existen en la naturaleza y, por consiguiente, permite abandonar sistemas que aún habiendo sido compuestos a través de síntesis laboriosas resultan ilusorios.

En la anterior interpretación sobre el uso newtoniano del método de análisis y síntesis en la filosofía natural, se sostiene que Mutis se inspiró, como hemos dicho, en la aproximación experimentalista a este método que aparece en la «cuestión 31» de la *Óptica.* Conviene hacer una aclaración a este respecto. Los biógrafos de Mutis coinciden en señalar que los *Elementos* o lecciones de Mutis de 1764 sobre la filosofía natural, corresponden al enfoque experimental adquirido en la primera parte de su formación en medicina en Cádiz durante los años 1753-1757 bajo la orientación de Pedro Virgili (1699-1776). Como se sabe Virgili fue el promotor de la apropiación en España de los principios de la física newtoniana aplicados a la explicación de los fenómenos fisiológicos (Quevedo, 1992, 52 y 55). Esta cuestión y otras relacionadas con la formación de Mutis y su actividad en la enseñanza concretamente de la física experimental en la Nueva Granada, han sido examinadas por Molina en su tesis desde una perspectiva más documentada y completa que seguramente será objeto de nuevas reflexiones en la materia (Molina, 2018, 76-83).

También se ha planteado que por la época de su formación en Cádiz, Mutis pudo haber frecuentado la Asamblea amistosa literaria dirigida por Jorge Juan en Cádiz, o al menos estuvo al tanto de los trabajos científicos modernos que en ella se discutían, así como también habría participado en las actividades del recién creado Observatorio astronómico de San Fernando (González de Posada, 2008, 45-46). Posteriormente, entre 1757 y 1760, Mutis estuvo en condiciones de aprovechar su estancia como médico en la corte de Madrid para fundamentar su formación científica particularmente en matemáticas y física, a través del estudio de las obras de los físicos experimentalistas entonces más reconocidos: los holandeses Willen‘s Gravesande y Pieter van Musschenboek, y los franceses Sigaud de la Fond y Jean Antoine Nollet, obras estas que enseñó y difundió en la primera etapa de la cátedra en la Nueva Granada (Arboleda, 1993)(Molina, 2018).

De manera que el texto *Elementos* corresponde a la primera parte de la formación newtoniana de Mutis con un acercamiento a la nueva física desde la experiencia sensible y de acuerdo con el enfoque de la *Óptica*, la cual se constituyó desde su publicación en 1704 en un poderoso medio de penetración y aceptación de Newton en el continente. Cuando esta etapa experimental estuvo suficientemente consolidada tanto por los esfuerzos de los primeros newtonianos (los experimentalistas holandeses y franceses antes citados), como de cartesianos como Malebranche, Mairan y Privat de Molières, entonces se hizo posible la conformación de un consenso sobre la obra paradigmática de los *Principia*.

Este ciclo histórico se verificó de cierta manera en la Nueva Granada. A la primera etapa de enseñanza de la física experimental en los inicios de la cátedra de matemáticas en el Colegio del Rosario, seguiría un periodo de cualificación de los estudios de la física matemática newtoniana, llegando a su madurez en los años 1770 con la traducción al castellano de los *Principia* de Newton en la célebre edición latina (Leseur & Jacquier, 1739-1742). La traducción de la obra canónica de la nueva física fue una tarea de enormes proporciones, aunque lamentablemente inacabada e inédita, que Mutis realizó en colaboración de algunos de sus alumnos más aventajados en la cátedra del Rosario, en un momento de álgidas discusiones contra los detractores del copernicanismo y las teorías heliocéntricas (Arboleda, 1992)(Arboleda, 1993).

No olvidemos que Leseur y Jacquier enriquecieron la edición de los *Principia* con numerosos comentarios históricos y científicos, particularmente útiles para quienes estando alejados de los centros académicos europeos, como era el caso de Mutis y sus alumnos, requerían informarse sobre el desarrollo y el estado del arte de las matemáticas y la física hasta la primera parte del siglo XVIII. Así mismo estaban dirigidos a facilitarle al lector la comprensión del verdadero estilo newtoniano de matematización de la naturaleza, y su diferencia con respecto al enfoque experimentalista ilustrado. Por ejemplo, al traducir los corolarios I y II a las leyes del movimiento de Newton en la edición latina, Mutis también tradujo los comentarios de los editores sobre la modelación de la composición y resolución de las fuerzas y movimientos por medio de la ley del paralelogramo.

Después de examinar las técnicas y argumentos de las demostraciones matemáticas de los corolarios, Leseur y Jacquier destacan las ingeniosas y precisas experiencias con las cuales Gravesande había confirmado la exactitud de tales demostraciones. Este bien pudo ser uno de aquellos momentos de la traducción en los cuales la apropiación intelectual de la obra canónica que se pone en juego en este ejercicio, condujo al reconocimiento por parte de Mutis y de sus alumnos de que la cultura anterior formada en los textos de los divulgadores experimentales de Newton tenía su *razón de ser* en la teoría expuesta en los *Principia*.

Por cierto, el papel de Mutis en la institucionalización de la física newtoniana en Nueva Granada fue reconocido de manera temprana por los viajeros científicos europeos que exploraron nuestro territorio, en particular por Humboldt quien lo divulgó en Europa a través de su *Diario de viaje* y, de manera especial, en el obituario consagrado al gaditano en la célebre *Biographie Universelle* de Michaud, en donde escribió lo siguiente (Humboldt, 1823, 658):

> Como profesor de matemáticas del Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario, difundió las primeras nociones del verdadero sistema planetario en Santa Fe. Los dominicos no vieron sin inquietud que «las herejías de Copérnico» profesadas ya por Bouguer, Godin y La Condamine, en Quito, penetraran a la Nueva Granada; pero el virrey protege a Mutis de los monjes que querían que la tierra permaneciera inmóvil. Estos se acostumbraron poco a poco a lo que llamaban todavía «las hipótesis de la nueva filosofía».

Retornando a nuestro tema principal, recordemos que tanto en los *Principia* como en los comentarios de Leseur y Jacquier aparecen consideraciones sobre la concepción newtoniana del método de análisis-síntesis que seguramente no escaparon a la atención de sus lectores en Santafé de Bogotá, tanto más por la insistencia de Mutis de comprender a fondo el «««verdadero método de filosofar». Así, por ejemplo, desde el Prefacio, Newton advierte que la preocupación central de su filosofía consiste en investigar las fuerzas de la naturaleza a partir de los fenómenos del movimiento, lo cual corresponde al momento del análisis. Luego, a partir del conocimiento de los principios de estas fuerzas, se pasa a demostrar el resto de los fenómenos; es decir, del momento del análisis sigue el momento de la síntesis (Arboleda, 1992, 39-42)(Molina, 2018, 67-92).

Así mismo, en el corolario II a las leyes del movimiento antes mencionado se encuentran varios comentarios de Leseur y Jacquier sobre la composición de fuerzas en donde se revela la complejidad del método de la filosofía natural. La traducción del aparte sobre la experiencia del sistema de fuerzas asociado al movimiento de una rueda debe haber aproximado mucho más a Mutis y a sus alumnos a la comprensión del concepto de matematización newtoniana de la naturaleza, en comparación con la primera parte de la enseñanza de la cátedra consagrada a divulgar el enfoque experimentalista de la nueva física.

Una lectura a fondo del comentario de los editores sobre el estudio de este sistema de fuerzas, como la que tuvo que haber hecho Mutis con la traducción, pone en cuestión cualquier imagen simplificadora de la naturaleza y uso del método de análisis-síntesis. En particular, le permitió dejar en claro que lo decisivo en el método de Newton no era la generalización por inducción de los resultados más simples de la experiencia, sino, como dice Cohen, "un intercambio entre la simplificación e idealización de las situaciones que se dan en la naturaleza y sus análogos en el dominio matemático. De este modo, Newton pudo producir un sistema matemático y unos principios matemáticos que luego se aplicarían a la filosofía natural" (Cohen, 1983, 71-174).

Mutis lector de la versión moderna del método analítico en los *Elementos* de Bails

Otro evento determinante en la adopción del método analítico en la cátedra de matemáticas del Colegio del Rosario fue la introducción en la enseñanza de las obras de Benito Bails, tanto los *Elementos de Matemática* (Bails, 1772-1783) sin duda el compendio enciclopédico de las matemáticas más importante de España en el siglo XIX, como en su versión abreviada de los *Principios de Matemática* (Bails, 1776).

El tomo segundo de los *Elementos* de Bails es un tratado de álgebra. Se estudian esencialmente los métodos de resolución de ecuaciones hasta de cuarto grado y su aplicación en el tratamiento algebraico de problemas de la geometría; en ello consiste el método analítico para Bails. *Análisis* es el «arte que enseña los métodos para resolver por el cálculo algebraico las cuestiones que se pueden proponer acerca de las cantidades», y *Analistas* aquellos matemáticos que se dedican a este ramo o aplicación del cálculo algebraico.

En el tomo tercero se exponen los fundamentos del *análisis cartesiano*, es decir, se caracterizan las curvas algebraicas, particularmente las cónicas, por el método de coordenadas, y se determinan sus propiedades mediante el cálculo diferencial e integral. Concluye el tomo con una presentación de ecuaciones diferenciales y un pequeño tratado de trigonometría esférica.

La introducción de Bails en la enseñanza de las matemáticas en Colombia es un hecho de significativa importancia, ya que, comparada con la influencia de la obra de Wolff en su etapa fundacional de la cátedra del Rosario, conllevó una transformación en el enfoque pedagógico y en los contenidos a enseñar. Mutis recomienda a Bails en el *Plan provisional para la enseñanza de las matemáticas en el Colegio de Nuestra Señora del Rosario* de 1785 (Hernández de Alba, 1982, 117-124).

En la presentación del plan al virrey Caballero y Góngora Mutis explica que si al comienzo de la cátedra en 1762 había preferido el compendio y el curso completo de Wolff, fue por "la dilatada experiencia de enseñar de aquel profesor» y porque estas eran «obras excelentes en su tiempo y modelo de las que posteriormente se han publicado". Pero los avances posteriores de las teorías matemáticas, agrega, han evidenciado que las obras de Wolff son "en cierto modo defectuosas" y que ya no convienen a la instrucción (Hernández de Alba, 1982, 119-120).

La opinión puede parecer desmesurada en cuanto a ubicar el compendio de Bails como una de las mejores obras de Europa, a no ser que esta opinión se refiera al hecho de que, como lo reconoce el propio Bails en su prólogo, en su realización extractó y copió de las obras clásicas y modernas, en particular de los cursos recientes de Bézout y Cramer, aquello que de acuerdo con los propósitos pedagógicos del plan le pareció más indicado, "enlazando con todo esmero los pedazos para la formación de un tratado" (Bails, 1772-1783, 1: xiii, xix).

Pero Mutis no se equivoca en su percepción de la inmediata difusión de la primera edición y posteriores reimpresiones de Bails tuvieron en España y en América, y su influencia en la preparación de un nuevo espíritu científico en las ciencias matemáticas. Esta acogida venía a responder a los nuevos derroteros de la institucionalización de la enseñanza en España y sus colonias, y a las expectativas de formación matemática centrada ya no tanto en una curiosidad ilustrada por las matemáticas, como en la búsqueda de una comprensión integral y formalizada de las teorías más avanzadas del momento. Todo ello enfocado en aquellos saberes que, como decía Bails en el prólogo general de la obra, satisfacen las "empresas de universal utilidad", y coadyuvan al interés natural de "sacrificar la especulación a la práctica" (Bails, 1772-1783, 1: xiv).

Por cierto, en el prólogo Bails pone las *Lecciones* de La Caille como ejemplo de lo que él entendía como moderna concepción de "curso completo de matemáticas", pero lamenta que ellas fueran extremamente concisas y que hubieran omitido importantes temas sobre todo en matemáticas puras. Sin embargo, reconoce que esta concisión no obedecía a impreparación de su autor sino a un empeño conciente de solo exponer en el texto los fundamentos de las materias a enseñar, dejando al profesor la tarea de complementarlas y explicarlas en la enseñanza en el aula (Bails, 1772-1783, 1: v-vi).

Según Bails esta concepción pedagógica buscaba reemplazar el dictado en la enseñanza de las matemáticas. Se trataba de impedir que, por mantener fija la atención en el dictado de las materias más que en su comprensión, los alumnos cometieran errores en la copia apresurada, concretamente de cálculos y fórmulas complicadas. Estos errores eran incluso frecuentes en la copia más esmerada de las figuras y diagramas con los cuales se ilustraban los contenidos (Bails, 1772-1783, 1: vii).

En el tomo segundo sobre el álgebra encontramos otra reflexión pedagógica de Bails sobre el método analítico entendido, en el contexto intelectual del momento, como aplicación del álgebra a la geometría. Bails informa en el prólogo que en su presentación utilizó el *Comentario* de Rabuel a la *Geometría* de Descartes (Bails, 1772-1783, 2: vi), precisamente la obra que Mutis estudió y tradujo en cierto momento de su enseñanza en la cátedra del Rosario. También se refiere a las dificultades que enfrentan quienes se inician en la aplicación del método analítico (algebraico) en la resolución de problemas geométricos; concretamente en cuanto a introducir la doble escritura cartesiana para designar los segmentos dados y distinguirlos de los segmentos desconocidos a partir de la configuración geométrica del problema, y poder así avanzar en la construcción de la ecuación final.

Recordemos que Descartes reconoce esta dificultad en la *Geometría*, al señalar que su solución debe abordarse en el orden más natural para mostrar la manera de relacionar unos segmentos con otros. En su enseñanza de la geometría cartesiana Mutis se encontraba bien al tanto de esta dificultad y disponía de los elementos propuestos por Rabuel para superarla en la cátedra en términos de sus “12 reglas”. Años más tarde, al publicarse el tomo segundo de los *Elementos*, Mutis se encontrará de nuevo con las técnicas y procedimientos que Bails ofrece al calculador o analista para vencer tal dificultad, los cuales no lo eximen de un esfuerzo laborioso e inteligente de construcción analítica como advierte Rabuel en el *Comentario* (Bails, 1772-1783, 2: v):

> Más es fortuna que destreza escoger con acierto las líneas y empezar como conviene el cálculo. Cuestión hay que se resuelve con suma facilidad siguiendo un rumbo, la cual sería trabajosa, y acaso imposible de resolver, siguiendo otro distinto. Por lo que, siempre que un camino parezca largo, o muy penoso, será prudente buscar otro, u otros muchos, si fuera necesario. No os dejéis alucinar de las resoluciones breves y despejadas que leyereis en las obras impresas, donde se encuentran cuestiones resueltas con tal brevedad y elegancia, que luego se entiende su resolución, a la cual no llegó su autor, sino después de muchísimo trabajo, y de haberla buscado en vano por muchos caminos.

Referencias bibliográficas

Arboleda, L. C. (1992). Newton en Nueva Granada. Anticartesianismo y matematización de la realidad en la traducción mutisiana de los *Principia*. En: San Pío Alarden, M. del P. (ed.)(1992). *Mutis y la Real Expedición Botánica del Nuevo Reino de Granada*, 33-47. Barcelona: Villegas/Lunwerg Editores.

Arboleda, L. C. (1993). Matemáticas, Cultura y Sociedad en Colombia. En: Quevedo, E. (ed.)(1993). *Historia Social de la Ciencia en Colombia,* tomo II, 13-172. Bogotá: Colciencias.

Arboleda, L. C. (2013). El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas. En: Obando Zapata, G. (ed.)(2013). *Asociación Colombiana de Matemática Educativa 13º Encuentro*, 764-776. Medellín: Editorial Universidad de Medellín.

Arboleda, L. C. (2018). La introducción del método analítico en la enseñanza de las matemáticas en Colombia. *Revista Paradigma*, 39, 202-222.

Bails, B. (1772-1783). *Elementos de Matemática*. 10 vols. Madrid: Joachim Ibarra.

Bails, B. (1776). *Principios de Matemática*. 3 vols. Madrid: Vda. de Ibarra.

Cantù, P. Mathematics. Systematical Concepts. En: Theis, R. & Aichele, A. (ed.)(2018) *Handbuch Christian Wolff*, 357-380. Wiesbaden: Springer.

Cohen, I. B. (1983). *La revolución newtoniana y la transformación de las ideas científicas*. Madrid: Alianza.

Crépel, P. & Schmit, C. (eds.)(2017). *Autour de Descartes et Newton. Le paysage scientifique lyonnais dans le premier XVIIIe siècle*. Paris: Hermann.

Descartes, R. (1954). *The Geometry of René Descartes with a facsimile of the first edition*. Translated from the French and Latin by Smith D. E. & Lattan, M. L. New York: Dover.

Gardies, J.-L. (2001). *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse? Essai de définition.* Paris: Vrin.

González de Posada, F. (2008). José Celestino Mutis médico, y la ciencia fundamental de su tiempo en España. *Real Academia de Medicina de Cantabria*, nº 26.

Hernández de Alba, G. (1982). *Pensamiento científico y filosófico de José Celestino Mutis.* Bogotá: Fondo Cultural Cafetero.

Hilbert, D. (1950). *The Foundations of Geometry.* Authorized translation by Townsend, E. J. Reprint edition. La Salle: The Open Court Publishing Co., 1950.

Hintikka, J. & Remes, U. (1974). *The Method of Analysis. Its Geometrical Origin and Its General Significance.* Dordrecht: Reidel.

Humboldt, A. von. (1823). Mutis Don Joseph Celestino. En: Michaud (ed). *Biographie Universelle Ancienne et Moderne*, nouvelle édition (Paris: Desplaces), 29, 658-662.

Klein, J. (1968). *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. New York: Dover.

La Caille, N.-L. de. (1747). *Leçons Élémentaires de Mathématiques ou Élémens d'Algebre et de Géométrie*. Paris: Guerin.

Leseur, T. & Jacquier, F. (1739-1742). *Philosophiae naturalis principia mathematica auctore Isaaco Newtono eq aurato: perpetuis commentaris illustrate*. Genevae: Barrillot.

Maronne, S. (2017). Les Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes (1730) de Claude Rabuel. En: Crépel & Schmit (ed.)(2017). *Autour de Descartes et Newton. Le paysage scientifique lyonnais dans le premier XVIIIe siècle*. (Paris: Hermann), 111-161 y 349-355 (Annexe).

Molina, S. (2014). Aspectos metodológicos de la demostración de la fuerza en los *Principia* de Newton. *Praxis Filosófica,* 39, 67-92.

Molina, S. (2018). “No hay reino que no sea newtoniano”: José Celestino Mutis and the appropriation of Newton’s experimental physics in New Granada (1762-1804). PhD diss., Università degli Studi di Torino.

Newton, I. (2003). *Opticks, or, A Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections, and Colours of Light*. New York: Prometheus Books.

Otte, M. & Panza, M. (eds.)(1997). *Analysis and Synthesis in Mathematics.* Dordrecht: Kluwer.

Pombo, L. de.(1850). *Lecciones de jeometría analítica.* Bogotá: Imprenta El día.

Quevedo, E. (1992). Mutis y la medicina. En: San Pío Alarden, M. del P. (ed.)(1992). *Mutis y la Real Expedición Botánica del Nuevo Reino de Granada*, 77-97. Barcelona: Villegas/Lunwerg Editores.

Rabuel, C. (1730). *Commentaires sur la géométrie de M. Descartes*. Lyon: M. Duplain.

Wolff, C. (1713-1715). *Elementa matheseos universae. Qui commentationem de methodo mathematica, arithmeticam, geometriam, trigonometriam planam, et analysin tam finitorum, quam infinitorum complectitur*. 2 vols. Halle: Magdeburgicae.

Wolff, C. (1757). *Cours de mathématique contenant toutes les parties de cette science mises à la portée des commençants, traduit en françois e augmenté considérablement*, 3 tomes. Paris: Jombert.

Wolfii, Christiani [Christian Wolff]. (1743-1752). *Elementa matheseos universae. Editio novissima, multo auctior et Correctior*, 5 tomos. Genevae: Henricum-Albertum Gosse.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Lesson Study as a vehicle for the Synergy of Research and Practices: A Japanese Perspective

Yoshinori Shimizu
University of Tsukuba
Japan
yshimizu@human.tsukuba.ac.jp

Summary

Given the distinctive characteristics of Japanese mathematics lessons found by the international studies and the subsequent focus of the attention to Lesson Study originated in Japan in education community, the author discusses the relationships between the scientific studies and endeavour for the improvement of teaching and learning from an insider’s perspective. Reflecting on how mathematics educators have been struggling with studying the complex phenomena called "lesson" in the Japanese context, it is argued that orchestrating the scientific goal of building theories and the goal of improving teaching and learning of mathematics is the key to a synergy between research and the more practical knowledge of the craft of teaching.

Key Words: Lesson study, mathematics, international comparisons, LPS

Introduction

The findings of large-scale international studies of classroom practices in mathematics include aspects of instruction as identified among participating countries while instruction in Japan is seemingly unique (Hiebert, et al., 2003; Stigler & Hiebert, 1999). Japanese mathematics teachers, for example, appeared to spend more time on the same task in one lesson than their counterparts in other countries (Hiebert et al., 2003, p.46), maybe because they have students work on a challenging problem and discuss alternative solutions to it. Also, experienced teachers in Japan tend to highlight and summarise the main points at particular phases of their lesson to have their students reflect on what they have learned (Shimizu, 2006). These striking characteristics can be regarded as indicating some indispensable elements of “structured problem-solving” in classroom that are valued and emphasized by Japanese teachers.

While much has been documented and analysed about mathematics classrooms in Japan, after the publication of The Teaching Gap (Stigler & Hiebert, 1999), in particular, Lesson Study became one of the notable topics in the mathematics education community (e.g. Huang & Shimizu, 2016). Lesson Study, ‘jugyo kenkyu’ in Japanese, is a common element in Japanese approach to improving teaching and learning in classroom whereby a group of teachers collaborate to study the subject matter, students' thinking and learning in the classroom, and how classroom instruction can be improved (Fernandez & Yoshida, 2004; Lewis & Tsuchida, 1998; Shimizu, 2014). Two major functions of Lesson Study are as a way of doing research with a hypothesis in the form of conducting lesson and as a place for presenting and discussing new findings based on classroom practice (Hirabayashi, 2002). These functions are related to the rationale for conducting Lesson Study as an opportunity of professional development for teachers to study the effectiveness of mathematics teaching and learning in their own classrooms. Also, practical knowledge related to the improvement of classroom instruction is accumulated as 'research' findings tested against the classroom practices of many teachers for many years.

Given the tradition of Lesson Study in more than a century, Japanese mathematics educators have often been challenged by teachers who have been engaged in Lesson Study whether results of "scientific" studies would or would not be usefully applicable to the improvement of teaching and learning in the classroom (Sekiguchi, 1994). The expectations by teachers for mathematics education research are high because they have their own problems to be resolved in their own contexts. How can a researcher productively and collaboratively work with teachers who have an access to the accumulation of practical knowledge tested against the classroom practices of many teachers for many years? How can research influence on classroom practices in such contexts?

An essential characteristic of the field of mathematics education is that its questions and concerns are deeply tied to matters related to the teaching and learning of mathematics (Silver & Herbst, 2007). Research in mathematics education has not only scientific goal of building theories but also the goal of improving of teaching and learning of mathematics. Then, examining the connections between 'scientific' study of a lesson and Lesson Study can shed light on a long-standing issue of the separation between research and practice in the education community, in general, and mathematics education community, in particular.

Educational Research as Socially and Culturally Situated

International Comparative Studies on Classroom Practices

Research in mathematics education that crosses national boundaries provides new insights into the development and improvement of the teaching and learning of mathematics (Shimizu & Kaur, 2013). In the course of discussing the characteristics of teaching and learning in classrooms by cross-national comparisons, researchers have gained more explicit understanding of their own implicit theories about how teachers teach and how children learn mathematics in their local contexts as well as what is going on in school mathematics in other countries (Stigler, Gallimore, & Hiebert, 2000). This is the key driving force to conduct international comparative studies in classroom practices.

The TIMSS 1995 Video Study of mathematics teachers' practices, a video component of the Third International Mathematics and Science Study, was the first attempt to collect and analyse videotapes from the classrooms of national probability samples of teacher at work (Stigler & Hiebert, 1999). Focusing on the actions of teachers, it has provided a rich source of information regarding what goes on inside eighth-grade mathematics classes in Germany, Japan and the United States with certain contrasts among three countries. One of the sharp contrasts between the lessons in Japan and those in the other two countries relates to how lessons were structured and delivered by the teacher. The structure of Japanese lessons was characterized as 'structured problem solving', while a focus was on procedures in the characterisations of lessons in the other two countries. The following sequence of five activities was described as the 'Japanese pattern':

reviewing the previous lesson; presenting the problems for the day; students working individually or in groups; discussing solution methods; and highlighting and summarizing the main point.

The 'Japanese pattern' seems to naturally fit within the teacher's planning of mathematics lessons. Japanese teachers, in elementary and junior high schools, in particular, often organise an entire mathematics lesson around the multiple solutions to a single problem in a whole-class instructional mode (Shimizu, 1999a). This organization is particularly useful when a new concept or a new procedure is going to be introduced during the initial phase of a teaching unit. Even during the middle or final phases of the teaching unit, teachers often organize lessons by posing a few problems with a focus on the various solutions students come up with. Also, the characterisation of Japanese lessons as 'structured problem solving' seems to be consistent with what teachers typically discuss in the post-lesson discussion in Lesson Study (Takahashi, 2008).

Characterization of the practices of a nation's or a culture's mathematics classrooms with a single lesson pattern was, however, problematised by the results of the Learner's Perspective Study (Clarke, Mesiti, O'Keefe, Jablonka, Mok & Shimizu, 2007). The analysis suggested that, in particular, the process of mathematics teaching and learning in Japanese classrooms could not be adequately represented by a single lesson pattern by, at least, the following two reasons. First, lesson pattern differs considerably within one teaching unit, which can be a topic or a series of topics, depending on the teacher's intentions throughout the sequence of lessons. Second, elements in the pattern themselves can have different meanings and functions in the sequence of multiple lessons. Needless to say, it is an important aspect of teacher's work not only to implement a single lesson but also to weave multiple lessons that can stretch out over several days, or even a few weeks, into a coherent body of the unit. It would not be possible for us to capture the dynamic nature of activities in teaching and learning process if each lesson was analysed as isolated.

An alternative approach was proposed to the international comparisons of lessons by the researchers in LPS team. That is, a postulated 'lesson event' was regarded to serve as the basis for comparisons of classroom practice internationally. In LPS, an analytical approach was taken to explore the form and functions of the particular lesson events such as 'between desk instruction', 'students at the front', and 'highlighting and summarizing the main point' (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006).

In particular, the form and functions of the particular lesson event 'highlighting and summarizing the main point', or 'Matome' in Japanese, were analysed in eighth-grade 'well-taught' mathematics classrooms in Australia, Germany, Hong Kong, Japan, Mainland China (Shanghai), and the USA (Shimizu, 2006). For the Japanese teachers, the event 'Matome' appeared to have the following principal functions: (i) highlighting and summarizing the main point, (ii) promote students' reflection on what they have done, (iii) setting the context for introducing a new mathematical concept or term based on the previous experiences, and (iv) making connections between the current topic and previous one. For the teachers to be successful in maintaining these functions, the goals of lesson should be very clear to themselves, activities in the lesson as a whole need to be coherent, and students need to be involved deeply in the process of teaching and learning. The results suggest that clear goals of the lesson, a coherence of activities in the entire lesson, active students' involvement into the lesson, are all to be noted for the quality instruction in Japanese classrooms.

Mathematics Education Research as Socially and Culturally Situated

In the Japanese contexts, the activity of Lesson Study includes careful planning and implementing the research lesson as a core of the whole activity, followed by post-lesson discussion and reflection by participants. In the discourse of teachers in planning, implementing, and reflecting on lessons, particular pedagogical terms are often shared and used in the contexts of examining classroom instruction (Shimizu, 1999). Through the participation in lesson study, beginning teachers learn these terms together with values attached to them. These terms reflect what Japanese teachers value in planning and implementing lesson within Japanese culture. ‘Matome’ as a category of ‘lesson event’, as was mentioned in the previous section, is one of such pedagogical terms often used by teachers. "Hatsumon" is another example of shared term that means asking a key question to provoke and facilitate students' thinking at a particular point of the lesson. The teacher may ask a question for probing students' understanding of the topic at the beginning of the lesson or for facilitating students’ thinking on the specific aspect of the problem.

"Yamaba", on the other hand, means a highlight or climax of a lesson. Japanese teachers think that any lesson should include at least one "Yamaba" and the term often appears in planning a lesson and the post-lesson discussion in Lesson Study. This climax usually appears as a highlight during the whole-class discussion. The point here is that all the activities, or some variations of them, constitute a coherent system called a lesson that hopefully include a climax. Further, among Japanese teachers, a lesson is often regarded as a drama, which has a beginning, leads to a climax, and then invites a conclusion. The idea of “ki-sho-ten-ketsu” which was originated in the Chinese poem, is often referred by Japanese teachers in their planning and implementation of a lesson. It is suggested that Japanese lessons have a particular structure or a flow, moving from the beginning (“ki”, a starting point) toward the end (“ketsu”, summary of the whole story).

As teaching is a cultural activity and is socially and culturally situated, research is also socially and culturally situated. Sekiguchi (2015) argues that there are at least three major sources of Japanese mathematics education research; lesson study tradition, influence from Western countries, and existence of national syllabus. Then, in addition to focus on pedagogical terms shared and used in Lesson Study by teachers with values and beliefs on lessons, it would be productive for researchers to take into account the following contexts to have better understanding of classroom practices. First, in Japan we have national curriculum standards, which have been revised roughly every 10 years. In order to examine the trends and issues in most areas of mathematics research in Japan, we cannot neglect their connections with the goals and emphases described in the national curriculum standards. Second, the mathematics education community in Japan has a long tradition of lesson study by teachers as practical research methodologies in the form of action research. Researchers and teachers work closely within the community with local theories of students’ learning in their perspective. Then, to grasp the ongoing research agendas, we also need to pay careful attention to their accumulated findings with respect to teaching materials and ways of teaching and learning in each research area. Third, developments of mathematics education research in Japan have been influenced by Western educational theories in various areas of inquiry, while educational activities themselves are rooted in East Asian cultural tradition.

Lesson Study as Embedded in Cultural Contexts

The ultimate goal of any study of classroom practice is to improve teaching for the purpose of enhancing students' learning, even if its major focus would be on, for example, constructing a theoretical model of teaching or comparing teaching methods among countries. For this goal, various approaches and methodologies can be adapted. The TIMSS Video Study was a breakthrough as a scientific exploration into the classroom, showing the feasibility of applying videotape methodology in a wide-scale national and international survey of classroom instructional practice. It has provided a rich source of information regarding what goes on inside eighth-grade mathematics classes in the three countries. Also, objective observational measures of classroom instruction were developed to serve as valid quantitative indicators, at a national level, of teaching practices in the three countries.

There are opportunities for Japanese teachers to learn with and from their experienced colleagues to pursue an excellent lesson with a focus on students' thinking in classrooms. "Lesson study" is an approach to develop and maintain quality mathematics instruction through a particular form of activity (Fernandez & Yoshida, 2004; Shimizu, 2002). Valuing students' thinking as necessary elements to be incorporated into the development of a lesson is a key to the approach taken by Japanese teachers.

Another type of approach to improve teaching practice has traditionally been taken by Japanese teachers in a practical way. In Japanese schools, workshops of particular style, "Jugyo Kenkyu-kai" ("lesson study meeting"), are regularly held at each school level or at the other levels. This opportunity has a strong impact on teacher development (Shimizu, 1999). These workshops include an actual lesson (a "research lesson") observed by many teachers as well as an extended discussion after the lesson (Lewis & Tsuchida, 1998; Shimizu, 2014). Teachers exchange ideas about the lesson they have just observed focusing on the task on which students worked, the content taught, students' responses to the problem, and the teacher's roles. Experienced teachers or mathematics educators are often invited to comment on the development of the lesson observed, interpretations of the topic taught, and how the lesson could be improved. By observing and discussing an actual lesson, aspects of lessons are examined and explored.

The Origin and the Development of Lesson Study

Although Fernandez and Yoshida (2004) mention that the origin of lesson study can be traced back to the early 1890s, it seems to have appeared earlier. At the beginning of the modern era, the Japanese government established normal schools, where teachers set the goals of the lesson, prepared experimental lessons, and conducted those lessons in actual classrooms while other teachers were observing them. In the late 1890s, teachers at elementary schools affiliated to the normal schools started to study lessons by observing and examining them critically. Makinae (2010) argues that the origin of Japanese lesson study was influenced during the late 1880's by U.S. books for educators that introduced new approaches to teach. He points out that a book by Sheldon (1862) describes methods to learn about new teaching approaches, called 'criticism lesson' and 'model lesson'. This may be the beginning of Japanese lesson study. In fact, Inagaki (1995) argues that 'criticism lesson' was already practiced among elementary schools affiliated to the normal schools in Japan as early as the late 1890s. Teacher conferences utilising criticism lessons were conducted by local school districts in the early 1900s. Some of these conferences were already called 'lesson study conferences', or jugyo-kenkyu-kai in Japanese (Makinae, 2010). In this sense, lesson study has a history of more than a century.

In the early stages of development of Japanese lesson study, 'criticism lesson' (Sheldon, 1862) included a particular function of studying lessons, carefully examining the effectiveness of teaching, and publicly discussing ways to improve teaching and learning. The term 'research lesson', or kenkyu-jugyo, might come from this particular function of lesson study with its major focus on producing a new idea, or testing a hypothesis in the form of an operationalized teaching method or teaching materials. On the other hand, 'model lesson' (Sheldon, 1862) included another function of studying lessons; demonstrating or showcasing exemplary lessons, or presenting new approaches for teaching. For this purpose, the lesson should be carefully planned and based on research conducted by a teacher or a group of teachers. Participants can observe and discuss actual lessons with a hypothesis, instead of simply reading papers or hand-outs that describe the results of the study. The two different functions of lesson study – 'criticism lesson' and 'model lesson' – can be the original model of a variety of lesson study practiced around the country.

Despite the long history of lesson study in their own country, Japanese mathematics educators and researchers in other areas have not been much interested in studying lesson study itself until recently. After the publication of The Teaching Gap (Stigler & Hiebert, 1999), and of a Japanese translation of the book (Minato, 2002), Japanese educators, who often deeply involved in lesson study, have "found" the importance of this particular cultural activity.

Today, lesson study takes place in various institutions and contexts (Lewis & Tsuchida, 1998; Shimizu, 2002). Pre-service teacher training programs at universities and colleges, for example, include lesson study as a crucial and challenging part in the final week of student teaching practice, which usually lasts three or four weeks. In-service teachers also have opportunities to participate, held within their school (konai-kenshu), outside their school but in the same school district or city, at the level of prefecture, and even at the national level for several objectives. Teachers at public schools may just participate in lesson study in their school to develop their teaching skills, since the school is their working place. Other teachers may play the major roles in planning and conducting research lesson, for testing critically their hypothesis in the use of particular method for teaching mathematics. Teachers at university-affiliated schools that have a mission to developing a new approach to teaching, often open their lesson study meeting for demonstrating an approach or new teaching materials they have developed. Thus, we can still see two major functions of lesson study that seems to have arisen from the original form of it.

The Role of Outside Expert in Lesson Study

In lesson study, an outside expert is often invited as an advisor who facilitates the post-lesson discussion and/or makes comments on the possible improvement of lesson from a broader viewpoint (Fernandez and Yoshida, 2004; Shimizu, 2008). The expert may be an experienced teacher, a supervisor at local board of education, a principal of a different school, or a professor from the nearby university. In some cases, not only inviting an expert as a commentator in the post-lesson discussion, the group of teachers may meet with him/her several times prior to conducting the research lesson to discuss issues such as reshaping the objective of the lesson, clarifying the rationale of a particular task to be presented in the classroom, a range of anticipatory student responses to the task, and so on. In this context, an outside expert can be a collaborator who shares responsibility for the quality of a lesson with the teachers, not just an outside authority which directs the team of teachers.

As for the university professor invited as an outside expert, he or she is expected as a researcher to provide new visions on curriculum reform and teaching practices, trends and issues in local and national educational policies, and also some concrete suggestions for improving daily classroom practices, as well as commenting on what was observed in research lesson. Given the tradition of lesson study, mathematics educators have often been challenged by school teachers who deeply engaged in lesson study whether "research results" provided by researchers are useful for improving classroom practices.

There is another role of an outside expert. Namely, the expert can be as a collaborator and a contributor who joins the process of planning, implementing, and reflecting on a research lesson together with the group of teachers. In this case, an outside expert can be seen as a part of the community of practice, not an authority that has come from outside the school.

Studying and Improving of Teaching and Learning of Mathematics

Working with and Learning from Teachers

There has been a concern in mathematics education community, at least in Japan, with the relevance and usefulness of the results of research. Also, it is often argued that there is a long-standing issue of the separation between research and practice in education community, in general, and mathematics education community, in particular. Given the tradition of lesson study, it is very important for Japanese mathematics educators to work with and to learn from teachers. The relationship between research and practice may be seen differently in other countries.

Among five crucial relationships in research in mathematics education that he identified as important, Bishop (1992) lists the relationship between the teacher and the researcher as a particularly significant one. He characterizes three theoretical traditions, pedagogue, empirical scientist, and scholastic philosopher, and each tradition has the goal of enquiry, role of evidence, and role of theory in different ways. If the goal of study is direct improvement of teaching, and role of theory is accumulated and sharable wisdom of expert teachers, the study is in the pedagogue tradition. The evidence presented is usually highly selective and exemplary here. He noted that in both empirical scientist and scholastic philosopher traditions, the roles of teacher and researcher are incompatible. He wrote:

> The teacher is the practitioner whose practice, it is felt, needs to be informed by the research of the researcher. So, we have a clear hierarchy involved, with the researcher informing the teacher, but not necessary vice versa (p.717).

Bishop (1992) noted that the analysis and study of mathematics teaching from both these perspectives can make the teacher an object – not a subject – in the research. The role of outside expert who is invited to Lesson Study as an advisor can be considered in light of this hierarchy. The expert can facilitate the post-lesson discussion and/or makes comments on the possible improvement of lesson from a broader viewpoint. Or, being involved in Lesson Study can invite the consequence for the researcher being just an outside authority coming into the classroom to direct the group of teachers and develop theories for them, if the researcher is not aware of their role and does not understand the significance of working with and learning from teachers.

There is a possibility that the gap may become larger between the efforts in mathematics education research and the problems tackled by the teachers. Lerman (1990) noted that to make separation between those who practice, and those who develop theories for the practitioners, is not an adequate characterization of the business of good teaching. Also, Wiliam & Lester (2008) wrote as follows.

> We promote a renewal of a sense of purpose for our research activity that seems to be disappearing, namely, a concern for making real, positive, lasting changes in what goes on in classrooms. We suggest that such changes will occur only when we become more aware of and concerned with sharing of meaning across researchers and practitioners. (p. 38)

One of the major characteristics of Lesson Study is that, as the historical development illustrates, the approach was initiated by a group of teachers to improve teaching and learning in classrooms. The problem tackled by teachers has rooted in the reality of the school and the classroom. Research questions can be posed in responding to problems derived from teachers' works. In working with teachers and learning from teachers in Lesson Study, mathematics educators can have an opportunity for identifying implicit wisdom and accommodating craft knowledge to scholarly knowledge. Ellerton & Clement (1994) raised the issues to be confronted by the international mathematics education research community and noted the need to demonstrate a greater respect for the wisdom of practice deriving from the classroom knowledge and the action-oriented theories of practicing teachers of mathematics in different countries around the world. As Lesson Study has become a focus of attention in countries including Australia, Malaysia, and the United States, for example, we have more chances to learn from the voice of teachers.

Studying One Lesson Intensively

Lesson study usually is conducted in a few classrooms and then its results have very limited validity in the beginning. If those results are shared among other teachers, and replicated in many other classrooms in different schools, they could increasingly obtain higher validity and relevance. Therefore, a larger community of teachers who wish to learn from other teachers are key for the success of lesson study with certain generalizability. The key is a particular focus on aspects of developing a lesson. Participating in lesson study provides opportunities for teachers to learn shared values of teaching mathematics as a school subject, with and from experienced colleagues. Such values are related to teachers' views on a 'good' lesson and an 'excellent' teacher.

Ruthven & Goodchild (2008) discuss the significant of craft knowledge, the professional knowledge used by teachers in their day-to-day classroom teaching; action-oriented knowledge which is not generally made explicit by teachers, which they may indeed find difficult to articulate, or which they may even be unaware of using. Orchestrating scientific goal of building theories and the goal of improving of teaching and learning of mathematics is the key to a synergy between research and the more practical knowledge of the craft of teaching. Lewis et al. (2006) argues that development of a descriptive knowledge base, explication of an innovation's mechanism, and iterative cycles of improvement research. By studying a good lesson continuously, practical knowledge tested against the classroom practices of many teachers for many years is accumulated. Here research can inform practice by providing a tool for explaining in broader views or providing teachers categories for describing the meaning of their vocabulary.

To develop better understandings of educational activities in local contexts, researchers need to consider the underlying values and beliefs shared by that local community (Shimizu & Williams, 2012). It should be noted, for instance, that valuing students' thinking as necessary elements to be incorporated into the development of a lesson is key to the approach taken by Japanese teachers (Shimizu, 2009). Describing anticipated students' responses, is, amongst other activities, key to lesson planning because the whole-class discussion depends on the solution methods the students actually come up with. Having a very clear sense of the ways students are likely to think about and solve a problem prior to the start of a lesson makes it easier for teachers to know what to look for when they are observing students work on the problem.

Mary Hesse (1980) pointed out that any theory is value-laden, and that an awareness of the value behind a theory is crucial, in social science, in particular. In any science, criteria for theory choices contain value judgments, but those values tend to be filtered out as theories are developed. We need to be conscious that educational theories are value-laden and that those values derived in part from our experience with educational practices in a broader sense. Japanese mathematics educators who are engaged in Lesson Study are interested in "good" or "successful" classroom practice. The tendency is derived from their experiences with Lesson Study that has the goal of building theories and the goal of improving teaching and learning of mathematics at the same time.

Studying Values Attached to Teachers' Behavior

The countries in East Asia in the Confucian Heritage Culture certainly share commonalities, and mathematics classroom practices in this region exhibit similarities in various aspects of teaching and learning (Leung, Park, Shimizu, & Xu, 2015). However, classroom practices are embedded in their particular cultural and historical backgrounds. Thus, when we look into mathematics classrooms in different countries, even within East Asia, we immediately realize the diversity of practices in teaching and learning. Teachers in different countries or regions behave differently when teaching the same mathematical content, and consequently students in each country learn the topic differently. The key to understand the similarities and differences are the values attached to teaching and learning in classrooms.

When we compare teachers' behavior in classrooms between Tokyo and Shanghai, significant differences appeared (Shimizu, 2017). While teachers from both countries highlighted and summarized the main points of the lesson, the Japanese teacher summed things up even in the middle of the lesson, while the Shanghai teachers mainly focused on mathematical content taught in their lessons. Japanese mathematics teachers often organize an entire lesson around the multiple solutions to a single problem, in a whole-class instruction mode. Since the teachers emphasize finding alternative ways to solve a problem, Japanese classes often consider several strategies. It would be natural, then, for the classes to discuss problem-solving strategies from various viewpoints, such as mathematical correctness, brevity, efficiency, and so on. A teaching style with an emphasis on finding many ways to solve a problem naturally invites certain summarizing behaviors. If the whole-class discussion reaches a point of thinking retrospectively about what they have considered, even in the middle of the lesson, a teacher may have Matome.

There seem to be supporting conditions and shared beliefs among the Japanese teachers that justify often having Matome at the end of the lessons or at the end of sub-units. Every lesson has an opening, a core, and a closing. This is particularly the case for Japanese lessons, which begin and end with the students bowing. Teachers regard their lessons as dramas, which have a beginning and leads to a climax. In fact, one of the characteristics of Japanese teachers' lesson planning is the deliberate structuring of the lesson around a climax, "Yamaba" in Japanese (Shimizu, 2006, p. 143). Most teachers think that a lesson should have a highlight. The essential point is that Japanese mathematics teachers have access to a sophisticated and coherent vocabulary that allows them to discuss the components of the mathematics lesson, reflect on their teaching, and offer and receive advice. This structure provides a powerful tool for pre-service and in-service teacher education. These pedagogical terms are learned by teachers through participation in Lesson Study, which is a Japanese approach to improving teaching and learning mathematics through a particular form of activities by a group of teachers, including planning, implementing, and discussing actual lessons (Shimizu, 1999). It is important to note that these pedagogical terms are used in the discourse of particular contexts embedded in a whole system, to describe a particular style of teaching. Japanese mathematics teachers often organize an entire lesson by posing just a few problems, and focus on students' various solutions to them. Educating teachers about lesson plans includes helping them with key pedagogical terms.

Given the tradition of lesson study, it is very important for Japanese mathematics educators to work with and to learn from teachers. With the study of classroom instruction researchers can have a manifestation of values attached to teaching and learning in classroom, as well as elements and structure of classroom practices. The manifestation in turn can provide an endorsement to the practical approaches taken by teachers to the improvement of classroom instruction. By participating in Lesson Study, mathematics educators can have a window through which researchers can ”touch” the issues in the practices rooted in the contexts where teachers working.

Concluding Remarks

For more than a decade, educators and researchers in the field of mathematics education have been interested in Lesson Study as a promising source of ideas for improving education. For a Japanese mathematics educator who has been deeply involved in lesson study for more than two decades, this ‘movement’ has provided an opportunity for reflecting on how Lesson Study as a cultural activity works as a system embedded in the entire society as well as local community of teachers with shared values and beliefs. It is argued that orchestrating the scientific goal of building theories and the goal of improving of teaching and learning of mathematics is the key to a synergy between research and the more practical knowledge of the craft of teaching.

International comparative studies have started to recognize the need to focus more on existing diverse voices and perspectives among members of the local communities. As the globalization and internationalization of research activities has continued to expand, the field of mathematics education research has clearly shown the diversification of perspectives on teaching and learning in classrooms embedded in local contexts. As the classroom practices are socially and culturally situated, and shared values and beliefs by teachers are key for continuous development and of the quality teaching, research in mathematics education is socially and culturally situated. Continuous working with, and learning from, teachers raises the issues and shapes the research questions originated in the efforts of improvement of teaching and learning mathematics in the classroom.

References

Bishop, A. (1992). International perspectives on research in mathematics education. In D. A. Grouws (ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clarke, D. J., Keitel, C. & Shimizu, Y. (Eds.) (2006). *Mathematics classrooms in twelve countries: The insider’s perspective*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Clarke, D. Mesiti, C., O’Keefe, C. Jablonka, E. Mok, I.A.C. & Shimizu, Y. (2007) Addressing the challenge of legitimate international comparisons of classroom practice. *International Journal of Educational Research.46*, 280-293.

Ellerton, N. F. & Clement, M.A. (1994). Transforming the international mathematics education research agenda. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (eds.) *Mathematics education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fernandez, C. & Yoshida, M (2004). *Lesson Study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates,

Hesse, M. B. [1980]: *Revolutions and Reconstruction in the Philosophy of Science*, Brighton: Harvester Press.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K.B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chiu, A.M.-Y., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., Manaster, C., Gonzales, P., and Stigler, J. (2003*). Teaching mathematics in seven countries ： Results from the TIMSS 1999 Video Study*. U.S. Department of Education. Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Hirabayashi, I. (2002). Lesson as a drama and lesson as another form of thesis presentation. In H. Bass, Z. P. Usiskin & G. Burrill (Eds.), *Studying classroom teaching as a medium for professional development. Proceedings of a U.S. - Japan workshop*. Washington, DC: National Academy Press.

Huang, R. & Shimizu,Y. (2016). Improving teaching, developing teachers and teacher developers, and linking theory and practice through lesson study in mathematics: An international perspective. *ZDM- Mathematics Education, Vol.48(4)*

Japan Society of Mathematical Education (2010). *The handbook of research in mathematics education*. Tokyo: Toyokan (in Japanese).

Leung, F.K.S., Park, K., Shimizu, Y., & Xu, B. (2015). Mathematics education in east Asia. In S.J. **Cho** (ed.) *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Challenges* (pp.123-143). New York, NY: Springer.Lewis, C., & Tsuchida, I. (1998). A lesson like a swiftly flowing river: Research lessons and the improvement of Japanese education. *American Educator, 22*(4).

Lewis, C., Perry, R., & Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of lesson study. *Educational Researcher, 35(3)*, 3-14.

Li, Y., & Shimizu, Y. (eds.). (2009). Exemplary mathematics instruction and its development in East Asia. ZDM—The International Journal of Mathematics Education 41(3), (Special Issue).

Makinae, N. (2010). The Origin of Lesson Study in Japan. Y. Shimizu, Y. Sekiguchi & K. Hino (eds.) The proceedings of the 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education: In search of excellence in mathematics education, Tokyo: Japan Society of Mathematical Education.

Malara, N.A. & Zan, R. (2008) The complex interplay between theory in mathematics education and teachers' practice. In L.D. English (ed). *Handbook of international research in mathematics education (second edition)*. New York, NY: Routledge.

Minato, S. (2002). Learn from Japanese mathematics education: Jugyou-kenkyuu as becoming the focus in the United States. A translation with annotations of The teaching gap (Stigler & Hiebert, 1999). Tokyo: Kyoiku Shuppan.

Ruthven, K. & Goodchild, S. (2008) Linking researching with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowledge. In L.D. English (ed). *Handbook of international research in mathematics education (second edition). New York, NY. Routledge*.

Sekiguchi, Y. (1994). Mathematics education research as socially and culturally situated. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (eds.) *Mathematics education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sekiguchi, Y. (2015). The development of mathematics education as a research field in Japan. In B. Sriraman, J. Cai, K-H. Lee, L. Fan, Y. Shimizu, C.S Lim & K. Subramaniam (eds.) *The first sourcebook on Asian research in mathematics education: China, Korea, Singapore, Japan, Malaysia and India*. Information Age Publishing.

Shimizu, Y. (1999). Aspects of mathematics teacher education in Japan: Focusing on teachers' role. *Journal of Mathematics Teacher Education. 2(1)*, 107-116.

Shimizu, Y. (2002) Lesson study: what, why, and how? In H. Bass, Z. P. Usiskin & G. Burrill (eds.) *Studying classroom teaching as a medium for professional development: Proceedings of a U.S.-Japan workshop*. Washington DC: National Academy Press, 53-57, 154-156.

Shimizu, Y. (2006) How do you conclude today's lesson? The form and functions of "Matome" in mathematics lessons. In D. Clarke, J. Emanuelsson, E. Jablonka & I. Ah Chee Mok (eds.) *Making connections: Comparing mathematics classrooms around the world*. Rotterdam: Sense Publishers.

Shimizu, Y. (2008). The role of outside expert in lesson study in Japan. Paper presented at the interactive symposium, "Teacher-Academic partnerships: International approaches to teacher professional development", Annual Meeting of the American Educational Research Association (New York) March 27.

Shimizu, Y. (2014). Lesson study in mathematics education. In S. Lerman (ed.) *Encyclopedia of mathematics education*. New York, NY: Springer

Shimizu, Y. (2017). Uncovering the label "Asian" in international comparative studies of mathematics education. In Ji-Won Son, Tad Watanabe and Jane-Jane Lo (eds). *What matters? Research trends in international comparative studies in mathematics education.* (pp. 83-94), Springer.

Shimizu, Y. & Kaur, B. (2013) Learning from similarities and differences: a reflection on the potentials and constraints of cross-national studies in mathematics. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, Vol.45(1), 1-5.*

Shimizu, Y., Kaur, B., Huang, R., & Clarke, D. J. (eds.). (2010). *Mathematical tasks in classrooms around the world.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Shimizu, Y. & Williams, G. (2012). Studying learners in intercultural contexts. In M. A. (Ken) Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, and F. Leung (eds.) *Third international handbook of mathematics education*, New York, NY: Springer.

Sliver, E.A. & Herbst, P. G. Theory in mathematics education scholarship. In F. K. Lester (ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics & Information Age Publishing.

Stigler, J. W., Gallimore, R., & Hiebert, J. (2000). Using video surveys to compare classrooms and teaching across cultures: Examples and lessons from the TIMSS and TIMSS-R video studies. *Educational Psychologist, 35(*2), 87–100.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York, NY: Free Press.

Takahashi, A. (2008). Beyond show and tell: Neriage for teaching through problem-solving: Ideas from Japanese problem-solving approaches for teaching mathematics. *Paper presented at TSG 19: Research and Development in Problem Solving in Mathematics Education*, 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Mexico.

Wiliam, D. & Lester, F. K. (2008). On the purpose of mathematics education research : Making productive contributions to policy and practice. In L. English (ed.) *Handbook of international research in mathematics education (second edition)* (pp. 32-48). New York, NY: Routledge.

¿Es la excelencia matemática una prioridad curricular?

José Luis **Lupiáñez** Gómez
Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
España
lupi@ugr.es

Johan **Espinoza** González
Universidad Nacional de Costa Rica
Costa Rica
johan.espinoza.gonzalez@una.cr

Resumen

La formación y el desarrollo de los estudiantes diagnosticados con talento matemático o con altas capacidades, constituyen uno de los valores más importantes que un sistema educativo puede brindar a la sociedad, debido a la excelencia y el alto desempeño que pueden alcanzar estos estudiantes al llegar a un ámbito laboral. Sin embargo, en muchas ocasiones adolecen de fracaso escolar debido a la falta de directrices curriculares, de dinámicas de aula o de formación del profesorado. En este trabajo se caracterizará la noción de talento matemático, ejemplificando las habilidades que pueden desarrollar y describiendo posibilidades de diagnóstico.

Palabras clave: talento matemático, altas capacidades, procesos de diagnóstico.

Abstract

The education and development of students diagnosed with mathematical talent or with high abilities, constitute one of the most important values that an educational system can provide to society, due to the excellence and high performance that these students can reach when they reach a work environment. However, in many cases they suffer from school failure due to the lack of curricular guidelines, classroom dynamics or teacher training. In this work the notion of mathematical talent will be characterized, exemplifying the skills that can be developed and describing diagnostic possibilities.

Keywords: mathematic talent, high abilities, diagnostic processes.

Varios estudios se han propuesto precisar y clarificar el término talento con el propósito de hacerlo más operativo para la investigación (Benavides, 2008). Esto, porque existe una gran diversidad de concepciones para referirse a este concepto: superdotados, altas capacidades, talentosos; encontrándose más de 100 definiciones de talento y sus sinónimos (Villarraga, Martínez & Benavides, 2004). Al respecto, Gagné (1995 y 1993, citado en Benavides, 2008) propone el Modelo Diferenciado de Superdotación y Talento para distinguir los conceptos de superdotación y talento.

Para Martínez & Guirardo (2010) la superdotación se conceptualiza como un perfil donde el sujeto presenta un nivel elevado de razonamiento lógico, creatividad, memoria, que le posibilita una producción eficaz en cualquier ámbito o tarea, mientras que el talento hace referencia a una elevada aptitud en un ámbito o tipo de información. Además, el superdotado se caracteriza por un nivel elevado de varias aptitudes que puede combinar para obtener un resultado que va más allá de la simple suma de las habilidades, distinguiéndose no solo cuantitativamente, sino cualitativamente por la calidad de sus producciones (Ramírez, 2012).

Por tanto, la superdotación se refiere a la posesión de habilidades naturales en alto grado, que son espontáneas e innatas y que se presentan en al menos un dominio de habilidad; en contraste, el talento denota la posesión de habilidades, destrezas y conocimientos desarrollados sistemáticamente en al menos un campo de la actividad humana. Así, la superdotación se asocia a actividades intelectuales y al talento a destrezas y aptitudes más específicas.

Centrándonos en el talento el diccionario de la Real Academia Española de la Lengua propone cinco concepciones con respecto a este término. El primero de ellos se refiere a una persona inteligente con capacidad de entender. La segunda se relaciona con una persona apta, con capacidad para el desempeño o ejercicio de una ocupación. La tercera definición es una unión de la primera y segunda, ya que la concibe como una persona inteligente o apta para una determinada ocupación. La cuarta acepción, que corresponde a una definición original del término, concibe el talento como la moneda de cuenta de los griegos y romanos.

El talento también es referido a un conjunto de destrezas y habilidades que le permiten a un individuo dominar un área concreta del saber, de modo que la característica principal del talentoso es su especificidad (Prieto & Catejón, 2000). De igual forma, Clark (1997, citado en Díaz, Aleman, & Hernández, 2013) propone que un sujeto con talento presenta una distinción en algún campo particular, por ejemplo, música, artes y matemática, etc. Lopez-Andrada, Beltrán, López-Medina & Chicharo (2000), también hacen referencia a este concepto y sostienen que los estudiantes con talento muestran habilidades específicas en áreas muy concretas.

Además, el Departamento de Educación de los Estados Unidos (USOE), plantea la siguiente concepción de los sujetos con talento:

Los niños talentosos y sobresalientes son los que, identificados por profesionales calificados, manifiestan la virtud de habilidades extraordinarias y son capaces de dar un alto rendimiento académico. Ellos requieren programas educativos diferenciados o servicios más allá de los normalmente brindados por programas regulares de trabajo escolar, para potenciar su contribución a sí mismos y a la sociedad. (Renzulli, 1996, p. 15)

Otros autores consideran que el talento es una posibilidad de logro que es potencialmente inherente a todo ser humano, por lo que se desarrolla en cualquier momento de la vida de acuerdo con las habilidades de cada ser humano (Huamán, 2006; citado en Reyes-Santander & Karg, 2009). Al respecto Villarraga et al., (2004), distingue entre talento actual y talento potencial. El primero se refiere al ya desarrollado y evidenciado por un sujeto talentoso; mientras que el segundo al que aún no se ha desarrollado, es decir que el sujeto está en potencia de desarrollar y demostrar su o sus talentos.

Ramirez (2012) hace un análisis sobre la posible interrelación entre las características de la aptitud matemática que proponen los estudios de Greenes (1986), Miller (1990) y Freiman (2006) y afirma que de ellas se deduce que este constructo ha sido definido en términos de superioridad en procesos matemáticos. Además, considera que la posesión de unas adecuadas actitudes cognitivas como la flexibilidad para organizar datos, agilidad mental, etc., pueden verse manifestadas en el desarrollo de procesos idóneos para realizar con éxito algunas actividades como localizar la clave de los problemas, desarrollar estrategias eficientes, etc.

Villarraga et al., (2004) también proponen cinco nociones del talento orientadas en distintos aspectos: al logro o rendimiento, a lo innato o genético, a la interacción entre lo innato y el medio ambiente, a modelos cognitivos y a modelos sistémicos. Dentro del enfoque del logro o rendimiento, la teoría más conocida es la de los tres anillos de Renzulli (1977), quien concibe el talento como la interacción entre tres grupos básicos de rasgos humanos: capacidad por encima de la media, fuertes niveles de compromiso con la tarea y fuertes niveles de creatividad.

Con respecto al talento matemático, una de las formas más sencillas de definir este constructo y quizás la más difundida, es la de considerarlo como la capacidad matemática de un sujeto que se sitúa significativamente por encima de la media (Pasarín, Feijoo, Díaz & Rodríguez, 2004). Por lo que, en general, se nomina a aquellos estudiantes talentosos en matemática que son hábiles resolviendo problemas para sujetos de una edad superior. Morales (1998, citado en García, 2014) agrega que poseen un alto grado de dedicación a las tareas asignadas y que presentan altos niveles de creatividad a la hora de abordar tareas matemáticas.

Castelló & Batlle (1998, citado por Fernández, Castillo, & Barbarán 2010) consideran que una persona con talento matemático se caracteriza por disponer de elevados recursos de representación y manipulación de informaciones que se presentan en la modalidad cuantitativa y/o numérica.

Ramírez (2012) señala que las características que definen a estudiantes con talento matemático se han desarrollado desde los años ochenta del pasado siglo y propone que:

Un alumno con talento matemático es aquel que pregunta espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean, busca patrones y relaciones, construye nexos, lazos y estructuras matemáticas, localiza la clave de los problemas, produce ideas originales, valiosas y extensas, mantiene bajo control los problemas y su resolución, presta atención a los detalles, desarrolla estrategias eficientes, cambia fácilmente de una estrategia a otra, de una estructura a otra, piensa de modo crítico y persiste en la consecución de los objetivos que se propone. (pp. 23-24)

En este estudio hemos elegido el término talento matemático, en el sentido que define Passow (1993), para referirnos a los alumnos que han demostrado unas aptitudes específicas en el área de matemáticas.

A continuación se presentan algunas ideas relacionadas con la caracterización del talento matemático.

Caracterización del talento matemático

En la actualidad, la atención de niños superdotados o con talento va adquiriendo importancia tanto en los diferentes currículos escolares como en el ámbito de la investigación en Didáctica de la Matemática. Este interés también se refleja en la conformación de grupos de discusión en Congresos de relevancia en el área de la Educación Matemática como es el ICME 10 (TSG4) o el ICME 11 (TSG6) (Benavides, 2008).

Esta misma autora afirma que estudiar las características particulares que poseen estos estudiantes es una de las líneas de investigación que se han desarrollado alrededor del tema. De hecho, Krutetskii (1976) es quizás uno de los primeros investigadores que realizó un estudio sistemático en este sentido al observar los procesos cognitivos de 192 niños entre los 6 y 16 años ante una serie de problemas especialmente preparados. Krutetskii sostiene que este tipo de estudiante no sólo tienen mejor memoria y aprenden más rápido que sus compañeros, sino que también parecen pensar de forma cualitativamente diferente sobre las matemáticas y poseen algunas habilidades de resolución de problemas matemáticos de los adultos.

De igual forma García (2014) argumenta que desde edades escolares los niños con talento presentan características que los diferencian de los demás, como es el mostrarse activos, persistentes, flexibles y curiosos hacia el aprendizaje. Además, poseen una excelente rapidez en la captación de conceptos matemáticos complejos y abstractos. González & Domingues (2015) también argumentan que la creatividad, la motivación o el pensamiento divergente son cualidades que presentan este tipo de estudiantes.

Otros autores se han ocupado en estudiar el pensamiento de este tipo de estudiantes cuando resuelven tareas de resolución de problemas y concluyen que el razonamiento que muestran es muy diferente de estudiantes ordinarios en términos de velocidad y profundidad (Keşan, Kaya, & Güvercin, 2010). Greenes (1981) recoge algunas particularidades que presentan los estudiantes con talento en matemática, entre las que se destacan la formulación espontánea de problemas, la flexibilidad del manejo de datos, la originalidad de interpretación y la agilidad mental o riqueza de ideas. Por su parte, Freiman (2006) afirma que este tipo de estudiantes se caracterizan por preguntar espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean, buscar patrones y relaciones, localizar la clave de los problemas, producir ideas originales, valiosas y extensas, etc.

Por último, Reyes-Santander & Karg (2009) proponen que los estudiantes aventajados en matemática presentan dominio de campos del conocimiento matemático, muestran persistencia y perseverancia en actividades matemáticas que le interesan y de generación metacognitiva, así como producir resultados generales.

A continuación se aborda algunas estrategias e instrumentos que se han empleado para identificar estudiantes con talento.

Mecanismos de identificación de estudiantes con talento

Uno de los objetivos de los estudios relacionadas con el talento consiste en establecer mecanismos de identificación para este tipo de estudiantes (Castro, 2008). A continuación se describen algunas estrategias e instrumentos que se han utilizado con este propósito.

Con respecto a las estrategias, Manzano, Arranz & Sánchez de Miguel (2010) presentan cuatro criterios que se pueden emplear en la identificación de estudiantes con talento. El primer criterio se relaciona con la identificación basada en aptitudes y considera que la puntuación mínima para distinguir niños con alta capacidad mediante la prueba de aptitud general debe ser superior al percentil 82, porque esta puntuación es equivalente a un coeficiente intelectual de 115. El segundo criterio es la identificación basada en la creatividad, donde los sujetos que obtienen una puntuación por encima del percentil 75 en los factores exclusivamente creativos según Torrance se consideran con alta capacidad.

El tercer criterio es la combinación de los dos anteriores, por lo que se consideran solo aquellos sujetos que obtienen una puntuación superior al percentil 82 en la prueba de aptitud general y que además demuestran niveles de creatividad que según Torrance están por encima del percentil 75 en todos los factores creativos medidos. Por último, el cuarto criterio es la identificación basada en el modelo de Renzulli, el cual se centra en el modelo de los Tres Anillos establecido por Renzulli (1978). En este criterio se incluyen los sujetos que muestren una alta producción cognitiva general, un alto nivel de motivación y un alto nivel de creatividad.

Genovard & Castelló (1990; González García, 2015), clasifican las principales estrategias de identificación en tres grandes grupos: identificación basada en las medidas informales, identificación basada en medidas formales y análisis individualizados. En el primer grupo se encuentran los cuestionarios y auto informes. La ventaja de éstos consiste en la economía de tiempo y en la recolección de ciertos indicios sobre el perfil excepcional del estudiante. En el segundo grupo están los que evalúan directamente los componentes implicados en la excepcionalidad. A pesar de que presentan cierta fiabilidad, resulta una estrategia costosa de aplicar porque los instrumentos generalmente son extensos y su aplicación requiere de expertos en el área. En cuanto a los análisis individualizados, se centran en las características específicas de los sujetos, recogiendo información con técnicas del primero y segundo grupo; así como información de tipo biográfico.

Rogado et al. (1994) menciona una estrategia adicional denominada identificación en el aula, la cual consiste en la observación seria y continua por parte del docente del trabajo de los estudiantes en el aula, el análisis de la creatividad, originalidad y perseverancia que muestra en las tareas que resuelve. Así mismo incluye las calificaciones escolares, la información aportada por otros profesores, sus padres y compañeros de clase.

En relación con los instrumentos, Benavides (2008) menciona varios que agrupa en dos grandes bloques: las técnicas subjetivas o informales y las técnicas objetivas. Las primeras se basan generalmente en la observación de aquellas personas que pueden proporcionar información referente al desarrollo, intereses, expectativas o aficiones del sujeto valorado. Las pruebas de este tipo utilizadas con mayor regularidad son:

a) Informes de los profesores, que generalmente están influenciados por cuestiones del rendimiento escolar y no siempre toman en cuenta aspectos relevantes del talento. Entre este tipo de instrumentos, se puede citar las escalas de Renzulli (SCRBSS) para la valoración de las características de comportamiento de los estudiantes.

b) Informes de los padres, que suponen una fuente de información relevante sobre todo en aspectos evolutivos en las edades tempranas. Se pueden citar los cuestionarios para padres de Beltrán & Pérez (1993).

c) Nominaciones de los compañeros, que recolectan información respecto a las capacidades, intereses, rendimiento académico, socialización y liderazgo del sujeto. Se puede citar el cuestionario para la nominación de iguales de Beltrán & Pérez (1993) que incluye, entre otras cuestiones, cómo señalar a compañeros que haría mejor un presupuesto, el mejor inventor o el más divertido.

d) Autoinformes, que son adecuados para alumnos mayores. Estos autoinformes son poco significativos pues no suelen generar diferencias entre alumnos con talento y alumnos promedio (Genovard & Castelló, 1990).

Con respecto a las técnicas objetivas, éstas se refieren a pruebas psicométricas, estandarizadas o inventarios de personalidad. Este tipo de pruebas reúnen criterios de consistencia interna, validez y fiabilidad estadísticas. Algunos tipos de instrumentos empleados son:

a) Test de inteligencia general, que ocupan un lugar fundamental en la evaluación del talento y sigue siendo el criterio más valorado por los especialistas. Entre los más aconsejados están el Stanford-Binet Test of intelligence, las escalas de Wechsler y el test de matrices progresivas de Raven.

b) Test de aptitudes específicas, que permiten afinar mucho el tipo de talento del alumno y generalmente incluyen medidas específicas en distintas áreas como razonamiento verbal, numérico, matemático, etc. Entre los test de aptitudes específicas se encuentra la batería de aptitudes diferenciales y generales (BADyG) de Yuste (1995).

c) Pruebas de rendimiento, que evalúan generalmente la capacidad de lectura y escritura y el nivel de aprendizaje en matemáticas. Los profesores también pueden elaborar pruebas basadas en el currículum ya que tienen un buen conocimiento del alumno.

d) Test de creatividad, que analiza la creatividad del sujeto a través de medidas de fluidez, flexibilidad, originalidad y elaboración de las respuestas. Se puede destacar la prueba de Torrance Test of Creative Thinking (TTCT).

e) Test de personalidad, los cuales pueden dar a conocer la madurez emocional y social del alumno. Entre estos se puede citar el cuestionario de personalidad EPQ-J de Eysenck y Eysenck.

Con respecto a las estrategias empleadas en la identificación del talento matemático, la revisión de literatura constata que existen diversos métodos de enfoque cualitativo y cuantitativo; destacándose entre ellos los test estandarizados. El problema de éstos es que puede suceder que niños muy capaces en el área de la matemática no sean identificados o que suceda lo contrario, niños que no son talentosos puedan ser identificados como tal (Benavides, 2008).

Niederer & Irwin (2001) proponen los siguientes seis mecanismos para identificar el talento matemático: test, nominación de los profesores, nominación de los padres, nominación por parte del alumno, la nominación de los compañeros y la habilidad de los estudiantes para resolver problemas. Así mismo, Marjoram & Nelson (1988) sugieren algunos métodos como la nominación de los profesores o una puntuación sobresaliente en test de inteligencia general.

De igual forma, algunos autores proponen el uso de la invención de problemas como una herramienta que podría ser utilizada en la identificación de estudiantes con talento matemático (Ellerton, 1986, Kesan et al., 2010), ya que ésta permite observar los conocimientos y habilidades matemáticas, así como la creatividad de niños considerados con talento matemático (Krutetskii, 1976). Además, autores como Getzels & Jackson (1962; citado en Silver (1994) y Balka (1974) han empleado actividades de invención de problemas en el proceso para identificar individuos creativos.

Por último, Prieto, Barmejo & López (2000) sostienen que la identificación del talento estará condicionada de acuerdo con el propósito que se persiga. De esta forma, si el objetivo es identificar-clasificar el talento, el diagnóstico consistirá en determinar si cumple los criterios para ser considerado como tal. Si el fin es proporcionar un currículum o realizar una intervención, el procedimiento se centrará en la evaluación-reconocimiento que se centra en reconocer las altas habilidades y sus manifestaciones. De acuerdo con este autor, ambos corresponden a dos modelos de atención a la diversidad que pueden funcionar incluso de forma conjunta.

Así, en este estudio se analizaron las diferentes concepciones del talento matemático, ya que existe una diversidad de concepciones para referirse a este concepto. También se buscó aportar información sobre las principales características que presentan los estudiantes con talento matemático, así como las diferentes estrategias e instrumentos que se han empleado en su identificación, en la que se mencionaron brevemente las tareas de invención de problemas como una estrategia complementaria dentro de este proceso.

Por último, se coincide en la necesidad de una identificación y caracterización de estudiantes con talento, que aporte información para una respuesta educativa pertinente a las necesidades específicas que éstos tienen, evitando así los efectos negativos por inadecuación, desinterés o incluso dificultades en el aprendizaje. Esto debe consituir una prioridad curricular.

Referencias y bibliografía

Balka, D. S. (1974). Creative ability in mathematics. *Arithmetic Teacher, 21,* 633-636.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa*. Universidad de Granada.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, & L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII. Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 113–140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1191/

Díaz, E., Aleman, H., & Hernández, C. (2013). Un modelo pedagógico para desarrollar el potencial de estudiantes talentosos en matemática en Costa Rica. *Uniciencia*, *27*, 51–66.

Ellerton, N. (1986). Children´s made-up mathematics problems: A new perspectiveon talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(3), 261–271.

Fernández, J. A., Castillo, S., & Barbarán, J. J. (2010). La invención de problemas y el desarrollo de la competencia matemática. *Edupsykhé*, *9*(2), 221–234.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades : A Challenging Situations Approach. *The Mathematics Enthusiast*, *3*(1), 51–75.

García, R. (2014). *Diseño y validación de un instrumento de evaluación de la Competencia Matemática. Rendimiento matemático de los alumnos más capaces* (Tesis doctoral) Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

González García, M. (2015). *Perfiles cognitivos asociados a alumnos con altas habilidades intelectuales*. Recuperado de http://www.tdx.cat/handle/10803/313461

González, M., & Domingues, F. S. (2015). ¿Existen indicadores para identificar el talento? *Aula*, *21*, 21–32.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *The Arithmetic Teacher*, *28*(6), 14–17.

Keşan, C., Kaya, D., & Güvercin, S. (2010). The Effect of Problem Posing Approach to the Gifted Student ' s Mathematical Abilities, *2*(3), 677–687.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: Universidad de Chicago Press.

Lopez-Andrada, B., Beltrán, M. T., López-Medina, B., & Chicharo, D. (2000). *Alumnos precoces, superdotados y de altas capacidades*. Madrid: Ministerio de Educación y cultura, Centro de investigación y Documentación Educativa.

Martínez, M., & Guirardo, A. (2010). *Alumnado con altas capacidades intelectuales*. Barcelona: Editorial Graó.

Manzano, A., Arranz, E. & Sánchez de Miguel, M. (2010). Multi-criteria identification of Gifted Children in a Spanish Sample. *European Journal of Education and Psichology, 3*(1), 5-17.

Marjoram, D. & Nelson, R. (1988). Talento matemáticos. En J. Freeman (Ed). *Los niños superdotados. Aspectos Psicológicos y Pedagógicos*. Bilbao: Santillana.

Niederer, K., & Irwin, K. (2001). Using problem solving to identify mathematically gifted students. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed), *Proceeding of the 25th Conference of the Internacional Group of Psychology of Mathematics Education*, Utretcht, Vol. 3, 431-438. Utretcht: The Netherlands.

Pasarín, M. J., Feijoo, M., Díaz, O., & Rodriguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en educación secundaria. *FAISCA. Revista de Altas Capacidades*.

Prieto, M. ., & Catejón, J. L. (2000). *Los superdotados: esos alumnos excepcionales*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Ramírez (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (Tesis doctoral). Universidad de Granada.

Reyes-Santander, P., & Karg, A. (2009). Una aproximación al trabajo con niños especialmente dotados en matemáticas. En M. J. González, M. . González, & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 403–414). Santander: SEIEM.

Renzulli, J. S. (1977). *The enrichment triad model. A guide for developing defensible programs for the gifted and talents*. Mansfield Center, CT: Creative Learning Press.

Renzulli, J. S. (1996). En qué consiste lo sobresaliente: un reexamen de la definición de sobresaliente y talentoso. *Dossier, 5*, 12-29.

Rogado, M.I, Nograro, C. R., Zabala, B., Etzebarría, A., Albes, M. C., García A. C., Gonzalo, P. I., Mauleón, J. M., Del Barrio, B. & Fernández, I (1994). *La Educación del alumnado de altas capacidades*. Pais Vasco: Departamento de Educación, universidad e investigación.

Silver, E. (1994). On Mathematical Problem Posing.pdf. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 19–28.

Villarraga, M., Martínez, P., & Benavides, M. (2004). Hacia la definición del término talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro, & R. Blanco (Eds.), *La educación de niños con talento en iberoamerica* (pp. 25–35). Orealc-Unesco.