Educación Matemática en las Américas 2019

Volumen 16: Resolución de problemas y modelización en Educación Matemática

CIAEM
IACME
desde - since 1961

Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO
www.ciaem-iacme.org

Educación Matemática en las Américas 2019
Volumen 1: Formación inicial de profesores
Editado por Yuri Morales-López y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN: 978-9945-09-413-8

El *Comité Interamericano de Educación Matemática* (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la *International Commission on Mathematical Instruction*. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera al CIAEM y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no fue previamente publicado en otro medio; y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Se respetaron los metadatos (nombres, apellidos, títulos, entre otros) que los autores proporcionaron cuando postularon su trabajo en la plataforma del evento.

Para citar este libro:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2020). *Educación Matemática en las Américas 2019.* Editores: Yuri Morales-López y Ángel Ruíz. República Dominicana: Autor.

ISBN: 978-9945-09-413-8
9 789945 094138

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LAS AMÉRICAS 2019

Presentación

Para el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es un placer y un honor ofrecer a la comunidad educativa este Volumen de *Educación Matemática en las Américas 2019*, en donde se pueden encontrar muy importantes insumos para comprender el momento histórico que atraviesa la Educación Matemática desde la perspectiva de las Américas.

La *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática* se realizó entre el 5 y 10 de mayo del 2019 en Medellín, Colombia. La Universidad de Medellín y la Universidad de Antioquia fueron las organizaciones académicas anfitrionas del evento. Las sesiones fueron realizadas en el campus de la Universidad de Medellín. Participaron 700 personas provenientes de 25 países de cuatro continentes: Europa, Asia, África y las Américas. Participaron centenares de docentes en servicio de la ciudad de Medellín y del Departamento de Antioquia.

Alrededor de 400 trabajos fueron presentados: conferencias plenarias y paralelas, mesas plenarias, minicursos, sesiones temáticas, comunicaciones cortas, talleres y posters. Unas 50 personalidades del mayor nivel en la comunidad internacional de Educación Matemática expusieron sobre sus investigaciones. Entre ellas Jill Adler (Suráfrica), Ferdinando Arzarello (Italia), Salvador Llinares (España), Yoshinori Shimizu (Japón), Michael Shaughnessy (EUA), Luis Rico (España), Fidel Oteiza (Chile), Carlos Vasco (Colombia), Carlos Sánchez (Cuba), Luis Carlos Arboleda (Colombia), Edwin Chaves (Costa Rica), Nelly León (Venezuela), Vilma Mesa (EUA). Aunque físicamente no pudo estar presente envió su contribución en forma de video Ubiratan D'Ambrosio (Brasil). Los trabajos dentro de la plataforma del congreso se pueden consultar en https://ciaem-redumate.org/conferencia/index.php/xvciaem/xv/schedConf/presentations

La revisión científica de todos los trabajos fue responsabilidad de un Comité Asesor Internacional, un Comité Internacional del Programa y el Comité Ejecutivo del CIAEM. Se contó con la coordinación central de Directores de tema y la Dirección de la plataforma científica realizada por el académico Yuri Morales con el apoyo de la profesora Johanna Mena (ambos de Costa Rica) y con la participación voluntaria de muchísimos revisores científicos de muchos países.

Este volumen incluye trabajos que fueron efectivamente presentados en ese congreso.

Expreso mi agradecimiento a todos los miembros de los comités científicos, directores de tema, revisores científicos, y directores de la plataforma científica. También deseo agradecer por su apoyo en el registro de este libro a Sarah González y a la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra en República Dominicana. Agradezco mucho a todos los autores que decidieron compartir su trabajo en las instancias que abrimos

mediante la XV CIAEM. También a Yuri Morales quien técnica y formalmente generó este volumen para su registro.

En las diversas dimensiones del congreso, de cuya realización este libro es producto, quiero aprovechar esta ocasión para reconocer la valiosa contribución de las Universidades de Medellín y de Antioquia y al Comité Organizador Local de la XV CIAEM, y, además, agradecer al equipo humano del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* que ha sido durante muchos años un sostén crucial en la organización de todos los eventos del CIAEM y de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*; y en particular de este libro que hoy sacamos a la luz pública.

Este volumen es una parte del libro de *Memorias* completo (son 15 volúmenes que se pueden ver/descargar). Se ha respetado aquí la paginación del libro completo. Y las referencias *deben hacerse con base en el libro y su paginación*. No es necesario indicar el volumen específico donde se cita pues esta es una versión funcional al servicio de una mejor visualización o descarga de este valioso material.

Invitamos a los lectores de este libro a promoverlo en sus diversas actividades de docencia, investigación, extensión y divulgación en todos sus países.

Con afecto

Ángel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática
Presentación del 17 de julio de 2024
Costa Rica

Índice

Basado en la información suministrada durante la postulación de cada trabajo

11. Resolución de problemas y modelización en Educación Matemática

XV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Matemática Divertida: uma maneira fácil de aprender Matemática jogando

Flávia de Oliveira **Carvalho**
Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal
Centro Universitário Faciplac
Brasil
fvoliveira36@gmail.com
Maria Dalvirene **Braga**
Universidade de Brasília
Brasil
dalvirenebraga@gmail.com
Josinalva Estacio **Menezes**
Universidade de Brasília
Brasil
jomene@bol.com.br

Resumo

Nesse estudo de abordagem qualitativa investigou-se a implicação da utilização de jogos matemáticos como introdução ou fixação de conteúdos utilizandoa Teoria da Aprendizagem Significativa. A pesquisa foi realizada com 24 alunos do 9º ano de uma escola pública de ensino fundamental do Distrito Federal, Brasil, onde aplicou-se uma avaliação anterior, cinco jogos e outra avaliação posterior. Foi constatado que a aplicação dos jogos como fixação do conteúdo foi muito bem aceita pelos alunos. Em todo o processo, observou-se participação dos alunos, levantando hipóteses, construindo estratégias, interpretando e reformulando regras dos jogos, evidenciando características essenciais da aprendizagem significativa. As considerações finais ressaltam que os jogos não devem ser concebidos como o fim, mas como meio de se promover uma aprendizagem significativa.

Palavras-chave: ensino de matemática, jogos matemáticos, aprendizagem significativa,interação entre alunos.

Introdução

O ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão. A realidade em que se encontra a educação brasileira em relação ao ensino de Matemática não é nada animadora, tendo em vista o último resultado do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) publicado em 2016. As avaliações do PISA acontecem a cada três anos e abrangem três áreas do conhecimento – Leitura, Matemática e Ciências – havendo, a cada edição do programa, maior ênfase em cada uma dessas. Em 2015 a ênfase foi Ciências e Matemática com a inclusão das áreas de Competência Financeira e Resolução Colaborativa de Problemas. Os resultados desse ano de 2015 mostram uma queda de pontuação nas três áreas avaliadas. A queda de pontuação também refletiu uma queda do Brasil no ranking mundial: o país ficou na 63ª posição em ciências, na 59ª em leitura e na 66ª colocação em Matemática.

Assim, discussões no campo da Educação Matemática mostram a necessidade de se adequar o trabalho docente às novas tendências educacionais, que poderão levar a melhores formas de se ensinar e aprender Matemática. Faz-se necessário compreender a Matemática como uma disciplina de investigação e não de conteúdo pronto e acabado. Ela é um espaço de ação e criatividade. Daí a necessidade de ser ensinada e estudada, de alguma forma, que seja útil para os alunos, ajudando-os na compreensão, explicação ou organização da realidade e possibilitando, desta forma, que os mesmos tenham condições de refletir a respeito do seu fazer para construir o saber.

Segundo Fragelli e Mendes (2011, p.13), o ensino tradicional foca quase que exclusivamente em explorar os aspectos lógicos do conhecimento: o professor expõe um determinado conhecimento que se liga a outros conceitos preexistentes ou a situações estereotipadas do cotidiano.

A falta de engajamento prejudica o rendimento do estudante em sala de aula, pois não promove uma aprendizagem significativa. Muitas vezes o conteúdo discutido em sala de aula é apenas memorizado e rapidamente esquecido. Para promover um maior engajamento e, assim, facilitar a aprendizagem significativa, Fragelli e Mendes (2011) propõem a utilização de jogos de aprendizagem. Desse modo, o uso dos jogos matemáticos em sala de aula se apresenta como um elemento dinâmico e motivador para a compreensão dos conceitos matemáticos, pois a aprendizagem sinaliza um processo inerente da interação do sujeito com o meio, proporcionando uma mudança persistente no potencial humano.

Autores, como McGonigal (2011), defendem que todo jogo envolve um processo de aprendizagem, já que jogos estão relacionados com a resolução de problemas e têm regras que devem ser aprendidas. Entretanto, ainda segundo os mesmos autores, o que se faz necessário pensar é o que é aprendido enquanto se joga.

Diante do exposto, surgiu essa pesquisa, cuja questão central foi verificar qual é o impacto da aplicação dos jogos matemáticos para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II com os conteúdos de potenciação e radiciação, em diferentes momentos como um elemento aglutinador tornando o seu uso eficiente e eficaz nas aulas de Matemática.

Referencial teórico

Ensino da Matemática por meio de jogos no Ensino Fundamental Anos Finais

Seis de março de 2018 foi escolhido pelo Ministério da Educação no Brasil, como o Dia D: um dia nacional de discussão sobre a Base Nacional Comum Curricular - BNCC. Nessa data, secretarias, escolas, gestores e professores de todo país serão convidados a debruçarem-se sobre a BNCC para entender porque ela é tão importante, como foi construída, de qual modo está estruturada e como vai impactar o dia a dia em sala de aula.

Para apoiar as discussões, o Ministério de Educação - MEC elaborou um roteiro de atividades, com sugestões de dinâmicas e apresentações, que pode ser facilmente adotado por secretarias e escolas. E, depois de sua aprovação, no dia 20 de dezembro de 2017, a BNCC foi apresentada como obrigatória para todos os currículos de escolas públicas e particulares do Brasil. Mas para que se torne uma realidade nas salas de aula, é preciso que gestores, professores e pais não só compreendam as propostas trazidas por esse documento, como se mobilizem para colocá-las em prática.

A BNCC determina que para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental – Anos Finais, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência.

Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos.

Ensino da Matemática utilizando jogos e a aprendizagem significativa

Promover uma aprendizagem significativa fazendo a utilização de jogos matemáticos de maneira adequada como recurso pedagógico vem despertando o interesse dos pesquisadores em educação matemática por agregarem um potencial pedagógico significativo. Haja vista que, os jogos no âmbito educacional estimulam ações que possibilitam uma postura positiva perante os erros, efetuando-se rapidamente as devidas correções sem deixar marcas negativas na construção da aprendizagem do aluno.

David Ausubel ao abordar sobre a sua teoria, Aprendizagem Significativa, defende a importância da criação de estratégias facilitadoras para o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos, favorecendo assim, uma formação humana direcionada para o exercício de uma cidadania pautada em valores éticos. Para Ausubel (1978 apud Moreira, 2006, p.16) a aprendizagem significativa se distingue quando,

> [...] o armazenamento de informações na mente humana como sendo altamente organizado, formando uma espécie de hierarquia conceitual, na qual elementos mais específicos de conhecimento são ligados (e assimilados por) a conceitos, ideias, proposições mais gerais e inclusivos. Essa organização decorre, em parte, da interação que caracteriza a aprendizagem significativa.

Atualmente, nossos alunos estão submetidos cotidianamente a um exagerado volume de informações que chegam por diferentes meios, de modo que nós educadores precisamos buscar diferentes mecanismos educacionais para ajudá-los a organizar e distinguir essas informações, levando em consideração as mais relevantes para o nosso ambiente educacional, o que Ausubel chama de *diferenciaçãoprogressiva*. Desse modo, o uso dos jogos matemáticos em sala de aula pode se apresentar como um elemento dinâmico e motivador na compreensão dos conceitos matemáticos, pois a aprendizagem sinaliza um processo inerente da interação do sujeito com o meio, proporcionando uma mudança persistente no potencial humano. No caso da Matemática, para que não haja uma sobrecarga de informações, o educador poderá organizá-las fazendo o uso de jogos, desde que a sua escolha venha por meio de um planejamento coerente que implique em atribuições cognitivas positivas. Para Ausubel, aprender significativamente é transformar um conjunto de informações (conteúdos e procedimentos) em algo útil para a vida. O material utilizado para esse fim deve ser potencialmente significativo.

> Uma vez que significados iniciais são estabelecidos para signos ou símbolos de conceitos, através do processo de formação de conceitos, novas aprendizagens significativas darão significados adicionais a esses símbolos, e novas relações, entre anteriormente adquiridos, serão estabelecidos. (Ausubel, 1978 apud Moreira, 2006, p.22).

Quando os professores apresentam os conteúdos de forma acabada, sem oferecer ao aluno o momento de refletir e aplicar o mesmo, a aprendizagem se torna não significativa ou mecânica. Para que seja significativa é necessário que o sujeito se aproprie dos conhecimentos, e estes, por sua vez, passem a fazer parte do seu cotidiano, ou seja, que os conteúdos façam sentido na formação humana do sujeito.

Para Moreira (2003), existem três conceitos interligados que compõem a aprendizagem significativa: significado, interação e conhecimento. Sendo que o significado está presente nos sujeitos, que sinaliza a maneira de se expressar que pode ser por meio de gestos, sinais, imagens e palavras, que geram significado de algo. A interação é a troca entre os conhecimentos prévios e os novos considerados, de maneira que haja uma transformação em ambos os conhecimentos. Isso significa que os conhecimentos prévios não são mais os mesmos e nem os conhecimentos que chegaram à estrutura cognitiva do indivíduo e o conhecimento é o produto final que normalmente está pautado na linguagem, seja ele um conteúdo ou uma disciplina.

Sendo assim, o papel do educador é o de mediador entre o que ele ensina e o que o seu aluno aprende, promovendo momentos de interação entre os conceitos que devem ser aprendidos e as suas aplicabilidades no mundo moderno. Facilitar a aquisição desse conhecimento é fundamental para desmistificar que aprender matemática é difícil.

Aspectos metodológicos

A abordagem metodológica deste trabalho é qualitativa, visto que essa mostra-se como uma opção que permite compreender o fenômeno social. O investigador qualitativo procura descobrir fatos importantes, fazendo paralelo entre os indivíduos e a cultura em que estão inseridos. O estudo teve como participantes duas turmas, escolhidas aleatoriamente, de 9º ano do Ensino Fundamental II, e 3 monitores colaboradores.Para realização da pesquisa os instrumentos utilizados na coleta de dados foram: observação, registro por meio de fotografias, aplicação de prova escrita e relato espontâneo dos alunos. Os alunos assinaram um termo de consentimento autorizando o uso de todos os dados colhidos no decorrer do experimento, em que foi garantido o anonimato dos seus nomes.

Foram aplicados jogos matemáticos adaptados pela professora pesquisadora, tais como: Jogo da Velha, Trilha Matemática, Labirinto do Conhecimento, Roleta da Potência, Roleta das Raízes e Dominó das raízes. Esses jogos abordavam os seguintes conteúdos: Operações fundamentais da aritmética, raciocínio lógico, operações com as regras da potências e raízes.

A pesquisa foi desenvolvida em duas etapas. A primeira etapa aconteceu em três momentos: O *primeiro* foi elaborar um planejamento didático para nortear a dinâmica de aplicação dos jogos matemáticos, somente na turma “A” foi aplicado dois jogos (Trilha Matemática e Labirinto do Conhecimento) como introdução dos conteúdos; o *segundo*, foi trabalhar nas duas turmas os conteúdos previstos no plano de ensino para o 1º bimestre que são: conjunto dos números reais, potência e suas operações, radiciação e suas operações. Estes foram explicados de maneira expositiva com resolução de listas de exercícios e correção no quadro, foi aplicado também a metodologia ativa chamada de sala de aula invertida, que é a troca de lugar dos alunos com o professor, onde os alunos estudam o conteúdo antes em casa e explica da sua maneira para os outros colegas com a intervenção do professor quando necessário. Tudo isso foi feito da mesma maneira para as duas turmas; e o *terceiro* foi a aplicação ao final do 1º bimestre de uma prova escrita contendo todo o conteúdo programático para verificação dos objetivos propostos no plano de ensino. Os resultados foram tabelados em forma de números e gráficos.

A segunda etapa do projeto se deu no início do 2º bimestre diante da análise dos resultados obtidos com as notas bimestrais, começamos o projeto interventivo para recuperação de conteúdos não atingidos de acordo com explicações a seguir: os alunos das turmas A e B foram separados em dois grupos, os que ficaram com nota inferior a 5,0 e os que ficaram com nota superior a 8,0 para serem os monitores. No dia 07 de maio (sábado de reposição de aula) eles foram alocados em uma sala preparada para a aplicação dos jogos, divididos aleatoriamente em grupos de 4 ou 5 componentes e 2 monitores. Foi explicado o objetivo de cada jogo, a dinâmica de aplicação e o tempo de duração.

A aplicação se deu em duas aulas de 50 minutos cada. Durante esse período os alunos fizeram rodízios entre os jogos, os monitores tiravam as dúvidas que iam surgindo e quando não conseguiam sanar as dúvidas o professor aplicador intervia fazendo as devidas explicações. Ao final os jogos foram recolhidos pelos monitores e abrimos um grupo de discussão dos objetivos que foram alcançados e dos que não foram. Eles foram avaliados com uma prova escrita para verificação dos objetivos propostos no plano de ensino.

Os novos resultados foram comparados com os resultados obtidos no primeiro bimestre. Foram colhidos relatos escritos dos alunos da turma “A” e turma “B” (sem identificação), sobre o que eles acharam dessa metodologia. Os resultados da turma “B” foram comparados com os resultados da turma “A”. E depois de todas as análises feitas, teremos uma resposta para a pergunta geradora do trabalho, se os jogos que foram aqui analisados têm efeito positivo no ensino-aprendizagem dos alunos quando aplicados antes ou depois da explicação tradicional dos conteúdos. Temos que estar preparados para uma possível resposta que a aplicação dos jogos não influencia em nada a aprendizagem desses conteúdos.

Análise e apresentação dos resultados

Os jogos escolhidos para serem aplicados com os alunos que não atingiram a média 5,0 ou superior a ela foram: Jogo da Velha, Trilha Matemática, Labirinto do Conhecimento, Roleta da Potência, Roleta das Raízes e Dominó das raízes. Os referidos jogos foram adaptados de outros jogos para atenderem os conteúdos propostos no plano de ensino e sugeridos pelo BNCC que são: operações fundamentais da aritmética, raciocínio lógico, operações com as regras da potências e raízes. E também foram utilizados para sanar grandes deficiências dos alunos do ensino fundamental anos finais com esses conteúdos, conforme Moreira; David (2005a) reforçam esse pensamento quando assinalam que os alunos terminam o ensino fundamental sem as devidas compreensões relacionadas aos conceitos básicos da aritmética.

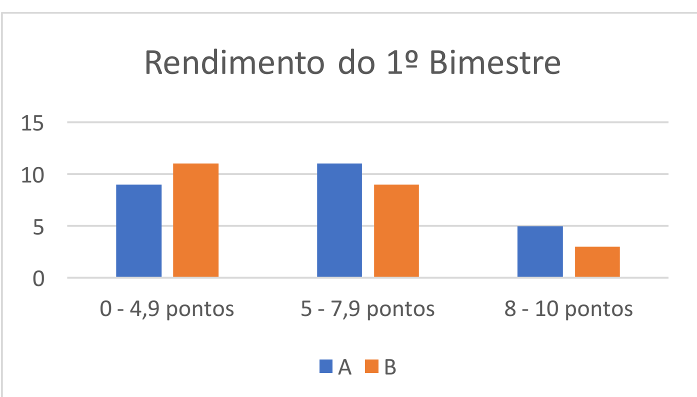
Durante a aplicação dos jogos os alunos se mostraram entusiasmados e discutiam entre si as regras e formulavam hipóteses a respeito das jogadas. Além de debater outras possibilidades no que diz respeito aos conceitos matemáticos que não eram explícitos no jogo. Os monitores auxiliavam com as regras, na resolução das dúvidas que surgiam e encorajando-os a procurar maneiras diferentes de resolver o mesmo problema. Aproveitando esse momento, a professora pesquisadora tecia algumas observações sobre as propostas e argumentos de forma a aguçar ainda mais suas curiosidades. Toda essa discussão e reflexão foi rica, possibilitando a aprendizagem por descoberta, conforme assinala a teoria ausubeliana, quando aponta que esse processo é não-literal e não arbitrário, o conhecimento novo tem mais significado, e o conhecimento prévio fica cada vez mais reforçado, elaborado em significados e adquire mais aplicabilidade.

Durante a aplicação dos jogos alguns alunos relataram o interesse em participar mais vezes desse tipo de aula: *"... todas as aulas de matemática tinham que ser desse jeito professora, eu estou entendendo bem melhor o conteúdo" (Aluno A, 2018).* Outro aluno afirmou: *"...dentro de sala fica difícil porque a turma é muito cheia e barulhenta e também não tem os monitores para ajudar a gente (Aluno B, 2018).*

Na turma "A" composta por 25 alunos foi constatado que nove 9 alunos ficaram com rendimento inferior a média 5, 11 com média de 5 até 7,9 e 5 alunos com média superior à 7,9 pontos. Na turma "B" composta por 23 alunos, foi constatado que 15 alunos ficaram com rendimento inferior a média 5, 9 com média de 5 até 7,9 e 3 alunos com média superior à 7,9 pontos, conforme mostra a figura 4 mais adiante.

Na turma "A" foram aplicados dois jogos como introdução ao conteúdo, depois nas duas turmas foram trabalhados os conteúdos com aulas expositivas, resolução de exemplos, listas de exercícios, sala de aula invertida e aplicação de testes e prova. Os dados do gráfico (figura 1) foram extraídos do relatório entregue para a secretária da escola, depois disso os alunos com média inferior a 5 e superior a 7,9 foram convidados a comparecerem na escola para a aplicação da sala de jogos.

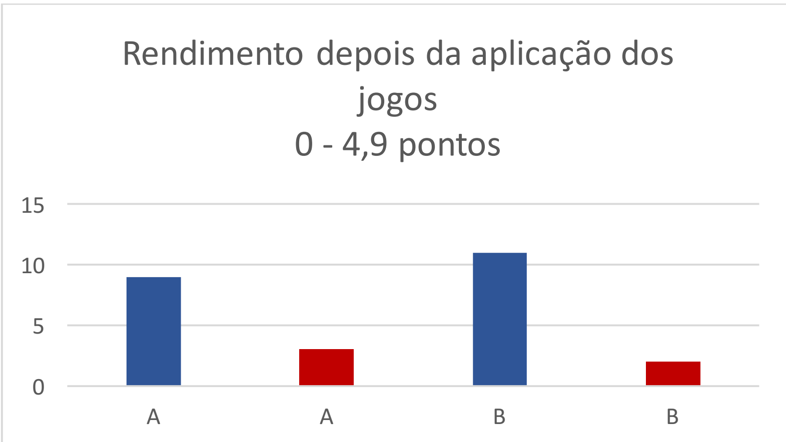
Figura 1
Rendimentos dos alunos no 1º bimestre



Fonte: pesquisadora, 2018.

Os alunos com média inferior a 5 foram avaliados novamente com uma prova escrita contendo os mesmos objetivos propostos na do 1º bimestre e o novo rendimento consta na figura 2.

Figura 2
Rendimento dos alunos após aplicação dos jogos



*Fonte:*pesquisadora, 2018.

Na turma "A" o percentual de alunos com rendimento inferior a cinco era de 36% e depois da aplicação da sala de jogos esse percentual foi para 12%, somente três não conseguiram atingir a média, na turma "B" era de 44% e foi para 8%, somente dois não atingiram a média. Os alunos relataram que com a aplicação da sala de jogos e o auxílio dos monitores os conteúdos ficaram mais fáceis de se aprender. Comentou um deles: *"....eu gostei muito de participar dessa aula, quero que todo bimestre seja desse jeito"(Aluno C, 2018).* Outro aluno falou: *"... eu aprendi muito mais nesse sábado do que no bimestre inteiro"(Aluno D, 2018)*

Os alunos que foram chamados para serem os monitores também foram ouvidos e relataram que gostariam de fazer parte de outras atividades de reforço, pois essa troca de conhecimento com os outros alunos fez com que eles aprendessem muito mais os conteúdos.

Os registros mostram que os alunos reconhecem a contribuição dos jogos para apropriação dos conceitos matemáticos: "...*a matemática é uma matéria muito difícil e que a maioria dos alunos tem muitos problemas, então a professora podia utilizar mais os jogos para tornar a matemática mais fácil e mais divertida*"*(Alunos das turmas A e B).*

Em relação aos aspectos positivos, ficou evidenciado que os jogos matemáticos se constituem em uma alternativa didática viável e os alunos declararam que gostariam que isso se repetisse mais vezes independente do conteúdo. O registro a seguir mostra esse pensamento: "... *trabalhar com esses jogos é abrir novos caminhos para a aprender matemática, quebrando até a rotina da sala de aula*"*(Aluno E, 2018).*

Considerações finais

Nessa pesquisa buscou-se debater como os jogos educacionais, podem ser favoráveis a ampliação do aprendizado dos estudantes e procurou mostrar em que momento a aplicação é mais eficaz: como uma introdução ao conteúdo ou no final como revisão. Com o uso dos jogos educativos é possível mudar a metodologia de ensino tradicional dando uma nova aparência as aulas de Matemática.

A sala de jogos, em geral, foi muito bem aceita pelos alunos. Um elemento observado foi à interação entre o conhecimento prévio e o conhecimento novo, pois foi notada durante toda a dinâmica da sala de jogos uma troca de conhecimentos entre os alunos monitores e os alunos de recuperação: enriquecendo, elaborando e diversificando em termos de significados. Percebeu-se também que no decorrer de todo processo, os alunos foram participantes e ativos em relação ao processo de aprendizagem, pois em cada jogada eles discutiam seus erros e seus acertos, construíam estratégias de resolução dos exercícios, interpretação e colaboração com os outros colegas, evidenciando assim as características essenciais da aprendizagem significativa.

Outro aspecto relevante a ser apontado é que os alunos ao utilizar os jogos interagiram entre si e com o professor, trazendo benefícios não apenas para o aprendizado escolar, mas uma melhoria na relação social com os colegas desenvolvendo o raciocínio, pois geralmente esses jogos têm regras, objetivos, metas e às vezes controlados por tempo.

Dessa forma, ficou claro que a aplicação do jogo como introdução ao conteúdo não influenciou muito na aprendizagem dos alunos, mas quando ele foi aplicado depois da avaliação como reforço/recuperação dos conteúdos teve um impacto maior na apropriação dos conteúdos que não foram adquiridos durante o bimestre.

Referências e Bibliografias

Brasil.(2018).Base Nacional Comum Curricular- BNCC- *Educação Básica*. Brasília:MEC. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>. Acessado em: 11 set. 2018.

Fragelli, R. R., Mendes, F. M.(2011) Batalha Naval dos Extremos Locais: Jogos de Aprendizagem para o Ensino dos Cálculos. In: PAEE'2011- *Third International Symposium on Project Approaches in Engineering Education* (PAEE, Lisboa, 2011): Aligning Engineering Education with Engineering Challenges v. 1. p. 91-97 .

McGonical, J.(2011).*Reality isbroken*.Why games makes us better and how they can change the world. New York, NY: The Penguin Press.

Moreira, P. C.; David, M. M. M. S.(2005a).*A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar*. Belo Horizonte: Autêntica. 120p.

______. (2005b). O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica**.** *Revista Brasileira de Educação*. Jan /Fev /Mar /Abr. n. 28. Universidade Federal de Minas Gerais: Faculdade de Educação. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n28/a05n28.pdf. Acesso em: 21 dez. 2017.

Representaciones matemáticas y la invención de problemas desde la modelización

Karen **Porras** Lizano
Universidad Nacional de Costa Rica
Costa Rica
karen.porras.lizano@una.cr

Enrique **Castro** Martínez
Universidad de Granada
España
ecastro@ugr.es

Resumen

En este documento se analiza el proceso de traducción entre representaciones matemáticas, al utilizar la invención con problemas en un proceso de modelización matemática en el aula de sétimo de la Educación Secundaria de Costa Rica, específicamente en el tema de proporcionalidad. Para recolectar la información se realizó la aplicación de observaciones participantes y un análisis de las producciones escritas de los estudiantes como informes escritos de las actividades de invención de problemas y los cuadernos de trabajo. Se concluye que en las creaciones de problemas de los estudiantes, se observa en mayor preferencia representaciones como las verbales escritas y simbólicas numéricas y las operaciones aritméticas básicas fue la estrategia más utilizada. Además, los estudiantes presentaron un razonamiento proporcional deficiente y sin comprensión, evidenciado en la escaza fluidez representacional del objeto matemático.

Palabras clave: Sistemas de representación, modelización matemática; invención de problemas.

El objetivo principal de la educación es lograr que el estudiante construya un aprendizaje con una comprensión profunda y rica, visualizando lo que aprende de una manera útil y significativa (Skemp, 1999). Además, de que aplique los conceptos cuando los necesite y los utilice con flexibilidad al enfrentarse a nuevas situaciones. Para lograr lo anterior es trascendental el proceso de traducción entre las representaciones matemáticas, además al investigador le permite entender los problemas de compresión que presenten los estudiantes al manejar la pluralidad de los sistemas de representación de un mismo concepto lo que repercute directamente en su rendimiento académico.

Esta comunicación muestra una investigación realizada con la idea de brindar información acerca de la construcción del conocimiento matemático, a través de las representaciones de los conceptos y las estrategias que los estudiantes utilizan al resolver tareas de modelización matemática. De estos procesos destacamos la importancia de las representaciones matemáticas, entendiendo estas "como todas aquellas herramientas —signos o gráficos— que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas" (Rico, 2009, p. 3).

Por otra parte, al utilizar la modelización matemática se pretende estimular en el estudiante la experimentación de los conceptos para dotarlos de significado (Rico, 2000), al mismo tiempo que se promueve "mayores niveles analíticos en la justificación y argumentación matemática" (MEP, 2012, p. 11) y se incentiva capacidades de gran potencial como la imaginación, la creatividad e invención, dejando de lado la ejecución mecánica de tareas que promueven conocimientos insuficientes y sin comprensión, reflejándose en los bajos rendimientos académicos de los estudiantes.

En la misma línea, consideramos que la modelización matemática por medio de la construcción y desarrollo de un modelo, se matematiza la realidad de la situación específica (Castro y Castro, 2000) y el cual está integrado en la resolución de problemas como estrategia didáctica aplicada a situaciones asociadas con ambientes reales, físicos, sociales y culturales.

Representaciones de los conceptos matemáticos

En la actualidad mucha de la información presente en los medios de transmisión se visualiza en diferentes representaciones como tablas, gráficos y fórmulas; ante lo cual el ser humano debe tomar una posición discriminatoria, analítica y objetiva. Por ello, el currículo en la educación de diferentes profesiones, en especial en el campo de la educación matemática, debe enfatizar en la resolución de problemas y la toma de decisiones, con el fin de dotar a las futuras generaciones de capacidades relevantes como el análisis, criticidad, la creatividad, entre otros.

Asimismo para generar el pensamiento matemático, primeramente se debe realizar una imagen mental de las ideas, lo que denominaremos como representaciones internas con el fin de manipularlas posteriormente. Luego, para poder realizar la comunicación debemos expresarlas externamente, con lo que creamos las representaciones externas, las cuales según Castro y Castro (2000) son "enunciados en forma natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, entre otras" (p. 101). Además, sirven como "estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales" (Castro y Castro, 2000, p. 101), lo que proporciona información conceptual relevante del estudiante.

También, consideramos que el aprendizaje matemático se genera al tomar en cuenta dos elementos importantes, el aspecto representacional que configura al objeto y el desarrollo de un significado personal sobre este (Pecharromán, 2014); donde los procesos matemáticos están ligados a la utilización de una multiplicidad de representaciones semióticas de la misma naturaleza y parafraseando a González, Castro-Rodríguez y Castro (2016) tenemos que para lograr una efectiva compresión matemática, es necesario que el alumno posea la "fluidez representacional", es decir que sea capaz de cambiar y coordinar diferentes registros de representación del objeto matemático.

Modelización matemática y el proceso de invención de problemas

En este estudio consideramos que el inventar problemas forma parte integral del proceso de modelización matemática, concebida como una manera de matematizar la realidad, en el cual los modelos son considerados como sistemas conceptuales que se expresan usando sistemas de notación externos, y que se usan para construir, describir o explicar los comportamientos de otro (s) sistema (s) (Lesh y Doerr, 2003).

Galbraith y Stillman (2006) proponen una serie de transiciones en el proceso de modelización: (a) De la situación desordenada del mundo real a la declaración del problema del mundo real, (b) De la declaración de problemas del mundo real al modelo matemático, (c) Del modelo matemático a la solución matemática, (d) De la solución matemática al significado de la solución en el mundo real y (e) Desde el significado de la solución en el mundo real hasta la revisión del modelo o la solución de aceptación (p. 144). Asimismo, en la primera transición es donde se realiza la invención de problemas, en la cual según Hansen y Hana (2015) citando a los mismos autores anteriores, es donde "se aclara el contexto del problema, haciendo suposiciones simplificadas, identificando entidades estratégicas y especificando los elementos correctos de las entidades estratégicas" (p. 42), es decir se brinda más relevancia a la creación del problema y constituye una experiencia valiosa para el estudiante dentro del proceso de modelización.

Concebimos como un problema a situaciones que su solución no es clara y su respuesta no es automática, ni mucho menos rutinaria; demandando procesos de análisis y elaboración en su solución. Asimismo, parte esencial de la modelización matemática es el problema y su formulación, el cual por medio del uso de conjeturas va sufriendo ajustes, en la definición de sus parámetros y objetivos, por lo tanto el ser capaz de plantear y concretar un problema adecuadamente a la luz de los datos y de los conceptos, es parte vital del uso de la matemática en el mundo real (English, 1997; Hansen y Hana, 2015; Silver, 1994).

De igual manera, destacamos la importancia de la aplicación del proceso de invención de problemas, pues motiva la participación activa del estudiante en su aprendizaje, donde este se identifica con el problema que construye, siendo producto su creatividad, imaginación y curiosidad; logrando a la vez construcciones muy elaboradas, con mucho valor didáctico. Para diversos autores, el proceso de invención de problemas puede "dar una mayor apropiación de su ambiente de aprendizaje, ya que es un componente natural de la instrucción orientada a la indagación y se basa en la creencia de dar prioridad a la pregunta sobre la respuesta" (Hansen y Hana, 2015, p. 40), además que son experiencias que preparan a los estudiantes para su desempeño profesional futuro afuera de las aulas.

El propósito de esta comunicación es analizar el proceso de traducción de las representaciones matemáticas al crear y resolver situaciones problema siguiendo un proceso de modelización matemática en su solución, con el fin de proponer mejoras en la enseñanza a través del diseño de tareas y estrategias didácticas que ayuden al estudiante a comprender significativamente los conceptos matemáticos.

Método

Este proceso de investigación sigue un enfoque cualitativo, específicamente utilizamos un tipo de investigación no exploratoria, sin intervenir directamente en el fenómeno; cuyo diseño de investigación fue un estudio de casos, pues nos interesó el "Describir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes" (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2008), en particular cuando abordan y dan importancia al proceso de traducción de las representaciones generadas al construir y resolver problemas con matemática.

Los participantes fueron un grupo de 24 estudiantes del nivel de sétimo de un colegio académico diurno oficial, específicamente ubicado en la provincia de San José en Costa Rica. La edad promedio de los participantes es de 13 años y cuyo estatus socioeconómico predomina la clase media-baja. Se escogió este tipo de muestra, ya que según el Programa de Matemática del Ministerio de Educación Pública es en este nivel es donde se desarrolla el contenido de proporciones, contexto matemático para lograr los objetivos propuestos del estudio. Además, durante el proceso de invención de problemas se dividió el grupo original en 8 subgrupos, con el fin de realizar un trabajo en equipo y colaborativo.

Para recolectar la información relevante de este estudio se realizó la aplicación de observaciones participantes y se realizó un análisis de las producciones escritas de los estudiantes como informes escritos, realizados en las actividades de invención de problemas y los cuadernos de trabajo. De ambas técnicas se obtuvo evidencias sobre las representaciones, estrategias y los errores generados por los estudiantes al construir y resolver problemas de modelización matemática con proporciones en actividades de aula.

Descripción de la etapa de trabajo de campo

En primer lugar se analizó el programa vigente de matemática del Ministerio de Educación Pública, con el fin de observar el papel que tiene los procesos de traducción de representaciones y observar los conocimientos, habilidades e indicaciones que se proponen en este documento, específicamente en el tema de proporciones.

Las actividades de invención de problemas se diseñaron de acorde a los objetivos de esta investigación, tomando en cuenta la bibliografía consultada y fueron validadas a través de juicio de expertos. Para su construcción se utilizaron contextos sociales, culturales y de la propia realidad de los estudiantes participantes.

Durante la implementación de las actividades de invención de problemas, se iniciaron las observaciones participantes del grupo, las cuales fueron grabadas para facilitar el análisis posterior. También en los primeros minutos de cada una se les explicó el protocolo de trabajo, siendo de suma relevancia el observar si los estudiantes escribían sus pensamientos matemáticos en los informes.

Análisis de los resultados

En esta parte se presentan los resultados de dos actividades de invención de problemas, para cada una, en primer lugar se muestra sobre las representaciones y en segundo lugar, las estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver los problemas que inventaron.

Actividad 1 de invención de problemas. En esta actividad se presentan imágenes (representaciones icónicas) de dos productos con sus respectivos precios del Mercado, una botella de Té Frío de 2.5 litros con un precio de ₡1800 y un Queque de Chocolate con un precio de ₡6000 para 12 personas. Además, se le solicita al estudiante construir un problema donde se utilicen los dos artículos o uno de ellos, pero que también sirva para determinar el gasto que se podría generar si la cantidad de personas es mayor. Asimismo, los estudiantes deben resolver el problema y escribir todas las operaciones que se realizaran en su solución.

Dos de las respuestas obtenidas en esta actividad se muestran en la figura 1, en ella se aprecian producciones de dos grupos de estudiantes participantes, en las cuales se observa representaciones como las verbales cotidianas y simbólicas numéricas, tanto en el enunciado del problema como en su solución. Los 8 grupos participantes realizaron traducciones similares a las expuestas en la figura 1, por lo que el proceso de traducción de representaciones icónicas a representaciones verbales escritas y simbólicas numéricas fue el único que se realizó por parte de los estudiantes en esta actividad.

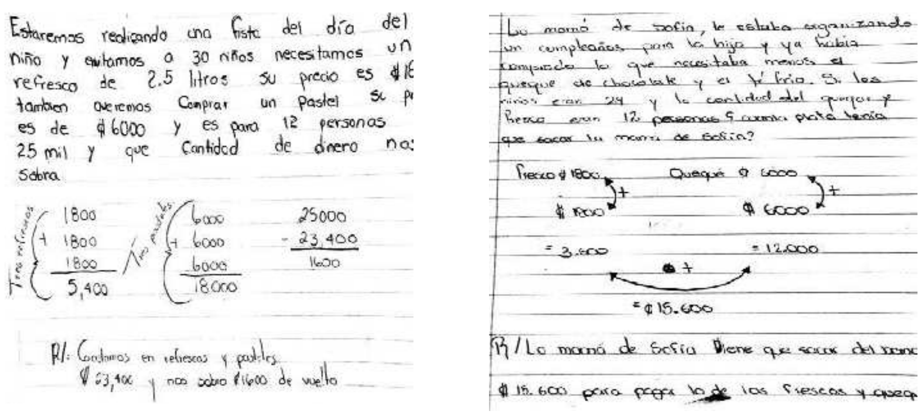


Figura 1. Las imágenes muestran las producciones de dos grupos, en las cuales se realizaron procesos de traducción de representación icónica a representaciones en lenguaje verbal escrito y simbólico numérico.

En esta actividad la única estrategia que se utilizó para resolver el problema construido por los estudiantes fue el uso de operaciones aritméticas, se observa que los estudiantes usaron los precios de los artículos varias veces, por ejemplo en la primera imagen de la figura 1 se puede visualizar que el contexto cotidiano utilizado fue una fiesta del día del niño para 30 niños, en su solución suman tres veces el precio del refresco y tres veces el precio del queque, no utilizan proporciones para resolver el problema. De igual manera, sucede en la segunda imagen de la figura 1.

Actividad 2 de invención de problemas. En esta actividad se les presentó a los estudiantes, en una representación tabular, los votos obtenidos de primera vuelta de las elecciones presidenciales de Costa Rica, realizada el domingo 4 de febrero del 2018, en ella se les brinda cantidades absolutas y relativas de las personas inscritas del padrón electoral, los votos válidos, los votos nulos y blancos; sin embargo en el abstencionismo no se brinda la cantidad absoluta, pero si la cantidad relativa (ver apéndice A). Además, se les propuso construir un problema en el que debían utilizar los datos brindados, además tenían que resolverlo y escribir todas operaciones utilizadas en su solución.

De esta actividad obtuvimos resultados como los que se muestran en la figura 2, en ella se presentan los procesos de traducción de las representaciones externas usados por dos grupos de estudiantes**.** Se encontró que 6 de los 8 grupos participantes generaron construcciones de problemas con representaciones de lenguaje verbal escrito y lenguaje simbólico numérico. Pero 2 de los 8 grupos realizaron propuestas de problemas donde se involucraban representaciones con lenguaje icónico (gráfico), verbal escrito y simbólico numérico a la vez.

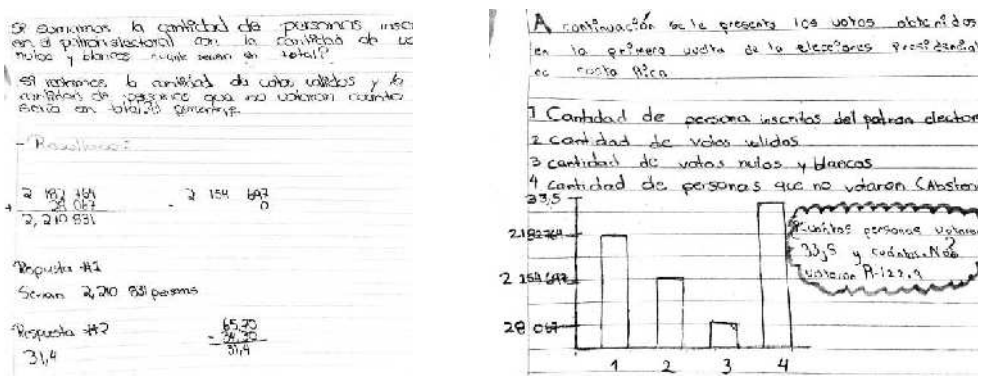


Figura 2. Las imágenes muestran las traducciones de representación tabular a lenguaje verbal escrito, lenguaje simbólico numérico y lenguaje icónico.

En esta actividad se produce una diferencia mínima con relación a las estrategias de la actividad 1, en la figura 2 se presenta dos de estas creaciones, en la primera imagen uno de los grupos siguió un camino donde utilizó operaciones aritméticas básicas tanto de cantidades absolutas como de cantidades relativas. En la segunda imagen se muestra la creación que realizaron dos de los ocho de los grupos participantes, donde se utiliza el lenguaje icónico (gráfico de barras) como estrategia para resolver este problema, cuya construcción es incorrecta (pues se produce un error al usar cantidades absolutas y relativas en el eje vertical del gráfico), no se muestra ninguna operación adicional.

Por otra parte, en ambas actividades observamos que los estudiantes no utilizaron los procesos de proporciones como la regla de tres, ni el uso de porcentajes, ni el uso de representaciones de simbología algebraica.

Conclusiones

Entre los resultados de este estudio destacan la importancia de promover la invención de problemas desde la perspectiva de la modelización matemática, pues las actividades propuestas fueron excelentes oportunidades de la construcción de su conocimiento matemático, ya que al crear un problema los estudiantes pusieron en práctica habilidades como la creatividad y la indagación al mismo tiempo que visualizaban la integralidad y utilidad de la matemática.

Las situaciones construidas por los estudiantes durante el proceso de invención de problemas, contenían representaciones de los conceptos matemáticos en lenguaje verbal escrito y lenguaje simbólico numérico en mayor preferencia, también se obtuvieron en menor cantidad propuestas de problemas con los mismos tipos de representación anterior pero con una variante de utilizar el tipo de representación con lenguaje icónico (gráfico); con lo cual se visualizó la relación que tiene la representación con el significado personal del objeto matemático, desde las experiencias que el estudiante posee y construye en relación directa con él (Pecharromán, 2014).

Asimismo, al construir y resolver problemas por medio de las actividades de este estudio, los estudiantes no mostraron diversidad en los sistemas de representación utilizados, es decir no poseían una “fluidez representacional” y por lo tanto, no comprendían en forma significativa el objeto matemático involucrado en el estudio.

Referencias y bibliografía

Castro, E., y Castro, E. (2000). Representaciones y Modelización. En L. Rico (Ed.), *Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori

Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions
in the modelling process. Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 38 (2), 143–162.

González, F., Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2016). Interpretación de diagramas de comparación multiplicativa por estudiantes de secundaria. PNA, 10(4), 280-306.

English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children’s problem-posing abilities [El desarrollo de habilidades como plantear problemas en los niños de quinto grado]. *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 183-217.

Hansen, R., y Hana, G. M. (2015). Problem Posing from a Modelling Perspective [Planteamiento de problemas desde una perspectiva de modelado]. En F.M. Singer , N. F. Ellerton, J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice* [*Planteamiento de problemas matemáticos: Desde la investigación hasta la práctica efectiva*] (pp. 35–46). Cham: Springer International Publishing.

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. P. (2014). Metodología de la Investigación (6ta ed). México: McGrall Hill.

Lesh, R., y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving [Fundamentos de una perspectiva de modelos y modelos sobre la enseñanza de las matemáticas, el aprendizaje y la resolución de problemas]. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* [*Más allá del constructivismo: Perspectivas sobre Modelos y Modelado en la Solución de Problemas Matemáticos, Aprendizaje y Enseñanza*] (pp. 203-204). Mahwash, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Lesh, R., y English, L. (2005). Trends in the evolution of models y modeling perspectivs on mathematical learning and problem solving [Tendencias en la evolución de los modelos y perspectivas de modelado en el aprendizaje matemático y la resolución de problemas].

Revista Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37(*6*), 487-189. Recuperado de http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm056a5.pdf

Martinez, A., Rivaya, F. J., Aguila, F., Cara, S., Navarro, J. A., Burgos, E.,… Torres, E. (1989). Bases psicopedagógicas. En A. Martinez y F. J. Rivaya (Eds.), *Una metodología activa y lúdica de enseñanza de la geometría elemental* (pp. 17-36). Madrid: Síntesis, S. A.

Pecharromán, C. (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. *Revista Educación Matemática*, 26(2), 111-133.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.

Silver, E.A. (1994). On Mathematical Problem Posing [Sobre la invención de problemas]. *For the Learning of Mathematics* [Para el aprendizaje de las matemáticas]. 14 (1), p. 19-28.

Skemp, R. (1999). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid, España: Morata

Apéndice A

Actividad 1 de Invención de Problemas

A continuación se le presentan dos productos con sus respectivos precios del Mercado

Precio: ₡1800
Cantidad 2.5 Litros para 12 personas

Precio: ₡6000
Cantidad para 12 personas

Construye un problema en el cual se utilice los dos artículos o uno de ellos que se le brindaron anteriormente en las imágenes, pero además que sirva para determinar el gasto que se podría generar con los artículos propuestos, si la cantidad de personas es mayor. Resuelve el problema y escribe todas las operaciones que realices para llegar a la respuesta final.

Actividad 2 de Invención de Problemas

A continuación se le presentan los Votos obtenidos en la primera vuelta de las Elecciones Presidenciales de Costa Rica, realizada el domingo 4 de febrero del 2018.

Cantidad de personas inscritas del padrón electoral	**2 182 764**	**100%**
Cantidad de votos válidos	**2 154 697**	**65,70 %**
Cantidad de votos nulos y blancos	**28 067**	
Cantidad de personas que no votaron (Abstencionismo)		**34,30 %**

Construye un problema en el cual se utilice los datos brindados en la tabla anterior. Además, resuelve el problema y escribe todas las operaciones que realices para llegar a la respuesta final.

Desarrollo de Talento matemático y la Creatividad

María Alejandra **Solano** Delgado
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander
Colombia
alejasode08@hotmail.com
Solange Roa Fuentes
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander; Grupo EDUMAT – UIS
Colombia
sroa@matematicas.uis.edu.co
Erika García Torres
Facultad de Psicología, Universidad Autónoma de Querétaro Colombia
México
erikagart@gmail.com

Resumen

El documento muestra los avances de una investigación que busca diseñar un entorno propicio para el desarrollo del talento matemático que fomente la creatividad. Para esto, se presenta una breve descripción de la controversia que ha generado el término talento, para luego dar lugar a investigaciones que sustentan la relación entre el talento matemático y la creatividad matemática. Además, se describe el marco conceptual que básicamente muestra cómo se construye un entorno de enriquecimiento y cómo se propone determinar el desarrollo de la creatividad matemática como elemento fundamental para potenciar el talento matemático.

Palabras clave: educación matemática, talento matemático, creatividad matemática, habilidades matemáticas, talento potencial.

Introducción

Esta investigación busca crear un entorno propicio que fomente el desarrollo del talento matemático partiendo de la premisa que la creatividad es un predictor del talento matemático (Kattou, Christou & Pitta-Pantaz, 2015) y que el talento matemático está en potencia, esto desde la perspectiva de la UNESCO (2004). Pero antes de hablar del talento matemático es necesario analizar el debate que se ha generado alrededor del término talento, esto permite que mostrar cuál es la postura de la investigación.

El término Talento.

El término talento ha sido muy debatido desde diferentes perspectivas; tal como lo describen Singer, Sheffield, Freiman y Brandl (2016) aún no se llega a un consenso sobre su definición, ni de términos asociados al talento, como "súper dotado" o "genio". Algunos investigadores (Terman, 1925; Feldhusen, 1992; Hernández, Hernández y Milán, 2007) argumentan que el talento es una característica biológica innata en cada persona, la cual se mide por medio del test de Coeficiente Intelectual propuesto por el psicólogo William Stern en 1912. Sin embargo, existen otras visiones que declaran que "esta concepción biológica de que el talento indica un desarrollo acelerado de funciones en el cerebro las cuales permiten su uso más eficiente o eficaz, ha sido un término arraigado (en la cultura)" (Clark, 1997, p. 8). Clark (1997) además menciona que el talento se caracteriza por un comportamiento creativo de liderazgo, invención y habilidades matemáticas, en las cuales intervienen tanto el contexto familiar como el escolar y en las condiciones sociales de los individuos. Esto va en la misma perspectiva de la propuesta teórica de Howard Gardner (1995), al enunciar su teoría de inteligencias múltiples. Esta teoría abre el espectro de la inteligencia (lingüística, musical, lógico-matemática, espacial, cenestésico-corporal y personales) y muestra otras perspectivas para potenciar y desarrollar habilidades y destrezas.

Por otra parte, desde 1985 Bloom, analiza el desarrollo del talento como consecuencia de la influencia del contexto, de los padres y de los maestros, Además encuentra que los talentosos eran caracterizados por ser perseverantes, competitivos, tenían deseo de sobresalir y una mayor disposición para trabajar. En dicho trabajo Bloom muestra un acercamiento al talento desde una perspectiva diferente a la innata, revelando un camino para futuras investigaciones sobre el talento.

Talento matemático y creatividad matemática.

Particularmente el talento matemático ha sido estudiado por diferentes investigadores como Krutetskii, (1976), Lupkowski-Shoplik y Assouline (1994), Abdullah Ficici y Del Siegle (2008), Miserandino y Subotnik (1995), Bicknell, (2008) y Canché y Farfán (2017). Krutetskii por ejemplo, en su libro "*The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*" expone sus ideas sobre la capacidad matemática, afirmando que las características genéticas juegan un papel importante en el progreso de estas pero no son suficientes para el desarrollo de habilidades que conlleven al desarrollo del talento matemático (1976). Mientras que Lupkowski-Shoplik y Assouline (1994) brindan una serie de estrategias para poder desafiar suficientemente a estos estudiantes, partiendo de la escuela en la que estudian, esto es, que la escuela regular cree un programa especial que logre desafiar a los niños con talento matemático.

Por su parte Abdullah Ficici y Del Siegle (2008), realizan una encuesta virtual a maestros de secundaria: 900 de Corea del Sur, 408 de Turquía y 100 de Estados Unidos, en la cual se preguntaba qué caracterizaba a un estudiante talentoso en matemáticas. Los profesores con mayor experiencia en el campo de la enseñanza valoraban la resolución de problemas de forma creativa, cosa que resalta Miserandino y Subotnik (1995) diciendo que muchos estudiantes considerados talentosos matemáticamente tienen problemas con las habilidades puramente computacionales. Dichos autores también encontraron que la cultura coreana y la estadounidense tenían posturas diferentes con respecto a lo que consideran talento matemático, ya que en la cultura estadounidense se considera que el talento es innato, mientras que los coreanos le dan un mayor nivel al esfuerzo que a la capacidad, por lo que plantean que el talento matemático está en desarrollo.

Respecto a la caracterización se encuentra por ejemplo a Bicknell (2008), quien plantea que los individuos talentosos en matemáticas son determinados desde las perspectiva de ellos mismos, de sus padres y sus docentes; esto lleva a un consenso de ciertas características comunes en todos: la persistencia, el pensamiento flexible, la creatividad y el compromiso con la tarea.

En contraste con las anteriores visiones, Canché y Farfán (2017) proponen un cambio de paradigma, es decir, alejarse de las definiciones de superdotado y tomar una nueva postura del desarrollo del talento. Para esto proponen un trabajo de acuerdo con el potencial de cada individuo, teniendo en cuenta elementos del contexto, ya que el conocimiento para las autoras es una construcción continua de habilidades por medio de un entorno que promueva este desarrollo en todos los estudiantes. Definición que guiará esta investigación pues apoya el desarrollo del talento desde el potencial de los estudiantes.

En las investigaciones mencionadas se habla de la creatividad como una característica del talento. Leikin, Levav-Waynberg y Guberman (2011) por ejemplo, realizan una investigación empírica, en la cual se emplean tareas con múltiples solución (MST, por sus siglas en inglés) para el desarrollo de la creatividad. Estos autores encuentran que la fluidez y la flexibilidad son más naturales en el ser humano, pero que la originalidad va más allá; por lo tanto afirman que el componente más fuerte para determinar la creatividad es la originalidad, conclusión que es apoyada por Levenson (2011).

En particular para esta investigación el desarrollo del talento matemático está asociado al desarrollo creativo de cada individuo. Este aspecto del talento puede ser estudiado, a través de la formulación y trabajo en el aula de problemas desafiantes (Oktaç, Roa-Fuentes y Martínez, 2011).

De acuerdo con la revisión bibliográfica es posible afirmar que un estudiante talentos en matemáticas debe: Ser persistente, tener un compromiso con la tarea, ser flexibles, tener fluidez, ser original, mostrar predilección por los problemas, formular problemas, arriesgarse en la fase exploración de los problemas y disfrutar al trabajar sobre problemas desafiantes.

A partir de lo anterior surge la pregunta de esta investigación ¿Qué tipo de tareas son las más apropiadas para potenciar el desarrollo del talento matemático? Dando lugar a nuestro objetivo de investigación potenciar el talento matemático por medio de problemas desafiantes que promuevan el desarrollo de funciones cognitivas asociadas a la creatividad. Con el fin de dar respuesta a la pregunta y cumplir con el objetivo de investigación, se propone el siguiente marco conceptual.

Marco conceptual

Talento potencial

En este apartado se presenta la definición de talento potencial desde la perspectiva de la UNESCO y desde la perspectiva evolutiva de Canché y Farfán. El talento potencial según la UNESCO (2004) hace referencia al talento como aquel:

> "que aún no se ha desarrollado o evidenciado, es decir que el sujeto está en potencia de desarrollar y demostrar su o sus talentos, pero a causa de uno o más factores no lo ha podido evidenciar en sus esquemas de acción". (p. 28)

En particular esta investigación centra su postura del talento desde una perspectiva evolutiva, es decir, tomar una postura del desarrollo del talento, proponiendo un trabajo de acuerdo con el potencial de cada estudiante, teniendo en cuenta elementos del contexto (Canché y Farfán, 2017), creando un entorno que posiblemente potencialice su talento de acuerdo a su capacidad individual que puede o no construir en una actividad grupal.

Talento matemático.

Para analizar cómo se desarrolla el talento matemático se utiliza el modelo propuesto por Pitta-Pantazi , Christou , Kontoyianni y Kattou (2011):

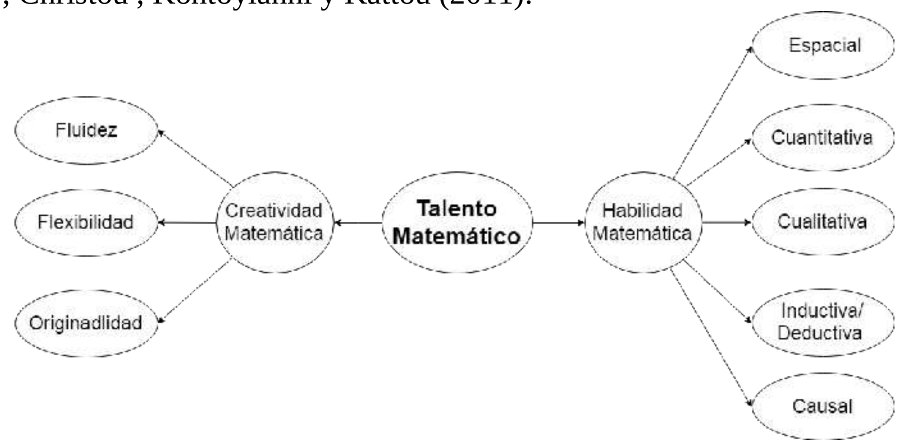


Figura 1. Modelo Talento Matemático adaptado de Pitta-Pantazi et al. (2011)

El modelo que guía el diseño y desarrollo de la investigación toma en cuenta el desarrollo de la creatividad y las habilidades matemáticas (Ver figura 1). A continuación se definen cada uno de estos constructos.

Creatividad matemática

La creatividad matemática se define como un proceso que involucra las siguientes funciones cognitivas: la fluidez, la flexibilidad y la originalidad (Torrence, 1995).

En este trabajo se toma la fluidez desde la perspectiva de Torrence como la cantidad de ideas que un individuo puede proponer ante un problema. Un ejemplo particular de este tipo de proceso es: se propone el siguiente problema “Los pollos y los conejos corren al aire libre. Juntos tienen 35 cabezas y 94 pies. ¿Cuántos pollos y cuántos conejos hay?” (Krutetskii, 1976, p.121), para resolver este problema los estudiantes pueden proponer diferentes ideas para resolver el problema como: realizar un sistema de ecuaciones, utilizar ensayo y error, realizar una suposición falsa para encontrar la solución, realizar pictogramas para identificar el número de patas de cada animal. En estas respuestas se identifica la fluidez como la exposición de las ideas de los estudiantes frente a los metodos de solución.

La flexibilidad se evidencia cuando el estudiante es capaz de realizar un cambio de enfoque al resolver un problema o revertir procesos mentales. Además puede proporcionar diferentes soluciones del mismo problema, desde diferentes perspectivas (Torrence, 1995). Siguiendo con el ejemplo anterior, una niña soluciona el problema desde dos enfoque diferentes. En el primer dice que si suponemos que son 35 gallinas entonces en total serían 70 patas por lo que sobrarían 24 patas, de donde deduce que estas perteneces a los conejos y por lo tanto hay 12 conejos y 23 gallinas (Krutetskii, 1976); el segundo enfoque lo realiza resolviendo el sistema de ecuaciones que la lleva a la misma solución.

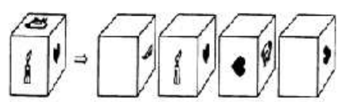
Finalmente, al suponer que los 35 animales son gallinas resulta ser una solución original, porque se evidencia cuando el estudiante construye una solución a un problema matemático poco frecuente entre sus pares o una solución que resulta singular para su experiencia (Leikin, 2009a). Esto es, la estudiante desarrolla el problema de forma inusual pues el camino regular de solución es por sistema de ecuaciones o mediante ensayo y error. Esto está determinado por las características particulares que determinan la experiencia de cada individuo.

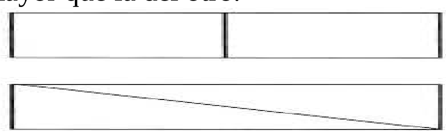
Habilidad Matemática

Por otra parte la habilidad matemática se divide en cinco tipos de habilidades, estas son: habilidades espaciales, cualitativas, cuantitativas, de razonamiento deductivo e inductivo y causales . Según Pitta- Pantaziet, et al., (2014) las habilidades espaciales se pueden evidenciar en la solución de problemas de rotaciones, de dependencia y hasta plegado de papel; las cualitativas están relacionadas con problemas que se centran en relaciones de diferencia y similitud; las cuantitativas se desarrollan mediante el cálculo numérico y el razonamiento algebraico y las causales tienen que ver con los problemas de causa y efecto. A continuación en la Tabla 1 se muestran unos ejemplos de problemas que desarrollan las habilidades matemáticas antes mencionadas.

Tabla 1

Ejemplos de problemas que desarrollan habilidades matemáticas.

Habilidades matemáticas	**Problema**	**Interpretación**
Espaciales	 Dibuja la figura que falta en cada cara. *Figura 2*. Problema de visualización 3D en Gutierrez (1991).	Las habilidades espaciales se ven en este problema cuando el estudiante puede realizar mentalmente las rotaciones y dibujar no sólo la figura sino identificar la posición.
Cualitativas	Veinte pasajeros viajan al aereopuerto Lanarca en bus. Doce de ellos llevan maleta de viaje, once llevan un bolso de computador y seis llevan los dos tipos de bolso. ¿Cuántos de ellos llevan sólo maleta de computador? (Problema tomado de Pitta-Pantazi et, al. 2011, p. 45)	Se evidencian cuando el estudiante puede relacionar la información de las personas que llevan los dos tipos de maletas, con las que llevan un solo tipo para poder realizar la exclusión de los datos que no le están dando una información relevante para la solución del problema.
De razonamiento inductivo/ deductivo	Compara uno de los rectángulos pequeños con uno de los triángulos rectángulos. Tienen la misma área o la de uno es	Se evidencian habilidades de razonamiento en el estudiante cuando puede relacionar que el triángulo rectángulo es la mitad del rectángulo inicial y a su vez el rectángulo pequeño también lo és, llevándolo a

mayor que la del otro.  *Figura 3*. Rectángulo dividido por la mitad de dos formas diferentes (NCTM, 2003, p. 194).	deducir que sin importar la forma, los dos tienen la misma área por ser la mitad del mismo rectángulo.

Fuente: Las autoras.

Para el desarrollo de esta investigación se propone diseñar y/o adaptar una serie de problemas desafiantes que involucren los diferentes componentes de las habilidades matemáticas para evidenciar en las soluciones de los estudiantes los procesos subyacentes de la creatividad matemática.

Metodología

En este apartado se muestra el proceso metodológico que guía este trabajo con el fin de responder la pregunta de investigación y por ende al objetivo propuesto.

Primera fase: Diseño e implementación de una prueba diagnóstica.

Con el fin de analizar los procesos cognitivos que dan cuenta de la creatividad (fluidez, flexibilidad y originalidad) de los estudiantes, se porpone realizar una prueba diagnóstica en la cual se diseñaran y/o se adaptaran problemas que estén relacionados con las habilidades matemáticas (cuantitativas, cualitativas, causales, de razonamiento y espaciales) para estudiar bajo el planteamiento de Torrence (1995) las distintas soluciones que brinden los estudiantes.

Segunda fase: Diseño de instrumentos.

En esta fase, se realiza primero el diseño y/o adaptación de los problemas bajo el marco de las habilidades matemáticas propuesto por Pitta-Pintaza, et, al (2011). Para esto se plantea diseñar tres cuestionarios que involucren problemas que vayan de menor dificultad a mayor dificultad. Dichos problemas son de tres tipos: mal planteados, con múltiple solución Leikin, Levav-Waynberg y Guberman, (2011) y paradojas relacionadas con el infinito Roa-Fuentes, (2012) ya que este tipo de problemas permiten estudiar la creatividad de los individuos.

Además del diseño de los cuestionarios también se propone el diseño de una entrevista semiestructurada por cada cuestionario que es aplicada a los estudiantes que participan de la investigación, inmediatamente después de cada sesión de cuestionario, con el fin de complementar las respuestas obtenidas en los registros escritos.

Finalmente se pretende diseñar e implementar una prueba final, la cual puede dar cuenta del proceso de los estudiantes durante la aplicación de los cuestionarios. El diseño de esta prueba será similar a la diagnóstica con el fin de analizar si los procesos cognitivos de la creatividad han sido potenciados, por lo tanto constará de problemas relacionados con las habilidades matemáticas.

Tercera fase: Implementación de los instrumentos y recolección de la información.

La recolección de datos se propone desarrollar por medio de tres instrumentos. El primer instrumento es la hoja de trabajo de cada estudiante; es decir, donde el estudiante soluciona los problemas propuestos en la segunda fase de esta investigación. El segundo instrumento está constituido por entrevistas y finalmente, el tercer instrumento es la videograbación de cada intervención. Todo esto con el fin de obtener la mayor información de la forma de pensar de los estudiantes a la hora de resolver los problemas.

Cuarta fase: Análisis de datos.

En esta fase se analizan las soluciones brindadas por los estudiantes a los problemas propuestos, a partir de Torrence (1995), esto es, la fluidez, la flexibilidad y la originalidad de estas, con el objetivo de dar cuenta de cómo el desarrollo investigativo permite potenciar o no el talento matemático.

Conclusiones y proyección de la investigación

El talento matemático ha sido ampliamente estudiado desde diferentes perspectivas, ya que en un momento predominó el talento visto como una característica innata; pero nuevas investigaciones han mostrado que el talento puede ser desarrollado, ya que no es suficiente con nacer con predisposición para desarrollar el talento, sino que es necesario estar en un entorno que lo propicie, razones que muestran la importancia de esta investigación.

El contexto en el que se realiza esta investigación es una escuela rural, conocida como Escuela Nueva en Colombia con estudiantes de cuarto y quinto gado. Dado que se espera mostrar que en este contexto particularmente especial, es posible desarrollar el talento matemático potencial. Este contexto brinda la oportunidad de trabajar con dos o más grados en un mismo espacio físico (aula regular), permitiendo un espacio que puede ofrecer evidenciar diferentes niveles de creatividad.

Referencias y bibliografía

Abdullah Ficici & Del Siegle (2008) International Teachers' Judgment of Gifted Mathematics Student Characteristics, *Gifted and Talented International*, 23:1, 23-38, DOI: 10.1080/15332276.2008.11673510.

Bicknell, B. (2008). *Who are the mathematically gifted? Student, parent, and teacher perspectives.* In Proceedings of ICME11. TG6: Activities and Programs for Gifted Students.

Bloom, B. (Ed.). (1985). Developing talent in Young people. New York: Ballentine.

Canché, E. y Farfán, R. (2017). El Talento en matemáticas desde una perspectiva sociocultural: un eje para el loro dela equidad educativa. *La matematica e la sua didattica*, 25(2), 97-118.

Clark, B. (1997). No child is just born gifted: Creating and developing unlimited potential. Recuperado el 25 de agosto de 2018 de: http://ektron.nagc.org/uploadedFiles/PHP/PHP_Article_Archive/Sept_96_-_Sept_97/No%20Child%20Is%20Just%20Born%20Gifted-Clark-3_97PHP.pdf

Demetra P., Constantinos C., Kontoyianni K., y Kattou M. (2011). A Model of Mathematical Giftedness: Integrating Natural, Creative, and Mathematical Abilities, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 11:1, 39-54, DOI: 10.1080/14926156.2011.548900

Feldhusen, J. F. (1992). Talent Identification and Development in Education (TIDE). *Proceedings of The Second Asian Conference on Giftedness: Gowing Up Gifted & Talented*, 199-206.

Gardner, H. (1995). Estructuras de la Mente: la teoría de las Inteligencias Múltiples. 2ª Edición. México FCE.

Gutierre, Ángel (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. Memoria del tercer congreso internacional sobre investigación en Educación Matemática. Universidad de Valencia.

Hernández, J., Hernández, J., Milán, M. A. (2007). La creatividad asociada al talento musical en alumnos superdotados. Respuestas educativas. *Ensayos*. (22), 83-97.

Kattou, M., Christou, C., Pitta-Pantazi, D. (2015). Mathematical creativity or general creativity. In K. Krainer, N. Vondrová (Eds.), Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education. Prague, Czech Republic: Charles University.

Krutetskii, V. A. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. (Trad. Teller J.). Chicago, EEUU: The University of Chicago Press (Original en ruso, 1968).

Leikin, R., Levav-Waynberg, A., Guberman, R. (2011). Employing multiple solution tasks for the development of mathematical creativity: Two comparative studies. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of European Research in Mathematics Education (pp. 1094-1103).* Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Lupkowski-Shoplik, A. E., Assouline, S. G. (1994) Evidence of extreme mathematical precocity: Case studies of talented youths. Roeper Review. (Del international teachers judgment).

Miserandino, D., Subotnik, R., y Ou, K. (1995). Identifying and nurturing mathematical talent in urban school setting. The Journal of Secondary Gifted Education. En International Teachers Judgment.

National Councilof Teachers of Mathematics. (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática

Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Rodríguez, M. (2011). Equity Issues Concerning Gifted Children in Mathematics: A perspective from Mexico. Atweh, B.,Graven, M., Secada, W., Valero, P.(Ed). Mapping Equity and Quality in Mathematics Education. (pp.351-364). New York.

Roa Fuentes (2012). El infinito: un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en matemáticas. Tesis de doctorado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del PIN. México

Singer, F., Sheffield, L., Freiman, V. y Brandl, M. (2016). Research On and Activities For Mathematically Gifted Students. En ICME-13 Topical Surveys. Nueva York: Springer Open.

Terman, L. M. (Ed.) (1925). Mental and physical traits of thousand gifted children. Genetic Studies of Genius, vol. 1, Stanford University Press, Stanford.

Torrance, E. P. (1995). The beyonders' in why fly? A philosophy of creativity. Norwood, NJ: Ablex.

UNESCO. (2004). La educación de niños con talento en Iberoamérica. (M. Benavides, A. Maz, & R. Blanco, Eds.) Santiago, Chile: Trineo S.A.

Evento contextualizado: estudo de um problema da Engenharia Civil para o ensino de Matemática

Eloiza **Gomes**
Instituto Mauá de Tecnologia
Brasil
eloiza@maua.br
Gabriel Loureiro de **Lima**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
gllima@pucsp.br
Barbara Lutaif **Bianchini**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
barbara@pucsp.br
Karina Bradaschia **Rocha**
Instituto Mauá de Tecnologia
Brasil
karina.rocha@maua.br
Paula Meirelles **Bolelli**
Instituto Mauá de Tecnologia
Brasil
paula.bolelli@maua.br

Resumo

O objetivo deste trabalho é o de apresentar um evento contextualizado, elaborado a partir de um problema clássico da Engenharia Civil e também uma possível organização didática com vistas a ser desenvolvida em aulas de uma disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral, com o intuito de revisar conceitos anteriormente trabalhados na Educação Básica, mas sob um novo olhar: o das aplicações de tais conteúdos em disciplinas específicas da Engenharia e na futura área de atuação profissional do graduando. Como embasamento teórico, adotamos pressupostos da Matemática no Contexto das Ciências e do modelo didático associado a tal referencial, o Modelo Didático da Matemática em Contexto. O principal desafio vivenciado durante o processo de elaboração do evento contextualizado foi adaptar, tendo em vista o público-alvo constituído por ingressantes na universidade, um problema da Engenharia que engloba uma série de conceitos matemáticos, físicos e específicos que esse público ainda não domina.

Palavras-chave: Educação Matemática, Engenharia Civil, Evento Contextualizado, Cálculo Diferencial e Integral.

Introdução

Este artigo faz parte de uma pesquisa mais ampla, em desenvolvimento, em que estudamos, fundamentados na teoria a *Matemática no Contexto das Ciências* (MCC) (Camarena, 2013, 2017), a construção de *eventos contextualizados* (EC) para o ensino de Matemática em cursos de Engenharia. Apresentamos, neste trabalho, alguns elementos daquilo que Camarena (2017) denomina de *história de um evento contextualizado*, construído para ser utilizado em uma disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral, com o intuito de revisitar questões relativas ao estudo das funções trigonométricas e exponenciais reais de uma variável real, já trabalhadas pelo aluno na Educação Básica, mas que, em nossa visão, devem ser retomadas com um enfoque direcionado ao ensino superior e às aplicações com as quais ele irá se deparar nas disciplinas específicas da Engenharia e em sua futura atuação profissional.

O evento foi construído a partir de um problema clássico da Engenharia Civil normalmente trabalhado nos cursos de graduação desta habilitação da Engenharia. Tal problema é modelado por uma equação diferencial de 2ª ordem, conteúdo que, no âmbito da disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral, ainda não é acessível ao estudante. Da mesma maneira, há uma série de conceitos específicos da Engenharia que também não serão, neste momento, de domínio do graduando. Foi necessário, portanto, realizarmos uma adaptação do problema, tanto do ponto de vista da Matemática quanto da Engenharia, para que ele se tornasse viável de ser trabalhado com esse público. Ressaltamos que, na proposta que estamos apresentando, o estudante não irá resolver a equação diferencial envolvida na situação. Partindo da solução que já será fornecida, ele irá explorar, de maneira contextualizada, os conteúdos matemáticos visados.

Como um primeiro passo para efetivamente aplicarmos em sala de aula o EC construído, é que detalhamos, em relação a alguns aspectos, a história de tal evento e propomos uma primeira organização didática para o trabalho com o EC. Para que os conceitos de EC e de história de um EC possam ser devidamente compreendidos, na próxima seção abordamos alguns preceitos da teoria MCC.

Preceitos da MCC e a noção de EC

A teoria MCC, elaborada por Patricia Camarena há mais de trinta anos para subsidiar reflexões relativas ao ensino e a aprendizagem de Matemática em cursos nos quais essa ciência está a serviço, contempla, em uma de suas fases – para maiores detalhes a respeito desse referencial consultar Camarena (2010, 2013, 2017) e Lima, Bianchini e Gomes (2018) – um modelo didático específico, denominado *Modelo Didático da Matemática em Contexto* (MoDiMaCo).

Em tal Modelo, a principal ferramenta de trabalho para o professor em sala de aula é o que Camarena (2013) denomina de *evento contextualizado*. Um EC é concebido como um problema ou um projeto construído com o objetivo de integrar disciplinas matemáticas e não matemáticas que compõem o currículo de determinado curso de graduação, possibilitando, portanto, um trabalho interdisciplinar no ambiente de aprendizagem. No MoDiMaCo, desenvolvido a partir de pilares construtivistas, prevê-se que o evento seja trabalhado de forma colaborativa pelos estudantes, que devem atuar em equipes de três integrantes, tendo cada um deles um papel: *líder emocional*, *líder intelectual* e *líder operativo*. Para maiores esclarecimentos, consultar Camarena (2017).

Após identificar uma situação com potencial para gerar um EC – e, no caso específico desse trabalho, a fonte a que recorremos para a busca dessa situação foi um livro adotado como referência em uma disciplina específica da Engenharia Civil, a saber Mazzili, André, Bucalem e Cifú (2016) – o docente deve construir de fato o evento. Ressaltamos que, no caso do evento em análise neste trabalho, seu *nível cognitivo* (Camarena, 2017) é médio, uma vez que o problema que o originou é proveniente de uma outra disciplina que o aluno cursará em sua graduação.

Finalizada a construção do evento, o docente deve começar a redigir a história desse evento, ou, em outras palavras, realizar uma análise *a priori* daquela situação de ensino e elaborar um documento que, segundo Lima et al. (2018) a partir de Camarena (2017), deve incluir, dentre outros aspectos: a descrição e o papel do EC, os conhecimentos matemáticos envolvidos, as habilidades prévias esperadas durante a resolução do evento, os conhecimentos prévios de Matemática esperados, os conhecimentos do contexto que estão presentes no evento, as possíveis formas de resolução, os recursos tecnológicos que podem ser empregados, etc.

Antes de passarmos, na seção seguinte a apresentar alguns destes elementos da história do evento que elaboramos, convém salientar que, há dois eixos que estruturam o MoDiMaCo: a contextualização e a descontextualização. No primeiro, realiza-se, a partir dos EC, um trabalho interdisciplinar. Já no segundo, por meio de atividades individuais ou em grupos contemplando diferentes estratégias, "trabalha-se de forma disciplinar somente com a Matemática, com o nível de formalismo exigido pela futura profissão do estudante" (Camarena, 2017, p. 10), evidenciando que o conceito trabalhado por meio daquele EC poderá também ser aplicado em outras situações.

O EC elaborado[1], elementos de sua história e uma proposta de organização didática do EC

Nesta seção, apresentamos, em primeiro lugar, o contexto no qual a situação que originou o EC está imersa. Em seguida, explicitamos o evento, elementos de sua história e, finalmente, uma possível organização didática do trabalho com o EC.

O contexto a partir do qual o EC foi construído

O objeto de estudo no problema que deu origem ao EC é um pórtico de um pavimento, submetido a uma força estática, que fará com que a estrutura vibre livremente. Na engenharia estrutural, os pórticos são formas compostas por elementos lineares (normalmente vigas e colunas), conectados em suas extremidades de forma a não permitir rotações relativas (conexões rígidas). Os pórticos são projetados de modo a resistir a esforços normais (que tendem a esticar ou encurtar a estrutura), cortantes (forças que tendem a cisalhar a estrutura) e, principalmente, aos esforços de flexão (que tendem a curvar a estrutura) e são muito utilizados no travamento de edifícios, principalmente dos mais elevados, em que o padrão com repetições resulta em estruturas hiperestáticas.

Sua aplicação nas edificações data do final do século XIX e início do século XX, quando as estruturas de aço formavam um "esqueleto estrutural" fácil de ser construído, que gerava um

[1] A descrição de pórticos na Engenharia Estrutural que trazemos nesta seção, contexto que originou a construção do EC em tela, foi originalmente apresentada em trabalho ainda não publicado, de autoria dos autores desse artigo, que foi discutido durante a reunião do Grupo de Trabalho Ciências Básicas e Matemática na Engenharia ocorrida em setembro de 2018 durante o XLVI Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, em Salvador, Bahia, Brasil.

espaço amplo sem pilares centrais e possibilitava versatilidade no *design* (Pauletti, 2010). As vantagens de se utilizar uma estrutura aporticada são que elas possuem menores deflexões (alterações ou desvios da posição natural para um dos lados) e distribuem melhor a carga quando comparadas com uma estrutura composta por viga-pilar (vigas simplesmente apoiadas nos pilares), pois a conexão rígida entre vigas e pilares faz com que os efeitos de flexão sejam também absorvidos pelos pilares. Além disso, a utilização na construção de edifícios do pórtico estrutural rígido de aço tem como vantagens os fatos dos pórticos serem economicamente viáveis, energeticamente eficientes, os pavimentos não serem tão suscetíveis a vibrações, entre outros fatores.

Antigamente, como forma de simplificar qualquer problema de Engenharia, era usual realizar apenas uma análise estática das estruturas, majorando os carregamentos (ou seja, forças atuantes na estrutura) pelos chamados coeficientes de amplificação dinâmica. Porém, com o passar do tempo e devido ao desenvolvimento de novas tecnologias, os sistemas estruturais tornaram-se cada vez mais esbeltos e passíveis de vibrações, sendo necessário, para que se faça corretamente, e conforme as normas técnicas, seu dimensionamento e verificação, o estudo das ações dinâmicas sobre eles atuantes - tais como ventos muito fortes, terremotos ou até mesmo grandes máquinas rotativas que podem ser colocadas dentro desses edifícios. (Mazzilli et al, 2016). Como é previsto por norma, os edifícios possuem um máximo deslocamento horizontal permitido, que é diretamente proporcional à altura do edifício, considerado tanto como um fator de segurança da estrutura, quanto para o próprio conforto dos usuários.

Na situação – inspirada naquelas abordadas por Mazzili et al. (2016) - a partir da qual o EC foi elaborado, o modelo estrutural é tido como *shear building*, no qual as vigas são consideradas infinitamente rígidas quando comparadas às colunas, além de toda a massa da estrutura estar concentrada nas lajes. Em modelos deste tipo, o deslocamento vertical e a rotação são restringidos. Além disso, no caso considerado, a estrutura é simétrica, o que faz com que o modelo passe de um sistema com 6 graus de liberdade (ou seja, 3 possíveis movimentos que podem ocorrer em cada nó da estrutura, que são o deslocamento horizontal, vertical e a rotação) para apenas um grau de liberdade (o deslocamento horizontal), como pode ser visto na Figura 1.

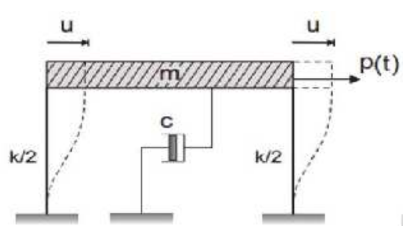


Figura 1. Modelo de um pavimento com um grau de liberdade.

O EC elaborado

Na sequência, apresentamos o evento contextualizado exatamente da maneira como ele seria proposto a uma turma de estudantes de uma disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral, com as devidas adaptações e explicações que se fazem necessárias para que ele possa ser compreendido por esse público. Salientamos que não apresentaremos a resolução do problema e nem esse será o objetivo em sala de aula na disciplina para a qual o evento foi elaborado; partindo da solução do evento e de questões diretamente relacionadas ao contexto do problema, nossa intenção é levar os graduandos a revisitar conceitos matemáticos anteriormente estudados e que serão fundamentais na disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral e ao mesmo tempo a estabelecer vinculações entre tais conteúdos e aspectos da Engenharia Civil.

Considere um pórtico com massa $m = 384$ kg, rigidez de cada pilar $\frac{k}{2} = 19200$ N/m e taxa de amortecimento $\xi = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} = 0{,}05$, sendo c a constante de amortecimento. Uma força estática é aplicada sobre essa estrutura, causando um deslocamento inicial $u_0 = 0{,}1$ m. Em seguida, essa força é retirada bruscamente e a estrutura passa a vibrar livremente com velocidade inicial nula. Considerando apenas a possibilidade de deslocamento horizontal desse pórtico, a expressão que permite analisar o comportamento do deslocamento u em função do tempo é dada por:

$$u(t) = e^{-0{,}5t}[0{,}10\cos(10t - 0{,}05)]$$

Determine o número de ciclos necessários para que a amplitude do movimento se reduza a aproximadamente 80% da amplitude inicial.

Alguns elementos da história do EC

- O papel do evento: revisitar questões relativas ao estudo das funções trigonométricas e exponenciais reais de uma variável real, com um enfoque direcionado ao ensino superior e às aplicações com as quais o estudante irá se deparar nas disciplinas específicas da Engenharia e em sua futura atuação profissional.
- Habilidades prévias esperadas durante a resolução do evento: controle e validação das respostas obtidas; senso crítico, estabelecimento e validação/descarte de conjecturas, defesa de argumentos e ideias, interpretação da solução matemática encontrada em termos do contexto, autonomia, trabalho em equipe e comunicação.
- Conhecimentos matemáticos envolvidos: função exponencial (domínio, imagem, crescimento/decrescimento, intersecção com o eixo y, assíntotas, representação gráfica com sua devida interpretação); funções trigonométricas (domínio, imagem, período, amplitude, crescimento/decrescimento, interseções com os eixos coordenados, representação gráfica e sua devida interpretação).
- Conhecimentos prévios de Matemática esperados do estudante: aqueles oriundos da Educação Básica em relação aos conceitos matemáticos envolvidos no evento, habilidade de construir (com lápis e papel e recorrendo a recursos de tecnologias digitais), analisar e interpretar representações gráficas de funções, manipulação de expressões algébricas.
- Conhecimentos do contexto presentes no EC: a noção de pórtico; rigidez de uma estrutura; força estática; diferentes tipos de esforços sobre uma estrutura; vibração livre de uma estrutura; taxa de amortecimento; modelo estrutural *shear building*.
- Formas de resolução do evento: dentre as diferentes maneiras de resolver o EC, destacamos, em uma primeira análise, a gráfica (via lápis e papel ou via algum recurso tecnológico) e a analítica. Evidentemente, ao aplicar de fato tal evento em sala de aula, outras resoluções não previstas poderão ser apresentadas pelos estudantes.
- Obstáculos que os estudantes podem enfrentar durante a resolução do EC: ausência parcial dos conhecimentos prévios esperados; uma postura não proativa diante de um problema; dificuldade em trabalhar em equipes; desestímulo perante às primeiras dificuldades intrínsecas à resolução do EC.

- Possíveis recursos tecnológicos a serem empregados na resolução do EC: *softwares* como, por exemplo, MatLab e GeoGebra, calculadoras gráficas e ambientes virtuais de aprendizagem.

Tendo sido apresentados alguns elementos da história do EC elaborado, passamos, na sequência a detalhar uma possível organização didática para o trabalho com esse evento.

Uma proposta de organização didática do EC

Tendo consciência de que os conhecimentos do contexto da Engenharia Civil não são de domínio dos estudantes que estão ingressando na universidade e cursando uma primeira disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, consideramos necessária uma etapa de familiarização, na qual os alunos farão uma pesquisa bibliográfica e/ou consultas junto a professores das disciplinas de Física e daquelas específicas da Engenharia a respeito dos conhecimentos do contexto presentes no EC (trabalho a ser desenvolvido extraclasse e que será desencadeado 10 dias antes do início do desenvolvimento do evento em sala de aula). Ao término do prazo para a realização das tarefas, os resultados obtidos deverão ser socializados em sala de aula e, para concluir essa etapa, o docente poderá disponibilizar ao graduando um texto elaborado em conjunto com professores da área específica, como aquele que apresentamos neste artigo na seção *O contexto a partir do qual o EC foi construído*.

A próxima etapa consistirá na composição das equipes formadas por três integrantes que trabalharão na resolução do problema que, neste momento, será entregue aos estudantes. O primeiro trabalho das equipes será então uma pesquisa, em sala de aula, desencadeada por discussões provocadas pelo professor a respeito de como se chegou a expressão que modela o deslocamento horizontal do pórtico em relação ao tempo. Neste momento, os estudantes poderão recorrer a materiais acessíveis na *internet* (acessados, por exemplo, a partir de seus celulares) e a livros e artigos sobre o tema disponibilizados pelo docente.

Nessa pesquisa, o aluno irá se deparar com conteúdos matemáticos e físicos que ainda não domina. O professor então deverá argumentar que o objetivo não é compreender tais conteúdos nesse momento, mas sim ter consciência de que, no cerne de um problema clássico de sua futura área de atuação profissional, estão uma série de conceitos que ele estudará em disciplinas básicas de Matemática e Física e dos quais precisará se apropriar. De qualquer maneira, o professor poderá dar uma ideia intuitiva para os alunos especialmente a respeito do que é uma equação diferencial, principal ideia matemática para a efetiva obtenção da expressão do deslocamento horizontal u em função do tempo.

Finalizada essa primeira etapa em sala de aula, o docente pode propor, em um ambiente virtual de aprendizagem, atividades individuais visando, de maneira descontextualizada, trabalhar com aspectos relativos às funções exponenciais e trigonométricas, suas respectivas representações gráficas e com a noção de produto de funções. O objetivo de tais atividades será recuperar, na estrutura cognitiva dos estudantes, conceitos essenciais para a continuidade do trabalho, em sala de aula, com o EC.

O próximo encontro presencial entre as equipes e o professor será destinado à resolução do evento. Neste momento, caso os estudantes enfrentem obstáculos que os impeçam de avançar rumo à resposta do EC, o docente poderá realizar intervenções, no sentido de auxiliá-los, mas sem fornecer-lhes a solução. Uma das estratégias que pode adotar é propor questões/atividades auxiliares, como por exemplo:

- ✓ Caso você não consiga construir a representação gráfica de u, inicialmente represente graficamente as funções cujas expressões algébricas são dadas por $f(t) = e^{-0,5t}$ e $g(t) = 0{,}10\cos(10\mathrm{t} - 0{,}05)$.
- ✓ Qual seria a resposta do EC caso $u(t) = g(t) = 0{,}10\cos(10t - 0{,}05)$?
- ✓ Como você poderia obter a função u a partir das funções f e g?
- ✓ Finalmente, qual a representação gráfica de u?
- ✓ Analise a representação gráfica de u, comparando-a com a representação gráfica de g e buscando similaridades e diferenças entre os comportamentos de tais funções.
- ✓ A representação gráfica de u é coerente com a situação presente no EC?
- ✓ Analisando essa representação, que considerações você poderia fazer em relação ao comportamento do pórtico decorrido certo intervalo de tempo após a retirada da força estática aplicada?
- ✓ Qual o significado, no contexto do problema, para $u(t) < 0$, $u(t) = 0$ e $u(t) > 0$?
- ✓ Qual o comportamento de u quando os valores de t tendem ao infinito?
- ✓ Como identificar os ciclos e as amplitudes da função u a partir de sua representação gráfica?
- ✓ A partir do que foi discutido, qual é então o número de ciclos necessários para que a amplitude do movimento se reduza a aproximadamente 80% da amplitude inicial?

Após o final da aula e o fechamento do evento, solicitar que os estudantes produzam, individualmente, um relatório detalhado da atividade realizada, buscando explicitar, além das etapas de resolução do EC, os obstáculos enfrentados, as vinculações que estabeleceram entre os conteúdos matemáticos e aqueles específicos da Engenharia Civil presentes no problema e também os seus principais aprendizados oportunizados pela resolução do EC.

Considerações Finais

A partir dos estudos que, desde 2015, estamos desenvolvendo com base nos pressupostos da MCC e da identificação, em pesquisas anteriores, de situações de diferentes habilitações da Engenharia que podem inspirar a construção de EC, optamos, neste trabalho, por apresentar um evento elaborado a partir de um problema clássico da Engenharia Civil e uma possível organização didática com vistas a ser desenvolvida em aulas de uma disciplina inicial de Cálculo, com o objetivo de revisar conceitos anteriormente trabalhados na Educação Básica, mas sob um novo olhar: o das aplicações de tais conteúdos em disciplinas específicas da Engenharia e na futura área de atuação profissional do graduando.

Futuramente, aplicaremos efetivamente o evento com estudantes de uma disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral e confrontaremos os dados obtidos com a organização didática aqui apresentada, propondo, caso necessário, ajustes e refinamentos da proposta. Buscaremos ainda indícios da eficácia ou não, em termos de aprendizagem dos estudantes, da utilização desse tipo de EC junto àqueles que estão ingressando nos cursos universitários.

Concluímos esse trabalho, ressaltando uma dificuldade intrínseca à utilização de situações específicas da Engenharia em aulas de Matemática, especialmente naquelas ministradas no início dos cursos de graduação, que é o fato dos EC produzidos a partir delas envolverem muitos conteúdos matemáticos e do contexto das Engenharias que ainda não são de domínio dos estudantes. Nesse sentido, precisamos nos atentar para não corrermos o risco de simplificar demasiadamente a questão e torná-la tão desinteressante ao aluno quanto um problema usual em sala de aula ou, de maneira oposta, não realizarmos qualquer tipo de adaptação, partindo da premissa de que apresentarmos um problema contextualizado garante a motivação do estudante, e, desta forma, torna-la inacessível ao nosso público-alvo.

Referências e bibliografia

Camarena, P. G. (2010). Aportaciones de Investigación al Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería. Recuperado em 28 de janeiro, 2016, de http://www.ai.org.mx/ai/archivos/ingresos/camarenagallardo/dra._patricia_camarena_gallardo.pdf

Camarena, P. G. (2013). A treita anõs de la teoria educativa “Matemática en el Contexto de las Ciencias”. *Inovación Educativa*, 13(62), 17-44. Recuperado em 20 setembro, 2018, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-26732013000200003

Camarena, P. G. (2017). Didáctica de la matemática en contexto. Educação Matemática Pesquisa, 19(2), 1-26. doi: 3156.2017v19i2p1-26

Lima, G. L., Bianchini, B. L., & Gomes, E. (2018). Conhecimentos docentes e o Modelo Didático da Matemática em Contexto: reflexões iniciais. *Educação Matemática e Debate*, 2(4), 116-135. doi: https://doi.org/10.24116/emd25266136v2n42018a06

Mazzilli, C. E. N., André, J. C., Bucalem, M. L.& Cifú, S. (2016). **Lições em mecânica das estruturas: dinâmica.** São Paulo: Blucher.

Pauletti, R. M. O. (2010). **Pórticos**. *Palestra/Notas de aula* da Universidade de São Paulo. Recuperado em 02 abril, 2018, de http://www.lmc.ep.usp.br/disciplinas/pef2602/pef2602-2010-porticos.pdf

Potencialidades do Aprender com Modelagem

Zulma Elizabete de Freitas **Madruga**
Universidade Estadual de Santa Cruz
Brasil
betefreitas.m@gmail.com
Maria Elizabete de Souza **Couto**
Universidade Estadual de Santa Cruz
Brasil
melizabetesc@gmail.com
Valderez Marina do Rosário **Lima**
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
valderez.lima@pucrs.br

Resumo

Este artigo objetiva apresentar um modelo metodológico construído a partir de uma pesquisa que analisou as relações entre processos criativos de diferentes profissionais e procedimentos de modelagem (matemática). O modelo, chamado *aprender com modelagem*, toma por base ideias teóricas de Bassanezi (2010) e Biembengut (2016). As análisesrealizadas com narrativas de10 profissionais de diferentes ramos, incentivaram a publicação desses resultados teóricos. Indicam-se caminhos para utilizar como prática pedagógica a modelagem por meio do *aprender com modelagem,* na busca por desenvolver criatividade e comunicação, no intuito de valorar a cultura e entorno dos estudantes. Como resultados apresentam-se as categorias: *Intenção* – escolha da temática a ser desenvolvida; *Projeção* – familiarização com o assunto, busca por subsídios; *Criação* – elaboração de esboços e ‘produto’ (modelo); *Produto* – validação e avaliação do modelo. Considerações e recomendações acerca da educação sugerem maneiras de utilizar o *aprender com modelagem* como alternativa pedagógica para qualquer ano de escolarização e disciplina.

Palavras-chave: educación matemática, modelagem matemática, aprender com modelagem, processos criativos, diversidade cultural.

Considerações Iniciais

A valorização das diferentesculturas é uma indicação dos documentos oficiais para toda a Educação Básica no Brasil.Giroux (1986) afirma que a cultura é um construto para compreensão das relações complexas entre a escolarização e a sociedade: "[...] a cultura é vista como um sistema de práticas, um modo de vida que constitui e é constituído por um jogo dialético entre comportamento específico de classe e circunstâncias de um determinado grupo social" (Giroux, 1986, p.137). O comportamento cultural trata-se de uma expressão que origina as artes e as técnicas como manifestações do fazer, integrando à realidade "artefatos e, por outro lado, as ideias, tais como religião, valores, filosofias, ideologias e ciência como manifestações do saber, que se incorporam à realidade na forma de 'mentefatos'" (D'Ambrosio, 1986, p. 47).

A cultura popular é constituída pelas formas de ser, agir, pensar e se expressar dos diferentes grupos. Suas práticas e ações sociais advêm de crenças, valores e regras morais que permeiam e identificam um agrupamento. A identidade cultural e a manifestação resultante em cada grupo derivam manifestações e festas populares diversas − que expressam a identidade própria −, advindas da mescla de diversas histórias, costumes, valores e culturas (Madruga & Biembengut, 2016).

Os profissionais que atuam nas diferentes manifestações culturais, produzem distintos produtos, e têm na *criatividade* o impulso para realização de seus trabalhos. Conforme Ostrower (2014), *criar* é conceber forma a algo novo, repleto de novas interpretações que se compõem na mente das pessoas, abarcando o relacionar, ordenar, configurar e significar. É dar existência, dar origem, gerar, inventar, produzir. A criação de algo acontece em todos os momentos, nas mais diversas profissões. A *arte*(atividade humana relacionada às manifestações de ordem estética) é expressa não somente nas manifestações populares, mas em todas as profissões.

A arte e os processos criativos são constantes em vários ramos profissionais. Dessa forma, busca-se conhecer o processo de criação de diversos profissionais para, posteriormente, poder dispor de indicações passíveis de serem postas em prática na Educação Básica, em particular, e, assim, instigar o interesse dos estudantes a aprender a pesquisar por meio da modelagem. Assim, o objetivo deste artigoé apresentar um modelo metodológico construído a partir de uma pesquisa que analisou as relações entre os processos criativos de diferentes profissionais e procedimentos de modelagem (matemática).

Marco Teórico

A modelagem na educação (também chamada de modelação), surge das ideias de modelagem matemática, propostas no Brasil inicialmente pelos professores/pesquisadores Aristides Camargo Barreto, Ubiratan D'Ambrosio e Rodney Bassanezi,os quais deram impulso significativo para a implantação da modelagem no cenário de ensino brasileiro[1].

Modelagem matemática, na visão de Bassanezi (2010. p. 45), "trata-se de um processo dinâmico de busca de modelos adequados, que sirvam de protótipos de alguma entidade". Para o autor, modelo matemático consiste em um conjunto de relações matemáticas e símbolos que, de alguma maneira, representam o objeto estudado. De acordo com o autor, a modelagem

[1]Disponível em: http://www.furb.br/cremm/portugues/cremm.php?secao=Precursores Acesso em 30 de julho de 2018.

(matemática)[2] faz uma ligação entre as representações e o mundo. Bassanezi (2010) a define como um processo dinâmico, utilizado para obter e validar modelos (matemáticos). Ele a considera uma forma de abstração e generalização com intuito de prever tendências. "A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual" (Bassanezi, 2010, p. 24). O autor afirma que o benefício da modelagem (matemática) é possibilitar, por meio de cálculos, validar o modelo, efetuar previsões sobre o comportamento do sistema e tentar controlá-lo, uma vez que o processo permite uma aproximação da realidade sobre apresentações de um sistema ou parte dele.

De acordo com Biembengut (2014):

> Modelagem é o processo envolvido na elaboração de modelo [...]. Trata-se de um processo de pesquisa. A essência deste processo emerge na mente de uma pessoa quando alguma dúvida genuína ou circunstância instigam-na a encontrar uma melhor forma para alcançar uma solução, descobrir um meio para compreender, solucionar, alterar, ou ainda, criar ou aprimorar algo. E em especial, quando a pessoa tem uma percepção que instiga sua inspiração. (Biembengut, 2014, p. 21).

Biembengut (2016) delineou um método para o ensino de ciências e matemática denominado Modelagem na Educação – Modelação, dividido em três etapas: *percepção e apreensão*; *compreensão e explicitação*; e *significação e expressão*.

Percepção e apreensão

Percepção é um processo complexo que consiste em receber, identificar e classificar informações provenientes do meio ou do próprio corpo. É a primeira fonte de conhecimento necessária para que se possa fazer uma descrição do meio, uma decodificação e representação (apreensão). Posteriormente, a percepção tem relação com o pensamento, com a resolução de problemas e com os processos de decisão das pessoas.

Compreensão e explicitação

A compreensão pode ser considerada a ligação entre a percepção e o conhecimento. Compreender significa expressar, mesmo que intuitivamente, uma sensação. As percepções ou informações recebidas são selecionadas pela mente que, sobretudo, processa o que for interessante ou que está disponível para gerar ideias, compreensões e entendimentos.

Significação e expressão

Depois de compreendidas e explicitadas as informações ou percepções, há uma busca para representá-las ou traduzi-las. Estas representações são feitas por meio de símbolos ou modelos, e podem ser mentais ou externas. Quando uma compreensão passa a ser significativa para a mente, pode-se dizer que se transformou em conhecimento, ou seja, ocorreu a aprendizagem. Não são todas as percepções que geram aprendizagem, pois aprender significa mais do que armazenar informações, implica ter conhecimento.

Pressupostos Metodológicos

Este artigo apresenta resultados teóricos de uma pesquisa qualitativa (Bogdan & Biklen, 2010), a qual foi utilizado como procedimento metodológico o mapeamento na pesquisa

---

[2] O termo (matemática) expresso desta forma é uma denominação dos autores do artigos, e não dos teóricos, os quais utilizam apenas modelagem matemática.

educacional (Biembengut, 2008). Os dados advieram de duas fontes: pessoas e documentos. A fonte desta pesquisa é oriunda principalmente das pessoas, 10 profissionais que atuam em diferentes áreas (carnavalesco, figurinista, escultor, coreógrafo, compositor, arquiteta, designer de unhas artísticas, modista, pesquisador de ciências exatas e pesquisador de ciências humanas). Destas pessoas advieram: 1) as *entrevistas*, que perfizeram um total de aproximadamente 40 horas de gravação; 2) os dados coletados por meio de cerca de 60 visitas de *observações* das pessoas no processo de criação; e 3) os *documentos* e produções por elas fornecidas.

As *entrevistas,* por meio de narrativas,foram realizadas na maioria dos casos nos locais de trabalhos dos entrevistados, onde cada profissional narrou seu processo de criação, assim como histórias de vida. Em alguns casos, foi necessário mais de um momento de entrevista. Em um primeiro momento, o profissional falou sobre suas experiências e seu trabalho e, em outro momento, foi realizada uma entrevista mais direcionada, em que algumas perguntas foram feitas pela pesquisadora de modo a facilitar a análise do processo de cada uma das pessoas colaboradoras da pesquisa.

As *observações*realizadas nos espaços de trabalho, criação e produção de cada um dos profissionais entrevistados foram um dos tipos de levantamento de dados utilizado nesta pesquisa. Foram selecionados como colaboradores 10 profissionais que criam em diferentes áreas. Cinco deles têm relação direta com a manifestação cultural carnaval, por se tratar de um ambiente rico em criações.

Os *documentos* advieram de duas fontes: oriundos de busca teórica realizada pela pesquisadora e fornecidos pelas pessoas colaboradoras. Esses documentos basicamente consistem em: modelos e esboços, fotografias diversas (tanto de esboços como da produção finalizada), projetos e apostilas. Aliados às observações (fotos, vídeos e anotações no diário de campo); os documentos cedidos por cada um dos entrevistados (modelos por eles elaborados, principalmente); e as entrevistas por narrativas, foram suficientes para a análise.

Síntese dos resultados

Da análise emergiram quatro categorias: intenção, projeção, criação e produto. Estas, foram comparadas as etapas de modelagem (matemática) proposta por Biembengut (2016). Em um primeiro momento, o processo de todos os profissionais entrevistados, partem da escolha de determinada temática, ou problema, e passa: pela busca por subsídios ou levantamento de dados; pela construção (na maioria dos casos) de modelos mentais; por esboços, rascunhos e/ou protótipos; por modelos físicos expressos por meio de desenhos e/ou esquemas; e pela construção (quando necessário) do material que será apresentado às pessoas para avaliação e validação. A avaliação é feita não apenas no momento final, mas no decorrer de todo processo, e, caso haja necessidade, volta-se à(s) fase(s) anterior(es) para reformulações e/ou adaptações.

Estes procedimentos utilizados pelas pessoas para criar um produto, são similares aos processos de modelagem (matemática). Sintetizando estas relações, e comparando-as com as categorias de análise tem-se:

- *Intenção* – escolha do tema (Bassanezi, 2010); interação: reconhecimento da situação-problema – delimitação do problema (Biembengut, 2007); percepção e apreensão (Biembengut, 2016).
- *Projeção* – familiarização do assunto – coleta de dados e formulação de modelos (Bassanezi, 2010); familiarização com o assunto a ser modelado – referencial teórico e matematização – formulação do problema – hipóteses (Biembengut, 2007); percepção e apreensão; e,compreensão e explicitação (Biembengut, 2016).

- *Criação* – formulação do problema e resolução (Bassanezi, 2010); matematização – formulação do modelo matemático – desenvolvimento e resolução do problema a partir do modelo – aplicação (Biembengut, 2007); compreensão e explicitação; e, significação e expressão (Biembengut, 2016).
- *Produto* – validação e avaliação (Bassanezi, 2010); modelo matemático – interpretação da solução e validação do modelo – avaliação (Biembengut, 2007); significação e expressão (Biembengut, 2016).

Dessa forma, pode-se dizer que os procedimentos utilizados pelos profissionais entrevistados na execução de seus trabalhos criativos, expressos pelas categorias *intenção*, *projeção*, *criação* e *produto*, são similares aos procedimentos utilizados por diversos autores na modelagem matemática. Entende-se que tanto os processos de modelagem prescritos por Bassanezi (2010, 2015) e Biembengut (2007, 2014, 2016), quanto o *"aprender com modelagem"*,descrito pelas categorias − '*intenção*', '*projeção*', '*criação*' e '*produto*'−, não são disjuntos, ou seja, não se tratam de processos lineares que consistem na superação de etapas. Contrariamente, trata-se de um processo análogo a uma engrenagem, no qual as 'correias' se juntam e trabalham em sintonia. Isso quer dizer que há um entrelaçamento entre as etapas que possibilita um 'ir e vir' conforme necessidade. A figura 1 apresenta esta ideia:

*Figura 1***.**Entrelaçamentos do *"aprender com modelagem"*. Madruga (2016)

Acredita-se que a utilização destes procedimentos no planejamento escolar, ou seja, da modelagem como método de ensino com pesquisa,pode possibilitar ao estudante se interessar, também, por saber fazer, saber criar, isto é, saber pesquisar para produzir algo que possa contribuir com o meio que vive ou pretende atuar (Madruga & Biembengut, 2016).

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC traz a ideia da criação de situações de trabalho mais colaborativas, que se organizem com base nos interesses dos estudantes e favoreçam seu protagonismo. Uma delas é o desenvolvimento dos processos criativos e colaborativos, baseados nos interesses de pesquisa dos estudantes e na "investigação das corporalidades, espacialidades, musicalidades, textualidades literárias e teatralidades presentes em suas vidas e nas manifestações culturais das suas comunidades, articulando a prática da criação artística com a apreciação, análise e reflexão sobre referências históricas, estéticas, sociais e culturais" (Brasil, 2017, p. 472).

Nesse sentido, as diferentes manifestações artísticas podem contribuir com os processos educacionais nas mais diversas disciplinas. O estudo de distintos processos criativos, por exemplo, permite ao estudante interar-se de conceitos de diferentes áreas do conhecimento e, ao mesmo tempo, conhecer e valorar a cultura de cada grupo social.D'Ambrosio (1986) destaca elementos essenciais da evolução da matemática e seu ensino, elementos arraigados a fatores socioculturais. "Isto nos conduz a atribuir à Matemática o caráter de uma atividade inerente ao ser humano, praticada com plena espontaneidade, resultante de seu ambiente sociocultural e consequentemente determinada pela realidade material na qual o indivíduo está inserido" (D'Ambrosio, 1986, p. 36).

A utilização dos princípios de modelagem mostra-se como uma possibilidade, buscando a formação de sujeitos capazes e sensíveis na identificação e na solução das questões atuais. Além disso, ambientes que proporcionem esses atributos são potenciais espaços para o desenvolvimento da criatividade. Garantir esses espaços em ambientes formais de ensino deve ser tarefa a ser cumprida na composição curricular.

Potencialidades do Aprender com Modelagem: como utilizar em sala de aula

De acordo com Bassanezi (2015), a utilização da modelagem no processo de ensino e de aprendizagem propicia a oportunidade de exercer a criatividade, não apenas em relação às aplicações das habilidades matemáticas, mas, principalmente, na formulação de problemas originais. A partir das ideias de Bassanezi (2015), Biembengut (2016) começa a ampliar o conceito de modelagem matemática para modelagem nas ciências e modelagem na educação – modelação, além de trazer a ideia de utilizar modelagem desde o início da Educação Básica, com o intuito de potencializar e desenvolver a criatividade nos estudantes desde os anos iniciais.

Para isso, propõe-se um *"aprender com modelagem"*, ou seja, utilizar as ideias de modelagem (matemática) para promover a aprendizagem dos estudantes de qualquer disciplina com vistas ao desenvolvimento de modelos, sejam eles matemáticos ou não, instigando a criatividade e a pesquisa em sala de aula.O *"aprender com modelagem"*, conforme se sugere, é divido em quatro etapas, as quais foram observadas no trabalho dos profissionais entrevistados: *intenção*, *projeção*, *criação* e *produto*. A saber:

- Intenção: é a fase inicial. O momento em que as ideias emergem e surge o tema que será desenvolvido. Todo processo criativo parte de um tema, de uma intenção. Da mesma forma, para *"aprender com modelagem"* é necessário que haja uma temática, seja ela específica e relacionada a algum conteúdo curricular (o que não é recomendável), ou relacionada a qualquer temática do interesse dos estudantes, sejam elas culturais, sociais, econômicas, ambientais, ou um problema específico de qualquer natureza enfrentado pela comunidade na qual a escola está inserida. Essas últimas são as mais recomendadas, pois, além de instigarem o interesse dos estudantes, estão inseridas em suas realidades.

Cabe professor a tarefa de conduzir a ação e de, no decorrer das fases, direcioná-la, por meio de indagações e orientações para os conteúdos curriculares das diversas disciplinas envolvidas. Esses conteúdos não aparecem de forma enfileirada, como nos currículos escolares, mas, sim, devem ser estudados na medida em que vão emergindo.Conforme D'Ambrosio (2001), o cotidiano está impregnado de saberes e fazeres próprios da cultura. "A todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo, e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à sua cultura" (D'Ambrosio, 2001, p.22).

- Projeção: é a fase em que o estudante começa a interar-se com a temática do estudo, ou seja, com a *intenção,* em que há uma busca por subsídios que sustentem teoricamente a pesquisa. Nesta etapa inicia a fase em que os conteúdos, não de forma linear, começam a emergir, e os estudantes passam a se inteirar dos diversos temas. É uma pesquisa teórica acerca do tema, em que professor e alunos investigam juntos e coletam o maior número possível de dados.

É quando a criatividade começa a fluir e são tomadas decisões importantes que os acompanharão até o final do processo. Nesta etapa começa a se delinear o caminho que os estudantes seguirão, é quando surge na mente a projeção do produto (modelo) que irão criar, seja este produto uma invenção nova e requintada; uma maquete que mostre suas realidades; uma equação matemática; uma composição musical; uma peça de teatro; uma dança; um artigo científico; um texto simples; uma peça de roupa; um desfile de escola de samba; um desenho; um mapa de sua realidade; um projeto de qualquer âmbito (social, cultural, ambiental, entre outros); uma sugestão de melhora para sua escola ou bairro; entre tantos outros; enfim, depende da criatividade dos estudantes.

- ***Criação***: é a fase em que o estudante efetivamente 'cria' seus modelos. Momento em que aparecem as primeiras produções por meio de 'tentativas' (esboços, rascunhos, desenhos, etc.), para posteriormente serem elaboradas de maneira definitiva. É a etapa de formulação e resolução do modelo (Bassanezi, 2010; Biembengut, 2007).

Esta é a fase em que os estudantes 'passam para o papel' tudo o que projetaram na fase anterior, momento em que os conteúdos curriculares começam a emergir, em que há uma sistematização de conceitos, mediados e auxiliados pelo professor, que assume o papel de 'figura secundária' no processo, deixando o 'protagonismo' para o estudante. Nesta etapa poderá ser necessário o auxílio de outros professores especialistas, dependendo da temática em questão, o que sugere um trabalho coletivo por parte dos professores na aprendizagem do estudante.

- Produto: é a fase em que ocorre a validação e avaliação do modelo elaborado pelos estudantes (Bassanezi, 2010; Biembengut, 2016). Cabe salientar que não se trata apenas da avaliação da aprendizagem, pois esta ocorre durante todo processo, desde a fase de intenção. A avaliação que se menciona aqui é a do produto, ou seja, do modelo elaborado, para verificar se ele é válido e reponde ao problema inicialmente proposto.

Se a solução, ou seja, o *produto* não for satisfatório, pode-se voltar a qualquer uma das etapas anteriores e rever a *criação*, a *projeção*, ou até mesmo a *intenção*. Dessa forma, o *'aprender com modelagem'* não se configura como um processo linear, muito pelo contrário, é um processo que pode ser cíclico, articulando as fases na medida em que haja necessidade. Ao finalizar o processo, é relevante expressar os resultados, a fim de que possa valer à outras pessoas que tenham interesse no assunto, assim como para o próprio estudante (Biembengut, 2014).Por meio do *"aprender com modelagem"* se podem aprofundar questões potencializadoras da criatividade, na busca por valorização do conhecimento cultural das comunidades, primando pelo desenvolvimento do potencial criativo dos estudantes e, com isso, possibilitando que aprendam conceitos de todas as disciplinas curriculares em qualquer fase de escolarização.

Considerações Finais

Esta artigo teve como objetivo apresentar um modelo metodológico construído a partir de uma pesquisa que analisou as relações entre os processos criativos de diferentes profissionais e procedimentos de modelagem (matemática). A análise dos resultados de uma pesquisa que serviu de base para essa discussão teórica, (Madruga, 2016) comprova que as pessoas, em variadas profissões, utilizam as etapas da modelagem (matemática). Observou-se que os 10 profissionais entrevistados, embora apresentando várias diferenças − profissionais, sociais, culturais e de escolaridade −, recorrem ao mesmo processo para produzir o seu modelo, o seu produto.

Desse modo, nos parece possível que a escola também as utilize no processo de ensino e aprendizagem. Assim, a proposta desta discussão é ampliar as ideias de Biembengut (2016), bem como a dos demais pesquisadores da área, e tratar a modelagem na educação de uma forma ampla, que possa ser utilizada em qualquer componente curricular, desde os anos iniciais da Educação Básica até o Ensino Superior.

A ideia é trabalhar com as raízes de modelagem de Bassanezi (2010) e com a concepção de Biembengut (2016) que traz a ideia da modelagem como um método de ensino com pesquisa aplicado à educação em qualquer área do conhecimento, propondo novas fases que fazem consonância com as de Biembengut (2007, 2014), organizando as fases em agrupamentos que explicitam a linha tênue que as separam e por vezes se confundem, evidenciando que não são etapas estanques, e sim que se entrelaçam durante o processo, gerando uma rede de engrenagens que demonstra que as etapas não são disjuntas, podendo voltar às etapas anteriores para serem refeitas quantas vezes for necessário.

A proposta em questão é trabalhar com qualquer modelo, e não apenas com modelos matemáticos, e que possam ser utilizados por qualquer pessoa. A pesquisa mostrou que as pessoas recorrem a modelos e produzem algo que será avaliado e apreciado por diversas pessoas. Cada pessoa traz consigo valores culturais. E cabe à educação formal fazer essa ponte entre a modelagem e a cultura. Assim, ideia é apresentar um novo olhar, ampliar a concepção de modelagem, e mostrar que ela é utilizada em diversos ramos profissionais, instigando assim sua aplicação e desenvolvimento em qualquer ano de escolaridade, tendo em seu viés a questão da cultura, bem como o desenvolvimento da criatividade.

Referências

Bassanezi, R. C.(2010).*Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.* 3ª ed. 2ª reimpressão São Paulo: Contexto.

______. (2015). *Modelagem Matemática teoria e prática.* São Paulo: Contexto.

Biembengut, M. S. (2008).*Mapeamento na Pesquisa Educacional.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna.

______. (2007). *Modelagem matemática & Implicações no Ensino e Aprendizagem de Matemática.* 3ª ed. Blumenau: Edifurb.

______. (2014).*Modelagem Matemática no Ensino Fundamental.*Blumenau:Editora da FURB.

______. (2016).*Modelagem na Educação Matemática e na Ciência*. São Paulo: Livraria da Física.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2010).*Investigação Qualitativa em Educação.* Porto, Portugal: Editora Porto.

Brasil. (2017).*Base Nacional Comum Curricular* - BNCC. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso: 3 jun.2017.

D'Ambrosio, U. (1986). *Da Realidade à Ação: reflexões sobre educação e matemática*, São Paulo: Summus.

______. (2001).*Etnomatemática.* Elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica.

Giroux, H. (1986).*Teoria crítica e resistência em educação: Para além das teorias de reprodução.* Trad. Ângela Maria B. Biaggio. Petrópolis: Vozes.

Jacoby, S. S., & Kowalik, J. S. (1980).*Mathematical modelling with computers*. NJ: Prentice Hall.

Madruga, Z. E. F. (2016). Processos criativos e valorização da cultura: possibilidades de aprender com modelagem. *Tese de Doutorado*. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, RS.

Madruga, Z. E. F., & Biembengut, M. S. (2016).*Modelagem & Aleg(o)rias: um enredo entre cultura e educação.* Curitiba: Appris.

Ostrower, F. (2014).*Criatividade e processos de criação*. Petrópolis: Vozes.

Conectando la matemática con la vida cotidiana

José Vidal **Jiménez** Ramírez
Universidad Autónoma de Sinaloa
México
vidaljr@uas.edu.mx
Faustino **Vizcarra** Parra
Universidad Autónoma de Sinaloa
México
faustinovizcarra@uas.edu.mx

Resumen

Matematizar figuras cotidianas sugeridas por estudiantes mediante la aplicación DESMOS para Smartphone, identificando los trazos que la forman y relacionarlos con la línea recta, circunferencia, parábola y/o elipse, y a su vez, con la ecuación general de segundo grado mediante la manipulación de sus parámetros. Y así, fomentar el gusto por las matemáticas y desarrollar en los estudiantes la comprensión de gráficas matemáticas.

Palabras clave: comprensión de gráficas, evaluación, matematizar y modelo matemático.

Problema de investigación

La comprensión de las gráficas es importante en la vida académica y cotidiana, esto va, desde interpretar gráficas en un contexto matemático, así como gráficas estadísticas en medios de comunicación, hasta la interpretación de un electrocardiograma.

Sin embargo, más que por su nivel de complejidad, la brecha entre las representaciones gráficas y el estudiante, en parte se debe a la estrategia que planea el docente para llevarla al aula, en la que enfatiza procedimientos y algoritmos, además de trabajar con graficas centradas en el contexto matemático, que al final dicho objeto matemático no le significa al estudiante, pues, poco ha cambiado lo que sucede en el aula con la introducción del enfoque por competencias en el nivel medio superior, es decir, se le sigue dando más importancia al objeto que a las prácticas de referencia situada. Así que, en la búsqueda de alternativas para lograr que a los estudiantes les guste interpretar las gráficas que se obtienen a través de manipular los parámetros de la ecuación de segundo grado, surge la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué nivel de comprensión de la representación gráfica de la ecuación general de segundo grado logran los estudiantes de segundo grado, con apoyo de la aplicación DESMOS para manipular expresiones algebraicas a través del *smartphone*?

Objetivo

Determinar el nivel de comprensión de la representación gráfica de la ecuación general de segundo grado que logran los estudiantes de segundo grado, con apoyo de la aplicación DESMOS para manipular expresiones algebraicas a través del *smartphone*.

Marco teórico

La aplicación DESMOS se utiliza para matematizar figuras, y se implementa con éxito en proyectos de matemáticas realizados por estudiantes de nivel bachillerato (Evert, 2015). Se entiende por matematización, la construcción de un modelo matemático. Y de acuerdo con Freudenthal (1991), la matematización horizontal implica ir del mundo de la vida al mundo de los símbolos, es decir, que el estudiante describa los problemas desde el mundo real al matemático. Y para determinar el nivel de comprensión de gráficas, se utiliza la clasificación de Curcio (1989), la cual consta de los siguientes niveles cognitivos: leer los datos, leer dentro de los datos y leer más allá de los datos.

Marco metodológico

El estudio realizado es de corte cualitativo con un objetivo de tipo interpretativo, en el cual se siguieron tres fases generales: de diagnóstico, de instrumentación y de evaluación. Y se llevó a cabo en un grupo del bachillerato, en el que participaron estudiantes de entre 15 y 17 años de un grupo de segundo grado del turno vespertino.

Resultados

Se observa que el 65% de los estudiantes logran matematizar una imagen compuesta por líneas rectas, circunferencias, parábolas y elipses, a través de manipular los parámetros de la ecuación general de segundo grado, por lo que su nivel de comprensión de gráficas se ubica en leer entre las gráficas. Y solo un 8% logra utilizar otras gráficas que no se pueden generar mediante la ecuación general de segundo grado, es decir, su nivel de comprensión de gráficas se ubica en leer más allá de las gráficas.

Conclusiones

A los estudiantes les gusta esta forma trabajar con las gráficas para matematizar figuras de la vida real, y hay estudiantes que se proponen excelentes retos para matematizar figuras con un alto grado de dificultad, en las que además se requieren gráficas diferentes a las que se pueden generar a través de la ecuación general de segundo grado.

Así pues, los estudiantes logran asociar los trazos que forman a una figura con líneas rectas, circunferencias, parábolas y elipses; y a su vez, asocian dichas curvas con la ecuación general de segundo grado a través de la manipulación de sus parámetros mediante la aplicación DESMOS. En este sentido, los estudiantes ven el acercamiento del mundo real con las matemáticas, como una forma de darle significado a esos símbolos matemáticos que para ellos solo significaban letras y números.

Referencias y bibliografía

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: NCTM.

Evert, D. (2015). Graphing Projects with Desmos. *MATHEMATICS teacher, 108* (5), 388-391.

Freudenthal, H. (1991) *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

La tecnología digital como herramienta mediadora para la modelización e interpretación de problemas en contexto: el caso del plano inclinado y la cicloide invertida

Freddy Yesid Villamizar Araque
freddymatedu@gmail.com, fvillamizar@cinvestav.mx
Alfredo Martínez Uribe
alfymago@hotmail.com , amartínezu@cinvestav.mx
Carlos Armando Cuevas Vallejo
ccuevas@cinvestav.mx
Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México

Resumen

En el presente trabajo se plantea la modelización como una alternativa para resolver situaciones en contexto de las matemáticas y la física. Particularmente se propone el problema del rodamiento simultáneo de dos bolas, una sobre media cicloide invertida y otra sobre un plano inclinado y explorar las ideas previas acerca del tiempo, velocidad y energía presentes en dicho experimento, así como la habilidad matemática para la interpretación de gráficas, obtenidas en la modelización del fenómeno, mediada con la tecnología digital. En los resultados de la actividad aplicada a estudiantes de maestría en educación matemática, se encontró que, la tecnología digital bajo una secuencia didáctica apoya el trabajo experimental simplificando los procesos de modelización de un fenómeno físico, y promueve el uso de las representaciones para resolver una situación problema.

Palabras clave: modelización, plano inclinado, braquistócrona, cicloide, tecnologías digitales.

Introducción

Una de las maneras que Galileo utilizó para interpretar la caída libre fue simplificada mediante el uso de planos inclinados y el uso de las proporciones que surgieron de la regla del valor medio geometrizada por Oresme (Drake, 1975; Clavelin, 1996; Hawking, 2003; Feynman, 2008). Por otra parte, la cicloide fue considerada por los antiguos matemáticos como la Helena de la geometría por ser una de las curvas más bellas, pero esa belleza, no radica tanto en su apariencia sino en las propiedades que esta posee. El problema de la cicloide planteado por Johann Bernoulli fue el siguiente: si tenemos dos puntos fijos A y B (A está a mayor altura y B a menor) ¿cuál debe ser el camino por el que una bola metálica pulida, ruede en el menor tiempo? (Figura 1) (Boyer, 1986; Portal Académico CCH, 2008; Cosmos y Matemáticas, 2013).

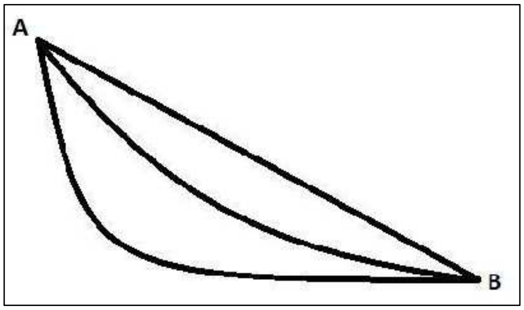


Figura 1. Ejemplos de trayectorias por la cual puede rodar una bola

Este tipo de situaciones por lo general inducen al estudiante a respuestas respecto del movimiento, situadas en las teorías aristotélicas o del ímpetu (McDermott, 1984; Saltiel y Viennot, 1985), ideas que por lo general no son acordes al conocimiento científico sino al sentido común, denominadas por algunos como *ideas previas* (Viennot, 1979). Por tal razón, nos cuestionamos lo siguiente:

- ¿Qué ideas previas manifiestan los estudiantes para interpretar la situación problema anterior sobre el rodamiento de una bola sobre un plano inclinado y otra sobre la cicloide invertida?
- ¿Cómo el uso de la tecnología digital permite al estudiante realizar procesos de modelización para interpretar una situación problema, modificando sus ideas previas?

Marco teórico

La situación problema descrita anteriormente, brinda un contexto para involucrar al estudiante dentro de una actividad donde se exploren las ideas previas sobre movimiento y posteriormente se promuevan cambios conceptuales. Las ideas previas son aquellos conocimientos que poseen los estudiantes, previos o posteriores a la enseñanza escolar, que por lo general, pueden ser erróneas, incompletas o que no concuerdan exactamente con el conocimientos científico además de ser persistentes (Viennot, 1979; Hierrezuelo y Montero, 2006). Al respecto McDermott (1984), Saltiel y Viennot (1985), afirman que muchas de las ideas que dan los estudiantes sobre el movimiento de un cuerpo (independiente del nivel académico), se pueden situar en las teorías aristotélicas o del ímpetu. Para efectos del presente trabajo, se recopilarán las ideas previas que poseen los estudiantes acerca de la caída de una pelota sobre un plano inclinado y media cicloide invertida (ver anexo 1 del apéndice A).

La situación planteada fue resuelta por Isaac Newton y su solución analítica dio origen al cálculo de variaciones (ver anexo 2). Una de las propiedades de esta curva (cicloide inverida) descrita en la solución de Newton se denomina *braquistócrona*, que proviene del griego *βραχιστοζ* (braquistos) que quiere decir, el más corto, y *χρονοζ* (cronos), tiempo; en otras palabras la braquistócrona se refiere a la curva de más corto tiempo. La solución analítica a dicha situación descrita en el anexo 2, requiere de conocimientos matemáticos más avanzados como el cálculo de variaciones, propuesto por Newton, sin embargo, consideramos que con la tecnología digital sirve como herramienta mediadora para la modelización sin tener que recurrir a la profundización de los cálculos.

La modelización o *modelling* es definida por Confrey y Maloney (2007, p. 60) como “El proceso de enfrentar una situación indeterminada, problematizarla, produciendo investigación, razonamiento, y estructuras matemáticas para transformar dicha situación”. Esencialmente puede describirse como el proceso de llevar una situación del mundo real a un modelo matemático que la represente, teniendo en cuenta que este modelo representativo permita predecir e interpretar la situación ideal del mundo real, tal y como se muestra en la figura 2 .

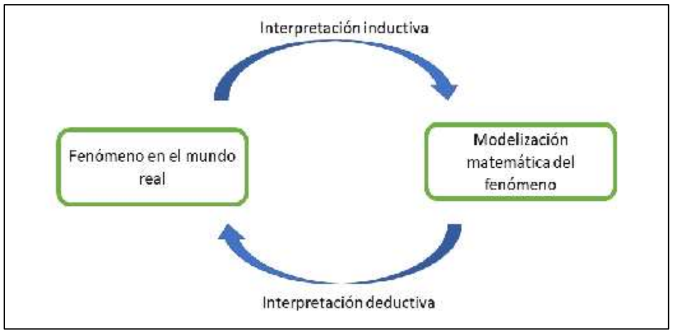


Figura 2. Modelo para la modelización matemática de las ciencias. (Lesh, 1997; Cirillo et al., 2016; Cuevas, Villamizar y Martínez 2017)

Por excelencia el modelo matemático de una situación física es algebraico; sin embargo, consideramos que, en el aprendizaje, los conceptos ya sean físicos o matemáticos presentes en un fenómeno físico, pueden manifestarse en diversas representaciones.

Para guiar la actividad en el proceso de modelización de la situación problema, utilizaremos el modelo Cuvima planteado por Cuevas, Villamizar y Martínez (2017), quienes incorporan de manera importante el uso de los dispositivos digitales (smartphone, Tablets o computadoras) como herramientas mediadoras en la experimentación de un fenómeno físico y la obtención de datos para su modelización. El modelo consta de cuatro marcos, los cuales aplicaremos para la situación planteada como se muestra en la Figura 3:

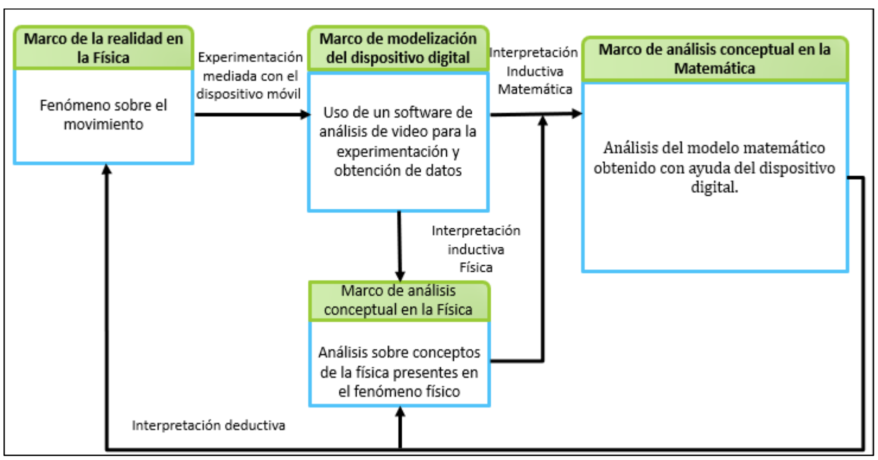


Figura 3. Adaptación del modelo Cuvima para la situación problema propuesta

- El primer marco (*Marco de la Realidad en la Física), parte de la situación problema acerca del fenómeno de movimiento de dos bolas al rodar libremente por dos superficies (plano inclinado y cicloide invertida).*
- El segundo marco (*Marco de modelización del Dispositivo Digital)*, está conectado al primero mediante un proceso de experimentación mediado con la tecnología digital. En este marco, el estudiante debe realizar el experimento apoyándose con recursos digitales para la obtención de datos del experimento. El dispositivo digital provee para la

modelización del fenómeno experimentado, datos ya sea mediante una imagen, registro tabular o alguna representación gráfica.

- El tercer marco (*Marco de Análisis Conceptual en la Física)* está conectado al tercero mediante el proceso de interpretación inductiva en la Física, el cual consiste en realizar un análisis (puede ser mediante la discusión grupal entre profesor y estudiantes) sobre los conceptos físicos implícitos en las representaciones dadas por el dispositivo digital sobre el experimento. En este caso se refiere a cómo se manifiesta la velocidad y sus cambios sobre el movimiento.
- En el cuarto marco (*Marco de Análisis Conceptual en la matemática),* se realiza mediante el proceso de interpretación inductiva en la matemática, es decir, en la obtención de un modelo matemático que represente el fenómeno. En este caso, la tecnología digital puede ayudar en la obtención de este modelo ya se mediante una expresión algebraica, una representación geométrica o gráfica. El modelo obtenido que representa el fenómeno físico en la realidad debe ser validado mediante la interpretación deductiva, es decir, usar el modelo para describir la realidad y conceptos en la física. En este caso, los estudiantes harán uso del modelo matemático para interpretar la situación problema referente a la propiedad de la curva cicloide invertida, denominada braquistócrona.

El modelo Cuvima permite guiar las actividades de modelización mediante el uso de las tecnologías digitales y hacer énfasis en los conceptos de la física y matemáticas presentes en el fenómeno experimentados, mediante los procesos de interpretación inductiva y deductiva el cual debe ser guiado en la actividad por el profesor.

Metodología

Como instrumento de medición se aplicará un test en distintos momentos y una actividad de modelización, a diez estudiantes de maestría de educación matemática, de la siguiente manera:

- Aplicación del test para recopilar ideas previas (anexo 1) en una sesión de media hora.
- Experimentación con la cicloide invertida, sin uso de la tecnología digital. Los estudiantes dejarán rodar dos bolas de las mismas características, sobre un plano inclinado y sobre la cicloide invertida, en una sesión de media hora.
- Aplicación del test, posterior a la experimentación en una sesión de media hora.
- Experimentación de la situación problema mediada con el uso de la tecnología digital. En este caso harán uso de un software de análisis de video, en una sesión de hora y media.
- Aplicación del test, posterior a la experimentación con la tecnología digital, en una sesión de una hora.

Los resultados se analizarán teniendo en cuenta qué cambios en los razonamientos de los estudiantes hay antes de la experimentación y posterior a ella con y sin uso de la tecnología digital.

Resultados

Resultados parciales sobre el pretest (antes de la experimentación)

Se observaron respuestas variadas. Para 4/10 estudiantes la pelota que rueda sobre la superficie curva o cicloide invertida llega primero al suelo y con mayor velocidad, porque la inclinación hace que acelere más. Luego 4/10, otro grupo de estudiantes consideraron que la pelota que llega primero y con mayor velocidad, es la que rueda por la superficie recta o plano inclinado porque recorre menor distancia que la superficie curva. Finalmente, 2/10 estudiantes consideraron que ambas bolas llegan al mismo tiempo y con la misma velocidad, porque las velocidades a pesar de que cambian, se pueden compensar en algún momento o simplemente porque parten simultáneamente a una misma altura, y además, porque las bolas son iguales.

Resultados posteriores a la experimentación sin tecnología digital.

Los estudiantes modificaron las respuestas referidas a que las bolas llegan al mismo tiempo y con la misma velocidad, y también los que respondieron que llegaba primero la bola sobre la superficie inclinada. Algunos explicaron que tenía que ver con que la superficie curva le “imprime” mayor velocidad a la bola, otros no daban argumentos.

Los resultados anteriores evidencian en algunos casos que los estudiantes manifiestan sus razonamientos con base en la forma de las trayectorias y en ningún caso utilizaron un razonamiento matemático para dar su explicación.

Resultados de las actividades con tecnología digital.

Los estudiantes realizaron la toma de un video sobre el experimento, el cual fue exportado a un software de análisis de video (*Tracker Physics*) para capturar los datos de posición, velocidad y aceleración del movimiento de cada bola a lo largo del tiempo. Los datos fueron llevados a una hoja de Cálculo en Geogebra (ver Figura 4).

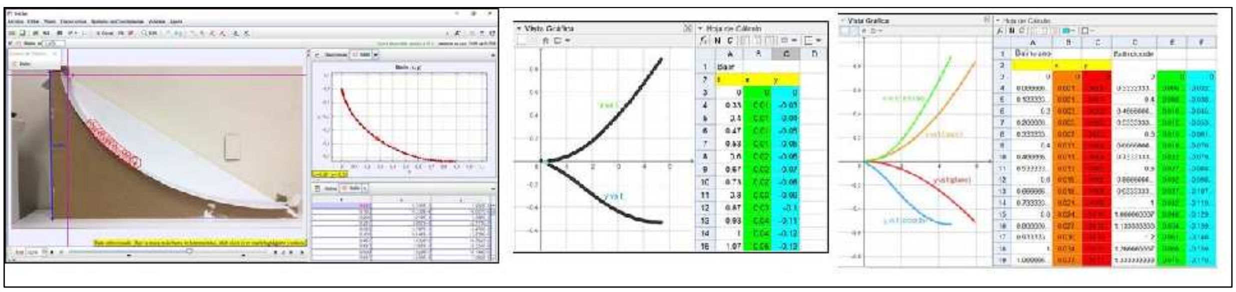


Figura 4. Modelización mediada por la tecnología digital y representaciones gráficas del movimiento de las bolas.

Los pasos de la modelización siguen los marcos del modelo Cuvima (Figura 3) y los resultados fueron discutidos al final de la actividad entre profesor y estudiantes.

Resultados posteriores a la experimentación con tecnología digital

Una vez que realizaron las actividades, se aplicó el test, observando que los estudiantes modificaron sus respuestas. Pese a que no hubo una respuesta basada en una solución analítica, los estudiantes hicieron uso de las representaciones (plano cartesiano, tabla de valores) para interpretar y dar una solución a la situación problema planteada. Se discutió acerca de la propiedad denominada braquistócrona en la cicloide invertida, a partir de las representaciones de velocidad y aceleración obtenidas mediante el uso de los dos paquetes de software.

Discusión de los resultados y conclusiones

La tecnología digital sirvió como una herramienta de apoyo en la experimentación como mediadora para la obtención de representaciones de un fenómeno físico y para la solución de una situación problema en el contexto de la física. Sin embargo, la interpretación de los conceptos tanto en la matemática y la física deben ser orientados mediante una secuencia didáctica implícita en la actividad.

El modelo Cuvima sirvió como modelo metodológico para que el profesor pudiera desarrollar el proceso de modelización, así como la organización de los recursos utilizados, es decir, proponer el momento adecuado para modelizar con la tecnología digital y posteriormente discutir e interpretar los resultados obtenidos. Las representaciones gráficas que surgen de la modelización del fenómeno experimentado, permitieron que los estudiantes modificaran sus ideas previas sobre el fenómeno físico.

Referencias y bibliografía

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* Alianza Universidad Textos: Madrid.

Clavelin, M. (1996). La philosophie naturelle de Galilée. France: Albin Michel.

Confrey, J., y Maloney, A. (2007). A Theory of Mathematical Modelling in Technological Settings. In Modelling and Applications in Mathematics Education (pp. 57-68). US: Springer.

Cirillo, M., Pelesko, J., Felton-Koestler, M. y Rubel, L. (2016). Perspectives on Modeling in School Mathematics. In C. Hirsch & A. McDuffie (Eds.), Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics (p.p. 3-16).

Cosmos y Matemáticas (2013). *La Cicloide: La Helena de la Geometría.* Recuperado el 7 de octubre del 2018 en: https://matematicasycosmos.wordpress.com/2013/12/08/la-cicloide-la-helena-de-la-geometria/

Cuevas C.A., Villamizar, F.Y., y Martínez, A. (2017). Aplicaciones de la tecnología digital para actividades didácticas que promuevan una mejor comprensión del tono como cualidad del sonido para cursos tradicionales de física en el nivel básico. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(3), 129-150.

Drake, S. (1975). The role of music in Galileo´s experiments. Scientific American, 232 (6), 98-104

Feynman, R. (1964/2008). *La conferencia perdida de Feynman. El movimiento de los planetas alrededor del Sol*. Barcelona: Tusquets editores.

Hawking, S. W. (2003). A hombros de gigantes. Barcelona: Editorial Crítica.Portal Académico CCH (2008). *Curvas maravillosas. La braquistócrona.* Recuperado el 27 de septiembre del 2018 en: http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/rincon/curvas/html/braquis.html.

Hierrezuelo, J., y Montero, A. (2006). *La ciencia de los alumnos. Su utilización en la didáctica de la física y la química.* México: Fontamara.

McDermott, L.C. (1984). Research on conceptual understanding in mechanics. Physics Today, Julio, 24-34.

Portal Académico CCH (2008). Curvas maravillosas. La braquistócrona. Recuperado el 7 de octubre del 2018 en: http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/rincon/curvas/html/braquis.html

Saltiel, E., y Viennot, L. (1985). ¿Qué aprendemos de las semejanzas entre las ideas históricas y el razonamiento espontáneo de los estudiantes? (J. Carrascosa, traductor) Enseñanza de las Ciencias, 137-144.

Viennot, L. (1979). *Le raisonnement spontané en dynamique élemetaire.* París: Hermann.

Apéndice A
Anexo 1: situación problema planteada

Dos pelotas idénticas se deslizan libremente desde una misma altura. Una sobre un plano inclinado o rampa y la otra sobre una superficie curvilínea como se muestra en la Figura 5. Ambas superficies son lisas.

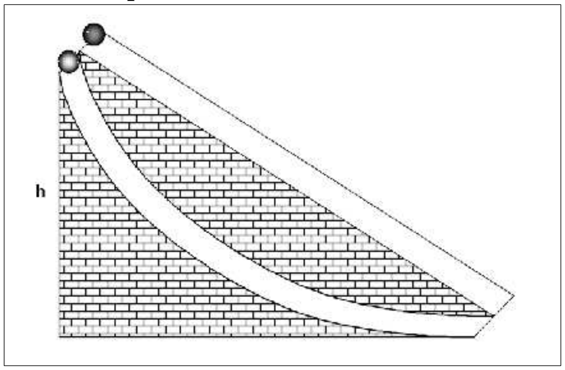


Figura 5. Plano inclinado vs cicloide invertida

1. ¿Qué pelota llegará primero al suelo? ______________________________

Explica tu respuesta:

____

____

____

2. ¿Qué sucede cuando las pelotas llegan al punto más bajo o a ras de suelo?:

a) La velocidad de la pelota de la superficie curva es MAYOR que la de la pelota en la rampa.
b) La velocidad de la pelota de la superficie curva es MENOR que la de la pelota en la rampa.
c) Las velocidades de cada pelota al llegar al suelo son IGUALES.
d) No sé

Explica tu respuesta. ¿Puedes proponer un razonamiento matemático?

Nota: se hará referencia a la magnitud de la velocidad neta.

Anexo 2: solución analítica de Newton sobre la cicloide invertida[1]

Si se toma un diferencial dS de la media cicloide invertida (ver Figura 6), se puede calcular su longitud de arco mediante la ec. 1:

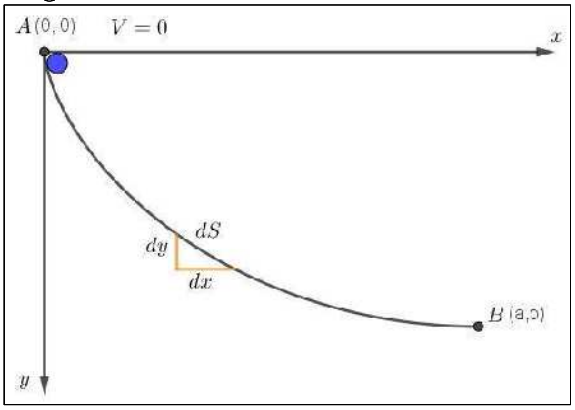


Figura 6. Media cicloide invertida con sus diferenciales

$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ (ec. 1)

Sabiendo que la velocidad con la que rueda la bola es:

$V = \frac{dS}{dt}$ (ec. 2)

Obtenemos que:

$dt = \frac{dS}{v}$ (ec. 3)

Si utilizamos el teorema de la conservación de la energía mecánica, se obtiene que velocidad es:

$V = \sqrt{2gy}$ (ec. 4). De donde g es la aceleración de la gravedad.

De modo que al sustituir (1) y (4) en (3), se obtiene que:

$$dt = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}{\sqrt{2gy}}$$

$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{a=\pi R} \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{y}}\, dx$ (ec. 5)

Resolviendo (5) (se omite todo el procedimiento) se llega a determinar que las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$\{x = R(\theta - Sen(\theta))\ y = -R(1 - Cos(\theta))$ $\quad 0 \leq \theta \leq \pi$ (ec. 6)

Si el ángulo que barre la rueda es $\theta = \pi$ entonces, el tiempo más corto, en que la bola tarda en llegar del punto A al B es:

$t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ (ec. 7)

[1] La solución mostrada está escrita en término actuales, y no es precisamente la notación utilizada por Newton.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

Resolução de Problemas e Modelização Matemática na Sala de Aula

Roger Ruben Huaman **Huanca**
Universidade Estadual da Paraíba
Brasil
roger@uepb.edu.br
Marcos Antônio **Petrucci** de Assis
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
Brasil
petrucci@ifpb.edu.br

Resumo

Este trabalho tem por objetivo discutir a Modelização Matemática associada à Resolução de Problemas na sala de aula enquanto um caminho para despertar o interesse, nos alunos, por tópicos matemáticos ainda desconhecidos. Para tanto, trazemos um recorte da disciplina Fundamentos de Álgebra, ministrada no ano de 2015, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Educação Matemática – PPGECEM da UEPB, por meio do relato de uma das aulas. A modelização matemática é, atualmente, uma forma de produção de conhecimento pelos alunos através de situações-problema nos quais eles são estimulados a pensar criticamente e criteriosamente sobre as melhores práticas para a resolução de questões, oriundas de suas próprias inquietações ou de provocações por parte do professor. Enxergamos a modelização matemática com uma alternativa metodológica para a sala de aula, em função das percepções dos alunos ao vivenciarem o trabalho com modelos matemáticos e problemas propostos em um momento de aprendizagem.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Modelização Matemática, Modelo, Álgebra, Geometria.

Introdução

Nos últimos anos, diversos pesquisadores e estudiosos se debruçam sobre as melhores práticas de resolução de problemas e de modelização matemática que resultem nesses objetivos de inserção do estudante no papel de protagonista da construção do próprio conhecimento ao modelar um problema/situação-problema. Trabalhar em sala de aula, a partir de um problema não é fácil, é uma tarefa desafiadora para os educadores matemáticos que buscam estratégias baseadas em Resolução de Problemas como suporte para melhorar sua prática de ensino, conduzindo à aprendizagem do aluno.

Nesse sentido, consideramos que o ensino de matemática deve acontecer numa atmosfera de investigação orientada para a resolução de problemas e a modelização matemática. Os alunos devem ser desafiados a resolver um problema e devem desejar fazê-lo, a partir de seus conhecimentos anteriores. Por outro lado, o problema ou um modelo matemático deverá exigir que busquem novas alternativas, novos recursos e novos conhecimentos para obter a solução, caso contrário não será para os alunos um problema ou modelo.

Com relação ao entendimento da Resolução de Problemas como metodologia de ensino, Walle (2001) coloca que é preciso entender que ensinar Matemática através da Resolução de Problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que uma mágica aconteça. Pelo contrário, pressupõe-se todo um rigor metodológico, no qual o professor, apesar de intermediador entre o conhecimento e o aluno, é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante, em que a aula deve transcorrer. Para se obter isso, toda aula deve compreender três partes importantes: antes, durante e depois. Para a primeira parte, o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras. Na segunda parte, os alunos trabalham e o professor avalia esse trabalho. Na terceira parte, o professor aceita a solução dos alunos sem avaliá-las e conduz a discussão, enquanto os alunos justificam e avaliam seus resultados e métodos. Então, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos matemáticos construídos.

Por essas razões, o ensino de Matemática através da resolução de problemas é importante, pois nos oferece uma experiência em profundidade, uma oportunidade de conhecer e delinear as dificuldades, de ter acesso às capacidades e limitações do conhecimento matemático que os estudantes possuem. O ensino através da resolução de problemas coloca ênfase nos processos de pensamento, de aprendizagem e trabalha os conteúdos matemáticos, cujo valor não se deve deixar de lado.

Modelização Matemática na sala de aula

A Matemática é uma ciência de padrão e ordem que pode nos revelar padrões ocultos que nos ajudam a compreender o mundo ao nosso redor. Hoje, a Matemática, muito mais do que aritmética e geometria, é uma disciplina diferente que trabalha com dados, medidas e observações da ciência, com inferência, dedução e prova e com modelos matemáticos de fenômenos naturais, de comportamento humano e de sistemas sociais. Se a Matemática é uma ciência de padrão e ordem, as representações são os meios pelos quais esses padrões são registrados e analisados (Onuchic & Huanca, 2013).

Segundo Huanca (2014, p. 115), “modelizar é estabelecer um modelo; modelo é o esquema teórico que representa um fenômeno”. Assim, entende-se modelização matemática como a criação de modelos que constroem o entendimento conceitual e habilidades para resolução de problemas. A modelização matemática também reflete os principais componentes de competências e habilidades definidos por estudos de investigação como a compreensão conceitual, a resolução de problemas, o raciocínio matemático, comunicação, conexões e representação matemática.

A Modelização Matemática, na sala de aula, pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece. Ao mesmo tempo em que aprende a arte de modelar, os alunos utilizam os modelos matemáticos para resolver determinadas situações nas áreas da Física, Química, Engenharia, Astronomia, Economia, Biologia, Psicologia e outros. Nesse sentido, o aprendizado deve contribuir não só para o conhecimento técnico, mas também "para uma cultura mais ampla, desenvolvendo meios para a interpretação de fatos naturais, a compreensão de procedimentos e equipamentos do cotidiano social e profissional, assim como para a articulação de uma visão do mundo natural e social" (BRASIL, 1999, p. 7). Dá-se, assim, ao aluno a oportunidade de estudar modelos matemáticos através de situações-problema.

Walle (2001), fala do papel dos modelos no desenvolvimento da compreensão, dizendo que, com frequência, ouve-se que bons professores usam uma abordagem de "pôr as mãos na massa" para ensinar matemática. Trata-se de materiais manipulativos ou físicos para modelar conceitos matemáticos que são, certamente, ferramentas importantes para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Ainda esse autor diz que, na utilização de modelos na sala de aula podem-se identificar três aspectos: ajudar a desenvolver novos conceitos ou relações; ajudar a fazer conexões entre conceitos e símbolos e assegurar a compreensão dos alunos.

De acordo com Huanca (2014), a Modelização Matemática enfatiza a importância de saber modelar problemas, condição necessária à formação do aluno no sentido de que: ela desperta o interesse pela Matemática, leva a sentir sua beleza; melhora a busca pela construção de novos conceitos matemáticos; desenvolve a habilidade em resolver problemas; e estimula a criatividade nos alunos. Para nós, implementar a Modelização Matemática em sala de aula e fora dela significa fazer Matemática ao modelar o problema.

Para Sadovsky (2010), a atividade de modelização integra conhecimentos de diferentes naturezas. Ao abordar um problema é necessário: escolher uma teoria para tratá-lo; reconhecer um modelo; escolher uma relação pertinente e encontrar os meios para representá-la; realizar explorações e reconhecer nelas algumas regularidades relevantes; utilizar conhecimentos sobre números e álgebra que permitam ajustar o uso do modelo; usar propriedades adequadas que permitam transformar as expressões e produzir conhecimento novo a respeito. Estes são aspectos essenciais no processo de modelização.

Lesh e Zawojewski (2007) dizem que, quando envolvido no processo de modelização, os modeladores passam por iterações de expressar, testar e rever o modelo de julgamento. Ao fazê-lo, simultaneamente, eles melhoram o seu modelo e também desenvolvem uma compreensão mais profunda das restrições e das limitações que ainda existem em cada fase do desenvolvimento deste, e aprendem a articular (para membros do grupo) os "trade-offs" e os benefícios de um modelo particular. Portanto, um componente muito importante do desenvolvimento de processos de modelização do indivíduo é o de aprender a interpretar e, eventualmente, produzir diferentes pontos de vista, a fim de facilitar o processo de revisão do modelo encontrado.

Na Modelização Matemática, o professor pode optar por escolher determinados modelos, fazendo sua aula mais dinâmica juntamente com os alunos de acordo com o nível em que estão, além de obedecer ao programa curricular. É bom que se tenham vários modelos para que se possa optar entre eles e não por eles. Pois o seu aprimoramento ou adaptação cabe ao professor e a seu bom senso.

Olhando sob este prisma, estamos desenvolvendo, no Grupo de Pesquisa em Resolução de Problemas e Educação Matemática - GPRPEM da UEPB, uma pesquisa sobre Modelização

Matemática encarada como método de ensino-aprendizagem na sala de aula.

Com relação à Resolução de Problemas e à Modelização Matemática, podemos perceber que existem inúmeras formas de conceber o ensino da Matemática, cabe ao professor adequá-las a seu trabalho. Elas constituem duas alternativas bastante ricas dentro de um variado espectro de possibilidades que se apresentam como alternativas para o ensino-aprendizagem de Matemática na sala de aula.

O Estudo da Álgebra e da Geometria no Ensino

Quantos professores de matemática se sentiriam acossados pela pergunta: o que é Álgebra? E o que é Geometria? Com certeza, estas perguntas não devem possuir respostas simples ou, pelo menos, não uma que se aplique a todos os contextos algébricos ou geométricos.

Usiskin (1995) diz que não é fácil definir Álgebra e reforça o fato de que o conceito desta é diferente em contextos diversos, ao afirmar que a álgebra do ensino primário tem conotações muito diferentes daquela ensinada em cursos superiores. Nesse sentido, a modelização matemática proporciona uma compreensão melhor de técnicas e métodos de pesquisa em relação à esse estudo.

Sem dúvida, a Álgebra é um dos temas mais importantes e presentes em, praticamente, todas as áreas da matemática, desde estudos elementares até tópicos mais avançados. Ela tem um papel de extrema importância na representação dos mais variados elementos estudados em matemática, apesar de estudantes, professores e profissionais de diversas áreas fazerem uso desta com muita frequência e da importância de seu papel no ensino e na aprendizagem, algumas questões relativas à Álgebra são deixadas de lado, como: o que a diferencia da Aritmética e da Geometria? Qual a relação existente entre a Álgebra da Educação Primária e a Álgebra do Ensino Superior, que nos permite chamar ambas de Álgebra?

Segundo Brasil (2017), o ensino da Geometria tem tanta importância como qualquer outra parte da Matemática, são muitos os obstáculos encontrados para não o inserir no ensino, como também são diversas as causas dos erros cometidos, desde o ensino primário até as licenciaturas. Nesse sentido, o contato estabelecido entre os alunos das séries iniciais até o curso superior em relação à Geometria começa bem cedo, antes mesmo de qualquer tipo de formalização, eles ainda não têm conhecimento dessa relação e talvez isso acabe sendo perdido pelo modo como a formalização é estabelecida com o passar dos anos no ensino formal. Assim, a tendência por diversas vezes é de que os conhecimentos prévios que os alunos possuem acabem sendo desconsiderados quando entram na sala de aula e isso influencia muito para afastar do aluno a sua autonomia.

> A geometria tem sido menos ensinada nos últimos anos do que há vinte anos. A razão desse declínio deve ser buscada não na insatisfação quanto a seu conteúdo, mas antes nas dificuldades conceituais causadas pelas argumentações lógicas que constituem a essência da geometria. A maioria das dificuldades que se observam nos alunos em sala de aula está relacionada com a maneira de organizarem raciocínio e construírem argumentações lógicas a partir de modelos matemáticos (Dreyfus & Hadas, 1994, p. 59).

Nesse sentido, para que aconteça uma mudança no ensino da Geometria que seja realmente significativa é preciso utilizar a modelização matemática além de um interesse maior pelo assunto. Também, o professor sempre será a peça fundamental para que essa mudança aconteça, por isso é preciso uma boa formação, boas condições de trabalho e métodos adequados a sala de aula.

No primeiro semestre de 2015, na disciplina Fundamentos de Álgebra do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PPECEM da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, escolhemos alguns textos sobre Álgebra e Modelização Matemática para leitura e discussão em sala de aula. O intuito era de aprofundar os conhecimentos teóricos, para que os estudantes obtivessem um conhecimento e uma preparação melhor para que pudessem levar a Modelização Matemática para as salas de aula. Não pretendíamos apenas aplicar tarefas prontas, mas oportunizar o desafio de aprender a criar modelos.

Neste trabalho, tentamos descrever um episódio de aula vivido pelo primeiro e segundo autores e pelos estudantes com relação ao modelo apresentado. O professor comentou:

– Seria bom procurar saber qual a melhor forma para fazer uma caixa, isto é, a que utilize um mínimo de material para um máximo de aproveitamento. Para isso, o primeiro autor entregou a folha A4 (recortada) na forma quadrada para todos, medindo 20 cm de lado. Conforme o esquema representado na figura 1.

Dada uma folha de papel, de 20 cm por 20 cm, qual deve ser a altura da caixa construída com ela (quando dobrar) para que seu volume seja máximo?

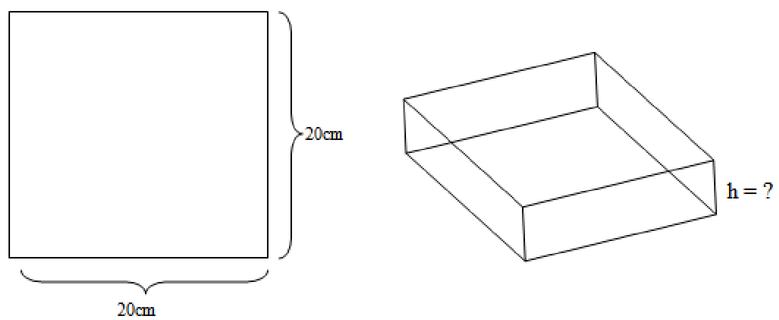


Figura 1. O modelo da embalagem.

Iniciou-se a discussão da resolução da situação-problema. O professor perguntou, referindo-se ao esquema exposto na figura 1, o seguinte:

- O que é um modelo? Esse modelo está relacionado com Álgebra? Com a Geometria? O que temos que fazer para construir a caixa?

Nesse momento, o representante de um dos grupos respondeu:

– Primeiro, temos que encontrar a equação que determina o volume da caixa em função da altura: V = área da base × altura.

Um componente de outro grupo complementou, com base na construção da figura 2:

– Como a base é quadrada, então a área da base é $(20 - 2h)^2$. Tomando "h" como sendo a altura da caixa, fizeram: $V = (20 - 2h)^2 . h$. Deduziram que, como 0 < h < 10, não há altura negativa, nem podemos considerar $h \geq 0$, senão não teríamos como fazer uma caixa.

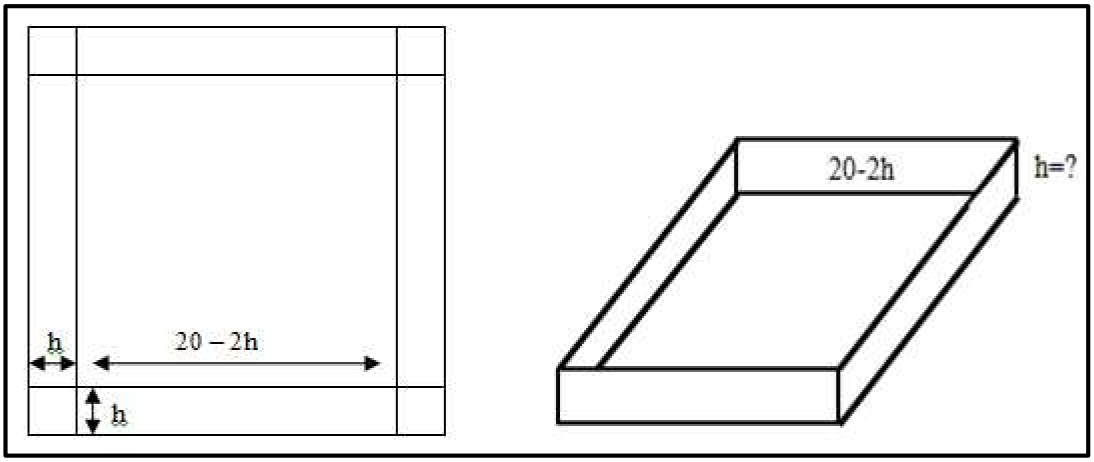


Figura 2. Medidas em função de *h*.

Então, $V = V(h) = (400 - 80h + 4h^2). h$.

Logo, $V(h) = 4h^3 - 80h^2 + 400h$.

Neste momento, apresentaram na lousa o conceito de pontos críticos de uma função. Para isso, usaram o cálculo diferencial, que estudaram na graduação. Mais especificamente, o ponto de máximo local e o ponto de mínimo local, justificando que a função derivada, nesses casos, era igual a zero.

Se $V(h) = 4h^3 - 80h^2 + 400h.$, calculando a derivada, escreveram: $V'(h) = 12h^2 - 160h + 400$. Como V'(h) = 0, logo $12h^2$ – 160h + 400 = 0 e, consequentemente, h_1 = 10 e $h_2 = \frac{10}{3}$. Como h está entre 0 e 10, então ele não pode ser 10. Portanto, o valor da altura da caixa procurada é igual a $\frac{10}{3}$, a fim de obtermos o máximo volume pedido no modelo.

Um dos estudantes perguntou:

– Como conseguiremos cortar $\frac{10}{3}$ de cada canto da folha, se esta conta não é exata?

O professor respondeu:

– Esta é uma motivação para se trabalhar com valores aproximados!

Este foi um modelo matemático, no caso o modelo da caixa, que nos prendeu à atenção e nos estimulou a fazer a Modelização Matemática. Nele, foram usados conceitos algébricos e geométricos, embora tenha se descuidado do conceito de medida.

Conclusão

Acreditamos que o trabalho de sala de aula deve acontecer numa atmosfera de investigação orientada em resolução de problemas. Os alunos devem ser desafiados a resolver uma situação-problema e desejar fazê-lo. O modelo deve conduzi-los a utilizar seus conhecimentos anteriores e, por outro lado, deverá exigir que se busquem novas alternativas, novos recursos, novos conhecimentos para a obtenção da solução. Na tentativa de compreender a complexa ação de trabalhar em sala de aula, pudemos perceber também como um dos métodos de ensino a Modelização Matemática. Ela norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um modelo matemático. O modelo deve ser o ponto de partida para o desenvolvimento dos alunos, dando oportunidade para que possam refletir sobre o modelo proposto e ir em busca do conhecimento matemático.

Entendemos a modelização como um processo que vai além da ideia generalizada de construir modelos, para situar-se na noção de prática envolvida na resolução de problemas por meio da construção, (re)construção e interpretação de modelos. Portanto. a experiência de um modelo matemático, com os alunos envolvidos na disciplina Fundamentos da Álgebra, foi satisfatória e eles puderam perceber uma nova forma de aprender e de fazer Matemática através da resolução de problemas e de modelos matemáticos. Esperamos que nosso trabalho possa levantar novos questionamentos que ajudem os professores a perceber o valor da Matemática na formação de um cidadão crítico e reflexivo, necessário para uma sociedade em mudança.

Bibliografia e referências

BRASIL. (1999). *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias,* Brasília, MEC.

Brasil, T. C. (2017). *O ensino da geometria através de resolução de problemas: explorando possibilidades na formação inicial de professores de matemática*. 2017. 260 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologias da Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.

Dreyfus, T. D., Hadas, N. (1994). Euclides deve permanecer – e até ser ensinado. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual.

Huanca, R. R. H. (2014). *A Resolução de Problemas e a Modelização Matemática no processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação*: uma contribuição para a formação continuada do professor de matemática. 2014. 315f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Lesh, R., Zawojewski, J. (2007). Problem Solving and Modeling. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*: National Coucil of Teachers of Mathematics.

Ounchic, L R.; Huanca, R. R. H. (2013). A Licenciatura em Matemática: O desenvolvimento profissional dos formadores de professores. In: Frota, M. C. R.; Bianchini, B. L.; Carvalho, M. F. T. (Orgs.). *Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior*. Campinas: Papirus.

Sadovsky, P. (2010). *O ensino de matemática hoje: enfoques, sentidos e desafios*. Editora Ática: São Paulo.

Usiskin, Z. (1995). Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: Artur, F C; Albert, P. S. (Orgs.). *As ideias da álgebra*. Tradução H. D. Hygino. São Paulo: Atual editora.

Walle, J. A. V. (2001). *Elementary and Middle School Mathematics: teaching developmentally*. 4a ed. New York: Longman.

Un medio para la enseñanza de magnitudes directamente proporcionales

Ángela Katherine **Trochez-Tapia**
Universidad del Cauca
Colombia
angelikate91@hotmail.com
Yeny Leonor **Rosero-Rosero**
Universidad del Cauca
Colombia
yrosero@unicauca.edu.co

Esta investigación se realiza en el marco de la Maestría en Educación de la Universidad del Cauca, línea de Educación Matemática con el objetivo de hacer un aporte a la enseñanza de las Magnitudes Directamente Proporcionales (MDP) en la educación básica primaria. Se basa en la metodología de la Ingeniería Didáctica y se propone desarrollar dos fases. En la primera denominada análisis preliminares, se analizan las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica y en la segunda propone estructurar un medio en una situación didáctica que promueva el aprendizaje del objeto de estudio las MDP.

La investigación en este tema es pertinente, al respecto Obando, Vasco y Arboleda (2014) afirman que: "Razones, proporciones y proporcionalidad constituyen un campo ampliamente investigado en los últimos cincuenta años. Sin embargo, siguen siendo difíciles de aprender para algunos estudiantes. Por tanto es necesario hacer mayor investigación didáctica que permita nuevas comprensiones, y lograr mayores impactos en el sistema educativo". (p.59). En consecuencia, en este caso, se formula la pregunta *¿Cómo estructurar un medio en una situación didáctica para que permita estudiar algunas interacciones entre un sujeto y el medio en la enseñanza de las magnitudes directamente proporcionales en educación básica primaria?*

Por consiguiente, en la dimensión cognitiva se analiza cuáles son las dificultades que han encontrado los estudiantes para comprender y los profesores al enseñar este objeto matemático según Perry, P, Guacaneme, E y otros (2003) destacan dos. "Uno que tiene en cuenta la relación entre las dos medidas de una cantidad y para obtener el valor desconocido recurre a encontrar un "operador sin dimensión" o "escalar". El otro procedimiento tiene en cuenta la relación entre medidas correspondientes de diferentes cantidades y para obtener el valor desconocido recurre a un "factor funcional" entre las cantidades implicadas" (p.100), ver en la ilustración 1

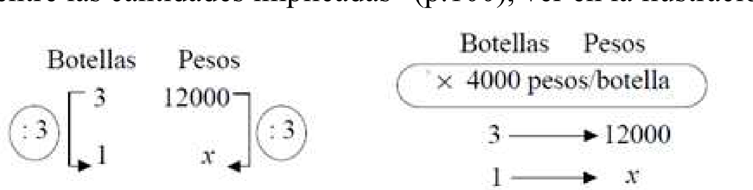


Ilustración 1. Esquema operador escalar y operador funcional. Perry, P, Guacaneme, E y otros (2003)

La dimensión epistemológica estudia la naturaleza del objeto matemático, en este caso las MDP, al surgimiento del concepto y referencias sobre la enseñanza del mismo en otra época. Por ejemplo: si dos magnitudes son tales que al doble o triple, de la cantidad de la primera, le corresponde el doble o triple de la segunda, entonces se dice que hay una correlación entre esas magnitudes; es decir, que si una de las dos magnitudes aumenta, la otra lo hace de la misma manera y si una disminuye la otra también. Para esta dimensión se considera la estructura del medio como una herramienta de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) para hacer el estudio del objeto epistemológico en la educación matemática, ver ilustración 2.

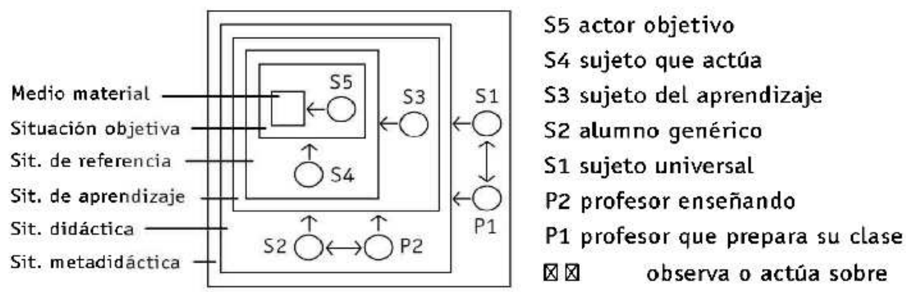


Ilustración 2. Estructura del Medio. Brousseau, G (2007)

La dimensión didáctica hace referencia a la manera convencional de enseñanza de los conceptos matemáticos, usualmente de forma algorítmica basada en memorizar y una parte operativa, para esta investigación las MDP.

Finalmente, para la estructura del medio se asume el planteamiento de Fregona, D y Báguena, P. (2011) quienes afirman que, la noción de medio es particularmente interesante y productiva desde el punto de vista teórico, ya que permite abordar diversas cuestiones específicas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La teoría es una modelización sobre los procesos de producción de conocimientos matemáticos según las condiciones creadas por el docente para que el alumno se encuentre con un conocimiento bien determinado, esto permitirá analizar más finamente las diferentes relaciones del estudiante, del profesor y las posibles interacciones con el objeto a estudiar.

Referencias y bibliografía

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones.* Buenos Aires Argentina: libros del Zorral. Traducción: Dilma Fregona.

Fregona D, y Báguena Pilar O. (2011). *La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemática.* Libros del Zorzal. Buenos Aires, Argentina.

Obando G, Vasco C & Arboleda L. (2014) *Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción, y la proporcionalidad: Un estado del arte.* Revista Latinoamérica de Investigación en Matemática Educativa. 17 (1): 59 - 81. DOI: 10.12802/relime.13.1713.

Perry, P., Guacaneme, E, Andrade, L. & Fernández F. *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer.* Universidad de los Andes. D.R. © 2003. ISBN 958-695-092-1. Bogotá 2013).

Análisis de la construcción de modelos matemáticos de estudiantes de ingeniería

Jazmín **Juárez** Ramírez
Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional
México
jjuarezr@ipn.mx
José María **Chamoso** Sánchez
Facultad de Educación, Universidad de Salamanca
España
jchamoso@usal.es
María Teresa **González** Astudillo
Facultad de Educación, Universidad de Salamanca
España
maite@usal.es

Resumen

La modelación permite a los estudiantes aprender las matemáticas de manera aplicada en otras áreas del conocimiento y mejorar su capacidad para formular, solucionar e interpretar situaciones reales. La falta de procesos completos de modelación, así como el escaso tiempo dedicado al análisis, interpretación y validación de soluciones, son algunos de los principales problemas en los cursos de matemáticas superiores. Este trabajo tuvo como objetivo analizar la forma en que los estudiantes de ingeniería construyen modelos de situaciones reales con ecuaciones diferenciales. Los resultados mostraron que los estudiantes no concedieron la misma importancia a todas las etapas del proceso de modelación, y que no consideraron necesario contrastar sus resultados con datos reales, ni explicar otras posibles aplicaciones del modelo. Esto conduce a cuestionar la necesidad de otorgar un papel más importante a la modelación matemática y proponer alternativas para mejorar la práctica docente para la formación de futuros ingenieros.

Palabras clave: Ecuación diferencial, educación matemática, educación superior, ingeniería, modelación.

Introducción

Uno de los objetivos más importantes de los cursos universitarios de matemáticas es que los estudiantes se apropien de conceptos matemáticos para aplicarlos en contextos diferentes del cual se aprendieron. Cuando la modelación matemática se presenta mediante problemas planteados en un contexto del mundo real, fomenta que los estudiantes formulen preguntas sobre el contexto y piensen en la utilidad de sus conocimientos matemáticos (Santos & Reyes, 2011). La modelación propicia que los estudiantes integres las matemáticas en otras áreas del conocimiento, logren una mayor comprensión de los conceptos matemáticos, se interesen por las aplicaciones de las matemáticas, utilicen su creatividad para formular y resolver problemas y aumenten su capacidad para trabajar en grupo (Godino, Batanero, & Font, 2004). A través del aprendizaje de la modelación, los estudiantes pueden comprender cómo se originaron muchos conceptos y estructuras matemáticas, así como sus aplicaciones fuera de las matemáticas (Alsina, 2007).

Al respecto, cabe recordar que uno de los principios rectores para la educación matemática establece que un programa de matemáticas de excelencia requiere una enseñanza eficaz que involucre a los estudiantes en un aprendizaje significativo mediante experiencias individuales y colaborativas que fomenten su habilidad para dar sentido a las ideas y para razonar de una manera matemática (NCTM, 2015). Sin embargo, en algunos de los programas de las asignaturas de matemáticas en educación superior, la práctica de modelación matemática se reduce a las aplicaciones, las cuales no son más que problemas propuestos en los libros de texto. Es decir, el papel que tiene la modelación en los cursos de matemáticas para ingeniería, en la mayoría de los casos, es de carácter teórico y se basa en modelos preestablecidos que los estudiantes resuelven como simples ejercicios. Según Córdoba (2011), el proceso de modelación se enseña en las aulas de manera parcial, evitando confrontar a los alumnos con etapas claves de este proceso. En la literatura sobre modelación matemática, se pueden encontrar distintos ciclos o procesos de modelado, que dependen de diversas orientaciones y enfoques de cómo se entiende el modelado y, además, en algunos casos, si se utilizan tareas complejas.

Todo lo anterior, conduce a considerar la importancia de mostrar en el aula el proceso de modelación matemática con ecuaciones diferenciales no solamente como un ciclo dinámico para entender ciertos problemas o situaciones, sino como una forma de motivar un proceso de aprendizaje, en el cual los estudiantes experimenten las matemáticas como un medio para describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones de la vida diaria. Por tanto, se propuso el diseño de una experiencia con estudiantes de ingeniería en un curso de matemáticas, con el propósito de analizar la forma en que los estudiantes desarrollan un modelo matemático a partir de una situación de la vida real. La realización de este trabajo puede justificarse al considerar que la modelación matemática propicia en el estudiante habilidades tales como la integración de la matemática con otras áreas del conocimiento, interés por la matemática frente a su aplicabilidad y estímulo de la creatividad en la formulación y resolución de problemas.

Marco teórico

En algunas investigaciones se han estudiado los problemas que enfrentan los estudiantes al construir el modelo matemático de un fenómeno físico, sus elementos, la interpretación de su solución, su relación con una situación real y las etapas que se deben seguir para construirlos. Algunos estudios han reportado que los estudiantes presentan dificultades para interpretar físicamente los términos de una ecuación diferencial y traducirlos de una descripción física a una descripción matemática (Rowland, 2006, Rowland & Jovanoski, 2004). Estas dificultades pueden atribuirse a la existencia de vínculos débiles entre las matemáticas y los procesos físicos, así como a los típicos problemas a los que están acostumbrados los estudiantes en el aula. Al analizar la forma en que los estudiantes transfieren el conocimiento del uso de las ecuaciones diferenciales para una situación de otra disciplina, se ha encontrado que la mayoría de los alumnos que resuelven la ecuación diferencial no intentan analizar la solución y, que algunos estudiantes simplemente trazan una gráfica de la solución, sin comentar la evolución futura del sistema que se analiza (Crouch & Haines, 2004; Chaachoua & Saglam, 2006). En ese sentido Klymchuk, Zverkova, Gruenwald y Sauerbier (2008) recomiendan alentar a los estudiantes escribir detalladamente todos los pasos del proceso de modelación, incluso para problemas de aplicaciones simples, ya que esto puede prepararlos para enfrentar problemas de la vida real que requieren habilidades de modelado avanzado en otros cursos y también en su trabajo futuro.

Sin embargo, es importante señalar que a pesar de que al resolver problemas clásicos de modelado los estudiantes realizan diagramas para mejorar la comprensión de la situación y reconocen la importancia de comprender la situación física y entender qué deben calcular, existe una falta de comprensión de las variables y constantes involucradas en el proceso, así como de la relación entre ellas (Soon, Tirtasanjaya, & McInnes, 2011). Algunos estudios mostraron que al desarrollar proyectos centrados en la investigación, la aplicación de conceptos matemáticos, su relación con el tema, y la construcción de los modelos contribuyen de manera importantes a la percepción de los estudiantes sobre la relación entre las matemáticas y la realidad (Jacobini & Wodewotzki, 2006).

Las investigaciones existentes sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática indican que la construcción de modelos en el aula podría cambiar la percepción de los estudiantes sobre las matemáticas. Sin embargo al representar una situación de la vida real con un modelo matemático los estudiantes encuentran dificultades, ya que la mayoría de los cursos de matemáticas se basan en el estudio de técnicas de solución donde predomina el enfoque algorítmico con escasa vinculación real, por tanto, es necesario promover el desarrollo de actividades para que los estudiantes utilicen los diversos enfoques de solución.

Metodología

Participantes y contexto

La experiencia se llevó a cabo durante dos semestres consecutivos del curso escolar 2016/2017, en el desarrollo de la asignatura ecuaciones diferenciales, que se imparte en el primero de los 4 años de la Ingeniería en Sistemas Computacionales (ISC), que ofrece la Escuela Superior de Cómputo (ESCOM-IPN), en la Ciudad de México. En el primer semestre (curso A) participaron en la experiencia 26 estudiantes (8 mujeres, 31%, y 18 hombres, 69%), y en el segundo semestre (curso B), participaron 27 estudiantes (6 mujeres, 22%, y 21 hombres, 78%).

Desarrollo de la experiencia

Los estudiantes realizaron a cabo un proyecto que consistía en construir, resolver y analizar el modelo matemático de una situación real. Para llevar a cabo esta actividad los estudiantes en ambos cursos se organizaron en pequeños grupos de 5 estudiantes y desarrollaron una serie de tareas comunicándose a través de un foro virtual. En el diseño del proyecto se consideraron algunas recomendaciones sobre las ventajas del aprendizaje colaborativo mediado por foros virtuales (Cheng, Paré, Collimore & Joordens, 2011). Las tareas realizadas por cada grupo trabajo fueron las siguientes:

1. Seleccionar del libro de texto del curso (Zill, 2012), un problema de ecuaciones diferenciales de segundo orden que tuviera una aplicación real.
2. Construir, resolver y analizar el modelo matemático del problema seleccionado.

3. Diseñar una presentación electrónica para exponer su trabajo en el aula.
4. Valorar el trabajo de otro grupo (curso A) y su propio trabajo (curso B) a través del foro virtual, indicando las modificaciones que realizarían en términos del proceso de modelación matemática adaptado del modelo de Camarena (2009), que se estudió en el aula (Tabla 1).

Tabla 1

Proceso de modelación matemática

Etapa	Descripción
1. Identificar variables y leyes por aplicar	Determinar las variables responsables del cambio en el sistema y formular un conjunto de premisas del sistema por describir.
2. Plantear ecuación	Escribir la ecuación diferencial correspondiente.
3. Establecer condiciones	Determinar las condiciones del problema.
4. Resolver ecuación	Aplicar los métodos estudiados para obtener la resolución general.
5. Aplicar condiciones	Aplicar las condiciones para determinar la resolución particular.
6. Graficar resolución	Expresar la resolución particular con un gráfico.
7. Contestar pregunta original	Explicar el resultado en el contexto de la situación real.
8. Analizar resultado	Validar el resultado contrastándolo con datos conocidos.
9. Identificar el modelo	Explicar si son posibles otras aplicaciones del sistema.

Recogida de datos y análisis de la información

Se tomaron como datos los mensajes de los estudiantes en el foro virtual durante el desarrollo del proyecto. Estos fueron transcritos y se organizaron en unidades de análisis. Se consideró como unidad de análisis (UA) cada idea con significado propio, entendida como una unidad de pensamiento que expresaba una única información, extraída de un segmento de la aportación.

Para determinar la forma en que los estudiantes construyeron un modelo matemático, se analizó el contenido de las aportaciones de los estudiantes en términos del proceso de modelación matemática estudiado en el aula. Se categorizaron en función de los aspectos a los que se referían, tratando de identificar aspectos comunes. Se observó que, en sus aportaciones, los estudiantes mencionaron aspectos relacionados con el proceso de modelación matemática y a otros aspectos que no tenían relación con éste. Posteriormente se elaboró un sistema de categorías para clasificar las aportaciones de los estudiantes en tres partes, según los aspectos relacionados con el diseño, contenido matemático o de otro tipo en cada caso:

- *Diseño*, referido a aspectos relacionados con el diseño de la presentación, a los que aluden como: 1) *Efectos visuales* (colores, efectos, animaciones y recuadros), 2) *Características de texto* (formato de las ecuaciones, estilo de las fuentes y errores en la escritura), y 3) *Presentación* de la diapositiva sin especificar elementos.
- *Contenido matemático*, referido a los aspectos de las etapas del proceso de modelación matemática con ecuaciones diferenciales.
- *Otros*, referido a elementos sin relación con el diseño o el contenido matemático.

Las aportaciones de los estudiantes se asignaron al sistema de categorías, en cada grupo y en cada curso.

Resultados

La distribución de las unidades de análisis (UA) de las aportaciones en el foro de los estudiantes en cada grupo de trabajo, y en cada uno de los cursos A y B, en función de las categorías del contenido descritas, se organizaron teniendo en cuenta los aspectos que se mencionaron y la frecuencia con que se hizo (Tabla 2 y Tabla 3).

Tabla 2

Distribución de UA de las aportaciones de los grupos de trabajo en el curso A

Categorías		Grupos curso A					Total
		G1A	G2A	G3A	G4A	G5A	
Diseño (D)	Efectos visuales	1	2	2	0	1	6(43%)
	Características de texto	0	3	0	2	0	5(36%)
	Presentación	1	2	0	0	0	3(21%)
Total		2	7	2	2	1	14%(100)
Contenido Matemático (C)	Identificar variables y leyes por aplicar	0	0	1	2	0	3(3%)
	Plantear ecuación	1	0	0	1	3	5(6%)
	Establecer condiciones	1	0	0	0	0	1(1%)
	Resolver ecuación	5	9	5	7	3	29(33%)
	Aplicar condiciones	4	2	0	0	0	6(7%)
	Graficar resolución	6	2	3	7	9	27(30%)
	Contestar pregunta original	0	0	1	0	0	1(1%)
	Analizar resultado	0	0	0	0	0	0(0%)
	Identificar el modelo	5	0	6	5	1	17(19%)
Total		22	13	16	22	16	89(100%)
Otros (O)		3	2	10	6	14	35(100%)
Total		138(100%)					

Tabla 3

Distribución de UA de las aportaciones de los grupos de trabajo en el curso B

Categorías		Grupos curso B					Total
		G1B	G2B	G3B	G4B	G5B	
Diseño (D)	Efectos visuales	0	1	0	14	6	21(68%)
	Características de texto	2	0	0	0	3	5(16%)
	Presentación	0	0	0	3	2	5(16%)
Total		2	2	1	2	17	11
Contenido Matemático (C)	Identificar variables y leyes por aplicar	0	0	0	0	5	5(4%)
	Plantear ecuación	0	3	8	3	4	18(15%)
	Establecer condiciones	0	4	4	5	1	14(12%)
	Resolver ecuación	8	1	2	10	10	31(26%)
	Aplicar condiciones	0	0	0	2	0	2(2%)
	Graficar resolución	10	6	4	0	8	28(24%)
	Contestar pregunta original	0	0	0	1	0	1(1%)
	Analizar resultado	5	1	2	0	0	8(7%)
	Identificar el modelo	0	0	3	2	5	10(9%)
Total		22	23	15	23	23	33
Otros (O)		3	5	7	8	8	10
Total		183(100%)					

Se observa que el total de los porcentajes de UA de las aportaciones en el foro virtual de los grupos de trabajo, en los cursos A y B, globalmente, fue similar en las categorías Contenido matemático (C) y Diseño (D) (prueba ji-cuadrado [$\chi^2(2) = 3.31$, $p > 0.05$]; no se consideró la categoría Otros.

En general se observa que el aspecto que los estudiantes mencionaron en sus aportaciones con mayor frecuencia fue *graficar solución*, y en menor grado *contestar pregunta original*.

Se observa que los estudiantes del curso B, en sus aportaciones en el foro, al revisar su propio trabajo mencionaron más aspectos relacionados con las etapas *Establecer ecuación* y *Establecer condiciones* que los estudiantes del curso A al revisar el trabajo de otro grupo. Por otro lado las aportaciones de los estudiantes del curso B tuvieron en cuenta los elementos relacionados con la etapa *Analizar resultado*, al contrario que los del curso A, que no los mencionaron.

Se compararon las frecuencias de los aspectos mencionados en la categoría Contenido matemático entre los cursos A y B y se observó que existieron diferencias significativas [$\chi^2(8) = 27.72$, $p < 0.001$]. Esto no sucedió para la categoría Diseño [$\chi^2(2) = 4.68$, $p > 0.05$]. Es decir la frecuencia de los aspectos mencionados en el foro en relación al proceso de modelación matemática, al evaluar una presentación inicial, estuvo relacionada con la manera en que los estudiantes realizaron la revisión.

Discusión de resultados

Llama la atención que la mayoría de los estudiantes, en cada grupo, no concediera importancia al hecho de identificar las variables involucradas al construir un modelo matemático, así como las leyes que gobiernan el sistema físico. Estos aspectos, que pueden parecer básicos, pueden evidenciar una dificultad de comprensión, lo que corrobora los resultados de algunas investigaciones (Soon et al., 2011; Klymchuk et al., 2008) cuando analizaron las dificultades que enfrentan los estudiantes al traducir una situación cotidiana en un problema matemático y encontraron una escasa comprensión de los estudiantes al identificar las cantidades variables y constantes del sistema. Por otro lado entre los aspectos que los estudiantes mencionaron con mayor frecuencia se encuentra *graficar solución,* sin embargo, al presentar sus trabajos en el aula solo mostraron las gráficas sin relación con un análisis de comportamiento, en ese sentido los resultados coinciden con los de Chaachoua y Saglam (2006), que encontraron que algunos estudiantes simplemente trazan una gráfica de la solución, sin comentar la evolución futura del sistema que se analiza.

Al exponer sus trabajos en el aula los estudiantes mostraron que eran conscientes de la existencia de una gran variedad de fenómenos que podían representarse con ecuaciones diferenciales. Algunos estudiantes seleccionaron problemas que les resultaban interesantes pero no consideraron que podría resultar complicado abordarlos, quizás porque se situaban en contextos donde los alumnos tenían poca experiencia. En este sentido puede parecer que se asemeja a lo establecido por Jacobini y Wodewotzki (2006) al señalar que, después de trabajar con actividades que impliquen modelado, los estudiantes rompen con la idea de que la matemática es puramente abstracta y encuentran su enfoque práctico en la vida cotidiana.

Conclusiones

Los aspectos mencionados por los estudiantes de ingeniería en el foro en relación con las etapas del proceso de modelación matemática fueron considerados de diferente manera. Por ejemplo los estudiantes de ambos cursos hicieron escasa referencia a los aspectos que implicaran la construcción del modelo: *identificar variables y leyes por aplicar*, *plantear ecuación* y *establecer condiciones*, a pesar de que fueron tratadas en el aula, al resolver ejemplos de situaciones de la vida real con el proceso de modelación matemática. Sin embargo, los aspectos relacionados con la solución de la ecuación diferencial y su interpretación gráfica fueron los que más se mencionaron.

En referencia al contenido de las aportaciones de los estudiantes de ingeniería en el foro, al valorar una presentación electrónica, varió en función de la manera en que los estudiantes desarrollaron el proyecto de modelación matemática, es decir, en general al valorar su propio trabajo hicieron referencia a aspectos con diferente frecuencia que al valorar el trabajo de otro grupo.

El hecho de que se observen diferencias entre la frecuencia de los aspectos mencionados relacionados con las etapas del proceso de modelación matemática, confirma nuevamente que los estudiantes de ingeniería comprenden de diferente forma estas etapas. Parece ser que para los estudiantes, en general, el proceso de modelación matemática se reduce a la solución algorítmica de una ecuación diferencial como un paso teórico, apartándolas de sus campos de aplicación.

El estudio podría completarse introduciendo un enfoque experimental para analizar la comprensión del proceso de modelación matemática como, por ejemplo, proponiendo a los estudiantes una experiencia determinada que les permitiera tomar datos aunque ello pudiera favorecer la predicción más que la comprensión. Otra posibilidad podría ser considerar un ejemplo concreto para todos los estudiantes como podría ser el que pueden experimentar en otras asignaturas que están cursando en su carrera.

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente subvencionado por la Universidad de Salamanca [2017/00111/001 (K118/ 463AC01)]; European Union, Project Erasmus+ [2017-1-ES01-KA203-038491], Ministerio de Economía y Competividad de España [PSI2015-66802-P], RED8-Educación Matemática y Formación de Profesores [EDU2016-81994-REDT].

Referencias y bibliografía

Alsina, C. (2007). Teaching applications and modelling at tertiary level. En W. Blum, P. L. Galbraith, H-W, Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp. 469-474). New York: Springer.

Camarena, P. (2009). Mathematical models in the context of sciences. En M. Blomhøj & S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (pp. 117-131). Denmark: Roskilde University.

Chaachoua, H., & Saglam, A. (2006). Modelling by differential equations. *Teaching Mathematics and its Applications*, *25*(1), 15-22.

Cheng, C. K., Paré, D. E., Collimore, L. M., & Joordens, S. (2011). Assessing the effectiveness of a voluntary online discussion forum on improving students' course performance. Computers & Education, *56*(1), 253-261.

Córdoba, J. (2011). *La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA), México.

Crouch, R., & Haines, R. (2004). Mathematical modelling: Transitions between the real world and the mathematical model. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(2), 197-206.

Falsetti, M., & Rodriguez, M. (2005). A proposal for improving students' mathematical attitude based on mathematical modeling. *Teaching Mathematics and its Applications*, *24*(1), 14-28.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2004). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: ReproDigital.

Jacobini, O. R., & Wodewotzki, M. (2006). Mathematical modelling: A path to political reflection in the mathematics class. *Teaching Mathematics and its Applications*, *25*(1), 33-42.

Klymchuk, S., Zverkova, T., Gruenwald, N., & Sauerbier, G. (2008). Increasing engineering student´s awareness to environment through innovative teaching of mathematical modelling. *Teaching Mathematics and its Applications*, *27*(3), 123-130.

NCTM (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos*. México: 3D editorial.

Rowland, D. R. (2006). Student difficulties with units in differential equations in modelling contexts, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(5), 553-558.

Rowland, D. R., & Jovanoski, Z. (2004). Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(4), 503-516.

Santos, M., & Reyes, A. (2011). Teachers' use of computational tools to construct and explore dynamic mathematical models. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(3), 313-336.

Soon, W., Tirtasanjaya, L., & McInnes, B, (2011). Understanding the difficulties faced by engineering undergraduates in learning mathematical modelling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(8), 1023-1039.

Zill, D. (2012). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. México: Cengage.

Modelagem Matemática e projetos temáticos na Educação Básica: exemplos de duas maneiras de conduzir

Regina Helena de Oliveira Lino **Franchi**

Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC

Brasil

regina.franchi@ufabc.edu.br

Resumo

O objetivo principal deste artigo é exemplificar e discutir posibilidades de conduzir atividades de Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática Critica. Tem como base duas pesquisas, de cunho qualitativo, cujos dados foram produzidos a partir do desenvolvimento de projetos temáticos de Modelagem Matemática na Educação Básica, em contextos diferenciados. Os aporte teóricos utilizados referem-se à Modelagem Matemática e à Educação Matemática Crítica. Cada um dos projetos é descrito dando destaque para a forma como foram conduzidos, de acordo com os contextos escolares nos quais se inserem. Como resultados destacamos a possibilidade de desenvolver projetos de Modelagem mesmo em contextos escolares restritivos, bastando para isso adequar a forma de conduzir as atividades. Destacamos também a importância de o professor estar atento às oportunidades que se apresentam para trabalhar os conteúdos matemáticos assim como de estimular reflexões e posturas críticas nos estudantes.

Palavras chave: modelagem matemática, educação matemática crítica, educação básica, projetos temáticos, posturas críticas.

Introdução

No Brasil, assim como em outros países, muito se discute sobre possibilidades de utilização da Modelagem Matemática em contextos escolares e sobre sua caracterização na Educação Matemática. Há publicações a respeito de pesquisas e práticas de Modelagem, focalizando as maneiras de conduzir as atividades, a atuação dos alunos e dos professores nesse contexto, revelando diversidade de abordagens e perspectivas para a Modelagem no âmbito educacional.

Neste artigo enfoco o desenvolvimento de atividades de Modelagem na Educação Básica, por meio de projetos temáticos, com temas escolhidos pelos estudantes. São apresentados e discutidos dois projetos, com características diferentes, desenvolvidos em escolas brasileiras. Ambos fizeram parte de pesquisas, de cunho qualitativo, nas quais a Modelagem foi trabalhada segundo os pressupostos da Educação Matemática Crítica. As pesquisas completas que são aqui referenciadas podem ser obtidas em Ferreira (2013) e Campos (2015).

O objetivo principal deste artigo é exemplificar e discutir duas formas diferentes de conduzir atividades de Modelagem a partir de temas, com o enfoque da Educação Matemática Crítica. Para tanto, apresento inicialmente aspectos de cunho teórico sobre a Modelagem no âmbito educacional, abordando a perspectiva e a concepção de Modelagem considerada, estabelecendo relações com a Educação Matemática Crítica e com o desenvolvimento de projetos. Em seguida descrevo cada um dos projetos, dando destaque para a forma como foram conduzidos. Apresento também alguns dos resultados obtidos.

Modelagem, Projetos Temáticos e Educação Matemática Crítica

Pode-se dizer que a Modelagem Matemática tem sua origem na Matemática Aplicada, com a utilização de conceitos matemáticos para interpretar fenômenos e resolver problemas de outras áreas de conhecimento, que não a própria Matemática. Nesse contexto a Modelagem é entendida como o processo de formulação dos modelos matemáticos. Ela vem para a Educação Matemática quando professores e pesquisadores consideram a possibilidade de utilizá-la em aulas como estratégia para contextualizar, aplicar e ensinar Matemática.

Das reflexões sobre o uso da Modelagem nas aulas de Matemática e das pesquisas sobre o tema surgem diferentes concepções sobre a Modelagem na Educação Matemática, que diferem em alguns pontos, mas, que admitem como característica comum a abordagem de situações da realidade por meio da Matemática. A concepção adotada nos projetos aqui descritos é a de Barbosa (2001) que caracteriza a Modelagem Matemática como "um ambiente de aprendizagem em que os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade" (p. 31).

Autores como Bassanezi (2002), Burak (2010) e Franchi (2007), entre outros, defendem que a Modelagem pode ter como ponto de partida a investigação sobre temas de interesse dos estudantes. Problemas podem ser formulados e resolvidos tendo como referência os estudos a respeito do tema pesquisado:

> O desenvolvimento de projetos temáticos usando a Modelagem Matemática pode ser uma alternativa para educar por meio da Matemática. As investigações a respeito de temas escolhidos pelos estudantes, ou negociados com o professor, podem propiciar reflexões acerca dos contextos dos temas. Nos processos de organizar e representar os dados obtidos, assim como nas problematizações e procura de soluções, é possível abordar conceitos matemáticos relacionados. (Ferreira; Franchi, 2016, p. 2)

Quando nos ambientes de investigação das situações da realidade a Matemática é usada para compreender, interpretar, procurar soluções e se posicionar criticamente frente aos problemas investigados (Araújo, 2009; Franchi, 2002; Barbosa, 2001) a Modelagem se enquadra na chamada perspectiva sociocrítica (Kaiser & Siriramann, 2006), em consonância com a Educação Matemática Crítica. Para Araújo (2009) "o propósito central dessa perspectiva relaciona-se a objetivos pedagógicos de compreensão crítica do mundo" (p. 57).

Skovsmose (2007) indica que "a educação matemática crítica está ligada aos diferentes papéis possíveis que a educação matemática pode e poderia desempenhar, em um contexto sociopolítico particular" (p.74). Para o autor, a educação tem que ter papel ativo no combate às disparidades sociais, o que não é possível se as pessoas não questionam, não conhecem e não cobram seus direitos, não se posicionam diante das situações que vivem (Skovsmose, 2005). Nesse sentido a Educação Matemática Crítica deve promover a cidadania crítica (Skovsmose, 2008).

A participação dos estudantes em projetos de Modelagem desenvolvidos na perspectiva sociocrítica pode contribuir para a formação crítica do estudante e despertar "novos olhares, quer sobre a matemática e os fatos investigados, quer sobre a realidade social que se encontra ao seu redor" (Jacobini e Wodewotzki, 2006, p. 73).

As maneiras de conduzir atividades de Modelagem com as características que destacamos são muitas. A seguir exemplifico duas dessas maneiras, descrevendo projetos desenvolvidos em contextos diferentes, ambos com temas escolhidos pelos estudantes.

Projeto Um: tema único

O projeto, denominado neste artigo como Projeto Um, foi desenvolvido com alunos do nono ano do ensino fundamental de uma escola privada brasileira. Participaram 16 alunos com idades entre 14 e 16 anos. Foram encontros semanais, realizados em horario diferente e de forma independente das aulas regulares da disciplina Matemática, durante três meses.

A pesquisa, na qual o projeto se insere, foi desenvolvida por Campos (2015) e teve a seguinte questão de investigação: "Que contribuições uma proposta pedagógica orientada pela Modelagem Matemática pode trazer para o desenvolvimento de posturas críticas nos estudantes?". Buscou identificar as contribuições da forma de condução das atividades de Modelagem Matemática de uma sala de aula democrática e dos diálogos para desenvolvimento de posturas críticas nos estudantes. Por essa razão as atividades foram conduzidas de modo a estimular as manifestações e diálogos entre todos os envolvidos no projeto. Sempre que possível as decisões foram compartilhadas, oportunizando as iniciativas dos participantes.

Os estudantes foram convidados a escolher temas que desejassem estudar. Divididos em três grupos fizeram uma pesquisa inicial sobre os temas: Serra de Ouro Branco, Copa do Mundo e Cinema. Apresentaram essas pesquisa aos demais colegas da classe e, após discutirem sobre as possibilidades de continuidade nos diferentes temas, optaram por abordar um único tema, a saber, o tema Copa do Mundo. Vale ressaltar que o assunto despertou interesse pois o Brasil estava prestes a sediar a Copa de 2014.

Continuando os trabalhos, cada grupo realizou nova pesquisa exploratória sobre o tema, escolhendo os assuntos que iriam estudar. Os assuntos foram: manifestações populares e repercussões da Copa do Mundo de 2014; gastos com a Copa do Mundo de 2014; pontos positivos e negativos da realização da Copa do Mundo de 2014 no Brasil. Cada grupo sintetizou suas pesquisas em textos elaborados coletivamente. Houve outra apresentação aos colegas e decidiram aprofundar os estudos no tema "gastos com a Copa". Durante essa etapa foi possível perceber que os alunos não estavam se posicionando críticamente sobre o tema, muitas vezes apenas reproduzindo opiniões divulgadas pela mídia. Buscando estimular a reflexão crítica foram selecionadas reportagens com pontos de vista diversos sobre o tema e proposto que os participantes realizassem um estudo sobre elas. As reportagens foram debatidas, nessa oportunidade de forma mais crítica.

Os participantes se interessaram, em seguida, por estudar os gastos com a construção dos estádios. Fizeram um levantamento sobre os gastos de cada estádio, discutindo a pertinência da construção de cada um, naquela região e naquele momento. Procuraram entender também a origem das verbas destinadas às construções e as fontes de financiamento. Para entender as possibilidades de financiamento entrevistaram um comerciante local que havia obtido um financiamento de banco público brasileiro para a sua loja.

Tendo consciência sobre o montante dos gastos, e estimulados pelo professor, decidiram avaliar o que poderia ser feito localmente, na cidade em que residiam, com o valor gasto para a construção de dois dos estádios. Identificaram que havia déficit de moradias na cidade e resolveram avaliar as possibilidades de construção de casas populares. Pesquisaram sobre locais adequados de acordo com as necessidades da população, sobre o tipo de residência, sobre a localização da casa no terreno e sobre os custos de construção. Para isso fizeram pesquisas na internet, visitaram uma imobiliária, um conjunto habitacional e entrevistaram um morador desse conjunto. Em seguida fizeram a estimativa do número de casas que poderiam ser construídas dentro das condições escolhidas. Concluíram que com os gastos para construção de dois dos estádios poderiam ser construídas 11460 casas populares. Nas figuras 1 e 2 temos anotações dos estudantes sobre essas conclusões.

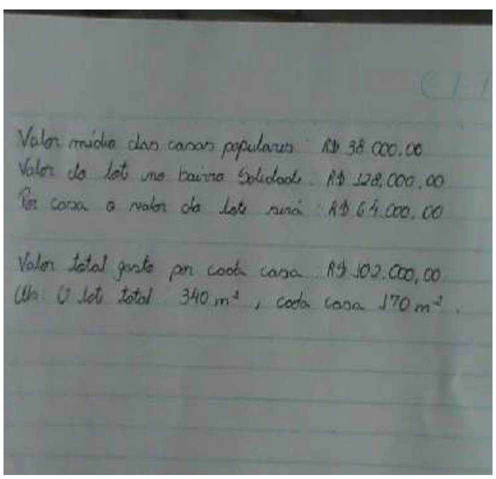


Figura 1. Custo da casa.

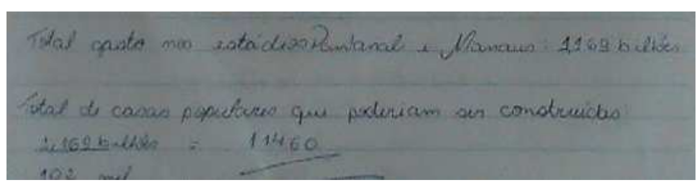


Figura 2. Estimativa do número de casas.

Tendo finalizado o projeto, apresentaram os resultados para os demais alunos da escola, conduzindo um debate sobre o tema. Ao final do estudo foi perceptível mudanças nas posturas dos estudantes, sendo questionadores, refletido críticamente sobre as informações, buscando alternativas variadas para resolver problemas e se posicionando críticamente frente às situações diversas que estudaram.

Projeto Dois: temas diversos

O projeto, denominado neste artigo de Projeto Dois, foi desenvolvido em duas turmas do primeiro ano do ensino médio, de uma escola pública brasileira. Em cada sala havia 35 estudantes, com idades variando entre 14 e 18 anos. Foi desenvolvido em aulas regulares da disciplina Matemática. Parte da carga horária foi reservada para o projeto e parte dedicada às demais atividades do currículo. Das seis aulas semanais da disciplina, em média duas foram utilizadas para a Modelagem, durante quatro meses.

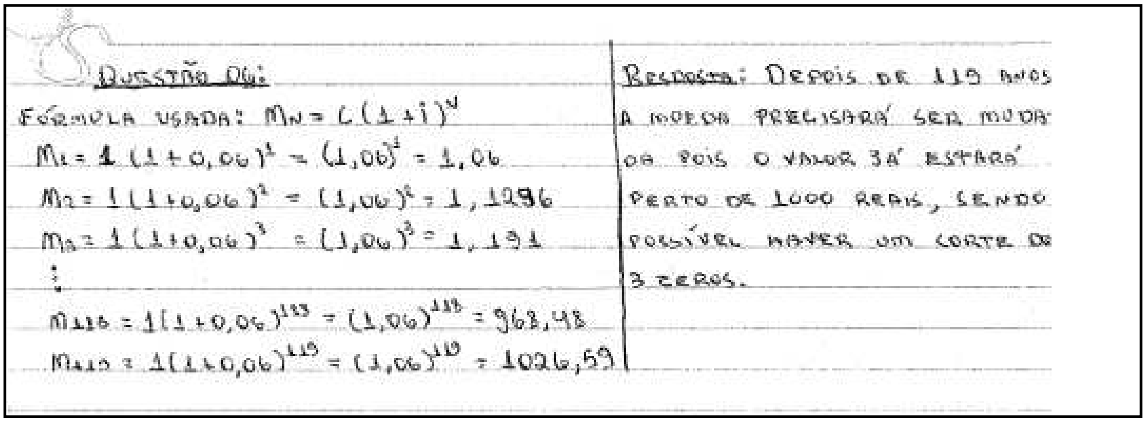
A pesquisa na qual o projeto se insere foi desenvolvida por Ferreira (2013) e teve a seguinte questão de investigação: "*Que contribuições uma proposta pedagógica baseada na Modelagem Matemática e no uso de Ambientes Informatizados pode trazer para a abordagem do conceito de Função na perspectiva da Educação Matemática Crítica?"*. Havia, portanto, dois aspectos principais a serem considerados: o desenvolvimento deveria possibilitar reflexões críticas nos contextos dos temas escolhidos e também possibilitar a abordagem dos conteúdos matemáticos relativos ao tema "funções", constante do plano de ensino da disciplina.

Inicialmente os alunos, organizados em grupos, escolheram temas de seu interesse. Cada grupo fez uma pesquisa exploratória sobre o tema escolhido, construiu um texto coletivo (em ambiente virtual colaborativo) e preparou sua apresentação para os demais colegas da sala. Alguns dos temas foram: pontos turísticos da cidade de Ouro Preto (Casa dos Contos), Segunda Guerra Mundial (holocausto), Música, Drogas (alcoolismo), Redes Sociais e Desenho Artístico (mangá). Um grupo de cada sala foi escolhido para apresentar inicialmente seu trabalho. Nessa etapa ocorreram discussões ligadas aos temas, cabendo aos grupos se posicionarem criticamente frente aos questionamentos levantados pelos colegas, defendendo suas opiniões com base nas pesquisas realizadas.

Na etapa seguinte foi trabalhado o conceito de função utilizando os dados apresentados pelos diferentes grupos a respeito dos temas pesquisados. Foram construídas situações nas quais os estudantes tinham que organizar os dados em tabelas com duas colunas, estabelecendo correspondências entre elas e avaliando suas características. Buscou-se, com isso, construir o conceito de função, que foi em seguida definido formalmente.

Depois os demais grupos apresentaram seus trabalhos, na mesma dinâmica anteriormente descrita, fomentando as discussões críticas a respeito dos temas. Em seguida foram feitas interpretações dos gráficos apresentados pelos grupos e por fim matematizações e elaborações de modelos matemáticos, tendo como base os dados dos trabalhos.

A título de exemplo trago uma problematização levantada por um dos grupos que visitou um ponto turístico da cidade, onde havia uma exposição de Moedas Brasileiras. Os estudantes se interessaram por entender os motivos que levaram o país a ter realizado tantas trocas de moedas no passado e descobriram que o motivo foi a grande desvalorização da moeda provocada pela inflação. Muitas das trocas ocorreram dividindo o valor por mil e mudando o nome da moeda. Trazendo para um contexto da época em que o projeto foi desenvolvido, buscaram fazer uma previsão sobre em que momento poderia haver necessidade de trocar a moeda novamente no Brasil. Desenvolveram estratégias para responder a pergunta, considerando a média de inflação dos últimos dez anos. Inicialmente fizeram cálculos ano a ano. Percebendo a regularidade, propuseram uma fórmula e, com uso de calculadoras obtiveram a resposta. Nas anotações apresentadas na Figura 3 estão os cálculos feitos por um dos grupos e a estimativa de 119 anos para uma possível troca de moedas.



QUESTÃO 06:

FÓRMULA USADA: $M_N = C(1+i)^N$

$M_1 = 1(1+0,06)^1 = (1,06)^1 = 1,06$

$M_2 = 1(1+0,06)^2 = (1,06)^2 = 1,1236$

$M_3 = 1(1+0,06)^3 = (1,06)^3 = 1,191$

$\vdots$

$M_{118} = 1(1+0,06)^{118} = (1,06)^{118} = 968,48$

$M_{119} = 1(1+0,06)^{119} = (1,06)^{119} = 1026,59$

RESPOSTA: DEPOIS DE 119 ANOS A MOEDA PRECISARÁ SER MUDADA POIS O VALOR JÁ ESTARÁ PERTO DE 1000 REAIS, SENDO POSSÍVEL HAVER UM CORTE DE 3 ZEROS.

Figura 3: Estimativa da troca de moedas.

A Matemática foi utilizada para encontrar uma solução para o problema proposto e, com isso, foi possível discutir a importância do controle da inflação para a economia do país e para a vida dos cidadãos.

Considerações Finais

Os dois projetos descritos referem-se a pesquisas relativas à Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática Crítica. Foram desenvolvidos de forma a estimular a reflexão e a crítica dos estudantes sobre os temas abordados.

A forma como cada um foi conduzido foi determinada pelos contextos nos quais estavam inseridos. O Projeto Dois foi desenvolvido nas aulas de Matemática, em uma condição bem restrita, uma vez que havia necessidade de cumprir o planejamento da disciplina, de acordo com as normas da escola, inclusive com calendário comum estabelecido com os demais professores das outras salas do mesmo ano. Embora se buscasse flexibilizar o currículo abrindo espaço para a Modelagem, era preciso cumprir o programa. A estratégia utilizada foi dividir as aulas, reservando parte delas para a Modelagem. Embora os grupos pudessem trabalhar livremente com os temas escolhidos, houve o olhar atento do professor para perceber as oportunidades de abordar o conteúdo matemático previsto (no caso, funções) a partir dos dados coletados pelos grupos nos diferentes temas e das matematizações feitas buscando responder às questões levantadas pelos grupos. Então, a partir de certo tempo, não houve mais a necessidade de dividir as aulas entre conteúdo e Modelagem, as duas coisas se integraram. Cada grupo escolheu um tema diferente mas tudo foi socializado, de modo que todos conheceram todos os assuntos e trabalharam com eles.

Já o Projeto Um foi desenvolvido em horário separado das aulas regulares de Matemática. Não havia preocupação com o conteúdo matemático em si. Mas é claro que também foram aproveitadas as oportunidades de trabalhar a Matemática que apareceu relacionada aos assuntos estudados. Nesse projeto, embora os grupos tivessem inicialmente escolhido temas diferentes, as decisões foram sendo tomadas na direção de trabalhar um tema único para os três grupos formados. O tema foi sendo delimitado ao longo das atividades, procurando focar em algo mais específico. Dessa forma, o tema geral Copa do Mundo foi se transformando em "gastos com a Copa" e depois, mais específicamente, gastos com os estádios. Vale destacar a oportunidade percebida pelo professor em trazer o tema geral para uma reflexão crítica local, que de certa forma transformou o tema Copa no Brasil em Habitação na cidade de Ouro Branco. Isso gerou um envolvimento ainda maior dos estudantes.

Em ambos os projetos foi perceptível a mudança de comportamento dos estudantes que, no início tiveram uma participação de certa forma tímida, mas, que foram, ao longo do trabalho, se envolvendo e participando mais, tomando decisões, expondo suas ideias e expressando opiniões. Por meio da Matemática foi possível compreender a realidade, encontrar soluções para os problemas formulados e refletir de forma crítica sobre os contextos estudados. Foi possível perceber também o protagonismo dos participantes, não apenas nas iniciativas durante os trabalhos, como também nas alternativas que encontraram e propuseram para modificar os contextos estudados. Dessa forma foi possível identificar o potencial das atividades do ponto de vista pedagógico, com relação às posibilidades de aprendizagem da Matemática e do desenvolvimento de posturas críticas nos participantes. Destacamos também os resultados das pesquisas desenvolvidas no que diz respeito às contribuições da Modelagem Matemática para a Educação Matemática Crítica.

Referencias y bibliografía

Araújo, J. L. (2009). Uma abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. *Alexandria, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia.* 2,2, 55-68.

Barbosa, J. C. (2001) *Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores.* Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Bassanezi, R. C. (2002) *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.* São Paulo: Contexto.

Burak, D. (2010) Modelagem Matemática so bum olhar da Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. *Revista de Modelagem na Educação Matemática.* 1,1, 10-27.

Campos, D. G. (2015) *O desenvolvimento de posturas críticas nos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental por meio da Modelagem Matemática.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Brasil.

Ferreira, N. S. (2013) *Modelagem Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação como ambiente para a abordagem do conceito de Função segundo a Educação Matemática Crítica.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Brasil.

Franchi, R. H. O. L. (2001) *Uma proposta de matemática para cursos de Engenharia utilizando modelagem matemática e informática.* Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Franchi, R. H. O. L. (2007) Ambientes de aprendizagem fundamentados na Modelagem Matemática e na Informática como possibilidades para a Educação Matemática. *Modelagem Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais.* Recife: SBEM. 3,177-193.

Ferreira, N. S. & Franchi, R. H. O. L. (2017) *Contribuições das tecnologías para ambientes de* *aprendizagem de Modelagem Matemática no Ensino Médio*. Conferência Nacional de Modelagem na Educação Matemática, X, Maringá 2017. Anais. Maringá: UEM, p. 1-13

Jacobini, O. R., & Wodewotzki, M. L. L. (2006) Uma reflexão sobre a Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática Crítica. *Bolema*, 25, 71-88.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006) A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education,* 38 (3), 302-310.

Skovsmose, O. (2005). *Educação Matemática Crítica: A Questão da Democracia.* Campinas: Papirus.

Skovsmose, O. (2007). *Educação Crítica - Incerteza, Matemática, Responsabilidade.* São Paulo: Cortez.

Skovsmose, O. (2008). *Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica.* Campinas: Papirus.

Propuesta de enseñanza: los recorridos del Sol.

Orfa Yanet **Quintero** Alzate
Institución Educativa El Corazón
Colombia
oryaquial@hotmail.com
Diana Marcela **Cadavid** Urrego
Colegio Santa Leoní Aviat
Colombia
cadavidu@gmail.com
Octavio Arley **Velásquez** Londoño
Institución Educativa Campo Valdés
Colombia
ovelasquez.iecampovaldes@gmail.com

Resumen

En este trabajo se hace una propuesta de enseñanza para las áreas de ciencias naturales y exactas, con la posibilidad de integrarse con otras áreas. Se hace uso de la geometría para construir un modelo que permita visualizar el recorrido del Sol en diferentes ciudades en los días de solsticios y equinoccios, esto con el objetivo de que el estudiante reconozca su entorno y lo lleve a leer una realidad que a veces parece lejana. Se desarrolla con estudiantes de grado undécimo de una institución privada del municipio de Copacabana (Ant). Se realiza una introducción a la actividad, un análisis del modelo y un trabajo conjunto para la construcción de la maqueta. Al final de este las estudiantes manifiestan agrado por la actividad debido a que logran encontrarle una finalidad, por ejemplo, a la construcción de rectas paralelas y perpendiculares al ver su aplicabilidad en situaciones reales.

Palabras clave: Paralelismo, perpendicularidad, latitud, solsticio, equinoccio, coordenadas, modelo geocéntrico.

Introducción

En la antigüedad se propusieron varios modelos del universo, pero solo uno surge como ganador dentro de todos estos, el modelo geocéntrico propuesto por Claudio Ptolomeo, que con el paso del tiempo es mejorado. Este modelo fue una estructura completa desde el punto de vista matemático, solo que la sencillez y, las diferencias en los cálculos con las mediciones hechas que se van presentando desde el siglo XVI con la creación de instrumentos más precisos que los anteriores le dan mayor validez a un nuevo modelo, el heliocéntrico. La estructuración de un modelo a partir de la matemática le da validez y seriedad a este, pero en el ámbito educativo es necesario un modelo adicional que ayude a entender o visualizar como se presenta el modelo matemático. Por eso, a través de la historia es muy común encontrar instrumentos educativos (modelos representativos) que ayudan a entender cómo se ha llevado a cabo el proceso de creación y comprensión del conocimiento científico.

En los instrumentos que tradicionalmente se han utilizado para enseñar astronomía y matemática aplicada, como lo plantean Ten Y Monros, 1985; están la esfera armilar, el zócalo de Ptolomeo, el torquetum, la ballestilla, todos estos con el objetivo de facilitar la comprensión de la bóveda celeste.

En este trabajo se propone construir un instrumento que como los anteriores, ayude a la comprensión de un fenómeno físico periódico, como lo es el recorrido aparente del sol alrededor de la Tierra. Para este se recurre al modelo geocéntrico y se hace uso de conceptos geométricos como paralelismo, perpendicularidad, arco, circunferencia, área, ángulo; reflejando así la integración de diversas ciencias, en este caso, geometría y astronomía en función de un solo objetivo.

En el campo educativo, no cabe duda de la importancia del aprendizaje de la geometría para la comprensión de modelos matemáticos que describen un sinnúmero de fenómenos físicos que se observan en el Universo. Pero es, su tratamiento en la escuela el que presenta dificultades y al final de un proceso los resultados que evidencian los estudiantes quizás no son los esperados. Una de las recomendaciones es enfatizar en la construcción de significados de los contenidos geométricos a través de su utilidad, aquí los estudiantes deberán pasar de un control empírico a un control por parte del razonamiento, construyendo así el saber geométrico. (Gadino, 2007) Es tarea pues del docente, encontrar situaciones que busquen analogías, y generalizaciones donde se descubran aplicaciones en distintos contextos, se propende entonces desarrollar según Hoffer, 1981 (Bomone,Chiappero y Pellegrino, 2007) las habilidades en geometría como son: visuales, verbales, de dibujo, lógicas y de aplicación.

Con base en lo anterior, esta propuesta quiere evidenciar que lo que se enseña en la escuela puede tener una permanente aplicación en la vida real, buscando así que a medida que se comprenden y generalicen los conceptos geométricos los estudiantes podrán leer mejor su entorno.

Teniendo en cuenta los estándares básicos de aprendizaje, este trabajo se alinea con algunos de ellos en los que la geometría toma importancia para la modelación de situaciones física. Uno de estos es: “Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas”, El estándar corresponde al pensamiento espacial y sistemas geométricos para el grado 9.

Objetivo general

Desarrollar una propuesta de enseñanza de los recorridos aparentes del Sol en el grado undécimo, haciendo uso de conceptos geométricos y teniendo como base al modelo geocéntrico.

Objetivos específicos

- Aplicar los teoremas de paralelismo y perpendicularidad de las rectas para generar planos paralelos.
- Relacionar la latitud de una ciudad con el recorrido del sol, teniendo presente el eje de rotación de la tierra.
- Construir una maqueta que permita la visualización de los recorridos aparentes del Sol en los días de solsticio y de equinoccio.
- Mostrar la interdisciplinariedad de la actividad propuesta.

Desarrollo de la propuesta

Contextualización:

Para el desarrollo de la actividad se elige el grado undécimo del Hogar y Colegio Santa Leoní Aviat, una Institución de carácter privada del municipio de Copacabana (Antioquia) que cuenta con 65 niñas internas, las cuales pertenecen al hogar debido a que poseen bajos recursos económico y sus familias no pueden estar con ellas por cuestiones laborales, porque viven en veredas alejadas de la Institución o porque quienes se hacen responsables de ellas no pueden tenerlas de tiempo completo en sus hogares.

Actividad previa:

Previo a la realización de la actividad, se hace un recuento de cómo se producen las estaciones del año y la importancia de los equinoccios y los solsticios para el inicio de estas. Para ello se hace una lluvia de ideas con los conocimientos de las estudiantes (ellas trabajaron el tema en octavo) y luego se proyecta un video para dejar claras las ideas fundamentales sobre los equinoccios y solsticios.

También con el apoyo de un globo terráqueo, se recuerda cuáles son las coordenadas terrestres y cómo obtener la latitud y longitud de determinada ciudad, centrándose en la latitud ya que es la coordenada que se utilizaría en la actividad. Las estudiantes quedan con el compromiso de consultar de alguna ciudad su latitud, clima y altura con el objetivo de analizar la relación de estas variables con la ubicación de la ciudad y de integrar otras áreas del conocimiento en la actividad.

Finalmente, se recuerda cómo construir rectas paralelas y perpendiculares con regla y compás, con el fin de que se puedan realizar construcciones precisas y que las estudiantes apliquen dichos conceptos en la construcción de modelos reales y encuentren significativo su aprendizaje.

Construcción de la maqueta:

Con la orientación de quienes desarrollamos esta propuesta y una guía diseñada previamente con las indicaciones para la construcción del modelo, las estudiantes organizadas en grupos de tres construyen sus maquetas, teniendo en cuenta ciudades que se encontraban en diferentes latitudes; esto con el fin de observar las trayectorias del sol en un mismo día pero en un lugar diferente de la tierra.

Con el desarrollo de la actividad, las estudiantes logran encontrarle una finalidad a la construcción de rectas paralelas y perpendiculares debido a que pueden ver su aplicabilidad en situaciones reales (poder generar planos paralelos para representar los solsticios de verano e invierno) y en áreas del conocimiento que son de su interés (la astronomía).


Figura 1 y 2. Proceso de construcción de la maqueta

Socialización y conclusiones:

Luego de que las estudiantes terminaran de construir sus modelos, se muestra cómo varía la duración del día en las diferentes ciudades de acuerdo con la latitud a la que se encuentran y se analiza cómo ésta se relaciona con el clima de dichos lugares y lo que implica la relatividad cuando se habla de los equinoccios y solsticios con respecto a los hemisferios terrestres.

Las estudiantes manifiestan asombro al observar sus trabajos debido a que logran comprender por qué en algunos lugares del mundo (como por ejemplo en Rusia, que lo vieron con la transmisión del mundial 2018) hay luz solar a las 8:00 pm.

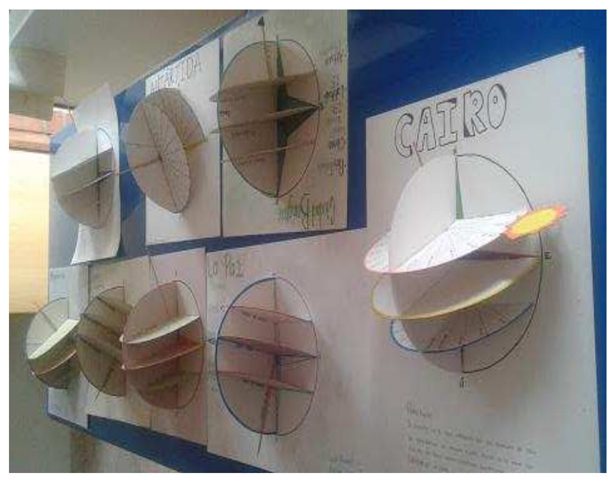



Figura 3 y 4. Momento de socialización

Conclusiones:

La construcción de la maqueta permitió mostrar a las estudiantes una de las aplicaciones reales que tienen los teoremas de paralelismo y perpendicularidad, aún teniendo en cuenta que la interpretación de la construcción era espacial, tomando así un nuevo sentido el uso de los conceptos geométricos estudiados en clase.

En el área de ciencias sociales se trabajan las coordenadas geográficas como puntos en la superficie del planeta desconociendo que están relacionadas con las coordenadas esféricas y que son necesarias para comprender el recorrido aparente del Sol. A través de la maqueta se observa esta relación y la interdisciplinariedad para abordar un fenómeno.

Recomendación:

Posterior a este trabajo se puede hacer un abordaje matemático que relacione la latitud de una ciudad y el tiempo de presencia del Sol por encima del horizonte local.

Referencias y bibliografía

Baena Ruiz, J., Coriat Benarroch, M., Marín del Moral, A & Martínez López, P.S. (1996). La esfera. Editorial Sintes. Barcelona. 79-94

Bomone, I. M., Chiappero, M. C & Pellegrino, M. A. (2007). Enseñar geometría: necesidad y desafío. *Revista Novedades Educativas, 195, 63-65.*

Gadino, A. (2007). Geometría en la escuela: El cuánto, el para qué, el qué y el cómo. *Revista Novedades Educativas, 195, 58-62.*

Monros, M. A., Ten, A. E. (1985). Historia y enseñanza de la astronomía, II. La posición de los cuerpos celestes. *Revista enseñanza de las ciencias, Vol 3, 47-56.*

A (re) construção de saberes matemáticos proporcionada pela metodologiade Ensino-Aprendizagem-Avaliação de derivadas através da Resolução de Problemas

Erica Marlúcia Leite **Pagani**
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Brasil
ericapagani@terra.com.br

Resumo

Este artigo é um recorte dos resultados de uma tese de doutorado em que se investigoucomo ocorre o ensino e a aprendizagem de derivadas no contexto da Resolução de Problemas. A pesquisa é qualitativa e foi desenvolvida por meio da observação participante e análise documental, numa turma de 2º ano do Ensino Médio integrado ao Técnico. Assumimos a concepção de resolução de problemas como um ponto de partida para ensinar Matemática, entendida como um meio de(re)construir conhecimentos a partir de anteriores e ao longo do processo de resolução de um ou mais problemas.Assim é considerada como uma metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação permitindo que o aluno possa construir seu próprio aprendizado com compreensão e significado. Retratamos alguns episódios ocorridos durante a realização das atividades e apresentamos recortes que nos permitiram perceber como a (re)construção de conhecimentos é favorecida ao se ensinar derivadas através da resolução de problemas.

Palavras chave: Educação Matemática, resolução de problemas, ensino profissionalizante,derivadas, (re)construção de saberes.

Introdução

Este trabalho apresenta parte dos resultados de uma tese de doutorado desenvolvida com estudantes do 2º ano do Ensino Médio integrado ao Técnico do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), na qual investigamos como ocorre o ensino-aprendizagem-avaliação de derivadas através da Resolução de Problemas.

Julgamos adequado,primeiramente,ouvir professores e alunos do curso técnico de Eletrônica sobre a importância dos conteúdos de Cálculo na grade curricular e sobre suas aplicabilidades na área técnica. Nesse sentido, uma das nossas primeiras ações de pesquisa foi conhecer, através de questionários, o que professores das disciplinas técnicas e alunos do 3º ano do curso técnico de Eletrônica têm a dizer sobre a utilização dos conteúdos de Cálculo em disciplinas da área técnica de Eletrônica (Pagani, Allevato, 2014a). Através das vozes desses professores e alunos constatamos que o ensino de derivadas[1] e integrais no Ensino Médio Técnico de Eletrônica do CEFET-MG realmente se fazia necessário e carecia de atenção.

O grupo que participou da pesquisa desenvolvida em sala de aula era composto por 34 alunos que desenvolveram as atividades em duplas. Eram alunos de 16 e 17 anos de idade, que cursavam as disciplinas técnicas no período da manhã e as disciplinas do núcleo comum, como a Matemática, no turno da tarde. Não havia nesse grupo alunos que estivessem repetindo a série, de maneira que os conteúdos relativos a derivadas eram, até então, supostamente desconhecidos pelos mesmos.

Metodologia da pesquisa

Este trabalho se inserenuma pesquisa de abordagem qualitativa realizada por meio da observação participante e da análise documental.

A pesquisa qualitativa tem como principal objetivo compreender os fenômenos que se observa, favorecendo o enfoque interpretativo e presumindo que o conhecimento vai se (re)construindo constantemente nas relações estabelecidas entre os sujeitos de pesquisa. Não se preocupa com a representatividade numérica dos dados, nem trabalha com instrumentos estatísticos ou regras. Ao contrário, esse tipo de abordagem enfatiza a descrição e a indução (Bogdan; Biklen, 1994).

Na pesquisa que realizamos, a partir da proposição de problemas (problema gerador) os alunos eram estimulados a construir conhecimentos sobre derivadas, recorrendo, inicialmente, aos seus conhecimentos de Matemática. Os alunos trabalharam em grupos (duplas), discutiram processos de resolução do problema, analisaram as soluções, sempre estimulados e orientados pela professora pesquisadora. A professora pesquisadora também pode avaliarcontinuamente o ensino e a aprendizagem, adequando e reformulando os problemas, quando necessário. Dessa forma é que entendemos que a investigação que aqui relatamos se insere na modalidade de pesquisa participante.Os documentos utilizados para obtenção de informações são os manuscritos com os registros das resoluções dos problemas propostos aos alunos e que foram entregues à professora pesquisadora.

O ensino e aprendizagem de Cálculo

A partir do nosso interesse no ensino e na aprendizagem de Cálculo, julgamos conveniente fazer um levantamento de algumas teses e dissertações (Pagani; Allevato, 2014b) que, de alguma forma, abordassem esse tema, a fim de construirmos um balanço que apontasse os rumos que as pesquisas estão seguindo e quais contribuições têm trazido em seus textos.

Como era de se esperar, este mapeamento realizado apontou que, apesar de existirem alguns trabalhos que discutem o Cálculo no Ensino Médio, a maior parte das pesquisas discute o Cálculo no âmbito do Ensino Superior. Esse mapeamento nos levou a perceber que as dificuldades existentes no ensino e na aprendizagem de Cálculo, evidenciadas pelos altos índices de reprovação nos cursos iniciais, constituem a principal motivação para a realização dos trabalhos analisados.

Observamos, na literatura pesquisada, que o debate sobre o ensino e a aprendizagem de conteúdos e ideias básicas do cálculo no ensino médio ainda é bastante limitado. Todavia, há

[1]Quando usamos a palavra derivadas, estamos nos referindo a derivadas de funções reais de uma variável real

consenso quanto ao ensino de ideias e elementos do Cálculo no Ensino Médio ser bastante pertinente nos dias de hoje, uma vez que esses conteúdos podem estar ao alcance de alunos desse nível de ensino e que o cálculo é uma disciplina de relevante importância no desenvolvimento da ciência e da tecnologia.

Os estudos realizados apontam que as discussões sobre o ensino e a aprendizagem de conteúdos de Cálculo no Ensino Médio ainda carecem de atenção e reforçaram nossa proposta de investigar novas metodologias que favoreçam o ensino-aprendizagem de derivadas nesse nível de ensino. Vale ressaltar que não encontramos na literatura pesquisada trabalhos que investiguem o ensino de Cálculo no contexto do Ensino Médio Técnico. Isso nos levou a crer que há carência de investigações sobre o ensino de Cálculo na Educação Básica.

O ensino de Matemática através da Resolução de Problemas

As investigações sobre Resolução de Problemas surgem com George Polya, na década de 1940 e ressurgem na década de 1970, após o declínio da Matemática Moderna e, no fim desse período, a Resolução de Problemas emerge na Educação Matemáticae é caracterizada por considerar o aluno, no processo de ensino e aprendizagem, um ser ativo, e por primar pela construção do conhecimento, e não pela simples repetição de técnicas e algoritmos.

A partir da década de 1980, principalmente, foram feitos grandes esforços no sentido de desenvolver materiais e currículos que pudessem favorecer o trabalho com Resolução de Problemas na Matemática. Esses esforços foram e continuam sendo úteis para ajudar os professores interessados em tornar a Resolução de Problemas o foco em suas salas de aulas. Entretanto, isso não foi suficiente para que esse trabalho em sala de aula atingisse o sucesso desejado, e isso se deve, provavelmente, à pouca ou quase nenhuma concordância entre as diferentes formas de se trabalhar com Resolução de Problemas sendo ela o foco da matemática escolar (Onuchic, 1999; Schroeder e Lester, 1989). Uma das maneiras de distinguir essas diferentes concepções sobre Resolução de Problemas, apresentada por Hatfield (1978 apud Shroeder, Lester, 1989, p. 32) e ratificada por Schroeder e Lester (1989),continua presente no ambiente de ensino, sendo elas: (1) Ensinar **sobre** a Resolução de Problemas,(2) Ensinar (Matemática) **para** a Resolução de Problemas,(3) Ensinar (Matemática) **através** da Resolução de Problemas.

Assumimosque problema é "tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em fazer"(Onuchic; Allevato, 2011, p. 81) e conduzimos o trabalho em sala de aula sob a perspectivada terceira concepção, em que a resolução de problemas é considerada como um ponto de partida para ensinar Matemática, entendida como um meio de se obter novos conhecimentos a partir de anteriores ou ao longo do processo de resolução de um ou mais problemas.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas é uma perspectiva de ensino que está apoiada na tríade ensino-aprendizagem-avaliação e que utiliza o problema para desenvolver a construção do conhecimento de algum conceito matemático de forma que o aluno possa construir seu próprio aprendizado com compreensão e significado.O ensino-aprendizagem de tópicos matemáticos começa a partir de um problema, que seja útil ao desenvolvimento do conteúdo; ou seja, que contenha aspectos fundamentais desse tópico matemático que se quer trabalhar em aula. Encaminhamos as atividades em sala de aula segundo essa metodologia, utilizando 9 (nove) etapas apresentadas por Allevato e Onuchic (2009): 1) Preparação do problema- Selecionar o problema visando a construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado de problema gerador. 2) Leitura individual. 3) Leitura em conjunto-Formar grupos (duplas) e solicitar a leitura do problema. 4) Resolução do problema- Os alunos, em seus grupos, buscam resolvê-lo. 5) Observar e incentivar- O professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. 6) Registro das soluções na lousa-representantes dos grupos registram na lousa, suas soluções. 7) Plenária-Para essa etapa todos os alunos são convidados a discutirem as diferentes soluções registradas na lousa pelos colegas. 8) Busca do consenso- Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto. 9) Formalização do conteúdo-Neste momento, denominado “formalização”, o professor registra na lousa uma apresentação “formal”- organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema.

Saberes matemáticos e (re)construção de conhecimentos

As atividades realizadas pelos alunos e as respostas às mesmas registraram episódios que nos levaram a estruturar a análise e a discussão dos dados segundo categorias seguintes, dentre elas, os saberes matemáticos e (re)construção de conhecimentos.Não discutiremos aqui todas as atividades realizadas pelos alunos, e sim, recortes das resoluções entregues por eles. Analisando os protocolos entregues pelos alunos, esses recortes foram escolhidos por realçarem elementos e episódios que evidenciam saberes matemáticos e estratégias utilizadas pelo grupo de alunos para construírem o conceito de derivadas e reconstruírem outros.Para realizarmos o trabalho, cujo objetivo principal era desenvolver o conceito de derivada de uma função, iniciamos com problemas que tratavam do conceito de taxa de variação média, como a seguir, apresentado na figura 01:

Um corpo em movimento retilíneo inicia seu movimento num instante t=0. A Tabela I informa sua posição em cada instante t da sua trajetória:

Tempo (t) em segundos	Posição (s) em metros
0	0
1	$1/4=0,25$
2	1
3	$9/4=2,25$
4	4
5	$25/4=6,25$

Tabela I

A partir das informações acima, registre na segunda coluna da Tabela II o valor (em metros) da distância percorrida pelo corpo por segundo em cada intervalo de tempo Δt :

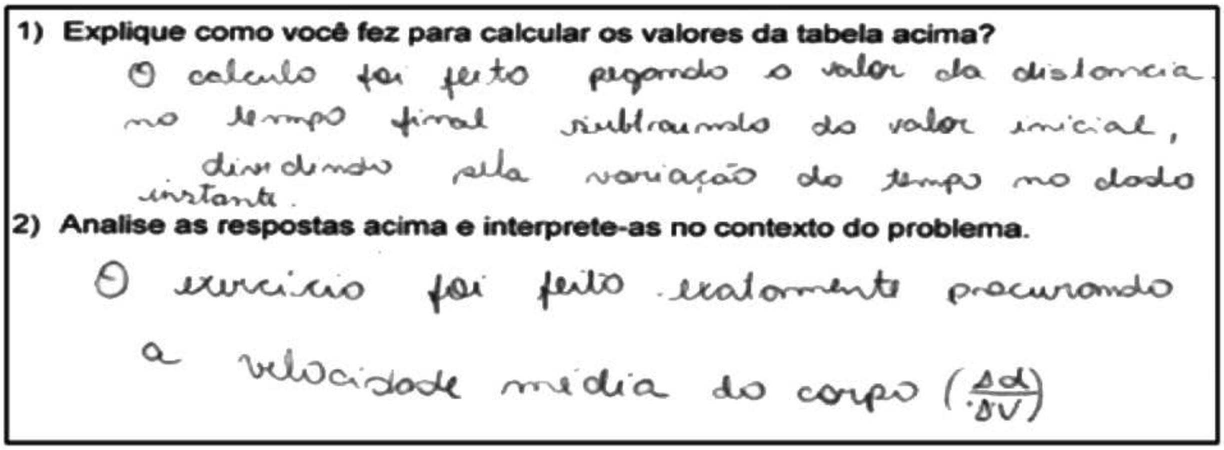
Tempo (Δt) em segundos	Deslocamento por segundo (em média)
de t=0 a t=1	
de t=0 a t=2	
de t=2 a t=5	
de t=1 a t=4	
de t=0 a t=5	

Tabela II

1) Explique como você fez para calcular os valores da tabela acima.
2) Analise as respostas acima e interprete-as no contexto do problema.

Figura 01. Problema 01/atividade 01

Nos protocolos analisados, observamos que todos os alunos entenderam o que foi solicitado na Tabela II e, desconsiderando os pequenos erros de cálculo, realizaram essa parte da atividade corretamente. Entretanto, ao responderem os itens 1 e 2 deste problema, apresentaram respostas como as das figuras 2 e 3 a seguir.


1) Explique como você fez para calcular os valores da tabela acima?

O calculo foi feito pegando o valor da distancia no tempo final subtraindo do valor inicial, dividindo pela variação do tempo no dado instante.

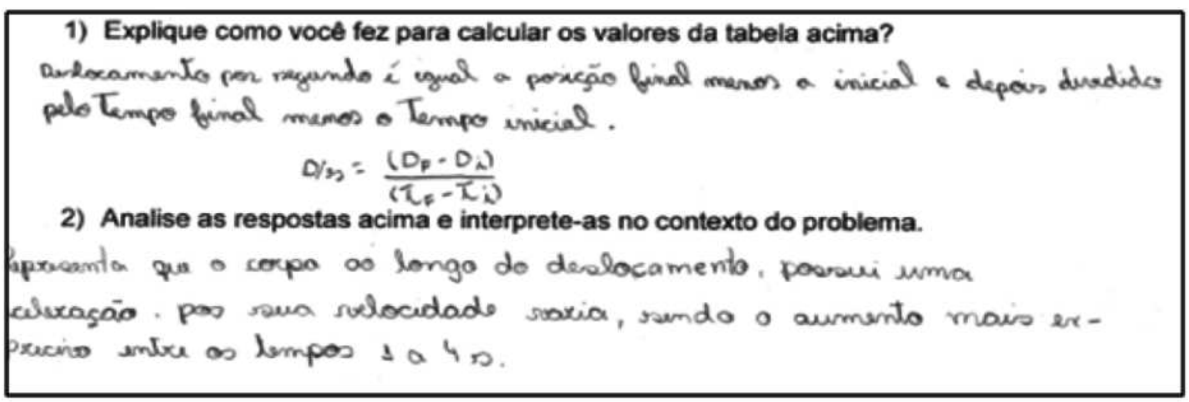
2) Analise as respostas acima e interprete-as no contexto do problema.

O exercicio foi feito exatamente procurando a velocidade média do corpo $\left(\frac{\Delta d}{\Delta V}\right)$

Figura 02

Percebemos nas respostas da figura anterior que a dupla conseguiu descrever corretamente como resolveu essa parte do problema. Em seguida, relacionou o deslocamento por segundocalculado à velocidade média do corpo, embora cometendo um pequeno erro ao representar essa velocidade por $\frac{\Delta d}{\Delta V}$ ao invés de $\frac{\Delta d}{\Delta t}$.

Outros participantes procederam da mesma maneira para realizarem os cálculos, entretanto, foram além ao responderem o item 2.


1) Explique como você fez para calcular os valores da tabela acima?

Deslocamento por segundo é igual a posição final menos a inicial e depois dividido pelo Tempo final menos o Tempo inicial.

$D/s_2 = \frac{(D_f - D_i)}{(T_f - T_i)}$

2) Analise as respostas acima e interprete-as no contexto do problema.

Apresenta que o corpo ao longo do deslocamento, possui uma aceleração. pois sua velocidade varia, sendo o aumento mais expressivo entre os tempos 1 a 4 s.

Figura 03

A resposta do item 1, apresentada por essa dupla, também reflete a compreensão de que o deslocamento solicitado é dado pela variação do deslocamento dividido pela variação do tempo no intervalo dado. Ao responderem o item 2, os integrantes da dupla deixaram claro que associaram esse deslocamento à velocidade média e perceberam a variação da velocidade média, associando-a à aceleração positiva do objeto. O problema permitiu aos alunos perceberem detalhes das variações, variações nas variações, que ocorreram nessa situação relacionada ao deslocamento de um corpo. Isso indica que o aluno foi mostrando "frações" do seu conhecimento construído durante o processo de ensino de derivadas através da Resolução de Problemas. Percebemos aí momentos em que os alunos tentaram relacionar o conteúdo matemático com outros, como os da Física, o que sugere que essa associação é facilitada pela metodologia de ensino através da Resolução de Problemas, pois ela permitiu ao aluno se expressar em cada uma das etapas propostas e utilizadas nesta pesquisa para encaminhar as atividades em sala de aula. Agora apresentamos outras respostas na figura 04 a seguir:

Tempo (Δt) em segundos	Deslocamento por segundo (em média)
de t=0 a t=1	1/4 - 0/1 = 1/4 = 0,25 m/s
de t=0 a t=2	1 - 0/2 = 1/2 = 0,5 m/s
de t=2 a t=5	25/4 - 1/3 = 1,75 m/s
de t=1 a t=4	4 - 1/4/3 = 1,25 m/s
de t=0 a t=5	25/4 - 0/5 = 1,25 m/s

Tabela II

1) Explique como você fez para calcular os valores da tabela acima?

Calculamos a velocidade media (deslocamento por segundo) com a variação da posição (Posição final - posição inicial) dividida pela variação do tempo.

2) Analise as respostas acima e interprete-as no contexto do problema.

O deslocamento por segundo aumenta de forma proporcional sendo 0,25 m/s

Figura 04

Esta figura retrata que alguns alunos, na tentativa de encontrarem padrões nas respostas, que lhes permitissem estabelecer relações com os conteúdos apre(e)ndidos no decorrer da trajetória escolar, cometeram enganos que nos fizeram retomar conceitos, como o de proporcionalidade, a fim de sanar as dúvidas que se apresentavam.

As respostas deste protocolam mostram que a dupla realizou corretamente os cálculos do deslocamento médio; no entanto, ao interpretá-lo no contexto do problema, "percebeu" que entre algumas linhas da Tabela II havia uma variação de 0,25. Com isso, acreditaram, erroneamente, que essa "regularidade" indicava uma relação de proporcionalidade. Ao recolhermos as atividades, convidamos essa dupla para registrar sua resolução na lousa, colocando-a para reflexão com os demais alunos, em plenária. Isso proporcionou um debate bastante produtivo sobre o conceito de proporcionalidade e nos deu a oportunidade de esclarecer aos alunos, ainda que rapidamente, o que são grandezas direta e inversamente proporcionais. Após sanarmos as dúvidas, destacamos a definição formal de proporcionalidade.

Desse modo, o momento da plenária nos oportunizou esclarecer dúvidas, tanto com relação a conhecimentos prévios quanto com relação ao novo conteúdo que estava sendo construído, além de nos permitir mostrar a necessidade e a relevância de uma escrita matematicamente correta. A professora pesquisadora salientou a importância dos alunos se expressarem, de questionarem e de ajudarem todo o grupo a chegar a um consenso sobre a resposta correta. Paraconcluir o trabalho com o Problema 01/Atividade 01, a professora pesquisadora formalizou a definição de taxa de variação média de uma função num intervalo dado.

.Além disso, como já mencionado anteriormente, os alunos também já tinham conhecimento sobre velocidade e aceleração de um corpo. Observamos que o ensino de derivadas através da Resolução de Problemas permitiu que esses alunos identificassem conhecimentos anteriores e promovessem relações entre a Física e a Matemática. Dessa forma, foram construindo novos conhecimentos, (re)construindo outros e, nesse movimento, identificaram relações entre conteúdos de Matemática ou entre conteúdos de Matemática e outras áreas do conhecimento.

Retratamos alguns momentos ocorridos durante a realização das atividades e apresentamos recortes que nos permitiram perceber como a (re)construção de conhecimentos é favorecida ao se ensinarem derivadas através da Resolução de Problemas.

Considerações Finais

Este trabalho teve origem nas inquietações a respeito do ensino e da aprendizagem de derivadas, que surgiram no decorrer da minha trajetória pessoal e profissional. Como professora de Matemática do Ensino Médio integrado ao Técnico no CEFET-MG, observei e vivenciei dificuldades no processo de ensino-aprendizagem desses conteúdos durante muitos anos.

Fundamentadas em nossos estudos sobre a Resolução de Problemas, em particular sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, planejamos as atividades sobre derivadas a serem desenvolvidas em sala de aula. Essa metodologia considera o problema, aqui chamado de problema gerador*,* como recurso inicial e um meio através do qual o aluno vai (re)construir conhecimentos. Inicialmente, foram elaborados 17 problemas geradores que, por vezes, foram reelaborados durante o processo a fim de atender às demandas de sala de aula.

Ao desenvolvermos as atividades em sala de aula utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, buscamos entender que contribuições o uso dessa metodologia traz para o trabalho com derivadas no Ensino Médio integrado ao Técnico. O desenvolvimento das atividades seguiu as 9 (nove) etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2009), em cujo processo o professor se apresenta como mediador na construção de conhecimentos.

Apesar das dificuldades e desconfianças iniciais dos alunos, vivenciamos uma experiência muito rica com esse trabalho. Presenciamos os alunos construindo gradativamente seus conhecimentos sobre derivadas, tendo o problema como ponto de partida para o ensino, para a aprendizagem e formalização do conteúdo.

Uma das metas deste trabalho era promover oportunidades aos alunos de construção de conhecimento, possibilitando-lhes questionar e entender seus próprios pensamentos. Nesse sentido, a metodologia utilizada para desenvolver o conteúdo de derivadas em sala de aula foi de fundamental importância, pois, ao utilizar o problema como veículo para aprendizagem, o aluno passa a ser protagonista desse processo.

Após o trabalho realizado com os problemas que envolviam cálculos, interpretação geométrica, reflexões sobre notação e linguagem matemática, a definição de derivada de uma função num ponto foi recebida com naturalidade pelos alunos, que perceberam a relação entre ela e os aspectos discutidos no decurso das atividades. Isso nos faz acreditar que trilhamos um percurso que favorece o processo de construção de conhecimentos.

Referências

Allevato, N.S.G. ; Onuchic, L. R. (2009) *Ensinando matemática na sala de aula através daresolução de problemas*. Boletim GEPEM**,** Rio de Janeiro, ano 31, n. 55, p. 133-154. Disponível em http://www.ufrrj.br/SEER/index.php/gepem/article/view/54/87. Acesso em 26 de set. 2015.

Bogdan, R. C., Biklen, S. K.(1994)*Investigação Qualitativa em Educação Matemática: umaintrodução à teoria e aos métodos***.** Lisboa: Porto Editora.

Onuchic, L. R. (1999). *Ensino-Aprendizagem de matemática através da resolução de problemas*. In:Bicudo, M. A. V.(Ed.) Pesquisa em educação matemática. UNESP, São Paulo, Brasil.p.199-220.

Onuchic, L. R. ; Allevato, N. S. G. (2011) *Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas*. Bolema**,** Rio Claro, ano 25, n. 41, p. 73-98.

Pagani, E. M. L; Allevato, N. S. G. (2014a) *Derivadas e integrais no ensino médio integrado aotécnico*: o que pensam professores e alunos. Disponível emhttp://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/epd/issue/view/44/showToc.Acesso em: 25 de set. 2015

Pagani, E. M. L; Allevato, N. S. G. (2014b) *Ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral: um mapeamento de algumas teses e dissertaçõesproduzidas no Brasil*Revista VIDYA, Santa Maria, v. 34, n. 2, p. 61-74, 2014. Disponível emhttp://periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/42/166. Acesso em: 07 de jun. 2015

Schroeder, T. L.; Lester Jr, F. K. (1989)*Developing and Understanding in Mathematics via Problema***Solving.** In: TRAFTON, P. R. ; SHUTLE A. P. (ed.). New Directions for Elementary School Mathematics. Reston: NCTM, p. 31-42.

Elementos de prueba en geometría euclidiana en ambiente de papel-y-lápiz: estudio con alumnos de bachillerato

José Luis **López** Hernández
Escuela Nacional Preparatoria Antonio Caso, UNAM
México
jose.lopez@enp.unam.mx

Resumen

En este artículo reportamos las pruebas y argumentaciones dadas por 15 estudiantes de bachillerato (16-17 años de edad) al resolver problemas de congruencia de triángulos, en ambiente de papel-y-lápiz y tecnológico cabri-géomètre; sin embargo, aqui sólo son reportadas aquellas en ambiente estático. Los estudiantes resolvieron individualmente los problemas y al término de la solución de cada uno de estos, el profesor del grupo abrió una discusión plenaria, cuyo objetivo fue que los estudiantes dieran a conocer la forma en que ellos los habían resuelto. Las pruebas y argumenatciones dadas por los estudiantes, de los nueve problemas que les fueron propuestos, coinciden con las reportadas en la literatura de investigación relacionada con este tema. Nuestros resultados sugieren que los estudiantes, con frecuencia, en sus pruebas y argumentaciones se apoyan en evidencias empíricas, intuiciones e incluso en experiencias personales surgidas de las figuras geométricas que les fueron proporcionadas en los problemas.

Palabras clave: Prueba, geometría, congruencia, resolución de problemas.

Introducción

Desde hace aproximadamente 40 años, se ha venido discutiendo la pertinencia o no de incluir el tema de la demostración en el currículo de matemáticas de los niveles básicos (secundaria y bachillerato). Es cierto que no todos los temas de matemáticas de estos niveles educativos necesitan de una prueba formal; sin embargo, cuando los estudiantes inician el estudio de temas de geometría euclidiana ciertos resultados o problemas contenidos en sus libros de texto, requieren que los estudiantes den argumentos de porqué cierta propiedad geométrica es válida. Gran parte de los estudiantes de estos niveles educativos no se interesa en comprender, o bien en aprender cómo demostrar ciertas proposiciones de geometría euclidiana, pues para ellos las propiedades geométricas y algunas proposiciones, dado que son apoyadas en figuras, suelen ser evidentes.

Marco conceptual

La literatura de investigación relacionada con la demostración en matemáticas, y en el ámbito educativo es extensa. Por limitaciones de espacio, en este documento sólo incluimos algunas referencias bibliográficas; cuyo énfasis es la prueba y la argumentación dadas por los estudiantes en los diversos niveles educativos. Por ejemplo, Van Dormolen (1977, citado por Ibañes & Ortega, 2005, p. 25), se refiere a tres niveles de demostración, dados por los estudiantes; tales niveles son: a) nivel cero; caracterizado porque el estudiante se enfoca únicamente en objetos concretos, b) nivel uno, se caracteriza porque el estudiante piensa en objetos como representantes de una clase, c) nivel dos; en este nivel el estudiante es capaz de generalizar. Bell (1976) propuso tres propósitos de la demostración; ellos son: verificación, iluminación y sistematización; de Villiers (1993, citado por Ibañes & Ortega, 2005, p. 29) comenta dos funciones de la demostración: descubrimiento y comunicación; por su parte, Balacheff (1987) menciona dos tipos de demostraciones en que los estudiantes utilizan los ejemplos: las pragmáticas, basadas en la *ostensión*; en este tipo de prueba, los estudiantes recurren a la acción y a ejemplos concretos, y las intelectuales; apoyadas éstas en la formulación de las propiedades matemáticas puestas en juego y en las relaciones que existen entre ellas. A su vez, las demostraciones pragmáticas se subdividen en varios tipos: el empirismo ingenuo, la experiencia crucial, el ejemplo genérico y la experiencia mental. Siñeriz y Ferraris (2005), Van Ash (1993, citado por Ibañes & Ortega, 2005, p. 26) y Hanna (1990), entre otros, han contribuido también al estudio y desarrollo de la prueba, de acuerdo con el tipo de lenguaje y grado de formalidad utilizados.

Más allá de los diferentes procesos de argumentación y prueba utilizados por los estudiantes para justificar los resultados en geometría, existe la problemática relacionada con los diversos tipos de interpretación de una representación geométrica, en la que el razonamiento y la visualización son aspectos de suma importancia, tal como son discutidos por Camargo, Perry y Samper (2005) y por Palais (1999). Atendiendo a la problemática antes bosquejada, en esta investigación nos planteamos el siguiente objetivo: Explorar la función de la tarea en ambiente de papel-y-lápiz en la demostración. Es decir, cómo la tarea sugerida por el profesor, motiva y hace ver la necesidad de probar resultados. En este artículo, pretendemos dar respuesta a la pregunta: ¿Qué tipos de pruebas emergen durante las soluciones dadas por los estudiantes a problemas geométricos de congruencia de triángulos?

Metodología

Descripción de la población

Este estudio se llevó a cabo con 15 estudiantes (16-17 años de edad) de segundo año de una escuela preparatoria ubicada en la Ciudad de México. Los estudiantes no tenían experiencia en cómo llevar a cabo demostraciones en geometría. Durante tres sesiones de trabajo (la primera de una hora y las otras dos de dos horas, cada una de ellas, fueron conducidas por el autor del presente artículo), los estudiantes resolvieron problemas de geometría euclidiana; que incluyeron tareas como: reconocimiento de figuras, construcciones geométricas, uso de teoremas y criterios de congruencia de triángulos, así como la validación de sus resultados. Debido a problemas de espacio, en este artículo sólo documentamos el trabajo de siete estudiantes; cuyas demostraciones ejemplifican los diversos tipos de demostraciones reportados en la literatura de investigación.

Selección y modificación de los problemas

Del libro Geometría Plana y del Espacio (Wentworth & Smith, 1979), fueron elegidos nueve problemas de congruencia de triángulos; estos problemas fueron modificados en cuanto a su redacción original. Fue llevada a cabo la solución *a priori* de los problemas propuestos a los estudiantes; tales soluciones tienen el objetivo de prever las posibles pruebas y argumentaciones de los estudiantes.

Implementación de los problemas y acopio de datos

Se dispuso de 10 a 15 minutos para la resolución de cada problema (de manera individual), y de algunos minutos para la discusión grupal; conducida por el investigador. Se cuenta con el registro de los nueve problemas de la actividad, con sus respectivas respuestas dadas por cada uno de los estudiantes, usando papel y lápiz, así como las videograbaciones del trabajo individual y de la discusión grupal.

En seguida, son mostrados cuatro problemas (la numeración de estos no significa el orden en que fueron propuestos) así como las pruebas y argumentaciones que dieron los estudiantes.

Problema 1: En el cuadrado $\square ABCD$ [1] (Figura 1), P es punto medio de $\overline{AB}$. Prueba que $\overline{PC} = \overline{PD}$.

Ejercicio 4

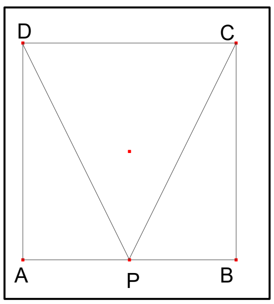


*Figura 1.*Cuadrado y triángulos.

Estudiante A2. Argumentación deductiva formal.

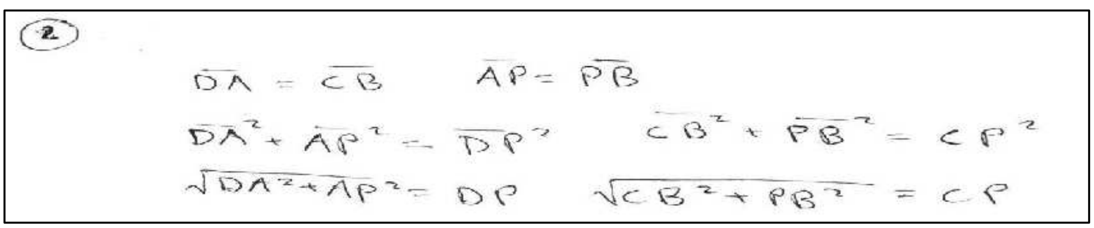


Figura 2. Uso del Teorema de Pitágoras.

La Figura 2 muestra el uso de las hipótesis del problema: dado que $\overline{DA} = \overline{CB}$ y $\overline{AP} = \overline{PB}$, al utilizar el *Teorema de Pitágoras* se concluye que $\overline{PC} = \overline{PD}$.

[1] $\square ABCD$ es cualquier cuadrado cuyos vértices son A, B, C y D.

Estudiante A4. Explicación por evidencia.

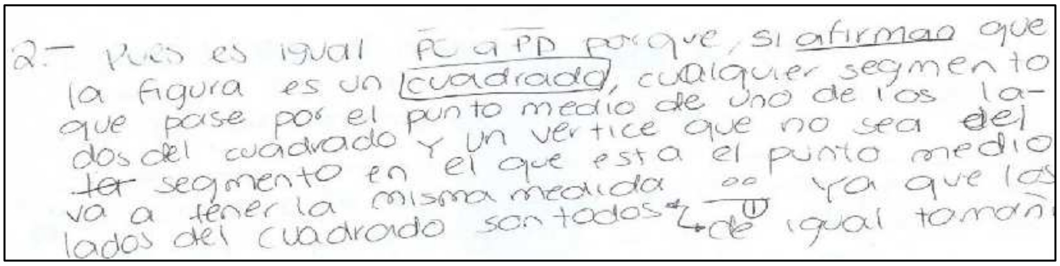

2.- Pues es igual PC a PD porque, si afirmao que
la figura es un cuadrado, cualquier segmento
que pase por el punto medio de uno de los la-
dos del cuadrado y un vertice que no sea del
~~ter~~ segmento en el que esta el punto medio
va a tener la misma medida ya que los
lados del cuadrado son todos de igual tamañ

Figura 3. Argumentación apoyada en evidencias.

Como se muestra en la Figura 3, el estudiante afirma que los segmentos $\overline{PC}$ y $\overline{PD}$ miden lo mismo, únicamente por el hecho de que la figura, cuyos vértices son A, B, C y D es un cuadrado, pero no da argumentación alguna.

Estudiante A5. Explicación por dibujo.

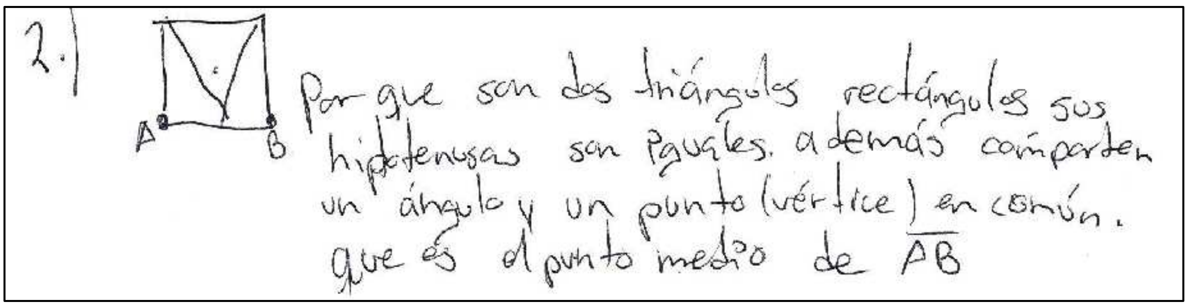


Figura 4. Afirmaciones apoyadas en la figura.

Como se muestra en la Figura 4, el estudiante afirma que $\overline{PC} = \overline{PD}$, porque observa que P es punto medio de uno de los lados del cuadrado y que se forman triángulos rectángulos, cuyos lados son lados del cuadrado. Sólo afirma sin argumentar.

Estudiante A11. Prueba por visualización.

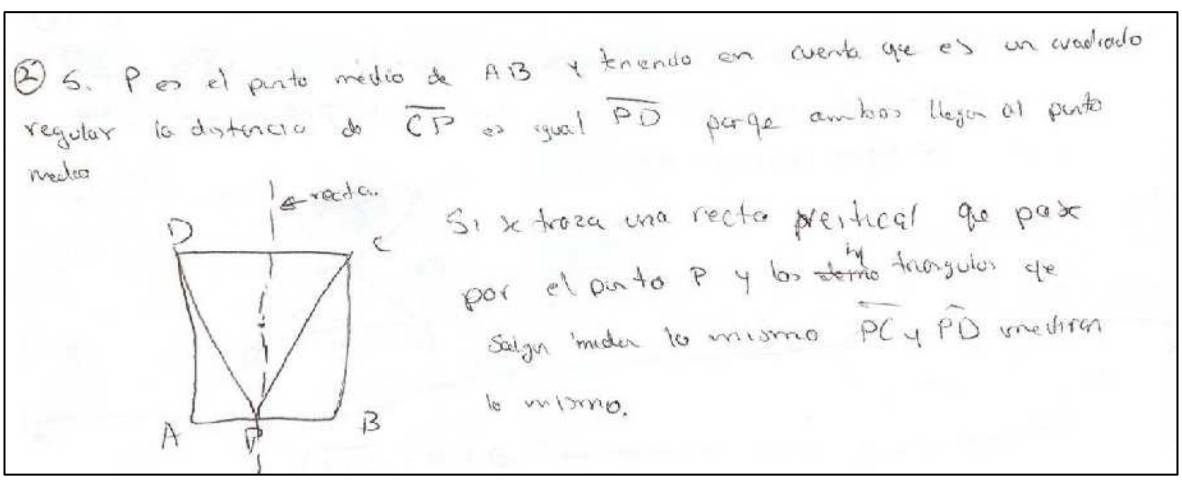


Figura 5. Argumentos apoyados en la visualización de la figura.

La Figura 5 permite observar que el estudiante se enfoca en los elementos de la representación gráfica, y construye la recta auxiliar que pasa por P, para obtener cuatro triángulos congruentes, lo cual le ayuda a concluir que $\overline{PC} = \overline{PD}$.

Problema 2: En la Figura 6, $\overline{AC} = \overline{BC}$ y $\overline{AD} = \overline{BD}$. Prueba que $\measuredangle CBD = \measuredangle DAC$.

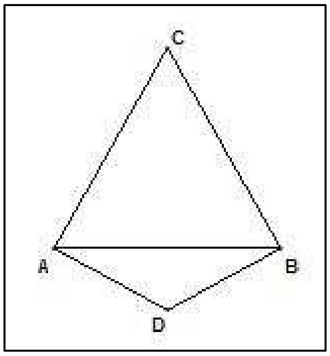


Figura 6. Cuadrilátero y triángulos.

Estudiante A2. Argumentación deductiva coloquial.

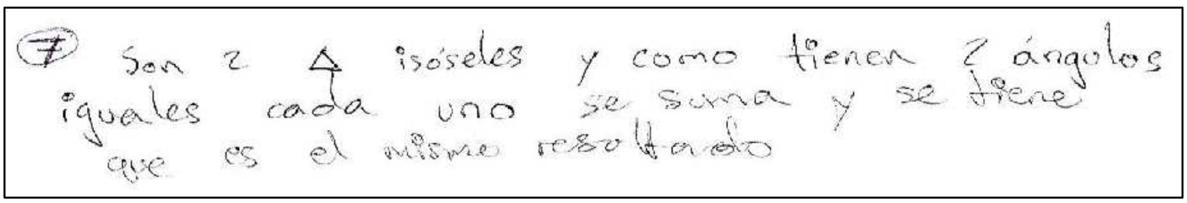


Figura 7. Argumentos apoyados en la figura dada mediante el uso de lenguaje coloquial no claro.

De acuerdo con la Figura 7, el estudiante utiliza un lenguaje coloquial para argumentar la validez de la proposición a partir de las propiedades de los triángulos isósceles. Así mismo, parece deducir que los ángulos de interés son iguales porque los ve como la misma suma de dos ángulos; sin embargo, la manera de escribir sus ideas no es clara.

Estudiante A11. Explicación coloquial.

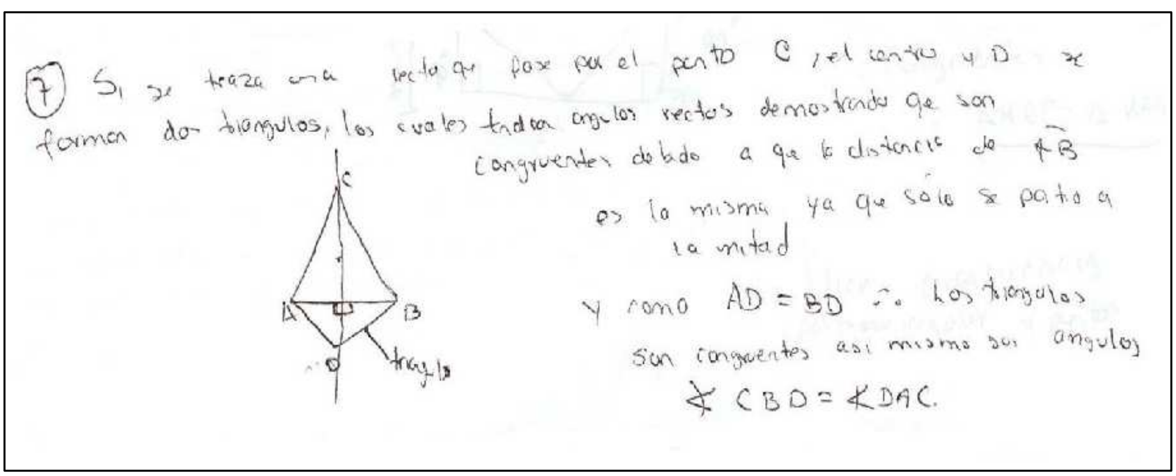


Figura 8. Argumentación apoyada en acciones evidentes.

De acuerdo con la Figura 8, el estudiante utiliza un lenguaje coloquial para probar la afirmación. Él traza la recta auxiliar $\overline{CD}$ que corta a $\overline{AB}$ en su punto medio de manera perpendicular, y como $\overline{AD} = \overline{BD}$, concluye (por el criterio LLL) que $\Delta\, ADC$ [2] es congruente a $\Delta\, BDC$.

Problema 3: En $\Delta\, ABC$ equilátero (Figura 9), P y Q son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Prueba que $\overline{AP} = \overline{BQ}$.

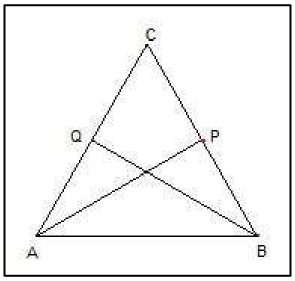


Figura 9. Triángulos.

Estudiante A10. Explicación por evidencia.

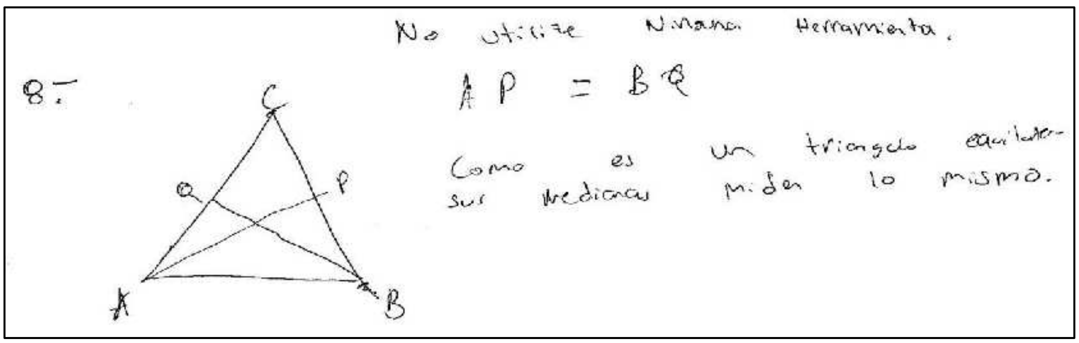
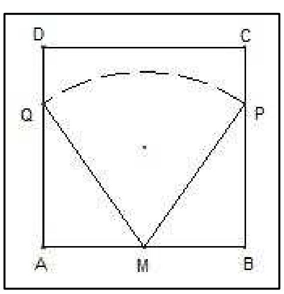


Figura 10. Argumentación apoyada en evidencias.

De acuerdo con la Figura 10, el estudiante afirma que las medianas tienen la misma longitud por el solo hecho de que el triángulo es equilátero. No da argumentación alguna.

Problema 4: En $\square\, ABCD$ (Figura 11), el punto medio de $\overline{AB}$ es M. Con centro en M se describe el arco $\widehat{QP}$ [3] que corta a $\overline{AD}$ en Q y a $\overline{BC}$ en P. Prueba que $\Delta\, MBP$ es congruente a $\Delta\, MAQ$



[2] $\Delta\, ADC$ es cualquier triángulo cuyos vértices son A, D y C.
[3] $\widehat{QP}$ es cualquier arco de circunferencia con extremos Q y P.

Figura 11. Cuadrado, triángulos y segmento de arco.

Estudiante A12. Explicación coloquial.

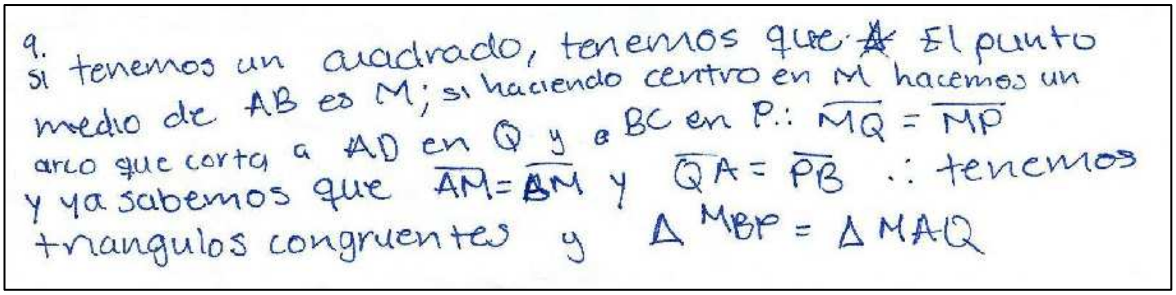

9.
si tenemos un cuadrado, tenemos que ~~A~~ El punto
medio de AB es M; si haciendo centro en M hacemos un
arco que corta a AD en Q y a BC en P.∴ $\overline{MQ} = \overline{MP}$
y ya sabemos que $\overline{AM} = \overline{BM}$ y $\overline{QA} = \overline{PB}$ ∴ tenemos
triangulos congruentes y $\Delta MBP = \Delta MAQ$

Figura 12. Afirmaciones no evidentes.

En la Figura 12 se observa que para el estudiante, dos triángulos son congruentes si dos de los lados de uno son iguales a dos de los lados del otro, y entonces concluye que los triángulos rectángulos son iguales, aunque no se refiere al ángulo recto.

Estudiante A7. Prueba que explica.

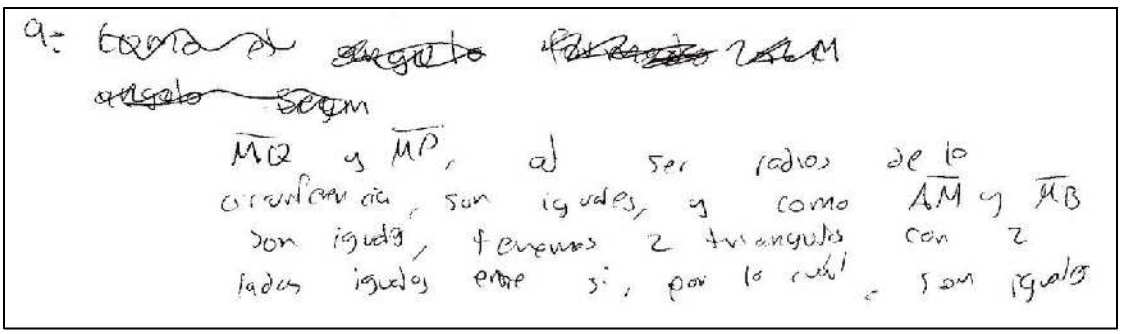

9: ~~tomando el ángulo~~ ∠AM
~~ángulo segm~~
$\overline{MQ}$ y $\overline{MP}$, al ser radios de la
circunferencia, son iguales, y como $\overline{AM}$ y $\overline{MB}$
son iguales, tenemos 2 triangulos con 2
lados iguales entre sí, por lo cual, son iguales

Figura 13. Uso de conceptos geométricos para explicar la prueba.

Como se observa en la Figura 13, el estudiante proporciona una justificación basada en la congruencia de triángulos (criterio LAL). Dos lados correspondientes iguales (y el ángulo recto, que no menciona) le bastan para afirmar que los dos triángulos rectángulos involucrados son iguales.

Conclusiones

En general, de la segunda y tercera sesión de trabajo se observa que la mayoría de los estudiantes justificó los resultados con un lenguaje coloquial y, en ocasiones, los procesos de argumentación fueron imprecisos o incompletos; sin embargo, en algunos casos, sí utilizaron un lenguaje simbólico formal con claridad. En general, los estudiantes elaboraron, de manera aceptable, las demostraciones en las que recurren a la congruencia de triángulos, o al menos, este elemento les permitió intuir y elaborar un discurso con el que trataron de justificar los resultados.

A la luz de las respuestas de los estudiantes, en esta investigación, los tipos de prueba que emergen durante las soluciones a los problemas geométricos de congruencia de triángulos son los ya mencionados en la literatura de investigación relacionada con la prueba en matemáticas. En nuestra investigación, constatamos que existe gran dificultad, por parte de los estudiantes, para identificar elementos auxiliares que pueden serles útiles para asegurar la veracidad del resultado. Los estudiantes necesitan desarrollar un razonamiento intuitivo de los objetos geométricos para tener acceso, tanto a un mejor entendimiento de la geometría euclidiana como a un razonamiento deductivo formal para su estudio; para lograr lo anterior, se requiere tomar en cuenta el tipo de tareas a resolver y la manera en que éstas son guiadas.

Referencias y bibliografía

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(12), 147-176.

Bell, A. W. (1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*(1), 23-40.

Camargo, L., Perry, P. & Samper, C. (2005). La demostración en la clase de geometría: ¿Puede tener un papel protagónico? *Educación Matemática, 17*(3), 53-76.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13.

Ibañez, M. & Ortega, T. (2005). Dimensiones de la demostración matemática en bachillerato. *Números, 65,* 19-40.

Palais, R. S. (1999). The visualization of mathematics: toward a mathematical exploratorium. *Notices of the AMS*, *46*(6), 647-658.

Siñeriz, L. & Ferraris C. (2005). Tipos de prueba: una de las categorías de un modelo teórico del proceso de aprendizaje de la demostración en geometría. *Memorias del VII Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy.

Wentworth, J. & Smith, D. E. (1979). *Geometría plana y del espacio.* México: Porrúa.

Modelos matemáticos emergentes desde transformación de superficies con reciclables

Evelio Marcial Plaza Montes
Maestría en Educación Matemática, Universidad de Antioquia.
Colombia
evelio12plaza@gmail.com

1. PRESENTACIÓN

Esta propuesta investigativa afronta como problemática la dificultad que reflejan los estudiantes de educación media de la Institución Educativa San Pedro de Urabá, para analizar, comprender, proponer y argumentar modelos matemáticos que emergen desde una transformación de superficie, la cual, se observa que ellos no relacionan modelos con fenómenos de su entorno. Por tanto, es oportuno estudiar un proceso de modelación matemática, buscando aprovechar el contexto de la institución, para que a través del aprovechamiento del reciclaje de residuos plásticos, se pueda construir bloques ecológicos para ubicarlos en una superficie a estilo placa huella, permitiendo utilizar este contexto para estudiar diferentes modelos matemáticos aplicados a la realidad, construidas por ellos mismo. Esta investigación se está realizando con estudiantes de educación media de la Institución Educativa San Pedro de Urabá; la cual se encuentra ubicada en el casco urbano del municipio de San Pedro de Urabá, departamento de Antioquia, Colombia. Con esta propuesta y el apoyo del método STEM como estrategia metodológica, pretendo investigar el estudio de modelos matemáticos emergentes desde una transformación de superficies con estos residuos plásticos, dándole un sentido práctico y real a las matemáticas, transversalizando los diferentes pensamientos, para poder ser competentes matemáticamente.

Otro trabajo investigativo desarrollado por Valle (2013) tras la necesidad de implementar la utilización de botellas plásticas de tipo pet como unidad estructural para la mampostería liviana, después de varios análisis físicos mecánicos, concluye que presenta mejor característica que los bloques convencionales cuya resistencia a la compresión aumento en 23.63 kg/cm^2 con respecto a las unidades estructurales. **Estudios de investigación de este tipo no se ha hecho en establecimientos educativos, ya que muy poco se implementan trabajos de ingeniería, especialmente el diseño de bloques ecológicos con botellas plásticas recicladas tipo Pet**.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En los lineamientos curriculares de matemáticas (1998), luego afirmados con los estándares básicos de matemáticas escritos por el MEN (2006), propone en la educación una reestructuración en lo referente a lo teórico y metodológico, estableciendo elementos que permitan actualizar el currículo en las diferentes áreas fundamentales de nuestro país. En estos elementos se pueden identificar dos aspectos básicos que son: los pensamientos matemáticos y el desarrollo de procesos de aula, direccionando el aprendizaje de las matemáticas en contexto para los estudiantes, tomando como eje central en dicha contextualización las situaciones problemas.

Los modelos matemáticos emergentes desde una transformación de superficies, son fórmulas, ecuaciones o inecuaciones que representan una realidad. Las unidades de superficie son utilizadas en el concepto geométrico de área de figuras planas. El plano cartesiano es una herramienta útil al representar geométricamente estas superficies. Nicole (2008) nos dice que: "El plano cartesiano tiene como finalidad describir la posición de puntos, los cuales se representa por sus coordenadas o pares ordenados", este plano cartesiano es una herramienta necesaria en diversos campos el cual nos permite el interdisciplinar de las matemáticas con otras ciencias del conocimiento. En los estándares de matemática planteados por el MEN (2006), nos dice que el estudiante debe "conjeturar y verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños" , en este sentido, desde nuestra propuesta de trabajo, transformar superficies significa modificar cualidades físicas de una determinada región geográfica de la institución (garajes bicicletas); este cambio se producirá aprovechando el reciclaje de residuos plásticos como contexto para construir bloques ecológicos. Los bloques ecológicos hechos con botellas plásticas recicladas cumplirán el rol de piedras, la cual será una propuesta innovadora en el campo de ingeniería a través del método STEM como estrategia metodológica. En la utilización de la modelación matemática como proceso en la enseñanza, se podrá estudiar modelos matemáticos emergentes desde una transformación de superficies en contexto de residuos plásticos. Con todo este planteamiento hago la siguiente pregunta de Investigación: **¿De qué manera emergen modelos matemáticos desde una transformación de superficies en contexto de residuos plásticos con estudiantes de educación media?**

3. OBJETIVO: Analizar modelos matemáticos emergentes desde una transformación de superficies en contexto de residuos plásticos con estudiantes de educación media.

4. APROXIMACIÓN AL MARCO TEÓRICO

El ciclo de modelación no es entendido como una ruta secuencial y estática, sino de un ir y venir a través de los momentos y subprocesos hasta que el estudiante pueda o no construir un modelo matemático ajustado a la situación, y éste responda a la solución del problema. Esto se produce, debido a que las rutas del proceso de modelación en los estudiantes son diferentes (Blum & Borromeo-Ferri, 2009). Es decir, esto depende de los diferentes caminos en la construcción de un modelo matemático cuando aborda una situación en el contexto o un fenómeno de la vida cotidiana (Bossio, 2019, p.44).

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bossio, J. (2014); Un proceso de modelación matemática desde una situación en el contexto del cultivo de plátano con estudiantes del grado décimo al generar modelos lineales. Urabá, Antioquia.

Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas; MEN. (2006) p.56; p.78; p.68.

MEN. (1998). *Lineamientos Currriculares de Matematicas* . Bogotá, Colombia .

Nicole, M. (2008); El plano cartesiano; www.monografias.com; p.1

Valle, C. (2013); Utilización de botellas plásticas tipo pet como unidad estructural para la mampostería liviana; Riobamba- Ecuador

Dominios de la Geometría y del Análisis y su articulación por medio de la modelización y la tecnología digital

[1]Jesús Victoria Flores **Salazar**[1]
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
jvflores@pucp.pe
Verónica **Neira** Fernández
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
vneira@pucp.pe
Flor Isabel **Carrillo** Lara
f.carrillo@pucp.edu.pe
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
Elizabeth **Montoya** Delgadillo[2]
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
elizabeth.montoya@pucv.cl

Resumen

En la comunicación, se presenta una tarea de modelizaciónsobre función cuadrática que forma parte de la secuencia didáctica de un proyecto de investigación internacional en ejecución,cuya finalidad es promoverla articulación de los dominios de la Geometría y el análisis por medio de la modelización y la tecnología digital.Como referenciales teóricos y metodológicos, setomanaspectos del Espacio de Trabajo Matemático-ETM, ciclo de modelización y de la Ingeniería Didáctica respectivamente; se presenta el análisis apriori de la tareamencionada,puesse está en la etapa de construcción y discusión de la secuencia; se resalta en el análisis a priori la activación del plano Semiótico-Instrumental[Sem-Ins] y se privilegian los paradigmas Geometría Natural (GI), Geometría Axiomática Natural (GII), Análisis Geométrico/Aritmético (AG) y Análisis Calculatorio (AC), lo que da indicios de la articulación de los dominios de la Geometría y del Análisis.
Palabras clave: modelización, tecnología, función cuadrática, plano [Sem-Ins].

---

[1] Proyecto de investigación “Articulación de dominios matemáticos por medio de la modelización y la tecnología digital en profesores de Matemática” (DGI 575/ PUCP).
[2] Fondecyt 1171744 Conicyt-Chile.

Introducción

La comunicaciónpresenta una tarea sobre función cuadrática, que es la adaptación de una tarea de la investigación de Almonacid (2018), y que forma parte de una secuencia didáctica (conjunto de tareas) comopartedel proyecto de investigación “Articulación de dominios matemáticos por medio de la modelización y la tecnología digital en profesores de Matemática” en el que participan investigadores de la Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-PUCV y del Laboratorio de Didáctica de la Matemática André Revuz- Universidad de Paris Diderot-Paris 7.

En relación a la noción de la función cuadrática,se debe tomar en cuenta el pensamiento relacional y covariacional (Ozaltun y Bukova, 2017) y, además, la coordinación de las diferentes representaciones de la misma. Por otro lado, en cuanto a la necesidad de incorporar ambientes de representaciones dinámicas, como el GeoGebra, en la enseñanza de las funciones cuadráticas, las investigaciones de Lima (2016) y también la de Salazar (2015) mencionan que la mediación del GeoGebra facilita, por medio de sus representaciones en las ventanas algebraica y gráfica de manera simultánea, la construcción de la noción de función cuadrática, además de favorecer el análisis y entender la naturaleza variable de la función cuadrática (Ávila,2011). En relación a ello, la investigación de Lagrange y Minh (2016) muestran que los aspectos relacionales, variacional y de coordinación de representaciones mediada por la tecnología digital en la enseñanza de la función cuadrática pueden ser estudiados vinculando dominios de la Matemática, como la Geometría y el Análisis. Por otro lado, Briceño y Buendía (2015) mencionan que la modelización permite vincular conocimientos matemáticos con contextos de la ciencia.

En ese sentido,los recientes trabajos del enfoque del Espacio de Trabajo Matemático-ETM (Kuzniak, 2011; Montoya-Delgadillo y Vivier, 2014; Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016)abren perspectivas nuevas para la investigación y la comprensión y articulación de distintos dominios matemáticos, como se ha evidenciado en los congresos temáticos desarrollados desde el 2009, porque viabiliza el análisis de los diferentes niveles de transposición en la enseñanza de la Matemática gracias a los diferentes tipos de ETM (referencia, idóneo y personal). Tambiénse enfatiza la necesidad de una enseñanza que favorezca la articulación entre la Geometría y los problemas que surgen del mundo real por medio de tareas de modelización y seresalta además la necesidad de articular la Geometría con otros dominios matemáticos.

En cuanto al ETM del análisis, este ha sido objeto de muchas investigaciones que incluyen el proyecto ECOS-Sud (2014-2016), desarrollado entre el Laboratorio de Didáctica André Revuz- Universidad de Paris Diderot-Paris 7 y el Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad de Valparaíso PUCV de Chile (Montoya-Delgadillo y Vivier, 2016). Un fenómeno identificado en ese proyecto de investigación es la perspectiva puntual-global-local del tratamiento que se le da a ciertos objetos matemáticos. Por otro lado, Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) muestran que existen estudios en los que se investiga la mediación de la tecnología digital en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática en los que se proponen tareas en la que los cambios de dominios matemáticos son fundamentales; sin embargo, no se ha encontrado evidencias sobre investigaciones que articulen estos dos dominios matemáticos mediados por la modelización y la tecnología digital.

Espacio de Trabajo Matemático-ETM,Modelización e Ingeniería Didáctica

En cuanto al marco de los Espacios de Trabajo Matemático (en adelante ETM), permite caracterizar la manera en que las nociones matemáticas adoptan significado en un contexto detrabajo dado. Según Kuzniak y Richard (2014), un ETM es un espacio abstracto organizado para asegurar el trabajo matemático en el contexto educativo y está basado en la articulación de dos planos, uno epistemológico y otro cognitivo. El plano epistemológico está compuesto por tres componentes o polos a saber: el representamen, que se constituye de los registros de representación semiótica; los artefactos, que son elementos materiales o simbólicos utilizados y el referencial,que está constituido por las propiedades, los teoremas, las definiciones. El plano cognitivo se compone de los procesos de visualización, construcción y prueba.

Los planos epistemológico y cognitivo se articulan mediante una génesis semiótica, basada en los registros de representación semiótica que confiere a los objetos tangibles del ETM un estatus de objeto matemático operacional; una génesisinstrumental, que permite operacionalizar los artefactos en el proceso de construcción y una génesis discursiva de la prueba, que da sentido a las propiedades para dejarlas al servicio del razonamiento matemático. Esta articulación no debe ser entendida como la unión individual entre los componentes de los planos epistemológico y cognitivo, sino más bien como una relación dinámica de dos o incluso tres génesis. Por ello, Kuzniak y Richard (2014) identifican tres planos verticales, que son el plano Semiótico-Instrumental [Sem-Ins], Instrumental-Discursivo [Ins-Dis] y Semiótico-Discursivo [Sem-Dis].Otro aspecto del ETM que consideramos es la noción de paradigma como "el conjunto de creencias, técnicas y valores que comparte un grupo científico" (Kuzniak, Montoya y Vivier, 2016, p. 7) en un contexto educativo.

En relación al dominio de la Geometría, se introdujeron tres paradigmas: Geometría I (Geometría natural), en el cual hay una relación con el mundo real y la fuente de validación está basada en lo tangible; Geometría II (Geometría natural axiomática), en el cual se pierde la relación a la realidad y se trabaja más bien sobre el modelo geométrico, la fuente de validación están basadas en las reglas axiomáticas y Geometría III (Geometría axiomática formal), donde se genera una separación completa del mundo real y la fuente de validación están basadas en la axiomática elegida. Además, se enfatiza la necesidad de una enseñanza que favorezca la articulación entre la Geometría y los problemas que surgen del mundo real por medio de tareas de modelización. En cuanto al dominio del Análisis, específicamente en el paradigma del Análisis Matemático estándar, se distinguen los siguientes paradigmas: Análisis Geométrico/Aritmético (AG), que permite interpretaciones nacidas de la Geometría, del cálculo aritmético o del mundo real. Análisis Calculatorio (AC), en el que las reglas del cálculo son definidas, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos y, finalmente, Análisis Real (AR), que es caracterizado por una mirada global a las características de la noción matemática, con reglas que dependen de la topología usada.

Con respecto a la modelización, Blum y Borromeo Ferri (2009) explican que el desarrollo de la habilidad de modelizar moviliza nociones y objetos de los distintos dominios de las Matemáticas. En ese sentido, para la modelización de la tarea sobre función cuadrática,se toma en cuenta el ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007). De acuerdo con este ciclo, la situación real debe ser entendida para poder formular el problema (1). Para conseguir un modelo real, es necesario que previamente sea simplificada y estructurada (2). Por medio de supuestos, generalizaciones y formalizaciones, se realiza la matematización (3). Después, se trabaja matemáticamente (4). Posteriormente,la solución matemática debe ser interpretada (5). En la situación inicial, para lograr una solución real, seguidamente, se valida (6) todo el proceso y se muestra que la solución real resuelve el problema y que el modelo es el apropiado o que el modelo debe ser rediseñado en una nueva circulación por el ciclo. Por último, el proceso de solución debe ser divulgado (7).

En relación a los aspectos de la Ingeniería Didáctica (ID),Artigue (1995)la refiere como "un esquema experimental basado en las 'realizaciones didácticas' en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (p. 36). Las cuatro fases consideradas en la ID son análisis preliminar (fase 1), concepción y análisis a priori (fase 2),experimentación (fase 3), análisis a posteriori y validación (fase 4), siendo esta interna ya quees la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. Los aspectos de la ID que se utilizan en la investigación son coherentes con la construcción, implementación y valoración de las tareas (secuencia didáctica) de la investigación. En ese sentido, en la fase 1 de la ID se realiza la revisión de literatura sobre el objeto de estudio, modelización, tecnología digital y aspectos del enfoque del Espacio de Trabajo Matemático que cimientan la investigación. En la fase 2, se construyen las tareas (secuencia didáctica) que deben ser lo suficientemente abiertas para permitir diferentes interpretaciones y el uso de diferentes ETM y deben poder modelizarse y resolverse con la mediación de tecnología digital, tanto en Geometría como en análisis. Cabe resaltar, que se presenta una tarea de modelización sobre función cuadrática que forma parte de la secuencia didáctica de un proyecto de investigación en ejecución, ya que se está en la etapa de construcción y discusión de la secuencia. Posteriormente, se debe desarrollar lo que corresponde a las fases 3 y 4 de la ID,que están programadas para abril 2019, tanto en la PUCP/Perú como en la PUCV/Chile. En esta parte es que seaplican las tareas de la secuencia, para identificar si cumple con el propósito para la que fue construida. Es bueno destacar que, para realizar el análisis a posteriori, se debe organizar los datos recolectados. Para ello, se debe codificar la información de modo que se puedan encontrar, por ejemplo, similitudes, diferencias y/o conexiones entre ellos con el fin de poder identificar y analizar la articulación de los conocimientos matemáticos en los dominios de la Geometría y del Análisis.

La tarea de modelización

Se presenta la tarea (ver figura 1) y, en base a esa información, se estructuran tres etapas para el desarrollo de la misma, según el ciclo de modelización.

Los estudiantes de un Centro de Música de una universidad peruana, con motivo de la semana de aniversario institucional están organizando un concierto, de "acceso libre" al público. En él, participarán solistas y grupos de hasta ocho integrantes, entre cantantes y músicos.

Para para la presentación del concierto se cercará un escenario de forma rectangular (ver figura abajo); pero, no será necesario cercar la parte en frente del público. Se sabe que el Centro dispone de tarimas, escaleras y cercas para 24 m de perímetro.

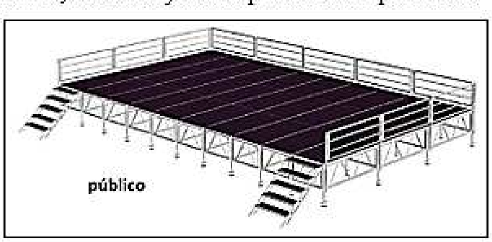


Figura 1. Tarea de modelización (Almonacid, 2018)

Primera etapa: está orientada a identificar los valores que intervienen, la relación entre ellos y la naturaleza del comportamiento del modelo implícito y clasificamos en la etapa 2 del ciclo de modelización. Para ello, se solicita que se abra el archivo GeoGebra *representación_dinámico1.ggb* (ver figura 2) y que se realicen una serie de acciones como arrastrar el deslizador y utilizar la hoja de cálculo para relacionar los valores de los lados, etc.

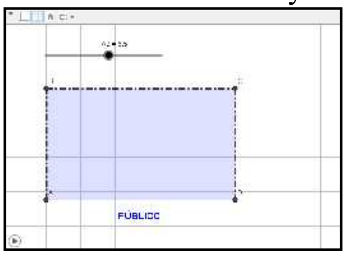


Figura 2. representación_dinámica1 (Almonacid, 2018)

Se espera, a priori, que a partir de la manipulación de los artefactos deslizador y cuadrícula se realicen exploraciones y sea posible conjeturar y validar que el valor que está variando es el área y ésta lo hace en función de la medida de la longitud del segmento AB. Estas acciones, evidenciarían la activación del plano [Sem-Ins]. Además, se considera que, al utilizar nociones de longitud de segmento y medida de área, se estaría privilegiando al paradigma de la Geometría Natural (GI);sin embargo, también se realizan tratamientos aritméticos elementales, lo que indica que también el paradigma del Análisis Geométrico/ Aritmético (AI) está siendo privilegiado.

Segunda etapa: tiene como propósito determinar la expresión matemática que modelice la medida del área del escenario en función de la longitud del segmento AB. Para ello, se debe tener en cuenta sus representaciones en el registro tabular y gráfica. Se clasifica esta etapa en la etapa 3 del ciclo de modelización.A priori, se podrían presentar dos procedimientos diferentes: el primerotoma en cuenta las representaciones figural y tabular y el segundo las representaciones tabular y gráfica (ver figura 3) para hallar el modelo matemático solicitado.

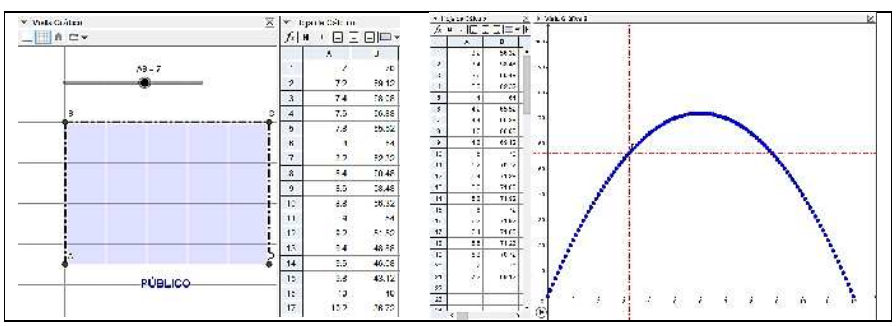


Figura 3. Primer y segundo procedimiento a priori (Almonacid, 2018)

Con el primer procedimiento, se espera que se continúe activando la genesis semiótica en el dominio de la Geometría, ya quepor medio de la fórmula del área de un rectángulo se reemplacen las longitudes de los lados del rectángulo de la siguiente manera:$Área = AB \times BC$

$$\text{Área} = (x)(24 - 2x)$$
$$\text{Área} = 24x - 2x^2$$
$$A(x) = 24x - 2x^2$$

Para finalmente,$A(x) = -2x^2 + 24x$ donde $x \in < 0,12 >$

En base a la percepción de la Vista Gráfica y los valores en la hoja de cálculo, el uso de la fórmula de medida de área de la región rectangular, la noción de función y los tratamientos algebraicos realizados,en el sentido del ETM, es posible afirmar que se activa el plano [Sem-Ins] y que está en proceso el cambio del dominio de la Geometríaal del análisis; sin embargo, a diferencia de la etapa anterior, el paradigma privilegiado es del Análisis Geométrico/Aritmético (AG).Con el segundo procedimiento, se espera que se consideren algunos datos proporcionados en la hoja de cálculo. Por ejemplo:

$x = 5$, y su correspondiente valor $f(4) = 70$
$x = 6$, y su correspondiente valor $f(4) = 72$

Luego, se evalúen los valores en el modelo cuadrático de la siguiente manera:

$$f(5) = 25a + 5b + c = 70$$
$$f(6) = 36a + 6b + c = 72$$

Mediante tratamientos algebraicos se resuelva el sistema de ecuaciones y se hallen los valores de los parámetros de la función cuadrática ($a = -2,\ \ b = 24$ y $c = 0$).Posteriormente, se exprese el modelo matemático: $f(x) = -2x^2 + 24x$, donde $x \in <0{,}12>$.

Otro procedimiento (estrategia) es que el estudiante haga interpretaciones desde la gráfica y reconozca la función cuadrática, con esto hay un cambio al dominio del análisis (o cálculo).En este sentido, se puede dar*estrategia 1:* identificar el vértice de la parábola y, basados en la simetría que le entrega la curva (AG) o bien, determinar su vértice V = (-b/2a, f(-b/2a), lo cual lo clasificamos en el paradigma AC. O la *estrategia 2:* identificar el máximo usando derivadas en la función $f(x) = 24x - 2x^2$(derivar, igualar a cero, encontrar los puntos críticos y evaluar para determinar el máximo en este caso). Para el presente caso, clasificamos esta posible respuesta en el paradigma AC.Sea con cualquiera de los dos procedimientos, se espera, a priori, que se relacione la medida del segmento BC en función del segmento AB, se consideren las restricciones del segmento AB y que la coordinación de estos registros (figural, tabular y/o gráfico) permita construir el modelo matemático del área del escenario rectangular en función de la longitud de uno de sus lados. Al igual que en el procedimiento anterior, con este procedimiento se evidenciaría también el cambio de dominio de la Geometría al dominio del Análisis. En ese sentido, el paradigma privilegiado, en este, es el del Análisis Calculatorio (AC).

Tercera etapa: se solicita que en la barra de entrada de la vista gráfica del GeoGebra se ingrese la expresión matemática anterior y que se configuren los ejes X e Y, en escala de 1:10, y se pregunta:*Después de hacer un análisis sobre la cantidad máxima de integrantes e instrumentos que se presentarán en el concierto,se ha concluido que el área del escenario debe medir 70 m^2. Este año los encargados de armar el escenario renovarán las cercas de los lados AB y CD y comprarán nuevas cercas. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del escenario si se busca ahorrar en los costos del concierto?*

A priori,una de las posibles estrategias que se espera es que se ingrese la recta constante $y = 70$ a la barra de entrada y con la herramienta perpendicular y punto de intersección, se identifiquen los puntos de intersección $A(5; 70)$ y $B(7; 70)$de la representación gráfica de las rectas con la función cuadrática, como muestra la figura 4, lo que permite dar respuesta a la pregunta planteada.

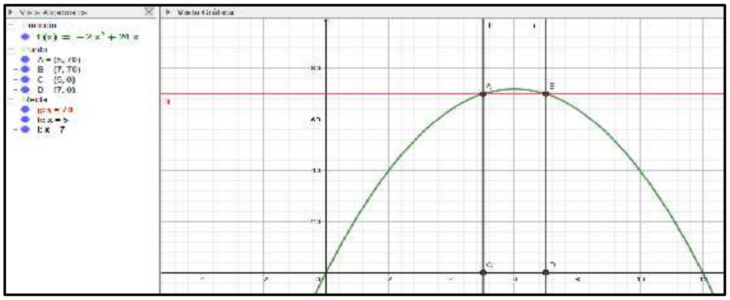


Figura 4. Tercera etapa a priori (Almonacid, 2018)

A partir de la activación de la Vista Gráfica, el uso de herramientas gráficas, como lo son puntos y rectas, se puede afirmar que el paradigma priorizado por los estudiantes, en esta estrategia, es el paradigma del Análisis Aritmético/Geométrico (AG).

Algunas consideraciones

La tarea presentada, en base alos aspectos de la Ingeniería Didáctica y al ciclo de modelización,está organizada en tres etapas. Así, la primera etapade la tarea está relacionada a los procesos de construcción, simplificación/estructuración y matematización dirigida al reconocimiento de variables, relación entre ellas y reconocimiento del comportamiento de la función implícita; la segunda etapa está compuesta del trabajo matemático para hallar el modelo matemático y, finalmente, la tercera fase relacionada a la interpretación y validación del modelo matemático encontrado.

En cuanto al análisis a priori de la tarea, que se realiza con base en el ETM y en el que se evidencian las fases del ciclo de modelización, en la primera etapa se privilegia el paradigma de la Geometría Natural (GI) y de la Geometría Axiomática Natural (GII).

En cuanto a la segunda y tercera etapa, se privilegianlos paradigmas del Análisis Geométrico/Aritmético (AG) y Análisis Calculatorio (AC).

En las tres etapas, se espera activar todo el ETM y sus planos y la articulación de los dominios de la Geometría y del análisis. El problema planteado parte de la etapa 2 del ciclo de modelización, por lo tanto, en la fase de experimentación de la ID, se espera una discusión en cuanto a los materiales y cuestiones de la realidad que pongan de manifiesto un problema real y no sea uno que comienza desde la etapa 2 del ciclo de modelización.

En términos del ETM, estos problemas son llamados tareas emblemáticas que luego, con la modificación a lo real, se pueda enfrentar así a los estudiantes a un problema de modelización con la tecnología digital como mediador en la articulación de dos dominios matemáticos.

Agradecimiento: A la Dirección de Gestión de la Investigación-DGI de la Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP, por el apoyo brindado en el marco del proyecto “Articulación de dominios matemáticos por medio de la modelización y la tecnología digital en profesores de Matemática”. ID-575/DGI-PUCP.

Referencias y bibliografía

Almonacid, A. (2018). *Modelización de funciones cuadráticas: Espacio de trabajo matemático personal de estudiantes de humanidades.* Tesis del grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Artigue, M. (1995).Ingeniería Didáctica. En: M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ávila, P. E. (2011). *Razonamiento covariacional a través del Software dinámico: el caso de la variación lineal y cuadrática* (tesis de maestría). Medellín, Colombia: Universidad Nacional de Colombia. Obtenido de http://bdigital.unal.edu.co/6765/1/43480455.2012.pdf

Blum, W., &Borromeo Ferri, R. (2009).Mathematical Modelling: ¿Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), *45-58.* Obtenido de http://gorila.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/viewFile/1620/1087

Blum, W. y Leiss, D. (2007).How do students and teachers deal with mathematical modeling problems? En Haines y otros (eds.) *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics,* 222-231. Chichester: Horwood Publishing.

Briceño, O. A., & Buendía, G. (2015). Los experimentos de diseño y la práctica de modelación: significados para la función cuadrática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte* (45), 65-83. Obtenido de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/viewFile/656/1189

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses génèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9 – 24. Obtenido de http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/annales_de_didactique_et_de_sciences_cognitives

Kuzniak, A. & Richard, P. R. (2014). Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and perspectives, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME*, 17(4-I), 17-28.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education*, 48, 721–737.

Kuzniak A., Montoya E. y Vivier L. (2016). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*(15), pp. 235-249. Recuperado de http://www.centroedumatematica.com/Cuadernos/CuadernosCompletos/Cuaderno15.pdf

Lagrange, J.-B., & Minh, T. K. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM MathematicsEducation,* 48, 793–807.

Lima, E. (2016). *Sequência didática usando o Geogebra na aprendizagem de função quadrática no ensino fundamental II*,(tesis de maestría). Manaus-Am., Brasil: Universidade Federal do Amazonas. Obtenido de https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/5551

Montoya-Delgadillo, E., & Vivier, L. (2014).Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 739–754.

Ozaltun, A., &Bukova, E. (2017).Revealing Ozgur's thoughts of a quadratic function with a clinical interview: Concepts and their underlying reasons. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 3*(1)*, 122-134.*

Salazar, J. V. F. (2015).Génesis Instrumental: el caso de la función cuadrática. *Revista Unión.* (41), 57-67. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/41/Artigo3.pdf

Caracterizando las estrategias heurísticas de pruebas estandarizadas

Ana María **Palacios** Rojas.
Facultad de Educación, Universidad del Cauca
Colombia
anamariarojas@unicauca.edu.co
Sandra Marcela **Chito** Cerón.
Facultad de Educación, Universidad del Cauca
Colombia
marcelachito@unicauca.edu.co
Sandra Liceth **Solarte** Alvear.
Facultad de Educación, Universidad del Cauca
Colombia
sandrasolarte@unicauca.edu.co

Resumen

Esta propuesta de investigación busca caracterizar las estrategias heurísticas que emplean los estudiantes de grado sexto de dos instituciones educativas de la ciudad de Santiago de Cali, en pruebas estandarizadas, diseñadas bajo el enfoque de resolución de problemas que involucran gráficos estadísticos, a través de una investigación- acción, dado que conocerlas podría fortalecer los procesos educativos, más si tiene en cuenta los parámetros bajo los que se diseñan y lo que evalúa este tipo de exámenes.

Palabras Claves: Situaciones problema, estrategias heurísticas, pruebas estandarizadas.

Introducción

Esta investigación se enmarca en la Educación Matemática, especialmente en la interpretación de gráficos estadísticos. Dado que, hoy día la estadística juega un papel importante en el currículo actual, muestra de ello son las pruebas estandarizadas que deben presentar los estudiantes, de manera que esta exploración pretende caracterizar las estrategias heurísticas empleadas por estudiantes de dos instituciones educativas de la ciudad de Cali, en la resolución de problemas que involucran gráficos estadísticos de pruebas estandarizadas (hacer una tabla, un gráfico, ensayo y error, entre otras). Pues, conocer las estrategias heurísticas podría fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje, a través de habilidades propias del educando y su forma de interactuar con el mundo.

Presentación del problema

En 2012 Colombia obtuvo el menor puntaje en el apartado de resolución de problemas de las pruebas PISA, los estudiantes solo pueden resolver problemas muy simples en situaciones conocidas, utilizando el ensayo y el error (Cárdenas, 2014). Esto se debe no solo, a la poca apropiación de conceptos sino también de sus habilidades para resolver una situación problema, es decir, de sus estrategias heurísticas. Teniendo en cuenta que, a muchos estudiantes les resulta difícil aprender matemática debido a que "(…) no consiguen determinar a qué operación aritmética se refiere el enunciado de algún problema (dificultades en la transición del lenguaje natural al lenguaje matemático) (…)" Sarmiento (2004, p.108).

En este escenario, es relevante conocer y fortalecer las estrategias heurísticas que emplean los estudiantes de grado sexto, inicio de la educación secundaria. Con el ánimo de obtener una diversidad de estrategias heurísticas, esta investigación se llevará a cabo en dos instituciones de la ciudad de Cali, una del sector público y otra privado aludiendo a que los diferentes contextos socioeconómicos en los que se desenvuelven los estudiantes puedan influir en el surgimiento de nuevas estrategias. De menara que, el método a desarrollar será una *investigación-acción*, a través de una serie de fases que incluirán análisis documentales.

Avance del estado del arte

El lenguaje gráfico de los problemas estadísticos desarrollan el razonamiento matemático, fortalecen las habilidades de comunicación y gestión de la información, ya que los problemas bien seleccionados según Santos (2008) "ofrecen oportunidades para que los estudiantes desarrollen estrategias de solución informales, altamente contextualizadas" (p.16).

Estrategias de solución o también llamadas estrategias heurísticas definidas por Santos (como se citó en Palacios y solarte, 2013) como las "(…) sugerencias generales que ayudan a un individuo a entender mejor un problema o a avanzar hacia su solución (…)" (p.36).

Finalmente, la solución de situaciones problema de tipo estadístico, a partir de estrategias heurísticas podría amplía el aprendizaje del estudiante en la medida que exploraré sus habilidades, método que hoy por hoy es un componente y esencial en la educación.

Referencias y bibliografía

Cárdenas, J. (2014). *La evaluación de la resolución de problemas en matemáticas: concepciones y prácticas de los profesores de secundaria*. (Tesis doctoral). Universidad de Extremadura, Colombia.

Palacios, A & Solarte, S. (2013*). Estudio de la resolución de problemas matemáticos no rutinarios de docentes de matemáticas en formación: una aproximación a las estrategias heurísticas*. (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Santos, M. (Septiembre de 2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En Ricardo; Gómez, Bernardo; Camacho, Matías; Blanco, Lorenzo (Eds.), Investigación en educación matemática XII, Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Valencia, España. Recuperado de https://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf

Sarmiento, M. (2004). *La enseñanza de las matemáticas y las nuevas tecnologías de la información y comunicación*. (Tesis de doctorado). Recuperado de file:///C:/Users/anyta/Downloads/Memoria.pdf

Juegos de estrategia potencializadores del proceso de comunicación en la resolución de problemas

Leonilde **Pardo** Aguilera
Escuela de Educación, Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga
leito.pardo.1997@gmail.com

Resumen

Desde los estudios pitagóricos sobre los números utilizando configuraciones que formaban mediante el juego, hasta los hallazgos de nuestro siglo, tienen en cuenta el juego como una forma distinta de aprendizaje de las matemáticas.Esta propuesta se enfocó en el uso de juegos de estrategia para potenciar el proceso de comunicación en la resolución de problemas relacionados con el pensamiento numérico, con este fin, se diseñó una unidad didáctica buscando propiciar espacios para el trabajo en equipo a través de socialización de estrategias, explicación de procedimientos, presentación de justificaciones y sustentación de argumentos.Se realizaron siete sesiones que contrastaron las etapas de resolución de problemasde Polya y las etapas de desarrollo de juegosde Guzmán. La investigación se enmarcó bajo una metodología cualitativa con un enfoque de Investigación Acción.Los resultados mostraron el progreso de los estudiantes en cuanto a resolución de problemas y el fortalecimiento del proceso comunicativo.

Palabras clave: juegos de estrategia, proceso de comunicación, pensamiento numérico, resolución de problemas, unidad didáctica.

Introducción

A lo largo del tiempo, se ha considerado el juego como una actividad universal debido a que no solo los niños lo practican sino cualquier ser humano sin importar su edad. El impacto de los juegos en la historia de las matemáticas ha sido de gran relevancia debido a que siempre el componente lúdico ha dado lugar a una buena parte de sus creaciones.

El juego y la matemática tienen características comunes, por ende, se considera una estrategia didáctica con grandes beneficios para enfrentar al estudiante ante la resolución de problemas y superar las dificultades que en ellos se presentan; Guzmán (1984) expresa "la matemática es en gran parte juego, y el juego puede, en muchas ocasiones, analizarse mediante instrumentos matemáticos" (p. 10). Desde esta perspectiva, las matemáticas escolares deben hacer un tránsito de la matemática pasiva en el aula cuyo objetivo es la ejercitación de contenidos a una matemática activa que promueva el desarrollo de competencias no solo matemáticas sino también científicas y ciudadanas.

En Colombia, el Ministerio de Educación nacional ha considerado formar ciudadanos matemáticamente competentes, en este propósito ha expedido documentos como los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencia donde aborda la importancia de enseñar de manera articulada teniendo en cuenta los procesos generales de la actividad matemática y el contexto.

En este afán de emprender nuevos retos y de buscar la superación de dificultades presentadas por los estudiantes en la pruebas saber de los años anteriores los cuales indican debilidad en el proceso de comunicación y de razonamiento en la resolución de problemas, surge el problema de investigación. Por ello, se propuso el uso de juegos de estrategia para potenciar el proceso de comunicación en la resolución de problemas, enfocado principalmente en las habilidades de interpretación, explicación y justificación.

Marco de referencia

El juego se ha considerado una estrategia viable para la enseñanza de las matemáticas brindando ambientes propicios para su aprendizaje, lo confirman estudios realizados que definen el juego, determinan por qué utilizarlos, para qué sirven y cómo usarlos para que logren el objetivo.

Se entiende por juegos de estrategia aquellos que, para conseguir su objetivo (lograr una determinada posición, dejar al contrincante sin fichas, ser el último en coger un objeto de un montón...), en cada momento el jugador debe elegir una de las diversas posibilidades existentes. El conjunto y la combinación de estas elecciones o tácticas es la estrategia que el jugador emplea para ganar o no perder. Son un buen recurso para introducir a los estudiantes en la resolución de problemas y en los hábitos típicos del pensamiento matemático.

La resolución de problemas, tema relevante en materia de enseñanza y aprendizaje, abarca una serie de aspectos que para lograr el objetivo deben estar íntimamente relacionados. Según la teoría de Piaget, las personas durante su niñez presentan tres tipos diferentes de formas de razonar. De esta manera, la capacidad de resolver problemas en los estudiantes requiere de una actividad mental y lógica que está directamente relacionada con el grado de madurez fisiológica de cada niño, así como, del medio social y cultural en el que interactúa, de las habilidades y destrezas de cada uno, de los conocimientos previos que tenga acerca de las matemáticas, de la comprensión lectora que posea, de los miedos y temores que tenga o que se le generen, de los estímulos, de la metodología y del ambiente escolar.

Vigotsky (1987) determinaba que el juego podría ser socializador cuando el niño espontáneamente socializara, transmitiera valores y costumbres en su medio social o podría ser factor de desarrollo cuando permitiera en el niño conocer, desarrollar pensamiento y dominar situaciones. Además argumenta que a través del juego se crea un espacio intermedio entre la realidad objetiva y la imaginaria, lo que permite realizar actividades que realmente no se podrían llevar a cabo, espacio que denomino "zona potencial de aprendizaje".

Para hacer uso de los juegos es importante conocer su funcionalidad ya que de esto depende obtener los resultados propuestos, Guzmán (1984) propone la manera de desarrollar un juego orientado a la resolución de problemas, y argumenta que el juego tiene cuatro fases de aplicación. De otra parte, Polya (2004) establece cuatro etapas en la resolución de un problema, esta relación es determinante para conocer el modo de pensar, razonar y actuar de los estudiantes y de esta forma ayudarlos a corregir sus errores.

La manera en que se procede cuando se quiere encontrar una estrategia ganadora en un juego es similar al proceso de resolución de un problema; al respecto Edo, Baeza, Deulofeu y Badilla (2008) realizan un paralelismo: una primera etapa de comprensión (antes de hacer, trataré de entender), otra de exploración y planificación (tramaré una estrategia), una tercera de ejecución (miraré si mi estrategia me lleva al final) y una última de revisión (sacaré jugo al juego).

No todos los juegos tienen estrategia ganadora pero, descubrir esto, también es importante, al igual que, entender que este no es el único objetivo de los juegos. Todo esto se consigue en la manera en que se desarrollen las habilidades intelectuales en los estudiantes. Mientras que mucho del conocimiento que enseñemos será obsoleto en unos años, las habilidades de pensamiento, una vez se adquieren, permanecerán con los estudiantes toda su vida.

El propósito de la investigación es el fortalecimiento de habilidades propias del proceso de comunicación.

> En los últimos años se ha notado que la función de la comunicación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es cada vez más importante ya que permite una verdadera interacción profesor-conocimiento-estudiante", es un proceso de interacción social que contribuye a solucionar diferentes problemas, situaciones interpretativas y producción de discursos argumentativos;esto es, la forma de usar el lenguaje. (Jiménez y Pineda, 2013, p. 107)

> Las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no son algo extrínseco y adicionado a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente, de tal manera que la dimensión de las formas de expresión y comunicación es constitutiva de la comprensión de las matemáticas. Podría decirse con Raymond Duval que si no se dispone al menos de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático, formas que él llama "registros de representación" o "registros semióticos", no parece posible aprender y comprender dicho contenido. (Ministerio de Educación Nacional 1994, p. 9)

Metodología

El presente proyecto investigativo se desarrolló desde un enfoque de tipo cualitativo mediante la descripción detallada de los fenómenos que rodeaban a los participantes, la exploración y profundización de sus experiencias, por lo tanto, se ubica en el campo de la Investigación Acción teniendo como referentes a Alberich (2017) y a Elliott (1993).

El proceso de investigación toma como punto de partida el modelo cíclico de Lewin (1992) el cual comprende tres momentos: la planificación, la acción o intervención de aula, por último, la reflexión que comprendió la evaluación.

Unidad didáctica: "Interpreto Jugando…Analizo Resolviendo"

La propuesta didáctica puesta en marcha estuvo constituida por una serie de sesiones que contenían situaciones problema incorporadas en juegos que a través de su exploración y realización desencadenaron procesos de interpretación, explicación, justificación, razonamiento, análisis, experimentación que junto a las discusiones, conjeturas y argumentaciones permitieron desarrollar actitudes positivas en los niños hacia las matemáticas.

Aprovechando la imaginación de los niños y su gusto por lo misterioso se creó una historia con personajes fantásticos, dotados de vida y que provenían de la fantasía infantil que animan al niño a explorar sus propios caminos, a construir sus reglas y a descubrir la manera de hacer las cosas a partir de su interpretación personal, su bagaje y su creatividad. La manera de cómo abordar cada situación, la verbalización del proceso de resolución junto con argumentaciones del porqué de las afirmaciones es uno de los pilares de la evaluación del aprendizaje, de igual manera, la forma de resolver, la estrategia de solución y el análisis de cada una, complementan el proceso de evaluación.

La propuesta plantea una historia cuya función es buscar ayuda y enviar una serie de retos matemáticos los cuales tienen que resolver los niños. La solución a los enigmas está al alcance de todos, ya que se pueden resolver utilizando diversas estrategias, dependiendo de los conocimientos previos que cada cual tenga. El objetivo no es que un solo niño lo logre, sino que a través de la cooperación todos los equipos puedan llegar a la solución para así poder disfrutar todos juntos el tesoro del Ogro.

La historia inicia con el enojo explosivo del Ogro "Polifemo" en la celebración del día de la santita "Pachamama" patrona del bosque y defensora de la naturaleza, situación que tuvo lugar en el castillo encantado del bosque "Las mil y una noche" debido a que todos sus invitados siempre le ganaban los juegos en los que participaba y tanta fue su ira que ordenó a todos sus colaboradores que cerraran el castillo inmediatamente y que nadie podía salir hasta descubrir qué estaba sucediendo; les indicó repartir folletos en los alrededores del castillo informando lo sucedido e invitando a cumplir una serie de tareas para salir de allí.

La primera de ellas, correspondía a una serie de retos a cambio de ganar indulgencias para dejarlos libres y para esto requerían de ayuda externa con el fin de resolver las distintas tareas. Es así como uno de los folletos llega a manos de una hada madrina (la profesora), quien le cuenta la situación a los niños y éstos muy preocupados por los personajes en cautiverio, empiezan a ayudarlos enviándoles los resultados de los retos a través de una urna viajera, ubicada en el salón de clase, que sería revisada todas las noches por el ogro y obtendrían los estudiantes un puntaje especial por sus respuestas.

La segunda tarea consistía en una carrera de observación, donde los niños y niñas debían atravesar por cinco estaciones con el fin de seguir la pista y descubrir un número mágico que los llevaría a descifrar un misterio para ayudar al ogro a cumplir un compromiso adquirido con la santita "Pachamama".

Logrando de manera exitosa la solución de los retos y su participación en la carrera de observación, los personajes misteriosos quedarían libres y los niños, tendrían la posibilidad de disfrutar de una fiesta de Halloween con todos los gastos pagos por el Ogro, la fiesta estaría condicionada a una tercera y última tarea relacionada con la organización de la misma celebración. Con esta actividad termina la historia, donde además los niños y la profesora conocen finalmente al Ogro "Polifemo" y a los personajes misteriosos.

Tabla 1

Estructura de las sesiones

Partes	Número de la sesión	Contenido de la sesión
Primera parte "Colección de juegos"	1ª Sesión	Noticia 1: Juego cerrar quinces
	2ª Sesión	Noticia 2: Quien coge el último pierde
	3ª Sesión	Noticia 3: Mini computador de Papy
	4ª Sesión	Noticia 4: Llegando a cien
Segunda parte "Carrera de observación"	5ª Sesión	La carrera la conforman cinco estaciones y para llegar allí cada una tiene una pista diferente que se tendrá que resolver.
Tercera parte "La fiesta de Halloween"	6ª Sesión	Por grupos organizaron una fiesta para cuarenta y dos invitados, por lo tanto, cada grupo tuvo una misión que cumplir.
	7ª Sesión	Los niños después de realizar cada misión explicaron cómo lo hicieron, participaron de la fiesta, recibieron al Ogro y compartieron todos.

*Fuente:*autora.

La solución a los enigmas estaba al alcance de todos, ya que se podían resolver utilizando diversas estrategias dependiendo de los conocimientos previos que cada cual tenía. El objetivo no era que un solo niño lo lograra, sino que a través de la cooperación todos los equipos llegaran a la solución para así poder disfrutar todos juntos el tesoro del Ogro.

Resultados

En el diagnóstico se observó gran disponibilidad para presentar la prueba y utilizar sus experiencias y pre saberes para resolver el problema,reconocimiento de la necesidad de seguir una estrategia para solucionar un problema matemático, se les facilitó más explicar el procedimiento pero no justificarlo con propiedad y veracidad, en cuanto al manejo de operaciones básicas presentaron dificultad para ejecutarlas y se vio una necesidad enorme de aprobación del maestro para realizar continuar generando así dependencia.

Durante el proceso de intervención se pudo percibir en los estudiantes que en el comienzo se les dificultó el interpretar principalmente las reglas de los juegos y por lo tanto, la creación de estrategias para resolverlos no fueron efectivas en su totalidad, respecto al uso de operaciones matemáticas en la resolución de problemas se vio un progreso siendo más competitivos y asertivos, mantuvieron una actitud positiva frente al éxito como al fracaso buscando siempre mejorar, al explicar los procesos y justificar la elección de la estrategia para resolver el problema incrementaron su seguridad frente a la exposición de resultados asumiendo con valor la oposición de argumentos, valoración de la lectura atenta de enunciados y la importancia de la interpretación en el proceso comunicativo a través de cartas y el desarrollo de las fichas de trabajo.

En la prueba final se logró verificar la superación en gran medida, de dificultades en cuanto a resolución de problemas matemáticos, el juego, despertó el interés de los estudiantes y los mantuvo motivados hacia el aprendizaje, el fortalecimiento de habilidades comunicativas, el trabajo en equipo y actitud positiva frente a las matemáticas y el mejoramiento de habilidades de pensamiento matemático al utilizar y relacionar los números, las operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión.

Conclusiones

La comparación entre los resultados de la prueba diagnóstica, la prueba final y los hallazgos obtenidos en la intervención con la Estrategia Didáctica de Juegos de estrategia, permiten dar respuesta a la pregunta de investigación: ¿Cómo potenciar en estudiantes de cuarto grado de primaria, el proceso de comunicación en la resolución de problemas a través de juegos de estrategia? Claramente se evidencia que el fortalecimiento de habilidades propias del ser humano se consigue mediante el uso de nuevos métodos de aprendizaje basados en la resolución de problemas contextualizados y en la aplicación de propuestas interesantes para los estudiantes y planeadas acorde a la edad, todo ello dentro de un marco de pensamiento crítico y aprendizaje activo.

De esta forma, se separa de enfoques tradicionales relacionados con la ejercitación de los algoritmos y el cálculo por sí solo. Se potencian dichas habilidades indispensables para obtener éxito en la resolución de problemas, a través del uso de gran variedad de situaciones de aprendizaje donde los estudiantes puedan explorar y participar independientemente de sus pre saberes encontrando agrado y persistencia al afrontar situaciones problémicas relacionadas con el uso de las matemáticas y donde se fomente el trabajo en equipo, la organización y la toma de decisiones. Al respecto, los resultados permiten ver que los estudiantes valoraron la lectura atenta de los enunciados para poder comprender los juegos, identificar las reglas y en la fase de verbalización de los resultados y del proceso de resolución vieron la importancia de esforzarse para hacerlo de forma coherente, ordenada y clara.

Momentos como, la forma de comunicarse por escrito con el Ogro a través de cartas y el desarrollo de las fichas de trabajo son actividades en las que la interpretación como habilidad logra un papel muy importante en el proceso comunicativo de los estudiantes. De igual manera, se potencian habilidades de pensamiento matemático cuando los niños utilizan y relacionan los números, las operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático para crear estrategias, poner en práctica estrategias ganadoras y resolver los distintos juegos y problemas presentados analizando las distintas opciones de solución, aprendiendo de los errores y valorando la posibilidad de mejorar; estas actividades engrandecen el proceso de razonamiento y resolución de problemas en los niños. Finalmente, se puede concluir que los niños mejoraron sus procesos matemáticos y sobre todo su gusto, confianza y persistencia para afrontar situaciones problémicas relacionadas con el uso de la Matemática.

Referencias y bibliografía

Alberich, T. (2017). *Metodologías participativas*. Argentina:Unicen.Recuperado de http://beu.extension.unicen.edu.ar/xmlui/bitstream/handle/123456789/246/Metodologias%20participativas.pdf?sequence=1

Edo, M., Baeza, M., Deulofeu, J. y Badilla, E. (2008). El estudio del paralelismo entre las fases de la resolución de un juego y las fases de resolución de un problema. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática Unión*, *14*. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2008/14/Union_014_009.pdf

Elliott, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Ediciones Morata.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2004). *Didáctica de la matemática para Maestros*. Universidad de Granada. Recuperado de www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Guzmán, M. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza.* Sociedad canaria de profesores de matemáticas Isaac Newton. Santacruz de Tenerife. Recuperado de http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/sites/default/files/mguzman/06juegomat/juegosmatensenanza/juemat.htm#A

Guzmán, M. (1989). Juegos y matemáticas.*Revista Suma,*4, 61-63.

Jiménez, A. y Pineda, L. M. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Educación y Ciencia*, *16*, 101-116. Recuperado de https://revistas.uptc.edu.co/index.php/educacion_y_ciencia/article/download/3243/2920/

Lewin, K. (1992). *La investigación-acción participativa: inicios y desarrollos*. Editorial Popular.

Ministerio de Educación Nacional(MEN). (1994). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (MEN). (1994). *Ley General de Educación,* Ley 115 de 1994. Colombia. Bogotá D.C.

Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton universitypress.

Tripero, A. T. (2011). Vygotsky y su teoría constructivista del juego. *E-Innova*. Recuperado dehttp://biblioteca.ucm.es/revcul/e-learning-innova/5/art382.php#.Vz3bitRrukp

Vigotsky, L. S. (1987). *Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores*.La Habana: Editorial Científico-Técnica.

Yuste, F. C. (2008). Las matemáticas de los no matemáticos.Enciclopedia online Ecured. Recuperado de http://www.ecured.cu/zonade_desarrollo_próximo

.

Un estudio sobre el razonamiento probabilístico de estudiantes de grado once de un colegio del sector público de Cali

Juan Carlos Galindo **Realpe**
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
juan.galindo@correounivalle.edu.co.
Karen Velasco **Restrepo**
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
karen.velasco@correounivalle.edu.co.

Resumen

La vida diaria se encuentra permeada de eventos que tienen estrecha relación con el azar y la probabilidad. Sin embargo, a pesar de la presencia tan evidente de esta ciencia en la cotidianidad, la importancia que se le da en Colombia, aún sigue siendo mínima en comparación con otros temas matemáticos que se enseñan en la escuela. Por lo tanto, este trabajo se orienta en abordar las dificultades que presentan los estudiantes durante el proceso de resolución de problemas probabilísticos, a causa del sistema de creencias (carga cultural) que influye de manera significativa durante la toma de decisiones que se presentan en nuestra vida. Para ello se realizó el diseño de una pruebadiagnóstica y tres hojas de trabajo en las cuales se propusieron actividades que giraban en torno a tres diseños realizados en GeoGebra, los cuales simulan situaciones probabilísticas comunes para los estudiantes.

Palabras clave: Resolución de Problemas, GeoGebra, probabilidad, sistema de creencias.

Presentación

El presente trabajo, hace parte de una investigación que se encuentra en curso y que tiene como propósito central, abordar las dificultades que presentan los estudiantes de grado once en el desarrollo del pensamiento probabilístico, a causa del sistema de creencias. Para ello,se diseñó una prueba diagnóstica con el fin de determinar el nivel de pensamiento probabilístico que poseen los estudiantes y posteriormente, de acuerdo a los datos obtenidos, se diseñaron tres actividades didácticas con sus respectivas hojas de trabajo, haciendo uso del software dinámico de GeoGebra. Estas actividades deben permitir que el estudiante alcance un nivel de pensamiento crítico en cuanto a conceptos probabilísticos y que se aleje de argumentos que puedan basarse en algún sistema de creencias que conducen, con mucha frecuencia, a una predicción errónea de diferentes situaciones que se pueden presentar en nuestra vida. Con los diseños que se presentan en GeoGebra, el estudiante tiene la posibilidad de observar con más claridad cuáles son las características probabilísticas que se presentan al momento de lanzar tres monedas, dejar caer cierta cantidad de balotas por un circuito o incluso de jugar a la lotería.

Debido a las diferentes características con las que cuenta GeoGebra es posible que el estudiante tenga un papel más participativo y exploratorio en las diferentes actividades que se presentan, de modo que pueda por sí mismo construir conocimientos probabilísticos que le ayuden a tomar decisiones, utilizando bases mucho más sólidas que las de los sistemas de creencias.

Marco de la investigación

El marco teórico que fundamenta la problemática, el diseño de los instrumentos de investigación y el análisis de los resultados obtenidos a través de estos instrumentos, abarca cuatro elementos fundamentales:

El proceso de Resolución de Problemas

Trabajo de Schoenfeld. De acuerdo con Santos (1992),Schoenfeld señala en su propuesta que en el proceso de resolución de problemas intervienen las siguientes dimensiones:

- Dominio del conocimiento
- Estrategias Cognoscitivas
- Estrategias Metacognitivas
- Sistema de Creencias

Para el desarrollo de esta investigación, es importante tener en cuenta el sistema de creencias, el cual según Schoenfeld, citado en Santos (1992), hace referencia a las ideas de los estudiantes sobre las matemáticas y como resolver problemas, se considera un aspecto muy importante dentro de la propuesta de Schoenfeld, debido a que, lo que un estudiante piensa acerca de las matemáticas influye fuertemente en la forma en como resuelve problemas en matemáticas.

Lo anterior, se evidencia en la investigación llevada a cabo por Sánchez y Benítez (1997), en la cual, se puede observar que las creencias que tienen los estudiantes sobre el concepto de probabilidad, influyen considerablemente en el proceso de Resolución de Problemas. La investigación en mención, es detallada a continuación.

Los niveles de pensamiento probabilístico

El proyecto realizado por Sánchez y Benítez (1997), tenía como propósito describir algunas características del razonamiento probabilista de estudiantes de distintos niveles de escolaridad, cuando se enfrentan a problemas de probabilidad, definiendo así, los siguientes niveles del pensamiento probabilístico:

- **Impredicción:** se ubican aquí, a aquellos estudiantes que consideran que es imposible predecir resultados en situaciones aleatorias.

- **Determinístico:** en este nivel, se ubican los estudiantes que consideran que los resultados de una situación, en la cual interviene el azar, depende de causas divinas, físicas o empíricas.
- **Mecánico:** aquellos estudiantes que hacen uso de manera incorrecta de algoritmos para dar respuesta a una situación propuesta, lo que refleja que es resultado de un aprendizaje memorístico, carente de significado.
- **Pre-rigor:** se ubican aquí, aquellos estudiantes que vislumbran algunos resultados de un evento (no todos), tiene una capacidad más elevada para argumentar y se ha alejado un poco del nivel de pensamiento determinístico.
- **Rigor:** en este nivel se encuentran los estudiantes, que para argumentar hacen uso de diferentes representaciones para un problema, en otras palabras, pueden argumentar matemáticamente.

El uso de múltiples representaciones

De acuerdo con Rivas (2009), la mayoría de profesores de matemáticas, tienden a centrar su atención y aceptar como único medio de representación, el sistema simbólico algebraico (considerado el más formal), y pocas veces se hace explicita la relación entre las distintas formas de representación de los conceptos matemáticos, lo que genera que el aprendizaje adquirido por los estudiantes sea deficiente.

Por lo tanto, se consideró importante dentro de esta investigación, desarrollar y presentar a los estudiantes hojas de trabajo y diseños en el software GeoGebra, que conlleven a la utilización y articulación de los diferentes tipos de representación semiótica, debido a que como lo afirma Hitt (2001), en la Resolución de Problemas, las representaciones son consideradas como el corazón de las matemáticas.

Mediación Instrumental

De acuerdo con Moreno (2002), existen dos metáforas importantes en la construcción del conocimiento matemático en la escuela cuando se usan instrumentos de mediación, y son definidas de la siguiente manera:

- La metáfora de las herramientas de amplificación: se puede pensar aquí en una lupa, debido a que la herramienta nos permite ver, amplificado, lo que no se veía a simple vista.
- La metáfora de las herramientas de re-organización cognitiva: sugiere pensar en un microscopio, debido a que permite ver lo que no era posible sin la herramienta.

Con lo anterior, se puede decir entonces que se habla de herramienta, cuando un estudiante la usa como auxilio en la realización de cálculos o graficas dentro de un problema cuya solución ya ha encontrado, es decir, solo genera efectos de amplificación. En este caso, la herramienta no modifica, sino que complementa el pensamiento del estudiante.

Metodología

Es importante aclarar, por un lado, que el tipo de estudio es de corte mixto, denominado de esta forma debido a que las hojas de trabajo aplicadas a los participantes se analizaran desde los enfoques cualitativo y cuantitativo, y por otro que el estudio se estructura, de las siguientes fases tal como se evidencia en la figura 1:

- Diseño
- Validación
- Uso de la Tecnología
- Recolección
- Análisis

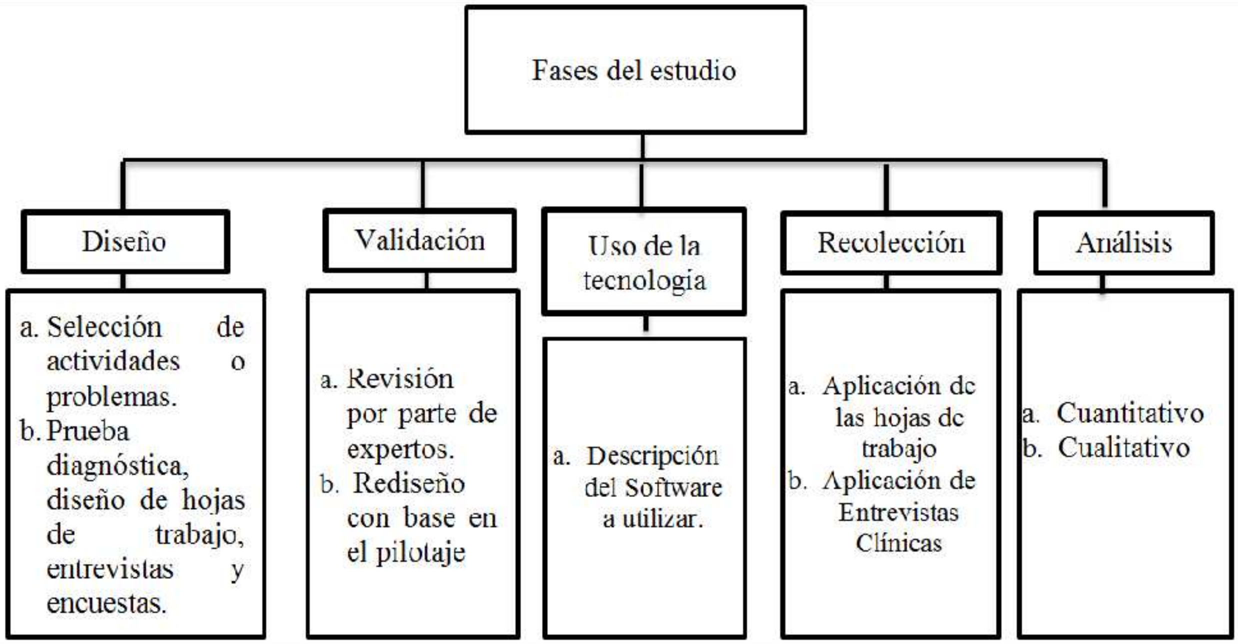


*Figura 1.*Fases del estudio. (Elaboración propia).

En la primera fase (diseño) se seleccionaron actividades, estructuradas de acuerdo a los Estándares Básicos de Competencias en matemática propuestos por el Ministerio de Educación de Colombia (MEN 2006), para el grado once. Dichas actividades debían permitir una adecuada elaboración de preguntas que estarían presentes en la prueba diagnóstica y para ello se tuvo en cuenta una serie de criterios expuestos por Benítez (2006). La encuesta se realizó con el fin de identificar algunas características del pensamiento probabilístico que tenían los estudiantes y de este modo poder clasificarlos teniendo en cuenta los niveles de pensamiento probabilístico definidos por Sánchez y Benítez (1997), los cuales van desde la impredicción hasta un pensamiento riguroso.

La segunda fase consistió en realizar un pilotaje, de la prueba diagnóstica y las hojas de trabajo diseñadas, con el fin de que los diseños fueran revisados por expertos (director de la investigación, profesores con conocimiento en la elaboración de propuestas en tecnologías digitales y profesores del colegio escogido), y de acuerdo a las sugerencias recibidas, se procedió a realizar los respectivos ajustes, debido a que se considera que tales orientaciones fueron significativas dentro de este proceso para alcanzar los objetivos propuestos.

La tercera fase tenía como propósito presentar a los estudiantes algunas instrucciones sobre el manejo de GeoGebra con el fin de que pudieran desenvolverse con mayor facilidad en las actividades propuestas en las hojas de trabajo.

Adicionalmente, siguiendo a Benítez (2006), dentro de esta fase se implementarán las siguientes acciones:

- Descripción general del software.
- Taller de manejo de tecnología.
- Solución de problemas.

El tiempo destinado para el desarrollo de cada hoja de trabajo fue de una hora y se realizó en un aula dotada de los equipos suficientes y el software requerido.

La cuarta fase (recolección de la información), se llevó a cabo en el colegio Pedro Antonio Molina sede "Los Vencedores", durante el segundo semestre del año en curso, con estudiantes de grado once, tal como se ha mencionado anteriormente.

Esta fase se considera fundamental, debido a que a partir de esta se analiza y se procesa la información que se obtienen en cada una de las actividades que conforman la propuesta didáctica.

La información, fue obtenida de las siguientes fuentes:

- La prueba diagnóstica de entrada y salida.
- Las hojas de trabajo.
- Encuestas y entrevistas, según sea el caso.

Finalmente, con los datos obtenidos, se espera realizar en el transcurso del mes de noviembre del año en curso, el análisis, cuantitativo y cualitativo, de la información obtenida, y de esta manera, dar respuesta a las preguntas de investigación que son la guía para la realización de este trabajo, y además, se podrá evaluar el impacto de las actividades que fueron propuestas, en el salón de clase, a los estudiantes.

Conclusiones preliminares

De acuerdo a la información obtenidahasta el momento, la mayoría de los estudiantes participantes del estudio, se encuentran ubicados en los niveles de predicción y determinístico. Por lo tanto, se espera que con la intervención docente, la puesta en acto con el software GeoGebra y las hojas de trabajo, alcancen un nivel superior a estos.

Adicionalmente, se espera que, a través de los instrumentos diseñados, de las respuestas y los procedimientos, los estudiantes logren construir heurísticas y estrategias de control que les permitan resolver problemas de probabilidad con argumentaciones matemáticas.

Por último, consideremos que de acuerdo con Moreno (2002) es posible que el uso sostenido de la herramienta desemboque en cambios a nivel de las estrategias de solución de problemas y a nivel de la manera misma como se plantea el problema. Por lo tanto, se espera, que al usar GeoGebra como herramienta de mediación de la investigación, el pensamiento matemático del estudiante quede afectado positivamente y se generen efectos de reorganización conceptual.

Referencias y bibliografía

Benítez, D. (2006). *Formas de razonamiento que desarrollan estudiantes universitarios en la resolución de problemas con el uso de tecnología. Tesis Doctoral.* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N, México.

Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en Educación Matemática. En P. Gómez & L. Rico (Eds.), *Educación Matemática, en Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 165–176). Universidad de Granada, Granada.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar! En *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (pp.46–95). Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co.

Moreno, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En Ministerio de Educación Nacional de Colombia (Ed.), *Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación media de Colombia.* (pp. 81–86). Bogotá, Colombia.

Rivas, A. (2009). *Un estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad en secundaria (Tesis de Maestría)*. Universidad Autónoma de Coahuila, México.

Sánchez, E., y Benítez, D. (1997). Algunos acercamientos al razonamiento probabilista de los alumnos. *Actas de Las Undécima Reunión Latinoamericana de Matemáticas Educativa*, *11*, 157–161. Recuperado de: http://clame.org.mx/uploads/actas/alme 11.pdf

Santos, M. (1992). Resolución de Problemas: El Trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a Considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Educación Matemática*, *4*(agosto), 16–23.

La Tienda de Matemáticas: Estrategia de ayuda entre iguales.

M. Guadalupe **Leal** Zamorano
Centenaria y Benemérita Escuela Normal del Estado de Querétaro México
gpeleal07@gmail.com

Resumen

En este reporte se enuncian los principales hallazgos recuperados de la implementación de "La Tienda de Matemáticas" como estrategia de *ayuda entre iguales,* en la que los estudiantes avanzados (vendedores) ofrecen ayudas a sus compañeros (compradores). Se llevó a cabo en dos escuelas secundarias del estado de Querétaro, México. En la primera, a nivel grupo, constituyendo el precedente de la segunda, en la que se estableció a nivel escuela, participando como vendedores nueve alumnos de los tres grados, siendo el taller de dibujo técnico y el cambio de turno, el espacio y horario propicios para el desarrollo del proyecto. Se realizó un estudio narrativo mediante un proceso inductivo, en el que se concluyó que la ayuda entre iguales es ideal para implicar a los estudiantes en la *resolución de problemas matemáticos.*

Palabras clave: Educación secundaria, enseñanza-aprendizaje, pensamiento matemático, resolución de problemas, ayuda entre iguales.

Tema objeto de estudio

En el campo de la Educación Matemática la *resolución de problemas* es un tema relevante, tanto para la investigación como para el diseño e implementación de estrategias didácticas. Asimismo, el Sistema Educativo Mexicano (SEM), en sus planes y programas de estudio para la Educación Secundaria, ha considerado, desde 1993, la resolución de problemas como eje rector de las matemáticas y, con el propósito de situar el objeto de estudio *la ayuda entre iguales en la resolución de problemas* en el contexto actual, se retoman dos ámbitos del perfil de egreso, enunciados en el Modelo Educativo 2018, pensamiento matemático y, colaboración y trabajo en equipo, que refieren, respectivamente: "Amplía su conocimiento de técnicas y conceptos matemáticos para plantear y resolver problemas" y "Reconoce, respeta y aprecia la diversidad de capacidades y visiones al trabajar de manera colaborativa".

Al respecto, se llevó a cabo un estudio narrativo con las evidencias de las dos etapas de la propuesta didáctica, para dar respuesta a la *pregunta*: ¿Cuáles son los principales hallazgos de la ayuda entre iguales que implican a los alumnos de secundaria en la resolución de problemas matemáticos?, por lo que se planteó el siguiente *objetivo*: Reconstruir una narrativa con los principales hallazgos de "La Tienda de Matemáticas" como estrategia de ayuda entre iguales en la resolución de problemas. En la cual los estudiantes avanzados asumen el rol de vendedores de ayudas pedagógicas y los alumnos que presentan dudas toman el rol de compradores de dichos apoyos, utilizando para la compra-venta monedas didácticas.

Para ello se retoman los acontecimientos más sobresalientes sucedidos durante la aplicación del estudio en las escuelas participantes, la "15 de septiembre", ubicada en la localidad de Vizarrón, Cadereyta, Querétaro; con 9 grupos de 35 alumnos en promedio; en la cual se implementó por primera vez el proyecto, en su fase *salón de clase* en un grupo de tercer grado, durante el ciclo escolar 2004-2005 y, años más tarde, en el ciclo 2010-2011, se llevó a cabo como *proyecto de escuela* en la secundaria "Las Américas", con domicilio en la ciudad de Querétaro, México. Esta última institución integrada por 36 grupos, 18 en cada turno, con una población total aproximada de 1500 alumnos.

Antecedentes y fundamentación teórica Estado de la cuestión

En este apartado se abordan los antecedentes relacionados con los enunciados generales que constituyen el objeto de estudio. Con respecto a la *resolución de problemas matemáticos*, Polya (1965) propone un procedimiento que consta de cuatro etapas: Comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva (p.19). Asimismo, Labarrere (1987), refiere cuatro momentos: Análisis inicial del problema, determinación de la vía de solución, ejecución de la solución y control de la solución realizada (p.37). Por otro lado, Barrantes (2006) expone los cuatro componentes cognitivos propuestos por Allan Schoenfeld: Los recursos, las heurísticas, el control y el sistema de creencias; los primeros son los conocimientos que el sujeto posee relacionados con el problema matemático, las heurísticas son las técnicas y estrategias para solucionar el problema, el control incluye planificar, estimar y tomar decisiones durante el proceso de resolución y, con respecto a las creencias el autor considera que afectan el proceso.

En relación a la *ayuda entre pares*, Moliner, Gambaro y Prades (2010) afirman que es un método de aprendizaje conjunto que se desarrolla en un clima de confianza y genera actitudes positivas hacia el estudio. Mosca y Santiviago (2012) refieren que en ese vínculo se favorece el interés por el aprendizaje y la asunción de compromisos; al respecto Valdebenito y Durán (2013) destacan el aprendizaje que adquiere el tutor durante la preparación previa para ayudar a su compañero, quien, de acuerdo con Durán y Flores (2014), se implica responsablemente en el estudio, estableciéndose una relación asimétrica, es decir, ambos alumnos enseñan y aprenden (Durán, Flores, Mosca y Santiviago, 2015) y, lo más importante es que la diversidad de capacidades y visiones se convierten en una fuente de aprendizaje. (Flores, Durán y Albarracín, 2017, p. 70).

La clase de matemáticas

Retomando la idea de ser matemático para alguien, de Chevallard, Bosch y Gascón (1998), se diseñó "La Tienda de Matemáticas" en un grupo de 3° de la escuela Secundaria General "15 de Septiembre", durante el tratamiento del tema ecuaciones lineales, correspondiente al Programa de estudios 1993; en la cual los dos primeros equipos en resolver correctamente el problema planteado para la clase, se convierten en vendedores de ayudas pedagógicas y el resto de los estudiantes, si lo requieren, son los compradores de explicaciones para la consecución del objetivo propuesto en la sesión de trabajo.

La clase se desarrolla en tres momentos, en las *actividades de inicio* se plantea un problema y se lleva a cabo un análisis grupal del texto, a partir de una lluvia de ideas guiada por preguntas orientadora encaminadas a la comprensión de los datos, condiciones y exigencia del problema; en seguida los estudiantes forman triadas por afinidad. Posteriormente, en las *actividades de desarrollo,* los alumnos se dedican a resolver el problema con sus compañeros de equipo, mientras tanto la docente atiende las ayudas pedagógicas y, una vez que terminan con éxito una o dos triadas, los integrantes de esos equipos se ocupan de ofrecer las ayudas, más conocidas entre ellos como pistas, solicitadas por los alumnos que prefieren acudir a la tienda para lograr la resolución del problema. Por último, una vez concluida la compra-venta de ayudas, en las *actividades de cierre*, se realiza un análisis grupal de los procesos efectuados con la finalidad de fortalecer el pensamiento matemático y, en caso de ser pertinente, la docente introduce los algoritmos convencionales como un procedimiento más.

Fundamentos conceptuales

La primera consigna que sustenta la creación de "La Tienda de Matemáticas" refiere que hay una buena razón para aprender y enseñar matemáticas porque en la vida cotidiana uno se puede ver conducido a hacer de matemático para alguien. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1998, p.35), es decir, no sólo el matemático o el maestro de matemáticas pueden hacer matemáticas, sino cualquier persona y en particular los alumnos al ayudar a sus compañeros en la resolución de problemas. Así es como surge la iniciativa de generar estrategias didácticas que impulsen el desarrollo del pensamiento matemático a partir de la resolución de problemas, como es el caso de la *ayuda entre iguales*, porque los vendedores enseñan y aprenden ayudando a sus compañeros, teniéndoles paciencia si no saben algo, conversando en un clima de confianza. (Moliner, Gambaro y Prades, 2010).

En base a que la ayuda entre iguales es una estrategia que promueve el aprendizaje compartido y las relaciones interpersonales, se describe como la vinculación entre dos personas que establecen una relación asimétrica a partir de un objetivo común, conocido y compartido (Duran, Flores, Mosca y Santiviago, 2015, p. 32), para este caso, la resolución de problemas matemáticos. A partir de esta premisa se constituyen los enunciados que sustentan el análisis del objeto de estudio, teniendo en cuenta que en la formación de diadas se genera un *aprendizaje mutuo*, en el que se decreta una relación de ida y vuelta entre vendedor y comprador para lograr la resolución compartida, favoreciendo la autoestima y la implicación responsable en la actividad; porque, *estudiar juntos* sugiere saber trabajar en equipo y representa una extraordinaria oportunidad para las relaciones interpersonales. De este modo, el comprador recibe una atención ajustada a su zona de desarrollo próximo, en un clima de confianza, sintiéndose protagonista de su propio proceso de aprendizaje, derivado de la resolución del *problema matemático*.

Aprendizaje mutuo, de acuerdo con Duran y Flores (2014), consiste en "la capacidad de compartir el conocimiento y las experiencias entre los participantes" (p. 7), en cuanto a que aprenden de manera recíproca, es decir, se establece una relación bidireccional que soslaya la trasmisión del conocimiento, puesto que el vendedor de ayudas, aun cuando conoce la solución del problema, en el momento de dialogar con su compañero está en ocasión de aprender, por ejemplo diversas formas de ofrecer ayuda, otros conocimientos, más heurísticos o los mismos pero desarrollados bajo otra perspectiva, esto es, se percata de algunas relaciones que no había detectado en su propia resolución y, bajo estas condiciones, se siente satisfecho por tener la facultad de aprender ayudando; por su parte el comprador se visualiza como un aprendiz que también puede enseñar y que, por ello, tiene muchas posibilidades de lograr su meta, implicándose responsablemente en la resolución del problema. En este sentido, Duran y Flores (2014) afirman que ejercer el rol de tutor favorece la implicación, la responsabilidad y la autoestima, mejorando las habilidades sociales, comunicativas y de ayuda. (p. 8).

Estudiar juntos, representa una excelente oportunidad para aprender a trabajar en equipo, porque los estudiantes se reúnen en diadas para resolver juntos los problemas de matemáticas, de forma que, mediante las relaciones interpersonales, surge la empatía y la confianza en sí mismo, creándose compromisos colaborativos. De esta manera, el vendedor enseña y aprende ayudando a su compañero, teniéndole paciencia cuando no sabe algo, generando así un clima de confianza (Moliner, Gambaro y Prades, 2010), en el que el comprador recibe una atención ajustada a su zona de desarrollo próximo, es decir, mediante la colaboración logra el nivel superior en el desarrollo (Dubrovsky, 2005, p. 29), porque la ZDP se define como la distancia entre el nivel de desarrollo real y el nivel de desarrollo potencial.

Problemas matemáticos. Considerando que el principal motivo de la ayuda entre iguales es la resolución de problemas matemáticos, para efectos del presente estudio “Se denomina problema a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo.” (Campistrous, L y Rizo, C., 1996, pp. IX-X). Entonces la situación exigida tiene que ser desconocida para la persona que acepta realizar la transformación. En este caso se incide en el desarrollo del pensamiento matemático, teniendo en cuenta que “un problema matemático es aquel que demanda del sujeto una intensa actividad cognoscitiva” (Labarrere, 1987, p. 19), porque para acceder a la respuesta tiene que pensar, razonar y encontrar los conocimientos y procedimientos que se espera conducen a la respuesta.

Diseño y metodología

Este trabajo se inscribe en el enfoque cualitativo, se realizó un diseño narrativo el cual, mediante un proceso inductivo, pretende entender los procesos de la ayuda entre iguales, a partir de las vivencias de las personas que las experimentaron (Hernández, Fernández y Baptista, 2014, p. 487). De este modo se contextualizó el momento y el lugar donde ocurrieron las experiencias didácticas, de forma que se identificaron tres categorías de análisis: aprendizaje mutuo, estudiar juntos y problemas matemáticos; para reconstruir los hechos y entretejerlos en una narrativa general que enuncia los hallazgos más sobresalientes de la implementación de “La Tienda de Matemáticas”, en la que se destacan las ventajas que ofrece *la ayuda entre iguales* como estrategia para abordar el pensamiento matemático mediante la re*solución de problemas*.

La recogida de la información se llevó a cabo a partir de la revisión de los documentos archivados, correspondientes al desarrollo de cada una de las etapas; de la primera, el informe de los resultados y, de la segunda, el proyecto escrito presentado a las autoridades escolares, las listas de asistencia de los vendedores, la bitácora de registro de los compradores y el informe de los resultados; siendo éstos recursos las principales evidencias que facilitan el análisis a posteriori de la puesta en marcha de la estrategia. Además, es importante destacar que se cuenta con el antecedente de la autoría, la propia intervención y, consecuentemente, la observación participante.

En relación a los participantes, el equipo de vendedores, del proyecto de escuela, se conformó inicialmente por 9 alumnos de los tres grados y de ambos turnos, seleccionados bajo los siguientes criterios: partícipes del entrenamiento para las Olimpiadas de Matemáticas, dispuestos a trabajar en el proyecto e interesados para implicarse en una estrategia de colaboración. Por su lado, los compradores fueron alumnos de la escuela, de cualquier grado y turno, que asistían al taller de dibujo técnico, con la finalidad de solicitar ayuda para resolver sus problemas de matemáticas.

Resultados Los principales hallazgos recuperados de la primera etapa de "La Tienda de Matemáticas", como estrategia de ayuda entre iguales, en el salón de clase son, en cuanto al *aprendizaje mutuo,* gran motivación por aprender ayudando, debido a que la mayoría de los alumnos manifiestan interés por asumir el rol de vendedores y en determinado momento lo consiguen, al respecto la Alumna 1 afirma: "aprendí a esmerarme en mi trabajo para lograr estar en la tienda", en este rubro, Duran y Flores (2014) refieren que quien ejerce el rol de tutor se implica responsablemente y mejora su autoestima (p.7); en relación a *estudiar juntos*, la misma estudiante expresa, "aprendí a trabajar en equipo (…), compartimos ideas, puntos de vista y aprendimos a respetar ideas y sugerencias"; por consiguiente todos los estudiantes del grupo logran terminar, en un ambiente de confianza, la solución de los *problemas matemáticos*, porque "es una forma de aprender mejor" (Alumno 2), a pesar de que "un problema matemático es aquel que demanda del sujeto una intensa actividad cognoscitiva" (Labarrere, 1987, p. 19) y, en este caso, también es notorio que algunos equipos persisten en lograr la resolución sin comprar ayudas, fortaleciendo con su perseverancia el pensamiento matemático.

También, es importante mencionar que en esta primera experiencia sobresale el Alumno 3, quien logra ser vendedor en casi la totalidad de las clases, convirtiéndose en el ayudante más solicitado, mismo que aprovechando esta coyuntura desarrolla diversas habilidades que le aseguran el éxito en su labor, porque de acuerdo con Duran y Flores (2014) el rol de tutor promueve habilidades sociales, comunicativas y de ayuda (p. 8). En suma, "la tiendita consistía en que la profa nos ponía un problema, lo resolvíamos en equipo y el primer equipo que acababa se ponía en la tiendita a vendernos información" (Alumna 4).

En la segunda etapa, el proyecto inicia a petición de algunos alumnos de la escuela, quienes participaron en las etapas eliminatorias de la Olimpiada Nacional de Matemáticas para Alumnos de Secundaria (ONMAS) y que manifestaron su deseo por continuar trabajando con los problemas matemáticos, de tal manera que, una vez formalizada la propuesta, ellos mismos se encargan de hacer la difusión y la organización interna del proyecto. En base al *aprendizaje mutuo*, se puede afirmar que los vendedores aprenden ayudando, teniendo en cuenta que es convincente la mejora en su desempeño durante la resolución de problemas en clase, como refiere un vendedor: "me sirvió mucho para reforzar mis conocimientos en las matemáticas" (Alumno de primer grado), con ello se confirma que la ayuda entre iguales es una estrategia de aprendizaje basada en la formación de parejas que establecen una relación de ida y vuelta (Duran, Flores, Mosca y Santiviago, 2015, p. 32).

Otro aspecto sobresaliente relacionado con *estudiar juntos* consiste en que los vendedores formulan problemas con anticipación, dirigidos a los compradores sistemáticos, es decir, a los alumnos que acuden regularmente, "por ejemplo de mi salón éramos seis y pues siempre íbamos" (Alumna A), en este caso Valdebenito y Duran (2013) sugieren que la preparación previa de los tutores facilita el aprendizaje de los tutorados, debido a que ajustan la ayuda a la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), favoreciendo el tránsito del nivel de desarrollo real al nivel de desarrollo potencial (Dubrovsky, 2005).

Por otro lado, es relevante mencionar que algunos estudiantes se incorporan al proyecto como compradores y posteriormente se convierten en vendedores, puesto que la ayuda entre iguales fomenta procesos motivacionales y relacionales que inciden positivamente en la resolución de problemas. En este sentido, Mosca y Santiviago (2012) afirman que en el vínculo entre tutor y tutorado se internalizan representaciones y valores que favorecen el interés por el aprendizaje y la asunción de compromisos. Lo anterior se ilustra con los comentarios de una vendedora: "pues cuando empezó el proyecto yo no estaba dentro porque en realidad no me gustaban las matemáticas (…) fue una experiencia muy bonita porque conocí a más personas y aprendí más (Alumna de 2° grado).

Un hallazgo más consiste en que la mayoría de los participantes mantienen el interés en la resolución de los *problemas matemáticos*, mismos que demandan del alumno "una intensa actividad cognoscitiva" (Labarrere, 1987, p. 19) porque la situación exigida es desconocida y la persona debe querer hacer la transformación, a partir del planteamiento inicial (Campistrous, L y Rizo, C., 1996). Asimismo, los vendedores expresan que cada vez les resulta más fácil ayudar a sus compañeros, al respecto, Duran y Flores (2014) refieren que el tutor desarrolla diversas habilidades (p. 8), por lo tanto, "era más fácil porque me enseñaba gente que iba en mi grupo y edad (…) y me tuvieron mucha paciencia en todo." (Alumna B); "podía preguntar con más confianza" (Alumna C), porque los vendedores enseñan y aprenden ayudando a los compradores, teniéndoles paciencia si no saben algo, propiciando un clima de confianza. (Moliner, Gambaro y Prades, 2010).

Además, es importante enfatizar que, una vez familiarizados con la resolución de problemas, los vendedores que cursan el primer grado son capaces de ayudar a los compradores de segundo grado y, por último, la trascendencia del proyecto se ve reflejada al final del ciclo escolar cuando dos vendedoras de segundo, por iniciativa propia, ayudan a sus compañeros de grado en su preparación para el examen extraordinario, fortaleciendo en ellos el pensamiento matemático que los llevó a la acreditación de la asignatura. **Conclusiones**

Mediante un proceso inductivo fue posible reconstruir una narrativa general de las vivencias de los alumnos que participaron en la conformación de "La Tienda de Matemáticas" como estrategia de ayuda entre iguales.

Los estudiantes ampliaron sus conocimientos de técnicas y conceptos matemáticos al plantear y resolver problemas entre iguales y, al mismo tiempo, aprendieron a respetar la diversidad de capacidades y visiones al trabajar de manera colaborativa.

De esta forma se puso en evidencia que, "La Tienda de Matemáticas", es una propuesta centrada en los alumnos, porque con el *aprendizaje mutuo*, mejoraron su autoestima y se implicaron responsablemente en la resolución de *problemas matemáticos* y, al *estudiar juntos*, aprendieron a trabajar en equipo, por consiguiente, la ayuda entre iguales es una estrategia con un potencial incalculable para el desarrollo del pensamiento matemático.

Por último, cabe resaltar la evolución de dicha estrategia, creada en el salón de clase (20042005), transformada en proyecto de escuela (2010-2011) y, sin perder su esencia, reestructurada en un nuevo proyecto de escuela denominado "Alumnos tutores en la resolución de problemas matemáticos" (2014-2015), el cual constituye la ponencia presentada en la XIV CIAEM e integrada en la publicación *Educación Matemática en las Américas.*

Referencias y Bibliografía

Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas: El trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de investigación y Formación en Educación Matemática, 1*(1), 1-9. Recuperado de https://docplayer.es/319024-Resolucion-de-problemas-el-trabajo-de-allan-schoenfeld1.html

Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprender a resolver Problemas Aritméticos.* La Habana: Pueblo y Educación.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* México: SEP.

Comité Interamericano de Educación Matemática (2015). Resolución de Problemas. En Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruiz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas, 15*, 31-38. Recuperado de http://ciaem-redumate.org/memorias-ciaem/xiv/pdf/Vol15Prob.pdf

Dubrovsky, S. (2005). *Vygotsky su proyección en el pensamiento actual*. México: Novedades educativas.

Duran, D. y Flores, M. (2014). Prácticas de tutoría entre iguales en universidades del Estado español y de Iberoamérica. *REICE revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficiencia y Cambio en Educación, 13* (1), 5-17. Recuperado de https://repositorio.uam.es/bitstream/handle/10486/666590/REICE_13_1_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Duran, D., Flores, M., Mosca, A. y Santiviago, C. (2015). Tutoría entre iguales: Del concepto a la práctica en las diferentes etapas educativas. *InterCambios*, *2*, (1), 31-39. Recuperado de http://grupsderecerca.uab.cat/grai/sites/grupsderecerca.uab.cat.grai/files/art3_duran.pdf

Flores, M., Duran, D. y Albarracín, Ll. (2017). Razonar en pareja: Tutoría entre iguales para desarrollar la resolución cooperativa de problemas. *Aula de Innovación Educativa, 266*, 69-73. Recuperado de http://grupsderecerca.uab.cat/grai/sites/grupsderecerca.uab.cat.grai/files/razonar-enpareja-tutoria-entre-iguales-para-desarrollar-la-resolucion-cooperativa-de-problemasau26681506.pdf

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ª. Edición). México: McGraw-Hill.

Labarrere, A. (1987). *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas de matemáticas en la escuela primaria.* La Habana: Pueblo y educación.

Moliner, L., Gambaro, M. L., & Prades, X. (2010). Aprender mientras enseñas. *Cuadernos de Pedagogía*, *405*, 28-30. Recuperado de http://grupsderecerca.uab.cat/grai/sites/grupsderecerca.uab.cat.grai/files/aprendermientrasense%C3%B1aslidon.pdf

Mosca, A. y Santiviago, C. (2012). *Fundamentos conceptuales de la tutoría entre iguales: La experiencia de la universidad de la República*. Montevideo: Universidad de la República.

Polya G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (27ª reimp.). México: Trillas.

Valdebenito, V. y Duran, D. (2013). La tutoría entre iguales como un potente recurso de aprendizaje entre alumnos: Efectos, fluidez y comprensión lectora. *Perspectiva educacional, formación de profesores, 52* (2). Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=333328170008

Secretaría de Educación Pública (2018). *Aprendizajes clave para la Educación Integral.* México: Autor. Recuperado de https://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/indexedubasica-niveles.html

Classificando os Quadriláteros: uma Situação Didática envolvendo leitura

Luciano Soares **Gabriel**
Universidade Cruzeiro do Sul
Brasil
lussoga@hotmail.com

Cidimar **Andreatta**
Universidade Cruzeiro do Sul
Brasil
cidimarcol@gmail.com

Resumo

O presente trabalho refere-se a um recorte de uma pesquisa de Mestrado concluída junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul. Tem como objetivo principal compreender como uma situação didática, apoiada na teoria das situações didáticas, pode contribuir para o ensino de Geometria – Quadriláteros – no Ensino Fundamental II. A elaboração da situação didática baseou-se em noções da Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, realizada com estudantes do sétimo ano, na qual foram analisados os diálogos dos alunos, as resoluções escritas e seus comportamentos frente à atividade proposta. Considerando o que se mostrou nos dados da pesquisa, foi possível verificar que a interação dos alunos com as atividades realizadas estimulou o desenvolvimento do pensamento matemático e geométrico através da resolução de problemas que estimularam a utilização das habilidades de observação, formulação, comunicação, argumentação e validação.

Palavras chave: Educação Matemática, Educação Básica, Ensino de Geometria, Situação Didática, Quadriláteros.

Introdução

Como professor de Matemática do Ensino Básico na rede privada de ensino, há 14 anos, e vice-diretor de uma escola estadual, há 10 anos, tenho presenciado a dificuldade dos alunos em aprender Matemática, sobretudo no que se refere a conteúdos geométricos. Seja pelo despreparo de alguns professores para ensinar tais conteúdos, seja pela falta de materiais didáticos pedagógicos de apoio ou pela não familiaridade de alguns docentes com recursos tecnológicos, a Geometria torna-se de difícil compreensão e, até mesmo, sem significado para muitos estudantes.

Diante disso, decidimos trabalhar com esse tema em nossa pesquisa de mestrado (GABRIEL, 2017). Para isso, debruçamo-nos em leituras e estudos sobre o processo histórico de como ocorreu e ainda ocorre o ensino da Geometria no Brasil. Percebemos que, depois de uma época de abandono que se configurou após o Movimento da Matemática Moderna, hoje seus conteúdos estão presentes nas escolas brasileiras e as práticas pedagógicas para seu ensino estão recebendo atenção de professores e pesquisadores. Contudo, concluímos que é um ramo da Matemática que ainda carece de mais cuidado no que diz respeito à aprendizagem dos alunos, ao material didático e à formação de professores.

Verificamos os apontamentos relativos à Geometria destacados nos documentos brasileiros de orientações curriculares e consideramos as orientações atuais acerca das possíveis abordagens para seu ensino. Segundo PCN (BRASIL, 1998), o estudo da Geometria deve ter como ponto de partida a análise de figuras através de observações, manuseios e construções, que permitam elaborar conjecturas e identificar propriedades, ou seja, o documento recomenda estimular o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças e identificar regularidades.

Por isso, elegemos o conteúdo Quadriláteros para criar uma sequência didática, pois, dentre as inúmeras figuras geométricas, os quadriláteros possuem propriedades envolvendo os seus elementos (lados, ângulos, diagonais, área, perímetro, etc.) que, quando trabalhados adequadamente, permitem os alunos raciocinar indutiva e dedutivamente, formulando e testando conjecturas e generalizações, desenvolvendo, assim, o pensamento geométrico. Notamos, portanto, que o estudo com os Quadriláteros vai ao encontro das recomendações dos PCN (BRASIL,1998).

Outro motivo que nos impulsionou para o trabalho com Quadriláteros foi o fato de encontrarmos nos objetivos indicados na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017) sobre o ensino de Geometria, um específico relativo a esse conteúdo: “Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão de classes entre eles” (BRASIL, 2017, p. 259).

Ao adotarmos, como objeto de investigação, analisar as contribuições de uma sequência didática para o ensino e aprendizagem do conteúdo Quadriláteros, buscamos aporte teórico na Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brosseau (2008), para elaboração das atividades que comporiam a sequência. Algumas dessas atividades serão relatadas na presente comunicação.

A Teoria das Situações Didáticas

Brousseau (2008) expõe como ideia básica, em sua Teoria das Situações Didáticas, aproximar o trabalho do aluno do modo como é produzida a atividade científica verdadeira, ou seja, o aluno se torna um pesquisador, testando conjecturas; formulando hipóteses; provando resultados; construindo modelos, conceitos e teorias, e socializando os resultados diante da resolução de um problema. Ainda segundo o autor, o aluno deve ser sempre estimulado a esforçar-se para superar seus limites e, com esforço próprio, construir novos conhecimentos. Para isso, sugere que o estudante passe por cinco etapas diante da resolução de um problema: • Etapa de devolução: ato pelo qual o professor cede ao aluno uma parte da responsabilidade pela aprendizagem.

- Etapa de ação: é aquela na qual o aluno, que se encontra ativamente empenhado na procura da solução de problema, realiza determinadas ações mais imediatas. Caracteriza-se pelo predomínio do aspecto experimental e operacional.

- Etapa de formulação: o aluno já utiliza na solução do problema estudado, alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos, além de mostrar um evidente trabalho com informações teóricas de uma forma bem mais elaborada.

- Etapa de validação: os alunos tentam convencer os interlocutores da veracidade das afirmações que fizeram, utilizando uma linguagem matemática apropriada (demonstrações).

- Etapa de institucionalização: o professor retoma parte da responsabilidade cedida aos alunos e institucionaliza o saber construído, estabelecendo um caráter mais objetivo e universal para o conhecimento.

Assim, ao elaborarmos a sequência didática proposta neste trabalho, selecionamos e criamos atividades que oferecessem aos estudantes a oportunidade de vivenciar as cinco etapas sugeridas por Brousseau (2008) na resolução de um problema.

Entretanto, é necessário observar que essas etapas não têm um início e um fim especificamente delimitado, mas se entrelaçam fortemente durante o seu desenvolvimento. O reconhecimento das etapas, por parte do professor, é fundamental para o êxito, tanto na elaboração, quanto na aplicação de uma situação didática, pois desse reconhecimento depende o grau de mediação do docente.

Metodologia de Pesquisa

Para que pudéssemos coletar informações sobre as potencialidades da atividade que aplicamos em contribuir para o ensino e aprendizagem sobre os Quadriláteros, realizamos uma pesquisa de natureza qualitativa, na qual foram analisados os diálogos dos alunos, as resoluções escritas e seus comportamentos frente à atividade. Escolhemos atuar diretamente no ambiente de investigação – uma sala de aula regular do 7º ano do ensino fundamental, com 33 alunos de uma escola pública do interior do estado de São Paulo, durante o segundo semestre letivo do ano de 2016 –, envolvendo-nos com a situação por meio de uma pesquisa naturalista ou de campo, que, de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 106) "[...] é aquela modalidade de investigação na qual a coleta de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece [...]". A aplicação da atividade foi conduzida pelo próprio pesquisador, que assumiu as aulas de Matemática durante esse período.

As atividades desenvolvidas com os estudantes da pesquisa foram realizadas em aulas duplas, ora individualmente, ora com grupos de três estudantes. Os grupos foram formados de forma aleatória e se mantiveram os mesmos do início ao fim da pesquisa.

O registro das informações fez-se por meio de fotos, gravações de áudio entre os diálogos ocorridos nas aulas, anotações (diário de campo) e documentos elaborados pelos alunos (resoluções escritas que os alunos fizeram para as atividades que compõem a sequência didática). A observação cuidadosa das aulas foi fundamental para que pudéssemos ter maior segurança na coleta dos dados, no intuito de não deixarmos passar despercebidas informações relevantes para a pesquisa.

A análise e a interpretação dos dados iniciaram-se juntamente com a coleta e foram tomando forma à medida que eram redigidas as anotações. Para interpretarmos os dados das atividades desenvolvidas, foram analisadas as anotações das observações do diário de campo, as fotos e áudios dos alunos durante as aulas e, principalmente, o material produzido por eles ao realizarem os registros das resoluções das atividades propostas.

Através dos resultados obtidos por meio dos registros e da análise documental, confrontamos as informações obtidas com a posição dos autores que deram sustentação teórica para o desenvolvimento da pesquisa.

As Atividades

As atividades que apresentaremos a seguir nos remetem às ideias de Freitas (2008). Segundo ele, cabe ao professor criar situações para que o aluno se aproprie dos conhecimentos, valorizando o que ele já sabe e envolvendo-o na construção do saber matemático. Utilizando esse pensamento como referência, decidimos criar uma história de aventura que cativasse o aluno com uma leitura de seu interesse, que fosse agradável e que estivesse de acordo com sua faixa etária, despertando, assim, a criatividade dos estudantes e abrindo portas para o incrível universo lúdico. A história criada serviu como alicerce para o desenvolvimento de todas as demais atividades da sequência didática, incluindo as descritas neste trabalho.

A História: O reino dos Quadriláteros

Há muito tempo, quando os humanos nem pensavam em existir, o mundo era dominado por estranhas criaturas: os polígonos. Tinham poderes mágicos, falavam, movimentavam-se e pensavam.

A luta pelo domínio do planeta era constante entre essas figuras geométricas e, para evitar grandes guerras, eles se dividiam em reinos. Havia o reino dos triângulos, o dos quadriláteros, o dos pentágonos, o dos hexágonos... Mas, frequentemente, aconteciam golpes, através dos quais uns tentavam invadir o reino dos outros em busca do domínio supremo.

Na tentativa de evitar esses golpes e manter a tranquilidade, os quadriláteros construíram uma grande muralha em torno de seu reino, com apenas uma passagem de acesso, onde um quadrilátero, com fortes poderes, exercia função de guarda.

Qualquer um que ousasse chegar perto da passagem, já de longe escutava os gritos do guarda que assim dizia:

-É um quadrilátero? Tem certeza de que tem quatro lados? Se não tiver, afaste-se, pois algo ruim pode lhe acontecer.

Assim era resolvido o problema das invasões no reino dos quadriláteros. Contudo, dentro do próprio reino, havia subdivisões. E, como o centro das terras era um lugar fértil e muito bonito, todos queriam lá habitar, porém era impossível, já que o espaço era notoriamente pequeno.

Assim, mais uma vez fortes e poderosos se beneficiavam, ficando com as melhores terras e, com o medo de perderem esse prestígio, novas muralhas eram levantadas e novos guardas foram designados para manter a hierarquia no reino.

A força e o poder dos polígonos de quatro lados eram medidos de acordo com algumas de suas características: lados paralelos lhes davam um poder, ângulos retos outros, lados congruentes outros. Existia, portanto, desde quadriláteros sem poderes até outros que acumulavam vários.

A política no reino dos quadriláteros funcionava assim: na muralha mais externa ficava um guarda que só deixava entrar polígonos com quatro lados. Perguntava e verificava se o polígono realmente tinha quatro lados. Havendo a confirmação, dava-lhe um colar com a identificação de quadrilátero.

Na segunda muralha, interna à primeira, a porta de entrada para terras um pouco mais férteis era vigiada por guardas que faziam uma restrição a mais para quem quisesse entrar. Perguntavam aos quadriláteros se tinham pelo menos um par de lados paralelos e, se tivessem, recebiam um outro colar com identificação de trapézios. Desse modo, nessas terras, entravam os trapézios mais simples (com apenas um par de lados paralelos) e também os paralelogramos, os retângulos, os losangos e os quadrados, que também podiam ser considerados trapézios, já que possuíam a característica exigida pelo guarda.

Para adentrar a área cercada pela terceira muralha, o guarda exigia dois pares de lados paralelos. Os que conseguiam entrar recebiam um colar com a identificação de paralelogramos. Entravam os paralelogramos mais simples (com dois pares de lados paralelos) e também os retângulos, losangos e quadrados, todos acumulando três colares, visto que podiam ser considerados quadriláteros, trapézios e paralelogramos.

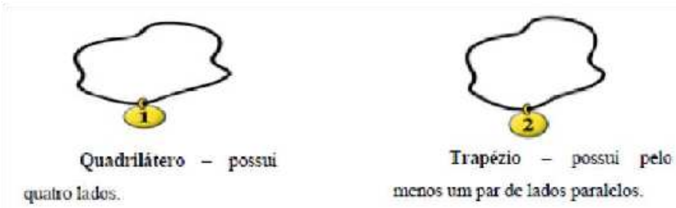
A quarta e a quinta muralha se entrelaçavam na região mais rica do reino. A entrega do colar pelo guarda da quarta muralha só acontecia com a condição de que os paralelogramos que lá quisessem entrar tivessem todos os ângulos retos. Já o da quinta muralha, se o paralelogramo tivesse todos os lados iguais.

Na região central (entrelace das quarta e quinta muralhas) também havia guardas e estes não exigiam uma nova característica para liberar a entrada, mas que os pretendentes tivessem todas as características e colares entregues pelos cinco guardas anteriores.

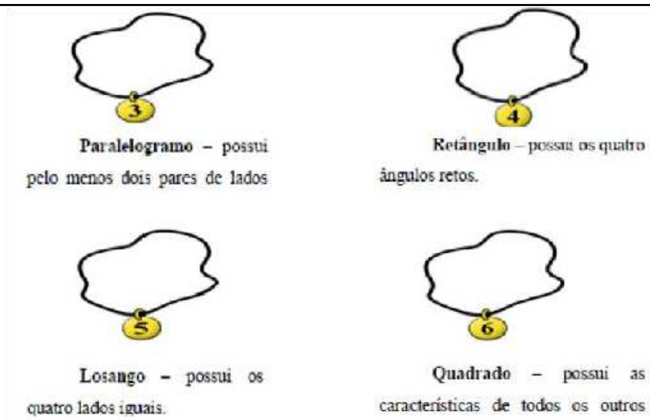
Uns quadriláteros podiam andar por todo o reino, visto que colecionavam todos os colares e tinham todos os poderes; outros somente em algumas regiões (pois possuíam apenas alguns colares) e outros em uma única região.

Durante milhares de anos, os quadriláteros organizaram-se assim até que, um dia, um pentágono irregular conseguiu esconder seu menor lado, passou-se por quadrilátero, entrando no reino e destruindo todos os quadriláteros e deixando apenas essa lenda como lembrança do reino.

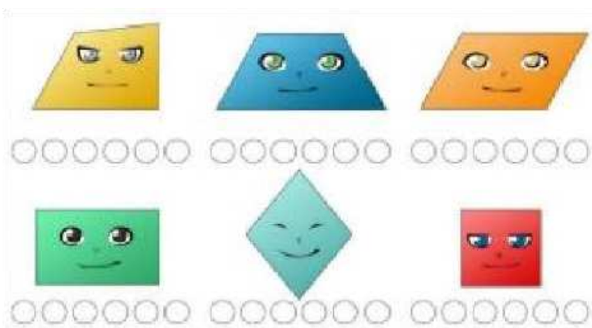
Atividade 1



Conhecendo essa história, você pode ajudar os quadriláteros abaixo que perderam seus colares. Vamos considerá-los numerados conforme a seguir:



Agora distribua-os de acordo com as características de cada quadrilátero, inserindo o número correspondente a cada colar nas circunferências que estão abaixo de cada quadrilátero a seguir:



Quadro 01. Atividade 1. *Fonte*: Gabriel (2017).

Gostaríamos de ressaltar que a abordagem utilizada na sequência didática para classificar os quadriláteros, de acordo com suas propriedades, foi realizada através de uma perspectiva hierárquica, onde se considera a classificação de um conjunto de conceitos de modo que os mais particulares são, muitas vezes, subconjuntos dos mais gerais (BONGIOVANNI, 2004). Assim, o objetivo da atividade, realizada individualmente após a leitura da história, era apresentar essa classificação. Durante o Ensino Fundamental I, os alunos se deparam, em geral, apenas com a classificação de Euclides, partitiva e excludente, em que cada quadrilátero é distinto um do outro, não podendo, por exemplo, um quadrado ser considerado como paralelogramo ou retângulo ou losango. A atividade foi realizada pelos alunos sem dificuldade: dos trinta e um alunos presentes, apenas dois cometeram algum tipo de erro durante a distribuição dos colares que classificavam os quadriláteros.

Depois de lerem a história e realizarem a atividade anterior, os alunos já possuíam a noção de que um mesmo quadrilátero poderia ser classificado de maneiras diferentes. Era necessário, agora, compreenderem como era feita essa classificação. Os PCN (BRASIL, 1998) sugerem a realização de atividades de observação, manipulação, representação e construção de figuras de modo que os alunos possam fazer conjecturas e identificar propriedades. Então, para que essa compreensão fosse realizada com sucesso, seguimos as indicações dos PCN e, novamente, fundamentados na teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau, formulamos as próximas atividades de nossa sequência didática. Segundo Brousseau (1996), o aluno deve ter um papel ativo diante de uma situação didática programada pelo professor, vivenciando momentos de investigação em sala de aula.

Atividade 2 A pedido do senhor de todos os polígonos, os quadriláteros tiveram de enviar a planta para mostrar como estava dividido seu reino. Dois quadriláteros ficaram responsáveis por essa tarefa, mas até agora não entregaram: um disse não saber fazer e o outro está quase terminando. Ajude o quadrilátero que disse não saber desenhar seu reino.

Quadro 02. Atividade 2. *Fonte*: Gabriel (2017).

Durante a realização da atividade, na qual precisavam desenhar o reino dos quadriláteros, percebemos que a maioria dos estudantes utilizava uma folha de rascunho para levantar hipóteses de como seria esse reino - desenhavam, apagavam e desenhavam novamente. Nessa fase experimental e operacional, achamos interessante o fato de que, para desenharem o reino, deixavam o texto com a história e a atividade de distribuição dos colares sobre a carteira. Desenhavam progressivamente conforme realizavam a releitura do texto e consultavam a atividade anterior.

Depois de muitas tentativas, observamos que os alunos chegaram a um desenho final que, cuidadosamente, foi passado a limpo na folha que continha o enunciado da atividade. Dentre os desenhos que entregaram, percebemos que nove deles não condiziam com a história contada.

Assim, passadas as etapas de ação e formulação (atividades 1 e 2), os alunos precisavam validar, debatendo com seus colegas, a veracidade de seus pensamentos. Para isso, demos início à atividade 3.

Atividade 3 Para verificar se seu desenho está correto, reúna-se com seu grupo, recorte alguns quadriláteros e distribua-os pelas regiões do reino. Se achar necessário, refaça o desenho.

Quadro 03. Atividade 3. *Fonte*: Gabriel (2017).

Pedimos para que se sentassem em grupo. Não falamos o que estava certo ou errado em cada ilustração, apenas pedimos para que recortassem alguns quadriláteros e tentassem encaixálos em seus desenhos. O grupo todo tentava distribuir os quadriláteros no desenho individual de cada membro.

Durante a realização da atividade pelos alunos em nenhum momento falávamos qual era a ilustração correta; apenas estimulávamos os alunos com perguntas do tipo “Por que você acha que o seu desenho está correto? Por que você acha que o desenho de seu colega está errado? Você consegue mostrar onde está o erro no desenho de seu colega?” Assim, eles mesmos, através de esforços próprios, chegaram a um consenso de qual era a forma correta de desenhar o reino dos quadriláteros. Segundo Brousseau (2008), nessa situação os alunos organizam enunciados em demonstrações, constroem teorias e tanto aprendem a convencer os demais alunos como a se deixarem convencer. O aluno não só comunica uma informação, como também precisa afirmar que o que diz é verdadeiro dentro de um sistema determinado.

Para termos ciência da decisão tomada pelo grupo a respeito de qual desenho estava correto, solicitamos aos alunos, embora não estivesse previsto na atividade, que elegessem um desenho do grupo para ser enviado ao senhor de todos os polígonos como a planta do reino dos quadriláteros e entregasse ao seu professor.

Conforme a atividade era finalizada, os alunos novamente nos chamavam em suas carteiras, mas agora para explicarem o porquê da escolha de um desenho em detrimento a outro. Percebemos que alguns alunos conseguiram convencer seus colegas e que os alunos convencidos aceitaram a argumentação, mudando de opinião e aceitando entregar o trabalho do colega para representar o grupo. Finalizamos, assim, a fase de validação dessa situação didática.

Considerações Finais

Analisando os apontamentos e descobertas revelados pelos alunos em seus diálogos e registros, entendemos que a abordagem do conteúdo matemático – Quadriláteros – através de atividades didáticas, apoiada na Teoria das Situações Didáticas, contribuiu para o ensino de Geometria. As atividades proporcionaram aos alunos refletir, simular processos e realizar tentativas ao se depararem com um problema, formulando, testando e reformulando hipóteses para resolvê-lo. Também oportunizaram a realização de elaboração de justificativas para validarem seus raciocínios. Durante o processo de validação vivenciado pelos estudantes, desenvolveram habilidades de argumentação e comunicação matemática, aprimorando, assim, seu vocabulário matemático e compartilhando diferentes estratégias de resolução de um problema. Percebemos, ainda, que a troca de experiências proporcionada pelo trabalho em grupos auxiliou os adolescentes a desenvolverem atitudes de colaboração mútua, socialização e interação, aumentando a autoconfiança, a autonomia e fortalecendo o pensamento crítico de cada membro do grupo.

Referências Bibliográficas

BONGIOVANNI, V. (2004). As diferentes definições dos quadriláteros notáveis. *Revista do Professor de Matemática*, 55, 30-32.

BRASIL. (2017). *Ministério da Educação*. Base Nacional Comum Curricular: documento preliminar, terceira versão, Brasília, DF: MEC.

______. (1998). *Ministério da Educação e do Desporto*. Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. 3 ed. Brasília, DF: MEC.

BROUSSEAU, G. (2008). Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo, SP: Ática.

______.(1996). Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. (pp. 35-113). Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa, Portugal: Instituto Piaget.

FIORENTINI, D.; & LORENZATO, S. (2009). Investigações em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados.

FREITAS, J. L. M. (2008). Teoria das Situações Didáticas. In: Sílvia Dias Alcântara Machado (org.). Educação Matemática: Uma (nova) introdução. *Educ*, 77-111.

GABRIEL, L. S. (2017). *Contributos de uma sequência didática para o ensino de quadriláteros: compreensões a partir da teoria das situações didáticas*. 145f. (Dissertação de Mestrado, Universidade Cruzeiro do Sul) Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática. Programa de PósGraduação em Ensino de Ciências e Matemática.

Una aproximación al álgebra escolar desde la resolución de problemas aritméticos a través del concepto de ecuación

Sebastián **Castañeda** Martínez
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
sebastian.castaneda.martinez@correounivalle.edu.co
Carolina **Castañeda** Martínez
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
castaneda.carolina@correounivalle.edu.co
Ligia Amparo **Torres** Rengifo [1]
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
ligia.torres@correounivalle.edu.co

Resumen

Esta investigación tiene como propósito favorecer el acercamiento al álgebra en estudiantes de grado 8° de la Educación Básica colombiana a través de la Resolución de Problemas aritméticos haciendo uso del concepto de ecuación. Para lo anterior, se realiza el diseño y puesta en acto de una propuesta de aula que integra aspectos didácticos, curriculares y matemáticos. La propuesta consta de dos situaciones, cada una con cuatro problemas y una serie de tareas, que permiten guiar a los estudiantes en el proceso de resolución para caracterizar sus tipos de razonamiento y desempeños. La estrategia metodológica es de tipo cualitativa, ya que permite la recolección de información basada en la observación de los comportamientos, características y respuestas de los estudiantes frente a las situaciones propuestas, para la posterior interpretación de los resultados.

Palabras clave: Resolución de Problemas, ecuación, pensamiento aritmético, pensamiento algebraico, didáctica.

[1] Directora del Trabajo de Grado

Planteamiento del problema

Las investigaciones realizadas en los últimos años en el campo de la Educación Matemática (Freudenthal, 1983; Gallardo y Rojano, 1988; Brousseau, 1989; Kieran, 1992; Rojano, 1994; Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Puig, 1998; Socas, 2007; Socas 2011; Castro 2012) dan cuenta de las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela. Las dificultades presentes en los estudiantes parecen manifestarse en la falta de comprensión y funcionalidad de ese conocimiento, lo cual se evidencia por medio de errores conceptuales y procedimentales, que no permiten que los estudiantes analicen fenómenos matemáticos, interpreten resultados, solucionen problemas relacionados con la vida diaria, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas, entre otros.

Particularmente, en la enseñanza y aprendizaje del álgebra, estas dificultades son categorizadas por Castro (1994), en dificultades intrínsecas al objeto (epistemológico), dificultades inherentes al propio sujeto (ontológico) y dificultades en las técnicas de enseñanza (didáctico). Las dificultades intrínsecas al objeto se deben en gran medida a la naturaleza misma del álgebra, es decir, a su lenguaje formal, que se dota de símbolos y reglas (sintaxis), lo cual genera en los estudiantes errores de tipo procedimental y conceptual, como por ejemplo, errores al resolver problemas algebraicos (convertir los enunciados del lenguaje natural al lenguaje formal), errores con el uso de paréntesis, concebir los valores de las incógnitas solamente como números u objetos, errores al considerar el signo igual como se hacía en aritmética, es decir, tener la noción que a la izquierda del signo igual se encuentra una operación mientras que a su derecha se encuentra el resultado (como $2 + 7 = 9$ pero $2x + 7y \neq 9$ó $9xy$), en lugar de verlo como un signo de equivalencia entre dos polinomios. Las dificultades inherentes al sujeto se enmarcan en la complejidad que supone la abstracción y la generalización de los conceptos algebraicos y las dificultades presentes en las técnicas de enseñanza se deben a la forma tradicional de enseñar de los docentes.

Por lo anterior, se presenta la Resolución de Problemas como una alternativa para la aproximación al álgebra, expuesta por Bednarz, Kieran y Lee (1996), que permite diferenciar y caracterizar los problemas de tipo algebraico (transformar cantidades y encontrar relaciones entre cantidades) y de tipo aritmético (buscar cantidades conocidas y desconocidas), es decir, que existe un puente significativo, puesto que los problemas aritméticos abordados desde lo algebraico, podrían influenciar un tránsito de la aritmética al álgebra más flexible, ya que analizar un problema desde los dos dominios, permite identificar nuevas características en la estructura algebraica. Por lo tanto, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo favorecer el acercamiento al álgebra escolar en estudiantes de grado 8° de la Educación Básica de una Institución particular de la ciudad de Santiago de Cali, a través de la resolución de problemas aritméticos haciendo uso del concepto de ecuación?

Marco de referencia conceptual

La fundamentación de los referentes conceptuales se hace desde las perspectivas didáctica, curricular y matemática, que permiten sustentar la problemática planteada, el diseño de la propuesta de aula y análisis de los resultados obtenidos de su implementación, en estudiantes de grado 8° de la Educación Básica Secundaria. En la primera perspectiva se sitúan las dificultades que se presentan en el tránsito de la aritmética al álgebra, al tener como eje central la resolución de problemas desde un enfoque metodológico para el desarrollo de la propuesta de aula. La segunda se aborda desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). En la tercera perspectiva se referencian algunos conceptos matemáticos que emergen en el diseño de la propuesta de aula, donde el foco principal es la ecuación de primer grado con una incógnita.

En la primera perspectiva se organizan dos aspectos fundamentales, el primero son las dificultades presentes en el tránsito de la aritmética al álgebra mencionadas anteriormente, en el segundo se precisan elementos de la resolución de problemas abordados en Bednarz y Janvier (1996), quee procura esclarecer las condiciones de la evolución del razonamiento algebraico en un contexto de resolución de problemas, al ser esta una de las perspectivas más significativas desde la historia y enseñanza del álgebra. Además, permite analizar los problemas planteados a los estudiantes, de tal forma que se gradúe su complejidad y así observar un progreso, teniendo en cuenta los procedimientos disponibles que poseen los estudiantes para manipular y llegar a la solución de dichos problemas. Por otra parte, proporciona parte de la caracterización del tipo de problemas que se pretenden abordar en la propuesta de aula, es decir, permite observar la estructura de los problemas propuestos, con el objetivo de construir problemas con contextos reales. Además, la metodología cualitativa de entrevista semi-estructurada utilizada permite analizar el tipo de pensamiento que desarrollan los estudiantes al resolver problemas.

En la segunda perspectiva los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) aportan elementos claves para el desarrollo y consolidación de la propuesta de aula, puesto que hacen énfasis en desarrollar pensamiento matemático en los estudiantes e invitan a cuestionarse el para qué enseñar y no qué enseñar. Particularmente, en los Procesos Generales, Conocimientos Básicos y Contextos se centra la atención en la resolución y planteamientos de problemas, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, y los contextos de la vida diaria respectivamente.

En adición, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) proponen una estructura desde una coherencia vertical y horizontal de las competencias que se pretenden desarrollar en los estudiantes, categorizadas por grados de escolaridad, es decir, 1° a 3°, de 4° a 5°, de 6° a 7°, de 8° a 9°, de 10° a 11° y por tipo de pensamiento matemático. Para fines de este trabajo se tendrán en cuenta la coherencia vertical y horizontal del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos de grado octavo a noveno, relacionados con el proceso de resolución de problemas en un contexto real.

Por último, en la tercera perspectiva se presentan conceptos netamente matemáticos acerca de los polinomios y las ecuaciones, que son de vital importancia en la construcción de la propuesta de aula, y el enfoque esperado desde la resolución de problemas en el tránsito de la aritmética al álgebra, pretende hacer que los estudiantes aborden estos conceptos.

En conclusión, para el diseño de la propuesta de aula se resaltan y sintetizan aspectos relevantes desde las tres perspectivas planteadas anteriormente puesto que permite articular y relacionar cada una de estas perspectivas para la consolidación de la propuesta basada en la resolución de problemas. La figura 1 evidencia lo anterior así:

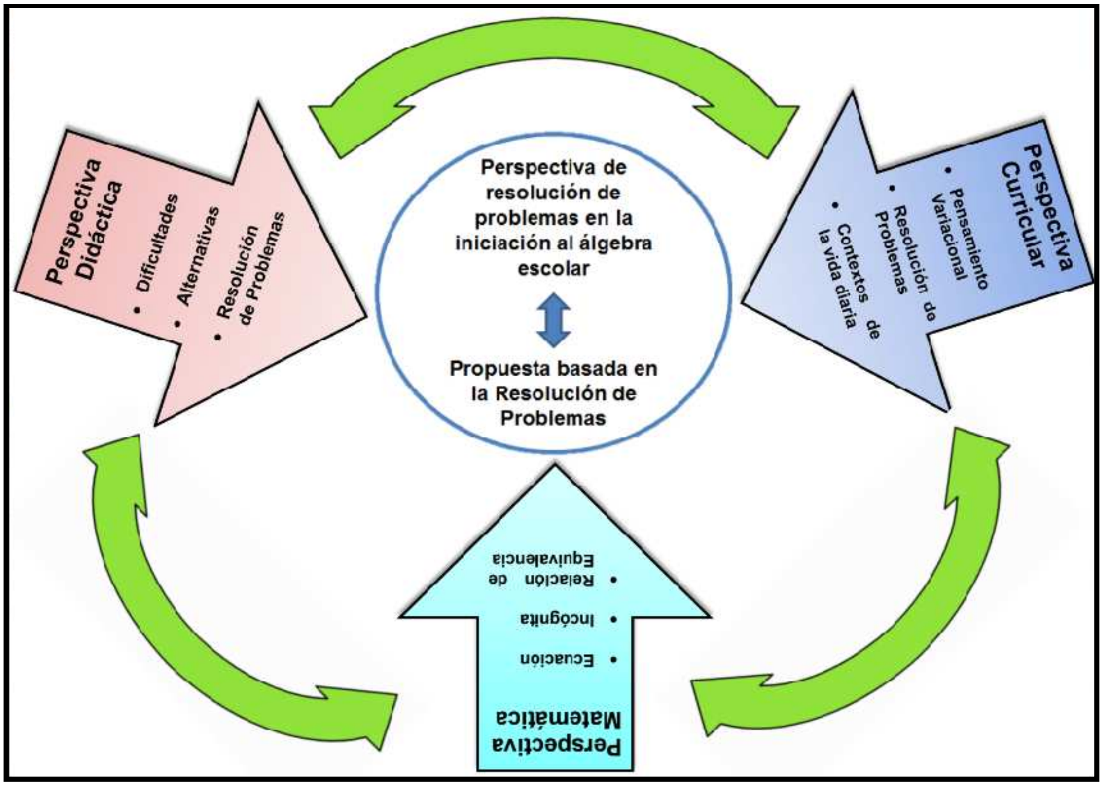


Figura 1. Diagrama de la relación entre las perspectivas didáctica, matemática y curricular.

Metodología

Las estrategias metodológicas que se utilizan son de tipo cualitativas, ya que permiten la recolección de información basada en la observación de los comportamientos, características y respuestas de los estudiantes frente a las situaciones propuestas, para la posterior interpretación de los resultados. Particularmente, se centra la atención en el estudio de casos y la entrevista clínica semi-estructurada. La primera, es una estrategia de investigación que permite describir y caracterizar situaciones, conocimientos, acciones, sin hacer juicios, además tiene la intencionalidad de obtener información, resultados teóricos y prácticos, con el fin de analizar las experiencias de los estudiantes. La segunda estrategia de investigación se complementa con la primera, debido a que permite reunir opiniones e ideas espontáneas y reales de los estudiantes con el fin de analizar los procesos de razonamiento que poseen, por medio de preguntas estructuradas con la flexibilidad de cambiarlas con base en las respuestas de los entrevistados (Camargo, 2018). El trabajo se desarrolla en cuatro fases que son, documentar la problemática, articulación del marco de referencia conceptual y diseño experimental, implementación y análisis de los resultados y conclusiones y recomendaciones didácticas.

Sobre la experimentación

La propuesta de aula se conforma por dos situaciones, cada una con cuatro problemas, dos problemas con composición homogénea de dos relaciones aditivas, un problema con composición homogénea de dos relaciones multiplicativas y el último problema con composición no homogénea de dos relaciones, con diferentes vínculos entre las relaciones en cada situación. La situación 1 tiene como dominio numérico el conjunto de los números naturales y la situación 2 tiene como dominio numérico el conjunto de los números racionales positivos. En adición, cada problema contiene una serie de tareas que tienen como propósito direccionar al estudiante en el proceso de resolución para caracterizar sus tipos de razonamiento y desempeños.

Para la construcción de la propuesta de aula se establece un **análisis preliminar** que determina los criterios de análisis para el tránsito de problemas aritméticos a algebraicos que son: *el dominio numérico, la naturaleza de los datos (conocidos o desconocidos), el contexto, la estructura de las relaciones involucradas, la complejidad relativa de los problemas con respecto a las relaciones involucradas y las estrategias espontáneas de los estudiantes*. Además, se caracterizan los problemas en **problemas de repartición desigual** y se clasifican por factores de complejidad en cuanto a la naturaleza de las relaciones: *Composición homogénea de dos relaciones aditivas, composición homogénea de dos relaciones multiplicativas y composición no homogénea de dos relaciones.*

Por otra parte, se seleccionaron 30 estudiantes de grado 8° de la Institución Educativa Técnico Industrial 20 de Julio, de la ciudad de Santiago de Cali, Colombia, para la implementación de la propuesta de aula. Las edades de los estudiantes oscilan entre los 13 y 15 años, pertenecientes a un nivel socioeconómico medio. Los estudiantes tienen conocimientos básicos en aritmética que les permite resolver los problemas planteados en la propuesta de aula. Cabe resaltar que los estudiantes no han tenido un acercamiento al álgebra simbólica.

Un ejemplo del contenido de las situaciones es:

SITUACIÓN 1: FIESTA DE LOS NIÑOS Y PROBLEMAS ARITMÉTICOS.

En el mes de octubre, en muchos países se realizan actividades dedicadas a los niños y niñas. Entre esas actividades están: compartir dulces y colocarse el disfraz de su personaje favorito. La Institución Educativa Técnico Industrial 20 de Julio no es la excepción. Por ello, los profesores de primaria realizan actividades acordes a esta fecha. Particularmente, la profesora Mayerleny acompaña a sus estudiantes de grado tercero, cuarto y quinto de primaria disfrazados a pedir dulces por todos los salones.

Ayuda a la profesora a resolver las situaciones que se le presentaron.

Problema 1: Grupos de estudiantes y problema con composición homogénea de dos relaciones aditivas.

La profesora Mayerleny necesita saber cuántos estudiantes asistieron al colegio en los grados 3°, 4° y 5° antes de comenzar la actividad de pedir dulces por todos los salones**.** Si se sabe que en los tres grados asistieron 90 estudiantes, y el grado 3° tiene 16 estudiantes más que el grado 5°, y el grado 4° tiene 10 estudiantes más que el grado 3°. ¿Cuántos estudiantes asistieron en cada grado?

Tareas

Indica cómo se conforma la cantidad total de estudiantes.

1. a. De acuerdo con el problema, indica si los datos involucrados permiten calcular la cantidad de estudiantes de cada grado o si por el contrario hacen falta datos.
   b. Explica tu respuesta.
2. Sí Carolina, estudiante de grado 4° afirma que la cantidad de estudiantes de grado 5°es de 20

estudiantes.

a. Escribe la validez de está esta afirmación.
b. Explica tu respuesta.

3. Indica cuál de los grados tiene el mayor número de estudiantes.
4. Escribe de qué dato depende el número de estudiantes de 3°.
5. Escribe de qué dato depende el número de estudiantes de 4°.
6. Indica cuántos estudiantes asistieron en los grados 3°, 4° y 5°.

Problema 2: Recogiendo dulces y problema con composición homogénea de dos relaciones aditivas.

Los grados 3°, 4° y 5° recogieron 300 dulces. Los estudiantes de grado 3° recogieron 80 dulces más que los estudiantes de grado 4°, y los estudiantes de grado 5° recogieron 50 dulces más que los estudiantes de grado tercero. ¿Cuántos dulces recogió cada grado?

Tareas

1. Daniel estudiante de grado 4°, afirma que los grados 3°, 4° y 5° tienen la misma cantidad de dulces, es decir 100 dulces para cada grado.
   a. Escribe si esta afirmación es verdadera o falsa.
   b. Explica tu respuesta.
2. Según el problema los estudiantes de grado 3° recogieron 80 dulces más que los estudiantes de grado 4°. De acuerdo a la afirmación anterior los estudiantes de grado 4° recogieron 100 dulces. Explica esta situación.
3. Escribe como se calcula el total de dulces recogidos de acuerdo a lo que recogió cada grupo.
4. Cómo obtienes la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 3°
5. Cómo obtienes la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 5°
6. Si x representa la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 4° completa la siguiente tabla.

Lenguaje natural	Lenguaje algebraico
Cantidad de dulces de grado 4º	x
Cantidad de dulces de grado 3°	
Cantidad de dulces de grado 5º	
Cantidad de dulces entre los tres grados	
Cantidad total de dulces en los tres grados es 300	

7. ¿Cuántos dulces recogió cada grado?

Discusión de resultados

En el análisis preliminar se puede evidenciar que los estudiantes desarrollan estrategias, modelos y convicciones para resolver problemas, los cuales se ven reflejados cuando ellos se enfrentan a problemas algebraicos. Las concepciones desarrolladas en aritmética son el punto en el cual surgen nuevas soluciones, que pueden ser consideradas como obstáculos o como principios en la construcción del conocimiento, debido a que por una parte los estudiantes tienen arraigado una forma o estrategia para resolver problemas, lo cual puede presentar una resistencia para una evolución del pensamiento aritmético al algebraico o por el contrario pueden ayudar al estudiante a identificar estrategias más efectivas, para reconstruir los conocimientos previos de tal forma que se propicie un acercamiento al pensamiento algebraico.

Se espera que en el momento de la presentación de la comunicación se tengan resultados más contundentes y precisos con relación a los resultados puesto que la propuesta está en desarrollo.

Referencias y bibliografía

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Aproximaciones al álgebra: perspectivas para la investigación y la enseñanza. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N & Janvier, B. (1996). *Surgimiento y desarrollo del álgebra como una herramienta en la solución de problemas. Continuidad y discontinuidad con aritmética.* En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), Aproximaciones al álgebra. Perspectivas para la investigación y enseñanza (pp. 115-136).

Brousseau, G. (1989), 'Les obstacles ´epist´emologiques et la didactique des math´ematiques'. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), Construction des savoirs. Obstacles et conflits, Les Editions Agence d'ARC, Quebec, 41-63.

Camargo, L. (2018). Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Manuscrito no publicado.

Castro, E. (1994). "Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años)" Tesis doctoral. Universidad de Granada. Granada.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas*. Dordrecht: Reidel. 1 Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. Researchs in Didactique dec Mathématiques, 9, 155- 18.

Kieran, C. (1992). El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar. En Grows, D.A. (Ed.), Manual de Investigación en Matemática Enseñanza y Aprendizaje. Macmillan Publishing Company. New York, pp. 390-419.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). Lineamientos curriculares para matemáticas. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá, Colombia.

Puig, L. (1998). Cómo poner un problema en ecuaciones. Valencia. Recuperado de http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf

Rojano T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. Enseñanza de las Ciencias 12 (1)

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), Investigación en Educación Matemática XI (pp. 19-52). La Laguna: SEIEM.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. Números, revista de didáctica de las matemáticas, 77, 5-34.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Operaciones básicas con algoritmo gráfico[1] en la escuela primaria

Angel **Totolhua** Tlaque
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
atotolhua@cinvestav.mx
Marta **Valdemoros** Alvarez
Departamento de matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
mvaldemo@cinvestav.mx

Resumen

Los obstáculos conceptuales y operatorios que presentan los alumnos de sexto año de primaria para realizar tareas en las que intervenga la adición, sustracción, así como la multiplicación y la división de números fraccionarios, son centrales en el presente trabajo de investigación. Las tareas presentadas son ejemplificadas por medio del algoritmo canónico y el algoritmo gráfico, para dar una idea de cómo resolver cada una de ellas, sin embargo, los alumnos presentan una serie de dificultades en ambos algoritmos, no obstante, los errores que cometen los alumnos son más claramente verificados al realizar el algoritmo gráfico, el cual nos da la oportunidad de tener más indicios de cómo enfrentar dichas dificultades tanto conceptuales como operatorias y alcanzar el aprendizaje significativo de la mayoría de los alumnos de sexto grado de primaria, lo cual es fundamental para el proceso de investigación al que sirve de preámbulo este artículo.

Palabras clave: Números fraccionarios, algoritmo canónico, algoritmo gráfico, obstáculos conceptuales y operatorios, aprendizaje.

Introducción

El análisis de las estrategias y las dificultades que los alumnos de sexto grado de primaria enfrentan para resolver problemas en los que es necesario aplicar la multiplicación y la división de números fraccionarios son fundamentales para explicar cómo en Educación Básica, el conocimiento de los números fraccionarios o racionales suele considerarse como una difícil problemática; sin embargo, como se explicará más adelante la multiplicación de fracciones y en especial la división de fracciones es una de las operaciones con números racionales más mecánica y menos comprendida por los alumnos tanto de la escuela primaria como de la escuela secundaria (Tirosh, 2000, Cengiz, 2011).

[1]Algoritmo gráfico, definido por Kieren (1983) como aquel algoritmo que se realiza por medio de figuras geométricas o expresiones gráficas.

En consecuencia, los resultados obtenidos por los alumnos son muy bajos como se demuestra en la prueba Planea aplicada a alumnos de sexto grado de primaria y la prueba Sisat aplicada a alumnos de la Escuela secundaria[2].

El tratamiento que se da a estos números en las escuelas de México es muy importante, ya que abarca una gran cantidad de tareas en el libro de texto para el alumno de sexto grado denominado *Desafíos Matemáticos* (SEP, 2017), en total se registraron 21 lecciones de un total de 85, es decir, el tema de fracciones abarcó casi un 25 % del total de lecciones.

La problemática planteada no se presenta como algo trivial que se resolverá sólo con el conocimiento de los números naturales, y sin tener conciencia de que el tratamiento de los números racionales debiera considerarse independientemente de dichos números naturales.

Marco teórico

El aprendizaje de las fracciones como lo señalan diversos autores son de una complejidad, como lo señala Kieren (1983) "la construcción del número racional es más amplia que la de los números naturales".

La enseñanza de las fracciones en México se inicia en la escuela primaria, se presta especial atención en los primeros años a la suma y resta de números fraccionarios, y en losdos últimos años la multiplicación y división, entonces surge naturalmente una pregunta: ¿por qué los alumnos que ingresan a la escuela secundaria no tienen un conocimiento sólido en cuanto a las cuatro operaciones básicas con el uso de números fraccionarios?

La suma y la resta de números fraccionarios se presentan en la escuela primaria como un referente similar al de los números naturales, ya que las 2 cantidades similares involucradas e identificados como sumandos producirán una tercera cantidad similar (Swartz, 1989), del mismo modo las cantidades similares involucradas en la resta producirán una tercera cantidad similar (Swartz et. al. 1989)

La multiplicación y especialmente la división de fracciones se presentan en la escuela primaria y en la escuela secundaria como las operaciones de mayor dificultad en cuanto a su aprendizaje se refiere, y los maestros tienen que recurrir a múltiples estrategias de enseñanza para que los estudiantes adquieran este aprendizaje; aunque cabe decir que algunos estudiantes se conforman con aprender algunos tipos de algoritmos que los lleve al resultado, pero que lamentablemente no entiendan los significados conceptuales de dicha operación.

Algunas propuestas de cómo resolver los algoritmos los encontramos incluso en redes sociales, las cuales poco aportan al aprendizaje de los estudiantes y si los confunden con respecto a lo que aprenden en la escuela.

Entre las dificultades más sobresalientes de la multiplicación y división de fracciones se observa que los números fraccionarios al parecer operan de manera contraria a los números naturales, es decir, al realizar la multiplicación de números naturales partimos de la idea de que las cantidades multiplicadas inicialmente darán como resultado un número mayor (Swartz, 1989, Vergnaud, 1983), mientras que si las cantidades multiplicadas son números fraccionarios entonces el resultado final será menor que las cantidades iniciales; en cambio al realizar la división de números naturales, el cociente de dichos números dará una cantidad menor,

[2] Plan Nacional para la Evaluación de los aprendizajes (Planea),y Sistema de alerta temprana (Sisat), son evaluaciones aplicadas a los alumnos de sexto de primaria y secundaria en México.

mientras que en la división de números racionales el cociente será mayor, por lo que los estudiantes dudan de cualquiera de estos resultados, ya que no se apegan a lo aprendido en cuanto a los números naturales[2].

Otra dificultad en el aprendizaje de los números racionales se refiere a la relación que existe entre la situación problemática y la operación apropiada para resolverla (Jensen, 2015, Fishbein, 1985) ya que pensamos que no sólo es importante llegar al resultado correcto, sino tener la certeza de que el alumno utilizó la o las operaciones adecuadas para llegar al resultado final, pues no es recomendable confiar solo en la intuición de los estudiantes ante este tipo de dificultades.

En cuanto a los campos conceptuales enunciados por Vergnaud como “un conjunto de situaciones, cuyo dominio requiere el dominio de varios conceptos de diferentes naturalezas”, podemos decir que el campo conceptual utilizado en este trabajo sólo se referirá a los conocimientos que tengan que ver con las expresiones gráficas (Kieren, 1985), y todas aquellas ideasque los alumnos tengan en cuanto a representar gráficamente las situaciones problemáticas que tiene que ver con los números fraccionarios.

En este trabajo se pretende rastrear los conocimientos más primitivos de los niños en cuanto a las operaciones básicas en las que se involucra el uso de los números fraccionarios.

Teoremas en acción

El teorema en acción[3] es fundamental en este trabajo de investigación ya que a través de él pretendemos analizar las dificultades que tiene los estudiantes para resolver una situación problemática, pero que en muchas ocasiones no las pueden expresar verbalmente, sólo realizan las operaciones que consideran necesarias para resolver el problema, pero no se detienen a analizar cuál o cuáles caminos siguieron para obtener la respuesta.

A través de los teoremas en acción se pretende valorar cada una de las estrategias intuitivas utilizadas por los estudiantes para transformar el conocimiento intuitivo en conocimiento explícito, así como conocer que tanto saben o no saben nuestros alumnos, para ayudarlos en la consolidación de su conocimiento.

La intención de este trabajo de investigación es dar a los alumnos las herramientas necesarias para que conozcan cómo funciona la suma y resta de fracciones a través del “algoritmo gráfico” (Kieren, et. al. 1985), para que de manera autónoma puedan intuir también por qué funciona la multiplicación y la división en los números fraccionarios.

Metodología

Muestra

Se aplicó un cuestionario a 33 alumnos de sexto grado de una escuela primaria ubicada en la periferia de la capital del Estado de Puebla, la institución fue seleccionada porque es una de las que mejor desempeño ha tenido en la prueba Enlace y Planea de los últimos años, por otra parte, la maestra titular del grupo muestra una gran disposición para el trabajo de los números fraccionarios.

[3] Teoremas en acción definidos por Vergnaud como las relaciones matemáticas que los estudiantes toman en cuenta cuando eligen una operación o una secuencia de operaciones para resolver un problema.

Tareas

Las tareas asignadas a los alumnos fueran las mismas, y se diseñaron en el marco de la presente investigación, el tiempo para realizarlas fue libre y cada alumno entregó su trabajo cuando había terminado, se pidió a todos los alumnos que contestarán sin presión alguna y anotaran todas sus operaciones,y aunque algunas de ellas las considerarán como incorrectas las dejaran plasmadas en el cuestionario, sólo con una pequeña nota que ellos considerarán pertinente.

Se presentó como primera y segunda tarea la suma y resta de fracciones, para conocer hasta qué punto tienen los alumnos un conocimiento sólido en cuanto a lo conceptual y lo operatorio, y saber si cuentan con los conocimientos necesarios para realizar la multiplicación y división de números fraccionarios.

En las cuatro primeras tareas propuestas se presentan el ejemplo de cómo resolverla, en la última tarea se pide que de manera libre se resuelva con los propios medios de los alumnos, enseguida se pide alos alumnos resuelvan otra tarea similar a la presentada. Se solicitó a cada uno de los alumnos utilizará la figura del rectángulo para resolver cada tarea y/o en su caso manejará cualquier otro procedimiento.

El análisis de cada ítem se realizó tomando como base lo propuesto por Vergnaud, como *teorema en acción* para analizar cada una de las estrategias utilizadas por los alumnos, y de este modo tratar de definir su conocimiento en cuanto a la suma, resta, multiplicación y división de números fraccionarios a través del algoritmo gráfico, propuesto en este trabajo de investigación.

El cuestionario consta de 5 reactivos, los cuales se presentan a continuación:

Reactivo 1. Presenta una suma de fracciones.

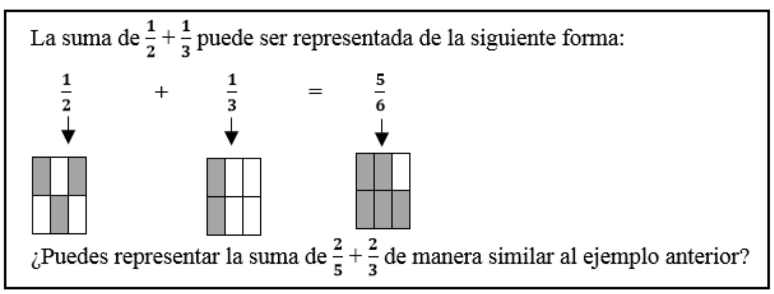


*Figura 1.*Reactivo 1.

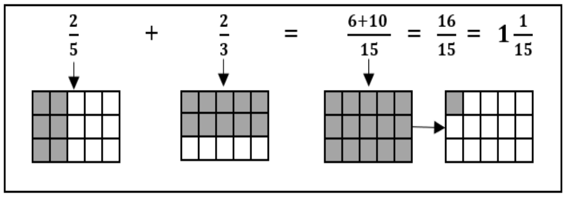
Esta tarea ha sido incluida en el cuestionario porque tiene el propósito de indagar que tanto saben los alumnos en cuanto a la suma de fracciones, utilizando los dos algoritmos presentados.

Respuestas correctas:

Estrategia 1, preservación del todo. Tres alumnos realizan la suma de fracciones de manera correcta, además realizan la suma de fracciones con Algoritmo Grafico como se muestra en la figura 2.

[4] Algoritmo canónico, definido como la operación matemática de mayor uso y realizada de manera universal.

Se observa que estos alumnos tienen un concepto sólido en lo que se refiere a la suma de fracciones tanto en el algoritmo canónico[4] como en el "algoritmo gráfico" (Kieren, et. al. 1985).



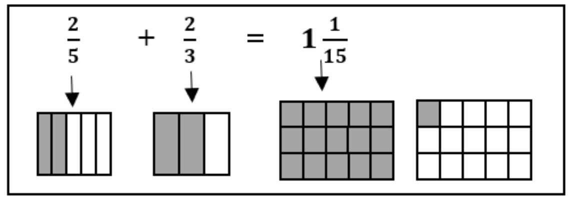


Figura 2. Preservación del todo. *Figura 3.* Conservación de figuras independientes.

Estrategia 2, conservación de figuras independientes. Seis alumnos realizan la operación de manera correcta. El resultado del algoritmo gráfico también es correcto, sin embargo, las dos figuras que representan los sumandos están representados de manera independiente como si se tratara de dos figuras ajenas, que no podrían ser sumadas, tanto por su tamaño diferente, como por su equidivisión. Figura 3.

$$\boxed{\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}}$$

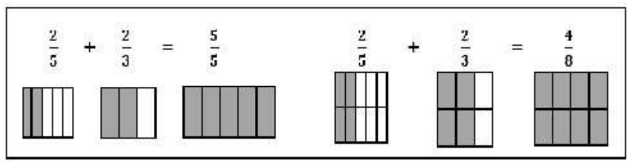


Figura 4. Algoritmo canónico. *Figura 5*. Constancia de números naturales

Estrategia 3, algoritmo canónico. Catorce alumnos realizan el algoritmo de manera correcta (fig. 4), sin tomar en cuenta el ejemplo y la indicación propuesta en el cuestionario, algunos intentan realizar el algoritmo gráfico, pero ninguno lo realiza correctamente.

Realizan de manera libre el algoritmo gráfico, pero no logran obtener la respuesta que obtuvieron en la operación, intentan de diversas maneras obtener el mismo resultado tanto en el algoritmo canónico como en el algoritmo gráfico, sin lograrlo.

Respuestas incorrectas:

Estrategia 1, constancia de números naturales. Seis alumnosresuelven la tarea como si se tratara de números naturales, realizan la partición de cada una de las figuras de manera correcta, pero no pueden operar ambas cantidades fraccionarias, trazan cada figuracomo ajena e independiente y ajustan los resultados, como se muestra en la figura 5.

Estrategia 2, libre. Cuatro alumnos representan los números fraccionarios de manera libre y al parecer en relación directa a los números naturales, trazan figuras para realizar el algoritmo grafico también de manera libre, se nota que tiene un conocimiento limitado en cuanto a los números fraccionarios, pero funcional acerca de los números naturales.

El presente ítem obtuvo un total de 23 respuestas correctas y 10 incorrectas, lo cual muestra un manejo aceptable en cuanto a la suma de fracciones, los alumnos que contestaron incorrectamente muestran un anclaje persistente enfocado al manejo de los números naturales.

Reactivo 2. Presenta una resta de fracciones.

Esta tarea ha sido incluida en el cuestionario porque tiene el propósito de indagar que tanto saben los alumnos en cuanto a la resta de fracciones, utilizando los dos algoritmos presentados.

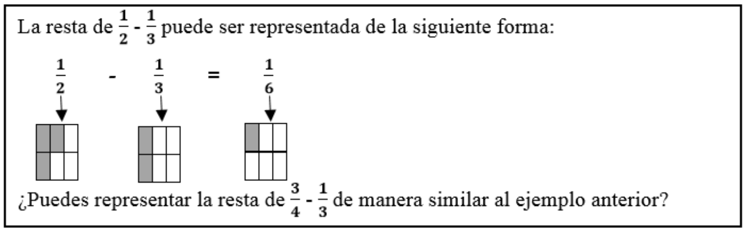
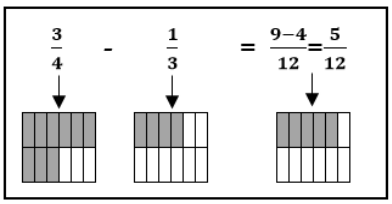


Figura 6. Resta de fracciones.

Respuestas correctas:

Estrategia 1, preservación del todo. Tres alumnos realizan el algoritmo de manera correcta, también realizan correctamente el algoritmo gráfico con figuras rectangulares, como se muestra en la figura 7.



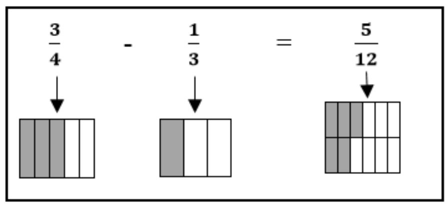


Figura 7. Preservación del todo Figura 8. Conservación de figuras independientes.

Estrategia 2, conservación de figuras independientes. Ocho alumnos realizan la operación de manera correcta, también realizan correctamente el resultado del algoritmo gráfico, pero los sumandos están representados de manera independiente como si se tratara de dos figuras independientes, que no podrían ser restadas tanto por su diferente tamaño como por su equidivisión, como se presenta en la figura 8.

Estrategia 3, algoritmo canónico. Cuatro alumnos realizan la operación de manera correcta con el algoritmo canónico, pero no realizan el algoritmo gráfico a través de las figuras propuestas en la tarea.

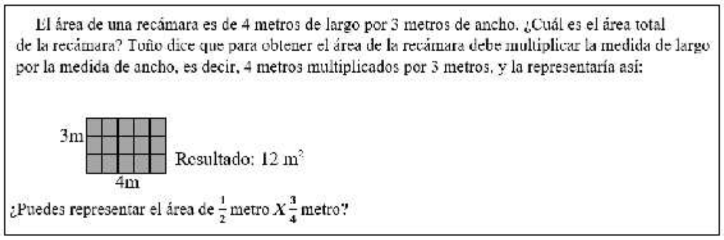
Respuestas incorrectas:

Estrategia 1, constancia de números naturales. Ocho alumnos tratan de realizar la operación con el algoritmo canónico, pero tienen un conocimiento muy limitado de cómo realizar la operación y por lo tanto las respuestas son muy variadas e incorrectas, también intentan realizar el algoritmo gráfico y trazan de manera correcta tanto el minuendo como el sustraendo con figuras que están representadas de manera independiente como si se tratara de dos figuras ajenas, que no podrían ser restadas, se observa un manejo fijo hacia los números naturales.

Estrategia 2, libre. Diez alumnos solo realizan el algoritmo canónico, pero de manera incorrecta, no realizan algún intento por resolver a través del algoritmo gráfico, al parecer tienen un conocimiento limitado de como operar los números racionales.

El presente reactivo obtuvo un total de 15 respuestas correctas y 18 incorrectas, lo cual muestra una clara diferencia en cuanto al reactivo anterior y muestra un manejo incorrecto tanto en lo conceptual como en lo operatorio.

Reactivo 3. Multiplicación de fracciones.



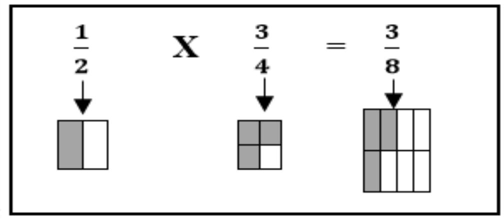


Figura 9. Multiplicación de fracciones. *Figura 10.*Conservación de figuras independientes.

Respuestas correctas:

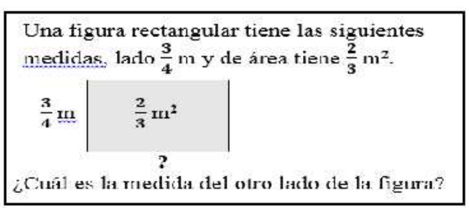
Estrategia 1, conservación de figuras independientes. Siete alumnos realizan la operación con algoritmo canónico de manera correcta, y también el algoritmo gráfico es correcto, aunque siguen manteniendo a cada una de las figuras como independientes y ajustando las figuras que representa a cada número fraccionario con el resultado correcto, como se muestra en la figura 10.

Estrategia 2, algoritmo canónico. Diecisiete alumnos realizan la operación de manera correcta y luego registran el mismo resultado en una figura rectangular de 8 partes, no realizan el algoritmo gráfico solo trazan la figura rectangular de ocho partes para anotar el resultado.

Respuestas incorrectas:

Estrategia 1, libre. Nueve alumnos realizan diferentes operaciones de manera libre e incorrecta, algunos intentan realizar el algoritmo gráfico, pero también lo realizan de manera errónea, al parecer no tiene claro cómo realizar la operación de multiplicación de fracciones. El presente reactivo obtuvo un total de 24 respuestas correctas y 9 incorrectas, lo cual muestra nuevamente un manejo aceptable en cuanto la multiplicación de fracciones.

Reactivo 4. División de fracciones. Reactivo 5 División de fracciones.



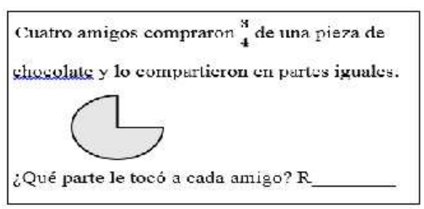


Figura 11. *Figura 12.*

Únicamente el alumno Cristian contesto correctamente las dos tareas propuestas, realizó la operación de división de fracciones de manera adecuada, todos los demás alumnos contestaron de manera libre e incorrecta.

Conclusiones

La suma de números fraccionarios representó un poco dificultad, ya que 23 alumnos de los 33 contestaron correctamente, sin embargo, la resta de fracciones representó una mayor dificultad ya sólo 15 de los 33 alumnos contestó correctamente, en cuanto a la multiplicación de fracciones el porcentaje de alumnos nuevamente se incrementó ya que 24 de los 33 alumnos contesto correctamente, incluso supero el número de estudiantes con respecto a la suma de fracciones, pero la división de fracciones representó una mayor dificultad, pues solamente un alumno contestó correctamente cada una de las dos tareas propuestas.

La intención de trabajar con expresiones gráficas como se muestra en las cuatro primeras tareas es dar mayor importancia al algoritmo gráfico, el cuál además nos permite saber hasta qué nivel se encuentra el conocimiento de los alumnos de sexto grado de primaria en cuanto a los números fraccionarios, y tratar de que los demás alumnos accedan a este conocimiento por este medio.

La división de fracciones se presenta como el mayor reto por aprender en la escuela primaria, en este trabajo de investigación solamente se presentan el modelo partitivo y el inverso del producto de medidas, como dos ejemplos muy claros para ser aprendidos en la escuela primaria, y que serán abordados posteriormente en el proceso de investigación.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L. (1990). 'Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132-144.

Berenson, S., Vidakovic, D., (1995) Rural Students' Informal knowledge of division. Paper presented at the Annual Meeting of the North America Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (17th PME-NA, Columbus, OH, October21-24, 1995).

Cengiz, N., Rathouz, M. (2011). 'Take a bite out of fraction division'.*Mathematics Teaching in the Middle School, 17(3),* 146-153.

Fischbein, E., Deri, M., Sainati, M., Sciolis, M. (1985). The Role of Implicit in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*, 3-17.

Jensen, A., Hohensee, C., (2015). Examining and elaborating upon the natureof elementary prospective teachers' conceptionsof partitive division with fractions.

Kieren, T. E. (1983). Partitioning, Equivalence and the Construction of rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical education.*(pp. 506-525).

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Schwartz, J.: 1988, 'Intensive Quantity and Referent Transforming Arithmetic Operations', in J. Hiebert and M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, NJ: Lawrence Erlbaum Association, pp. 41-52. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*, 125-147.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes* (127-174). London: Academic Press.

Vergnaud, G.: 1988, 'Multiplicative structures', in J. Hiebert and M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, NJ: Lawrence Erlbaum Association, pp. 141-161. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? In G. Hare! & J. Confrey (Eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (41-60). Albany, NY: State University of New York Press.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2018) Libro de Texto Gratuito. *Desafíos matemáticos. Libro para el Alumno Sexto Grado*. Educación básica. Primaria. México D.F.

XV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Constituyendo prácticas matemáticas en proyectos pedagógicos de modelación -PPM-

Fabian Arley Posada-**Balvin**
Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte -UFRN-
Brasil
fabian@ccet.ufrn.br - fapoba@gmail.com

Resumen

La modelación matemática puede ser entendida como una forma de solucionar problemas no matemáticos mediante la matemática. Cuando ese proceso es usado en contextos pedagógicos, toma otras dimensionalidades que van más allá de la matemática aplicada. En este trabajo presentamos un análisis del proceso de constitución de prácticas matemáticaen contextos Pedagógicos de Proyectos de Modelación -PPM-, que por la manera como son constituidas, pueden ser entendidas con el significado de objetos e/o de instrumentos y por esa vía, de modelos matemáticos. Ejemplificamos el procesomediante la producción de un grupo de alumnos de un curso de matemática para Biología de la universidad UNESP/SP/Brasil, a quienes se les propuso como tarea desarrollar un proyecto de modelación en una temática del propio interés. Concluimos que las prácticas matemáticas se constituyen por la coordinaciónde variaciones espacio-temporales de las cantidades escogidas como pertinentes, con formas generales de correlación entre esas mismas cantidades.

Palabras clave:modelación matemática, teoría de la actividad, producción de conocimiento matemático, enseñanza y aprendizaje de matemática.

A manera de Introducción

De acuerdo con tradiciones filosóficas racionalistas, la teoría yla práctica se encuentran categóricamente separadas, cada uno con sus propias características e identidades. De un lado, la teoría en forma de ideas, conceptos, creencias, hipótesis, conjeturas e imaginarios, cuya existencia ideal permite describir realidades posibles pasadas por apropiación y futuras por creación. Pero, de otro, la práctica caracterizada por acciones reales ejecutadas sobre objetos materiales (que existen independiente de la conciencia humana), a partir de la propia corporeidad extendida por instrumentos. Bajo esa perspectiva, teoría y práctica, además de diferentes, se presentan con carácter opuesto negándose mutuamente y, de cierta forma, caracterizándose con grados de importancia de acuerdo con intereses particulares.

Otra manera de plantear a relación entre teoría y práctica esa partir de perspectivas más contemporáneasde corte antropológico y socio-cultural. En estos casos, separarcategóricamente la teoría de la práctica se torna insostenible. De acuerdo con estas posturas, aunque se puedan crear discursos que las categoricen con naturaleza diferente, en realidad son dos mundos que secondicionan y se co-determinanmutuamente. Teoría y práctica conviven dialécticamente en unidad, haciendo quela práctica, de un lado, pierda su carácter ingenuopor el enriquecimiento y la concretud de los constructos teóricos, y la teoría, de otro, su carácter de especulativa mediante criterios de verdad que solamente la práctica puede ofrecerle.

Tal indisolubilidad puede percibirse principalmente en las más variadas actividades humana. Para Leontiev(1978, 1979), las actividades humanas se caracterizan por ser unidades moleculares, no aditivas, de acciones materiales y de reflexiones mentales de sujetos corpóreos en que converge tanto a capacidad de idealizar (teorizar) mediante anticipaciones y proyecciones, como acciones corpóreas externas (prácticas). En esas condiciones las actividades humanas se tornan materialmente objetivas siempre que la realidad sea pensada, idealizada y proyectada teóricamente, produciendo no solamente nuevas acciones prácticas y realidades materiales innovadoras, sino también creando condiciones de desarrollo para los sujetos que las realizan. Visto así, las acciones prácticas, además de ser puntos de partida para la construcción de teorías son su fin, en la medida que los avances teóricos dependen de los procesos transformadores del mundo material.Para transformar el pensamiento y producir nuevos conocimientos es necesario generar nuevos sistemas de prácticas en los sujetos.

De ese modo, las acciones prácticas de los sujetos no pueden verse únicamente como simples imitaciones o repeticiones mecánicas de tradiciones sociales. Son formas de los seres humanos controlan y transformar el mundo natural y social en que viven para satisfacer sus propias necesidades. Pero también son formas de resistencia; de exposición, de formacióny transformaciónde sus creencias, sensibilidades, percepciones, idearios, conocimientos y comprensiones en un aquí (espacial) y un ahora (temporal). Por esa razón, aunque las acciones y operaciones sean desarrolladas principalmente por individuos, en realidad las prácticas son sociales, condicionadas por diferentes tipos de instituciones. Las prácticas, por tanto,son acciones proyectadas y realizadas por sujetos, medianteel uso de instrumentos culturales materiales y simbólicos, orientadas a transformar a naturaleza material y social con el propósito de satisfacer sus más diversas necesidades.

Las prácticas matemáticas como un tipo particular de práctica social.

En términos generales, la matemática puede ser considerada como un área de investigación históricamente consolidada y delimitada.Una manera de interpretar eso es que la matemática, como sucede con cualquier conocimiento, se constituye mediante un conjunto de acciones que indica una forma específica de pensar y actuar legitimadas culturalmente y por eso cambiantesen el tiempo y en el espacio.Llamaremos a este tipo de práctica de “práctica matemática”. Que el término matemática esté adjetivando al de práctica, indica que las acciones encarnan una forma particular en que los sujetos organizan suas y reflexiones, de la misma manera como lo sería una práctica adjetivada de política, religiosa o económica. Pero, por otro lado, se refiere a que es posible diferenciar cada una de ellas como maneras de controlar el medio social y material en que se vive. Para (Obando, Arboleda, & Vasco, 2014) las prácticas matemáticas se refieren

> *“…a cierta forma de acción de losindividuos, en sus relaciones entre sí, y con el medio, a través de los procesos deobjetivación tanto de la cantidad y la*

> *forma -por ejemplo, medir, contar, comprar,vender, intercambiar, construir, fabricar, estimar, describir, localizar-, como de la variación de una u otra -movimiento, cambio, comparación, transformación, y otras-…"*

De ahí queal comprender a la matemática como una práctica social particular, no solo gana autonomía e identidad, sino también el carácter de instrumento que auxilia el desarrollo y consolidación de otros tipos de prácticas culturalmente diferenciadas.

La práctica de modelación: un contexto para la constitución de prácticas matemáticas.

Académicos preocupados con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática han ponderado el potencial del proceso de modelación matemática como un camino didáctico y/o pedagógico para el desarrollo de contenidos curriculares y de formas de racionamiento matemático. (Bassanezi, 2002; Blum, Galbraith, Henn, &Niss, 2007; Meyer, Caldeira, &Malheiros, 2011). Una de las tendencias del uso de este proceso es verlo como "una forma de estudiar el mundo real con el universo de la matemática" (Meyer et al., 2011) que, con propósitos didácticos/pedagógicos, se traduce en presentar diferentes problemas a los estudiantes, para que los resuelvan aplicando el conocimiento matemático aprendido en el aula de clase.

Esta forma de entender la modelación matemática en contextos escolares, resalta la idea de que los problemas que serán modelados conllevan consigo una carga intencional, previamente establecida por el profesor, para que de alguna forma emerjan ciertos contenidos conceptuales y/o procedimentales previamente establecidos en el currículo de matemática. De acuerdo con Borba (2009); Borba& Villarreal (2005), un trabajo en aula de clase así, está más próxima de una perspectiva de resolución de problemas que de modelación. Interpretando estos autores, uno de los valores didácticos, pedagógicos y cognitivos más importantes que el proceso de modelación matemática debería ofrecer a contextos escolares, tiene que ver con la posibilidad de entenderlo como un espacio para la producción de conocimiento en general, y matemático en particular. La propuesta, es dar la oportunidad a los alumnos para que sean los protagonistas, no únicamente en la resolución de los problemas propuestos por el profesor, sino también en la formulación de los mismos, según sus propios intereses.

Para alcanzar tal propósito, proponen asemejar el proceso de modelación con un trabajo por proyectos, que denominan "Proyectos Pedagógicos de Modelación –PPM-", en donde los alumnos son convidados a: 1- escoger un tema de intereses colectivo; 2- plantear alguna situación problemática al interior del tema escogido y 3- construir argumentos para intentar resolver los problemas planteados y/o preguntas formuladas. La principal intención es crear un espacio pedagógico para el desarrollo de acciones análogas a las ejecutadas por investigadores cuando realizan sus respectivas investigaciones; o sea, escoger un campo de estudio de interés, delimitarlo por medio del planteamiento de cuestionamientos y/o definición de problemáticas, para finalmente buscar respuestas y/o soluciones.

En medio de este proceso se pueden crean condiciones de potencialidad para constituir prácticas matemáticas. Constitución que puede tornarse necesario, posible, deseable y/o importante de acuerdo con las características de cada proyecto. Esto significa que, en el contexto de los PPM, constituir prácticas matemáticas puede ser entendido en el mismo sentido que autores como Bassanezi (2002) consideran como modelación matemática, en términos de la aplicación de la matemática a problemas del cotidiano.

Dispersión de semillas por zoocoría: un ejemplo de PPM

Los participantes de la investigación fueron alumnos de un curso de matemática aplicada para Biólogos en formación de la universidad Paulista “JúlioMesquitaFilho” (UNESP), sede Rio Claro del estado de San Pablo, Brasil. Al inicio del curso los alumnos fueron invitados por el profesor a formar grupos entre cuatro y seis alumnos para desarrollar un PPM. Como producto final del semestre, debían entregar un texto escrito síntesis del proceso de investigación, producir un video relacionado con la temática y realizar una presentación oral para el resto de los compañeros de clase. Uno de los proyectos desarrollados fue titulado “Dispersión de semillas por Zoocoría”

Aunque el proceso de desarrollo de los PPM consta de tres grandes momentos íntimamente conectados como ya explicado: 1- elección del tema; 2- planteamiento de la situación problema y 3- resolución, aquí nos concentraremos en algunos análisis del tercer momento, pues si bien es cierto que las prácticas matemáticas se van constituyendo paulatinamente en cada etapa hasta constituirse como parte importante del proyecto, es en el momento de construcción de los argumentos para dar solución al problema que las acciones orientadas a tal fin se hicieron más visibles.

Una vez fue escogida la temática, los alumnos formularon como pregunta problematizadora la siguiente: ¿Cómo aplicar los estudios sobre estrategias de dispersión de semillas por animales en la restauración de un área degradada? En entrevista con los alumnos, mencionaron que el interés por esta pregunta provenía de un trabajo previo enque una de las alunas había participado. Cuestión que también llamó la atención a una colega que también habíatrabajado recogiendoinformación en una empresa de São Paulo/Brasil que realizaba investigaciones prácticas de recuperación forestal.Formulada la pregunta problematizadora el PPM fue desarrollado en torno de dos conceptosestructurantes: estrategia y eficiencia en la dispersión de semillas por animales.

Siguiendo las ideas de Magurran(1988), texto recomendado por una investigadora del área con que los alumnos habían tenido clase en la universidad, los alumnos comentaron que el concepto de “estrategia” es definido como los métodos usado por las plantaspara atraer os animales dispersores y la “eficiencia” como la creación de condiciones para que el dispersor pueda efectuar la dispersión y la semilla logre su germinación y desarrollo. En ambos casos, enfatizan los alumnos, se está hablando de condiciones naturales de interacción mutua entre plantas y animales como un proceso de equilibrio ecológico, donde las plantas producen alimentos y los animales, al consumirlos, se encargan de diseminar las semillas.

Desde un punto de vista matemático, los alumnos propones quela estrategia y la eficiencia deben ser comprendidas comocantidadespotencialesde germinación a partir de la interrelación entre diferentes especies de animales y plantas, cuyas posibles formas de interacción responden a variables aleatorias. En palabras de Magurran (1988),es necesario medir la riqueza o abundancia relativa de cada especie de animaly planta con que interactúacuya medida se da por la cantidad y la regularidad con que ciertos animales se aproxima a ciertas plantas. En otras palabras, es necesario contar el número de especies en un espacio muestral; construir modelos de patrones de distribución; y, crear índices de proporción de especies en grupos determinados.Básicamente, afirmaron los alumnos, se trata deun cuantitativo de remoción de semillasy de índice de importancia relativa, indicadopor elporcentaje de alimento consumido por cada animal.

Para ejemplificar el proceso, los alumnos presentaron un ejercicio con aves.Los datos usados hacían parte de uno de los proyectos en el que de la alumna había participado. En entrevista explicaron que la técnica utilizada consiste en ir al campo que se estabaqueriendo restaurar por un periodo de tiempo determinado (mínimamente 10 horas a la semana) y realizar un proceso de conteo de las aves que llegan e interactúan,categorizadas por especies, familias y géneros.Además de clasificarel tipo de plantasy determina si el ave consume o no los frutos.

Esa información, afirmaron,era colocadaen las siguientes ecuaciones obteniendo así el cálculo final del cuantitativo de remoción de semillas y el índice de importancia de la planta. $CR = ln\left[\left(\frac{V}{T}\right).\left(\frac{N}{V}\right).\left(\frac{I}{N}\right)\right]$ y $I = \sum \frac{C_i/_{E_i}}{S}$, donde V= número de visitas del ave; T=tiempo (10 horas); N=número de frutos manipulados, I= número de frutos ingeridos; E_i =número total de especies que se alimentan de los frutos de la planta i; S = número total de la especie de las plantas de la muestra y $C_i$indicador de si el ave consume o no el fruto de la planta i, con valor uno si lo consume o cero si no lo hace.

Discusión sobre la constitución de prácticas matemáticas en PPM.

Para diferentes investigadores la íntima relación entre las diferentes formas de conocimiento y los procesos de modelación es indiscutible, pues razonar basado en modelos y sus formas asociadas constituye uno de los núcleos epistemológicos de comprensión y transformación de sistemas científicos y sociales (Jurdak, 2016; Lehrer&Schauble, 2007; Williams &Goos, 2013). Para Lehrer&Schauble (2007), por ejemplo, las raíces de la modelación se encuentran en el concepto de analogía, considerando que, en su nivel más básico, un modelo es una analogía, donde un conjunto familiar de objetos y relaciones pueden sustituir, por analogía, otro conjunto tal vez de menor familiaridad con el objetivo de ganar nuevas comprensiones, otras formas de tratamiento y, por esa vía, nuevos procesos de conceptualización.

Una manera de interpretar esa idea es considerar los modelos como medios o instrumentos de observación, de entendimiento, de manipulación y por veces de control entre diferentes sistemas. Es en ese sentido, que la modelación matemática puede ser analizado en una doble vía y no apenas en una como acostumbra hacerse.De un lado, como una manera de representar, por medio de conceptos y relaciones matemáticas, una situación no matemática, como explica Bassanezi (2002). Y de otro lado, en términos del camino inverso: un sistema no matemático asumiendo el papel de modelo para un sistema matemático, como proponen Urquhart (2008) y Williams y Goos(2013). En ambos casos los objetos, relaciones y problemas de un sistema no solo representan y pueden ser representado análogamente por el otro sistema, mas también permite formas de acción relacionadas con el sistema modelado.

En ese sentido, puede decirse que el sistema modelo y el modelado se constituyen mutuamente y se co-determinan dialógicamente, pues modificaciones en uno de ellospuede implicar ajustes en el otro. Dependiendo del interés de los sujetos involucrados se define cual es el sistema modelado y cual el modelo. Generalmente tal decisión depende del tipo de problema que se desee y/o se requiera resolver. Esta manera de entender la modelación flexibiliza los análisis relacionados con procesos de producción de conocimiento y de creación de diferentes niveles de verdad y confianza mediante la resolución de algunas contradicciones dialécticas que se generan, no solo por la convergencia de diferentes campos teóricos, sino también por el encuentro de aspectos empíricos emergentes de la experiencia, con conceptos teóricos provenientes de prácticas académicas científicas.

En los PPM no es diferente. Como fue brevemente presentado, el propósito de responder a la pregunta: ¿Cómo aplicar los estudios sobre estrategias de dispersión de semillas por animales en la restauración de un área degradada? q llevó al grupo de alumnos a apropiarse de un conjunto de concepto teóricos y usarlos en la comprensión, producción y transformación de su experiencia empírica de conteos multivariados y la dispersión de semillas en particular. En ese proceso los conceptos científicos de la ecología, de la estadística y la matemática jugaron un papel de particular importancia provisionando a la experiencia empírica con lenguajes formales y poniendo a un lado la intuición cotidiana del asunto, para enriquecerla con las reglas de tratamiento propias de los sistemas teóricos (en este caso estadístico y matemático). En este caso en particular, las técnicas estadísticas y los conceptos matemáticos representados en las ecuaciones de cuantitativo de remoción de semillas y de índice de importancia fueron escogidas como modelos matemáticos del fenómeno empírico.

Las prácticas matemáticas así constituidas, como modelos matemáticos,se tornanpaulatinamente y de manera simultánea en instrumentos y objetos, pues mientras que forman parte de los argumentos construidos para intentar dar solución a la situación problemática formulada, se van objetivando. Tal interpretación permite comprender que, las prácticas matemáticas así constituidas cristalizan una permanente tensión entre contrarios de los cuales se pueden destacar: niveles de generalización-particularización, procesos de covariación-correlación, carácter de aleatoriedad-determinismo entre las cantidades de magnitud pertinentes a la situación estudiada.

Estas tensiones fueron apreciadas durante todo el proceso de desarrollo del proyecto de modelación mediante las diferentes formas de enunciación discursivas tanto verbales como escritas de los sujetos involucrados. Un ejemplo puede ser apreciado en el momento que los alumnos explicaron, en el trabajo escrito y en la presentación del proyecto para los colegas, las técnicas de recolección de información mediante el conteo empírico del número de aves que llegan al área de intervención, la clasificación en especies, familias y géneros y la interacción con las diferentes plantas y frutos, pero principalmente de como todo ese proceso se simplificaba a partir de introducir los resultados en los ordenadores previamente programados con los modelos matemáticos representados en las ecuaciones de cuantitativo de remoción y de índice de importancia.

Se puede percibir que la explicación conceptual usando las ecuaciones (para los alumnos fórmulas) en términos ecológicos y biológicos (modelo ecológico y biológico) apelan a una relación de covariación entre magnitudes discretas (número de aves y plantas) que interactúan aleatoriamente y cuyo proceso de cuantificación implica pensar las relaciones entre ellas de forma multivariado (modelo estadístico). Mientras queapelando a la fórmula (modelo matemático), hay un intento de retirar la temporalidad,la espacialidad y la naturaleza aleatoria del fenómeno con el propósito de programar un ordenador y producir nuevos conocimientos por simulación(Levy, 1997).

A manera de conclusión

Una primera conclusión que queremos destacar es que las prácticas matemáticas (modelos matemáticos) constituidas en el contexto de este PPM son fruto de la coordinación de procesos de variación espacio-temporales de las cantidades escogidas como pertinentes, con formas generales de correlación entre esas mismas cantidades y en las que, para el caso aquí presentado, el procedimiento de comparación por cociente entre cantidades jugó un papel fundamental en dicha coordinación. Un importante aspecto del razonamiento proporcional.Relacionado con este aspecto, destacamos es que las relaciones proporcionales que permitió resolver algunas de las tensiones entre opuestos en conflicto antes mencionadas, en particular la coordinación entre la covariación y la correlación de variables, requirió de la interacción entre sujetos con diferentes niveles de experiencia con la situación, la estadística y la matemática.

Por esa razón, ya que los PPM son desarrollados en contextos educativos, resaltamos como segunda conclusión que el acompañamiento durante todo el semestre a los alumnos fue fundamental. Apoyados en las ideas de la teoría de la actividad (Engeström, 1987; Leontiev, 1978) y del constructo teórico Seres-humanos-con-medios (Borba& Villarreal, 2005),usamos la noción de acto instructivo, para este proceso. Los actos instructivos fueron entendidos como acciones intencionadas, realizadas por actores humano (generalmente representado por el profesor y otros expertos en el tema) para orientar a los actores menos experimentados (generalmente representado por los alumnos) mediante el uso de artefactos culturales materiales y simbólicos, generándose un espacio colectivo,en sala de aula, de producción y reproducción de conocimiento relativo a los conceptos que están en juego. Eso sin importar que tales conceptos formaran parte, en ese instante del contenido conceptual preestablecido en el currículo de la materia, invitando al profesor a romper protocolos rígidos comunes en contextos escolares.

Referencias y bibliografía

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W., &Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and aplications in mathematicseducation: the 14th ICMI Study*. New York: Springer.

Borba, M. (2009). Potentialscenarios for Internet use in themathematicsclassroom. *ZDM MathematicsEducation*, *41*, 453–465. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0188-2

Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and theReorganizationofMathematicalThinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*. UnitedStateofAmerica: Springer.

Engeström, Y. (1987). LearningbyExpanding: AnActivity - TheoreticalApproachtoDevelopmentalResearch. Recuperado 29 de enero de 2014, de http://lchc.ucsd.edu/mca/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm

Jurdak, M. (2016). *Learning andTeaching Real World ProblemSolving in SchoolMathematics: A Multiple-Perspective Framework for Crossing theBoundary*. Switzerland: Springer InternationalPublishing.

Lehrer, R., &Schauble, L. (2007). A developmental approach for supportingheepistemologyofmodeling. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modellingand Applications in MathematicsEducation: The 14th ICMI Study* (pp. 153-160). New York: Springer.

Leontiev, A. N. (1978). *Actividad, conciencia y personalidad*. Buenos Aires: Ediciones Ciencias del hombre.

Leontiev, A. N. (1979). *La actividad en la psicologia*. La Habana: Libros para la educación.

Levy, P. (1997). *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informatica*. Editora 34.

Magurran, A. (1988). *Ecologicaldiversityand its measurement*. United StateofAmerica: Princeton Universitypress.

Meyer, J. F., Caldeira, A., & Malheiros, A. P. (2011). *Modelagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.

Obando, G., Arboleda, L. C., &Vasco, C. E. (2014). Filosofía, matemáticas y educación: una perspectiva histórico-cultural en educación matemática. *Revista Científica Universidad distrital*, *3*(20), 72-90.

Urquhart, A. (2008). TheBoundary Between Mathematics and Physics. En *ThePhilosophyofMathematicalPractice*. Oxford UniversityPress: Paolo Mancosu.

Williams, J., &Goos, M. (2013). Modellingwithmathematics and technologies. En M. A. K. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Thirdinternationalhanbookofmathematicseducation* (pp. 549-569). London: Springer.

LEM naescola: o primeiro ano de umprojeto de ensino, extensão e pesquisa[1]

Fabian Arley Posada **Balvin**
Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Brasil
fapoba@gmail.com
Alexandre Silva de **Oliveira**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Brasil
alexandreoliveira.mat@gmail.com
Ayronn da Silva **Santos**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Brasil
ayronnssantos@gmail.com
Kelvin Leysson Bulhões da **Silveira**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Brasil
kelvinleysson@gmail.com

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo descrever o desenvolvimento do primeiro ano do projeto intitulado LEM na escola, realizado na Escola Estadual Governador Walfredo Gurgel, localizada na cidade de Natal-RN, no Brasil. O trabalho busca ainda, explicitar a continuidade das ações realizadas na instituição de ensino, iniciando-se a partir das ações de integrantes do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID, seguindo para a implementação de projetos de extensão, iniciação cientifica júnior e ensino, de maneira orgânica, favorecendo desta forma o estreitamento das relações entre a Universidade Federal do Rio Grande do Norte e essa determinada escola, dos quais, juntos, podem desenvolver além do raciocínio lógico-matemático, o senso crítico dos alunos, tornando-os protagonistas de sua própria aprendizagem e de seu papel como cidadão.

[1]Apoio: Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – DMAT/UFRN, Pró-Reitoria de Extensão da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – PROEX/UFRN e Fundação de Apoio à Pesquisa do Rio Grande do Norte – FAPERN.

Palavras - chave:Educação, Matemática, Raciocínio lógico-matemático, Laboratório de Ensino de Matemática.

Introdução

Como parte das atividades propostas, os bolsistas do subprojeto de Matemática do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID, para o primeiro semestre do ano de dois mil e dezessete, foi formulada uma iniciativa de trabalho que tornasse possível experimentações orientadas ao favorecimento de processos de pensamento matemático, para dessa forma incentivar uma maior interação social e coletividade entre os alunos da Escola Estadual Governador Walfredo Gurgel, localizada na cidade de Natal – RN, no Brasil.

Norteados por esse propósito e em diálogo com a administração da escola, tornou-se possível reativar o espaço que originalmente tinha sido projetado para que funcionasse como Laboratório de Ensino de Matemática – LEM, mas que devido a problemas relacionados com processos burocráticos, se encontrava subutilizado. Com isso, os esforços passaram a ser conduzidos a tornar o LEM da escola um ambiente favorável para essas investigações e um ponto de encontro agradável que os alunos possam utilizar para desenvolver atividades lúdicas e acadêmicas como, estudar, compartilhar experiências, manipular materiais ou socializar, de maneira geral.

Devido a disponibilidade favorável de utilização do LEM, a equipe vem idealizando, estruturando e executando alguns subprojetos que fossem atrativos e de fácil aceitação pelos alunos, alguns deles são: o *Clube de Matemática* e o *Xadrez na Escola*.

O Xadrez na Escola, foi idealizado para ser executado em três fases: A primeira direcionada ao aprendizado dos alunos em relação as noções básicas do jogo, contribuindo para um maior interesse pelo xadrez e por seus desafios. Para a segunda fase, a ideia seria moldar um conjunto de situações que pudesse estabelecer relações entre o xadrez e o contexto matemático da resolução de problemas, por meio de oficinas práticas e experimentos relacionados a forma como os alunos resolvem os desafios propostos nas mais diferentes situações e jogadas. Por fim, para a terceira fase, o propósito seria explorar mais efetivamente as possíveis conexões entre o raciocínio lógico-matemático e os desafios inerentes ao jogo de xadrez e, com isso, criar possibilidades para o desenvolvimento do pensamento lógico através da resolução de problemas matemáticos e não matemáticos.

O Clube de Matemática, por sua vez, teve sua execução possibilitada um pouco depois do Xadrez na escola, em um momento que os alunos da instituição de ensino já estavam um tanto quanto mais habituados ao ambiente proposto no LEM. Para esta vertente do projeto, vem sendo idealizadas oficinas, onde os professores podem encontrar as relações de situações cotidianas com a matemática, e a partir disso, realizaram aulas lúdicas, buscando sempre incentivar a participação ativa dos alunos durante as oficinas, proporcionando aos alunos uma autonomia em desenvolver ideias e buscar de forma dinâmica a aquisição de novos conhecimentos e curiosidade.

Ao final do primeiro ano de realização do projeto, devido aos rumores que as Bolsas de Iniciação à Docência seriam descontinuadas, os bolsistas do PIBID, até então, sob a orientação do supervisor do subprojeto na escola, selecionaram dentre os estudantes, monitores voluntários para que continuassem o trabalho iniciado no LEM. Simultaneamente, foi aberto pela Pró-reitoria de Extenção da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – PROEX/UFRN um edital para projetos relacionados a educação. Nesse momento surgiu o projeto "**LEM na escola"** liderado pelo professor (primeiro autor) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – DMAT/UFRN, um professor da escola e os licenciandos (demais autores) numa tentativa de manter os alunos e os professores da escola na dinâmica até o momento conseguida e potenciar as mudanças positivas que estavam acontecendo.

No primeiro semestre do ano dois mil e dezoito, a Fundação de Apoio à Pesquisa do RN – FAPERN abriu um edital oferecendo bolsas para alunos de escola pública a partir do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica Júnior – PIBIC Jr. Para esse edital, inscrevemos um projeto intitulado **O Laboratório de Ensino de Matemática: Ambiente de Formação Científico-Matemática dos Estudantes do Ensino Médio**. Depois de uma série de etapas o projeto foi aprovado, possibilitando a continuidade das atividades e a vinculação de novos integrantes, dentre eles, sete alunos de ensino médio da própria escola e outros licenciandos voluntários do departamento.

Atualmente, o projeto se encontra em seu segundo ano de execução. O que anteriormente se iniciou como uma tentativa de aproveitamento de uma sala, tornou-se uma iniciativa que engloba, simultaneamente propostas de ensino, extensão e pesquisa cientifica. Voltando-se principalmente para jovens da periferia da cidade, projetando para os mesmos, perspectivas diferenciadas de futuro em conjunto com as universidades públicas.

O raciocínio lógico-matemático: propósito norteador

Desde o início das intervenções do projeto, o interesse por criar um espaço para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático tem sido um dos principais objetivos a serem alcançados, pois de acordo com os documentos base curriculares da educação matemática brasileira, esse é um dos propósitos da matemática escolar na medida que pode auxiliar em diversas situações problema encontradas diariamente.

Dentre as competências especificas para a Matemática, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC afirma que: "Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático" (BRASIL, 2017, p. 530). Por isso, alguns autores consideram que desenvolver o raciocínio lógico-matemático como um objeto orientado de aprendizagem possui valor pedagógico significativo.

A partir do que afirmam Vila e Callejo (2006), a relação entre as situações-problema e o raciocínio matemático torna-se considerável pedagogicamente na medida em que,

> […] um problema não é simplesmente uma tarefa matemática, mas uma ferramenta para pensar matematicamente, um meio para criar um ambiente de aprendizagem que forma sujeitos autônomos, críticos e propositivos, capazes de se perguntar pelos fatos, pelas interpretações e explicações, de ter seu próprio critério estando, ao mesmo tempo, abertos aos de outras pessoas.
>
> (Vila & Callejo, 2006, p. 10).

Conforme estes autores, na medida em que os indivíduos enfrentam diversas situações-problema, os mesmos podem desenvolver formas de raciocínio lógico-matemático que, posteriormente, serão usadas como instrumentos na resolução de novas situações, oportunizando um aprendizado progressivo e, assim, tornando possível considerar que tanto as situações quanto os raciocínios tornam-se meios e fins simultaneamente.

O uso do Laboratório de Ensino de Matemática tornou-se fundamental para tais finalidades, uma vez que o LEM, de acordo com Santos, Santos & Santos Júnior (2017), "[…] se configura como uma alternativa significativa para a abordagem de conteúdos, auxílio na resolução de problemas e, principalmente, na construção de conhecimentos matemáticos o que corrobora as atuais ideias sobre a utilização do LEM". (Santos et al., 2017, p. 11)

Nos âmbitos de pesquisa em Educação Matemática, o Laboratório de Ensino de Matemática ser pensado como um suporte pedagógico é de fundamental importância para a formação de professores. Como afirma Khidir, Rodrigues & Silva (2012):

> O Laboratório de Educação Matemática tem como objetivos: intervir na formação didática do licenciando; potencializar estudos sobre a formação do professor e suas implicações no processo de ensino e aprendizagem; produzir e utilizar material didático-pedagógico para o desenvolvimento de atividades para o ensino e a aprendizagem da Matemática; possibilitar vivência de práticas de ensino de Matemática, tendo como parâmetro a estruturação didática do processo de ensino e seus elementos constitutivos; e proporcionar situações onde licenciandos compreendam conceitos matemáticos e suas metodologias de ensino. (Khidir et al, 2012, p. 3)

Nessa perspectiva, torna-se possível observar esses apontamentos e analisar quais seriam as ideias que poderiam ser aproveitadas a partir desta metodologia, para contribuir de maneira efetiva para a formação do jovem cidadão. A partir do momento que os alunos deixam de ser meros receptores das informações fornecidas pelo professor, para tornarem-se, ativos nos processos de ensino e aprendizagem, passam a ter uma maior familiaridade com os conteúdos matemáticos, com seu ambiente escolar e, principalmente, com seu processo de formação enquanto cidadão crítico e consciente de seu lugar em sociedade, sendo esta uma das principais intencionalidades implícitas do projeto **O Laboratório de Ensino de Matemática: Ambiente de Formação Científico-Matemática dos Estudantes do Ensino Médio**,do ponto de vista de iniciação cientifica júnior.

Diante dessas concepções, a equipe responsável pelo projeto na escola decidiu abordar a resolução de problemas como um instrumento pedagógico, auxiliando o desenvolvimento de processos inerentes ao raciocínio lógico-matemático de um grupo de alunos da instituição de ensino, através do Xadrez na escola e do Clube de matemática. Para isso, foram idealizadas e estruturadas diversas intervenções que poderiam proporcionar os resultados esperados.

O Xadrez na escola, baseia-se nas perspectivas de Neto (2008) do qual considera o jogo uma alternativa significativa para o desenvolvimento de habilidades relevantes ao contexto escolar, principalmente, a respeito das possibilidades para as conexões necessárias a formulação do pensamento matemático. Assim,

> *[…] jogar xadrez passa pela condição de saber dominar as regras do jogo, saber Matemática passa por uma condição análoga. Então, quais são as regras mais fundamentais para aprender Matemática? As atitudes de alunos e professores de como participar das aulas de Matemática podem ajudar a construir algumas delas para melhorar o aprendizado. Esse aspecto geral do jogo, de servir como modelo de um tipo específico de conhecimento, pode auxiliar professores e alunos a refletirem sobre as formas de aquisição do conhecimento matemático. Uma reflexão*

> *importante para melhorar o significado do que se aprende e para que se aprende. (NETO, 2008, p 51)*

Fundamentados nesses autores, a equipe buscou proporcionar situações orientadas a incorporar tanto o jogo de xadrez, bem como alicerçar os processos de iniciação cientifica dos alunos, tentando adaptar isso ao cotidiano escolar, mediante a realização de diversas intervenções, tanto através do Clube de Matemática, como a partir do PIBIC – JR e o Xadrez na escola.

Processos metodológicos

Ao longo do primeiro ano de projeto, houveram muitas intervenções direcionadas a aumentar o interesse dos alunos pelo uso do Laboratório de Ensino de Matemática e, mais diretamente, pelo jogo de xadrez. Dentre elas, destacaram-se duas atividades devido suas particularidades e contribuições para com os propósitos do projeto.

A primeira atividade a ser mencionada foi o **I Campeonato de Xadrez – EEGWG**, que contemplou todas as turmas da escola, com alunos desde o sexto ano do Ensino Fundamental até a terceira série do Ensino Médio. Esse campeonato foi elaborado de acordo com os propósitos do projeto, através da tentativa de incentivar o interesse dos alunos pela Matemática, a partir do xadrez e, além disso, contribuir para que ocorresse uma maior interação social alicerçada no respeito aos colegas, como um dos valores éticos de convivência.

O período de preparação para o campeonato ocorreu diariamente durante o intervalo das aulas e, deste então, o LEM fica aberto todos os dias nesse período da manhã e alguns dias à tarde, sob a monitoria de pelo menos um dos alunos vinculados ao Programa de Iniciação cientifica Júnior, para que a comunidade escolar seja acolhida e possa realizar qualquer atividade. Há também a disponibilidade dos monitores responsáveis caso os professores – não necessariamente os de Matemática – desejem realizar alguma atividade no laboratório.

A segunda atividade foi relacionada a partidas de exibição de um jogo de Xadrez Humano Temático durante a Mostra Cultural da escola. O Xadrez Humano Temático é caracterizado por utilizar pessoas no lugar das peças convencionais, divididos em dois exércitos de dezesseis peças – nesse caso pessoas – formando um tabuleiro usual. Para facilitar o processo de execução, assim como em um campo de batalha simbolizada pelo xadrez, os reis comandam as demais peças.

Para que as exibições acontecessem da melhor forma possível o apoio da escola com relação ao projeto como um todo tornou-se fundamental. A direção permitiu que fosse pintado no pátio da escola, de forma permanente, um tabuleiro de sessenta e quatro metros quadrados.

O interesse dos alunos pelo Xadrez Humano Temático foi tão positivo e apreciado pela escola, que a mesma no ano de dois mil e dezoito, inscreveu a atividade como um projeto artístico de caráter teatral na I Mostra de Projetos de Cultura e Arte das Escolas da Rede Estadual de Ensino do Rio Grande do Norte. O tema escolhido pelos alunos dessa vez foi uma releitura da invasão de Lampião a Cidade de Mossoró. Nesta exibição, os estudantes encenaram o conflito entre os cangaceiros liderados por Lampião (Rei preto) e a resistência da cidade liderada pelo prefeito Rodolfo Fernandes (Rei Branco), em cima do tabuleiro de xadrez, onde o combate seria representado como um jogo de xadrez[2], atuando dessa forma como uma intervenção interdisciplinar, incentivando as mais diversas competências escolares.

Nesse mesmo ano, foram notórias que as intervenções do ano anterior entraram para o calendário escolar, o **II campeonato de Xadrez - EEGWG** superou a quantidade de inscritos de sua primeira edição e o Xadrez Humano foi novamente uma das principais atrações da mostra científica escolar.

Além das responsabilidades assumidas pelos alunos relacionados a iniciação cientifica já citados durante todo o texto, aconteceram intervenções pontuais, buscando desenvolver o pensamento crítico. Para isso foi realizado um estudo dirigido do livro **O que é cientifico?** de Rubem Alves, onde os mesmos tiveram que preparar apresentações simulando comunicações orais. Os alunos ainda realizaram oficinas no LEM relacionadas a artes, por inciativa própria, evidenciando ainda mais a proposta inicial de protagonismo do aluno.

No que tange o Clube de Matemática, foi realizada uma oficina de criptografia, em duas etapas, a primeira da qual os alunos ambientaram-se com o tema, através do filme **O jogo da imitação**(2014)e na segunda etapa foram apresentados a história da criptografia, aprendendo como alguns de seus métodos funcionam e sendo incentivados a resolver alguns problemas matemáticos relacionados ao tema. Os alunos participantes dessa oficina foram os monitores do Laboratório de Ensino de Matemática da escola, e a perspectiva é que posteriormente eles apliquem esta mesma oficina para algumas turmas na instituição de ensino.

A equipe organizadora está iniciando a segunda fase do subprojeto Xadrez na Escola, referente ao uso do jogo de xadrez como uma ferramenta pedagógica que possibilita a construção de processos de raciocínio lógico-matemático e, com isso, promovendo melhorias no desempenho dos estudantes tanto na disciplina de Matemática, como também referente aos processos de desenvolvimento social, através das relações interpessoais criadas pelos participantes do projeto no LEM da escola.

O Clube de Matemática continuará aplicando oficinas com os mais diversos temas matemáticos, contando com a participação tanto com os monitores quanto dos demais alunos da escola. Já o subprojeto O Laboratório de Ensino de Matemática: Ambiente de Formação Científico-Matemática dos Estudantes do Ensino Médio, continuará participando ativamente dos eventos escolares e aprofundará ainda mais a participação em eventos científicos.

Reflexões conclusivas

A confiança proporcionada pelas intervenções estruturadas e executadas através dos subprojetos relacionados ao Laboratório de Ensino de Matemática da instituição, vem se tornando cada vez mais consistente, contribuindo para o LEM ser, atualmente, o único laboratório a ser gerenciado apenas por alunos, sob a orientação da equipe idealizadora do LEM na escola, demonstrando a aceitação das intervenções realizadas no laboratório por parte da direção e dos estudantes, que compreenderam a relevância da utilização de formas alternativas de abordagens pedagógicas.

[2]Para maiores informações a respeito da invasão de Mossoró pelo bando de Lampião, os autores recomendam a leitura do artigo de Falcão (2018) onde o historiador além de explicar como foi o ataque dos cangaceiros, explana toda uma problematização acerca do papel da mídia da época nesse processo.

O **I Campeonato de Xadrez – EEGWG**eaexibição de partidas de Xadrez Humano Temático, contribuíram de forma pertinente para o aumento na quantidade de alunos participantes do projeto, uma vez que o LEM vem se tornando cada vez mais frequentado. Além de ter contribuído para a escolha de monitores, o campeonato também incentivou o respeito e a cooperação dos estudantes e ainda gerou uma parceria inesperada, mas bastante gratificante com o professor de Educação Física do turno da tarde, conseguindo romper as fronteiras existentes entre os turnos, mostrando que o LEM pode contribuir com o corpo escolar e potencializar a interdisciplinaridade.No caso do Xadrez Humano Temático, além das oportunidades e premiações já mencionadas anteriormente, a atividade gerou nos alunos uma relação de companheirismo, amizade e confiança, uma vez que se intitularam a família do xadrez.

No Clube de Matemática foi possível perceber um interesse dos alunos em conhecer uma perspectiva que antes não tinham inferido, visto que as aplicações da matemática muitas vezes não eram tão evidentes, já que é insólito a busca na percepção de ações da mesma no cotidiano.

O Laboratório de Ensino de Matemática: Ambiente de Formação Científico-Matemática dos Estudantes do Ensino Médio, por sua vez, contribui para a formação crítica dos alunos, possibilitando que os mesmos assumam uma postura de protagonismo dentro e fora da escola.

A equipe responsável acredita, de maneira geral, que a proposta de consolidar a cultura associada ao Laboratório de Ensino de Matemática vem sendo avaliada de bem sucedida, mediante os seguintes fatores: a quantidade de alunos envolvidos no projeto; o crescente número de inscritos no campeonato; o aumento progressivo dos participantes no LEM; os resultados obtidos pela exposição do Xadrez Humano Temático, dentro e fora da escola; e, por fim, a positividade com que a direção e a comunidade escolar se posicionaram em relação as intervenções direcionadas aos projetos estruturados no laboratório.

Portanto, o projeto segue construindo processos que possam favorecer a formação do jovem cidadão, capaz de usar as formas de raciocínio lógico-matemático para solucionar situações-problema que emergem de seu cotidiano, incentivando a criticidade e o protagonismo social.

Referências bibliográficas

Alves, R. (2007). *O que é científico?* (2. ed.). São Paulo: Loyola.

Brasil (2017). *Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base*.Brasília: MEC/CONSED/UNDIME.

Falcão, M. L. (2018). Batismo de fogo: imprensa e monumentalização da narrativa sobre o ataque de lampião a Mossoró (1927- 1931). *Ponta de lança*, *12*(22), 43-61 Recuperado de: https://seer.ufs.br/index.php/pontadelanca/article/view/9379

Khidir, K. S., Rodrigues, R. F. & Silva, W. M. (2012). Laboratório de Educação Matemática: ensino e pesquisa mediados pela extensão. *Escola de Inverno de Educação Matemática*, Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil, 3.

NETO, A. R. (2008) *Geometria e estética: experiências com o jogo de xadrez*. São Paulo: Editora da UNESP.

Grossman, N., Ostrowsky, I. &Schwarzman, T. (Produtores) &Tyldum, M. (Diretor). (2014). *O jogo da imitação*. [DVD]. Nova Iorque: The WheinsteinCompany.

Santos, J. M. A.; Santos, A. L.; SANTOS, V. B. JR. (2017). Utilidade do laboratório de ensino de matemática no processo de ensino e aprendizagem segundo a visão de professores. *Congresso Internacional de Ensino de Matemática*, Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil, 7.

Vila, A. &Callejo, M. L. (2006). *Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas*.Porto Alegre: Artmed.

Experiencia de modelización matemática con profesores y futuros profesores

María Florencia **Cruz**
Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral
Argentina
ma.florenciacruz@gmail.com
Sara **Scaglia**
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral
Argentina
sbscaglia@gmail.com
Cristina **Esteley**
Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba
Argentina
esteley@famaf.unc.edu.ar

Resumen

En este trabajo se describe una experiencia desarrollada con profesores y futuros profesores de matemática en un taller en el que se emplea la modelización matemática como abordaje pedagógico para generar un entorno de producción de definiciones geométricas.

Los participantes en el taller, luego de desarrollar diversas actividades que los conducen a establecer definiciones para un grupo de poliedros, son invitados a relatar la experiencia transitada y, posteriormente, a interpretar estos relatos en términos de un proceso de modelización matemática.

En esta comunicación se estudian estos relatos y sus respectivas interpretaciones con el objeto de conocer los sentidos atribuidos por los docentes a la experiencia. En general, los docentes y futuros docentes interpretan el proceso de construcción y análisis de definiciones en términos de un proceso de modelización matemática.

Palabras clave: Modelización matemática, Sentido, Definiciones, Poliedros, Profesores en matemática, Futuros profesores.

Introducción

Diversos autores en el ámbito de educación matemática realzan las potencialidades o ventajas didácticas de la puesta en juego de propuestas de enseñanza en las que se emplea la modelización matemática (MM) como abordaje pedagógico (Bassanezi y Biembengut, 1997 y Villarreal, Esteley y Smith, 2018). Así mismo se destaca la necesidad de reflexionar en torno a la preparación de profesores y a la formación continua de profesores en desempeño (Even y Ball, 2009). En particular, Biembengut y Hein (2004) señalan que los profesores muy raramente reciben orientación acerca de cómo utilizar la modelación matemática como método de enseñanza de las matemáticas en la educación formal de grado.

En el contexto internacional se han desarrollado diversas investigaciones en las que se trabaja la MM y la formación inicial y continua de profesores (Maass, y Engeln, 2018; Robutti, Cusi, Clark-Wilson, Jaworski, Chapman, Esteley, Goos, Isoda, y Joubert, 2016). Particularmente en Argentina se pueden mencionar trabajos en la misma línea, como, por ejemplo, Esteley (2014) y Villarreal et al. (2018).

Para contribuir con aportes para la formación docente, en el marco de la Reunión Pampeana de Educación Matemática (REPEM) realizada en 2018 en Argentina se diseña y lleva adelante un taller para docentes y futuros docentes en matemática. El taller tenía como objetivos “construir definiciones de ciertos objetos geométricos tridimensionales a partir de un trabajo relacionado con los procesos de modelización matemática y […] analizar el propio proceso de modelización matemática llevado a cabo durante la construcción de definiciones” (Autores et al, año, p.). En las condiciones del taller no solo se analiza la producción matemática sino que también emerge como conocimiento didáctico el empleo del proceso de MM pensado como herramienta pedagógica para la construcción de definiciones matemáticas (en este caso particular, geométricas).

En la primera parte del taller se trabajó en torno a la construcción de definiciones a partir de la realización de actividades que permitieron involucrar a los asistentes en los subprocesos del proceso de MM, en el sentido de Esteley (2014), mientras que en la segunda se reflexionó acerca del proceso vivido. En esta última, los participantes realizaron relatos escritos que daban cuenta de la experiencia llevada a cabo por ellos y un análisis de dichos relatos a partir del esquema del proceso de MM propuesto por Esteley (2014).

En esta comunicación se presenta un análisis de los relatos realizados en el último encuentro por los profesores y futuros profesores en matemática que participaron del taller. Estos relatos, realizados en torno a la experiencia de construir definiciones de figuras geométricas tridimensionales, se estudian con el objeto de conocer los sentidos que le atribuyeron los docentes y futuros docentes a la experiencia. En particular, se estudia si interpretan las actividades desarrolladas a partir de los subprocesos que intervienen en el proceso de MM y cómo lo expresan.

Aportes teóricos

Bassanezi y Biembengut (1997) proponen una reflexión acerca del potencial del empleo del proceso de modelización matemática para enseñar matemática. Este proceso comprende una serie de procedimientos que comienzan con la elección del tema seguida de una investigación para recoger datos (mediante búsqueda bibliográfica, entrevistas, experimentos, entre otros). Continúa con la elaboración del problema y la selección de las variables esenciales que éste involucra mediante un proceso de abstracción. Se sistematizan los conceptos que se van a utilizar para el modelo matemático y se valida luego el modelo. Si es satisfactorio, se puede utilizar para actuar sobre la realidad. Si el modelo no es adecuado, se reinicia el proceso.

Esteley (2014, p.54) retoma aportes de Bassanezi (2002) para elaborar una esquematización del proceso de MM. Este último es de naturaleza matemática y fuente de inspiración para pensar la modelización matemática como abordaje pedagógico.

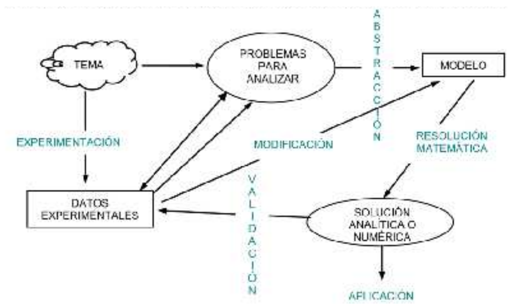


Figura 1. Esquema del proceso de modelización matemática (Esteley, 2014).

En este trabajo interesa retomar este proceso para el estudio de fenómenos intra-matemáticos (Sadovsky, 2005), en particular, la construcción de definiciones de figuras tridimensionales. Esta perspectiva tiene puntos de encuentro con la posición de Freudenthal (1983), que sostiene que las ideas y estructuras matemáticas han sido creadas para organizar fenómenos matemáticos y/o del mundo real, puntualizando, “Por medio de las figuras geométricas, como triángulo, paralelogramo, rombo o cuadrado, uno tiene éxito organizando el mundo de los fenómenos de los contornos” (p.28). En términos similares, se considera que las figuras poliédricas permiten organizar los fenómenos de los objetos tridimensionales que guardan ciertas características (por ejemplo, resultan de la yuxtaposición de polígonos planos respetando determinadas condiciones).

Sanchez Mármol y Pérez Beato (1961) afirman que “definir un concepto representado por una palabra o símbolo, quiere decir, expresar su significado mediante otras palabras o símbolos cuyo valor se conozca” (p.3). Por su parte, Borel (1962) sostiene que una de las características de una definición es que dos personas diferentes, al interpretarla, piensen en el mismo objeto. En este trabajo, se considera que la elaboración de definiciones, y en particular, de definiciones vinculadas con figuras poliédricas, brindan una oportunidad para llevar a cabo los procedimientos involucrados en un proceso de MM de naturaleza intra-matemático: la exploración para obtener datos (identificación de regularidades), la abstracción de características relevantes, la formulación de un modelo (la definición) que dé cuenta del concepto y que caracterice unívocamente un conjunto determinado de objetos, la utilización de ese concepto para hacer referencia a un universo determinado de objetos (en este caso, poliedros cuyas caras son polígonos regulares).

Se adopta la noción de modelo matemático, la propuesta en Biembengut y Hein (2004). “Un modelo matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión” (p.106). En el taller las definiciones emergentes son consideradas un conjunto de relaciones matemáticas que permiten caracterizar el universo de poliedros trabajados.

La elaboración de definiciones interpretada como un proceso de MM brinda la posibilidad de involucrar a los participantes en una experiencia de formación cuyo objeto de enseñanza lo constituye este mismo proceso. Los relatos solicitados, a los profesores y futuros profesores, sobre las actividades llevadas a cabo por ellos en el marco del taller, les permite organizar sus experiencias de interacción en torno a la situación planteada (Da Ponte, Segurado y Olivera, 2003) y dar cuenta de sus interpretaciones sobre el proceso de MM llevado a cabo.

Larrosa (2005) sostiene que las palabras “producen sentido, crean realidad, y, a veces, funcionan como potentes mecanismos de subjetivación” (p. 166). Este autor afirma que las palabras usadas para nombrar lo que se hace, se piensa, se percibe o se siente dan cuenta del sentido otorgado a "lo que somos y a lo que nos pasa" (p. 167). Es así como las palabras utilizadas en los relatos de los docentes y sus posteriores interpretaciones dan indicios de los sentidos atribuidos al proceso de MM transitado durante la experiencia.

Modalidad de trabajo

El taller se organizó en tres encuentros de dos horas cada uno durante tres días consecutivos en el marco de la REPEM. Los participantes trabajaron en cinco grupos de cuatro o cinco integrantes que se mantienen constituidos del mismo modo durante toda la experiencia.

En el primer encuentro se presentan doce figuras poliédricas que se forman con polígonos regulares, ocho representaciones tridimensionales planas de poliedros y cuatro imágenes de la vida real que se pueden asociar con poliedros. Se exhiben también representaciones en materiales manipulativos de todas las figuras tridimensionales. Se solicita a los participantes: "determinar familias de poliedros no dicotómicas con el universo dado de figuras tridimensionales cuyas caras son polígonos regulares y establecer una definición para cada familia que no contenga afirmaciones negativas" (Autores et al, año, p.). Luego de este momento se realiza un debate colectivo en el que cada grupo expone su producción y se discuten aportes de Winicki-Landman y Leikin (2000) respecto a los principios lógicos que se deben cumplir al definir un concepto matemático y a la relación que se presenta entre definiciones, equivalentes[1], consecuentes[2] y en competencia[3].

En el segundo encuentro se trabaja con las figuras poliédricas nuevamente y con libros de texto de nivel secundario, libros de geometría e internet. Se solicita que analicen definiciones que se encuentran en los dispositivos mencionados y estudien la equivalencia entre dichas definiciones y las realizadas en el primer encuentro. Posteriormente se pide "revisar las definiciones establecidas para cada familia. Enunciar una definición que resulte del análisis realizado" (Autores et al, año, p.). Se realiza un debate colectivo en el que cada grupo explicita el trabajo llevado a cabo y se discuten los aportes teóricos de Winicki-Landman y Leikin (2000) y de Borel (1962) en torno a la equivalencia entre definiciones.

En el tercer encuentro se presenta en primera instancia la consigna **a** y una vez resuelta la misma la **b**:

Tabla 1

Consigna presentada en el tercer encuentro, tomada de Cruz et al (2018, p 46.)

a) Escribir un relato acerca de los diferentes momentos transitados para lograr la construcción de las definiciones que caracterizan a cada familia de poliedros.
b) Analizar y comparar el relato con el esquema de modelización de Esteley (2014).

Se entregó a cada asistente un folio que contenía el esquema de la Figura 1 con una breve caracterización de cada subproceso (experimentación, abstracción, resolución, validación, modificación y aplicación) del proceso de modelización mencionado.

---

[1] Dos definición son equivalentes sí y sólo sí el conjunto de objetos sobre el que se discute es el mismo para ambas.
[2] Dos definiciones son consecuentes cuando un conjunto de objetos es subconjunto propio del otro, razón por la cual el conjunto de condiciones que definen a estos conceptos se relacionan por una inclusión propia en sentido opuesto.
[3] Dos definiciones son definiciones en competencia cuando no son consecuentes y los conjuntos de objetos se intersecan pero no son iguales. Hay condiciones o propiedades que comparten y otras que los diferencian.

El solicitar un relato que dé cuenta del proceso vivido se fundamenta en la posibilidad de reflexionar en torno a la experiencia, lo cual puede permitir conocer el sentido atribuido por los profesores y futuros profesores a lo realizado en el marco del taller. Al respecto Villarreal y Esteley (2017) afirman que "la experiencia vivida produce sentido pero, al mismo tiempo, las palabras escogidas para relatarla reconfiguran esa experiencia vivida ofreciendo la posibilidad de formación del sujeto de la experiencia" (p. 26). Cabe destacar que los participantes manifestaron su consentimiento para que sus relatos sean empleados para el análisis de la experiencia.

Una mirada sobre los relatos de los profesores y futuros profesores

En la reflexión realizada en torno a los relatos de los participantes se identifican las producciones como Grupo 1 (G1), Grupo 2 (G2), Grupo (G3), Grupo (G4) y Grupo (G5). Las respuestas de los docentes y futuros docentes sobre los distintos momentos transitados durante los dos primeros encuentros (consigna **a**) versan sobre algunas cuestiones comunes que se describen a continuación.

En primer lugar los relatos de cuatro grupos hacen referencia a la observación y a la búsqueda de regularidades para identificar los rasgos que permitan caracterizar las figuras. Por ejemplo, "*G1: En un primer momento se intentó buscar regularidades", "G2: 1º Momento: Para poder agrupar los poliedros comenzamos a analizar que características compartían* […]*", "G3: 1º Observar los poliedros, 2º caracterizarlos"* y *"G5: Observación de los poliedros. Encontrar caract. en común"*. Estas descripciones son compatibles con los subprocesos de experimentación y abstracción (Esteley, 2014), dado que suponen la obtención de datos experimentales o empíricos que ayudan a la formulación de definiciones y se comienzan a identificar y vincular las variables seleccionadas.

En segundo lugar, en los relatos se menciona el resultado de la exploración anterior, en términos de una breve descripción de la clasificación realizada a partir del uso de vocabulario geométrico. Esto se interpreta como el subproceso de resolución (Esteley, 2014). Por ejemplo el Grupo 3 afirma que clasifican las figuras en "*Poliedros que al menos una de sus caras en un triángulo y poliedros que al menos una de sus caras es un cuadrilátero*". Cabe destacar que esta caracterización se considera como un primer modelo (definición) elaborado por este grupo.

En tercer lugar se destacan las instancias de trabajo en grupos pequeños (de interpretación), así como de socialización durante el trabajo colectivo. Por ejemplo "*G1: En una segunda instancia analizamos las definiciones creadas por cada grupo. Constatamos si algunas de ellas eran equivalentes ó si podían enriquecer nuestra primera construcción de definición* […] *Tuvimos que establecer acuerdos dentro del grupo y repensar la consigna*". Estos relatos son compatibles con el subproceso de validación (Esteley, 2014), en el sentido que el trabajo colectivo contribuyó en la aceptación o modificación del modelo.

En cuarto lugar cabe destacar que en todos los relatos se mencionan consideraciones respecto a la tarea de comparar definiciones para determinar si entraban en alguna de las categorías presentadas (equivalentes, consecuentes o en competencia). Por ejemplo: "*G4: En formato papel recibimos las respuestas de la clase anterior y la analizamos en (buscamos ejemplos) función de los tipos de definición (equivalentes, consecuentes y en competencia)".* Estas descripciones también se asocian con el subproceso de validación.

En quinto lugar los cinco grupos expresan consideraciones respecto a la búsqueda en libros de texto y/o internet de las definiciones. A modo de ejemplo se exponen dos producciones "*G2:*

No encontramos definiciones equivalentes en libros de texto ni en internet" y "*G4: Analizamos libros de texto…Buscamos definiciones*". Estos relatos también se relacionan con el subproceso de validación, dado que se ofrece nuevamente la oportunidad de comparar la definición elaborada con las halladas.

Finalmente en todos los casos se hace referencia a las decisiones asumidas por el grupo pequeño respecto de sostener las definiciones inicialmente elaboradas o bien de modificar como consecuencia de compararlas con las halladas en los libros o con las que presentaron los otros grupos, por ejemplo, "*G3: Buscamos definiciones en libros de texto, tratando de relacionarlas con las nuestras, lo cual nos sirvió para volver a revisarlas, lo cual fue reforzado en la puesta en común*". Estas descripciones se identifican con el subproceso de modificación (Esteley, 2014) que permitió a los participantes decidir sostener o modificar las definiciones elaboradas.

Con respecto al análisis y comparación del relato realizado con el esquema de modelización, en general los profesores y futuros profesores lograron identificar y caracterizar los momentos transitados según los distintos subprocesos propuestos por Esteley (2014). Cabe señalar que el Grupo 2 no menciona estrictamente en su descripción los subprocesos, por lo que al final del análisis se realizan consideraciones en torno a este relato. Los otros cuatro grupos realizaron su análisis en torno a los mismos como se describe a continuación.

Los cuatro grupos reconocen en su trabajo haber transitado por el subproceso de experimentación. Tres de ellos en el primer momento, durante la tarea de observar y manipular los poliedros, "*G3: Observar los cuerpos en fotocopias y manipular los cuerpos concretos*". A su vez, el primer grupo considera que "*la experimentación, la abstracción y la resolución no fueron etapas separadas*". En esta afirmación, los participantes parecen poner en evidencia una fuerte interconexión entre estos subprocesos asumiendo un desarrollo no lineal del trabajo matemático.

Asimismo, los cuatro grupos hacen referencia al subproceso de abstracción. Lo identifican con buscar características (*G3: Cuando comentamos las características que íbamos notando en común para cada familia*), elaborar definiciones (*G4: Hacer la definición*) y enumerar rasgos o propiedades geométricas (*G5: Poliedros regulares y no regulares*).

Los cuatro aluden a la validación. Dos (Grupo 3 y Grupo 4) mencionan los momentos de puesta en común como instancias de validación de su propia producción. El Grupo 1 menciona que validan al "*verificar que los poliedros que componían la primera familia cumplían las características que se explicitaban en la definición*". Se menciona también el trabajo con los libros de texto o internet para validar la producción, (G5: *Buscamos def. en libros, int.*[internet], *etc. Comparamos con las elaboradas en el grupo*) así como el análisis de las relaciones entre definiciones (Grupo 3).

Dos grupos señalan el subproceso de modificación como consecuencia de la comparación de las definiciones con las halladas en libros de texto (G1, G5) y otro de la puesta en común (G4). Por ejemplo, el Grupo 5 describe "*Modificamos, identificamos la def. otorgada por los libros de textos y reformulamos la def. original, respaldo por el libro de texto*". El Grupo 3 no menciona el subproceso modificación.

Los cuatro grupos mencionan el subproceso de aplicación, dos para indicar que no es posible identificarlo en el relato realizado (G1 y G3). En particular el Grupo 3 afirma: "*usar la definición fuera del contexto de la actividad […] No entra en nuestro relato*". Sin embargo este Grupo en la consigna **a** expresa: "*en cada vértice de un prisma de cualquier base, concurren tres* *aristas*" y afirma que se trata de un ejemplo de "*características que a veces pasan desapercibidas*". En este sentido se considera que emerge una propiedad geométrica en el trabajo realizado, lo cual podría concebirse como una aplicación. El Grupo 4 manifiesta duda frente a este subproceso "*¿Lograr y organizar las definiciones para las familias de poliedros*?" y el Grupo 5 menciona el respaldo de la definición elaborada con lo hallado en los libros de texto.

Únicamente en dos relatos se expresan consideraciones respecto al subproceso de resolución. El Grupo 1 hace referencia al mismo al señalar que experimentación, abstracción y resolución se desarrollan interrelacionadas. Por otra parte el Grupo 3 reconoce este subproceso al realizar la escritura de la definición, en sinergia con la interpretación realizada anteriormente por las autoras de este trabajo.

El Grupo 2 en su narración emplea otros términos que se mencionan en el esquema. Explicitan "*a) Tema: nos presentan los poliedros. b) Extracción de características de los poliedros. c) Crear definiciones según las familias. d) Planteamos las definiciones con las características elegidas."* En este sentido se aprecia que logran discriminar que el tema de trabajo es "Poliedros" y las consideraciones realizadas posteriormente parecen asociarse a abstracción y resolución a pesar de que no lo explicitan. Posteriormente afirman "*No pudimos validar ni modificar por ello las definiciones quedaron como estaban*", esta última afirmación puede deberse a que no encuentran en libros de textos e internet definiciones equivalentes a las propias. Finalmente expresan "Se *puede analizar que las definiciones no solo podían agruparse los poliedros con los que trabajamos sino que se extienden a cualquiera*", lo cual parece hacer referencia a la aplicación.

Reflexiones finales

En los relatos que dan cuenta de lo realizado durante las tareas de elaboración y estudio de definiciones (consigna **a**) los participantes del taller incluyen descripciones que permiten vincular la experiencia vivida con los diferentes subprocesos que componen el proceso de MM. Es decir, las reflexiones acerca de la experiencia vivida posibilitaron otorgar sentido a lo realizado en instancias de producción de definiciones geométricas en términos de los diversos componentes de los procesos de MM.

En relación con las interpretaciones de los profesores y futuros profesores del relato a partir del esquema y de la caracterización del proceso de MM planteados por Esteley (2014), se evidencian en todos los casos una cercanía entre lo destacado por los participantes y lo propuesto por la autora, por lo que se logra cumplir con los objetivos del taller. Es de destacar que en los relatos de los sujetos se aprecia el desarrollo no lineal de los subprocesos del proceso de MM, tal como lo plantea Esteley (2014). Además emergen y se discuten posibles modos de validación, como ser, el empleo de libros de textos, los momentos de trabajo colectivo en el aula de matemática, entre otros; también se pone de manifiesto la influencia de la validación en la decisión acerca de la aceptación o modificación del modelo. Llama la atención, no obstante, que un solo grupo asume la elaboración de la definición en términos del subproceso de resolución, es decir, que reconoce en la definición el modelo construido. Este aspecto amerita un análisis más profundo que trasciende este trabajo. Poder avanzar sobre este aspecto podría ofrecer información sobre el sentido de las definiciones en el marco de un trabajo matemático.

Se considera que la modelización matemática como estrategia pedagógica resultó una estrategia adecuada para reflexionar en torno a la elaboración de definiciones en matemática.

Asimismo, se han encontrado evidencias de que los sentidos atribuidos por los profesores y futuros profesores a la experiencia son compatibles con un proceso de MM.

Bibliografía y Referencias

Publishing Company.

Larrosa, J. (2005). Entre las lenguas. Lenguaje y educación después de Babel. Barcelona: Laertes, S.A.

Maass, K & Engeln, K. (2018). Impact of professional development involving modelling on teachers and their teaching. *ZDM*, 50, 273–285.

Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., Goos, M., Isoda, M., & Joubert, M. (2016). ICME international survey on teachers working and learning through collaboration. ZDM Mathematics Education, 48(5), 651–690.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy*. Buenos Aires: libros del Zorzal.

Sanchez Mármol & Pérez BeatoBassanezi, R.C. & Biembengut, M. (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación-un nuevo método de enseñanza. *Números*, 32, 13-25.

Biembengut, M. & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática,* 16(2), 05-125.

Borel, E. (1962). La definición en Matemáticas. En F. Le Lionnais (ed.): *Las Grandes Corrientes del Pensamiento Matemático* (pp.: 25-35). Buenos Aires: Eudeba.

Autores et al. (año). Título. N. Di Franco (Ed.), *VII Reunión Pampeana de Educación Matemática* (pp. 42- 47). Santa Rosa: Universidad Nacional de la Pampa.

Da Ponte, J.P., Segurado, M.I. & Oliveira, H. (2003). A collaborative project using narratives: What Happens when Pupils Work on Mathematical Investigations? En A. Perter-Koop, V. Santos-Wagner, C. Breen, & A. Begg (Eds.), *Collaboration in teacher education: Examples from the context of mathematics education* (pp. 85-97). Dordrecht: Kluwer.

Esteley, C. (2014). *Desarrollo profesional en escenarios de modelización matemática: Voces y Sentidos*. Córdoba: Filosofía y Humanidades/UNC.

Even R. & Ball D. (Ed.). (2009) *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study.* New York: Springer.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel (1961*). Geometría métrica, proyectiva y sistemas de representación*. Madrid: SAETA.

Villarreal, M. & Esteley, C. (2017). Futuros profesores de matemática: narrativas de sus primeras prácticas en escenarios de modelización. En D. Fregona, S.Smith, M. Villarreal y F. Viola (Eds.), *Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios. Aportes para la Educación Matemática,* (pp. 5-50). Córdoba: Universidad de Córdoba.

Villarreal, M., Esteley, C. & Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM*, 50, 327–341.

Winicki–Landman, G & Leikin, R. (2000). On Equivalent and Non-Equivalent Definitions. Part 1. For the Learning of Mathematics, 20 (1), 17-21.

Modelación con Tracker para el aprendizaje de movimientos en el plano

Guillermina **Ávila** García
CECyT 11, Instituto Politécnico Nacional
México
gavilag@ipn.mx
Liliana **Suárez** Téllez
CGFIE, Instituto Politécnico Nacional
México
lsuarez@ipn.mx

Resumen

El estudio presenta un análisis reflexivo sobre la enseñanza de la Física I, en el Centro de Estudios Científicos y Tecnológico No. 11 (CECyT No.11) “Wilfrido Massieu” del Instituto Politécnico Nacional (IPN), incluyendo los componentes de la Reforma Integral de Educación Media Superior y el Nuevo Modelo Educativo IPN, documentos que constituyen el marco educativo e institucional, para el trabajo se consideró la adecuación del alineamiento constructivo y la integración de TIC para lograr un aprendizaje profundo en los alumnos en Física I; el desarrollo de esta experiencia; considera la exploración del problema y posibles soluciones, en este caso las actividades de aprendizaje, objetivo curricular y las tareas de evaluación, se explora y realizan experimentos, así como el análisis de los movimientos con el software Tracker, el avance de los aprendizajes alcanzados de acuerdo con los niveles de comprensión, finalmente se considera realizar posibles modificaciones que permitan la mejora.

Palabras clave: Modelación, Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), Alineamiento constructivo, Tracker, Aprendizaje profundo.

La enseñanza de la Física en Nivel Medio Superior

La Física hace énfasis en la formación y desarrollo de habilidades de razonamiento crítico y pensamiento científico, búsqueda de información, de trabajo en grupo y de resolución de problemas, teóricos y experimentales.

Su enfoque teórico-experimental permite abordar situaciones problemáticas que se le presentan al alumno, en las cuales establece planteamientos, realiza transformaciones elementales de tal manera que reflexiona sobre los fenómenos naturales facilitando los procedimientos empíricos, deductivos e inductivos tanto para la aplicación de las leyes y principios de la Física, así como la solución de problemas relacionados con las temáticas.

En el aprendizaje de las ciencias es necesario profundizar en sus estructuras cognitivas para enriquecer y fomentar el aprendizaje profundo en los alumnos, a partir de la toma de conciencia y reconocimiento de las relaciones entre los modelos interpretativos que les proporciona la ciencia y sus propias concepciones alternativas.

En este trabajo, las actividades de aprendizaje son conjuntadas en la enseñanza y la integración de las TIC (en este caso el software Tracker).

La implementación del alineamiento constructivo, consistió en la adecuación del plan y programa de estudios de la unidad de aprendizaje: Física I, para después elaborar las actividades de enseñanza aprendizaje (AEA), con la integración del instrumento de mediación Tracker, software que permite el estudio de variables físicas, gráficos y tabulaciones de una manera interactiva; para observar los niveles de comprensión alcanzados por los alumnos, elaboración de instrumentos mediante los cuales se registrarán mediciones de la sesión expositiva y experimental, y de esta manera obtener resultados de evaluación y determinación del aprendizaje obtenido por los alumnos.

El enfoque profundo que menciona Biggs (2010), el que integra una transformación de la buena enseñanza adecuándola a conseguir que la mayoría de los alumnos utilicen los procesos de comprensión del nivel cognitivo superior.

Biggs (2010) argumenta

> Un buen sistema de enseñanza alinea el método y la evaluación de la enseñanza con las actividades de aprendizaje establecidas en los objetivos, de manera que todos los aspectos de este sistema están de acuerdo en apoyar el adecuado aprendizaje del estudiante. Este sistema se denomina alineamiento constructivo, basado en los dos principios del constructivismo: aprendizaje y alineamiento en la enseñanza. (p. 29)

Considerando lo anterior, se tomó en cuenta una de las problemáticas a la que nos enfrentamos en el CECyT 11, en la enseñanza de la Física que es la tendencia de los alumnos hacia la memorización de las fórmulas para resolver un problema, que apunta a la parte teórica, también otra situación es el descuido de la parte práctica, la que es fundamental, para que el alumno mediante procesos experimentales logré comprender en qué momento aplicar una ecuación y entienda el fenómeno que ocurre.

Antes de iniciar con la implementación del cambio, se dará una breve explicación de la fundamentación propia de la unidad de aprendizaje, uno de los temas de mecánica clásica, tema central que se adecua al alineamiento constructivo. El plan y programa de estudios proponiendo una actividad de inicio para identificar todos los conocimientos previos que tiene el alumno y cómo lo relaciona con otras unidades de aprendizaje (Biggs, 2010).

Una vez que el alumno soluciona el problema en papel, se propone que realice una actividad que debe inventar como una forma de aprendizaje en la Física y posteriormente ese experimento se lleva a cabo en el patio escolar para después analizarlo con la herramienta Tracker para el análisis de los movimientos en el plano.

La actividad que se propuso a los alumnos una situación inicial sobre movimiento, mediante la lectura e identificación de las variables del problema, para después, de manera gráfica representar la solución.

La tarea inicial consiste en resolver un problema relacionado con el movimiento que realiza un personaje al que se nombró Ronning, donde los alumnos señalaron mediante el trazo de una gráfica, las trayectorias que recorrió dicho personaje, además de expresar el tipo de movimiento que realizó de acuerdo a los temas vistos en la clase, correspondiente a cinemática.

Se aplicó el aprendizaje activo con el siguiente enunciado de propuesta de problema "Ronning", en adelante nos referiremos a "problema de Ronning".

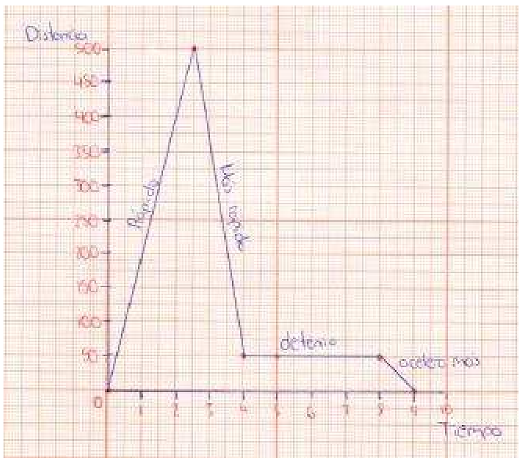


Figura 1. Solución gráfica al problema de "Ronning"
Elaboración propia

En la Figura 1 se encuentra el tipo de solución al problema presentado en forma textual, los estudiantes tienen que interactuar con la situación descrita, tomar decisiones sobre las variables, los ejes y los trazos que configurar la gráfica solicitada. En el texto de la actividad se les pide descargar el Tracker, simular el movimiento descrito en el problema y tomar un video para analizar la situación por medio de las gráficas y el análisis de los datos que se obtienen del Tracker. En el siguiente apartado se describe la tarea que hacen los estudiantes al reproducir el proceso de modelación con Tracker a partir de una situación que ellos inventan.

Construcción del conocimiento: actividad de los alumnos

El avance de los alumnos se identifica por medio de las tareas del problema inventado por ellos mismos, donde describen la situación para darle una solución a través de los conocimientos previos y de la integración de conceptos de movimiento que incluye también la experiencia de solución a la actividad inicial y en esa medida el alumno es más reflexivo y sofisticado en su aprendizaje.

Actividad del equipo 3 (conformado por 4 alumnos y 1 alumna). Problema de tiro parabólico

Se lanza una pelota de tenis de una altura de dos metros, la cual hace una trayectoria parabólica. Verifique la parte experimental usando el programa de Tracker para conocer la trayectoria y tiempos. (Como puede observarse los alumnos cambiaron un poco la redacción, porque su fin era verificar qué sucedía con Tracker).

Figura 2. Trayectoria del lanzamiento de la pelota de tenis, analizado con Tracker
Fuente: Elaboración propia

Como puede observarse en la Figura 2, hay un rebote de la pelota tenis que es lo que podemos observar en la parte final de la gráfica y efectivamente, se comprobó con cronómetro en mano que, tardo 4 segundos en hacer la trayectoria. Mientras que Tracker hace una medición de tiempo más precisa. En la tabla 1, se observa las conclusiones de comparación que el equipo de trabajo realiza después del análisis realizado.

Tabla 1. Comparación de la solución en Tracker y papel de la tarea inicial, equipo 3.

Solución del problema en papel	Solución del problema en Tracker
La tarea inicial nos sirve como referente para saber la trayectoria del móvil. El software Tracker es un excelente programa que permite observar los detalles mínimos del experimento.	*Consideramos que el análisis en Tracker es muy preciso, nos facilitó mucho utilizar el software, porque permite observar los mínimos detalles de movimiento que realiza el objeto en cuestión.*

Fuente: Elaboración propia

Se observa que los alumnos, no sólo se quedan con el análisis del movimiento uniforme acelerado, sino que además realizan el análisis de otros movimientos en el plano, constatando lo que se ve en clase de manera teórica. Las evidencias antes mostradas son concluyentes para indicar que los alumnos ya no se encuentran en un nivel de aprendizaje superficial, han avanzado a niveles cognitivos superiores, en las conclusiones muestran argumentos fundamentados en la teoría con el conocimiento alcanzado.

Experimento de “Cohete Hidráulico

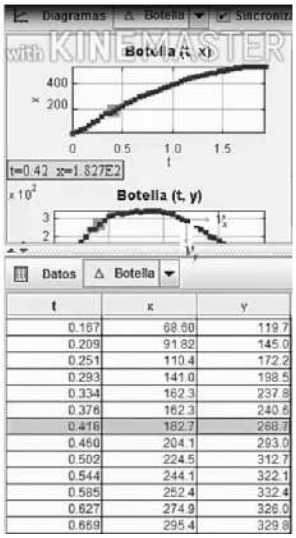
Posteriormente a los problemas inventados los alumnos realizaron el experimento de “Cohete Hidráulico”, el cual consiste en realizar un cohete hidráulico y grabar la trayectoria del cohete para analizarlo mediante el software de Tracker.

En los experimentos se puede observar los siguientes tipos de movimientos: caída libre, tiro vertical y tiro horizontal, tiro parabólico, este último como la combinación de los anteriores.

Se muestran los experimentos que realizamos para el comparativo.

Figura 3. Primer lanzamiento del cohete hidráulico
Botella a ¼ litro de capacidad de agua
Fuente: Elaboración propia

Análisis



t	x	y
0.167	68.60	119.7
0.209	91.82	145.0
0.251	110.4	172.2
0.293	141.0	198.5
0.334	162.3	237.8
0.376	162.3	240.6
0.416	182.7	268.7
0.460	204.1	293.0
0.502	224.5	312.7
0.544	244.1	322.1
0.585	252.4	332.4
0.627	274.9	326.0
0.669	295.4	329.8

Figura 4. Análisis de la trayectoria
Fuente: Elaboración propia

El cohete siguió una trayectoria parabólica que sale del origen con cierta velocidad. El vector velocidad tiene sus componentes tanto en x como en y.

Y los datos que nos arroja en el punto final es su llegada al suelo. El tiempo de vuelo (subida y bajada es de 0.42 s).

Las componentes de la velocidad del cohete son:

Evaluación por medio de items

Finalmente, se realizó una evaluación por ítems para verificar el avance del aprendizaje de los alumnos. A manera de ejemplo tomamos uno de los ítems trabajados.

ÍTEM 2

Observe la figura, la cual permitirá que analice y conteste cada uno de las preguntas propuestas en los incisos.

Figura 5. Velocidad y dirección de un objeto

Fuente: Hewitt, P. G., & Lira, J. A. F. (2004). Física conceptual (Vol. 6). Addison Wesley.

a) ¿En qué sección o secciones de la figura se muestra un cambio de velocidad?

b) ¿En qué sección o secciones de la figura se muestra un cambio de dirección?
c) Observe la sección 1 de la figura y establezca, ¿qué es aceleración?
d) En la última sección de la figura, ¿la velocidad del cuerpo 1 es igual que la velocidad del cuerpo 2?

En la figura 6, se muestra la gráfica de los resultados obtenidos en el ítem 2, de acuerdo con los niveles de la taxonomía SOLO propuestos para la evaluación de tema.

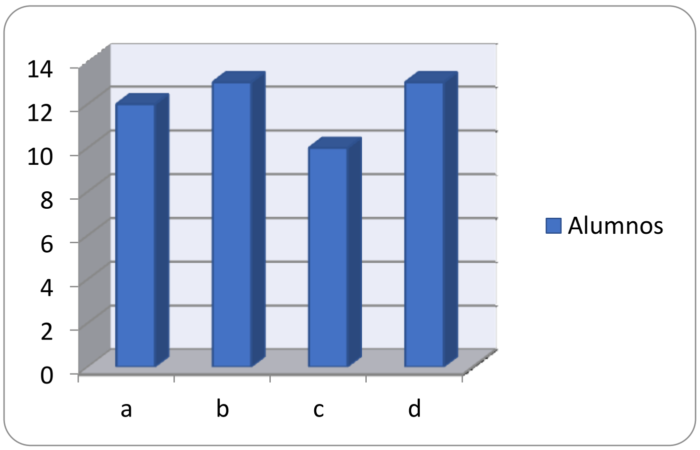


Figura 6. Gráfica de resultados obtenidos del ítem 2

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con los resultados del ítem aplicado, el 80% que corresponde a 12 alumnos contestan de manera correcta el inciso ⓐ, el cual se encuentra en el nivel uniestructural, relacionando todos los conceptos de manera inmediata, este nivel está caracterizado porque los alumnos por simple inspección de la imagen, observan el cambio de velocidad en la sección I y II.

En el caso de la respuesta al inciso ⓑ, solo 86.6% que corresponde a 13 alumnos responden de manera correcta, considerando que en la sección II se observa el cambio de dirección.

En el inciso ⓒ, el 66.66% que corresponde a 10 alumnos, responden de manera correcta, considerando que la aceleración es la variación de la velocidad de un móvil en cada unidad de tiempo, mientras que los otros 5 alumnos sólo escriben que es un cambio de velocidad, sin tomar en cuenta el tiempo.

En el inciso ⓓ, el 86.6% que corresponde a 13 alumnos, responden de manera correcta, analizando y deduciendo que el cuerpo 1 tiene mayor velocidad que el cuerpo 2. Mientras que otros alumnos responden que el cuerpo 2 tiene mayor velocidad que el cuerpo 1, esto es incorrecto.

Conclusiones

En este trabajo se integraron problemas y situaciones, donde los alumnos realizaron un análisis profundo y señalaron en dichas situaciones qué ecuaciones debían ocupar, sin llegar a la memorización, algunos alumnos consideran de mayor importancia el sólo memorizar las ecuaciones para utilizarlas para la resolución de problemas, por lo cual, un ajuste de manera más detallada que se trabajará en un segundo momento, es permitir que el alumno entienda los problemas que analiza, de manera más profunda, permitirán recordar las ecuaciones de movimiento, sin la necesidad de memorizarlas.

Una vez que se ha experimentado el cambio y analizar los ajustes finos que se requieren, se deberá aplicar nuevamente, siempre tomando en cuenta la reflexión inicial, volviendo al primer paso, aunque ya con el conocimiento añadido de lo ocurrido.

Se logró:

- ✓ Destacaron las destrezas de los alumnos en el uso de Tracker.
- ✓ El trabajo colaborativo, al compartir las experiencias del uso de la herramienta tecnológica entre los alumnos.
- ✓ Fomento de la actitud crítica y reflexiva en el alumno, a través del uso de herramientas (en este caso Tracker).
- ✓ Investigación autónoma por parte del alumno para el aprendizaje y mejora continua de la herramienta tecnológica (uso del Tracker).
- ✓ La mayoría de los alumnos cuenta con los recursos tecnológicos que permitieron que desarrollaran su trabajo en Tracker.

Referencias y bibliografía

Arceo, F. D. B., Rojas, G. H., y González, E. L. G. (2010).Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista. México: McGraw-hill

Biggs, J. (2010). Calidad del aprendizaje universitario. España: Narcea ediciones.

Gil, S. (2014). Experimentos de Física usando las TIC y elementos de bajo costo. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Alfaomega Grupo Editor Argentino.

Hewitt, P. G., y Lira, J. A. F. (2004). Física conceptual (Vol. 6). México: Pearson

Instituto Politécnico Nacional (2004) Nuevo Modelo Educativo del IPN. México: Instituto Politécnico Nacional.

Red Onmidia LTDA. (2015). Diccionario ABC. Sao Paulo, Brasil. Recuperado el 10 de noviembre de 2016, de http://www.definicionabc.com/medio-ambiente/lluvia.php

Restrepo, B. (2004). La investigación-acción educativa y la construcción de saber pedagógico. Educación y educadores, núm. 7. Colombia: Red de Revistas Científicas.

Sears, F., Zemansky, M., Young, H. D., y Freedman, R. (1999). Física universitaria vol. 1. México: Addison Weswy Longman.

Suárez, L; Cordero, F; Daowz, P; Ortega, P; Ramírez, A; Torres, J L; (2005). De los paquetes didácticos hacia un repositorio de objetos de aprendizaje: un reto educativo en matemáticas. Uso de las gráficas, un ejemplo. RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 8() 307-333. Recuperado el 10 de octubre de 2018, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=331427204016

Experimentación discursiva y figuración

Leonora **Díaz** Moreno
Universidad de Valparaíso
Chile
leonoradíazmoreno@gmail.com
Maximiliano **Núñez**
Liceo Eduardo de la Barra
Chile
Maximilianonunez.30@gmail.com

Resumen

Se ilustran potencialidades de lo narrativo para lograr la inmersión estudiantil en una situación experimentalcomo parte de prácticas de modelación en el estudio de un fenómeno, en aulas de matemáticas de educación secundaria. La modelación se orienta a que los estudiantes constituyan dipolos modélicos articulando dos entidades: desde la operatividad de una de estas intervienen en la otra. Articulan una tabla de datos o una figura o una expresión algebraica con elfenómeno de elasticidad del resorte por ejemplo. Se analizan elaboraciones estudiantiles y se reportan evidencias de su inmersión en la situación experimental que se narra.En un marco de investigación-acción se suscribe la investigación de diseño.
Palabras clave: modelación, narrativa, figuración.

Introducción

En nuestro país, como en otros de la región, se reclama por un cambio en las metodologías de enseñanza en un marco de reformas estructurales, para ofrecer a los jóvenes la posibilidad de desarrollar las habilidades del siglo XXI, señalando como una de ellas a la modelación (Ministerio de Educación de Chile, 2012) junto con abordar y resolver situaciones problemáticas concurrentes con la capacidad para involucrarse en procesos en los que participan dos o más personas (habilidad medida por PISA 2015).Intentando explicar este tipo de resultados desde un punto de vista de política educacional, se afirma que el país no cuenta con una infraestructura adecuada para el desarrollo de las habilidades de modelar en el marco del trabajo en equipo, más allá de la intencionalidad que ponga el profesorado en ello.

La perspectiva de modelación y experimentación que se suscribe se orienta a quitar fuerza a ingentes requerimientos de infraestructura como son los laboratorios de experimentación. Las evidencias muestran que es posible ofrecer a los estudiantes oportunidades de vivenciar prácticas de modelación con experimentación, desde la colaboración y también en contextos de vulnerabilidad. Más específicamente se presentan evidencias de inmersión en experimentación discursiva provenientes de producciones estudiantiles, cuando los estudiantes vivencian un diseño de enseñanza con base en modelación. Tal diseño intenciona el desplazamiento del trabajo estudiantil desde uno individual y competitivo a uno colaborativo y en equipos, configurándose habilidades concurrentes (Contreras, C., 2014). El diseño aborda la modelación de un fenómeno a partir de la experimentación discursiva, la que se configura por una narración literal que describe el suceso experimental y una tabla con datos provenientes del experimento.

Marco referencial

Interesa estudiar la modelación como parte de los procesos de aprendizajes matemáticos. El acto de modelar se entiende como una práctica recurrente de diversas comunidades, que articula dos entidades con la intención de intervenir en una, lo modelado, a partir de la otra, el modelo. Desde esta perspectiva, no existen modelos y sus matemáticas, independientes de quien modela y de la comunidad que le da cabida. Se suscribe una mirada socioepistemológica de modelación (Arrieta y Díaz, 2015). En la perspectiva de estos autores interesa que los estudiantes establezcan dipolos modélicos mediante la articulación de dos entidades desde la operatividad de una de ellas, para intervenir en la otra. Por ejemplo, articular una tabla de datos o una figura o una expresión algebraica con el fenómeno de elasticidad del resorte o la caída de los graves. Tal articulación constituye, para la vivencia del estudiante que modela, una nueva entidad, el dipolo modélico (op. cit. p. 35).

La inmersión estudiantil en experimentación discursiva se estudia con base en producciones de los estudiantes, las que tienen un carácter narrativo y provienen de vivenciar un diseño de enseñanza con base en modelación.

Se suscribe para los conocimientos matemáticos lo que plantea Candela (1999) cuando concibe al conocimiento científico como una construcción social sujeta a procesos discursivos específicos, que incluyen tanto las versiones sobre ciertos temas como la organización del discurso, las maneras de hablar, de argumentar, de analizar, de observar, de construir con palabras (y figuras) procesos y resultados de la experiencia, de validar un conocimiento y de establecer una verdad. Y a que lo matemático se inventa como herramienta para organizar fenómenos del mundo físico, social y mental (Freudenthal, 1991) para atender aprendizajes de matemáticas creadas para gestionar el cambio en tanto se predicen y controlan estados futuros (Cantoral, 2004).

Entre los trabajos sobre la naturaleza del conocimiento narrativo más sugerentes de las últimas décadas, se cuentan los estudios, desde una mirada filosófica, de Johnson (1987) sobre el lenguaje y el conocimiento corporalmente encarnado; el trabajo de Lakoff y Johnson (1980) sobre la metáfora y el texto “Wheremathematics comes from” de Núñez y Lakoff (2001) sobre la naturaleza encarnada del conocimiento matemático. Estos trabajos, entre otros, ilustran un contexto signado por importantes desarrollos en el campo del lenguaje y las neurociencias.

Para Connelly y Clandinin (1995) somos organismos contadores de historias, los relatos nos descubren que la experiencia misma tiene un referente que está hecho de relatos. KieranEgan (1998) y James Wertsh (1991) difunden la importancia de lo narrativo en pedagogía y didáctica, en el mundo de habla hispana. Egan insiste en revalorizar el papel de los relatos en educación. Comparte con Bruner (1988) que la narración posibilita captar y pensar el mundo y la propia experiencia, siendo un medio eficaz que ayuda a recordar y que a la vez proporciona un ambiente cómodo y acogedor para la fantasía y la imaginación. Para Wertsch se trata de una herramienta central para comprender la forma en que los estudiantes se representan un número muy importante de contenidos escolares, sus epistemes (Díaz, 2005).

Una narración nos trae a la mano un "evento especial" en el devenir de los procesos de entendimiento del estudiantado. Lo narrado no se reduce a las expresiones literales puesto que una figura, al decir de Carrasco, Díaz y Buendía (2014) también constituye una narración, la que en el caso de este estudio, apoya a la narración literal para configurar el experimento narrado. En efecto, se identifican en ella propósitos comunicativos que se expresan a través de una estructura argumental, unas herramientas que concurren a configurarla y metáforas de base que entran en juego.

Abordamos los análisis de las producciones estudiantiles recogidas en la investigación, incorporando estos elementos a una sensibilidad teórica con soporteen el programa del Pensamiento y Lenguaje Variacional (Cantoral, 2004).

Metodología

Este estudio se desarrolla bajo el paradigma metodológico de investigación de diseño y experimentación, el que se inscribe en un marco de investigación-acción (Molina, 2006). Se experimenta con base en un diseño de modelación validado internamente (Arrieta, 2003).

En el ámbito de la educación matemática la modelación se trabaja desde distintas perspectivas. En la visión socioepistemológica de Arrieta y Díaz (2015) no hay modelación sin interacción con el fenómeno que se intenta modelar, por lo que la primera fase de la modelación es la experimentación en sentido amplio. Cada modalidad de la experimentación, sea esta presencial, discursiva o virtual, trae consigo características propias que imprimen su huella en la forma de modelar.En la experimentación discursiva los estudiantes se enfrentan a una narración constituida por un relato literal, una figura y una tabla de datos.

En las primeras aplicaciones del diseño se incluía la figura. En un aula inclusiva que incorpora de modo intencional estudiantes tanto con dificultades específicas de aprendizaje como con necesidades educativas de carácter permanente, uno de los equipos comunicó con figuras sus desarrollos, interviniendo cada vez la figura inicial del resorte. Esta situación ilustra el poder comunicativo de la figuración (Carrasco, Díaz, Buendía, 2014).

Así, para favorecer la inmersión de cada estudiante en la experimentación discursiva, se les solicita que elaboren una figura que exprese la situación experimental, la que se les comunica mediante una narración literal y una tabla de datos obtenidos de la experimentación.Se refuerza la inmersión de los estudiantes en esta modelación discursiva, solicitándoles que describan en sus propias palabras el experimento y que reconozcan en la tabla, valores tomados de la situación.Se espera que los estudiantes reconozcan a la tabla como una herramienta que registra datos que varían juntos o que covarían. Cierra aquí la primera fase del diseño, esto es, la modelación discursiva.

Se reportan desarrollos de las tres actividades correspondientes a la experimentación discursiva: 1. Dibujar o hacer una figura de la situación narrada; 2. Describir con sus palabras el experimento; y, 3. Informar la covariación correspondiente con un dato numérico que registra la tabla.

El estudio consideró seis grupos de cuatro estudiantes, cuatro grupos de tres estudiantes y cuatro grupos de dos estudiantes, provenientes de dos establecimientos de educación secundaria de la región de Valparaíso, Chile.

Resultados y análisis

Analizamos a continuación evidencias de inmersión de estudiantes, provenientes de la experimentación con la situación experimental de la elasticidad de un resorte

Caso 1.

La figuración recupera la situación experimental de modo exhaustivo desde la narrativa literal y la tabla. Su estructura de cómic explicita un momento inicial, uno intermedio y el final de la experiencia, evidenciando su transcurrir en un tiempo. La figura inicial muestra un soporte que sustenta al resorte, del que cuelga un portapesas vacío. A éste se fija una aguja de arrastre que indica un punto en la primera parte de una regla graduada adyacente. Los anillos del resorte están comprimidos. Una flecha guía la visión a la figura siguiente, la que deja implícito al soporte. La escena final muestra los anillos del resorte difuminado distendidos, seis pesas en el portapesas y debajo de éste en paréntesis, la cantidad de 120 gramos, una flecha ennegrecida indica hacia la posición de 225 mm., en línea y a la derecha de la regla graduada. Una escena intermedia se comunica por medio de una flecha tenue para la aguja de arrastre unida a un globo. En este se lee la cantidad de 60 gramos, evocando al portapesas con tres pesas. La aguja indica una posición en la regla graduada que, además, en línea con ella y a su derecha, registra la cantidad correspondiente de 135 mm.

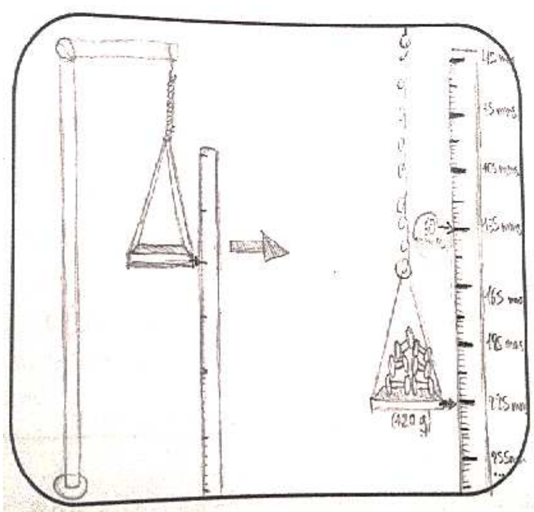


FIGURA 1. Elasticidad del Resorte Equipo A

Herramientas. Resorte comprimido y portapesas vacío que supera en dimensiones al resorte. Resorte distendido difuminado y con detalle portapesas con seis pesas; dos tipos de flechas, tres para indicar la posición del portapesas y la cuarta para dirigir la vista a las dos escenas que siguen, unas más ennegrecidas que otras, para señalar el paso del tiempo entre las escenas. Dos reglas graduadas, la segunda añade las elongaciones de la tabla. Un globo que informa una segunda escena: la elongación correspondiente a tres pesas.

Argumentos. Se estructura la figuración con dos figuras y tres escenas, mostrando el dinamismo de la situación experimental (fenómeno y numerización) logrando una descripción figural completa del experimento.

Metáforas de base. Dos figuras, una inicial en vista general y la segunda en zoom, con tres escenas y foco en el desplazamiento del portapesas y los valores que indica la flechita, según se agregan o quitan pesas.

Caso 2.

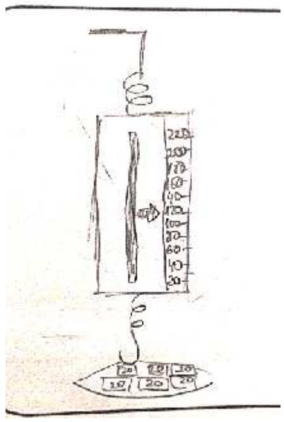


FIGURA 2. Elasticidad del Resorte. Equipo B

Herramientas. Un portapesas en la continuidad imaginada de la figura. La figura se asemeja a una antigua pesa de resortes que fuera de uso frecuente en ferias de antaño. Un rectángulo vertical central porta una flechita móvil ennegrecida que señala en dirección a una regla graduada con cantidades que crecen de 20 en 20 desde la base hacia arriba.
Argumentos. Se estructura una figura rectangular en el centro. Sobre y bajo ella se observan segmentos del resorte, sindicándolo como esencial para determinar pesos en el rango de 20 a 220 grs. La flechita subiría conforme se le añaden pesas, a contrapelo de la elasticidad del resorte. Algún engranaje interno estaría revirtiendo el movimiento de deslizamiento de la flechita.
Metáforas de base. El artefacto mecánico como foco de la figura. Este invisibiliza al fenómeno de elasticidad del resorte que se pretende modelar.

Desde un extremo de un soporte cuelga un resorte que sostiene un portapesas con seis pesas. Se completa la figura anteponiendo a la parte central del resorte una barra vertical con una flecha en su centro que señala 120 gramos en una regla graduada con pesos desde o a 220 gramos, plasmando el momento en que la balanza tiene seis pesas. El dibujo opaca la relación de esos pesos con elongaciones correspondientes en el resorte, las que, presentes en la tabla, omite en la figura.

Caso 3.

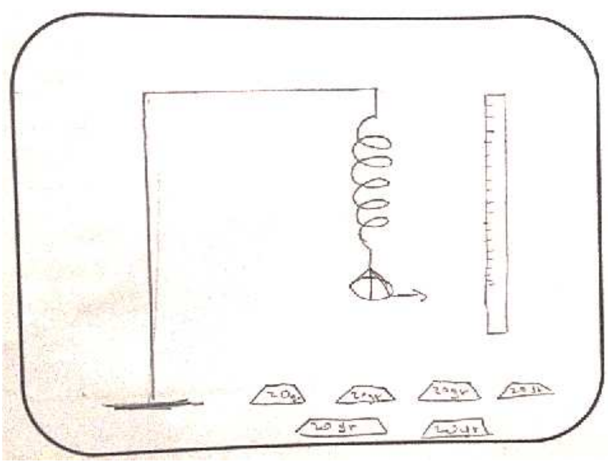


FIGURA 3. Elasticidad del Resorte. Equipo C

Herramientas. Se figuran cosas que enuncia la narración literal: soporte universal del que cuelgan un resorte y de este un portapesas, Flechita para indicar cantidades de pesos del portapesas y una regla graduada. No atienden a las acciones que se narran y que constituyen a esas cosas en herramientas de la experimentación: obtención de datos y tabla en la que se registran.
Argumentos. El equipo recupera una situación previa a la experimentación, informando insumos de esta.

Metáforas de base. Una disposición de objetos como evocación de un momento potencial de experimentación.

Se dibuja un resorte sujeto a un soporte universal, un portapesas colgando del resorte conectado a su vez con una flechita que indica a una regla graduada. La figura muestra seis pesas de 20 gramos, las más cercanas de mayor tamaño y las que se alejan del observador más pequeñas.

En la segunda actividad, los estudiantes que hicieron la Fig. 1, describen la situación en sus palabras,

> Como se puede observar en el dibujo al colocar pesas en el portapesas éste va bajando hasta alcanzar 225 mms (6 pesas); y si vamos quitando pesas el portapesas

> sube 30 mms por cada pesa que se quite y esto es gracias a la elongación que adquiere por las pesas y la contracción al quitarlas (las pesas).

La textualidad da cuenta desu inmersión en unaacción experimental en 56 palabras, sintetizando articuladamente las 67 palabras y la tabla de la experimentación narrada original. Relacionan a cada ubicación con un número de pesas, expresando los valores con sus unidades de medida, en tanto se trata de cantidades de magnitudes. Dan forma a una narrativa literal que interpreta el fenómeno: unas propiedades físicas de elongación y contracción que no adjudican a alguna entidad del arreglo experimental y que se manifiestan de un modo reversible según se ponen o quitan pesas del portapesas. Un resorte evanescente en el dibujo y ausente en su literalidad, concurre con un deslizamiento cognitivo que acaba por constituir a la cantidad de pesas en factor causal de subidas y bajadas del portapesas. Su “ley física” sería algo como “el portapesas va bajando según se van poniendo pesas y se contrae al quitarlas. El portapesas sube 30 mm por cada pesa que se quite”.

Sigue la descripción de quienes hicieron la figura 2,

> Este es un objeto que permite medir el peso en gramos de cualquier cosa que le pongan encima. Usted pone un objeto en el portapesas, el peso del objeto hace que el resorte que está conectado con el indicador se estire, mostrando así el peso.

El grupo se desplaza de la situación experimental propuesta, focalizando en el instrumento de medida de pesos que subyace al arreglo experimental. Su “ley física”podría expresar que “el objeto en el portapesas estira al resorte y el indicador conectado a este resorte, muestra una cantidad de peso en una regla graduada”. Los estudiantes significan con su ley, una covariación “cualitativa” de peso y estiramiento del resorte.

La descripción asociada con la figura 3 señala de modo lacónico “Vamos a decir que la ubicación del portapesa depende del peso”. Sintetizan la situación experimental con una dependencia de la ubicación del portapesas respecto de cada peso. El resorte jugaría un rol de fondo o de contexto en su interpretación de la situación experimental.

Conforme al propósito de la tercera actividad, a saber, que los estudiantes articulen la narración literal con la tabla de datos, un grupo responde por la posición de la flechita cuando el portapesas tiene 60 grs.: “Estaría en los 135 mms de la regla, ya que lo dice la tabla”. Aluden tanto a su figuración de la situación como a la tabla de datos, articulando nuevamente narración literal y tabla de datos. Otro grupo interpreta la narración literal articulada con la tabla,dando forma en su respuesta a su ley de covariación “cualitativa” de peso y ubicación de la flechita (estiramiento del resorte),

> Quedaría en 135 mms, cuando el portapesas está vacío y se le coloca peso, este se empieza a estirar y así se puede determinar el peso del objeto y la ubicación de la flechita.

El tercer grupo, alusar la frase “Su ubicación será de 135 mms” muestra la articulación literal-tabular. Explicita su consulta a la tabla y añade que verifican la información, aunque sin detallar como lo habrían hecho, “nos dirigimos a la tabla “verificamos que la información estaba correcta”.

Conclusiones

El análisis de los desarrollos estudiantiles pone en evidencia las potencialidades de la experimentación discursiva: las actividades y su secuencia conducen a que los estudiantes vivencien un ambiente experimental con altos grados de inmersión, verosimilitud e interacción con el fenómeno y su numerización. Desde la perspectiva de Candela (1999) los estudiantes han desarrollado una actividad científica que les abrió a la elaboración de unos procesos discursivos específicos, que incluyeron sus interpretaciones sobre ciertas situaciones, sus maneras de hablar, de argumentar, de analizar, de observar, de construir con palabras (y figuras) procesos en una primera fase de inmersión en experimentos narrados.

Así la modelación discursiva se constituye en una alternativa para aulas de matemáticas, que suelen carecer de la implementación propia a un laboratorio para realizar experimentos empíricos. En el marco de actividades de modelación solicitadas por los currículos de nuestro país y de la región, los experimentos discursivos se constituyen en una herramienta didáctica pertinente para poner en escena prácticas socioescolares(Díaz, 2012) de experimentación discursiva en aulas de matemáticas.

Referencias y bibliografía

Arrieta, J. (2003) Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis presentada para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Arrieta, J., Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socio epistemología. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.18(1), 19–48 doi: 10.12802/relime.13.1811}

Bruner, J. (1988). Realidad mental y mundos posibles. Gedisa, Barcelona.

Candela, A. (1999). Ciencia en el aula: los alumnos entre la argumentación y el consenso, México/ Buenos Aires/ Barcelona: Paidós.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional, Una Mirada Socioepistemológica. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 17, Tomo I, pp. 1-9. México.

Carrasco, E., Díaz, L., Buendía, G. (2014). Figuración de lo que varía. Enseñanza de las Ciencias. Revista Enseñanza de las Ciencias, 32.3, pp.365 – 384.

Connelly y Clandinin, Editores (1995). Déjame que te Cuente, ensayos sobre narrativa y educación. Edición en castellano. Barcelona. Laertes. 1995.

Contreras, C. (2014). Desplazamiento de prácticas socioescolares desde una experiencia de modelación. Tesis de Profesorado en Matemática e Informática Educativa. Universidad Católica Silva Henríquez. Santiago de Chile.

Díaz, L. (2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. Relime Vol. 8, Núm. 2, julio, 2005, pp. 145-168. doi: 10.12802/relime.13.1811}

Díaz, L. (2012) La perspectiva socioepistemológica y las comprensiones de la construcción y reconstrucción de saberes matemáticos. Panel de Socioepistemología. XXVI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Belo Horizonte, Brasil.

Egan, K. (1998) Narrativa y aprendizajes. Una travesía de inferencias. En McEwan, H. y Egan, K. (comp.), La narrativa en la enseñanza, el aprendizaje y la investigación. Amorrortu editores, Buenos Aires.

Freudenthal, H. (1991). Revisitingmathematicseducation. Dordrectht: KluwerAcademicPublishers.

Johnson, M. (1987) TheBody in theMind. Chicago UniversityPress. Chicago.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1980). MetaphorsWe Live By. Chicago UniversityPress. Chicago.

Ministerio de Educación (2012). Matemática. Bases Curriculares 2012. Santiago de Chile: Autor.

Molina, M. (2006). Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria. Tesis de Doctorado en Educación. Granada. España.

Núñez, R., Lakoff, G. (2000). WhereMathematics Comes From. Editorial Basic Books, New York.

Núñez, M., Zambrano, S., Díaz, L. (2017). Figuras que comunican elementos de lo cuadrático. Reporte de investigación en XXXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Lima. Perú.

PISA (2015). Disponible en http://www.oecd.org/pisa/data/2015-technical-report/

Wertsh, J. (1993). Voces de la mente. Un enfoque socio cultural para el estudio de la Acción Mediada. Madrid: Visor Distribuciones.

Organización por métodos y estrategias en el cálculo de áreas de triángulos

Vicente **Carrión** Miranda
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav
México
vcarrion@cinvestav.mx
François **Pluvinage**
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav
México
fpluvinage@cinvestav.mx

Resumen.

Se expone una forma para la organización de distintos métodos y estrategias utilizables para afrontar la resolución de problemas relacionados con propiedades métricas de las figuras geométricas. Se relacionan con el aprendizaje conceptos aritméticos, geométricos y algebraicos insertos en los programas escolares. En particular se trabajan maneras de obtener el área de una clase particular de triángulos, simultáneamente rectángulos e isósceles. La diversidad de métodos presentada obedece a las respuestas que resultaron de la aplicación a dos muestras, una de profesores y otra de estudiantes del nivel escolar medio, participantes en un trabajo de investigación sobre el tema. En el presente documento no se exponen los resultados observados, solamente la parte teórica de la conceptualización matemática.

Palabras clave: resolución de problemas, isometría, composición de transformaciones, producto escalar, producto vectorial.

Introducción

El escrito se compone de dos partes. La primera, la que se presenta en este texto, contiene los elementos conceptuales matemáticos, básicos, requeridos para afrontar y resolver el problema que se plantea. En este mismo apartado se describe y se desarrolla una exploración en la que se usan diversos métodos y algunas estrategias posibles para la búsqueda del área. Se expone una variedad de métodos que muestra una organización de las diferentes formas posibles de enfrentarse a la búsqueda y al desarrollo de los procedimientos que encauzan la llegada a los últimos resultados.

El problema planteado consiste en determinar el área de un triángulo que vértices se posicionan en las intersecciones de las rectas que conforman una rejilla, o malla. En otro contexto, se puede decir que las coordenadas de los vértices del triángulo en cuestión se expresan con números enteros. El problema consiste en utilizar "todos los métodos posibles" para encontrar el área del triángulo y, con detalle, escribir cada forma de afrontar y llegar al resultado que se pretende obtener. Finalmente, en la búsqueda del área en estudio se considera una generalización relacionada con triángulos que sus vértices son puntos cualesquiera del plano cartesiano.

Los métodos seguidos para obtener el área del triángulo se organizan en tres formas, caracterizadas por los niveles conceptuales involucrados en los distintos modos de abordar la resolución:

a. Una vía para dar seguimiento a la resolución del problema basada en las propiedades de invariancia del área por transformaciones rígidas, las isometrías.
b. Métodos que se apoyan en el cálculo de las longitudes de los elementos lineales del triángulo, medidas de lados, alturas, radios de las circunferencias inscrita y circunscrita al triángulo.
c. Métodos que, además de apoyarse en las medidas de los elementos lineales del triángulo, se basan en las medidas de sus ángulos y en el uso de relaciones y fórmulas trigonométricas.

La segunda parte del escrito describe los elementos teóricos y metodológicos involucrados en una investigación sobre el tema, realizada con muestras de profesores y alumnos de niveles preuniversitarios. También contiene el análisis e interpretación de la información recabada en la investigación y las conclusiones de la indagación.

Debido a su extensión no se expone en este documento la fase experimental de la investigación. El desarrollo, el análisis y las conclusiones, se dejan para otro escrito. En la primera parte se exponen únicamente los elementos conceptuales matemáticos necesarios y los diferentes métodos para abordar el problema.

El problema

El lado del cuadrado **ABCD** tiene por medida cuatro unidades. Se divide en dieciséis cuadraditos de una unidad de área. Por diferentes métodos, encontrar el área del triángulo **EFC**, *Figura 1*.
Se espera que los participantes en la investigación orienten sus respuestas siguiendo algunos de los métodos y estrategias que enseguida se exponen.

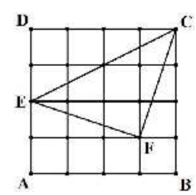


Figura 1

1. La resolución del problema por el primer método

Se hace uso del método de transformaciones geométricas para afrontar el problema de encontrar el área del triángulo **EFC** de la *Figura 1*. Con movimientos preestablecidos, transformaciones rígidas, los pequeños polígonos obtenidos con particiones, ubicados en el interior del triángulo **EFC**, se cambian de posición y se colocan en lugares diferentes. Estos movimientos permiten transformar conformaciones en otros objetos geométricos equivalentes, de una misma área, que pueden ser más simples, conducentes a determinar las áreas de las primeras figuras (Boltianski, V. G., 1981, pp. 2-38).

Se trazan el cuadrado **ABCD** y el triángulo **EFC**, *Figura 2*. Realizar las siguientes tareas escribiendo los cálculos necesarios en las preguntas que los requieran. Además, escribir las razones que justifiquen los pasos del desarrollo que conduce a las respuestas.
¿Cuáles son los valores de las áreas de cada uno de los polígonos incluidos en el cuadrado **ABCD**, *Figura 2*?

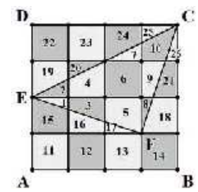


Figura 2

¿Qué conjuntos diferentes de polígonos congruentes existen en la *Figura 3*? Ayuda:

a. ¿Cuáles son los triángulos congruentes con el triángulo **ERM**, △(1)?
b. ¿Cuáles son los triángulos congruentes con el triángulo **PRE**, △(2)?
c. ¿Cuáles son los trapecios rectángulos congruentes con el trapecio rectángulo **GMRS**, ⏢(4)?
d. Encontrar otros conjuntos de polígonos congruentes en la Figura 3.

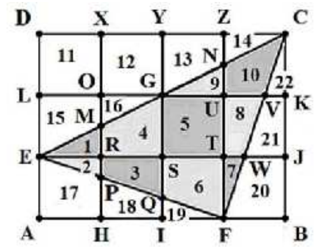


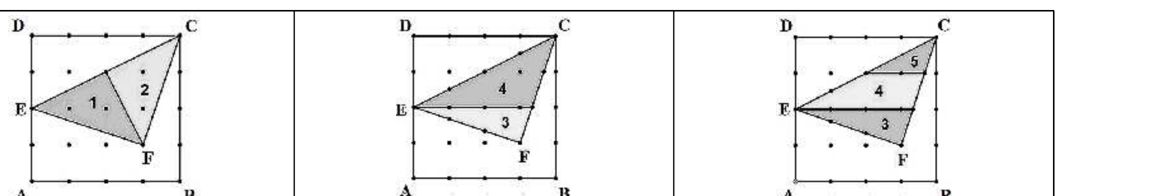
Figura 3

A partir de la *Figura 3*, encontrar composiciones de transformaciones que cambien el triángulo **ERM**, △(1), al triángulo **PRE**, △(2), al trapecio rectángulo **GMRS**, ⏢(4), al trapecio rectángulo **EAHP**, ⏢(17), al trapecio rectángulo **QSRP**, ⏢(3) y a de los cuadrados **DLOX**, □(11) y **XOGY**, □(12) en otras figuras que les corresponden. .

1.1. ¿En qué consiste la resolución del problema por el primer método?

El sustento del primer método de resolución está en la invariancia por isometrías de las dimensiones de una figura geométrica, en específico, su área. Se hace uso del método de estas transformaciones para afrontar la resolución del problema de encontrar el área del triángulo **EFC** de la *Figura 4*. Las transformaciones isométricas, como son la traslación, la rotación y la reflexión, conservan la forma y las dimensiones de las figuras geométricas; es decir, corresponden a movimientos rígidos que preservan la relación de congruencia de los objetos geométricos. Esta situación permite cambiar de posición las figuras para crear nuevas formas de áreas equivalentes (Turégano Moratalla, P., pp. 28-32).

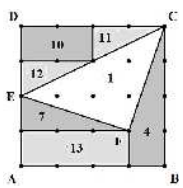
1.1.1. Utilizando equivalencia de áreas de polígonos, la propiedad aditiva del área de figuras en el plano y transformaciones que conservan área, encontrar y sumar las áreas del interior del triángulo **EFC**, en los incisos de la *Figura 5*.



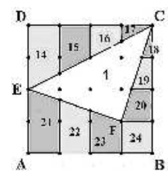
(*a*) (*b*) (*c*)

Figura 5

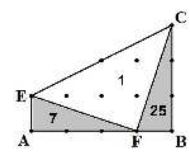
1.1.2. En los incisos de la *Figura 6*, con el uso de la equivalencia de áreas de polígonos, de la propiedad aditiva del área de figuras en el plano y con el método de transformaciones isométricas, sin aplicar fórmulas para áreas, determinar las áreas de cada una de las regiones que conforman el polígono correspondiente al complemento relativo de triángulo **EFC**, respecto al cuadrado **ABCD**. Luego, sumarlas para obtener el área de ese complemento. Después, obtener el área del triángulo **EFC** con la diferencia del área de cuadrado **ABCD** menos el área del complemento.



(*d*)



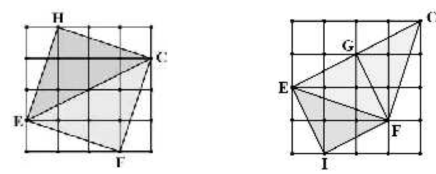
(*e*)



(*f*)

Figura 6

1.1.3. En los incisos de la *Figura 7*, con el uso de la equivalencia de áreas de polígonos, de la propiedad aditiva del área de figuras en el plano y por medio de rotaciones o reflexiones, explicar la forma en que se transforma el triángulo **EFC** en otros polígonos equivalentes, sin aplicar fórmulas para áreas, determinar el área del triángulo **EFC**.



(*a*) (*b*)

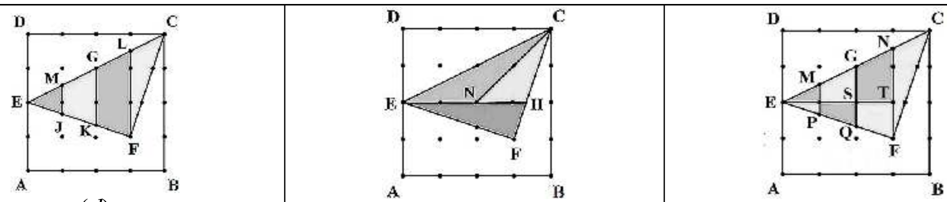
Figura 7

2. La resolución del problema por el segundo método

En esta parte se hace uso de cálculos mediante el empleo de fórmulas. En vez de reconstruir en las figuras los elementos lineales del triángulo **EFC**, lados o alturas, se calculan o se miden. Con base en estas medidas se utilizan fórmulas para calcular el área donde intervienen las longitudes de los lados y de las alturas del triángulo.

El sustento del segundo método de resolución se encuentra en el empleo de isometrías. Se emplean el método de estas transformaciones y fórmulas que conducen a la obtención del área del triángulo **EFC**. En la búsqueda de estos elementos geométricos se emplea el teorema de Pitágoras.

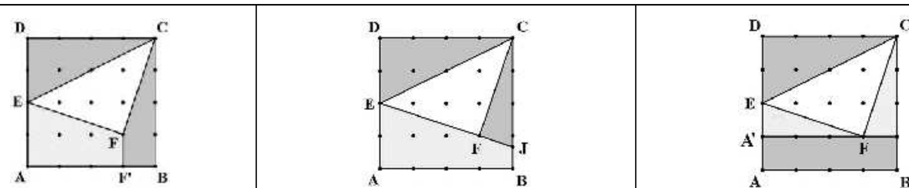
2.1. Obtener las áreas de los polígonos incluidos en el triángulo **EFC** de cada inciso de la *Figura 8*. Calcular longitudes de los segmentos de recta correspondientes a bases y alturas requeridos para aplicar fórmulas. Luego, sumarlas para obtener el área del triángulo **EFC**.



(*d*) (*e*) (*f*)

Figura 8

2.2. En los incisos de la *Figura 9* calcular longitudes de lados, alturas u otros segmentos necesarios y determinar las áreas de cada una de las regiones que conforman la figura del complemento relativo de triángulo **EFC** respecto al cuadrado **ABCD**. Luego, sumarlas para obtener el área de ese complemento. Después, obtener el área del triángulo **EFC** con la diferencia del área de cuadrado **ABCD** menos el área del complemento.

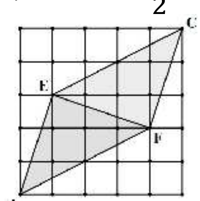


(*a*) (*b*) (*c*)

Figura 9

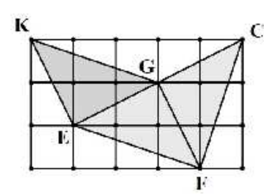
2.3. En los incisos de la *Figura 10* calcular longitudes de lados, alturas u otros segmentos necesarios y determinar las áreas de cada una de las regiones que conforman algún polígono que incluya al triángulo **EFC**. Después, a partir del área de este nuevo polígono obtener el área del triángulo **EFC** examinando la parte proporcional del área del triángulo respecto a la del polígono. En la *Figura 10* se muestran varias formas de obtener polígonos que conduzcan a diversas formas de tener el área del triángulo **EFC**. Encontrar otras transformaciones para llegar a fórmulas semejantes.

a. $Área(\triangle \text{EFC}) = \dfrac{Área(\square\textbf{JFCE})}{2}$.



(*c*)

b. $Área(\triangle \text{EFC}) = Área(\square \text{EFGK})$.



(*d*)

Figura 10

2.4. Se utilizan fórmulas para calcular el área donde intervienen las longitudes de los lados y de las alturas del triángulo, obtenidas con el empleo del teorema de Pitágoras. En lo que sigue sólo se establecen las fórmulas para el cálculo del área del triángulo **EFC**.

a. El ángulo **EFC** es recto. El área es igual a la medida de la base $\overline{\mathbf{EF}}$ por la mitad de la medida de $\overline{\mathbf{FC}}$, la altura del triángulo **EFC**.

$$\acute{A}rea(\triangle \mathbf{EFC}) = \frac{(\mathbf{EF})(\mathbf{FC})}{2},\ \textit{Figura 11}.$$

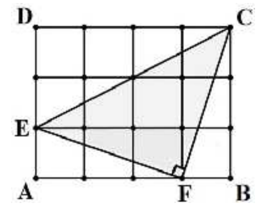


Figura 11

b. El área es igual a la medida de la base $\overline{\mathbf{CE}}$ por la mitad de la medida de $\overline{\mathbf{FG}}$, la altura del triángulo **EFC**.

$$\acute{A}rea(\triangle \mathrm{EFC}) = \frac{(\mathbf{CE})(\mathbf{FG})}{2},\ \textit{Figura 12}.$$

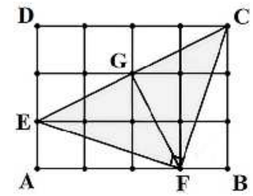


Figura 12

c. El triángulo **EFC** es isósceles. La altura $\overline{\mathbf{FG}}$ también es bisectriz del ángulo **EFC**, *Figura 12*. El área se calcula con la fórmula

$$\acute{A}rea(\triangle \mathrm{EFC}) = \mathbf{CE}\cdot\sqrt{(\mathbf{EF})^2 - \frac{(\mathbf{CE})^2}{4}}$$

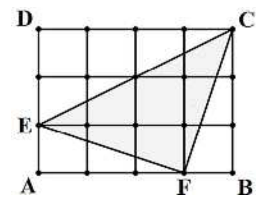


Figura 13

d. $\acute{A}rea(\triangle \mathrm{EFC}) = \sqrt{s(s-\mathbf{EF})(s-\mathbf{FC})(s-\mathbf{CE})}$, donde $s = \dfrac{\mathbf{EF}+\mathbf{FC}+\mathbf{CE}}{2}$, *figura 13*.

e. $\acute{A}rea(\triangle \mathrm{EFC}) = \dfrac{(\mathbf{EF})(\mathbf{FC})(\mathbf{CE})}{4(\mathbf{GF})}$, *Figura 14*.

f. La circunferencia de centro **L** y radio **LG** = *r* está inscrita en un triángulo **EFC**, *Figura 15*. $s = \dfrac{\mathbf{EF}+\mathbf{FC}+\mathbf{CE}}{2}$. $\acute{A}rea(\triangle \mathbf{EFC}) = rs$.

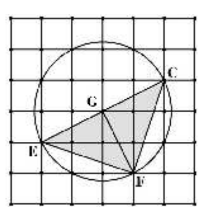


Figura 14

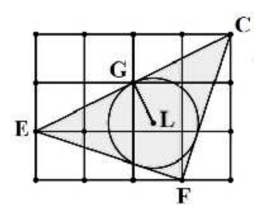


Figura 15

g. Se obtiene el área de un triángulo con la fórmula de Pick. Las coordenadas de los vértices del triángulo **EFC** son números enteros, según se ilustra en la *Figura 16*.

- ***I*** es el número de puntos sobre los segmentos de recta interiores de la retícula del triángulo **EFC** y
- ***B*** es el número de puntos que están en los segmentos del contorno del triángulo **EFC** entonces, el área se obtiene con la fórmula $\acute{A}rea(\triangle \mathbf{EFC}) = \boldsymbol{I} + \dfrac{\boldsymbol{B}}{2} - 1$

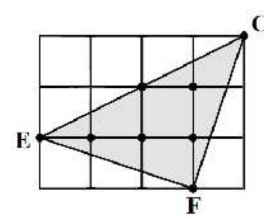


Figura 16

En la *Figura 16*, se tiene ***I*** = 3 y ***B*** = 4; de donde, $\acute{A}rea(\triangle \mathbf{EFC}) = 5$.

3. La resolución del problema por el tercer método

Se obtiene el área del triángulo **EFC** con recursos de trigonometría. Además de ser necesarios las medidas de los segmentos de rectas característicos de un triángulo, en este apartado se requiere calcular las medidas de los ángulos en función de las medidas de los lados. Es aquí donde se precisa del empleo de las relaciones trigonométrias. Para calcular el área del triángulo se dispone de varias fórmulas trigonométricas. Enseguida se utilizan algunos conceptos tigonométricos para obtener por varias formas el área del triángulo **EFC**.

3.1¿En qué consiste la resolución del problema por el tercer método?

El tercer método de resolución se fundamenta en el empleo de distintos conceptos, relaciones y ciertas fórmulas de trigonometría. Las longitudes de los lados del triángulo se encuentran usando el teorema de Pitágoras y con estos valores se tienen las relaciones trigonométricas que involucran los ángulos del triángulo. Estos valores se sustituyen en fórmulas específicas que conllevan a obtener el área buscada.

3.1.1. Con las siguientes fórmulas generales se obtiene el área de un triángulo, *Figuras* 18 y *19*.

$$\acute{A}rea(\triangle \mathbf{ABC}) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sen(\mathbf{C}), \qquad \acute{A}rea(\triangle \mathbf{ABC}) = \frac{a^2 \cdot sen(\mathbf{B}) \cdot sen(\mathbf{C})}{2 \cdot sen(\mathbf{B} + \mathbf{C})}$$

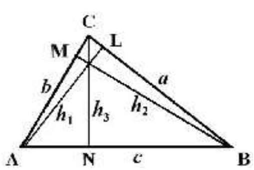


Figura 18

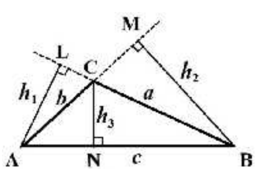


Figura 19

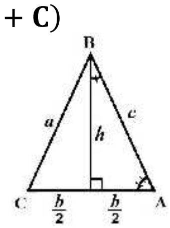


Figura 20

3.1.2. Para un triángulo isósceles se tiene que $\angle \mathbf{ACB} = \angle \mathbf{BAC}$ y *a* = *c*, *Figura 20*. El área del triángulo **ABC** se calcula con las fórmulas. $\acute{A}rea(\triangle \mathbf{ABC}) = \dfrac{a^2 \cdot sen(2\mathbf{A})}{2}$

4. La resolución del problema por el cuarto método

En el cuarto método se extiende el espacio de acción al plano completo, no sólo en rejillas equivalentes a usar coordenadas expresadas con números naturales o enteros. El caso es más general. Se requiere el uso de números reales. Este cuarto método de resolución participa del empleo de un sistema de coordenadas cartesianas, conceptos de geometría analítica, operaciones con vectores y sus propiedades.

4.1 ¿En qué consiste la resolución del problema por el cuarto método?

La base fundamental del cuarto método de resolución está, en primer lugar, en el empleo de distintos conceptos y ciertas fórmulas de geometría analítica. Se utiliza la fórmula correspondiente a un determinante de tercer orden para expresar el área de un triángulo. En segundo lugar, se encuentra vectorialmente la misma área por dos vías. En la primera se aprovecha la ventaja de que la definición de producto escalar de dos vectores lleva directamente al cálculo del área del triángulo. En la segunda, se tiene una oportunidad semejante, el área buscada se establece con el uso directo de la magnitud del producto vectorial de dos vectores.

4.1.1. Desarrollar el procedimiento requerido para obtener la fórmula para encontrar el área de un triángulo de los siguientes vértices, *Figura 21*:

$$\mathbf{E} = (x_1, y_1),\ \mathbf{F} = (x_2, y_2),\ \mathbf{C} = (x_3, y_3).\quad \text{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

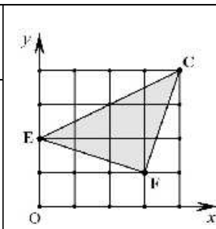


Figura 21

4.1.2. Desarrollar el proceso para obtener que el área de un triángulo. Es igual a la mitad del valor absoluto del producto escalar de los vectores $\overrightarrow{\mathbf{CE}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{CF}}$, *Figura 22*.

$$\text{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathbf{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{EC}}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\ |(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)|.$$

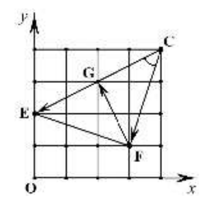


Figura 22

4.1.3. Desarrollar el proceso para obtener que el área de un triángulo. Es igual a la mitad de la magnitud del producto vectorial de dos vectores de punto inicial común determinados por dos lados de un triángulo de los siguientes vértices, *Figura 23*:

$\mathbf{E} = (x_1, y_1, 0)$, $\mathbf{F} = (x_2, y_2, 0)$, $\mathbf{C} = (x_3, y_3, 0)$.

$\overrightarrow{\mathbf{EF}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$, $\overrightarrow{\mathbf{EC}} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2, 0)$.

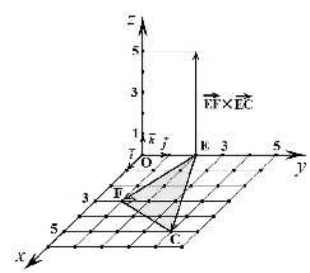


Figura 23

$$\text{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathbf{EF}}\times\overrightarrow{\mathbf{EC}}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Palabras finales

La enseñanza del cálculo del área de triángulos presentada en los libros de texto en el nivel medio se focaliza mediante una fórmula. La consecuencia es una insuficiente, reducida e insignificante conceptualización del área, reportada por varios investigadores. Nuestra idea es que el trabajo, apoyándose en una diversidad de métodos, pueda compensar esta carencia. En el análisis de los comportamientos y de las respuestas resultantes de las propuestas de exploraciones matemáticas, expuestas en este primer texto, se podrá ver si se cumple esta expectativa.

Referencias y bibliografía

Boltianski, V. G. . (1981). Figuras equivalentes y equicompuestas. Moscú: MIR.

Turégano Moratalla, P. (1993). De la noción de área a su definición: investigación histórica sobre las técnicas, métodos y conceptos que condujeron a la teoría de la medida. España: Universidad de Castilla-La mancha.

Actividad Matemática como objeto de investigación: comprensiones y perspectivas teóricas.

María Camila **Ocampo**-Arenas
Estudiante de maestría, Universidad de Antioquia
Colombia
camila.ocampo@udea.edu.co
Mónica Marcela **Parra**-Zapata
Magister en educación, Universidad de Antioquia
Colombia
monica.parra@udea.edu.co

Resumen

En la presente comunicación, presentamos el resultado de una revisión crítica de la literatura realizada en el marco de la Maestría en Educación, de la Universidad de Antioquia, el proyecto de maestría tiene como objetivo caracterizar la Actividad Matemática de los estudiantes de Educación Primaria que participan en procesos de Modelación Matemática. La revisión la realizamos específicamente del término Actividad Matemática mediante el software atlas.ti y tuvo como objetivo reconocer las comprensiones que la literatura reporta con respecto al término Actividad Matemática. La literatura reportó tres acepciones de este término; como las tareas matemáticas que se asignan al estudiante, como *lo que hace un matemático* y como las acciones que realiza un sujeto cuando estudia matemáticas. Lo anterior sugiere comprensiones heterogéneas del término y de sus implicaciones en el aula.

Palabras clave: Educación Matemática, Actividad Matemática, revisión de literatura, acciones, tareas.

Introducción

La preocupación por la formación matemática de los estudiantes en diferentes grados de escolaridad ha hecho propicio el desarrollo de investigaciones y líneas de trabajo al interior de la Educación Matemática. De manera particular, el término Actividad Matemática ha sido ampliamente utilizado en Educación Matemática, tanto en aspectos ligados a las matemáticas escolares como a la filosofía de las matemáticas. Investigaciones adelantadas con relación a la Actividad Matemática proponen diferentes acepciones de esta, según sea la corriente teórica a la cual respondan, esto sugiere comprensiones heterogéneas del término y diversas implicaciones para el aula. Por lo anterior, propusimos indagar ¿Cuáles son las acepciones que la literatura reporta con respecto al término Actividad Matemática y en qué marcos están ubicados?

A continuación, presentamos el método utilizado en la revisión de la literatura, los resultados que encontramos y las conclusiones a las que nos llevó dichos resultados. Finalmente presentamos las referencias bibliográficas que utilizamos.

Método

Para dar respuesta a la pregunta que orientó este estudio realizamos una revisión crítica de la literatura (Jesson y Lacey, 2006). Este tipo de estudios es de carácter descriptivo, perceptivo y analítico, que busca una comparación entre textos, para así llegar a aquellos planteamientos que aun requieren ser profundizados e investigados. Para la búsqueda de los textos utilizamos las palabras clave “mathematical activity” o “Actividad Matemática”, en las bases de datos[1] Springer, Scopus, ERIC, SciELO y el motor de búsqueda Google Académico. En esta búsqueda encontramos 102 documentos que estudiamos a partir de sus títulos, resúmenes y palabras clave. Los criterios de selección giraron en torno a la relación de los textos con el término Actividad Matemática en los estudiantes, además tuvimos en cuenta el año de publicación (desde 1992 hasta 2018) y el propósito del documento. Con lo anterior determinamos 15 textos para su análisis. El análisis, la comparación y la organización de los textos la realizamos con la ayuda del software atlas.ti[2].

A partir de las lo que pretendíamos que los textos develaran, se generó la tabla 1 que presentamos a continuación.

Tabla 1
Orientaciones para el análisis

Pregunta orientadora de la revisión de la literatura	***Preguntas específicas para la revisión de la literatura***	***Códigos software atlas.ti***
¿Cuáles son las comprensiones que los autores manifiestan con respecto al término* Actividad Matemática *y en qué marcos están ubicados?	¿Cómo se define la Actividad Matemática?	***-“Definición AM”:*** *se refiere a los apartados donde se encuentra una definición explícita del término Actividad Matemática*
	¿Cuáles son las teorías, referentes y marcos en los cuales se describe la Actividad Matemática? ¿Qué aspectos de la teoría caracterizan la Actividad Matemática?	***-“Teoría”:*** *se refiere a las teorías en las cuales están enmarcados los autores y la investigación como tal.*

Fuente: las autoras.

La primera columna de la tabla corresponde a la pregunta global que orientó la revisión de la literatura. La segunda columna hace referencia a las preguntas específicas para develar aquellas comprensiones del término Actividad Matemática. Y la tercera columna muestra los

[1]Para el uso de las bases de datos mencionadas se cuenta con acceso por parte de la Universidad de Antioquia, a la cual pertenecemos las autoras.
[2] Para el uso del Software se tiene la licencia por parte del grupo de investigación, al cual pertenecemos las autoras.

términos utilizados en el Software para la codificación de los textos. Es importante aclarar que dichos códigos surgieron *a priori* con el fin de categorizar apartados de los textos que dieran cuenta de lo que reporta la literatura con respecto a lo que se entiende por Actividad Matemática y las corrientes epistemológicas en la cual los autores leídos están enmarcados.

Para el análisis de los datos partimos de un proceso de sistematización, el cual entendemos como el proceso de compilar y codificar los textos seleccionados, acorde con las preguntas mencionadas en la tabla 1, para ser analizados y generar conclusiones de lo propuesto (Jesson y Lacey, 2006).

En el software atlas.ti utilizamos códigos que permitieron clasificar la información ("Definición AM" y "Teoría"); luego de la lectura de los textos y su codificación, empleamos las herramientas informe y red que posee el programa para evidenciar las relaciones, confrontaciones y diferencia entre las ideas encontradas.

Para el análisis crítico y comprensivo de los textos leídos y su respectiva categorización, generamos relaciones entre lo que plantean los autores en el texto y nuestras percepciones y comprensiones respecto a la Actividad Matemática. Finalmente, realizamos la discusión que tomó como base las ideas de los textos y nuestras ideas y las preguntas realizadas en la tabla 1, con relación al término Actividad Matemática (Jesson y Lacey, 2006).

Resultados

Comprensiones de Actividad Matemática

La literatura reporta tres acepciones del término Actividad Matemática, puede verse como las tareas matemáticas que se asignan al estudiante, como *lo que hace un matemático*, o como las acciones o procesos que lleva a cabo un sujeto que estudia matemáticas al enfrentarse a una tarea.

Cuando se entiende la Actividad Matemática como las tareas matemáticas que se asignan al estudiante, se refiere al uso de la palabra con respecto a una situación específica que el docente pone en el aula para el desarrollo de un tema o para repasar dicha temática (Blanco, 2010; Haris y Ilma, 2011; Cordellas, 2016). En esta visión de Actividad Matemática no se centra la atención en el estudiante, ni en el docente sino en cómo con la herramienta (Actividad Matemática) se promueve o evalúa el conocimiento y su desarrollo. Cortadellas (2016) plantea una diferenciación entre tareas de memorización, de procedimientos sin conexión, de procedimientos con conexión y de lo que él denomina *hacer matemáticas*. En este sentido la autora reconoce algunas características que se deben proponer en el aula cuando el estudiante hace matemáticas como la aproximación a la tarea, la exploración y aplicación de los conceptos inmersos en la tarea, el análisis de la actividad (tarea) y de las posibles soluciones, aspectos emocionales inmersos en el proceso.

La Actividad Matemática entendida como "lo que hace un matemático" se refiere a aquellas cuestiones en las que están inmersas las prácticas profesionales de los matemáticos. Esta visión empieza a relacionar las acciones de los sujetos con el conocimiento matemático. Su interés está en describir a qué tipo de Actividad Matemática están enfrentados los matemáticos, orientado al descubrimiento del conocimiento, la explicación, la justificación y la comprensión del conocimiento puesto en práctica (Giaquinto, 2005).

La acepción que se refiere a lo que hace un sujeto que estudia matemáticas, autores como Chevallard (1999); Bosch, Chevallard y Gascón (1997), afirman que la Actividad Matemática, tiene que ver con aquellas acciones que llevan a cabo los estudiantes de matemáticas al enfrentarse a una tarea. La literatura reporta que dichas acciones se refieren a procesos de comunicación, análisis, comparación, comprensión y reflexión que realizan los estudiantes al proponerles una tarea; que en la mayoría de los casos retoma aspectos presentes en su vida cotidiana. Al participar en dicha tarea, los estudiantes utilizan la descripción, la clasificación, la definición y la demostración como principales componentes de la Actividad Matemática (Barquero, Bosch, y Gascón, 2014; Bosch, García, Gascón, y Ruiz, 2006; Espinoza, Barbé, y Gálvez, 2011; Godino, Gonzato, y Wilhelmi, 2014; Ponte, 2004; Wernet y Nurnberger-Haag, 2015).

Continuado con la acepción de lo que hace un sujeto que estudia matemáticas, Obando (2015) reconoce que la Actividad Matemática está estructurada y dicha estructuración se visibiliza en las prácticas matemáticas. De igual forma plantea la importancia de la historia en el estudio de la Actividad Matemática, ya que, esto permite comprender la concepción de las matemáticas en la cultura, analizada a lo largo del tiempo, y así determinar las tareas que propone el docente, las cuales propiciarán dichas prácticas matemáticas mediadas por técnicas, formas de discursividad y objetos/conceptos, que finalmente configuran la Actividad Matemática del estudiante.

Las tres acepciones encontradas del término Actividad Matemática muestran que, a pesar de que los textos analizados no tienen el mismo enfoque epistemológico sus ideas de Actividad Matemática giran en torno a aquellas cuestiones que tienen que ver con el *hacer matemáticas,* ya sea de un matemático, de un profesor o de los estudiantes. A continuación, presentaremos aquellas perspectivas teóricas en las que se enmarcan los autores mencionados con el fin de determinar su influencia o no en las acepciones que tienen.

Perspectivas teóricas con respecto a la Actividad Matemática

En los documentos revisados reconocemos algunas teorías en las que se enfocaban los autores. Entre dichas teorías se encontraron la heurística, la antropológica de lo didáctico, la filosofía de las matemáticas y la teoría de la actividad.

En la heurística, se propone la creación de medios o estrategias que permitan facilitar la búsqueda de soluciones a problemáticas propuestas en diversas tareas. De igual manera, esta teoría se preocupa por comprender qué preguntas o tareas se le deben plantear a los estudiantes en el área de matemáticas (Cortadellas, 2016), y aunque no lo hacen de manera explícita, se puede deducir que estas reflexiones se enfocan en propiciar espacios para la Actividad Matemática, en los cuales el estudiante proponga, argumente y cuestione asuntos propios de su cotidianidad.

La teoría antropológica está relacionada con las situaciones didácticas de Brousseau y se centra en las actividades humanas y en consecuencia en lo antropológico (Bosch, García, Gascón y Ruíz, 2006). La teoría antropológica de lo didáctico ha sido desarrollada principalmente por Chevallard, quien en sus textos la define como aquella que sitúa la Actividad Matemática. El autor dice que toda actividad humana puede describirse mediante un modelo dado a partir de lo que él denomina la praxeología. Este último concepto se vincula con las tareas que el docente utiliza para generar Actividad Matemática por parte de los estudiantes en el aula (Bosch et al., 2006).

La filosofía de las matemáticas es la teoría en la que se enmarca Giaquinto (2005), quien habla de lo *que hace un matemático*, según el autor dicha teoría se ha ocupado de manera principal de la teoría de las matemáticas, y ha centrado su atención en los teoremas, objetos y demostraciones como tal; sin embargo, el autor también reconoce el interés de la teoría por estudiar las prácticas matemáticas entre los filósofos. En esta teoría priman aquellas cuestiones como la ontología, la epistemología y los métodos matemáticos, que dejan caracterizar las actuaciones de los matemáticos.

La última teoría identificada es la teoría de la actividad, la cual es comprendida por Obando (2015) a partir de la perspectiva histórico cultural en la Educación Matemática. En dicha teoría el sujeto y sus acciones son la base de la actividad. De igual manera en esta teoría priman los objetos, los conceptos, y la cultura; es decir, aquellos aspectos propios del contexto en el que se desarrolla la actividad.

Conclusiones

La revisión de la literatura nos permitió identificar tres acepciones, como las tareas matemáticas que se asignan al estudiante, como *lo que hace un matemático*, o como las acciones o procesos que lleva a cabo un sujeto que estudia matemáticas al enfrentarse a una tarea. En las tres acepciones identificamos que las tareas son una fuente de mediación con respecto a las matemáticas y que es a partir de ellas que se ve *lo que hace un matemático, un profesor* o lo que *hace un sujeto que estudia matemáticas.* De igual manera nos mostró que estas comprensiones son heterogéneas cuando las vemos en torno a la Educación Matemática; es decir, comprensiones variadas generan diferentes énfasis en el aprendizaje de las matemáticas, y en los procesos que se involucran en este, porque dependen de su postura epistemológica.

La Actividad Matemática en la mayoría de los textos, va dirigida hacia las concepciones y actuaciones de los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones en contextos cercanos a su cotidianidad, donde los estudiantes toman posturas y plantean ideas para llegar a una solución. En este proceso sus acciones van dirigidas a generar conjeturas, a discutirlas y a tomar decisiones apoyados en sus pensamientos y en lo aprendido con respecto a las matemáticas.

Finalmente, resaltamos que la comprensión de lo que es Actividad Matemática va a depender del ambiente configurado por la corriente epistemológica en la cual se posicionen los investigadores, docentes e incluso, de alguna manera, los estudiantes. De manera particular en esta revisión reportamos la Actividad Matemática como las tareas matemáticas que se asignan al estudiante, como *lo que hace un matemático*, o como las acciones o procesos que lleva a cabo un sujeto que estudia matemáticas al enfrentarse a una tarea. Esta comprensión llevará consigo una configuración directa de los elementos mencionados en párrafos anteriores como lo es la comunicación, las tareas y el papel de estudiantes y los docentes.

Referencias y bibliografía

Barquero, B., Bosch, M., y Gascón, J. (2014). Incidencia del “aplicacionismo” en la integración de la modelización Bosch, M., Chevallard, I., y Gascón, Jmatemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de Las Ciencias*, 32 (1), 83–100.

Blanco. (2010). Análisis del papel de las imágenes en actividades matemáticas. *Premisa*,12 (46) 39–47.

. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.*Cali, Colombia:* Editorial Horsori.

Bosch, M., García, F., Gascón, J., y Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar . Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, *18*(2), 37–74.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorieanthropologique du didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 19 (2): 221-265.

Cortadellas, T. (2016). Interpretación y clasificación de la demanda cognitiva de actividades matemáticas que involucran a los números fraccionarios y decimales en Educación Primaria. *Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, *92*, 7–19.

Espinoza, L., Barbé, J., y Gálvez, G. (2011). Limitaciones en el desarrollo de la actividad matemática en la escuela básica: el caso de la aritmética escolar. *Estudios Pedagógicos*, *37*(1), 105–125.

Godino, J. D., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar . Implicaciones, *1*, 199–219.

Giaquinto, M. (2005). Mathematical Activity. EnSpringer Science & Business Media (Ed.), Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics, (75–87).

Haris, D., y Ilma, R. (2011). The role of context in third graders' learning of area measurement. *IndoMS. JME*, *2*(1), 55–66.

Jesson, J., & Lacey, F. (2006). How to do (or not to do) a critical literature review. *Pharmacy Education*, *6*.

Obando, G. (2015). Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3 y 4 de una institución educativa de la Educación Básica. (Tesis doctoral). Universidad del valle. Cali, Colombia. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4538.2249

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos.En Graó (Ed.), La Actividad Matemática En El Aula, (25–34).

Wernet,J. L., y Nurnberger-Haag, J. (2015). Toward broader perspectives of young children's mathematics: Recognizing and comparing Olivia's beliefs and activity. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *16*(2), 118–141.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Possíveis contribuições do uso de jogosaliados a resolução de problemascomo estratégia para o ensino da Matemática no6º ano

Lúcia Vera Lima **Teixeira**
Escola Patronato Madre Mazzarello- Anápolis
Brasil
luciavera-lima@hotmail.com
Maria Dalvirene **Braga**
Universidade de Brasília
Brasil
dalvirenebraga@gmail.com
Rui **Seimetz**
Universdade de Brasília
Brasil
rseimetz@unb.br

Resumo

Com objetivo de investigar maneiras de utilizar jogos associados a resolução de problemascomo estratégia de ensino da Matemática e suas contribuições no processo de ensino aprendizagem de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, foi realizadaessa pesquisa de abordagem qualitativa, com utilização de entrevista e observação para coleta de dados. Pode-se identificar queo uso de jogos como estratégia de ensino é feito de forma esporádica pelo professor, mesmo percebendo que os alunos se sentem mais motivados a participar das aulas quando se faz uso deste recurso, mostrando necessidade de uma mudança na cultura pedagógica e na identidade profissional do educador. Conclui-se que essa estratégia contribui para aprendizagem significativa, pois o aluno passa a construir relações entre o jogo e o conteúdo.

*Palavras-chave***:** metodologia de ensino, jogos,resolução de problemas, didática da matemática,aprendizagem significativa.

Introdução

No exercício da nossa função de docente em Matemática, constatamos que esta disciplina muitas vezes é vista com complexidade pelos alunos, o que exige do professor certa maleabilidade na escolha dos métodos aplicados no planejamento e desenvolvimento de suas aulas, e assim possibilitar que o estudo e aprendizagem de Matemática seja mais motivante e atrativo aos alunos.Uma provável origem para o desinteresse dos alunos na aprendizagem, nas aulas de Matemática, pode ser destacada pelo seguinte trecho: “[...] isso pode ser atribuído ao exagero no treino de algoritmos regras desvinculadas de situações reais [...]” (Dante, 1998, p.13). Já o trabalho de Cunha e Silva (2012), aponta que o ensino da Matemática vem sendo trabalhado O ensino da Matemática no ensino fundamental é composto por duas fases. A primeira compreende aos anos iniciais, e tem como mediador, na maioria dos casos, o professor pedagogo que não tem formação específica na área. A segunda compreende os anosinsistentemente de forma mecânica e, por consequência, desestimulante.

Entendemos que é essencial que as aulas de Matemática devam se desenvolver por meio de estratégias que cativem o aluno, despertem o desejo de aprender e participar da sua aprendizagem, assumindo a responsabilidade sobre isso. Desse modo, acreditamos que uma forma de proporcionar resultados positivos é a participação dos alunos em jogos nas aulas de Matemática, aliada à Resolução de Problemas que deve ser mais conhecida, utilizada e disseminada. Vale salientar que quando trabalhamos com Resolução de Problemas, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem (ONUCHIC, 2005).

Ao eleger como tema desta pesquisa uma investigação a respeito das possíveis contribuições do uso de jogos aliados a resolução de problemas no ensino da Matemática para alunos do 6º ano no Ensino Fundamental, com os resultados obtidos espera-se contribuir para uma aprendizagem participativa e cativante de conteúdos de matemática.

O grupo de alunos pesquisado estava em fase de transição, ensino fundamental I, onde normalmente tem apenas um professor para ministrar todas as disciplinas, e se insere num contexto, onde passa a ter diferentes professores para cada disciplina, e acaba distanciando-se do lúdico, por estar em contato com grupos de diferentes faixas etárias. Nesta conjuntura, sugere-se que o professor crie situações para motivar os alunos a aprenderem uma disciplina que pode se mostrar mais complexa do que até eles então conheciam.A busca por respostas a este cenário de ensino se mostra relevante por trazer aspectos que possam incentivar e sustentar a aplicação de jogos como metodologia de ensino no contexto escolar.

Referencial Teórico

Ensino da Matemáticano Ensino Fundamental

finais, e é mediada por professores com formação específica na área, os quais esperam receber alunos já alfabetizados em Matemática, ou seja, que dominem princípios básicos relacionados ao sistema de numeração, as quatro operações fundamentais, as figuras geométricas, noções de grandezas e medidas, análises simplificadas de gráficos e tabelas, entre outros.

Assim, esta disciplina adquiri grande importância nos anos iniciais, por desenvolver na criança o pensamento lógico e servir como base para as demais séries e anos de ensino (Alves, 2016).Nesse sentido, podemos considerar a Matemática no ensino fundamental como um alicerce para os demais anos. Daí a importância de professores com uma formação adequada, capazes de oportunizar aos seus alunos a motivação que desperte neles habilidades e interesse pela disciplina. Entretanto, o que se vê é uma prática de ensino da Matemática que, muitas vezes, não está direcionada a construção do conhecimento matemático com significado, e que, ao contrário, tende a ser apresentada como algo disciplinador e excludente, realidade que parece permanecer ao longo da educação básica.Uma possibilidade que veremos a seguir está relacionada ao ensino da Matemática mediado por jogos aliado a resolução de problemas.

Ensino da Matemática mediado por jogos aliado a resolução de problemas

Observa-se,que "a Matemática vem sendo insistentemente trabalhada de modo abstrato, onde as fórmulas e regras vêm sendo aplicadas de maneira puramente mecânica e, portanto, totalmente desestimulante" (Cunha; Silva, 2012, p.3).Cabe aqui ressaltar que na dinâmica de ensino-aprendizagem o aluno aprende não somente por meio daquilo que o professor planeja ensinar. É importante que o professor tenha a sensibilidade de inserir em seu planejamento situações em que seja permitida a troca de experiências.

Miranda (2016, p.11), aborda o conceito de Aprendizagem Significativa, onde "novos conhecimentos devem articular-se com os conhecimentos prévios do estudante", e completa sugerindo que é urgente a necessidade de um trabalho pedagógico mais criativo. Logo, faz-se importante que as aulas da disciplina de Matemática sejam planejadas para garantir autonomia de pensamento, e que mostrem aos alunos que, além das regras referentes às operações realizadas e dos conceitos apresentados existe sim uma aplicação prática.Cumprindo assim com a função da escola que, conforme Machado (2011, p.14) é "propiciaro acesso aos conhecimentos matemáticos, assegurando aos alunos o desenvolvimento individual e a sua integração na sociedade, em que a capacidade de resolver problemas com criatividade passa a ser condição indispensável".

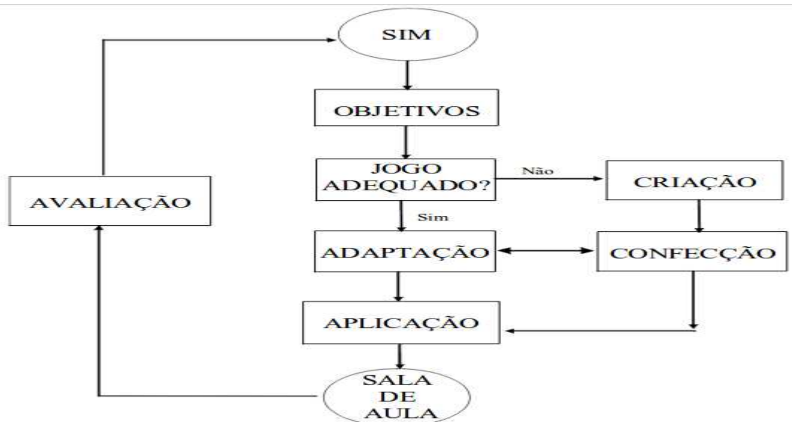
Se o professor não trabalha a disciplina como constituinte de valor, aos poucos o aluno deixa de percebê-la como tal, e assim ela deixa de contribuir de fato para a formação dos alunos. Groenwald; Timm (2000) apontam três aspectos que justificam a incorporação de jogos nas aulas, "são estes: o caráter lúdico, o desenvolvimento de técnicas intelectuais e a formação de relações sociais", o que para estes "permite que o aluno faça da aprendizagem um processo interessante e até divertido". Assim, sugere-se que os docentes utilizem métodos de planejamento em conjunto com os alunos, para que estes se interessem pelas atividades que serão desenvolvidas e consigam inserir estas em sua realidade escolar e social.

Tipos de jogos

O entendimento do termo "jogos" aqui considerado, é o mesmo apontado por Flemming (2004, p.4): jogos são"as atividades relacionadas com o ensino, de natureza recreativa, usadas em sala de aula para obtenção de um maior rendimento no processo ensino-aprendizagem de um conteúdo específico ou para o desenvolvimento de competências e habilidades específicas".

Flemming (2004), apresenta uma classificação dos jogos conforme seus objetivos, agrupando-os de acordo com: (1) aprimoramento de atitudes; (2) introdução e fixação de conteúdos; (3) motivação e desenvolvimento de hábitos. Alves (2007), por sua vez, apresenta uma classificação de jogos em dois grupos: (1) descandeadores de nova aprendizagem; e (2) de fixação/aplicação de um conceito já desenvolvido. E propõe uma metodologia para orientar a escolha e utilização de jogos no ensino da Matemática, ilustrada na figura 1.

Figura 1
Fluxo de escolha de jogos no planejamento didático



Fonte: Flemming. 2004

Sugere-se a utilização do fluxo apresentado na figura 1 por parte do professor, para o planejamento de situações de aprendizagem, considerando o perfil dos alunos envolvidos, e fazendo as adaptações necessárias a realidade na qual estes estão inseridos.Assim, considerando que a inserção de jogos no processo de ensinoreflete as concepções do professor e as classificações para estes descritas por Flemming (2004) e Alves (2007), opta-se pela utilização dos chamados jogos de fixação no que tange esta pesquisa, por dar suporte a fixação e construção de conceitos.

Metodologia

Foi realizada uma pesquisa de abordagem qualitativa, que conforme Gerhardt; Silveira (2009), não enfatiza a representatividade numérica, e sim o aprofundamento de questões relacionadas a um determinado grupo, neste caso alunos e professores de Matemática do local pesquisado, e o significado de suas ações e relações diante do objeto da pesquisa.

O objetivo foi investigar de que maneira a utilização de jogos de fixação aliados a resolução de problemas, como estratégia de ensino de Matemática, contribui no processo de ensino aprendizagem de alunos no 6º ano do Ensino fundamental II, de uma escola do município de Anápolis-GO. Participaram da pesquisa 10 (dez) alunos do 6º ano e 01 (um) professor de Matemática do local de amostra.

Para coleta de dados foram utilizados os seguintes instrumentos: (1) a aplicação de entrevistas estruturadas, por ter uma relação de perguntas, seguindo os estudos de Gil (2008), e (2) a observação dos alunos e professores participantes da pesquisa, que, segundo Lüdke e André (1986), permite um contato mais estreito do pesquisador com o objeto da pesquisa e (3) aplicação dos jogos.Posteriormente, prosseguiu-se com a relação de análises e inferências quanto a realidade identificada, buscando a compreensão da existência ou não de benefícios no processo de ensino-aprendizagem, e ainda a opinião dos professores regentes em relação a tais atividades, descrevendo os resultados encontrados na forma de relatório de pesquisa.

Apresentação e análise dos dados

Os dados foram coletados a partir da observação de uma professora de Matemática de uma escola situada no munícipio de Anápolis-GO, e de um grupo com dez (10) alunos da turma de 6º ano do qual a professora é regente. A partir da entrevista inicial, feita com a professora regente, no que diz respeito ao planejamento e as estratégias de ensino utilizadas, foi identificado que:

> "*O planejamento é feito semanalmente, observando o plano anual estabelecido no início do ano letivo* [e que] *as estratégias de ensino utilizadas são o uso do livro didático, resolução dirigida de exercícios, confecção de cartazes, levantamento e apresentação de dados em gráficos, construções utilizando materiais reciclados, aula expositiva e dialogada".*(Professora regente, 2018).

Apesar de não análise sobre o planejamento anual de ensino, pode-se inferir que o método de ensino por ela aplicado tem uma tendência pouco voltada para a investigação, reflexão e tomada de descisões, que podem ser alcançadas pelo uso de jogos.

Nessa mesma entrevista inicial, a professora aponta, que:"*O comportamento dos alunos é considerado satisfatório, apesar de em alguns momentos eles mostrarem-se um pouco inquietos ou apáticos aos exercícios apresentados. Eles interagem mais comigo (professora) e entre si, quando a aula tem recursos diferenciados".*

Pode-se observar que na perspectiva profissional da professora regente, seu modo de ensino aprendizagem está correto e alcançando resultados satisfatórios. Entretanto, não é identificado inicialmente uma preocupação da professora observada em inserir seus alunos em situações de trocas de experiência constante, nem a articulação da estratégia de ensino com o conhecimento prévio dos alunos, indo em desencontro com a "aprendizagem significativa" citada por Miranda (2016, p.11).

Quanto ao uso de jogos, a professora regente fez o seguinte apontamento inicial:

> *"Eu uso muito pouco os jogos em sala de aula, opto mais pelas construções ou confecções de materiais em casa, mas julgo como importante e válido para a dinâmica de sala de aula, pois mostram-se mais próximos a realidade dos alunos. Então sim, eu vejo alguma mudança no comportamento e, também, na aprendizagem quando consigo trazer jogos para a sala de aula. E quando o faço, exploro o máximo possível e recorro a ele durante as demais aulas relacionadas ao conteúdo abordado pelo jogo".*(Professora regente, 2018).

Nota-se que, em poucas ocasiões, a professora utiliza de jogos como metodologia de ensino de Matemática. Além disso, a partir da entrevista e das observações iniciais, pode-se dizer que os jogos como estratégia de ensino contribuem por tornar as aulas mais dinâmicas, e atrativas aos alunos. Isto porque é capaz de conduzi-los a interagir de fato com o objeto de ensino e assim produzir resultados, ou seja, conhecimentos.

O uso dos jogos de fixação, conforme as classificações Flemming (2004) e Alves (2007), funcionam no contexto escolar como a porta inicial para a aprendizagem de um determinado conteúdo, e permitem também sua utilização como um recurso contínuo ao qual se possa recorrer enquanto se aplica um determinado conteúdo. Ainda durante o período de observação, foram feitas algumas sugestões para a professora regente, no sentido de utilizar jogos de fixação. Os jogos escolhidosforam: *"Corrida dos 900*", indicado para a fixação de conteúdos de múltiplos, divisores e tabuada da multiplicação (Vide figura 2) e *"A. S. M. D. - Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão*", indicado para fixação das quatro operações matemáticas fundamentais" (Vide figura 3).

Figura 2Figura 3

Corrida dos 900 *A.S.M.D.*

Fonte: autora. 2018

Fonte: autora. 2018

Dentre os alunos observados, a maioria está entre os que não apresentam interesse pelas atividades de Matemática ou apresentam as vezes em determinadas situações. Estes apresentam melhor participação quando as atividades envolvem jogos, sendo esta preferida por todos, não havendo dentre eles quem não prefira este tipo de recurso.Confirmando que a disciplina aplicada sem a utilização de recursos que incentivem o aluno a interagir faz da Matemática algo abstrado, mecânico e desestimulante (Cunha; Silva, 2012).

Após a utilização de jogos de fixação como estratégia de ensino, foi realizada nova entrevista com a professora regente, com o intuito de identificar se houve alguma mudança na perspectiva de ensino. Na perspectiva da professora regente:*"Através dos jogos matemáticos as turmas apresentam excelentes resultados, pois têm como objetivo estimular a sua criatividade de investigar e descobrir as relações entre os elementos do jogo e os conceitos matemáticos a serem estudados".*

Para a professora, a exploração dos jogos como recurso tornou a aula mais "atraente" aos alunos, e incluiu no processo de aprendizagem a prática de questionamentos sobre a dinâmica do jogo e sobre os conteúdos por eles explorados.Nesse ponto vemos a importância do professor se sentir à vontade para inserir esses recursos em seu planejamento, incluindo em seu método de ensino o chamado "trabalho pedagógico criativo" e a aprendizagem criativa" (Miranda, 2016).

Quanto ao comportamento dos alunos, a professora registra que ocorrem mudanças significativas, justificadas pelo fato de que os mesmos têm espírito curioso e investigador, além disso, gostam de sair da rotina de livros e cadernos. Em sua avaliação sobre o comportamento e a motivação dos alunos frente ao uso de jogos matemáticos, fez os seguintes apontamentos:

> *"Vejo que, por meio de atividades com jogos os estudantes com dificuldade de aprendizagem mudam a imagem negativa do ato de não entender determinado conteúdo matemático. E os jogos permitem experiências desafiadoras que lhes garantam que aprender Matemática é muito interessante, pois está no nosso cotidiano (eles contam experiências vividas no dia-a-dia)".*
>
> (Professora regente, 2018).

Para ela, o processo de inclusão de jogos aliados a resolução de problemas, de forma geral, apresentou melhorias, tanto de aprendizagem de conteúdos quanto de comportamento, pois incentiva a obediência de regras e a resolução de atividades com mais segurança e habilidades.

Assim, pode-se dizer que a aprendizagem significativa ocorreu junto com a mudança de comportamento dos alunos, que passaram a desenvolver suas habilidades e comportamentos em relação a disciplina de Matemática e, também, em relação ao compartilhamento de ideias entre professor e alunos. Essa mudança foi percebida pela professora, ao apontar que:

> *"Dentre tantas coisas, o jogo favorece o estudante a resgatar o prazer em aprender (melhora a criatividade, senso crítico, participação, entre outros). Tem como desvantagem, quando os jogos são mal utilizados, os estudantes jogam, brincando e se sentem motivados pelo jogo, sem saber qual o objetivo está em sala de aula, jogando por jogar. O jogo por si só não tem propósito".* (Professora regente, 2018).

Ficou compreendido que o uso de jogos com propósito é facilitador do trabalho pedagógico desenvolvido pela escola e pelo professor, e pode sim desenvolver noaluno características relacionadas a criatividade e a integração na sociedade (Machado, 2011), bem como o crescimento pessoal relacionado a aspectos operacionais e cognitivos.

Conclusões

Com as observações realizadas em ambiente escolar, de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, em conjunto com a professora regente, pode-se identificar que: 1) a utilização de jogos de fixação aliados a resolução de problemas, no ensino da Matemática, é feita de forma esporádica, mesmo apresentando resultados satisfatório quando aplicados, enquadrando-se no que pode ser dito como recurso diferenciado de ensino; 2) é necessário um processo de aculturação dos professores para que a utilização de estratégias de ensino diferenciadas, como é o caso dos jogos, sejam incluídas na rotina escolar com maior regularidade e frequência; e 3) que o uso de jogos de fixação contribuiu sim para a aprendizagem de conceitos matemáticos no grupo de alunos observados, visto que eles melhoraram a forma de ver e enxergar a disciplina de Matemática sob um ponto de vista diferente, onde esta pode ser aplicada em situações corriqueiras, as quais muita vezes eles nem percebiam ter influência da disciplina, como num simples jogo de tabuleiro.

Assim, foi possível identificar por meio desta pesquisa que a aprendizagem significativa ocorre com o uso de jogos, por propiciar aos alunos momentos de interação e troca de experiências entre si e com o professor. Essa interação é que trará os resultados na aprendizagem pois posiciona o aluno como figura central no processo, permtindo o desenvolvimento dele como indivíduo e como parte integrante de um grupo, ou seja, individual e coletivo.

Prospectivas

Essa investigação revelou a importância de repensarmos a prática pedagógica no processo ensino- aprendizagem de Matemática que, ainda hoje, valoriza decorar fórmulas, mudando para uma Matemática prática, como a professora regente relatou. Sugere-se a avaliação dessa estratégia de ensino em outros anos, com a finalidade de compreender se a inserção de jogos, como recursos diferenciados apresenta resultados a longo prazo e com alunos mais próximos do final do ciclo da educação básica.

Por fim, salientamos a necessidade de novas investigações a respeito dos benefícios das atividades com uso jogos em todo ensino básico e a respeito da influência da mediação do professor por meio dessa metodologia nas estratégias matemáticas dos estudantes.

Referências

Alves, E. M. S.(2007).*A ludicidade e o Ensino de Matemática*. 4ª edição. Campinas-SP: Pairus.

Disponível em: <https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=LwWgxeyPdJQC&oi=fnd&pg=PA15&dq=tipos+de+jogos+de+fixa%C3%A7%C3%A3o&ots=LyBr1a7kOu&sig=RKzeBY52mm_rM8U6KdXHDA1UvRU#v=onepage&q=tipos%20de%20jogos%20de%20fixa%C3%A7%C3%A3o&f=false> Acesso em: 13 Ago 2018.

Cunha, J. S. C.; Silva, J.A. V. (2012). *A importância das atividades lúdicas no ensino da matemática.III Escola de Inverno de Educação Matemática*. Rio Grande do Sul: Universidade Federal de Santa Maria, 2012, 12p. Disponível em: <w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/RE/RE_Cunha_Jussileno.pdf> Acesso em: 04 Dez 2017.

Dante, L. R. (1989)*Didática da resolução de problemas de matemática*. São Paulo: Ática.

Flemming, D. M.(2004).*Criatividade e Jogos didáticos*. *Anais do VIII Encontro Nacional da Educação Matemática.* SBEM, 2004. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/02/MC39923274934.pdf> Acesso em: 13 Ago 2018.

Gerhardt, T. E.; Silveira, D. T. [Orgs.]. (2009).*Métodos de Pesquisa*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. 120 p. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf> Acesso em: 14 Ago 2018.

Gil, A. C.(2008).*Métodos e técnicas de pesquisa*. 6ª Ed. São Paulo: Editora Atlas.

Groenwald, C. L. O.; Timm, U. T.(2000).*Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula*. Só Matemática. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/artigos/a1/> Acesso em: 13 Ago 2018.

Lüdke, M.;Andre, M. E. D. A.(1986).Métodos de coletas de dados: observação, entrevista e análise documental. In: LÜDKE, Menga; ANDRE, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. *Pesquisa em Educação – abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Machado, A. I.(2011).*O lúdico na aprendizagem da Matemática*. Monografia. Curso de Especialização em Desenvolvimento Humano, Educação e Inclusão Escolar. Brasília: UAB/UnB, 2011, 58p. Disponível em: <bdm.unb.br/bitstream/10483/2120/1/2011_AparecidaItamaraMachado.pdf> Acesso em: 04 Dez 2017

Miranda, S.(2016).A ludicidade como estratégia didática favorecedora de aprendizagens significativas e criativas. p. 11-37 In: Antônio Villar Marques de Sá, Luiz Nolasco de Rezende Júnior e Simão de Miranda (Org.) *Ludicidade: desafios e perspectivas em educação*. Jundiaí: Paco Editorial, 2016, 260 p.

Onuchic, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G.(2011), *Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectiva*s. Bolema, Rio Claro, v.25, n.41 p.73- 98. Dez.

Modelización en el aula matemática

Andrés **Ortiz** jiménez
Facultad de Educación, Universidad Católica de la Santísima Concepción
Chile
aortiz@ucsc.cl
María **Aravena** díaz
Facultad de Ciencias Básica, Universidad Católica del Maule
Chile
maravena@ucm.cl
Horacio **Solar** bezmalinovic
Facultad de Educación, Universidad Católica de Chile
Chile
hsolar@uc.cl
Leonardo **Cárdenas** calderón
Facultad de Educación, Universidad Católica de Chile
Chile
lcardenc@uc.cl

Resumen

Este taller promueve un trabajo independiente que permitirá a los/las docentes participantes involucrarse en un ciclo de modelamiento desde dos puntos de vista. El primero, a través de un trabajo con problemas de modelado matemático para que pongan a prueba sus habilidades, destrezas, conocimientos matemáticos, procesos de comunicación y argumentación en los diferentes momentos del ciclo de modelado; y el segundo, analizar como ese proceso modelación puede implementarse en el aula. Se privilegiará un trabajo colaborativo mediante la interacción grupal con las diferentes situaciones que le permitan acercarse a los conceptos y procesos desde una perspectiva contextualizada, que puedan relacionar y valorar desde sus propias realidades, el rol de la modelación para describir diferentes fenómenos de la realidad.

Palabras clave: Competencias matemáticas, modelización, ciclo de modelamiento, desarrollo profesional profesores.

Introducción

La modelización de situaciones ha sido ampliamente investigada, mostrando que cuando es incorporada en el aula, permite el desarrollo de capacidades de alto nivel, necesarias para enfrentar un mundo cada vez más matematizado (Keitel, 1993; Aravena & Caamaño, 2007; Gómez, 2007). Sin embargo, Blomhoj & Carreira (2009) nos señalan que la modelización en la formación de profesores tanto de primaria como de secundaria sigue siendo una cuestión pendiente. Lo anterior es complejo, pues dentro de las competencias matemáticas que han generado consenso a nivel internacional, se destacan como esenciales preparar a los profesores en la formulación de problemas que involucren procesos de modelación, la utilización del lenguaje matemático, la comunicación y argumentación matemática y la capacidad de analizar y construir modelos matemáticos en diferentes contextos (Niss & Højgaard, 2011).

Esta tensión entre desarrollo de competencias y formación de profesores es señalada por Kauertz y sus colaboradores, quienes indican que la relación entre el desarrollo de las competencias y la enseñanza es todavía vaga, y las evaluaciones no proporcionan información del proceso de desarrollo de las competencias, sino que señalan las metas que deberían haberse logrado, proporcionando información que es útil para el diseño de políticas públicas en educación, pero no para orientar procesos de enseñanza (Kauertz, Newmann, & Hearting, 2012).

Justificación teórica del taller

Respecto a la modelización, existen autores que la sitúan como la base de la actividad matemática; debido principalmente a que en las tareas de modelización de situaciones se da un especial énfasis al proceso seguido por los estudiantes en dichas tareas, esto es, a procesos mediante las cuales realiza "la adecuación a los propios actos de conocimiento y no al contenido de los propios actos*"* (Gómez, 2007, p. 32*),* dando así más importancia a los procesos cognitivos que a los modelos obtenidos (Aravena, Caamaño y Giménez, 2008; Blomhøj, 2004); ello se puede ver reflejado en el marco teórico de PISA 2015 (OECD, 2016) en que se describe cada una de las siete competencias matemáticas según el ciclo de modelización.

En este sentido, planteamos que modelar un fenómeno observado o utilizar un modelo para comprender o resolver alguna situación, contribuye a una mejor formación de los alumnos en cualquier fase de escolaridad, fomenta el desarrollo de habilidades que ayuda a una mejor comprensión de conceptos matemáticos para su aplicabilidad y saber integrar la matemática a otras áreas del saber (Biembengut, 2016). Desde el punto de vista del aprendizaje, si el modelaje se torna parte del centro de la actividad matemática escolar, el estudiante en situaciones de su interés, aumentará su comprensión en el uso de datos, estimulará el uso de su capacidad matemática, desarrollará la comprensión de fórmulas algebraicas y la habilidad argumentativa, criticando y defendiendo los modelos creados al contrastar sus resultados con los de situaciones de la vida real (Saeki, Ujiie & Kuroki, 2007, citado en Biembengut, 2016: 102). En los primeros años de enseñanza primaria, la modelización se asocia a cuando los niños generan y desarrollan sus ideas y procesos matemáticos propios, para formar sistemas de relaciones que son generalizables y reutilizables (English, 2006).

Según Maaß (2006) para modelizar un problema real hay que moverse entre la realidad y la matemática. El proceso de modelación comienza en el mundo real; simplificando, estructurando e idealizando este problema se obtiene un modelo real. La matematización del modelo real conduce a un modelo matemático. Trabajando dentro de las matemáticas se obtiene una solución matemática; la cual tiene que ser primero interpretada para obtener una solución interpretada y luego validada. Si la solución o el proceso elegido no resulta ser adecuado a la realidad, los pasos o quizás incluso la totalidad del proceso de modelización necesita ser revisado. En la figura 1 se ilustra la propuesta de Maaß (2006) que se inicia con la simplificación del problema real, en donde la situación real puede manipularse de manera de obtener un modelo real, haciendo supuestos de diversas hipótesis, fragmentando el problema o bien se suponen despreciables ciertas variables. Utilización de sistemas de representación, esquemas, dibujos, reconocimiento de las variables que intervienen, identificación de las condiciones iniciales. Se busca alguna similitud con algo conocido del mundo matemático, lo cual es muy importante para poder enfrentar el proceso de matematización. (Gómez, 2007; Aravena, 2016). Esto nos permite obtener un modelo matemático inicial, que la autora denomina modelo real.

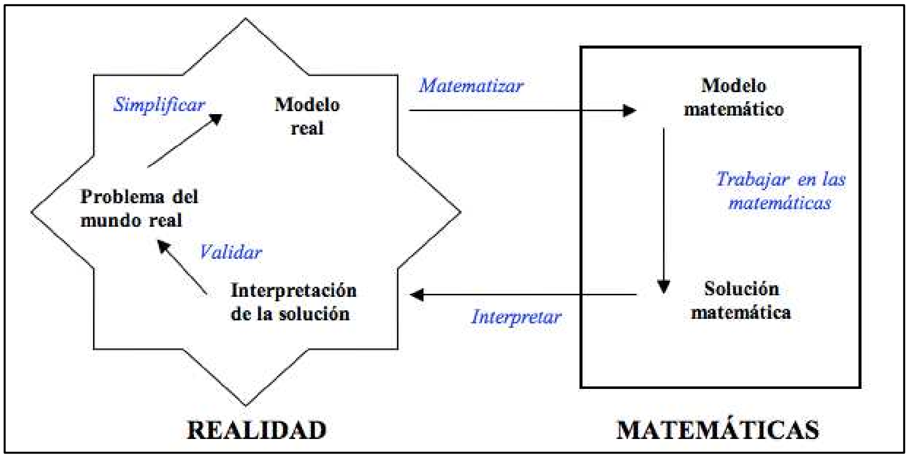


Figura 1. Procesos de modelación matemática (Maaß, 2006)

La entrada al mundo matemático se denomina Matematización. Este se genera mediante la traducción donde se sustituyen las palabras por símbolos y expresiones matemáticas (ecuación, funciones, etc.). Aquí se consigue una formulación matemática del problema y de manera natural se obtienen un problema en términos matemáticos. Esto es, el significado de matematización es la descripción de relaciones matemáticas que interpretan el proceso. En el proceso de matematización se aplican los métodos matemáticos tales como propiedades, algoritmos que resuelven el problema en términos matemático, hasta obtener una solución matemática del problema (Gómez, 2007; Niss, 2013), lo que se denomina la formulación del modelo.

La interpretación de la solución es la salida del mundo matemático, lo que se requiere es analizar si el modelo formulado es el adecuado, es saber si da respuesta al problema real. Si es un buen ajuste para los datos del problema, ver márgenes de errores, reestudiar los resultados numéricos obtenidos en términos del problema propuesto. Interpretar es saber si hay diversas soluciones, cual es la más adecuada al problema (Aravena, 2016).

Luego se entra a la etapa de validación, donde se requiere evaluar el modelo con nuevos datos del domino o proyectar nuevos datos, esto es, justificar la validez del modelo, si satisface las condiciones iniciales.

Finalmente se estudia el análisis y proyección del modelo, lo que no está descrito explícitamente en el esquema de Maaß (2006), pero que requiere ser analizado en todo proceso de modelación matemática (Gómez, 2007; Aravena, 2016). Aquí se analiza las fortalezas y limitaciones del modelo, esto es, el modelo presenta limitaciones que están relacionadas con las decisiones iniciales, cuando se fragmentó o con las condiciones iniciales del objeto real como deformaciones por el medio ambiente, etc. Hay que tener presente, que el modelo es adecuado, si las condiciones se mantienen, pues si cambian las condiciones, como por ejemplo en el problema de la temperatura, el modelo no sirve. O que no es posible generalizar para otras situaciones.

Las fortalezas están relacionadas con la posibilidad de generalizar el modelo para situaciones similares. Por ello, la generalización es un paso importante en todo proceso de modelación, pues lo que se busca es tratar de modelar una situación real para poder luego buscar una generalización que permita contar con una expresión algebraica o analítica (cuando se habla de analítica es de todo el proceso) que nos lleve a su utilización en situaciones similares (Aravena, 2016). Así nos evitamos que para cada situación muy similar tengamos que iniciar todo el proceso de modelamiento, lo cual no sería eficiente. Así la generalización permite contar con un modelo que nos sirve para diversas situaciones muy similares unas de otras.

Propuesta del Taller

Situación para modelar: "Cuidemos el Medio Ambiente" (Aravena y Caamaño, 2007). En 1896 el científico sueco Svante Arrhenius fue el primero en predecir el efecto invernadero como resultado de las emisiones de dióxido de carbono en el aire por parte de los países industrializados. La quema de combustibles fósiles continúa produciendo 5,4 mil millones de toneladas de carbono al año, las cuales son absorbidas por la atmósfera y por los océanos. En 1990 el Grupo Internacional sobre el Cambio de Clima (GICC) pronosticó que, de continuar la tendencia actual, aumentará la temperatura promedio global de la Tierra. La tabla 1 muestra los datos del aumento de la temperatura global pronosticada en grados Celsius.

Tabla 1

Aumento de la temperatura global pronosticada en grados Celsius

Año	Temperatura
1980	0.0
2000	0.42
2020	0.84
2040	1.26
2060	1.68
2080	2.10

A partir de la información, responda las siguientes preguntas: (1) Determina un modelo de manera que concuerde con los datos y representa gráficamente; (2) Tomando tu expresión general (o modelo) explica el significado de los coeficientes de la función; (3) Predice la temperatura estimada para los años: 2030 y 2085

Análisis del Taller

El análisis comienza con la parte de simplificación del problema real, el cual se muestra en la figura 2.

Datos: Años; Aumento de temperatura en grados Celsius

Utiliza sistemas de representación: Tabla de datos y gráficos

t	Años	Temperatura en °C
0	1980	0.0
20	2000	0.42
40	2020	0.84
60	2040	1.26
80	2060	1.68
100	2080	2.10

Condiciones iniciales:

Despreciar la temperatura antes de 1980. Considerar el año 1980 como el año t= 0. Incremento de la temperatura constante (0.42° C) cada 20 años.

Figura 2. Simplificación del problema real

Posteriormente, empieza la *Matematización* en donde se identifican las relaciones matemáticas. En la situación de este taller, el modelo matemático inicial se relaciona con la función lineal o afín y por tanto se produce un cambio de representación, pasando del algebraico al geométrico o del geométrico al algebraico, lo anterior se puede observar en la figura 3

<table>
<tr>
<td>

(A) Modelo Matemática Inicial

Relaciona la situación con la función afín $f(x) = mx + b$ y la ecuación corresponde a: $y = mx + b$

Utiliza cambios de representación, del algebraico al geométrico o viceversa.

Identifican las ecuaciones o relaciones de acuerdo con el contexto del problema.

Utilización de propiedades, algoritmos y aplicabilidad de teoremas

</td>
<td>

(B) Proceso de Matematización

El incremento de la T° es directamente proporcional con el incremento de los años

<table>
<tr><th>Incremento en años (t)</th><th>Años</th><th>Temperatura en °C (T)</th><th>Incremento en °C (d)</th></tr>
<tr><td>-</td><td>0</td><td>0.0</td><td>-</td></tr>
<tr><td>20</td><td>20</td><td>0.42</td><td>0.42-0= 0.42</td></tr>
<tr><td>20</td><td>40</td><td>0.84</td><td>0.84-0.42= 0.42</td></tr>
<tr><td>20</td><td>60</td><td>1.26</td><td>1.26-0.84= 0.42</td></tr>
<tr><td>20</td><td>80</td><td>1.68</td><td>1.68-1.26= 0.42</td></tr>
<tr><td>20</td><td>100</td><td>2.10</td><td>2.10-1.68= 0.42</td></tr>
</table>

Se calcula la pendiente de la recta:
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2.10 - 0.42}{100 - 20} = \frac{1.68}{80} = 0.021$

Como la ecuación de la recta tiene la forma $y = 0.021x$

</td>
<td>

También se puede encontrar la regularidad
$\frac{y}{x} = k$

sabiendo que $x \neq 0; y \neq 0$

Entonces el modelo matemático es $T(t) = 0.021 \cdot t$

</td>
</tr>
</table>

Figura 3. Matematización

A partir de lo anterior se establece la <u>FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO FINAL (en términos numéricos).</u> Como la gráfica de la recta pasa por el origen (0,0) se tiene que $b = 0$, así la ecuación de la recta es $T(t) = 0.021 \cdot t$. Posteriormente, ver figura 4, se inicia la VALIDACIÓN, en la cual se dan las etapas: Verificación y validación con datos numéricos; Generalización del modelo.

<table>
<tr>
<td>

Verificación y validación con datos numéricos

Verificación Se consideran dos puntos de la gráfica.

P_1= (20, 0.42)
P_2= (100, 2.10)

Se tomará el punto t= 60.

Luego,
$y = 0.021 \cdot 60$
$y = 1.26$

</td>
<td>

Generalización del modelo.

Sea la variable dependiente y que se corresponde con el aumento de la temperatura °C (T). Y la variable independiente x que se corresponde con los años (t).
Entonces tenemos que el aumento de T en función del año queda de la siguiente forma
T(t) = m t
$T(A) = m \cdot A$
$T(A) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot A$
Luego,
$d = y_2 - y_1$
$t = x_2 - x_1$

</td>
<td>

Matematizando:
Se reemplaza $d = y_2 - y_1$; $t = x_2 - x_1$

$\boxed{T(A) = \frac{d}{t} \cdot A}$

<u>Validación y verificación</u>
Validación del modelo general
d= 0.42
t= 20 entonces,
$\frac{d}{t} = \frac{0.42}{20} = 0.021$
Como el modelo tiene la forma
$T(A) = \frac{d}{t} \cdot A \qquad T(A) = 0.021 \cdot A$
<u>Verificación</u>
Se considerará un tiempo de 60 años (A), luego de 1980.
Entonces,
$T(A) = 0.021 \cdot 60 \qquad T(A) = 1.26$

</td>
</tr>
</table>

Figura 4. Verificación y validación con datos numéricos. Generalización del modelo.

Luego, en la figura 5 se mostrará un análisis y proyección de las limitaciones y fortalezas del modelo

Fortalezas:	Limitaciones del modelo	Comunicación matemática.
El modelo puede ser utilizado para diferentes intervalos de tiempo, y diferentes incrementos de temperatura. Por ejemplo: el aumento de la temperatura en el núcleo del sol en los últimos millones de años.	No es aplicable para calcular temperaturas antes del año 1980. No es aplicable si el aumento de la temperatura no es constante.	Dar respuesta al problema real. El modelo generalizado sirve para encontrar la temperatura en años posteriores a 1980.

Figura 5. Verificación y Validación con datos numéricos. Generalización del modelo

Habiendo finalizado el proceso, es importante analizar las posibles dificultades y mencionar algunas soluciones (ver tabla 2) cunado se está desarrollando esta actividad matemática con los estudiantes.

Tabla 2

Posibles dificultades y soluciones al implementar el problema en el aula

Posibles dificultades y obstáculos	Posibles Soluciones
No relacionan los datos de la tabla con una proporción directa.	Hay que recordar que la constante de una proporción directa es de la forma $k = \frac{y}{x}$
No reconocer la ecuación de la recta.	Ubicar los valores de la tabla como puntos en el plano cartesiano, y unirlos mediante una recta.
No saber escribir la forma general de la ecuación de la recta.	Apoyar en recordar forma general de la ecuación de la recta.
No saber encontrar la pendiente en una ecuación de la recta.	Relacionar la pendiente de la recta con la constante de proporcionalidad (*k*).
No relacionar el coeficiente de posición con el punto que pasa por el origen.	Los alumnos discutan en grupos cual es la diferencia de una función afín y una función lineal.

Por último, mostramos un plan de clases, con lineamientos generales para la gestión del modelamiento de la situación presentada en el aula (ver tabla 3)

Tabla 3

Lineamientos para una implementación en el aula

	Tiempo	Rol del estudiante	Rol del profesor
Comprender el problema	15 Minutos	• Leer el problema y organizar los datos • Utiliza información para complementar tabla que presenta la situación. • Reconocer y nombrar las variables involucradas.	• Introducir el problema a la clase. • Observar, guiar y atender a los grupos de trabajo para aclarar dudas sin entregar soluciones.
Desarrollar una solución por sí mismos.	40 Minutos	• Graficar la información de la tabla. • Relacionar la gráfica con la ecuación de la recta. • Describir el modelo inicial. • Matematizar y completar un modelo de acuerdo con el problema. • Modelo final.	• Responder consultas de los estudiantes. • Acercar a los estudiantes a utilizar los conceptos de: pendiente, constante de proporcionalidad y coeficiente de posición.
Discusión grupal del	20 Minutos	• Analizan el o los modelos propuestos. • Se discute el modelo final que da respuesta al problema.	• Observar y orientar el trabajo de los estudiantes complementando

ciclo de modelación.		• Validación y verificación del modelo final.	los conceptos con lenguaje matemático y notación. • Atener sus dudas y fomentar sus ideas sin entregar soluciones.
Conclusión	20 Minutos	• Presentan soluciones y extrapolan los resultados obtenidos al problema y su contexto. • Generan conclusiones y generalizaciones a partir del problema. • Proyectan posibles generalizaciones y aplicaciones. • Argumentan matemáticamente sus procesos y resultados	• Escuchar y criticar constructivamente las ideas, dudas y comentarios de los estudiantes. • Complementar las respuestas de los estudiantes, fomentar las diferentes líneas de pensamiento y valorar los distintos modelos propuestos.

Reflexiones finales del taller

Este taller hace que los profesores participantes vivan una tarea de modelización con una interpretación renovada de lo que es el "aprendizaje significativo" en una perspectiva de cambio constante. La enseñanza de un objeto matemático debe ser contextual, debe contemplar su aspecto informativo, de elementos de otras ciencias, su aspecto formativo, centrado en el desarrollo del pensamiento, el fomento del espíritu crítico y la práctica del razonamiento lógico, todo ello basado en la resolución de problemas (Aravena, Caamaño & Giménez, 2008). Esto se complementa con la necesidad de crear contextos adecuados para enseñar a matematizar, como forma de dar significatividad al proceso de hacer matemática. En efecto, existe consenso en que el aprendizaje y la enseñanza, deben partir de contextos que revistan interés y que tengan pertinencia en el mundo real. Sin embargo, usualmente los contextos se utilizan después de haber enseñando a los alumnos las matemáticas formales. Otro aspecto que esperamos que los profesores vivan con este taller, es una experiencia de aprendizaje cooperativo, que se reconoce como un medio potente para abordar problemas matemáticos, flexible de hacer fluir los mecanismos individuales de construcción del conocimiento matemático de los estudiantes, además es un buen productor o reproductor de argumentos matemáticos, permitiendo generar mecanismos de integración del conocimiento, evitando la descontextualización y posibilitando la vinculación con otras áreas, en que se reconoce, además, que todo conocimiento se construye en estrecha relación con los contextos en los que se usa, y que, no es posible separar los aspectos cognitivos, emocionales y sociales presentes en el contexto en que se actúa.

Referencias y bibliografía

Aravena, M., & Caamaño, C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *33*(2), 7-25.

Aravena, M., Caamaño, C., & Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(1), 49-92.

Aravena, M. (2016). La modelación matemática en Chile (2016). En Arrieta, Jaime y Díaz, Leonora (eds.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa*. España: Gedisa.

Biembengut, M. S. (2016). Modelaje Matemático en la Educación Brasileña: Historia de las Ideas e Ideas de las Historias. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.). *Investigaciones Latinoamericanas*. Barcelona: Gedisa.

Blomhoj, M. (2004). Mathematical modelling—a theory for practice. En B. Clarke et al. (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-160). Göteborg University: National center for mathematics education.

Blomhøj, M., & Carreira, S. (2009). Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics. En *Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 6-13).

English, L. D. (2006). Mathematical modeling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational studies in mathematics*, *63*(3), 303-323.

Gómez, J. (2007). *La matemática reflejo de la realidad. La modelización matemática como herramienta para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas*. Badajoz: FESPM.

Kauertz, A., Newmann, K. & Hearting, H. (2012) Competence in science education. En Fraser, et. al (Eds.), *Second International Handbook of Science Education* (711-721). London: Springer.

Keitel, C. (1993). Implicit mathematical models in social practice and explicit mathematics teaching by applications. *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications. Chichester: Ellis Horwood*, 19-30.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113-142.

Niss, M. (2013) Modeling a Crucial Aspects of Students´ Mathematical Modeling. En R. Lesh, P. Galbarith, C. Haines, A. Hurford (Eds). *Modeling Students´ Mathematical Modeling Competencies. (*pp. 43-59). *ITCMA 13*. M VI, 378 V8 Springer: Dordrecht Heidelberg New York London.

Niss, M. & Højgaard, T. (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark.*(English edition). IMFUFA tekst n. 485/2011. Roskilde: Roskilde University.

OECD. (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. OECD Publishing: Paris.

Um cenário das pesquisas envolvendo Resolução de Problemas em edições da CIAEM

Cidimar **Andreatta**
Universidade Cruzeiro do Sul
Brasil
cidimarcol@gmail.com Norma
Suely Gomes **Allevato**
Universidade Cruzeiro do Sul
Brasil
normallev@gmail.com

Resumo

A presente comunicação consiste em um mapeamento das pesquisas envolvendo a temática Resolução de Problemas que foram apresentadas na Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM), nas edições de 2011 e 2015. O corpus de pesquisa deste trabalho teve como fonte de coleta de dados os anais da referida Conferência, disponibilizados nos *sites* dos eventos. Procurou-se evidenciar a forma como a CIAEM foi se constituindo como um evento importante de discussão para a Educação Matemática nas Américas. De modo especial, buscou-se abordar características marcantes dos trabalhos que envolveram a Resolução de Problemas como temática central, tendo em vista a variedade de temáticas que constituem a Conferência. Os resultados da pesquisa demonstram, de um modo geral, que os trabalhos apresentam convergências com a Resolução de Problemas como metodologia de ensino e campo de discussões teóricas em favor da aprendizagem dos estudantes.

Palavras chave: Ensino de Matemática, Resolução de Problemas, Pesquisa em Educação Matemática, Situações-Problema, Ambientes de Aprendizagem.

Introdução

Esta comunicação tem por objetivo apresentar um mapeamento dos trabalhos/pesquisas, relacionados à temática Resolução de Problemas - RP[1], apresentados nas duas últimas edições da Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM, nos anos de 2011, no Brasil, e 2015, no México.

[1] Optamos neste trabalho por utilizar a sigla “RP” para designar Resolução de Problemas.

De acordo com o Comitê Interamericano de Educação Matemática, a CIAEM é o primeiro grupo regional criado na Comissão Internacional de Instrução Matemática - ICMI, tendo sua primeira edição realizada na Colômbia em 1961. Diversos países sediaram a conferência desde sua primeira edição até a última, em 2015 no México. A referida Conferência vem sendo realizada a cada quatro anos e, até o presente momento, já houve catorze edições, nos anos de 1961, 1966, 1972, 1975, 1979, 1985, 1987, 1991, 1995, 1999, 2003, 2007, 2011 e 2015. Na última edição, em 2015, foram apresentados mais de quinhentos trabalhos, com a participação de aproximadamente mil profissionais da área de ensino, envolvendo 23 países.

A CIAEM configura-se como uma importante Conferência para a área de Ensino da Matemática, em nível internacional, pois é um evento interamericano, concentrando a maior parte das edições em países da América do Sul, com uma tradição de trabalho acadêmico de matemáticos e educadores de grande experiência, como Marshall Stone, Luis Santaló, Ubiratan D'Ambrosio, entre muitos outros. Tal importância, verifica-se, também quando direcionamos o olhar para o quantitativo de participantes nas últimas edições, em relação às demais, conforme se observa na tabela 1.

Tabela 1

Quantidade de participantes em edições da CIAEM

Edições da CIAEM	País - Sede	Participantes
1961	Colômbia	48
1966	Peru	84
1972	Argentina	209
1975	Venezuela	281
1979	Brasil	569
1985	México	180
1987	República Dominicana	316
1991	Estados Unidos	141
1995	Chile	1.080
1999	Uruguai	600
2003	Brasil	600
2007	México	800
2011	Brasil	1.800
2015	México	1.000

Fonte: construção dos autores

Podemos verificar um aumento significativo de participantes nas edições de 1995 e 2011, realizadas, respectivamente, no Chile e no Brasil, assim como percebemos uma maior ocorrência da Conferência em países da América do Sul, tendo o Brasil e o México sediado mais de uma vez o evento, com três edições em cada um. O próximo encontro da CIAEM será realizado pela segunda vez na Colômbia, no mês de maio do ano de 2019.

O presente texto configura-se como um mapeamento, retratando o estado do conhecimento, uma vez que se refere a um lócus específico e restrito de investigação acerca da temática Resolução de Problemas em eventos científicos, de acordo com Romanowski e Ens (2006). Para realizar o mapeamento proposto nesta pesquisa, analisamos as Comunicações Científicas das edições de 2011 e 2015 relacionadas à temática Resolução de Problemas, apresentadas no grupo de trabalho direcionado a essa temática específica e nos demais grupos voltados a outras temáticas, mas que também abordaram a RP. Utilizamos como fonte de consulta para seleção dos trabalhos mapeados os títulos e os resumos dos artigos. Em alguns casos foi necessária a consulta ao trabalho na sua totalidade.

Nesse sentido, o trabalho em questão apresenta, inicialmente, nesta indrodução, o contexto histórico de constituição e evolução da CIAEM, que foi se configurando como um importante evento da área de Educação Matemática nas Américas. Na parte metodológica são abordados os Focos Temáticos selecionados para mapeamento dos trabalhos, suas tendências e as convergências e divergências na RP. Por fim, trazemos as considerações finais e as referências.

Metodologia

A presente pesquisa configura-se como estado de conhecimento, cujo objetivo é relatar análises dos trabalhos que foram apresentados nas edições da CIAEM de 2011 e 2015, relacionadas à temática Resolução de Problemas nos formatos de Comunicação Científica.

As análises foram organizadas em focos e subfocos temáticos, de acordo com os referenciais teóricos de Fiorentini (2002), conforme relacionados na Tabela 2. Fiorentini (2002) destaca que são diversas as formas de organização ou categorização de trabalhos: pela metodologia da pesquisa utilizada, pelo referencial teórico, pelos objetivos de investigação ou pelos paradigmas epistemológicos da pesquisa. A opção utilizada neste artigo é por focos temáticos, indo ao encontro das contribuições do trabalho de mapeamento realizado por Fiorentini (2002, p. 4), que destaca:

> [...] essa forma de organização exige que se identifique, para cada trabalho, o foco principal da investigação. Esse processo não é simples ou direto, pois acontece de forma indutiva e, às vezes, dedutiva, exigindo ajustes individuais (para cada estudo) e grupais (envolvendo um conjunto de estudos). A vantagem é que as categorias construídas emergem do material sob análise e não da literatura propriamente dita, embora, neste processo, o diálogo com a literatura e outras formas de classificação seja conveniente e necessário.

Na próxima seção, são apresentados os focos temáticos que identificamos nos trabalhos analisados nas Conferências de 2011 e 2015, acompanhados de alguns dados.

Alguns Resultados

Tendências dos trabalhos

Conforme já explicitado, a organização dos trabalhos está direcionada em focos temáticos a partir dos pressupostos teóricos de Fiorentini (2002). Organizar trabalhos tematicamente não é uma tarefa fácil, mas permite-nos identificar e comparar os diferentes olhares e resultados produzidos pelos trabalhos, independente das opções teóricas e metodológicas dos autores.

As contribuições teóricas de Kilpatrick (1996), ao destacar critérios para julgar/avaliar pesquisas em Educação Matemática também foram importantes na delimitação dos focos e subfocos temáticos deste trabalho, principalmente em se tratando dos critérios de: Relevância e pertinência em relação à: Educação e à Educação Matemática; Coerência teórico-metodológica; Contribuições ao processo de pesquisa e ao campo teórico e prático da Educação Matemática.

Identificamos neste mapeamento 30 trabalhos na edição da CIAEM de 2011 e 23 trabalhos em 2015 relacionados à temática RP, totalizando 53 trabalhos, organizados na Tabela 2 em Focos e Subfocos Temáticos. Na organização, foram identificados sete focos temáticos e dez subfocos. Alguns trabalhos apresentam relação com mais de um foco; porém, nesse caso, foi dada prioridade à temática de maior abrangência no trabalho.

Tendo em vista a quantidade de trabalhos categorizados, optamos por relacionar somente as autorias dos trabalhos organizados nos focos e subfocos temáticos e não os títulos das pesquisas, conforme apresentado.

Tabela 2

Categorização dos trabalhos

FOCO TEMÁTICO	SUBFOCO	Autores	CIAEM	
			2011	2015
Estudos com a RP nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental	A RP como estratégia de ensino para o desenvolvimento de conteúdos/conceitos matemáticos	Silva/Spinillo (2011) Santos/Camargo (2011) Rozal et al (2015) Polo/Rivera (2015)	02	02
	Estratégias/habilidades na RP com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem	Henriques et al. (2011) Justo et al. (2015)	01	01
	Leitura, interpretação e produção de problemas matemáticos	Lautert/Ferreira (2011) Coutinho (2011)	02	-
Estudos com a RP nos Anos Finais do Ensino Fundamental	A RP como estratégia de ensino para o desenvolvimento de conteúdos/conceitos matemáticos	Justo/Echeveste (2011)	01	-
	Estratégias/habilidades na RP com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem	Coelho et al. (2011) Grando/Hubner (2011) Assunção et al. (2015)	02	01
	A metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da RP	Morais/Onuchic (2011)	01	-
	A RP numa dimensão contextual de aprendizagem (produção de narrativas e letramento matemático)	Almeida/Fiorentini(2011)	01	-
Estudos com a RP no Ensino Médio	A RP como estratégia de ensino para o desenvolvimento de conteúdos/conceitos matemáticos	Orfão (2011) Rodrigues et al. (2015)	01	01
	Registros de representação semiótica na RPs	Rodrigues/Carrião (2011)	01	-
	Estratégias/habilidades na RP com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem	Paiva et al. (2011) Gusmão et al. (2011) Pacheco/Roazzi (2011) Souza/Silva (2015) Meira/Medeiros (2015) Braga/Sa (2015) Bravo et al. (2015) Zamorano (2015)	03	05

Estudos com a RP no Ensino Superior	Estratégias/habilidades na RP com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem (Engenharia Didática)	Toso et al. (2011) Martinez et al. (2011) Matassa et al. (2011) Pita et al. (2011) Mendoza/Delgado (2011)	05	-
	A RP numa dimensão contextual de aprendizagem (produção de narrativas e letramento matemático)	Enriquez/Efremov (2015)	-	01
Estudos com a RP em livros didáticos	Análises de conteúdos matemáticos a partir de livros didáticos	Chaves/Neves (2015)	-	01
FOCO TEMÁTICO	SUBFOCO	Autores	CIAEM	
			2011	2015
Estudos com a RP sobre o professor de Matemática: formação inicial e continuada	Estratégias/habilidades na RP com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem	Cavalcante/Rego (2011) Arenas/Rico (2015) Velandia/Leal (2015)	01	02
	A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da RP	Costa/Allevato (2015)	-	01
	A RP como estratégia de ensino para o desenvolvimento de conteúdos/conceitos e teorias matemáticas	Matos et al. (2015) Dias/Alves (2015) Castiblanco/Vargas (2011) Zamorano (2011) Pinilla/Vanegas (2011)	03	02
	Concepções/conhecimentos docente sobre a RP e Identificação de tipos de problemas/exercícios matemáticos	Klein/Pereira (2011) Lima/Manrique (2011) Proença/Pirola (2011) Mendoza et al. (2011) Vale/Barbosa (2015) Oliveira/Passos (2015) Barbosa/Vale (2015) Raiva et al. (2015) Marquez/Robelo (2015)	04	05
	Análises das possibilidades e dificuldades no processo de elaboração de problemas matemáticos	Azeredo et al. (2011)	01	-
Estudos com a RP no campo da Educação não formal	A RP como estratégia de ensino para o desenvolvimento de conteúdos/conceitos e teorias matemáticas	Meneghetti et al. (2011)	01	-
	Estratégias/habilidades na RP com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem	Costa et al. (2015)	-	01

Fonte: construção dos autores

Percebemos que o foco temático "Estudos com a RP sobre o Professor de Matemática: formação inicial e continuada" possui a maior quantidade de trabalhos, perfazendo um total de 35% dos trabalhos analisados. Em seguida, temos "Estudos com a RP no Ensino Médio", com 11 trabalhos, e "Anos Iniciais do Ensino Fundamental", com 8 trabalhos. No geral, percebemos um equilíbrio na concentração dos trabalhos entre a Educação Básica e o Ensino Superior, quando direcionamos o olhar para o foco temático da formação inicial e continuada de professores. Neste foco a maior parte dos trabalhos volta-se à formação inicial de professores, mas eles são frutos de pesquisas realizadas na Educação Básica.

Em relação aos subfocos temáticos, a maior parte dos trabalhos está organizada no subfoco "Estratégias/habilidades na RP com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem", concentrando aproximadamente 50% dos trabalhos analisados. Os trabalhos organizados neste subfoco envolvem pesquisas relacionadas à Resolução de Problemas como metodologia de ensino com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem, desde jogos, materiais concretos e atividades lúdicas a ambientes práticos e recursos relacionados à tecnologia da informação e comunicação, como *softwares* e jogos digitais. Outro subfoco que concentrou uma quantidade significativa de trabalhos foi "A RP como estratégia de ensino para o desenvolvimento de conteúdos/conceitos e teorias matemáticas", que envolveu pesquisas com foco central no desenvolvimento e na investigação de conteúdos matemáticos específicos, de acordo com a etapa de escolarização.

É importante destacar também que o subfoco "Concepções/conhecimentos docente sobre a RP e Identificação de tipos de problemas/exercícios matemáticos" esteve relacionado somente ao foco temático da formação inicial e continuada de professores, porém concentrou 9 trabalhos, representando 16% dos trabalhos analisados. As pesquisas deste subfoco estão relacionadas aos conhecimentos e às concepções que os professores e futuros professores possuem acerca de aspectos da RP envolvendo diferentes métodos de pesquisa, tais como entrevistas, aplicação de questionários, grupos focais, observações de aulas, dentre outras. A Tabela 3, relacionada a seguir, apresenta um resumo da quantidade dos trabalhos organizados nos focos temáticos.

Tabela 3

Distribuição dos trabalhos nos focos temáticos

FOCOS TEMÁTICOS	**QUANTIDADE**	**PERCENTUAL**
Estudos com a RP nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental	08	15,0
Estudos com a RP nos Anos Finais do Ensino Fundamental	07	13,0
Estudos com a RP no Ensino Médio	11	20,3
Estudos com a RP no Ensino Superior	06	11,1
Estudos com a RP em livros didáticos	01	1,8
Estudos com a RP sobre o professor de Matemática: formação inicial e continuada	19	35,1
Estudos com a RP no campo da Educação não formal	02	3,7

Fonte: construção dos autores

Considerando a quantidade de trabalhos selecionados neste cenário de mapeamento, propomos uma discussão mais contextualizada, envolvendo os sete focos temáticos, e não necessariamente uma abordagem específica de cada trabalho. Alguns subfocos temáticos se repetem entre os focos temáticos, o que demonstra convergências com os métodos e os objetos de estudo das pesquisas. Tais convergências facilitaram o agrupamento e a organização dos trabalhos, e contribuíram para um olhar mais crítico no julgamento dos trabalhos, indo ao encontro dos critérios de análise de Kilpatrick (1996), citados anteriormente.

De um modo geral, quase todos os trabalhos são de natureza empírica e envolvem pesquisas em ambientes formais de aprendizagem. Em relação ao primeiro foco temático, direcionado aos anos Anos Iniciais do ensino fundamental, percebemos uma predominância maior de trabalhos em relação ao subfoco "A RP como estratégia de ensino para o desenvolvimento de conteúdos/conceitos matemáticos". Cabe ressaltar neste foco temático que o trabalho de Justo et al. (2015) investigou também a formação de professores que atuavam no ensino fundamental, porém o foco maior foi a aprendizagem matemática com problemas envolvendo alunos em uma escola pública no sul do Brasil.

No foco temático Anos Finais do ensino fundamental, há uma convergência de trabalhos que investigaram a RP como estratégia de ensino com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem. É importante destacar que o trabalho de Assunção et al. (2015) utilizou situaçõesproblema em uma avaliação diagnóstica como estrategia para verificar os conhecimentos prévios dos alunos e não abordou procesos de RP.

O foco temático com a RP no Ensino Médio foi o segundo maior em quantidade de trabalhos com destaque para pesquisas relacionadas a estratégias/habilidades na RP com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem. Ainda neste foco temático, ressalta-se que o trabalho de Rodrigues et al. (2015) esteve relacionado a dois subfocos, pois investigou o ensino de função quadrática por meio da RP com o uso do Geogebra.

De grande relevância também é o foco temático relacionado aos estudos envolvendo a RP sobre o professor de Matemática: formação inicial e continuada, que concentrou a maior parte de todos os trabalhos analisados. Marquez e Robelo (2015) apresentaram resultados interessantes, mostrando que os professores fazem confusão entre exercício e problema, apontando para uma mecanização no desenvolvimento de habilidades do pensamento matemático. Ainda neste foco temático, a pesquisa de Costa e Allevato (2015) mostra que é possível estabelecer conexões entre duas sub áreas da Matemática, de forma integrada, por meio da metodologia de ensinoaprendizagem-avaliação através da RP. O trabalho mostra a importância para que futuros professores vivenciem a RP como metodologia de ensino e percebam a possibilidade do trabalho integrado com os conteúdos matemáticos.

Considerações Finais

O presente mapeamento possibilitou-nos ampliar os olhares para a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, que pode favorecer a aprendizagem de conteúdos matemáticos. De um modo geral, a maior parte dos trabalhos apresenta características que convergem com tal metodologia, demonstrando possibilidades reais de utilizá-la na Educação Básica, no Ensino Superior e até em ambientes de Educação não formal.

A Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM constituiu-se como um grande evento na área de ensino de Matemática nas Américas, dada a quantidade de trabalhos apresentados em suas últimas edições. Vale ressaltar que, no no caso específico de trabalhos envolvendo a Resolução de Problemas, mesmo em uma edição sediada fora do Brasil, o maior número de trabalhos apresentados foi brasileiro.

A Conferência de 2011 teve uma apresentação bem maior de trabalhos brasileiros do que o evento de 2015. Tanto em 2011 quanto em 2015, a maior parte dos textos esteve relacionada à formação inicial e continuada de professores, considerando que a maior abrangência foi direcionada à Educação Básica. Não identificamos trabalhos que envolvessem a RP na educação infantil nos dois eventos analisados.

Ao direcionarmos o olhar para os subfocos temáticos, é importante considerar a predominância dos trabalhos relacionados a "Estratégias/habilidades na RP com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem", o que demonstra convergência com a RP como recurso metodológico em favor do processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos, indo ao encontro das orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), quando destaca que o ponto de partida de uma atividade matemática não deve ser a definição dos conteúdos, mas a resolução de problemas que possa levar à construção desse conteúdo.

De certa forma, apresenta convergência também com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), quando percebemos que a BNCC faz referência a RP como recurso para a aprendizagem de conteúdos matemáticos, sendo objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo do ensino fundamental.

Neste contexto, esperamos que o presente mapeamento se constitua em uma fonte de consulta a trabalhos que possam interessar a pesquisadores, professores e estudantes envolvidos com a temática de Resolução de Problemas, tendo em vista o cenário que aqui apresentamos de pesquisas desenvolvidas entre os diversos países das Américas.

Referências Bibliográficas

Assunção, J. A., Chirone, A. R. R., Mendoza, H. J. G., & Delgado, O. T. (2015). Análise da avaliação diagnóstica da estratégia de situações problemas em expressões algébricas. *Anais da Conferência Interamericana de Educação Matemática* (p. 9). Tuxtla Gutiérrez, Chiapas/México, Recuperado de http://ciaem-redumate.org/memorias-ciaem/xiv/.

Brasil (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais: primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental. Brasília, *Ministério da Educação e do Desporto*. Secretaria de Educação Fundamental.

Brasil (2017). Conselho Nacional de Educação. Resolução 2/2017. Institui e orienta a implantação da Base Nacional Comum Curricular. Brasília, *Ministério da Educação*.

Costa, M. S., & Allevato, N. S. G. (2015). Proporcionalidade e função afim: uma possível conexão através da resolução de problemas. *Anais da Conferência Interamericana de Educação Matemática*, (p. 12). Tuxtla Gutiérrez, Chiapas/México, Recuperado de http://ciaem-redumate.org/memorias-ciaem/xiv/.

Fiorentini, D. (2002). Mapeamento e balanços dos trabalhos do GT-19 (Educação Matemática) no período de 1998 a 2001. *Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*, 25, 1-17, Recuperado de http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/mapeamento.pdf.

Justo, J. C. R., Santos, J. F., Borga, M. F., & Rebelo, K. S. (2015). Desempenho de alunos dos anos iniciais do ensino fundamental na resolução de problemas aditivos e multiplicativos. *Anais da Conferência Interamericana de Educação Matemática*, (p. 12). Tuxtla Gutiérrez, Chiapas/México, Recuperado de http://ciaem-redumate.org/memorias-ciaem/xiv/.

Kilpatrick, J. (1996). Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico. Tradução: Rosana G. S. Miskulin, Cármen Lúcia B. Passos, Regina C. Grando e Elisabeth A. Araujo. *Zetetiké*, *4*(5), 99-120.

Marquez, J. H., & Robelo, O. G. (2015). Ejercicio y problema dos caras de la misma moneda. *Anais da Conferência Interamericana de Educação Matemática*, (p. 11). Tuxtla Gutiérrez, Chiapas/México, Recuperado de http://ciaem-redumate.org/memorias-ciaem/xiv/.

Rodrigues, P. F. C., Côrrea, M. S., Suett, W. B., & Barros, M. D. (2015). Resolução de Problemas:

Abordagem ao Ensino da Função Quadrática. *Anais da Conferência Interamericana de Educação Matemática,* (p. 12). Tuxtla Gutiérrez, Chiapas/México, Recuperado de http://ciaemredumate.org/memorias-ciaem/xiv/.

Romanowski, J. P., & Ens, R. T. (2006). As pesquisas denominadas do tipo “estado da arte” em educação. *Diálogo Educ, 6*(19), 37-50, Recuperado de http://alfabetizarvirtualtextos.files.wordpress.com/2011/08/as-pesquisasdenominadas-do-tipo-estado-daarte-em-educac3a7c3a3o.pdf.

Metacognición a través de la solución de problemas matemáticos en la escuela Primaria.

Cristina **Sánchez** Montes
Centenaria y Benemérita Escuela Normal del Estado de Querétaro
México
cristina.cbeneq@gmail.com

Resumen

Este trabajo describe los resultados obtenidos al implementar actividades que favorecen el desarrollo de la *capacidad metacognitiva*, en estudiantes de educación primaria, por medio de la *solución de problemas matemáticos* con texto. Teniendo lugar en la Escuela Primaria Rafael Ramírez Castañeda, Querétaro, Méx., con una población de 40 alumnos de tercer grado, de los cuales se estudiaron seis casos. Se realizó una investigación-acción, bajo la metodología cualitativa, teniendo como eje el método inductivo. La estrategia *"cuadernillo de secretos matemáticos"*, desarrollada en seis sesiones de trabajo, permitió que los estudiantes analizaran el texto, eligieran los datos funcionales, construyeran una *vía de solución*, explicaran sus decisiones y seleccionaran aquellas palabras secretas que resultaron pieza clave de su solución. Concluyendo que los alumnos requieren trabajar bajo *una secuencia general* que los lleve a la reflexión y que existen conocimientos esenciales que deben ser activados antes de colocarlos frente a un problema.

Palabras clave: Educación primaria, capacidad metacognitiva, problemas matemáticos, solución de problemas, construir vía de solución, explicar procedimiento de solución, secretos matemáticos, secuencia general. **Tema objeto de estudio**

En la *educación primaria*, que forma parte de la Educación básica del Sistema Educativo Mexicano (SEM) y con fundamento en el Plan de estudios 2011, durante el ciclo escolar 20172018, se dio marcha al proyecto de investigación "Desarrollo de la metacognición a través de la solución de problemas matemáticos", con el propósito de dar respuesta a la pregunta: ¿Cómo desarrollar la capacidad metacognitiva, en estudiantes de 3er grado de primaria, por medio de la solución de problemas matemáticos con texto?, lo que llevó al planteamiento del siguiente objetivo: *Desarrollar la capacidad metacognitiva*, por medio de la *solución de problemas matemáticos* con texto.

De acuerdo al plan y programa de estudios, referente al Modelo Educativo (2018), se busca que los estudiantes utilicen el pensamiento matemático al formular explicaciones, aplicar métodos, poner en práctica algoritmos (…) afrontar la resolución de un problema hasta entonces desconocido para ellos. Además, se busca que comprendan la necesidad de justificar y argumentar sus planteamientos y la importancia de identificar patrones y relaciones como medio para encontrar la solución a un problema (…) se interesen, se involucren y persistan en encontrar la resolución a los problemas (p.213).

Dado el diagnóstico inicial, en el cual los alumnos reflejan habilidad para el cálculo mental más no para solucionar problemas matemáticos y explicar su procedimiento, se presenta la necesidad de propiciar los espacios necesarios para el constante *análisis y reflexión* por parte de los alumnos durante todas las clases de matemáticas del ciclo escolar, formalizando el proceso con la estrategia del "*cuadernillo de secretos matemáticos*" desarrollado en seis sesiones consecutivas, donde se solicitó a los estudiantes leer los problemas planteados, seleccionar los datos explícitos e implícitos, analizar las preguntas de cada uno, idear un plan de solución, explicar las decisiones tomadas durante el proceso e identificar aquellas *palabras "secretas"* o clave que les permitieron a ellos *construir su vía de solución.*

De esta manera, el presente estudio da una muestra de los resultados obtenidos en la Escuela Primaria Rafael Ramírez Castañeda, turno vespertino, ubicada en la ciudad de Santiago de Querétaro, Qro. México. La institución está integrada por siete grupos, donde se distribuyen 238 estudiantes. De manera general, los resultados del diagnóstico intuitivo, arrojados por el Sistema de Alerta Temprana (SisAT), que consiste en una prueba para evaluar la habilidad en cálculo mental por parte de los alumnos, se observó que el 75% del grupo respondieron acertadamente, sin embargo y a manera de contraste, no demostraron haber reflexionado en problemas matemáticos planteados durante otra prueba.

Al respecto se estudia una muestra intencional, de 6 alumnos de tercer grado, seleccionados bajo los criterios presentes: De acuerdo al diagnóstico instrumental se eligen dos alumnos con *nivel alto de explicación del procedimiento,* dos más con un *nivel intermedio de explicación del procedimiento* y finalmente dos de un *nivel bajo de explicación del procedimiento.* Los primeros explicaron paso a paso el procedimiento y detallaron la razón por la que tomaron ciertas decisiones, los segundos lo hicieron de manera breve y general, omitiendo detalles, los últimos únicamente indicaron el tipo de operación que utilizaron, sin indicar la razón de su aplicación, o bien no explicaron nada.

Fundamentación teórica

Fundamentos conceptuales

Con base en los resultados contrastantes obtenidos del diagnostico, donde más del 50% de los estudiantes tienen resultados favorables en calculo mental pero que al solucionar un problema planteado muestran dificultad y difícilmente explican su procedimiento, surge la iniciativa por realizar un trabajo de investigación para indagar cuáles son aquellos elementos favorables para desarrollar en los niños su *capacidad metacognitiva,* surgiendo el cuestionamiento: ¿qué tan importante es el desarrollo de la metacognición en el ámbito educativo?, bien, un primer acercamiento a esta respuesta es que éste hecho permite que los estudiantes se mantengan alertas de sí mismos, que se conciban como solucionadores de problemas para que puedan monitorearse y controlar sus procesos mentales. La enseñanza de las habilidades metacognitivas puede significar un gran avance en el logro de los aprendizajes, para ello, "es importante dar la posibilidad a los alumnos de exponer y escuchar la descripción del proceso con el que se llegó al aprendizaje, al descubrimiento del principio o del hallazgo de la solución (Klinger, 1999 citado en Correa Z. & Fancy C. 2002, p. 60).

Por consiguiente, es importante que los *problemas matemáticos* sean diseñados de acuerdo a la realidad de los estudiantes, a su nivel cognitivo y con el objetivo de ser analizado, de acuerdo con Labarrere (1987), un problema matemático consiste en demandar del sujeto una intensa actividad cognoscitiva, ya que no se tiene acceso a la respuesta con sólo utilizar la memoria, lo que obliga a pensar, razonar y encontrar aquellos conocimientos necesarios que conducen a construir una respuesta.

De esta manera, mediante el trabajo con el cuadernillo de secretos matemáticos, se hacen planteamientos asociados al contexto de los educandos, motivándolos a la *solución de problemas matemáticos,* para Labarrere (1987) la solución de un problema es visto como un proceso de pensamiento, siendo indispensable permitir la interacción del alumno con el problema. Es necesario brindar a los alumnos una base, por lo cual se considera a Polya (1965) quien plantea cuatro fases para solucionar un problema: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida.

Capacidad metacognitiva. El término metacognición fue acuñado en 1980 por John Flavell, quien la asumió como el más alto nivel de actividad mental, que controla los otros niveles inferiores, en otras palabras, se identifica con el conocimiento de la actividad cognitiva y el control que se ejerce sobre ella. Así mismo afirma que involucra dos procesos, el primero es el conocimiento metacognitivo, que se refiere al conocimiento que tiene la persona sobre sus propios recursos cognitivos, de lo que se le exige en una situación específica y las estrategias necesarias para actuar con efectividad, en otras palabras, se trata de un “saber qué”, de ahí la necesidad por motivar y cuestionar constantemente a los alumnos sobre sus procesos de solución. En el otro extremo tenemos al control cognitivo, el cual hace referencia a la habilidad para manipular o controlar los recursos y las estrategias cognitivas con el fin de asegurar la solución exitosa a un problema, por lo que implica planear, monitorear, revisar y evaluar, todo ello nos lleva al “saber cómo” (Correa Z.& Fancy C. 2002, p. 59)

Al respecto, Hugo Barrantes (2006) realiza un trabajo basado en las investigaciones de Alan Schoenfeld (1985), quien a su vez considera como antecedentes las ideas de Polya (1965). El punto es que para trabajar con la resolución de problemas se deben tomar en cuenta diversos factores o dimensiones, mismos que se presentan a continuación: 1) Recursos, aquellos conocimientos previos que poseen los estudiantes de manera estructurada, resultando importante para el profesor saber cuáles son las herramientas con las que cuenta el aprendiz antes de enfrentarlo a la solución de un problema; 2) Heurísticas, estas son las estrategias que pueden ser usadas para resolver un determinado problema; 3) Control, hace referencia a la capacidad para controlar el trabajo, se debe desarrollar la habilidad para monitorear y evaluar su propio proceso, esta dimensión involucra cinco acciones (entendimiento, creación de un diseño, monitoreo del proceso, puesta en acción del diseño y revisar el proceso de solución); 4) Sistema de creencias, relacionado a las nociones previas sobre las matemáticas, mismas que pueden representar un obstáculo si éstas son falsas, pues las creencias afectarán la manera en que el alumno se comporte a la hora de enfrentarse a un problema matemático.

Problemas matemáticos con texto. En la tercera categoría, se encuentran los problemas matemáticos, para comenzar tomaremos como referente a Labarrere (1987) , para quien un problema, bajo el sentido psicológico del término, se comprende como toda situación que no puede ser resuelta a partir de la aplicación mecánica de conocimientos, es decir, operando simplemente con la memoria; todo problema implica para el que lo resuelve, la necesidad de realizar un esfuerzo cognoscitivo. (p.19)

Existe una gran variedad de problemas, sin embargo, este documento refiere el uso de dos en específico, el primero es el *problema matemático con texto*, en él se describe cierto hecho de la vida real, empleando un lenguaje común o cotidiano, donde se dan determinados valores de la magnitud que representa la cantidad expuesta, su formulación se acompaña de algunas indicaciones o referencias verbales. Éste tipo de problemas "desempeñan un importante papel en la adquisición de conocimientos y en el desarrollo de habilidades y hábitos, y del pensamiento del alumno". En los problemas con texto, la operación no está indicada, por lo que es necesario hallarla en el proceso de solución (Labarrere, 1987, pp. 19-20). El segundo es el problema de razonamiento, y como su nombre lo indica, estos problemas no pueden resolverse sin una dosis alta de razonamiento, esto es, de análisis lógico, de elaboración de hipótesis e inferencias, y por el hecho de exigir una alta dosis de trabajo mental, este tipo de problemas tiene gran relevancia e impacto en la formación del pensamiento y en la asimilación de los conocimientos matemáticos. (Labarrere, 1987, p. 28).

Solución de problemas matemáticos. Para comprender esta categoría, es indispensable hacer en primera instancia un paréntesis para diferenciar los términos, solución y resolución de problemas, mientras que el primero se refiere al proceso, donde se realizan determinadas transformaciones (operaciones) matemáticas sobre el problema, conduciendo o no a la respuesta correcta, la resolución por su parte es cuando el alumno determina o logra tener la respuesta correcta, sin dar la mayor relevancia al proceso de solución (Labarrere, 1987, p. 31). Por lo tanto, para Labarrere (1987) la solución de un problema es visto como un proceso de pensamiento, donde es punto clave la interacción del alumno con el problema, en el cual éste produce transformaciones no sólo en el plano material externo, sino también en el plano mental interno, todo ello manifestado en forma de nuevos conocimientos o reafirmación de los ya adquiridos, en el desarrollo de determinadas habilidades. Por ejemplo en el caso del cuadernillo de secretos matemáticos, los estudiantes buscan solucionar los problemas planteados, al analizar, seleccionar elementos clave y construir una vía de solución para, finalmente, argumentar su procedimiento de inicio a fin, poniendo énfasis en la razón de su toma de decisiones.

De acuerdo con Polya (1965) existen cuatro fases para solucionar un problema, de las cuales se retoman las tres primera, mismas que tienen relación con ver claramente lo que se pide, captar las relaciones existentes entre los diversos elementos, identificar lo que liga a la incógnita con los datos para poder trazar un plan, posteriormente ponerlo en ejecución y finalmente volver atrás, cuando se encuentre la solución para revisarla y discutirla; a continuación de describen con mayor detalle cada una de ella:

1. *Comprender el problema*: éste debe ser planteado de manera interesante, ni fácil ni difícil, y promover que el alumno desee resolverlo. Una vez planteado, los educandos deben poder separar las principales partes del problema, que son: la incógnita, los datos y la condición, dando nombre a estos elementos. Para finalizar esta fase, debe preguntarse ¿Son suficientes los datos para resolver la incógnita? (p.29). En lo personal, se considera que el alumno debe tener conocimientos previos sobre los algoritmos que utilizará en su solución, esto genera una mayor comprensión del problema.
2. *Concebir un plan*: Se tiene un plan cuando se sabe al menos grosso modo qué cálculos, razonamientos o construcciones se han de efectuar para determinar la incógnita. Lo esencial en la solución de un problema es el concebir la idea de un plan, por su parte las preguntas y sugerencias que el docente haga deben tener por objeto provocar "ideas brillantes" que permitan al alumnado hacer uso de su bagaje de información previa y aplicarla en la situación planteada. (p. 30).
3. *Ejecutar el plan*: Si el alumno ha concebido realmente un plan podrá ejecutarlo individualmente paso a paso, siempre y cuando él mismo haya trabajado en el plan, aunque un tanto ayudado, y si ha concebido la idea final con satisfacción; sin embargo, existe un peligro de que el estudiante olvide el plan, lo que ocurre fácilmente si lo ha recibido completamente del exterior y lo ha aceptado por venir de su maestro. (p. 33). Es importante considerar que, si el alumno no se involucra en la construcción de su plan de acción ante un problema, pasará que será meramente un ejecutor de pasos indicados y no existirá un razonamiento del mismo.

Diseño y metodología

El presente documento está inscrito en el paradigma cualitativo, en éste enfoque se incluyen una variedad de concepciones, visiones, técnicas y estudios no cuantitativos, Hernández (2010, p. 17). Su desarrollo es posible gracias al *estudio de casos*, el cual permite elegir intencionalmente a los alumnos más representativos de los tres grupos analizados durante la investigación. Teniendo como estrategia implementada la investigación-acción, su beneficio principal es que ésta permite analizar las acciones humanas y las situaciones sociales experimentadas (Elliot, 2000, p. 4). Es posible hacer una conexión entre las categorías teóricas surgidas de la revisión bibliográfica y las categorías empíricas encontradas mediante el análisis e interpretación de los hallazgos emergentes.

La recogida de información se obtuvo a partir de la revisión de los cuadernillos de los estudiantes, que como ya se menciono con anterioridad fueron llamados *cuadernillos de secretos matemáticos*, donde los alumnos analizaron, seleccionaron elementos relevantes, construyeron una vía de solución, señalaron los secretos encontrados (claves) y explicaron su toma de decisiones, durante el procedimiento ejecutado. Del mismo modo, se trabajó mediante la observación participante y la recogida de datos por medio de la bitácora de clase, donde se anotó todo aquello relevante del discurso desarrollado por los estudiantes.

Resultados

Los principales hallazgos obtenidos durante la intervención, son presentados a continuación con base en las tres categorías generales explicadas en la fundamentación teórica; en cuanto a los *problemas matemáticos*, se observa que la forma de pensar del grupo es diversa y por tanto significativa, pues perciben de formas diferentes los planteamientos, lo que propicia una variedad de soluciones interesantes al momento de compartir con el resto de los compañeros; "Un problema matemático es aquel que demanda del sujeto una intensa actividad cognoscitiva" (Labarrere, 1987, p. 19) partiendo de éste supuesto, se reconoce que los *conocimientos previos* que tienen los estudiantes son clave fundamental al momento de tener enfrente un problema matemático, pues sus recursos cognitivos permiten la *construcción de la vía de solución*, así mismo los niños demostraron habilidad para localizar tanto los datos explícitos como los implícitos (aquellos ocultos) de cada planteamiento, lo que habla de un nivel de análisis que va más allá del plano superficial, esto denota *una reflexión constante*, que se encuentra relacionada con la habilidad que desarrollaron para hacer conexión entre las *"palabras secretas"* (clave) y el tipo de operación a realizar. Otro punto importante a considerar es que al analizar los problemas tuvieron la oportunidad de mejorar su percepción de los mismos, ya que desarrollaron su habilidad por *relacionar información* contenida en los distintos momentos del problema, lo que los motivó a *ser conscientes* de sus decisiones y a tomar en cuenta todo dato posible que funcione como apoyo en la solución.

Con relación a la *solución de problemas*, es importante seguir considerando la diferencia entre resolución y solución, pues mientras la primera se refiere meramente a obtener el resultado correcto, la segunda por su parte presta atención al proceso realizado para llegar a un resultado (Labarrere, 1987), de ahí que se brindó mayor interés a la solución, de la cual se encontró que es favorable para los alumnos contar con una *secuencia general de análisis*, ya que conocer pasos clave, es esencial para organizar sus ideas, prestar atención a sus decisiones e idear un plan de solución mejor estructurado, asegurando de esta manera un mayor porcentaje de éxito a la hora de obtener el resultado final del problema. Por su parte Polya (1965), hace mención de cuatro fases para solucionar un problema: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. Considerando las tres primeras, para que los alumnos lograran concebir su plan de acción, ayudó el hecho de analizar las palabras que tiene cada problema, de ahí resultaron los *secretos matemáticos*, mismos que en un apartado de su cuadernillo mencionaron junto con su explicación, por ejemplo una alumna escribió: "*5 cada uno" me ayudó a saber que hiciera una multiplicación* (Alumna A, 3°A), así mismo otra alumna menciona : *dividí porque la mamá de Sofía tenía que sentar a los invitados en las sillas, así que era una repartición por eso dividí.* (Alumna B, 3°A).

Otro punto a tener en cuenta es que los alumnos requieren *monitoreo* por parte del docente al momento de ejecutar su plan de solución y ese apoyo extra que piden a la parte docente va disminuyendo en la medida que se adentran y familiarizan más con la *secuencia general* de análisis, así como cuando mantienen su interés, atención y auto-vigilancia permanente, aunado a este fenómeno es posible darse cuenta de que el trabajo entre pares permite favorecer zonas de desarrollo próximo, pues al tener la oportunidad de socializar sus ideas y explicaciones, se permite aprender en conjunto y tener en cuenta otras vías de solución diferentes a la propia, lo que abre un panorama mayor en cuanto a la solución de problemas matemáticos. Para cerrar con este punto, es relevante hacer mención de la importancia existente en la necesidad de que los estudiantes recuerden en todo momento la pregunta del problema, esto para que mantengan un *control* de su propio procedimiento y así verificar que siguen en el camino correcto para llegar al resultado final.

Otros aspectos sobresalientes, son los relacionados a la *capacidad metacognitiva*, por ejemplo que es necesario el anclaje de conocimientos previos con las exigencias del problema, al igual que para favorecer el desarrollo de ésta capacidad, se requiere que las tareas estén adecuadas a las características cognitivas de los alumnos, esto viene a complementar lo mencionado por Flavell (1985) para quien el conocimiento metacognitivo se refiere a la información, procedural y declarativa, la cual guía la actividad cognitiva conformada por creencias y conocimientos adquiridos a través de diferentes experiencias vitales, que se han almacenado en la memoria de largo plazo.

Por otro lado y de acuerdo con las dimensiones de la metacognición, con base en los recursos y las heurísticas que explica Barrantes (2006), en este caso los *recursos* son relevantes, pues todo conocimiento matemático resulta funcional, algorítmicos y no algorítmicos, las *heurísticas* resultan interesantes, ya que conforme el alumno aprende estrategias y técnicas, éstas le permiten crear con mayor rapidez una vía de solución, finalmente se retoma Schoenfeld (1985) para explicar el *control* sobre las decisiones tomadas, al momento de ser explicadas ya sea de manera oral o escrita, lo que compromete al estudiante a analizar a profundidad el problema y a definir cuidadosamente su estrategia de solución.

Para cerrar, los diferentes tipos de conocimiento que el alumno va experimentando son relevantes en la siguiente medida: encontrar *palabras secretas* les permite saber qué hacer (conocimiento declarativo), una vez que saben qué hacer, es momento de elegir una o más operaciones matemáticas, de las cuales requieren tener conocimeinto sobre su procedimiento algorítmico (conocimiento procedimental), promoviendo la habilidad para manipular o controlar los recursos y las estrategias cognitivas con el fin de asegurar la solución exitosa a un problema, por lo que implica planear, monitorear, revisar y evaluar, todo ello nos lleva al "saber cómo" (Flavel,1980). Al tener diversos datos, deben enfocarse en las consignas o preguntas para decidir el momento en que utilizarán cada procedimiento conocido, lo que representa un *saber cuándo* (conocimiento condicional), por ejemplo una alumna menciona: *multipliqué 42 X 12 y me dio 504, hice una multiplicación porque decía en el problema que quería llenar las bolsas con 12 dulces y la pregunta decía cuántos dulces necesitaba, entonces como eran 42 invitados por eso multipliqué* (Alumna B, 3°A).

Conclusiones

Por medio de un proceso analítico, los principales hallazgos del trabajo de investigación sobre la temática del desarrollo de la "Metacognición a través de la solución de problemas matemáticos" permiten afirmar las siguientes aportaciones:

- Es importante que los alumnos conozcan y manejen el procedimiento algoritmos convencionales, para que puedan vincularlos con mayor rapidez a las palabras clave de los problemas e idear la vía de solución.
- Es necesario que los alumnos recuerden en todo momento la pregunta del problema para tener control de la solución.

- Cuando los alumnos tienen una *secuencia general* de análisis como base, mientras más se apropien de ella, menor necesidad tendrán de preguntar al docente, pues serán capaces de monitorear autónomamente su propio procedimiento.

- Conforme el alumno aprende estrategias y técnicas, éstas le permiten crear con mayor facilidad una vía de solución.

- Para desarrollar la capacidad metacognitiva, se requiere que los problemas estén adecuados a las características cognitivas del alumno.

- Al momento que se le pide a un estudiante explicar la manera en que obtuvo el resultado, esto lo compromete a analizar a profundidad el problema, incluyendo las palabras *secretas* (clave), así como monitorear constantemente su estrategia de solución.

Con estas afirmaciones es posible llegar a la conclusión de que los alumnos, independientemente de su grado escolar, pueden desarrollar su capacidad metacognitiva a través de la solución de problemas matemáticos, pues ello implica no solo resolver usando información memorizada, sino que se trata de algo más complejo, que puede ser similar a un "entrenamiento del pensamiento", el cual no es de ninguna forma riguroso, sino todo lo contrario, los motiva a ver más allá de lo superficial, a analizar los datos tanto explícitos como implícitos, a buscar entre sus recursos cognitivos, partir de su realidad y contexto, así como de sus conocimientos previos para construir vías de solución que deben ser argumentadas, permitiendo a los estudiantes estar en alerta permanente.

Referencias y Bibliografía

Barrantes, Hugo (2006). *Conferencia sobre Resolución de problemas: El trabajo de Allan Schoenfeld*. Recuperado de: http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno1/Cuadernos%201%20c%204.pdf

Correa Z. & Fancy C. (2002). *Hacia una conceptualización de la metacognición y sus ámbitos de desarrollo.* Chile: Horizontes Educacionales. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=97917885008

Elliot J. (2000) *La investigación – acción en educación*. España: Morata . Recuperado de: http://www.terras.edu.ar/biblioteca/37/37ELLIOT-Jhon-Cap-1-y-5.pdf

Hernández Sampieri R., Fernández Collado, C. y Baptista L., P. (2010). *Metodología de la sdinvestigación* (5ª. Edición). México : McGraw-Hill . Recuperado de: https://investigar1.files.wordpress.com/2010/05/1033525612-mtis_sampieri_unidad_11.pdf

Labarrere Sarduy, A. F. (1987). *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas de matemáticas en la escuela primaria.* La Habana: Pueblo y educación.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas

Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: problema solving, metacognition, and sense making in mathematics. New York : D. Grows* . Recuperado de: http://howtosolveit.pbworks.com/f/Schoenfeld_1992%20Learning%20to%20Think%20Mathematically.pdf

Secretaria de Educación Pública (2011). *Plan y programas de estudios 2011 de Educación primaria. Programa de estudios 2011*. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública (2018). *Modelo Educativo: Educación Básica.* México: Autor. Recuperado de https://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/index-edubasica-niveles.html

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Construcción de trayectorias en el plano con *Scratch*

María **Mina**
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, Universidad Nacional de Córdoba
Argentina
mdelvmina@gmail.com
Mónica **Villarreal**
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) - Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, Universidad Nacional de Córdoba
Argentina
mvilla@famaf.unc.edu.ar

Resumen

Presentamos los resultados de un trabajo de investigación de naturaleza descriptiva acerca de la matemática que aparece en simulaciones de situaciones de la realidad diseñadas por estudiantes de primer año de enseñanza secundaria, usando el software *Scratch* (https://scratch.mit.edu/). En particular, reportamos aquí acerca de las estrategias de construcción de trayectorias en el plano implementadas para definir el movimiento de los personajes de la simulación. Caracterizamos esta experiencia como una *tarea de exploración*. El análisis realizado revela el producto de un colectivo *estudiantes-con-Scratch* donde aparecen diversos procedimientos de traducción, condicionadas por la tecnología a disposición, de las representaciones de los estudiantes acerca de movimientos de objetos de la realidad, en puntos que definen trayectorias para esos movimientos.

Palabras clave: simulaciones, software *Scratch*, tareas de exploración, enseñanza secundaria

Introducción

El software *Scratch*, desarrollado por el Grupo *Lifelong Kindergarten* del Instituto Tecnológico de Massachusetts, es un lenguaje visual de programación, de fácil aprendizaje aún para niños pequeños, que permite la creación de modelos, simulaciones, historias interactivas, juegos o animaciones (Maloney, Resnick, Rusk, Silverman & Eastmond, 2010). En la Figura 1 aparece una secuencia de comandos de *Scratch* aplicada al personaje que allí aparece (un gato), donde luego de desplazarlo 10 pasos con el comando *"mover"*, el personaje pregunta "¿Llueve?".

Figura 1. Secuencia de programación con *Scratch.*

Con este tipo de tecnología, los estudiantes de enseñanza secundaria disponen de un recurso digital para la creación de simulaciones de situaciones de la realidad, construyendo la secuencia de códigos apropiada. Un caso particular de construcción de simulaciones se consigue con la programación en dispositivos digitales tales como *Scratch*. Autores como Biembengut & Hein, (2003), y Maltempi & Dalla Vecchia (2013), reconocen en una secuencia de programación un caso particular de modelo matemático que intenta traducir, aún de manera simplificada, la realidad simulada.

En esta comunicación buscamos responder la pregunta acerca de qué matemática aparece en las producciones de estudiantes de enseñanza secundaria cuando se los invita a diseñar con *Scratch* una simulación de una situación de la realidad elegida por ellos. El reporte que presentamos contiene parte de los resultados obtenidos en un trabajo de investigación que explora y describe esta matemática. Aquí, en particular, presentamos cuáles son los conocimientos y estrategias puestas en juego por los estudiantes en la construcción de trayectorias en el plano para los personajes que aparecen en sus simulaciones.

Marco teórico

Adoptamos la perspectiva epistemológica de *humanos-con-medios* (Borba & Villarreal, 2005) para analizar la experiencia de construir con *Scratch* una simulación de una situación de la realidad. Según estos autores, el constructo *humanos-con-medios* hace referencia a un colectivo conformado por humanos y sus tecnologías como la unidad básica e indisoluble productora de conocimiento. En esta unidad cognitiva los medios con los cuales se produce conocimiento aparecen no meramente como recursos auxiliares facilitadores de tareas, sino como algo esencial, constitutivos del conocimiento producido (Villarreal, 2012).

Desde una perspectiva pedagógica, una tarea en donde se propone a los estudiantes la selección de un tema de la realidad para simular puede considerarse como una *tarea de exploración* (Ponte, Branco & Quaresma, 2014) en donde las metas de aprendizaje no aparecen bien delimitadas y las soluciones a los problemas son inciertas. Según estos autores, este tipo de tareas se caracteriza por promover en los estudiantes la construcción de nuevos conceptos, representaciones, o procedimientos, o el uso creativo de conceptos ya aprendidos. Así, en tales situaciones de enseñanza, los estudiantes se involucran en actividades que invitan a “descubrir regularidades, relaciones, semejanzas y diferencias con el fin de obtener generalizaciones” (Ponte & Matos, 1992, p. 239). En una *tarea de exploración*, el aprendizaje de conocimientos y procedimientos se evidencia en la fluidez con la que los estudiantes llevan a cabo procesos de traducción de una forma de representación en otra (Ponte et al, 2014).

Procedimientos Metodológicos

La investigación se llevó a cabo en un curso de primer año de enseñanza secundaria conformado por 21 alumnos de 12-13 años de edad (11 mujeres y 10 varones) en una escuela pública de gestión privada de la ciudad de Córdoba, Argentina. La primera autora de este trabajo era la profesora a cargo. En las clases de ese curso era frecuente el uso de recursos para aprender matemática tales como hojas de cálculo, graficadores dinámicos, calculadoras, Internet, entre otros. Actividades relativas a los elementos de un sistema de coordenadas cartesianas, ubicación y lectura de puntos en el plano ya habían sido objetos de enseñanza en ese curso con anterioridad a la experiencia. Como parte de las actividades curriculares, se invitó a los estudiantes a formar grupos, elegir una situación de la realidad de su interés y construir con *Scratch* una simulación de la misma. Los estudiantes no habían tenido experiencia previa en programación. Antes de comenzar con la tarea, se destinaron tres clases de 40 minutos cada una donde se mostró el modo de funcionamiento de *Scratch* mediante ejemplos elaborados por la profesora para resolver cálculos, ecuaciones, y construcción de figuras geométricas mediante el empleo de comandos de desplazamientos y giros.

Se destinaron 10 clases, de 40 minutos cada una, para que los estudiantes construyeran sus simulaciones. La actividad se desarrolló en el laboratorio de informática de la escuela, en el cual había computadoras suficientes para que los estudiantes trabajaran en pares (salvo un grupo que quedó conformado por tres estudiantes). Los estudiantes perfeccionaban su trabajo de una clase a otra. De las 10 clases, dos se destinaron para que los estudiantes relataran a sus compañeros el estado de avance del trabajo y el uso de estrategias exitosas que habían implementado.

Se obtuvieron 10 documentos de *Scratch* con el resultado final de la simulación por cada grupo, junto a otros tres o cuatro documentos adicionales como versiones previas. Los resultados que aquí se reportan son el producto del análisis de estos documentos.

Para indagar acerca de la matemática que apareció en las simulaciones construidas por los estudiantes para implementar, en particular, trayectorias de objetos en el plano, adoptamos una perspectiva de *arqueología matemática* (Skovsmose, 1992), es decir, de búsqueda de las raíces matemáticas presentes en las secuencias de programación diseñadas por los estudiantes. Esta búsqueda se acompañó con la mirada analítica de los efectos y acciones que aparecieron en las simulaciones. Realizamos un análisis buscando establecer relaciones entre los movimientos y acciones observados en los personajes animados, y los comandos del software implementados para conseguirlos.

Resultados y análisis

En este estudio nos focalizamos en el análisis de simulaciones que muestran la producción de diversas trayectorias de personajes en la pantalla de una computadora. Consideramos una *trayectoria* en el plano como el lugar geométrico de los puntos del plano (x, y) que describen las posiciones sucesivas de un objeto en movimiento. Este conjunto de puntos queda definido, en nuestro caso, mediante una secuencia de comandos de programación en *Scratch* que produce el movimiento de objetos en el plano de la pantalla. A continuación, describiremos cuatro simulaciones que muestran el uso de estos comandos y las trayectorias generadas. Posteriormente, analizaremos estas producciones en conjunto. Cada simulación se identificó con un título que intenta describir su contenido.

¿Bailamos?: una trayectoria horizontal

La Figura 2 muestra, a la izquierda, una escena en la cual dos jóvenes se encuentran bailando y a la derecha parte de una secuencia de programación que determina los movimientos del joven. En esa secuencia se observa el uso de dos comandos de movimiento: *"ir a x:... y:..."* y *"deslizar en... segs a x:... y:..."*. Luego de ejecutar los comandos *ir a x:-270 y: -8* y *esperar 12 segundos*, mediante el comando *deslizar en 2 segs a x:-40 y:*-8, el muchacho fue llevado en línea recta a la posición *x=-40*, *y=-8*, antes de que exprese *"¡Hola!, bailemos juntos"*. Los valores iguales (-8) para la coordenada *y* de estos puntos, provocan el movimiento horizontal del personaje.

Figura 2. Implementación de movimiento a un punto de la pantalla.

Un capítulo de los Simpson^{TM}: trayectoria a lo largo de una poligonal

Una de las simulaciones producida por un grupo muestra una secuencia de la serie televisiva *Los Simpson*, en donde uno de sus personajes principales, Homero, sale de su casa siguiendo la senda que se encuentra frente a ella (ver Figura 3). Este escenario resultó de un proceso de edición, llevada a cabo por las estudiantes, a partir de imágenes obtenidas en Internet, puesto que el software no las traía incorporadas en su librería de escenarios y personajes.

Figura 3. Secuencia de posiciones de Homero Simpson a lo largo de la senda de salida de su casa.

En nuestra exploración acerca de la estrategia empleada por los estudiantes para que el personaje recorra una trayectoria poligonal que siga la forma geométrica de la senda que aparece en la Figura 3, encontramos la definición de dos segmentos de recta (ver Figura 4[1]), de extremos $A = (-30, -79)$ y $B = (-22, -109)$ y, $B = (-22, -109)$ y $C = (18, -116)$, respectivamente. La secuencia de programación que se ve a la derecha, en la Figura 4, muestra cómo se logró la trayectoria de Homero que se observa en la Figura 3.

[1] Los sistemas de coordenadas cartesianas de las Figuras 4, 6 y 8, y los puntos que se observan en ellos, fueron elaborados por las autoras como parte del proceso de arqueología, tomando la información de las coordenadas que aparecen en los comandos de movimientos respectivos.

De esta manera, el personaje describe un movimiento a lo largo del camino en dos tramos rectos, seguido posteriormente de un movimiento horizontal paralelo al eje de las abscisas del sistema de referencia, definido por el comando *"mover 50 pasos"*, que llevará al personaje hacia el automóvil.

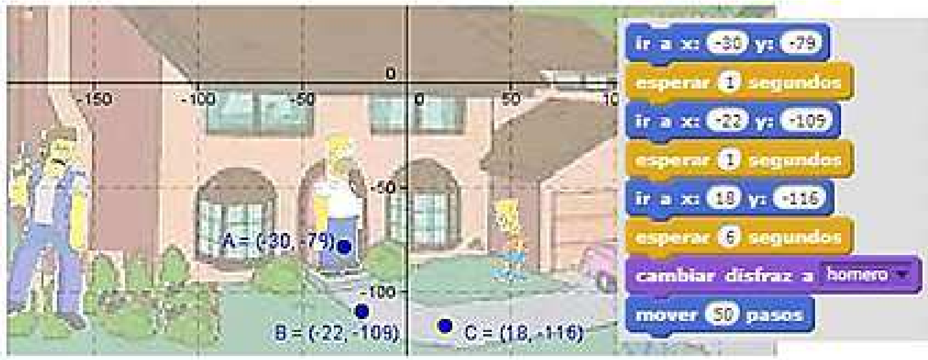


Figura 4. Coordenadas de los puntos de la trayectoria del personaje.

La habilidosa jugadora de básquet: composición de trayectorias

Un grupo de estudiantes diseñó una secuencia de programación para simular el movimiento de una pelota durante un juego de básquet (ver Figura 5).

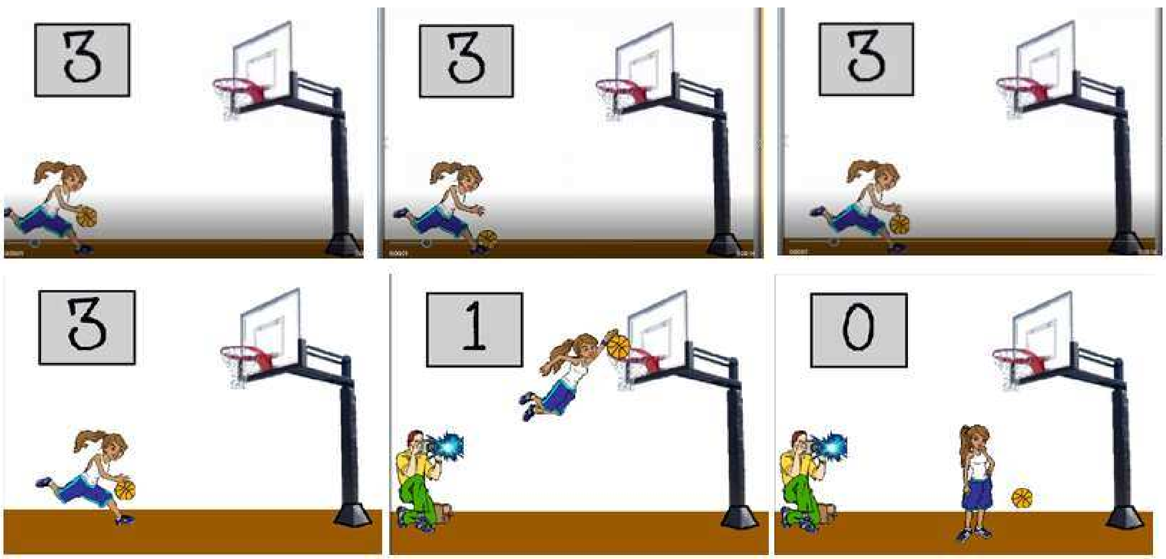


Figura 5. Trayectoria de una pelota de básquet.

Los estudiantes construyeron, para la pelota de básquet, dos instancias distintas de una trayectoria compuesta: una para el "dribbling", y otra para el rebote en el suelo, posterior al enceste. La Figura 6 muestra, para cada una de estas porciones de la trayectoria, las secuencias de programación creadas y las coordenadas de los puntos definidos por los estudiantes representados en sendos sistemas de coordenadas. En el caso del dribbling (Figura 6 (a)) se definen dos segmentos de recta de extremos *A*= (-132, -88) y *B* = (-102, -129) y, *B*= (-102, -129) y *C* = (-81, -91) que muestran el rebote y avance de la jugadora con la pelota. En la Figura 6 (b) se muestra la secuencia de comandos que producen el movimiento de rebote vertical de la pelota en el suelo luego del enceste. Se observa que la trayectoria vertical se genera al mantener fijo en 83 el valor de la abscisa de cada punto.

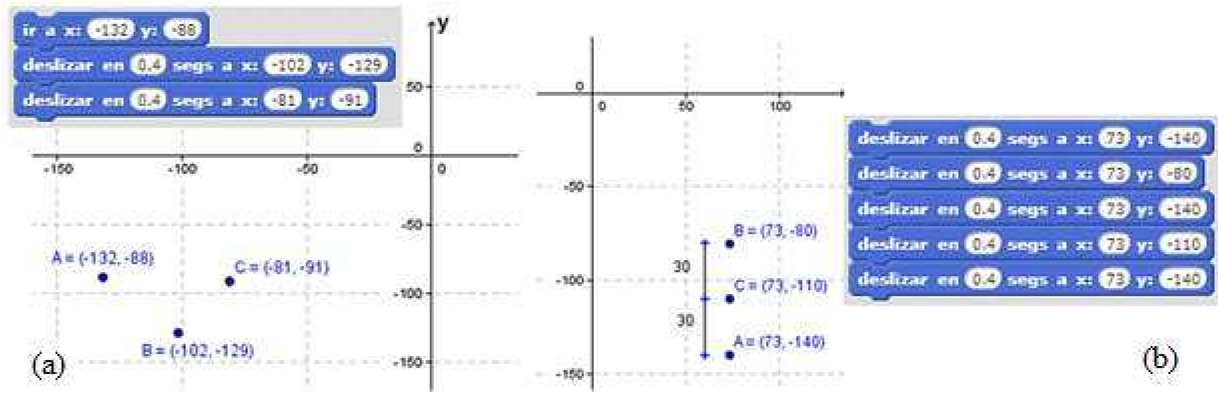


Figura 6. Coordenadas de los puntos de una trayectoria compuesta para una pelota de básquet.

Persecución de terror en cielo nocturno: trayectoria cuasi-elíptica

En otra de las simulaciones con *Scratch* apareció una bruja que vuela por el cielo nocturno huyendo de un murciélago que la persigue (Figura 7).

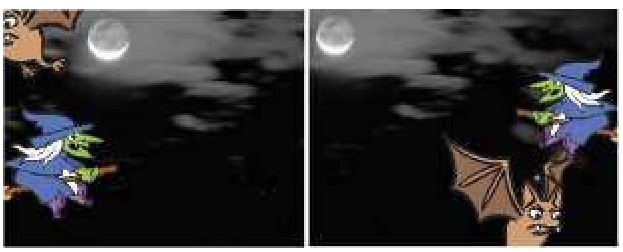


Figura 7. Selección de una secuencia de persecución.

La bruja describe varias vueltas en la pantalla, siguiendo en sentido anti horario, una trayectoria cuasi-elíptica definida por una sucesión de puntos. La Figura 8 muestra la secuencia de programación elaborada por los estudiantes para generar la trayectoria de la bruja y la representación, en un sistema de coordenadas cartesianas, de los puntos que pertenecen a su recorrido por la pantalla. En la sucesión de puntos que muestra el sistema de coordenadas de la Figura 8 se aprecia la simetría con respecto a los ejes coordenados que caracterizan a los pares de puntos.

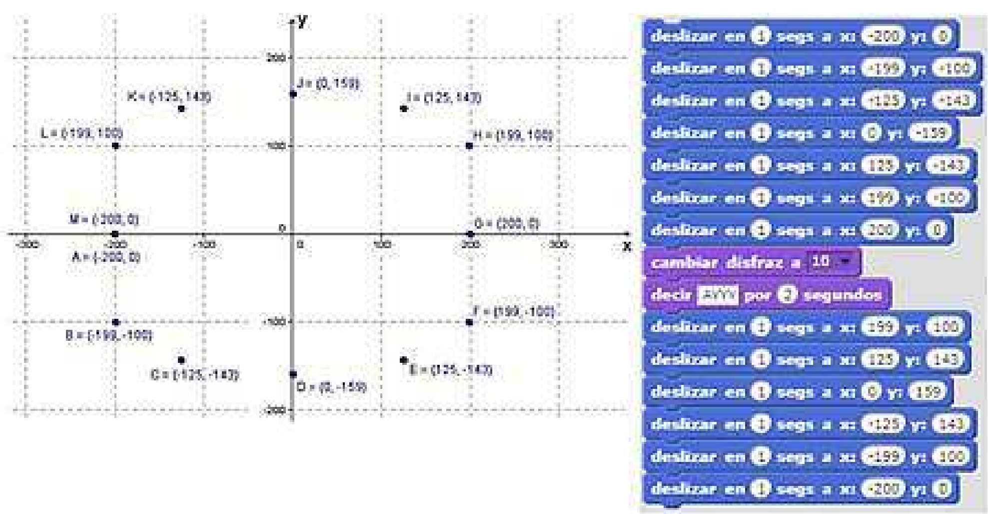


Figura 8. Trayectoria cuasi-elíptica definida por una serie de puntos que pertenecen a ella.

Breve análisis conjunto de las producciones de los estudiantes

El proceso de definir un conjunto de puntos para crear diversas trayectorias resultó facilitado por la posibilidad que brinda *Scratch* de leer, en la misma pantalla, las coordenadas que definen una determinada posición cuando se ubica el mouse sobre tal posición. Esta información, que aparece en la forma *x: ... y:...*, para cada instancia del movimiento de un personaje, fue traducida por los estudiantes en valores para los argumentos en los diferentes comandos de movimiento de programación que utilizaron.

Este simple recurso del software habilitó a que los estudiantes pudieran experimentar con distintas posiciones para sus personajes, según una trayectoria premeditada, y descubrir, tal como lo señalan Ponte y Matos (1992), regularidades, relaciones, semejanzas y diferencias en las coordenadas de los puntos para crear movimientos particulares obteniendo generalizaciones. Por ejemplo, puntos ubicados en una recta paralela al eje de las ordenadas mantienen la misma abscisa y esto permite generar movimientos verticales o, puntos simétricos respecto al eje de las ordenadas (o abscisas), tienen las mismas ordenadas (o abscisas), lo cual es de utilidad para generar trayectorias que muestren simetrías. Estas dos ideas se evidencian en su aplicación repetida y sistemática en la simulación del rebote vertical de la pelota de básquet (Figura 6), en el primer caso, o en la trayectoria semi-elíptica seguida por la bruja (Figura 8), en el segundo caso. Una valoración análoga puede realizarse para trayectorias paralelas al eje de las abscisas, como la del joven de la Figura 2, definiendo puntos de igual ordenada. En el caso de Homero, la posibilidad dada por el software de insertar una imagen particular habilitó la creación de una trayectoria por tramos a lo largo de una senda.

Por otra parte, los comandos de movimiento fueron incluidos en la programación en vínculo con otros que permiten dar mayor realismo a las simulaciones. Por ejemplo, la definición de puntos para el movimiento de la bruja, permitió que sus coordenadas establecieran, a su vez, instancias para el cambio de orientación de la bruja. La Figura 7 muestra cómo el personaje apunta a la derecha o a la izquierda en distintas instancias de su movimiento. Esto es conseguido con el uso del comando *"cambiar disfraz a 10"* que puede distinguirse en el primer bloque de color morado de la Figura 8, luego de que la posición del personaje fuera (200,0), como se muestra en el bloque del comando inmediatamente anterior.

Este tipo de generalizaciones para las características de las coordenadas de puntos del plano no fueron objeto de enseñanza previa a la construcción de las simulaciones con *Scratch*. La fluidez con que los estudiantes llevaron a cabo procesos de traducción de una forma de representación en otra (Ponte et al, 2014) con la herramienta a disposición, evidencia la conformación de colectivos de *estudiantes-con-Scratch* como productores de estas trayectorias particulares. Las traducciones que se evidenciaron en los trabajos de los estudiantes fueron variadas. Por ejemplo, la traducción de una trayectoria imaginada a una colección de puntos en el plano y el uso de las regularidades encontradas en las coordenadas de los puntos al considerar ciertas trayectorias. O la traducción de una colección de puntos que describen un movimiento deseado en argumentos para los comandos de *Scratch* que, siguiendo una secuencia adecuada, permiten reproducir la trayectoria buscada.

Conclusiones

Teniendo en cuenta las características de una *tarea de exploración* según la perspectiva de Ponte et al (2014), podemos afirmar que los resultados presentados proporcionan evidencia de la aplicación de un contenido conocido (el sistema de coordenadas cartesianas y sus elementos) de manera creativa y en una situación completamente nueva para los estudiantes, apareciendo la matemática como necesidad de responder cuestiones del tipo ¿cómo hago para qué...? La actividad puede reconocerse como una propuesta que brindó autonomía a los estudiantes en la selección del tema a simular, y en la cual no se previó un contenido matemático específico como objeto de enseñanza. Los estudiantes tuvieron que apelar a representaciones conocidas (puntos en el plano definidos por pares ordenados en un sistema de coordenadas cartesianas) y explorar otras nuevas donde fue necesario otro formato de representación para usar los comandos de *Scratch*.

Para finalizar, reconocemos que la tarea propuesta a los estudiantes de construir con *Scratch* una simulación de alguna situación de la realidad, habilitó exploraciones informales con el recurso que permitieron definir trayectorias en el plano a través de conjuntos de pares ordenados *(x, y)*. Es esperable que la construcción de trayectorias más elaboradas, tales como, circulares, hiperbólicas, parabólicas, sinusoidales, etc., se mantengan fuera del alcance de alumnos jóvenes como los que participaron en esta experiencia. Sin embargo, los ejemplos anteriores demuestran un estudio minucioso del movimiento deseado por los estudiantes para sus personajes, y la traducción del mismo a las coordenadas necesarias para implementar una secuencia de puntos apropiada. Coincidiendo con Papert (1995), estas exploraciones podrían facilitar el acceso fututo a modos más formales de definir trayectorias en el plano, como lo son las expresiones algebraicas que las representan.

Referencias

Biembengut, M. & Hein, N. (2003). *Modelagem Matemática no Ensino,* San Pablo: Editora Contexto.

Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the re-organisation of mathematical thinking: Information and communication technologies, modelling, experimentation and visualisation.* Nueva York: Springer.

Maloney, J., Resnick, M., Rusk, N., Silverman, B., & Eastmond, E. (2010). The scratch programming language and environment. *ACM Transaction on Computing Educ*ation, 10*(4)*

Maltempi, M. V. & Dalla Vecchia, R. (2013). About mathematical modeling in the reality of the cybernetic world. *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education,* 1097-1106.

Papert, S. (1995). *La Máquina de los Niños: Replantearse la Educación en la Era de los Ordenadores.* Barcelona: Paidós Ibérica.

Ponte, J. P. & Matos, J. F. (1992). Cognitive processes and social interaction in mathematical investigations. En J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 239-254). Berlin: Springer.

Ponte, J., Branco, N. & Quaresma, M. (2014). Exploratory activity in the mathematics classroom. En Y. Li, E. Silver, & S. Li. (Ed.), *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices* (pp. 103-125). Dordrecht: Springer.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una Filosofía de la Educación Matemática Crítica.* Bogotá: Una Empresa Docente

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Revista Virtualidad Educación y Ciencia,* 3*(5),* 73-94.

Diferentes representações na solução de uma tarefa de contagem

Natália Alcazar de **Matos**
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Brasil
nalcazarm@gmail.com

Mariana **Moran**
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Brasil
mmbarroso@uem.br

Valdirene Maria dos **Santos**
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Brasil
valdirene_santos2@hotmail.com

Resumo

Ao se deparar com um problema de geometria com o apoio de uma figura, o aluno precisa criar em sua mente estratégias que o auxiliem em sua solução, o que lhe permite recorrer à diversas representações semióticas como ferramentas de visualização. Este trabalho investigou, a partir da visualização figural, as representações semióticas que alunos do 7o e 8o ano do Ensino Fundamental, utilizam para resolver um problema de contagem. A metodologia adotada é de natureza qualitativa, com análise dos dados descritiva e interpretativa. A tarefa foi aplicada a 70 alunos, em duplas, num contexto de sala de aula de matemática. Para a análise dos dados, utilizamos os registros de representação semiótica de Duval e a concepção do termo "visualização" adotada por Isabel Vale, com base em alguns pesquisadores da área. Nos resultados observamos que a língua materna foi a representação mais utilizada e a algébrica, a menos utilizada.

Palavras-chave: Representações Semióticas, Visualização, Figura, Ensino Fundamental.

Introdução

Num cotidiano de sala de aula de matemática, a visualização de objetos geométricos e dos resultados matemáticos que existem, é uma necessidade para que se possa compreender os problemas propostos e utilizá-los nos diversos ramos das ciências e evidentemente da própria matemática. Segundo Vale (2014, p. 121), atualmente já não é mais suficiente que os alunos se restrinjam apenas a resolver problemas rotineiros realizando cálculos e memorizando fatos ou procedimentos. É preciso ser capaz de reconhecer e definir problemas, gerar vários caminhos para chegar a uma solução, identificar os mais eficientes ou elegantes e comunicar os resultados. Estas capacidades podem ser cultivadas e desenvolvidas, desde que se proporcionadas oportunidades de aprendizagem apropriadas para despertar o potencial criativo, inovador e crítico. Destaca-se aqui, então, o potencial das tarefas como um segmento da sala de aula, cujo objetivo é despertar a atividade dos alunos de modo a promover um ambiente que proporcione tais oportunidades.

De acordo com Stein e Smith (2009), uma tarefa é definida como "um segmento da actividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular" (p.22). Podendo ser abertas ou fechadas, tratar de problemas, exercícios, execução de procedimentos ou aplicabilidade de conceitos. Dentre os vários elementos discutidos entre os pesquisadores como fatores que influenciam a aprendizagem de matemática, tem-se que as tarefas têm ganhado espaço significativo, recebendo atenção de vários países que buscam promover o desenvolvimento da educação matemática, conforme apontam Cyrino e Jesus (2014). Apesar disso, são recentes os estudos a respeito deste tema no Brasil. Também Vale (2014), afirma que as tarefas influenciam a forma como os alunos aprendem, principalmente se forem relacionadas com a resolução e a formulação de problemas que podem levar a compreensão de conceitos e ao mesmo tempo incentivar o desenvolvimento de dimensões do pensamento criativo e ressalta: "a aprendizagem depende fortemente do professor e das tarefas que este propõe" (p. 122).

Com base em Ponte (2014), destacamos que na resolução de uma tarefa é de fundamental importância o modo como os alunos interpretam as representações indicadas nos enunciados e como criam e interpretam as suas próprias representações. Em particular, no âmbito da geometria, o forte apelo visual dos problemas oportuniza que o aluno recorra à diversas representações semióticas como ferramentas de visualização para sua solução, uma vez que: "Visualização é a capacidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre fotos, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com o objetivo de desenvolver ideias anteriormente desconhecidas e entendimentos avançados" (Arcavi, 1999, p. 26).

Assim, corroborando também com Duval (1999), temos que o visualizar pode permitir que os alunos desenvolvam flexibilidade para percorrer entre as diferentes representações semióticas, pois a "visualização refere-se a uma atividade cognitiva que é intrinsicamente semiótica" (p. 9).

O filósofo e psicólogo francês Raymond Duval deu início à Teoria dos Registros de Representação Semiótica em 1986 quando se deu conta de que na matemática trabalhamos somente com as representações de seus objetos e não com os objetos propriamente ditos (Freitas &Rezende, 2013). Dessa forma, pensando em impedir que os alunos confundam o objeto matemático com a sua representação, Duval enfatiza a importância de se trabalhar com representações variadas que não limitem a capacidade de compreensão e aprendizagem mesmo sem a existência física desses objetos.

Em se tratando da geometria, Duval (2012) esclarece que ao se visualizar um desenho de um objeto geométrico, se este for tridimensional a sua representação será bidimensional e deste modo, perceber as características particulares desse objeto, como regularidades, paralelismos, ortogonalidades etc., não é uma tarefa muito simples. Por isso, o pesquisador defende a necessidade do conhecimento de várias representações de um mesmo objeto para que suas propriedades e características sejam exploradas auxiliando, assim, na compreensão e na construção do conhecimento matemático. Como registros de representação, Duval (2011) elenca: registro figural (RF) – “as representações produzidas para que possamos ‘ver’ (p. 84), sendo as figuras em geometria, as mais naturais; registro simbólico – pode ser visto na forma de representações numéricas (RN) e algébricas (RA); registro da linguagem materna (RLM) – “constitui o primeiro registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento” (p. 83) e pode ser considerado como um enunciado de um teorema, a descrição de algumas propriedades, a explicação para a solução de uma tarefa etc; e o registro gráfico (RG) – que consiste na construção de gráficos cartesianos, seja com instrumentos de desenho ou por meio de *softwares*.

Para este trabalho, exploramos somente os três primeiros registros, haja vista que estes apareceram naturalmente dentre as soluções dos alunos participantes para as tarefas propostas. Mais ainda, identificamos traços da flexibilidade entre as representações contidas nesses registros já que alguns alunos apresentaram mais de uma representação para a solução da tarefa de contagem proposta.

É possível que com esses registros sejam efetuadas transformações de representações semióticas que exijam um certo desempenho cognitivo do indivíduo. Para este trabalho, falaremos especificamente do tratamento. O tratamento é uma transformação que ocorre internamente ao registro, ou seja, uma mudança realizada sem sair do registro inicial (Duval, 2009). Por exemplo, no caso das figuras tem-se a possibilidade de explorá-las heuristicamente por meio de uma reconfiguração de suas subfiguras. Dessa forma, o tratamento pode ser efetuada em ambientes figurativos de modo a encontrar a solução para a tarefa que se está sendo proposta.

De acordo com Vale (2012), o trabalho com tarefas de contagens em ambientes figurativos constitui uma boa estratégia para desenvolver nos alunos capacidades de ver (identificação, decomposição, rearranjo, disposição) e contribuem para uma melhor flexibilidade de visualização e pensamento. Desta forma, a autora afirma que é crucial para os alunos verem as relações entre os termos sucessivos, permitindo-lhes traduzir os padrões visuais identificados através de expressões numéricas como primeiro passo para chegar à generalização – o cerne do pensamento algébrico.

Deste modo, este trabalho executado pelo GPEG – Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria, tem como objetivo investigar, a partir da visualização figural, quais as representações semióticas que alunos do 7º e 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual do município de Maringá, utilizam para resolver uma tarefa de contagem.

Materiais e métodos

A metodologia adotada para esta pesquisa é de natureza qualitativa, sob o paradigma interpretativo, pois propõe-se refletir sobre o que há de característico e particular nas situações analisadas.Segundo Denzin e Lincoln (2011), “os pesquisadores qualitativos estudam coisas dentro de seus contextos naturais, tentando entender, ou interpretar, os fenômenos em termos dos significados que as pessoas lhes atribuem”(p.3).A análise de dados foi realizada de forma descritiva e interpretativa, sob a luz dos referenciais citados anteriormente, dentre os quais destacamos Duval e sua teoria a respeito das representações semióticas.

A tarefa aqui analisada foi aplicada no ambiente de sala de aula de uma escola estadual de Maringá, no estado do Paraná, Brasil.Os participantes foram 70 alunos, do 7º e 8º ano, que foram organizados em duplas. A tarefa foi aplicada pela própria professora da turma, que a longo prazo desenvolve um trabalho por meio de tarefas. Foi disponibilizado aos alunos papel quadriculado para que registrassem suas resoluções e a tarefa foi impressa e entregue as duplas como na imagem abaixo.

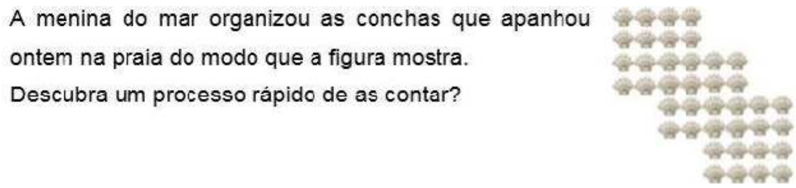


Figura1.Tarefa de contagem proposta aos estudantes.

Esta tarefa é proposta por Vale (2012), neste trabalho a autora tem como objetivo entender de que maneira uma experiência didática baseada em padrões figurativos é um contexto adequado para obter expressão de generalização e pode contribuir para promover a aprendizagem matemática, em particular o pensamento algébrico ao nível do ensino básico por alunos e (futuros) professores. Para isso, recolheu as resoluções realizadas em turmas do 3º e 4º ano.

Após analisar o trabalho desta autora consideramos esta tarefa como adequada para a obtenção dos nossos dados de modo que estes nos permitissem alcançar o objetivo de investigar quais as representações semióticas que alunos do 7º e 8º ano do Ensino Fundamental utilizam para resolver uma tarefa de contagem, a partir da visualização figural.

Os dados foram coletados por meio do registro escrito feito pelos alunos nas folhas de papel quadriculado e de entrevista realizada com a professora da turma.

Resultados

A tarefa aqui analisada é intitulada "Conchinhas" e após ser entregue foi solicitado aos alunos que descobrissem um processo rápido para a contagem das conchas, sem que essa contagem fosse feita uma a uma. Como esperado, diferentes representações semióticas foram utilizadas pelos alunos.

Para a análise e classificação das respostas, consideramos que os estudantes utilizaram uma representação figural para solucionar a tarefa, quando estes realizaram um tratamento da figura dada ou reproduziram outra figura com o objetivo de obter uma solução para a tarefa. Como representação numérica, enquadramos as soluções que se apoiaram em cálculos estritamente numéricos e àqueles que recorreram a formalização matemática por meio de letras ou quantificadores matemáticos, classificamos, como representação algébrica. Por fim, as respostas descritas pela linguagem natural, ou seja, as descrições que consistiam em explicações da solução para a tarefa, categorizamos como representações na linguagem natural.

A figura a seguir indica as representações utilizadas pelos alunos e as suas frequências:

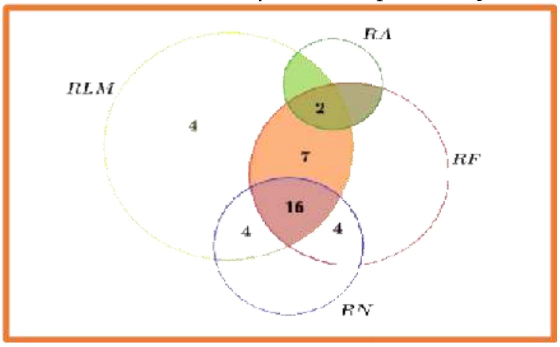


Figura 2. Representações semióticas utilizadas pelos estudantes.

Observamos que, das 37 tarefas: 33 apresentaram o uso da RLM, 29 o uso da RF, 24 da RN e 2 da RA; 25 apresentaram o uso da RLM e da RF, simultaneamente e 16 apresentaram o uso da RLM, RF e RN, simultaneamente.

Discussões

Com base nos dados coletados foi possível observarmos que a tarefa de contagem proporcionou aos estudantes o uso das diferentes representações em prol de sua solução. A visualização da figura suscitou, em sua maioria, o uso da RLM com o objetivo de explicar a solução para a tarefa. Arcavi (1999) e Vale (2015) explicam que a visualização não está apenas relacionada com a ilustração, mas é reconhecida como uma componente do raciocínio estreitamente relacionada ao conceitual e não somente ao perceptual, e além disso, Vale (2015) esclarece que Krutetski (1976) indica o despertar do pensamento lógico verbal em situações que envolvem a recorrência à visualização de figuras. Sendo assim, das 37 tarefas, 33 apresentaram essa exploração além da perceptual, ou seja, utilizaram-se da RLM para explicitar seus raciocínios e desses, 4 estudantes utilizaram somente a RLM.

Como exemplo do uso da RLM destacamos:

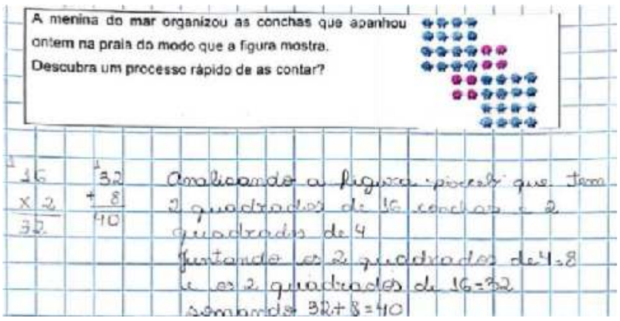


*Figura 3.*Resolução de um estudante na linguagem materna.

O estudante recorreu à linguagem para expressar seu entendimento da solução do problema.

Na solução desta tarefa também encontramos o uso da RF, ou seja, alguns estudantes, no processo de visualização da figura, realizaram tratamentos figurais com o objetivo de encontrar a solução para a tarefa. "A visualização pode suscitar o desenvolvimento da intuição e a capacidade de ver novas relações" (Vale, 2015, p. 04). O apelo à RF ocorreu em 29 dos 37 estudantes, no entanto, nenhum aluno recorreu somente a essa representação, ou seja, todos desse grupo viram a necessidade de aliá-la a uma outra representação de modo a dar sentido para suas soluções.As representação mais utilizada pelos estudantes em parceria com a RF foi a RLM e, em seguida, a RN. Godino (2012) cita que para Arcavi (2003), a visualização consiste no processo de criação, interpretação e reflexão acerca de imagens, diagramas e desenhos permitindo representar ou comunicar uma certa informação. No caso desta pesquisa, observamos que a forma que os alunos mais recorreram para comunicar seus raciocínios figurais, resultantes da visualização, foi a RLM. Como exemplo, temos:

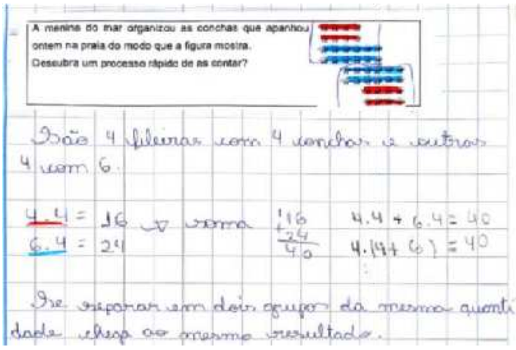


Figura 4. Resolução de um estudante na linguagem materna e na numérica.

Nesse exemplo temos a recorrência à representação na linguagem materna e na numérica, com o objetivo de esclarecer o raciocínio realizado com a representação figural. Tal fato, nos faz observar que, assim como afirmam Vale e Barbosa (2018), a visualização é uma ferramenta poderosa na abordagem da geometria, mas também de outros campos, como o numérico. Logo, devemos encontrar tarefas que estimulem, por meio da visualização, essa potencialidade de se apresentar várias soluções corretas para um mesmo problema, e mais ainda, percorrendo diferentes representações. Duval (2003) relaciona os fracassos ou os bloqueios dos alunos ao ato de manter um enclausuramento de representação semiótica, já que tal fato, também impede que os alunos utilizem seus conhecimentos prévios forçando-os a utilizar somente a técnica ensinada pelo professor.

Como solução a essa tarefa, também obtivemos o uso da Representação Algébrica, no entanto essa foi pouco requerida, já que das 37 tarefas, somente 2 tarefas apresentaram uma solução algébrica. A seguir, um exemplo dessa aplicação:

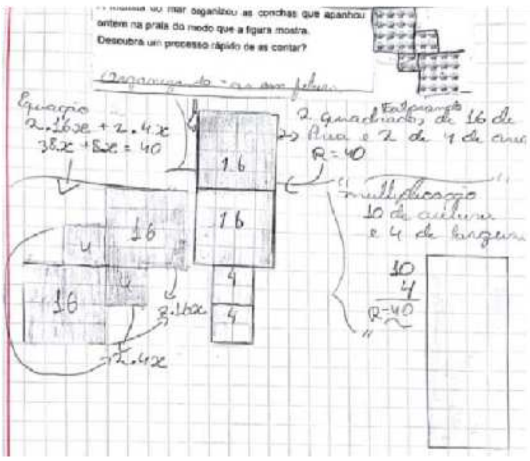


Figura 5. Resolução de um estudante na representação algébrica.

Observe que o aluno recorreu a uma equação de primeiro grau com o objetivo de solucionar a tarefa proposta. Embora o enunciado da tarefa solicitasse que os estudantes descobrissem um processo rápido para solução, foi possível percebermos que estes procuraram um processo que fosse mais rapidamente pensado por eles, o que não necessariamente significa ser um processo rápido de solução. No caso desses estudantes que apresentaram a solução exposta na Figura X, tal contexto figurativo/visual despertou um pensamento algébrico como forma de explorar a solução para essa tarefa proposta.

Destacamos que muitas outras soluções interessantes, que utilizaram de representações figurais, numéricas, algébricas e na linguagem materna, foram realizadas, no entanto devido a limitação de exposição neste arquivo, destacamos somente alguns. Tais soluções poderão ser expostas e discutidas durante a apresentação no evento.

Considerações Finais

Por fim, concluímos que a tarefa proposta, que consistia num trabalho com padrões figurativos/visuais, revelou-se com grande potencial para promover a relação entre as diferentes representações semióticas. Os alunos utilizaram representações variadas, tais como: língua materna, figural, numérica e algébrica, sendo a língua materna a utilizada com maior frequência e a algébrica, a menos utilizada.

Tal tarefa permitiu aos estudantes uma flexibilidade visual importante que levou-os a buscar diferentes estratégias de abordagem que permitiram solucionar o problema. Acreditamos que, com esse trabalho, corroboramos com o pensamento de Vale (2015) que afirma ver potencialidades no ato de estimular os alunos a apresentarem diferentes resoluções, contrariando a ideia tão difundida de que o importante e que basta ao aluno é conseguir uma resposta correta, independente desta ser a mais simples ou a mais interessante.

Nesse sentido, tal implementação, além de despertar o uso das diferentes representações para sua solução, também ofereceu oportunidade para que os alunos utilizassem a habilidade de visualização, o que foi verificado por meio dos registros apresentados por eles.Nestes é possível perceber que os alunos relacionaram questões conceituais além da percepção, conforme Vale, Barbosa e Pimentel (2014), que apontam que a visualização não está relacionada somente com a ilustração mas é principalmente reconhecida como uma componente do raciocínio e do pensamento.

Portanto, o desafio consiste não somente em aplicar tarefas, mas em selecionar tarefas que proporcionem a aprendizagem, despertem a curiosidade e o interesse a ponto de encontrar não somente uma solução, mas a melhor solução.

Referências e bibliografia

Arcavi, A. (1999).*The role of visual representations in the learning of mathematics*. XXIConference on the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter,Mexico, 26-1.

Cyrino, M. C. C. T., Jesus, C. C. (2014). *Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática*. Ciência& Educação, Bauru, v. 20, n. 3, 751-764.

Duval, R.(1999). *Semiosis y pensamento humano: Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales*. Tradução: Myriam Vega Restrepo. Cali, Colombia: Universidade del Valle.

Duval, R.(2003). *Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In: Machado, S. D. A. (Org). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus,11-33.

Duval, R.(2009).*Semiósis e Pensamento Humano*: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Duval, R.(2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas*. Org.:Tânia M. M. Campos.Tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM.

Duval, R.(2012). *Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência*. Tradução: MériclesThadeu Moretti. Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat: Florianópolis, v.07, n.1, 118-138.

Denzin, N. K.,Lincoln,Y. S.(2011).*Introduction: The discipline and practice of qualitative research*. The Sage handbook of qualitative research (4th ed., 1-19). Thousand Oaks, CA: Sage.

Freitas, J. L. M., Rezende. (2013). V. *Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica*. Revista Paranaense de Educação Matemática - RPEM: Campo Mourão – PR, Jul-dez.

Godino, J. D.,Gonzato, M.,Cajaraville, J. A., Fernández, T.(2012). *Una aproximación ontosemiótica a lavizualización em educación matemática*. Revista de Investigación y experiencias didácticas - Enseñanza de lasciencias,n. 30.2, 109 - 130.

Ponte, J. P. (2014). (Org.) *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Stein, M. H., Smith, M. S. (2009).*Tarefas matemáticas como quadro para reflexão*: da investigação à prática. Educação e Matemática, n° 105, 22-28.

Vale, I. (2012). *As tarefas de padrões na aula de matemática*: um desafio para professores e alunos. Revista Interacções, n. 20, 181-207.

Vale, I. (2015). *A criatividade nas (re)soluções visuais de problemas*. Revista Educação e Matemática Nº 135 - Novembro/Dezembro.

Vale I., Barbosa A. (2018).*Mathematical problems: the advantages of visual strategies*, Journal of the European Teacher Education Network - Jeten, vol. 13, 23-33, Viana do Castelo, Portugal.

Vale I.; Barbosa A.; Pimentel T. (2014). *Tarefas para promover a criatividades em matemática*, EIEM, Sesimbra, Portugal.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Posicionamiento de los estudiantes y la efectividad en resolución de problemas en trabajo colaborativo.

Nicole **Fuenzalida** Díaz
Centro de Investigación Avanzado en Educación, Universidad de Chile
Chile
nicole.fuenzalida@ciae.uchile.cl
Carmen Gloria **Espinoza**
Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile
Chile
cespinoza@dim.uchile.cl
Farzaneh **Saadati**
Centro de Investigación Avanzado en Educación, Universidad de Chile
Chile
farzaneh.saadati@ciae.uchile.cl

Resumen

El siguiente estudio hace un examen sobre los cambios de comportamiento de dos estudiantes con distintos posicionamiento en formación primaria que participan en una actividad estructurada de resolución de problemas de manera colaborativa. Se analizaron 3 sesiones grabadas en vídeo de sus actividades en el aula. El seguimiento de las actividades muestra cómo los estudiantes mantienen o cambian sus posiciones, evidencian aprendizajes considerables en el trabajo colaborativo y cómo esto permite adquirir habilidades individuales para trabajar la resolución de problemas de manera progresiva efectivamente. Los resultados destacan el impacto de la propuesta de resolución de problemas con base en el trabajo colaborativo, el impacto que tiene en la autoeficacia y puede hacer una contribución importante a los profesores de matemáticas.

Palabras clave:autoeficacia, comportamiento, resolución de problemas, trabajo colaborativo

Introducción

En las escuelas chilenas las habilidades matemáticas están prácticamente ausentes y los docentes actúan en general siguiendo un modelo obsoleto (Saadati et al., 2018). Distintos estudios caracterizan las clases de matemáticas en Chile como una enseñanza centrada en el profesor, donde es él quien hace las preguntas, hace que los estudiantes sigan la exposición en el pizarrón o trabajen individualmente resolviendo problemas (Araya y Dartnell, 2009). Ellos declaran que los estudiantes hacen muy pocas preguntas matemáticas, prácticamente sin razonamiento matemático deductivo. Según Preiss y otros (2012), cuando los profesores realizan resolución de problemas (RP), se enfocan mayormente en entrenar destrezas y realizar procedimientos rutinarios, de manera que las nociones matemáticas más que desarrolladas, son comunicadas. Frente a este escenario es que nace ARPA o "Activando la Resolución de Problemas en las Aulas" que busca capacitar a profesores en RP mediante talleres de Desarrollo Profesional (DP). El objetivo del PDes generar un cambio en la percepción de la matemática y su aprendizaje con unatransformación consecuente en el actuar del profesor en el aula para mejorar las habilidades de RP de los estudiantes. ARPA busca proveer un ambiente activo y equitativo de aprendizaje para todos los estudiantes independiente de su género, carácter o habilidades. El objetivo de este estudio es revisar cómo ARPA afecta el comportamiento (como resolutor de problemas y como miembro del grupo) de dos estudiantes durante el trabajo en grupo.

ARPA: La propuesta de ARPA es llevar una metodología al aula para tratar la RP, la que consiste en realizar una actividad de RP centrada en los estudiantes. La principal herramienta es el trabajo en grupo colaborativo entre los estudiantes organizado aleatoriamente y monitoreado por el profesor quien interviene en los grupos cuando estos tienen dudas o dificultades. La metodología se compone de cuatro etapas,en donde las interacciones del profesor hacia el grupo se realizanmediante preguntas para activar la RP, estimular el trabajo colaborativo o consolidar los resultados y el trabajo de los estudiantes, sin dar respuestas o entregando la solución. Además, según cada grupo, el profesor puede entregar simplificaciones o extensiones del problema en la medida que las necesiten. El profesor da el tiempo y el espacio para que los estudiantes puedan trabajar en la actividad.

Marco Teórico

Usamos como lente laperspectivasociocognitiva que asume que el aprendizaje humano se puede generar mediante la observación en las actividades sociales, de hecho nuestro interés es analizar el rol de las interacciones sociales en el aprendizaje. Esta perspectiva nos permite profundizar en cómo una persona puede desarrollar su aprendizaje a través de trabajo colaborativo.

La teoría de la carga cognitiva se desarrolló a fines de la década de 1980 a partir de un estudio sobre resolución de problemas de Sweller (1988). La teoría de la carga cognitiva se basa en la arquitectura cognitiva de los alumnos individuales, específicamente estáenfocada en la adquisición de conocimiento generalizados como un medio para facilitar habilidades flexibles de resolución de problemas. Esta teoría se ocupa del aprendizaje de tareas cognitivas complejas, en las que los alumnos a menudo se sienten abrumados por la cantidad de elementos de información interactiva que deben procesarse simultáneamente antes de que pueda comenzar un aprendizaje significativo. Al aplicar esta teoría a los entornos de aprendizaje colaborativo, se puede argumentar que si las personas deben trabajar juntas y aprender de manera efectiva y/o eficiente en grupos, se debe entender la posición como miembro del grupo y también su sistema cognitivo como resolutor de problemas individuales. Este marco teórico podría proporcionar una mejor comprensión de los factores que determinan cuándo y cómo el trabajo colaborativo será efectivo y eficiente para el aprendizaje (Kirschner, Paas y Kirschner, 2009). La colaboración puede aumentar la aptitud de los colaboradores cuando juntos pueden acceder a más recursos que cuando trabajan individualmente.

Metodología

Posicionamiento de los estudiantes y la efectividad en resolución de problemas en trabajo colaborativo

Este es estudio basado en dos casos una chica y un chico que participan en cursos donde se implementan ARPAs en una comuna rural de la región de O'higgins, en Chile. Con la finalidad de obtener casos sin sesgo, los estudiantes fueron seleccionados de manera aleatoria en donde los profesores participantes del DP no tuvieron influencia. Los estudiantes participantes de la muestra, no estudian en el mismo establecimiento, sin embargo, su entorno educativo es similar. Ambos comenzaron en 5° año de formación primaria a trabajar la RP con la metodología ARPA y han continuado en el estudio hasta 6°año. Las profesoras, implementan la metodología en sus clases una vez por mes y en cada una de esas implementaciones se grabó vídeo y audio a los estudiantes participantes del estudio en el trabajo en grupo para resolver un problema no rutinario con niveles de dificultad crecientes. El primer problema fue: *Un señor que hace bicicletas y triciclos tiene 19 ruedas y decide hacer bicicletas y triciclos con ellas ¿Cuántos tipos de cada uno debe hacer para usar todas las ruedas?*Para este estudio se consideraron las primeras tres ARPAs en las que los estudiantes participaron. Para el análisis de vídeo utilizamos un marco teórico para identificar los cambios en el comportamiento de los estudiantes, este se enfocó en dos niveles; primero el o la estudiante como miembro del grupo y segundo en la RP.

Resultados

A continuación se mostrarán los resultados del análisis con el fin de identificar las posiciones específicas que construyeron su aprendizaje en el trabajo colaborativo de RP.

El caso de Rosa

ARPA 1: Esta fue la primera experiencia de la estudiante trabajando colaborativamente en la RP. Durante esta actividad la estudiante no parece estar comprometida con la RP, es más podríamos definirla como una estudiante pasiva debido a que son otras estudiantes del grupo quienes tienen el control del desarrollo del problema. En esta primer ARPA la estudiante trabaja en un grupo conformado por 3 chicas más y en donde 2 de ella lideran la resolución dándole poco espacio a las dos restantes.

> E1: Ya, a ver, pueden ser tres triciclos. No, 4 triciclos y nos quedan… 19 menos 12 resten 19 - 12
> E2: Se pueden fabricar 3 bicicletas y 4 triciclos
> R: Ósea, con 19 ruedas ¿cuánto me alcanza para hacer de estos? (en voz baja)
> E1: Para hacer esto (Estudiante señala la hoja de Rosa)
> E2: Mira se pueden hacer 3 triciclos y te quedan 10 ruedas (Rosa duda)
> E1: Se pueden hacer 3 triciclos y 5 bicicletas (Rosa escribe la solución en su hoja de resolución) Mira, acá pongan la respuesta y acá abajo pongan como lo hicimos. (Rosa mira lo que escriben las estudiantes en sus hojas)

El trabajo en esta ARPA no es propiamente un trabajo colaborativo, si bien existen pequeños espacios en donde la estudiante puede explicar o preguntar sobre el desarrollo del problema, el grupo no construye sobre las ideas de la estudiante, es más, las intervenciones de la estudiante son tímidas, preguntando en voz baja a sus compañeras de grupo. Finalmente, la estudiante no resuelve el problema por sí misma, pero logra comprenderlo gracias al desarrollo de sus compañeras. Durante el trabajo en la RP la estudiante se mantiene atenta a como se desarrolla el problema, sin embargo ella asume que necesita la ayuda de su grupo para entenderlo el problema, ella es pasiva. Luego de unos minutos, en donde sus compañeras resuelven el problema inicial, la estudiante logra comenzar a resolver la extensión entregada por la profesora de manera autónoma.

ARPA 2: Al comienzo de esta ARPA todos los estudiantes interactúan de igual manera, tanto Rosa como sus compañeros de grupo conversan con la finalidad de entender el problema y buscar qué es lo se les solicita. Mientras los compañeros de Rosa afirman conocer el resultado, Rosa no comprende lo que hay que hacer, por lo que pregunta a sus compañeros y no deja de cuestionarse el encabezado del problema lo que finalmente la lleva a objetar los resultados que sus compañeros de grupo proponen sin comprender a cabalidad el enunciado del problema.

Luego la profesora interviene por primera vez en el grupo, en esta intervención la profesora indirectamente confirma que el resultado que obtuvo el grupo no es correcto y como ayuda les entrega material concreto. Después de la intervención de la profesora, Rosa logra mantenerse activa en la resolución del problema y es quién la lidera, ella es quién toma la iniciativa de resolver el problema y direcciona el grupo para lograr encontrar el resultado. Rosa no se detiene ningún momento de la actividad, debido a que el problema le resulta un desafío muy alto Rosa se mantiene comprometida con la resolución del problema y se interesa en involucrar a sus compañeros en la actividad.

ARPA 3: En el tercer ARPA la estudiante se encuentra en un grupo compuesto solo por niñas que no están comprometidas con la RP, en un principio, la estudiante intenta estimular a sus compañeras para que inicien el trabajo colaborativo sin tener mucho éxito:

R: Es que no sé cómo hacerlo (comienza a buscar lápices)
E 2: Rosa unicornia
E 1: ¿Qué vas a dibujar en artes?
E 3: La pileta.
E 2: Un paisaje

Rosa no logra comprometer a sus compañeras en la resolución ni obtener un resultado hasta que luego de unos minutos la estudiante asume que el desafío es muy alto: “No sé cómo hacerlo”, sin embargo, persevera en la resolución y luego vuelve a retomar.

Durante esta ARPA, la estudiante utiliza distintas estrategias para mantenerse activa en el trabajo, entre ellas vuelve leer el problema, trata de involucrar a sus compañeras, les explica sus estrategias sin éxito, pide ayuda a la profesora e interactúa pasivamente con los grupos a su alrededor para obtener ideas. Luego de 20 minutos de trabajo perseverante la profesora interviene guiando de manera excesiva el problema para luego entregar material concreto al grupo con claras instrucciones. Una vez que la estudiante comienza el trabajo con la ayuda del material concreto y de la profesora, ya no le interesa involucrar al resto del grupo, por lo tanto, el trabajo no es colaborativo y la estudiante resuelve de manera individual el problema y las extensiones.

R: 6, 7, 8, 9, 10. (Organiza y cuenta el material concreto)
E 1: Tengo sueño ¿Quién no quería venir al colegio? Yo no quería venir…
E 2: Si, por eso yo vine porque que había que hacer el trabajo de artes.
E 1: El de historia.
E 2: Historia no nos toca, nos toca tecnología y ese ya lo terminamos.
R: Si hay otra forma (dice organizando su material concreto, sin mirar a sus compañeras para luego escribir en su hoja sin compartir el resultado)

El caso de José

ARPA 1: En esta, la primera experiencia en ARPA, José es parte de un grupo de 5 estudiantes (igual que en todas las experiencias siguientes). Al inicio de la actividad José logra entender individualmente el problema pero no tiene interés en resolverlo, su interés está en dirigir el trabajo del grupo para que éste resuelva el problema. El trabajo comienza con material concreto lo que permite que José entienda rápidamente, el nivel de dificultad del problema es bajo y no alcanza a ser una dificultad. José se preocupa solo de distribuir las tareas del grupo, dando indicaciones y preocupado de que todos avancen a la par, manejando los tiempos, solicitando que todos participen según sus indicaciones. Sus compañeros de grupo se muestran incómodos con la manera de trabajar de José ya que no les es posible participar de manera libre en el grupo, deben apegarse a lo que él les indica. A pesar de esto, José procura que todos los estudiantes participen, sin embargo, no le preocupan las interacciones entre los otros estudiantes, solo las que dirige él.

J: Tienen todos sus cubos

E1:(dirigiéndose a José) ¿Oye, de cuántas maneras hacer las ruedas?

J: ¿Sánchez cómo se hace las ruedas?

J: Según ustedes ¿qué deberían hacer con los cubos?

E2: Tenemos que juntar de cada uno, por ejemplo…. (José interrumpe a su compañero)

J: Juntamos 3 cubos y después 2, eso tenemos que hacer

E2: Ósea, 3 y 2, 3 y 2, ir juntando

J: Vayan armando

Durante el trabajo José valida más las respuestas y/o intervenciones de la profesora que las de sus compañeros de grupo, toma decisiones sin consultar al grupo y opta por aclarar sus dudas con la profesora antes de consultarlo con su grupo.

ARPA 2: En esta ARPA José mantiene su rol dentro del trabajo en grupo, en esta segunda experiencia José continúa dirigiendo las interacciones de sus compañeros, la diferencia entre esta actividad y la anterior radica en que la dificultad del problema resulta ser mayor al problema de la actividad anterior. El desafío del problema resulta ser tan alto para José y su grupo que finalmente no logran obtener una respuesta válida para el problema. Durante la actividad hay indicios de que José no entiende el problema, las instrucciones que les da a sus compañeros de grupo no están relacionadas y no aportan a la resolución del problema.

J: ¿Cuántas combinaciones puedes hacer con 20 bolitas? (José lee la pregunta del problema)

E1: 20x20….. 20x20….20 por 20… ahí ya está po

J: ahh ya ¿cuánto es 20x20?

E3: 400

(José lee nuevamente el problema e interviene la profesora preguntando a José sobre lo que escribió en su hoja)

P: ¿por qué pusiste 20 x 20?

J: porque E3 me lo dijo

A lo largo de todo el trabajo esta es la actitud que predomina en José incluso cuando sus compañeros sugieren una estrategia distinta a la que estaban trabajando, él está tan centrado en solo dar indicaciones que no considera los aportes de otros.

E3: chiquillos porque mejor no vamos haciendo las pelotitas con los distintos sabores.

(Estudiantes E1 y E2 discuten sobre a estrategia que propone E3)

J: multipliquen 20 x 20.

ARPA 3: En esta ARPA José nuevamente asume el rol de líder dentro del grupo, asignando tareas a sus compañeros, sin embargo en esta actividad valida las estrategias que proponen sus compañeros. Además se hace partícipe de la resolución de problema y comienza sutilmente a aportar con soluciones, defender sus ideas, buscar explicaciones y a disputar las aseveraciones de sus compañeros de grupo.

J: Ya Miguel lee el problema (E1 lee el problema para todos sus compañeros)

J: Cata entendiste algo (Cata comienza a buscar una estrategia y traza una línea de largo 15 cm. en su hoja, José observa)

J: Buena Cata, buena estrategia. Ya chiquillos todos hagan lo que está haciendo la Cata, todos pongan la regla y marquen hasta 15.

(Todo el grupo replica la estrategia de la compañera en su hoja incluido José. El espera a que todos terminen de dibujar las líneas en sus hojas...)

J: ¿terminaste miguel? ¿Cómo vas Ariel? ¡Eso Cata eso! Ya Ariel hace una combinación que te de 15 luego otra y otra, así vamos avanzando cada uno dando combinaciones

E2: ¡Yo tengo una!

Como comentario general de todas las actividades observadas, constatamos que el comportamiento de José resulta ser estructurado, no existe un motivo aparente para que él sea el líder en la actividad, su posición no es otorgada por el grupo ni autoproclamada por él durante el ARPA. Pese a la elección aleatoria del estudiante por parte del equipo de investigación tenemos la hipótesis que José recibió instrucciones para liderar el grupo.

Que aprendimos de estos casos

De acuerdo con los resultados observados durante el primer ARPA, Rosa estuvo completamente ajena al trabajo colaborativo del grupo, lo que significa que no tenía ningún aporte que hacer a la resolución del problema, durante la actividad solo se preocupó por obtener el resultado final. Según Barnes (2004) durante toda ARPA 1 Rosa se posicionó como una persona en necesidad de ayuda. Cuando la profesora entrega el problema, Rosa busca ayuda en sus compañeras para comprender el problema, sin embargo, sus preguntas no demuestran suficiente esfuerzo por entender e involucrarse en la resolución, es más, en los casos que interviene para comprender el problema baja su tono de voz sin ser perseverante para demandar una respuesta que sea suficiente para entender. Esto demuestra que Rosa no cree tener las capacidades para resolver problemas de manera individual. Creemos que esta estudiante tiene baja autoeficacia en resolver problemas en la etapainicial del programa ARPA.

En ARPA 1 José es todo lo contrario al rol que Rosa juega en la primera experiencia, según Barnes (2014) José asume el rol de gerente y portavoz, esto se evidencia en que José posee una alta autoeficacia lo que le permite entender rápidamente el problema sin embargo, al comprender el problema individualmente José no se hace parte del trabajo en grupo porque asume la misión de que el grupo debe entender y resolver, es decir, él se posiciona por sobre sus compañeros como replicando la actitud que tendría un profesor/monitor al dirigir o guiar el trabajo en grupo.

En ARPA 2 tanto Rosa como José asumen el mismo rol que en las experiencias pasadas, el punto de inflexión de esta actividad para ambos estudiantes es la dificultad del problema que determina la posición de Rosa y afecta la capacidad de resolver problemas de José. La diferencia entre la primera experiencia de Rosa y la segunda, es que en la segunda todos los integrantes del grupopueden tomar el mismo rol de críticos (Barnes, 2004), todos son capaces de hacer preguntas, sin embargo éstas no contribuyen en el avance en la resolución del problema, es por esto que Rosa oscila entre un rol crítico y facilitador (Barnes, 2004), empoderándose en el grupo pero conservando la necesidad del trabajo de sus compañeros. José por su parte, no logra entender el problema a diferencia de la experiencia anterior, por lo que todas sus contribuciones como gerente (Barnes, 2004) son negativas y perjudican el desarrollo del problema. La actividad es un completo fracaso en cuanto a obtener un resultado para el problema, experiencia que sienta un precedente en José como resolutor de problemas y como miembro del grupo.

En ARPA 3 Rosa continúa siendo una estudiante que necesita ayuda externa para entender el problema pero debido a las dificultades que tiene para trabajar en grupo, vuelve a cambiar su posición a"*networker"*(Barnes, 2004), buscando ayuda fuera de grupo, escuchando conversaciones de otros grupos y preguntando a la profesora y solicitando material concreto. Este escenario permite ver que Rosa aprende a moverse de manera flexible y obtener ventajas sobre el grupo durante el trabajo colaborativo. Respecto a la experiencia anterior, notamos un cambio en la actitud de José frente al trabajo colaborativo, creemos que lo ocurrido en ARPA 2 sirve para que José logre involucrarse en la resolución del problema del ARPA 3 considerándose un miembro del grupo y valorando los aportes de los compañeros y a pesar de mantener su rol, José transita hacia un rol más crítico y colaborador (Barnes, 2004). Rosa tiene un gran avance en sus habilidades para resolver problemas. De acuerdo a Polya (1954) el primer paso para resolver un problema es entender el problema, en el caso de Rosa inicialmente ella no está interesada en entender el problema y ella nunca se enfoca en esta etapa, solo busca la respuesta final. Sin embargo este modo de actuar cambia de manera significativa en el ARPA 3. En la última ARPA es obvio que ella cambia su creencia sobre su capacidad para resolver problemas, esto es un cambio positivo en su autoeficacia,incluso cuando ella pregunta por una explicación su voz es más firme que en el primer ARPA.

En cuanto a José, a pesar de que su meta inicial es que el grupo resuelva el problema, solo con su dirección, logramos ver que efectivamente aprende a trabajar en grupo reconociendo que puede apoyarse en sus compañeros y no solo en la profesora. José que ya poseía una alta autoeficacia, lo que inicialmente lo marginó de la resolución en ARPA 1 debido a que toma un rol de profesor frente a sus compañeros, reconsidera esta posición luego de ARPA 2, dado que reconoce que independiente de su rendimiento y elevada autoeficacia, necesita de sus compañeros para avanzar en la resolución de problemas y que el rol de gerente no es suficiente para contribuir a sus solución.

Conclusiones

Ambos casos nos sirven para ejemplificar, de manera preliminar, los efectos que ARPA como DP tiene en los estudiantes. Rosa, como señalan las mediciones nacionales e internacionales sobre los estudiantes chilenos, posee inicialmente una baja autoeficacia y poco interés en la RP matemáticos, además de no tener estrategias claras para trabajo colaborativo. Mientras que José cumple con el perfil del estudiante varón con interés en la matemática y con alta autoeficacia sin embargo, al igual que Rosa carece de estrategias para trabajar de manera colaborativa y si bien cree tener la capacidad de resolver problemas, en esta experiencia se cuestiona esa capacidad (Zimmerman, 1989). Durante el transcurso de las tres ARPAs analizadas para este trabajo, se comprueba un notable avance en la capacidad de ambos estudiantes para trabajar colaborativamente, aun cuando los estudiantes tienen distinta posición y carácter ante la RP. Según Barnes (2004) el trabajo colaborativo provee oportunidades para que cada estudiante pueda tener diferentes posiciones en el grupo, como persona en búsqueda de ayuda o mánager. En donde todo dependerá del cómo el estudiante aprovecha esas oportunidades que el trabajo colaborativo le brinda.

En el caso de estos estudiantes, podemos ver que ambos aprendieron a flexibilizar su rol predominante, aunque nunca lo abandonaron completamente. Rosa mantiene su necesidad de ayuda y José su calidad de gerente, sin embargo, el interés en comprender y resolver el problema los insta a tener mayor compromiso e involucramiento en el trabajo en grupo y posibilita que ambos transitan hacia un rol más crítico en la RP. De acuerdo a este estudio podemos concluir que los estudiantes de sexto año de formación primaria, independiente de sus distintos posicionamientos en un grupo, sus diferentes niveles de autoeficacia, sus distintos grados de flexibilidad y agencia aprenden a trabajar colaborativamente mejorando su capacidad de resolver problemas. Se reconoce que en el trabajo colaborativo existen dificultades y aspectos negativos asociados al posicionamiento como se evidencia en ambos estudiantes cuando no se involucran en la resolución de problemas. Sin embargo, sugerimos que a pesar de esto el trabajo colaborativo tiene efectos positivos en la RP y esto puede ser una contribución importante para los profesores.

Referencias y bibliografía

Araya, R., &Dartnell, P. (2009). Saber pedagógico y conocimiento de la disciplina matemática en docentes de educación general básica y media. En Selección de investigaciones primer concurso FONIDE: evidencias para políticas públicas en educación (pp. 157–198).

Barnes, M. (2004, November). The use of positioning theory in studying student participation in collaborative learning activities. In Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education, Melbourne (Vol. 28).

Kirschner, F., Paas, F., &Kirschner, P. A. (2009a). A cognitive load approach to collaborative learning: United brains for complex tasks. Educational Psychology Review, 21, 31–42.

Polya, G. (1954) Patterns of plausible inference. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA.

Preiss, D. (2010). Folk pedagogy and cultural markers in teaching: Three illustrations from Chile. In D. Preiss & R. J. Sternberg (Eds.), Innovations in educational psychology: Perspectives on learning, teaching, and human development (pp. 325–356). New York, NY: Springer.

Radovic, D., & Preiss, D. (2010). Discourse Patterns Observed in Middle-School Level Mathematics Classes in Chile. Psykhe, 19, 65–79.

Saadati, F., Cerda, G., Giaconi, V., Reyes, C., &Felmer, P. (2018). Modeling Chilean Mathematics Teachers' Instructional Beliefs on Problem Solving Practices. International Journal of Science and Mathematics Education, 1-21.

Schunk, D. H., &Ertmer, P. A. (2000). Self-regulation and academic learning: Self-efficacy enhancing interventions. In Handbook of self-regulation (pp. 631-649).

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. Cognitive Science, 12, 257–285.

Zimmerman, B. J. (1989). A social cognitive view of self-regulated academic learning. Journal of EducationalPsychology, 81, 329–339.

La evaluación en la modelación matemática. Una revisión crítica de literatura

Jonathan **Sánchez**-Cardona
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
Jonathan.sanchezc@udea.edu.co
Paula Andrea **Rendón**-Mesa
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
Paula.rendon@udea.edu.co

Resumen

La presente revisión crítica de literatura centra su atención en indagar por la evaluación en la modelación matemática, particularmente responde por cuestiones que se relacionan concómo las investigaciones enmodelación matemática tienen en cuenta los intereses y propósitos de formación de los sujetos. La revisión realizó una búsqueda en las bases de datos ERIC, Scielo y Scopus a partir de la cual se seleccionaron 22 documentos que fueron analizados a la luz de cuatro categorías. A partir de los documentos analizados se logró identificar que la tendencia en los reportes de investigación es hacia las estrategias y herramientas para evaluar aprendizajes matemáticos y se deja de lado otros aprendizajes que se pueden alcanzar a través de la modelación.

Palabras clave: Evaluación, formación profesional, modelación matemática.

Introducción

En las últimas dos décadas, la modelación matemática se ha convertido en un dominio de investigación con alto grado de consolidación al interior de la Educación Matemática (Niss, Blum y Galbraith, 2007). Blum y Borromeo-Ferri (2009) señalan que, a través de la modelación, los estudiantes pueden comprender y producir significados de los objetos matemáticos articulados a los fenómenos reales que se estudian. Según Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona (2017) diferentes tipos de tareas y formas de hacer modelación ofrecen otras posibilidades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y de la modelación misma. Estos alcances abren caminos para la investigación de las maneras de promoverlos y evaluarlos en la cotidianidad escolar. Tanto en los aprendizajes como en las maneras de evaluarlos existen desarrollos y amplias discusiones en educación matemática y modelación. En este sentido preguntarse por la evaluación en la modelación matemática exige hacer una revisión de literatura sobre los aportes y avances investigativos que se han desarrollado, de tal forma que las nuevas investigaciones hagan uso de los hallazgos y resultados que otras investigaciones ya han aportado.

En particular Frejd (2013) desarrolló una revisión de literatura sobre los modos de evaluar en modelación matemática. Este estudio ofreció una perspectiva amplia de los enfoques utilizados y sugeridos para evaluar competencias de los estudiantes en los modelos y la modelación matemática. Sin embargo, la pregunta por los procesos y estrategias situadas en los contextos e intereses de los sujetos que participan en diferentes ambientes y tareas de modelación matemática sigue estando abierta. Es por esto, que este documento presenta de la evaluación y la modelación matemática, el método utilizado en la revisión crítica de literatura y las conclusiones centradas en los aportes y avances en la investigación internacional en relación con la evaluación en la modelación matemática.

La evaluación y la modelación matemática

Diferentes autores se han preocupado por la evaluación en la educación matemática, algunos de ellos han desarrollado investigaciones que apuntan a mejorar los procesos evaluativos, tanto en las herramientas e instrumentos utilizados para evaluar las matemáticas como en el constructo teórico (Hošpesová, 2018; Iannone y Jones, 2017; Niss, 1993a, 1993b; Suurtamm et al., 2016). Una de las apuestas en la evaluación de los aprendizajes es que se asuma de carácter formativo debido a que con ella se permite la realimentación constante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Brown y Pickford, 2013; Hamodi, López, y López, 2015).

Las producciones científicas resaltan las diferentes posibilidades que tiene la modelación matemática en los procesos formativos de las matemáticas (Bassanezi, 2002; Niss, Blum, y Galbraith, 2007). La modelación matemática posibilita que los estudiantes relacionen conceptos matemáticos con fenómenos reales, de tal forma que se realizan comprensiones y producen diferentes significados de conceptos matemáticos, también se posibilita el desarrollo de competencias y de visiones de las matemáticas, dado que, al establecer relaciones entre esta área y la realidad, se promueven usos de la matemática como una ciencia útil (Blum y Borromeo-Ferri, 2009).

La pregunta por los aportes que la modelación matemática y la evaluación ofrece a la formación matemática de los estudiantes continúa siendo motor para el desarrollo de investigaciones, más aún, con la diversidad de maneras y perspectivas con las que cuenta la modelación matemática tanto en la investigación como en la cotidianidad escolar (Kaiser, Blomhøj, y Sriraman, 2006; Maaß, 2010; Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes, y Sánchez-Cardona, 2017). En este sentido, resulta necesario indagar por los aportes y avances en la investigación internacional con relación a la evaluación en la modelación matemática.

La evaluación en modelación matemáticas no solo se ha ocupado de investigar por los aprendizajes de contenidos y las competencias; sino también, del desarrollo e implementación de procesos. Así, Fredj (2013) en su revisión de literatura se enfocó en indagar por los modos de evaluar en modelación matemática; para tal fin, este autor revisó 76 artículos resultados de investigación y encontró una visión de la evaluación que centra su atención en ciertos momentos particulares y no en todo el proceso desarrollado por los estudiantes. En particular, la revisión informa que las investigaciones giraron en torno a ¿Cómo evaluar? Y ¿Con qué instrumentos evaluar? y deja de lado componentes situados de la evaluación que responden a cuestionamientos relacionados con el sujeto que se evalúa - ¿A quién se evalúa? -.

Como resultado de su estudio, Frejd (2013) ofreció una perspectiva amplia de los enfoques que utiliza y sugiere para evaluar competencias de los estudiantes en los modelos y la modelación matemática. Sin embargo, la pregunta por los procesos y estrategias relacionadas con las necesidades específicas de formación de los sujetos que participan en diferentes ambientes y tareas de modelación matemática sigue abierta. Este tipo de preguntas es relevante, pues la literatura internacional reconoce la necesidad de desarrollar procesos de modelación matemática que se articulenconlos intereses y propósitos de los estudiantes (Borba y Villarreal, 2005), así como a sus necesidades de formación profesional (Rendón-Mesa, 2016; Romo-Vázquez, 2014).

La presente revisión crítica de literatura se centra su atención en las visiones y estrategias que se utilizan para la evaluación en la modelación matemática acorde con los intereses, propósitos y metas de formación de los sujetos involucrados. Por tanto, se propone responder la pregunta ¿Cómo las investigaciones sobre evaluación en modelación matemática han tenido en cuenta los intereses y propósitos de formación de los sujetos? Con el fin de dar respuesta a esta pregunta se analizaron 22 documentos resultado de una búsqueda en las bases de datosERIC, Scielo y Scopus, así como un proceso de selección acorde con la pregunta antes descrita.

Método

Se realiza una revisión crítica de literatura de la evaluación en los procesos de modelación matemática con la intensión de determinar teóricamente las conceptualizaciones y resultados reportados en el campo investigativo. Se resalta la importancia de determinar las diferentes conclusiones a las cuales han llegado investigaciones internacionales, con el fin de sustentar teórica y empíricamente los avances de la evaluación en la modelación matemática. Una revisión crítica de literatura implica analizar las diferentes investigaciones reportadas y cruzar datos con el fin de determinar el estado investigativo en el cual se encuentra determinado tema (Jesson y Lacey, 2006).

La International CommissiononMathematicalInstruction en su estudio 14 - ICMI Study 14 - (Blum et al., 2007) recolectó diferentes investigaciones y trabajos desarrollados en evaluación en modelación matemática hasta el año 2007. Por esta razón, en la presente revisión se decidió incluir artículos de revista, capítulos de libro y memorias de eventos a partir del año 2007.

Dado que la búsqueda se centra en los componentes de la evaluación de los aprendizajes en la modelación, se incluyeron investigaciones empíricas que se desarrollaron de la temática en el ámbito de la formación matemática de profesionales, de tal forma que se reporten estrategias, herramientas y conclusiones en relación con la evaluación en la modelación. En la indagación realizada en las bases de datos se utilizaron cinco ecuaciones de búsqueda. Estas ecuaciones fueron necesarias dado que es posible encontrar en la literatura internacional diferentes formas de escritura para referirse a la modelación, como por ejemplo, *modelling y modeling*. Así mismo, en las ecuaciones de búsqueda se incluyeron las palabras *assessment, evaluation y assesing*.

Las cincoecuaciones de búsquedautilizadasfueron: i) “Mathematical Modelling” AND “Assessment” AND “education”; ii) “Mathematical Modeling” AND “Assessment” AND “education”; iii) “Mathematical Modelling” AND “evaluation” AND “education”; iv) “Mathematical Modeling” AND “evaluation” AND “education”, y finalmente v) “Mathematical

Modelling" AND "assessing" AND "education"

Se debe agregar que en la base de datos Scopus se delimitó la búsqueda con la ayuda de los filtros Engineering, ComputerScience, Social Science, Mathematics, Medicine, Chemical Engineering, Economics, Econometrics y Finance. Se utilizaron estos filtros dado que el interés de la revisión de literatura se centró en la evaluación en los procesos de modelación matemática en correspondencia con los intereses y propósitos de formación de los sujetos.

El periodo establecido para la inclusión de documentos fue desde el 2007 hasta marzo de 2018. Esta búsqueda arrojó un total de 204 documentos entre capítulos de libro, artículos de revista especializados y memorias de eventos. La información básica de estos documentos (Año, autores, título, palabras clave, abstract-resumen-introducción y revista-libro) se organizó en una hoja de cálculo. A partir de esta organización se delimitaron los siguientes criterios de selección con el fin de constituir el conjunto de documentos que finalmente se analizarían.

Criterios de selección

De los 204 documentos encontrados con las ecuaciones de búsqueda, se procedió a determinar si se repetían documentos. La disposición de la lista de textos en la hoja de cálculo posibilitó la identificación de los documentos duplicados. Después de este proceso quedaron 103 documentos. A continuación, los siguientes criterios fueron determinantes al momento de realizar la lectura del título y abstract-resumen e introducción para determinar la inclusión o no del documento en la revisión de literatura final, i) en el documento se reporta una relación entre la evaluación y la modelación matemática, ii) el propósito del documento se relaciona con la evaluación de los procesos de la modelación matemática, iii) el propósito del documento se relaciona con la enseñanza o el aprendizaje de un saber o conocimiento, iv) el documento no solo presenta y evalúa la aplicación de modelos matemáticos en otros contextos, como la ingeniería y las finanzas, sino que su propósito tiene relación con la formación profesional.

Al momento de realizar una lectura del abstract y título de los 103 documentos a la luz de los cuatro criterios de inclusión, se logró definir un total de 22 documentos. Estos fueron posteriormente analizados a partir de cuatro categorías i) propósito de la evaluación ii) momentos de evaluación iii) estrategia de evaluación y iv) perfil profesional-evaluación. Dicho análisis permitió evidenciar que las estrategias situadas con respecto al perfil profesional de los estudiantes, no es un aspecto que la evaluación en la modelación matemática tenga en cuenta

El análisis de los documentos inició con la lectura de cada documento y su codificación acorde con los criterios presentados en la Tabla 1.

Tabla 1

Categorías para el análisis

Categorías	Preguntas orientadoras
Propósito de la evaluación	¿Qué se evalúa cuando se implementa la modelación matemática?
Momentos de evaluación	¿En cuáles momentos/fases de la modelación matemática se realiza la evaluación?
Estrategia de evaluación	¿Cuáles instrumentos son utilizados en los procesos evaluativos de la modelación matemática?

Perfil profesional – evaluación	¿A quién se evalúa? ¿Qué relación hay entre el perfil profesional y la evaluación implementada?

Fuente: Elaboración propia. 2018.

Con el fin de dar respuesta a la pregunta que orienta la revisión de literatura se organizaron cuatro categorías para el análisis de los documentos. Cada una de las categorías cuenta con al menos una pregunta que pretende dar cuenta de los diferentes procesos evaluativos reportados en las diferentes investigaciones. Es de resaltar que las categorías descritas en la Tabla 1, se configuraron en la medida en que se realizóla lectura de los documentos, en particular se trató de responder a preguntas relacionadas con, ¿qué evaluar? ¿Cómo evaluar? ¿Dónde se evalúa? y ¿A quién se evalúa? En este sentido, se resalta que el nombre de las categorías y las preguntas que las orientan se configuraron antes y durante el proceso de lectura de los documentos de la revisión de literatura.

Análisis, resultados y conclusiones

Las anteriores cuatro categorías responden de manera general a los procesos evaluativos que se logran caracterizar en la revisión de los documentos. La primera categoría da cuenta del foco de atención en los procesos de evaluación en la modelación matemática. La segunda de los momentos específicos en los que se realiza la evaluación. La tercera resalta los instrumentos y técnicas utilizadas para realizar los procesos evaluativos y finalmente la cuarta resalta la relación que existe entre el proceso evaluativo desarrollado y el perfil profesional de los sujetos.

Se resalta que la evaluación de la modelación matemática reportada por Aydogan et al., (2017) y Diefes-Dux, et al. (2012) se enfoca en la apropiación que tienen los estudiantes en la solución de un problema que se sustenta en modelos matemáticos. Además, de la forma de comunicación de la solución encontrada. Mientras que el trabajo presentado por Flores, et al. (2016) se enfoca en los conceptos y procedimientos matemáticos que se utilizan para llegar a una solución y validación de un problema. Las investigaciones de Aydogan et al., 2017; Diefes-Dux et al., 2012 y Flores et al., 2016 reportan la importancia que tiene en los procesos de modelación matemática el trabajo en grupo.

En algunas investigaciones (Aydogan et al., 2017; Hoskingson, 2010; Diefes-Dux et al., 2012 y Flores et al., 2016) se evidenció que la evaluación se realiza a lo largo de todo el proceso de modelación matemática, algunos centrados en los procesos matemáticos, otros en los procesos comunicativos, pero como regularidad se identificó que la evaluación no se deja para el final del proceso.

Estos resultados sugieren la necesidad de desarrollar más investigaciones en las que la evaluación no solo se centre en el desarrollo de habilidades, competencias y conocimientos matemáticos; sino que también, se tenga en cuenta los procesos desarrollados por los estudiantes al realizar modelación matemática, donde el centro de interés no sea solo el modelo matemático, sino que se logre valorar el proceso desarrollado. Es decir, las decisiones que se tomaron para comprender, analizar y resolver el fenómeno estudiado.

La literatura que se incluyó en el análisis evidenció que el centro de atención al evaluar la modelación matemática varía dependiendo de los intereses de los profesores y de los currículos institucionales. Así mismo, se identificaron diferentes tipos de herramientas y técnicas para evaluar la modelación. En la mayoría de las investigaciones se identificó la importancia que tiene el trabajo en equipo. Se debe agregar que, en la mayoría de los estudios revisados, las evaluaciones desarrolladas no tienen en cuenta el perfil profesional de los estudiantes, dado que la concepción de evaluación y las técnicas utilizadas no se sustentan, ni tampoco se relacionan con el perfil profesional de los sujetos. En este sentido la tendencia en la investigación es hacia las estrategias y herramientas para evaluar el aprendizaje de conceptos matemáticos y no otros aprendizajes como la comunicación y argumentación que se pueden alcanzar a través de la modelación.

Agradecimientos

Agradecimientos a los profesores Jhony Alexander Villa Ochoa y Mónica Marcela Parra Zapata y a otros integrantes de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática por las sugerencias realizadas a las diferentes versiones del documento. También a la Universidad de Antioquia por su apoyo a través del proyecto Estrategias Evaluativas para la Modelación Matemática (CODI-Facultad de Educación).

Referencias

Aydogan Yenmez, A., Erbas, A. K., Cakiroglu, E., Alacaci, C., & Cetinkaya, B. (2017). Developing teachers' models for assessing students' competence in mathematical modelling through lesson study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(6), 895–912.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Sao Paulo: Editora Contexto.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education* (Vol. 10). Boston, MA: Springer US

Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Brown, S., & Pickford, R. (2013). *Evaluación de habilidades y competencias en Educación Superior* (Ediciones). Madrid.

Diefes-Dux, H. A., Zawojewski, J. S., Hjalmarson, M. A., & Cardella, M. E. (2012). A Framework for Analyzing Feedback in a Formative Assessment System for Mathematical Modeling Problems. *Journal of Engineering Education*, *101*(2), 375–406.

Flores, E. G. R., Montoya, M. S. R., & Mena, J. (2016). Challenge-based gamification and its impact in teaching mathematical modeling. En *Proceedings of the Fourth International Conference on Technological Ecosystems for Enhancing Multiculturality - TEEM '16* (pp. 771–776). New York, New York, USA: ACM Press.

Frejd, P. (2013). Modes of modelling assessment-a literature review. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(3), 413–438.

Hamodi, C., Pastor, V. M. L., & Pastor, A. T. L. (2015). Medios, técnicas e instrumentos de evaluación formativa y compartida del aprendizaje en educación superior. *Perfiles Educativos*, *37*(147), 146–16

Hoskinson, A. (2010). How to Build a Course in Mathematical – Biological Modeling : Content and Processes for Knowledge and Skill, *9*, 333–341.

Hošpesová, A. (2018). Formative Assessment in Inquiry-Based Elementary Mathematics. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. Xu (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME-13 Monographs* (pp. 249–268). Cham: Springer.

Iannone, P., & Jones, I. (2017). Special issue on summative assessment. *Research in Mathematics Education*, *19*(2), 103–107.

Jesson, J., & Lacey, F. (2006). How to do (or not to do) a critical literature review. *Pharmacy Education*, *6*(2), 139–148

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM - Mathematics Education*, *38*(3), 302–310.

Maaß, K. (2010). Classification Scheme for Modelling Tasks. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *31*(2), 285–311.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 3–32). Boston, MA: Springer US.

Niss, M. (1993a). *Cases of Assessment in Mathematics Education. An ICMI Study*. (M. Niss, Ed.), *New ICMI Study Series* (Vol. 1). Dordrecht: Springer Netherlands.

Niss, M. (1993b). *Investigations into Assessment in Mathematics Education An lCMI Study*. (M. Niss, Ed.) (Vol. 2). Dordrecht: Springer Netherlands.

Rendón-Mesa, P. A. (2016). *Articulación entre la matemática y el campo de acción de la ingeniería de diseño de producto: aportes de la modelación matemática*. Universidad de Antioquia

Romo-Vázquez, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Educación Matemática*, *especial* (25 años), 314–338.

Suurtamm, C., Thompson, D. R., Kim, R. Y., Moreno, L. D., Sayac, N., Schukajlow, S., … Vos, P. (Sobran iniciales en los nombres) (2016). *Assessment in Mathematics Education*. *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Cham: Springer International Publishing

Villa-Ochoa, J. A., Castrillón-Yepes, A., & Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural*, *18*(36), 219–251

Articulación entre el conocimiento en matemática y física a través de la modelación

Alexander **Castrillón-Yepes**
Universidad de Antioquia
Colombia
alexander.castrillony@udea.edu.co

Ana Carolina **González-Grisales**
Universidad de Antioquia
Colombia
ana.gonzalez2@udea.edu.co

Sebastián **Mejía** Arango
Universidad de Antioquia
Colombia
sebastian.mejia4@udea.edu.co

Paula Andrea **Rendón-Mesa**
Universidad de Antioquia
Colombia
paula.rendon@udea.edu.co

En este trabajo se presentan algunos avances de una investigación que se realiza en el marco del programa de licenciatura en matemática y en física de la Universidad de Antioquia (Colombia). El problema de investigación emerge de la práctica pedagógica que se desarrolla en una institución educativa del municipio de Caldas, Antioquia; el cual se centra en la desarticulación entre el conocimiento en matemática y física en estudiantes de educación media técnica.

La génesis del problema se sustenta de dos cuestiones. La primera tiene que ver con el análisis de los documentos rectores de la educación colombiana (Estándares Básicos de Competencia, lineamientos curriculares y Derechos Básicos de Aprendizaje) y aportes de la literatura en didáctica de las ciencias naturales y de la matemática. La segunda cuestión parte de las observaciones institucionales y las descripciones en los diarios pedagógicos de los maestros en formación en práctica pedagógica que asumen el rol de investigadores. Dichas descripciones permitieron revelar cuestionamientos de los estudiantes referente a la utilidad de la matemática y su uso en otros contextos (Diarios de campo sesiones de clase 9 y 18 de octubre de 2018), y la desarticulación entre las representaciones matemáticas de la "realidad física" localizadas en las experiencias que se realizaron durante el proceso de práctica (Diario de campo sesión de clase 4 de octubre de 2018). Así, el objetivo principal del trabajo es analizar las articulaciones que los estudiantes de educación media técnica construyen frente al conocimiento en matemática y física a partir de la modelación.

Algunos referentes teóricos para sustentar dicha articulación, muestran cómo la modelación se utiliza tanto en la enseñanza de la matemática y de las ciencias mediante las actividades experimentales. Autores como Blum (2011) sostienen que la modelación matemática se puede entender como una estrategia de enseñanza que permite establecer relaciones entre un dominio matemático con uno extra-matemático. De acuerdo con la intención investigativa y las prácticas pedagógicas si el dominio extra-matemático es la física, se podrían evidenciar articulaciones entre ambas áreas del saber que aporten a cumplir el objetivo propuesto. Por tanto**,** es importante considerar los modelos físicos y la experimentación, lo que García y Rentería (2011) definen como *modelización experimental,* como un elemento dentro de la investigación.

En ese orden de ideas, hablar de la modelación matemática en la educación en ciencias, permite según Malvern (2000) vincular las reglas científicas (observaciones de comportamiento, leyes, etc.) que tienen relación directa con la experimentación; asunto que permite rastrear el problema enunciado en esta investigación acerca de la desarticulación entre las representaciones matemáticas y la "realidad física". Así mismo, Vizcaíno y Terrazzan (2015) sostienen que la matematización de la física es importante para la comprensión y la formalización de las leyes físicas.

En el poster se mostrarán la contextualización, justificación y delimitación del problema de investigación a partir de los recursos documentales que se utilizan como planes institucionales y los diarios pedagógicos de los maestros en formación, al igual que un acercamiento al marco teórico y metodológico con la intención de presentar un instrumento que nos permita atender al problema propuesto.

Referencias bibliográficas

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (p. 15-30). Springer, Dordrecht.

García, J., y Rentería, E. (2011). Modelización de problemas para desarrollar habilidades de experimentación. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, (29), 44-64.

Malvern, D. (2000). Mathematical models in science education. En Gilbert, J. y Boulter. C. (Eds.), Developing models in sciencie. (pp. 59-90). New York: Springer, Dordrecht.

Vizcano, D., y Terrazzan, E. (2015). Diferencias trascendentales entre matematización de la física y matematización para la enseñanza de la física*. TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, 38(38).

Constitución comprensiva del objeto mental "límite matemático" realizada por estudiantes de educación media cuando trabajan en procesos de matematización de situaciones

Oscar Javier **González** Pinilla
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
oscarmateud@gmail.com
Camilo **Arevalo** Vanegas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
camiloarevaloul@gmail.com

Resumen

En el presente artículo, se aborda la problemática asociada a la construcción comprensiva de conceptos matemáticos en los estudiantes; quienes fundamentan sus prácticas en la trivialización de la matemática, como su aprendizaje por imitación, repetición o memorización. Ante esta problemática, se hace necesario dar a conocer nuevas formas de llevar al aula los conceptos matemáticos, donde se privilegien prácticas significativas, como la propuesta por Freudenthal (1983), la *constitución de objetos mentales*. Desde esta perspectiva, se identifica la necesidad de mostrar mediante datos empíricos que a partir de la matematización de situaciones es posible la constitución del objeto mental *"límite"* en estudiantes de educación media. En el abordaje de esta situación, se pudo evidenciar progresivos avances en la comprensión del objeto mental por parte de los estudiantes, demostrando que es posible promover en ellos prácticas matemáticas significativas centradas en la matematización y a su vez la construcción de un concepto matemático.

Palabras clave: Resolución de problemas, objetos mentales, matematización, Educación matemática realista, Fenomenología didáctica, modelo matemático, conceptos matemáticos.

Planteamiento del problema

La comprensión significativa de conceptos matemáticos debería ser una preocupación esencial en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la disciplina. Sin embargo, las prácticas actuales de los estudiantes se centran en la memorización y repetición de algoritmos, que en muchas ocasiones logran desarrollar de forma correcta, pero sin la abstracción correcta del concepto que involucra sus procedimientos, lo que implica que el estudiante haga matemáticas, pero sin comprenderlas. Respecto a esto, Balacheff (1987) señala que son cada vez más frecuentes los procesos de enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos fundamentados en la "imitación", donde existe la tendencia por parte del estudiante a permanecer atentos a los distintos momentos de los que el docente dispone al solucionar un problema, encontrando la mayor necesidad o preocupación, en realizar la reconstrucción de una buena imitación, en la que el estudiante crea la falsa idea de que lo importante no es comprender, validar o justificar, sino copiar bien y repetir algorítmicamente lo que el profesor dice y hace. Esto pone en evidencia ciertas dificultades que los alumnos enfrentan al relacionar el concepto matemático involucrado en una situación problema con el procedimiento que realiza al momento de darle solución.

Uno de los factores que inciden en dicha dificultad, es precisamente que las situaciones problemas que los docentes proponen a sus estudiantes para desarrollar sus habilidades en la comprensión de un concepto carecen de sentido para éste, ya sea por estar muy ligados a la misma matemática o por no ser suficientemente comprensible siquiera en su enunciación; lo que irremediablemente lleva a abandonar la esencia del concepto reemplazándola por el procedimiento, con las nefastas consecuencias que esto trae en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Se hace indispensable entonces encontrar situaciones problemas que motiven la actividad autónoma por construir el concepto por parte de los estudiantes, a partir de contextos realísticos; esto es, situaciones capaces de ser imaginables y comprensibles, donde la "realidad" no se restringe exclusivamente a problemas contextualizados o ligados a la vida real del estudiante, sino a aquellas situaciones que son claras, perceptibles y accesibles para él, quien debe aprender matemáticas desarrollando y aplicando herramientas matemáticas en situaciones que tengan sentido para quien los resuelve. En este sentido, lo que se debe buscar al interior del aula, es la resolución de problemas como práctica matemática cuya actividad característica es la *matematización* (Freudenthal, 1983). Esta postura es fundamental en el enfoque teórico de la Educación Matemática Realista (EMR), pues propone trabajar la matemática inicialmente como actividad humana y solo después como cuerpo cerrado de teoremas y axiomas formales. Dicha actividad es la de resolver y buscar problemas que ayuden a organizar la realidad o la matemática misma; o como lo señala su fundador Freudenthal (1983),

> *Lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas (Freudenthal, 1983, p.7)*

Freudenthal se refería a la matematización de la realidad como la marera de organizar la matemática a partir de los fenómenos, a lo que llamo el *análisis fenomenológico*, que tiene como objetivo servir de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas en la escuela. Para Freudenthal la *"Fenomenología de un concepto, estructura o idea matemática significa describirlos en su relación con los fenómenos para los que fueron creados y a los que han sido extendidos en el proceso de aprendizaje de la humanidad, y, cuando esta descripción se refiere al proceso de aprendizaje de las generaciones jóvenes, es fenomenología didáctica," (1985, p. 9).*

Desde esta perspectiva, la enseñanza clásica de las matemáticas se ha constituido en un proceso de enseñanza-aprendizaje inicial de los objetos del pensamiento, para después llegar a los fenómenos que son organizados por ellos, esto es, primero los conceptos y después las aplicaciones. La propuesta de Freudenthal, sugiere la *constitución de objetos mentales*[1] a partir de la organización de los fenómenos para los cuales ha sido creado. En este sentido, la constitución de objetos mentales precede a la construcción de conceptos, que se logra solo si se alcanza una organización de los fenómenos que son medios descritos por el objeto mental en cuestión. Por lo tanto, para poder adquirir los conceptos matemáticos a través de fenómenos, es necesario un paso intermedio, la constitución de objetos mentales. En estos objetos mentales se recogen todos los significados de todos los fenómenos que están en relación con los conceptos implicados, y, de este modo se pude llegar hasta el significado del concepto. Así el objetivo principal de la enseñanza es, según Freudenthal, la constitución de objetos mentales.

Diseño y metodología de investigación

Desde el enfoque de la EMR, se manifiesta la necesidad de diseñar tareas por parte del docente en un contexto realista, entendiendo esto como situaciones problemáticas imaginables y comprensibles para los estudiantes, para lo cual pueda generarse una *actividad de matematización*; es decir, organizar o estructurar la realidad, a partir de los fenómenos en torno a un objeto mental que permitan acceder a conocimientos matemáticos formales. En este sentido, se busca una metodología de tipo cualitativo/interpretativo llamada *fenomenología didáctica* donde las situaciones deben ser seleccionadas de modo que puedan ser organizadas por los objetos matemáticos que los estudiantes deben constituir y se relacionan directamente con la finalidad del *diseño didáctico*, donde se asumen algunos elementos metodológicos y técnicos que configuran la acción de diseñar las situaciones problemas realísticas por parte del docente, a lo que desde el enfoque se le llama didáctizar.
El diseño metodológico de la propuesta se centra en la aplicación de una situación problema realístico a matematizar llamada *"el terreno óptimo*", que generen fenómenos matematizables y que sean organizados por el objeto mental de "límite matemático", y que se enuncia de la siguiente manera:

Un agricultor ha comprado un terreno y quiere usar una parte de éste para su pequeño cultivo de tomate de árbol, para cercarlo dispone de 100 metros de alambre y suficientes postes; sin embargo, desea que su producción sea la máxima posible con los recursos disponibles. Ustedes han sido contratados para diseñar el modelo óptimo para los fines del agricultor.

A esta situación se diseñan unas tareas que buscan que los estudiantes promuevan actividades de matematización, en este caso se estudiarán las primeras dos tareas que se llevaron al aula, direccionadas a constituir el objeto mental de límite matemático; de la siguiente manera:

Tarea 1: En grupos de tres estudiantes, diseñen la representación de un terreno (1cm::1m) con una lámina de icopor, tome 100 cm de lana que representarán el alambre para cercar el terreno cultivable y chinches para los postes. Use el material para hacer una representación de sus sugerencias al agricultor y diseñe el terreno cercado que a su consideración es el óptimo para mayor producción de tomates.

[1] Lo que Freudenthal llama *objetos mentales* es lo que Fichsbein denomina *intuiciones* y Piaget *representaciones*

Tarea 2: Realizar una exposición a manera de debate en el que se dé a conocer el diseño construido por cada grupo, justificando el porqué de su creación y atendiendo a la pregunta: ¿Por qué su diseño es el óptimo para garantizar que el agricultor obtendrá la mayor producción de tomates?

Resultados

Tarea 1:

Los estudiantes en sus respectivos grupos realizaron el diseño de un terreno cercado usando la lana (alambre) y los chinches (postes) dentro del terreno total (icopor). Cada grupo elaboró un diseño concertado y que en su opinión era el terreno óptimo para cultivar, entendiendo lo "optimo" como dependiente del área, por lo que el problema fundamental para los estudiantes era buscar un diseño de terreno que contemplara el área máxima que se podía construir con un perímetro de 100 cm, atendiendo a la pregunta, ¿Qué forma y características debe tener el terreno para que la producción de tomates sea máxima? La construcción del terreno atendía a las siguientes especificaciones:

- El terreno debe ser totalmente cerrado
- El terreno cercado debe estar dentro del terreno mayor.
- Debe usarse el total de alambre (lana) proporcionado.
- La cantidad de postes (chinches) será elección de cada grupo.
- La forma del terreno puede ser rectilínea o curvilínea.

Figura 1. Algunos diseños de terreno construidos por los estudiantes

Como se ve en los diseños de cultivo elaborados por cada grupo (Figura 1), se evidencia que los estudiantes se preocupan por obtener una superficie amplia con los recursos disponibles; es decir, su preocupación principal está en diseñar un terreno con la mayor superficie posible, con la restricción de tener un perímetro de 100 cm. Aquí surgen figuras rectilíneas y un intento por figuras curvilíneas; diseños que se entraron a discutir a manera de debate en la tarea número 2.

Tarea 2

La situación problema propuesta ofrece una variedad de estrategias de solución. Permite que los estudiantes muestren sus estrategias e invenciones a otros. En este caso, abre la posibilidad de discutir el grado de eficacia de las destrezas usadas. A continuación, se presenta una de las muchas discusiones entre los estudiantes a la hora de defender sus diseños. Se eligen tres casos específicos, el diseño del círculo, el del octágono regular y la figura mixta (rectilínea y curvilínea), donde se tenía por objetivo que argumentaran a favor de sus propios diseños y en contra de los demás, usando razones lógicas y convincentes para poder validar que su propuesta era la más asequible para los cometidos del agricultor:

Grupo 1: Octágono regular

Grupo 2: Circulo

Conversación

Grupo 1: Nuestro diseño es un octágono regular (mostrando su diseño) y consideramos que es el que tiene mayor área porque las esquinas forman ángulos amplios lo que asegura que se aprovecha el terreno; al contrario de lo que pasa con un triángulo o un cuadrado, donde las esquinas son demasiado cerradas. En el caso del cuadrado de 90º; tendríamos ángulos pequeños lo que implicaría una reducción del terreno y una pérdida de superficie.

Figura 2. Grupo 1 mostrando que el octágono regular tiene ángulos obtusos y que el diseño del triángulo desaprovecha superficie por tener ángulos agudos

Grupo 2: pues no creo que el octágono sea el de mayor área; porque nosotros hicimos el círculo precisamente porque creemos que entre menos lados rectos tenga la figura más superficie vamos a tener; porque lo que hacen los ángulos, sea cual sea la amplitud, es reducir el espacio del terreno.

Figura 3. Grupo 2 mostrando su diseño circular usando la mayor cantidad de postes

Grupo 1: Pues para mí entre más ángulos amplios tenga el terreno; es decir, entre más lados tenga, vamos a asegurar que los ángulos sean obtusos y por lo tanto su abertura encerrará mayor cantidad de terreno.
Grupo 1: Pero una figura que tenga solo líneas rectas y además con ángulos obtusos será un terreno que encierre mayor área.
Grupo 2: Pero en el caso del círculo no tengo lados, y por tanto no tengo ángulos, lo que asegura que estoy encerrando la totalidad de terreno que se puede cercar con 100 m de alambre.
Grupo 1: Pero ustedes en realidad no tiene un círculo, porque para obtener un círculo usted necesitaría de muchos postes y por lo que veo su cultivo tiene una cantidad de postes fija, espere y cuento 1, 2, 3, 4,…, 49, 50 (realizando el conteo de chinches del diseño circular) son como 50 chinches lo que generaría una figura de cincuenta lados.

Figura 5. Estudiante del grupo 1 haciendo el conteo de postes del diseño del grupo 2

Grupo 1: Yo creo que independientemente de la forma del terreno, todos estamos usando la misma cantidad de alambre por lo tanto tendríamos figuras de la misma área.
Profesor: Lo que usted asegura entonces, es que, dado que todas las figuras tienen el mismo perímetro de 100 m, esto implica que ¿todos tendrán la misma área?
Grupo 1: No, eso es mentira, porque por ejemplo yo hice esta operación (sacando una hoja con cálculos matemáticos) en un cuadrado de 100 cm de perímetro tenemos un área de 625 cm^2 y si tenemos otra figura como por ejemplo un rectángulo de 40 cm x 10 cm también tenemos una forma de perímetro 100 cm, pero de área 400 cm^2
Grupo 2: Si es verdad, el perímetro es independiente del área; por eso el problema está en buscar la forma que encierre la mayor área con un perímetro fijo de 100 metros.
Profesor: Como en eso estamos de acuerdo, volvamos al problema del círculo, mi pregunta es ¿Efectivamente es un círculo?
Grupo 2: pues no, pero se acerca mucho a serlo; de hecho, si tuviera más chinches (postes) le pondría todos los necesarios con el fin de ampliar la amplitud de los ángulos y asegurar que se encierra mayor cantidad de espacio.
Grupo 1: Entonces para hacer un terreno circular necesitaríamos de infinitos postes lo cual es imposible, la forma debe ser obligatoriamente rectilínea.
Grupo 2: Pues sí, pero sin embargo el octágono no es el de área mayor, porque en ese caso podríamos hablar del eneágono o el decágono de lados iguales…
Profesor: Regular
Grupo 2: eso, el dodecágono regular tendría mayor área que su octágono.
Grupo 1: Si. En conclusión, para asegurar que el terreno encierre la mayor área posible se deben usar la mayor cantidad de postes, acercándonos a la construcción de un terreno circular.

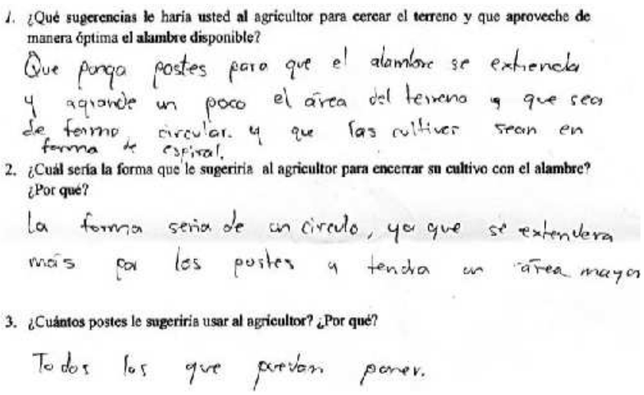
Análisis de los resultados

Como podemos ver, uno de los aspectos más relevantes es que los estudiantes logran transformar el problema inicial enmarcado en el contexto de la agricultura, en un problema matemático de optimización y maximización de áreas. En la conversación, las afirmaciones que se realizan son bastante importantes para lograr la constitución de objetos mentales y posterior abstracción significativa de un concepto matemático; por ejemplo, la conclusión a la que llega uno de los grupos *<Sí tuviera más chinches (postes) le pondría todos los necesarios con el fin de ampliar la amplitud de los ángulos y asegurar que se acerque al área de un círculo>*, podría suponer una ayuda inicial y bastante empírica para crear modelos mucho más complejos, como el del límite matemático, donde los estudiantes reconocen que al aumentar indefinidamente los vértices o lados de un polígono regular, éste va adoptando la forma y el área de un círculo del mismo perímetro; que dicho en términos matemáticos con el uso del concepto de límite, sería equivalente a decir: .

$$\lim_{\text{Cantidad de vértices} \to \infty} \text{Área de un polígono regular} = \text{Área de un círculo}$$

<El área de polígonos regulares cuando la cantidad de vértices tienden al infinito es igual al área de un círculo de igual perímetro al polígono regular>

Este modelo que los estudiantes no enuncian de manera formal pero que al parecer por las acciones que realizan (como la de ir aumentando cada vez más la cantidad de chinches en los polígonos regulares que van construyendo hasta volverlos un círculo) y las afirmaciones que enuncian en los cuestionarios que contestan los estudiantes (ver figura 5), podrían suscitar la emergencia más comprensible de la idea de límite matemático.



1. ¿Qué sugerencias le haría usted al agricultor para cercar el terreno y que aproveche de manera óptima el alambre disponible?

Que ponga postes para que el alambre se extienda y agrande un poco el área del terreno y que sea de forma circular. y que los cultivos sean en forma de espiral.

2. ¿Cuál sería la forma que le sugeriría al agricultor para encerrar su cultivo con el alambre? ¿Por qué?

La forma sería de un círculo, ya que se extendera más por los postes y tendra un área mayor

3. ¿Cuántos postes le sugeriría usar al agricultor? ¿Por qué?

Todos los que puedan poner.

Figura 5: Cuestionario diligenciado por el grupo N° 2

En este caso, podría suponerse que la situación problema enmarcada en el contexto de la agricultura brindó una variedad de fenómenos que fueron organizados por el objeto mental que los estudiantes poseen sobre límite matemático, en el que el contexto sirvió como excusa para la emergencia de un modelo más formal en los estudiantes, o como lo diría Freudenthal, el contexto usado como *"intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada con el fin de volverla susceptible a un tratamiento matemático formal." (Freudenthal, 1991, p. 34)*

Conclusiones y reflexiones

Como se puede evidenciar, los procesos de matematización que se dan en la situación problema, garantizan el surgimiento de una actividad argumentativa en los estudiantes, que intenta en este caso, constituir el objeto mental de límite. Este acercamiento intuitivo del estudiante hacía el concepto formal es de gran importancia para la EMR, ya que son fundamento para garantizar que los estudiantes están reemplazando prácticas que trivializan la matemática, siendo sustituidas por prácticas más significativas. Estos procesos en los que la matemática es redescubierta o reinventada son los que tienen realmente un valor en los estudiantes, que desde la propuesta de Freudenthal sería una forma de reinvención guiada, en la que se usa el sentido común, el lenguaje cotidiano y las prácticas empíricas para redescubrirlas y comprenderlas.

> *"Para transformarlo en matemática genuina y para progresar, el sentido común debe ser sistematizado y organizado. Las experiencias del sentido común cristalizan en reglas que se transforman de nuevo en sentido común, pero en un nivel más alto, constituyendo así la base para una matemática de orden aún mayor, como en la constitución de un objeto mental que en procesos más avanzados de abstracción llegarán a convertirse en conceptos matemáticos formales" (Freudenthal, 1991. Pág. 9)*

Aquí el docente es agente fundamental para mediar entre las producciones informales de los estudiantes y las herramientas formales ya institucionalizadas de la matemática como disciplina. De esta manera, podemos concluir que los estudiantes presentan descriptores propios de una matematización, donde el problema es abordado desde un contexto puramente matemático, trasponiendo los resultados obtenidos en este contexto al problema del agricultor; mientras que reconocen los alcances y límites de sus descubrimientos en las implicaciones del problema original. En este proceso de matematización se hace evidente un proceso de *exploración* de diferentes modelos que posibilitan la solución del problema, abordados desde la reflexión, y finalmente se presentan procesos de formalización cuando concluyen proposiciones dentro de la matemática, aplicables a la situación misma.

En este caso, ciertos anunciamientos concluyentes que hacen los estudiantes en su discurso argumentativo cuando resuelven la situación problema, podrían considerarse aspectos que formalizan y muestran un acercamiento subjetivo al concepto de límite matemático; por ejemplo, cuando refieren que *"dos figuras diferentes con el mismo perímetro no tienen la misma área"* o *"Cuando la cantidad de vértices en un polígono regular tiende al infinito, su área se acerca a la de un círculo con el mismo perímetro del polígono regular, la cual a su vez es el área máxima que se pude construir";* son proposiciones que logran descubrir y generalizar dentro de la matemática pero que han sido suscitadas por la situación problema misma cuando trabajan en procesos de matemátización de la misma.

Referencias y bibliografía

Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. F. (2004). *La educación matemática realista. Principios en que se sustenta.* Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática. Recuperado de: *http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/articulo_escuela_invierno2.pdf*

Freudenthal, H. (1983).Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel.1 Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. *Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001*

Gravemeijer, K. P. E., & Terwel, J. (2000). HANS FREUDENTHAL, un matemático en Didáctica y teoría curricular.

Narvaez, D. (2009). "Sobre la relación entre estrategias utilizadas por estudiantes de matemáticas en la resolución de problemas asociados a teoría de números y los procesos de matematización desarrollados en un ambiente de aprendizaje constructivista". *Tesis Maestría en educación, Universidad de los Andes, Centro de Investigaciones y Formación en Educación (CIFE)*

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) La educación matemática en la enseñanza secundaria (págs. 61-94). Barcelona: Horsori / ICE. ISBN 84-85840-65-8

Matemática, Física y Música: Interdisciplina entre Arte y Ciencia

Lucas Josué **Villagra**
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional de Salta
Argentina
lucasjosuevillagra@gmail.com
María de las Mercedes **Moya**
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional de Salta
Argentina
maritamoyaster@gmail.com
Andrea Carolina **Monaldi**
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional de Salta.
Argentina
acmonaldi@gmail.com

La Matemática es una de las disciplinas científicas con mayor aplicabilidad en distintos campos de estudio, aún en aquellos que en el imaginario social no están relacionados, entre ellos el arte y en particular la Música (Aceff, y Lluis-Puebla, 2006). Este trabajo propone el abordaje interdisciplinario entre aspectos que vinculan conceptos matemáticos, con nociones de la física del sonido y las bases de la teoría musical. Se busca, por un lado, "algebrizar" la música desde la Teoría de Grupos y, por otro, "musicalizar" funciones con el Análisis Armónico incorporando elementos de la física del sonido (Contreras de la Fuente, Díez Bedmar y Pacheco Torres, 2007). Como resultado, surge una propuesta para enriquecer la enseñanza-aprendizaje de ciertos conceptos matemáticos para docentes y alumnos del Profesorado en Matemática y carreras afines. La misma, fue sintetizada en un Taller dictado en el marco de las II Jornadas de Enseñanza de la Matemática en 2017, en la Universidad Nacional de Salta (Argentina), titulado: "Matemática, Física y Música. Una orquestación interdisciplinar" (Moya, Monaldi y Villagra, 2017), de nueve horas de duración distribuidas en tres días.

Con metodología lúdica, se procuró un aprendizaje por descubrimiento, analogía y aproximación, facilitando a los asistentes recursos tecnológicos tales como videos, instrumentos musicales, teclado virtual y el software MATLAB. Tras una introducción audiovisual y debate sobre la formación de la escala pitagórica y las relaciones de proporción entre notas, se buscó la "construcción" matemática formal de las notas musicales a distintas octavas por Relaciones de Equivalencia (RdE) entre números reales. Esto permitió definir un isomorfismo entre las notas musicales y dichos números: así, por ejemplo, sin importar en qué octava se encuentran, las infinitas notas DO (C) están en la misma clase de equivalencia. Análogamente, mediante teclado virtual, se introdujo la noción de Intervalos Musicales, para luego construirlos a través de RdE.

Posteriormente, a partir de conceptos básicos de física ondulatoria, se pudo incorporar la representación de sonidos mediante funciones sinusoidales de distinta frecuencia y extensión, estableciendo el rango de frecuencias audibles. Se enfatizó que las notas musicales de la escala pitagórica se asocian a frecuencias específicas. En esta instancia cobró sentido aquel número real designado a una nota que surgía como representante de las clases de equivalencia; éste no había sido elegido al azar, pues resulta ser la frecuencia de estas funciones. Se estableció la relación entre la extensión de las funciones y las figuras musicales (duración de la nota); por último, se introdujo la idea de timbre explorando el sonido de una nota en distintos instrumentos. Formalmente, se lo vinculó con la forma de la función que representa el sonido: una suma de sinusoides de distintas frecuencias, peso y amplitud (la fundamental y sus armónicos). Como aliado tecnológico, el software MATLAB posibilitó programar, a través de comandos sencillos, las notas musicales a partir de distintas sinusoides, permitiendo visualizarlas y sonificarlas.

La incorporación de los conceptos matemáticos, físicos y musicales involucrados permitió a los cursantes, como actividad final, construir un fragmento de pieza musical (cuidadosamente elegida) a través de una función definida por ramas y sonificarlo en MATLAB. Por ejemplo, una de las consignas del Taller pide construir la escala musical con sus frecuencias correspondientes, a partir de C=261 Hz. Así obtuvieron, entre otras, que la nota RE (D) corresponde a (9/8)C. Luego, se pide modelizar un fragmento musical a partir de su partitura ("Imagine" de John Lennon, "Feliz Cumpleaños", entre otros). La Figura 1, muestra la función por ramas planteada para "Feliz Cumpleaños", donde T representa la duración prefijada de la Negra, y ε una variación pequeña de tiempo que indica una "respiración".

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(2C \cdot \pi t) & \text{si} \quad \begin{array}{c} 0 \le t < \frac{T}{2} - \varepsilon; \frac{T}{2} \le t < T; 2T \le t < 3T; \\ 6T \le t < \frac{13}{2}T - \varepsilon; \frac{13}{2}T \le t < 7T; 8T \le t < 9T \end{array} \\ \operatorname{sen}(2D \cdot \pi t) & \text{si} \quad T \le t < 2T; 7T \le t < 8T \\ \operatorname{sen}(2E \cdot \pi t) & \text{si} \quad 4T \le t < 5T \\ \operatorname{sen}(2F \cdot \pi t) & \text{si} \quad 3T \le t < 4T;\ 10T \le t < 11T \\ \operatorname{sen}(2G \cdot \pi t) & \text{si} \quad 9T \le t < 10T \\ 0 & \text{si} \quad \begin{array}{c} \frac{T}{2} - \varepsilon \le t < \frac{T}{2};\ 5T \le t < 6T; \\ \frac{13}{2}T - \varepsilon \le t < \frac{13}{2}T; t \ge 11T \end{array} \end{cases}$$

C=DO; D=RE; E=MI; F=FA; G=SOL; 0=Silencio

Figura 1. Función por ramas y partitura de "Feliz Cumpleaños".

La sonificación y visualización mediante software, permitió conjugar los aspectos principales del Taller, convirtiendo a la computadora en una suerte de "instrumento musical". Como resultado de la experiencia, el 80% de los asistentes sonificaron un fragmento musical, uno de los objetivos principales del trabajo. No obstante, la complejidad de los temas abordados fue un obstáculo didáctico que generó conflictos metacognitivos en los asistentes, brindando variables a tener en cuenta para futuros cursos.

Referencias y bibliografía

Aceff, F., Lluis-Puebla, E. (2006). Matemática en la Matemática, Música, Medicina y Aeronáutica. Publicaciones Electrónicas. Sociedad Matemática Mexicana.

Contreras de la Fuente, A., Díez Bedmar, M., Pacheco Torres, J. (2007). Las matemáticas y la evolución de las escalas musicales. SUMA54. 43-49.

Moya, M., Monaldi, A., Villagra, L. (2017) Matemática, Física y Música. Una orquestación Interdisciplinar. Salta, Argentina. Segundas Jornadas de Enseñanza de las Matemáticas. Disponible en: https://drive.google.com/drive/u/0/folders/1ziS8cE_yFBQR7oWtQmkSe28NmPc_m5Zw.

Formalización de fenómenos físicos en actividades experimentales a través de la modelación

Nicolás Adolfo **Amaya** Lozano
Universidad de Antioquia
Colombia
nicolas.amaya@udea.edu.co
Diego Alejandro **Ríos** Pérez
Universidad de Antioquia
Colombia
diego.riosp@udea.edu.co
Paula Andrea **Rendón** Mesa
Universidad de Antioquia
Colombia
paula.rendon@udea.edu.co

La intención de este póster es presentar los adelantos de una investigación que se enmarca en el proceso de formación de maestros en el pregrado de licenciatura en matemáticas y física de la universidad de Antioquia (Colombia). En dicha investigación los profesores en formación reconocieron algunas problemáticas que presentan los estudiantes de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín (Antioquia), los cuales se relacionan con la falta de comprensión de fenómenos físicos y modelos matemáticos en la clase de física; además, la escasa relación entre la parte formal y fenoménica de la ciencia. El resultado de la falta de relación entre estos dos últimos "termina en una falta de compresión tanto del concepto físico, como del modelo matemático, de tal forma, que no se llega nunca a la elaboración de una visión del mundo físico" (Ayala, Garzón & Malagón, 2007, p.40).

Formalizar, afirman Arcà y Guidoni (1987), quiere decir dar una forma definida y esquematizada a algo. El tipo de formalización que para esta investigación interesa es en la que existe y se reconoce una estructura formal que permita definir y esquematizar un fenómeno en términos de esta estructura. Por ejemplo, la geometría elemental puede considerarse como el sistema formal de relaciones y formas abstraídas de lo concreto para entender nuestras percepciones del mundo espacial (Ayala, Garzón & Malagón, 2007). En particular, para la física, la estructura matemática permite formalizar fenómenos físicos para analizarlos y comprenderlos. En ese sentido, un modelo matemático es resultado de la formalización.

En correspondencia con la idea anterior, esta investigación se fundamenta en dos aspectos. El primero aspecto es la modelación, de la cual se asume una visión desde la mirada de Blomhøj y Hoff (2006); es decir, como una práctica que dinamiza el proceso de enseñanza y aprendizaje y establece una relación entre el mundo real y la matemática. Los documentos rectores de Colombia para el área de ciencias naturales plantean la importancia de dar al estudiante la posibilidad de entender y describir su acontecer fenoménico, donde es justamente la modelación una de las estrategias que permite a los estudiantes construir y hacer uso de modelos para dar cuenta de su realidad (MEN, 1998). El segundo aspecto que fundamenta la investigación es la actividad científica escolar, entendida como un proceso de atribución de sentido al mundo natural, de manera similar a la actividad que realizan los científicos, asunto que posibilita la capacidad de pensar el mundo con teorías (Izquierdo-Aymerich & Adúriz-Bravo 2005; Paz, Márquez & Adúriz-Bravo, 2008). La actividad científica escolar promueve la construcción o uso de modelos mediante el pensamiento, la acción y el lenguaje (Izquierdo-Aymerich & Adúriz-Bravo, 2005).

Finalmente, la investigación define como objetivo identificar modelos que planteen los estudiantes en torno a fenómenos físicos en actividades experimentales y así dar cuenta de la modelación como práctica de enseñanza y aprendizaje que posibilita la relación entre la parte formal y fenoménica de la ciencia.

Referencias y bibliografía

Arcà, M. & Guidoni, P. (1987). *Guardare per sistemi, guardare per variabili.* Turín, Italia: Emme Edizioni.

Ayala, M. M., Garzón, M. & Malagón, F. (2007). Consideraciones sobre la formalización y matematización de los fenómenos físicos. *Praxis Filosófica,* (25), 39-54.

Blomhøj, M. & Hoff, T. (2006), Teaching mathematical modeling through project work. *International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 163-177.

Izquierdo-Aymerich, M., & Adúriz-Bravo, A. (2005). Los modelos teóricos para la ciencia escolar. Un ejemplo de química. Actas del VII Congreso Internacional sobre Investigación en la Didáctica de las Ciencias, *Enseñanza de las Ciencias*, Número Extra. Congreso llevado a cabo en Granada, España.

Ministerio de Educación Nacional. (1998b). *Lineamientos Curriculares: Ciencias Naturales y educación ambiental*. Bogotá: Magisterio.

Paz, V. A., Márquez, C., & Adúriz-Bravo, A. (2008). Análisis de una actividad científica escolar diseñada para enseñar qué hacen los científicos y la función de nutrición en el modelo de ser vivo. *Revista Latinoamericana de Estudios Investigativos*, 4(2), 11-27.

Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA): un planteamiento desde la Teoría de la Situaciones Didácticas (TSD)

Juddy Amparo**Valderrama**Moreno
UniversidadMetropolitana de Educación, Ciencia y Tecnología (UMECIT)
Panamá
juddyamparo2@gmail.com
Dora Solange**Roa** Fuentes
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander (UIS)
Colombia
roafuentes@gmail.com

Resumen

Esta investigación propone el diseño de un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) sustentado en los elementos que propone la Teoría de las Situaciones Didácticas: aprendizaje por adaptación, intención, medio, acciones, retroacciones, interpretación, validación e institucionalización del saber. En particular a través del diseño de tallerescon la herramienta del software dinámico GeoGebra;se busca que los estudiantes de secundaria grado octavo puedan experimentar, representar, visualizar, conjeturar en un contexto matemático mediante la interacción en un OVA.Se afirma que el OVA es una estrategia donde sepotencia el desarrollo de procesos matemáticos, puesto que sin mayor intervención directa del profesor y mediante el progreso de actividades matemáticas permite el paso a paso por niveles para lograr la comprensión de objetos matemáticos para descubrir propiedades y características propias del saber matemático, particularmente referidas al desarrollo de Pensamiento Algebraico (PA).

Palabras clave: OVA, TSD, modelo didáctico, Pensamiento Algebraico, TAC, procesos matemáticos.

Introducción

El surgimiento delsiglo XXI haestado marcadopor la incursión en la era digital donde el lenguaje y pensamiento surgen de formadiferente; la comunicación entre estudiante y profesor varían en comparación condécadas atrás; se habla denativos e inmigrantes digitales y conello ciertas características en común. La gran mayoría de estudiantes nacidos en este siglo son nativos digitales, le gusta las multitareas, los proceso paralelos, recibir información de forma inmediata, prefieren los gráficos y no los textos, les gusta trabajar en red y por la red demostrando mayor efectividad. Parafraseando a (Prensky, 2011); el proceso de formación no les atrae y manifiestan con facilidad su desinterés, optan por la rebeldía y no valoran el tenor de la experiencia del profesor. Pero esto permite en cuento a la enseñanza de matemáticas realizar cambios paraapuntar a formar seres matemáticamente competentes con capacidades para desenvolverse en la sociedad del conocimiento; al igual que aprovechar las bondades ofrecidas por el uso de las tecnologías digitales en los procesos de enseñanza y generar mayor impacto de aprendizaje en los estudiantes. En este caso se busca a través del diseño de actividades con tareas específicas en el software dinámico GeoGebrabajo el enfoque de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), que los estudiantes puedan experimentar, representar, visualizar, conjeturar y hacer uso de la matemática en un contexto matemático. Esto mediante la interacción en un "Objeto Virtual de Aprendizaje" OVA como una estrategia didáctica de refuerzo donde se potencia el desarrollo del pensamiento matemático enfatizando en el pensamiento variacional y espacialmediante el desarrollo de los procesos matemáticos. Por tanto, se pretende validar un OVA que potencie los procesos matemáticos en estudiantes de secundaria tomando como fundamento la Teoría de las Situaciones Didáctica mediante el diseño y análisis de actividades en un software de geometría dinámica para dar respuesta a la pregunta: ¿Qué procesos matemáticos logran potenciar estudiantes de secundaria cuando interactúan con un OVA diseñado con base en la Teoría de Situaciones Didácticas?En repuesta, se hace una mirada a la incursión del uso de la tecnología y las bondades ofrecidas a la enseñanza de la matemática y sus aportes a la Educación Matemática.

El OVA: una estrategia que responde a las necesidades de la era digital

En los ámbitos internacional y nacional el estudio de la enseñanza de la geometría y el algebra en la escuela ha sido un tema de interés y la tecnología ha ido incursionando; según la National Council ofTeacherofMathematics (NCTM, 2000, por su sigla en inglés) en su texto Principios y Estándares de la Educación Matemática, el cual fue traducido por la sociedad andaluza THALES, allí se define la tecnología como el sexto principioanteponiéndose la igualdad, el currículo, la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación, y se determina la tecnología como un factor esencial que influye en la matemática que se enseña y potencia aprendizaje. Pero no se trata de incluir la tecnología como dinamismo de la enseñanza sino como una acción de regulación de procesos donde el profesor gestiona y organiza estructuras con una intención de enseñar un saber matemático; la intención es enseñar más y de mejor manera, en términos de Lozano (2011) no es equipar a los estudiantes en el manejo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), sino utilizarlas con fines pedagógicos, gestionarlas para lograr mayor impacto de aprendizaje es por esto que este trabajoseaborda las TIC sino las Tecnologíasdel Aprendizaje y el Conocimiento (TAC).

En efecto en el OVA se retoma lo planteado por Brousseau (2007) y a partir de una situación a- didáctica se busca responder un problema mediante la interacción entre intención (propuesta por el profesor en la actividad) y el medio; el estudiante realiza una acción que le permita resolver el problema, seguidamente valida su resolución y en caso de no ser acertada genera una nueva estrategia de solución "retroacción", producto de esta situación a-didáctica se genera un conocimiento y se dice que el estudiante aprendió y con esto que se realizó un proceso que se modificaron los conocimientos. Sin embargo, aún no finaliza su aprendizaje puesto que posteriormente se genera una situación didáctica donde se institucionaliza el saber. Como lo menciono Acosta, Monrroy y Rueda (2010) el conocimiento es diferente al saber. El conocimiento personal y contextualizado, mientras que el saber es impersonal y descontextualizado, es por esto por lo que se requiere una situación didáctica donde el profesor le permita de una forma guiada, pero con poca intervención realizar la validación. La validación es uno de los momentos más importantes, pero no es el resultado, el profesor debe garantizar la oportunidad de determinar sus aciertos o desaciertos, equivocarse y buscar la autocorrección a partir de formulación de proposiciones y validarlas; en consecuencia, la validación permite relacionar la enseñanza (proyecto del profesor) con el aprendizaje (proyecto del estudiante) (Margolinas, 1993).

La incursión de la era digital al proceso enseñanza aprendizaje

Parafraseando (Prensky, 2011) el nativo digital manifiesta que no presta atención y opta por la rebeldía porque el proceso de formación no les atrae, no les motiva, no despierta el interés, puesto que para ellos todo es valorado a tenor de la experiencia. Razón por la cual nativos e inmigrantes digitales deben buscar puntos de equilibrio para poder hacer posible un proceso enseñanza- aprendizaje agradable donde la tecnología sea una herramienta que facilite no solo desde el punto atractivo, sino a través de la simulación de fenómenos se evidencie los procesos de experimentación, visualización, comprobación y validación de saberes, en consecuencia, se habla de la importancia de romper barreras de comunicación digital y generar un acercamiento entre nativos e inmigrantes de tal forma que se pueda hablar la misma lengua.

Los profesores en su cotidianidad abogan por un lenguaje pedagógico y tradicional, mientras que los estudiantes por un lenguaje digital. El nativo digital es tan visual que puede pasar hasta 10 horas sin preguntar, no porque no lo requiera sino porque lo prefiere así, afirma Prensky. Es así como cada vez más se requiere prácticas pedagógicas que le brinden al estudiante la posibilidad de trabajar en equipo, en red y tengan un alto de contenido visual que le permita generar un aprendizaje con un lenguaje propio de su época.

Como nos dice Gertrudiz, F., Durán, J., Gamonal, R., Gálvez, M. y García. F. (2010) los roles han cambiado y es imposible que el conocimiento lo adquieran de una sola o de un grupo determinado, se vive en la inmediatez, se afirma que cada vez es más tenue el lapso que transcurre en el momento que el conocimiento es adquirido y el momento que el conocimiento es absoluto. Las técnicas de aprendizaje se han trasladado a la red y por la red donde a través de la interacción con un ordenador se relaciona, se comunica, pone en juego sus habilidades en forma creativa, explora y hace posible su actualización constante.

Competencia matemática

En la literatura de la Educación Matemática ha revisado lo correspondiente a ¿Que enseñar? ¿Cómo enseñar?una matemática contextualizada en sí misma y en otras ciencias, donde los contenidos no sean más que el pretexto para enseñarla y su objetivo principal sea desarrollo del Pensamiento Matemático (PM) a través del progreso de los procesos matemáticos. Ser matemáticamente competente requiere procesos, capacidades y contenidos y competencia es "la capacidad para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos" (Pisa, 2012, p. 25). Por otro lado, el

MEN(1998) determina la triada para enseñar matemática: procesos, contenidos y contexto; de igual forma THALES (2013) definen 10 estándares para lograr una sociedad con capacidad para pensar y razonar matemáticamente con conocimientos y destrezas matemáticas.

Desde esta mirada en cuanto a la enseñanza de la matemática ha realizado diferentes cambios que permiten ir ajustando el currículo para responder a dichas necesidades y apuntar a formar seres matemáticamente competentes con capacidades para desenvolverse en la sociedad del conocimiento. Pero existe la preocupación de enseñanza matemática con la rigurosidad que exige, esto ha llevado a realizar un debate alrededor sobre la pertinencia y como lograr el rigor de una manera de fácil acceso. Un ejemplo de ello es lo planteado por investigadoras reconocidas en la incursión de las tecnologías en la enseñanza de la matemáticas. (Hoyles, 2015), quien argumenta que una manera de lograr la rigurosidad de la matemática y su proceso amplio es el uso de la tecnología digital diseñada adecuadamente, de igual forma plantea que no se puede apreciar ni valorar lo que no se conoce; es así como no se debe considerar que la matemática es una caja negra cerrada difícil de abrir de demasiada complejitud para hacerlo, pues la matemática es reconocida por su importancia y la ciencia y la tecnología están en deuda con ella, porque aportes realizados por la matemática han permitido su avance. (Artigue, 2011) coincide con el planteamiento anterior; al dar un uso adecuado a la tecnología se pueden generar la cosificación de objetos matemáticos en forma directamente manipulable y de la visualización y simulación de fenómenos.

Desarrollo del Pensamiento Algebraico

Abordar temáticasrelacionadas a la enseñanza del algebra es un poco tedioso, puesto que se ha visualizado estrictamente para hacer el cambio de los procedimientos numéricos a los procedimientos con números y letras, esto ha hecho ha generado un poco de desinterés por parte de los estudiantes y con ello su poca o nulo comprensión de su estructura de pensamiento. Se desconoce que se debe buscar promover la construcción de un conocimiento matemático a través de la enseñanza de objetos matemáticos que promuevan:

- La construcción de conocimiento matemático definido por propiedades y estructuras propias
- El desarrollo histórico epistemológico del álgebra evidencia su importancia en el desarrollo de Pensamiento Matemático.
- La matemática requiere el paso por diferentes niveles para lograr la comprensión de objetos matemáticos

El abordaje del algebra en el grado octavo no debe ser el paso de la aritmética, sino debe ser un proceso que permita entender las matemáticas a través de caminos particulares de pensamiento, que incluye el análisis de relaciones entre cantidades,el reconocimiento de estructuras, el estudio del cambio, lageneralización, la prueba y la predicción(Cai& Knuth, 2011). Para tal fin un contexto tecnológico gestionado permite abordar la enseñanza con interacción de objetos matemáticos de una forma que puede llegar a procesos de generalización de estructuras algebraicas propias para continuar en el aprendizaje no solo del {algebra sino del calculo y sus aplicaciones.

Método

Metodológicamente esta investigaciónse desarrolla desde un enfoque cualitativo, diseño de investigación-acción a la luz de lo planteado por Hernández et al (2014). Por tal razón se realiza en tres fases. Inicialmente se caracteriza la población, se define el diseño de las actividades y se plantearan los aprendizajes esperados para organizar los saberes y la forma de plantearlos desde el OVA. Una segunda se implementación de las actividades y se analizan los datos obtenidos y finalmente se interpretan, se analizan los datos a la luz de la TSD y se determina un plan de mejora.

A continuación, en la cuadro se muestra la estructura del diseño, aplicación y evaluación del OVA hipotético el cual tiene como objetivo valorar las bondades y determinar las pautasde mejora para el OVA refinado

Figura1: OVA a la luz de la TSD
Fuente: Autor

Para este trabajo se tiene como hipótesis que la interacción del estudiante y un OVA construido desde el marco teórico de la didáctica de las matemáticas, potencia el desarrollo de procesos matemáticos; en este caso particular asociados al desarrollo del Pensamiento Algebraico, desde esta mirada se determina el OVA como una variable independiente y los procesos matemáticos como una variable dependiente. Por definición operacional con la aplicación del OVA se determinara el nivel de desempeño en el manejo y apropiación del conjunto de los recursos digitales, utilizados en diversos contextos con un propósito educativo y como segunda medida de ser matemáticamente competente es decir con el nivel de desempeño en la capacidad para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, al igual que el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas, para describir, explicar y predecir fenómenos.

Resultados

Al revisar la literatura y el contexto institucional se puede apreciar que el colegio Técnico Vicente Azuero del municipio de Floridablanca Colombia, se cuenta con la infraestructura tecnología, con el apoyo de las directivas de la institución para intervenir el currículo e matemáticas e implementar nuevas prácticas pedagógicas, sin embargo se presenta algunas dificultades como la resistencia de algunos pares, padres de familia y estudiantes.

Un primer avance en la investigación fue caracterizar la población de los estudiantes del grado octavo del Colegio Técnico Vicente Azuero, cuyas edades promedio es 13 años en un rango de 11 a 16 años; se determina que la gran mayoría de estudiantes, experimentan un gusto por la tecnología, tiene elementos en casa, pero no les gusta hacer actividades relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas, puesto que un 66% el uso dado al internet no es acceder al conocimiento.

Algunas conclusiones

El Ova es una estrategia que permite no solo tener los contenidosen la red e interactuar con ellos, sino permite tener un aula inclusiva que evidencie el avance de los estudiantes en un proceso de enseñanza aprendizaje. Aunque en este caso solo se pretende validar un Ova de refuerzo a la clase de matemáticas, le va a permitir al estudiante tener un profesor personalizado en horarios distintos al encuentro presencial con el profesor.

Los procesos de comunicación entre profesores y estudiantes cada vez son más distantes, teniendo en cuenta que los estudiantes tiene características propias de los nativos digitales en los cualesles gusta pocointeractuaren la presencialidad y los profesores a pesar de dar pasos agigantados para romper el analfabetismo digitalpor sus características propias son solo inmigrantes digitales.

El OVA permite el dialogo permanente entre el software, el profesor y estudiante a pesar de no estar en una presencialidad, la actividad matemática tiene un componente de experimentación, otro de visualización y otro de razonamiento, por lo tanto, se puede decir que se busca que el estudiante sea competente en la medida que evidencie la matemática en un contexto determinado(tecnológico) y pueda formular, emplear e interpretar con la utilización de saberes propios de la matemática.

La inmediatez es una realidad que se vive en la comunicación de los nativos digitales y se corre el riesgo de perder la motivación con una gran facilidad, por lo tanto,el diseño de actividades matemáticas debe ser enriquecidas con saber matemático en un lenguaje digital de tal forma que prendan y con ello se mantenga la comunicación.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. Cuaderno de Investigación y Formación en Educación Matemática. Volumen (8) 13-33. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6948/6634

Acosta, M. Monroy, L. y Rueda, K. (2010). *Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando cabri como medio.* Revista integración, vol.2 173- 189. Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander, Escuela de Matemáticas.

Brousseau G. (2007). *Iniciación de la Teoría de las Situaciones Didácticas.*(Traducido por: Fregona,D., trabajo original :Initiation to the study of the theory of the didactic situations.). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Cai, J. & Knuth, E. (2011). A Global dialogue about Early Algebraization frommultiple perspectives en J. Cai y E. Knuth (Eds.) *Early Algebraization*(pp. ix).Berlin: Springer.

Gertrudiz, F., Durán, J., Gamonal, R., Gálvez, M. y García. F. (2010). Una taxonomía del término "nativo digital": nuevas formas de relación y comunicación. Congreso Euro Iberoamericano de alfabetización mediática y culturas digitales. Universidad de Sevilla. Recuperado de https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/57014/una_taxonomia_del_termino_nativo_digital._nuevas_formas_de_relacion_y_de_comunicacion.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, M (2014). *Metodología de la investigación.* México, México: McGRAW-HILL / Interamericana Editores, S.A. de C.V, quinta edición.

Hoyles, D. (2015). Comprometerse con las matemáticas en la era digital. Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática. Volumen (1) 36-51 Recuperado de http://cresur.edu.mx/cresur2018/memorias/2.pdf

Margolinas, C. (1993). La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas. (Primera edición en español; Acosta M.E. y Fiallo J.E., Trabajo original: De l'importance du vrai et du fauxdans la classe de mathématiques, publicado en 1993), Bucaramanga, Colombia: Publicaciones UIS.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas.* Recuperado https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2000). *Formación de Docentes sobre el uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas.* Recuperado https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-81040.html

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Recuperado https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Lozano, R. (2011). *De las TIC a las TAC: tecnologías del aprendizaje y el conocimiento.* Anuario ThinkEPI. Volumen (5) 45-47 Recuperado de https://recyt.fecyt.es/index.php/ThinkEPI/article/view/30473/16039

Prensky, M. (2010*). Nativos e Inmigrantes digítales*. Distribuidora SEK, S.A.

Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Servilla, España: editorial: Servicio de Publicaciones de la S.A.E.M. Thales.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

La práctica de actividad científica en la escuela para el desarrollo de habilidades y actitudes para matemática

Ximena **Colipan**
Universidad de Talca
Chile
Ximena.colipan@utalca.cl

Resumen

Este tallertiene como objetivo presentar situaciones y problemas matemáticos que permitenponer en acción conocimientos matemáticos y habilidades tales como experimentar, conjeturar, modelar, probar, comunicar, etc. Además, se expondrán metodos de gestión de clases, que permiten el fomento de actitudes tales como: abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones, demostrar perseverancia y rigor en la resolución de problemas, trabajar en equipo en forma responsable y proactiva y desarrollar una actitud crítica.En este trabajo es parte de los resultados de nuestras investigaciones sobre el estudio en el aula problemas en matemática discreta y su trasposición didáctica en clases a través de las Situations de Recherchepour la Classe (SiRC).

Palabras clave: Resolución de problemas, problemas abiertos, juegos combinatorios, Desarrollo de habilidades en Matemática, Desarrollo de actitudes, dificultades de aprendizaje.

Contexto y antecedentes

Una de las preocupaciones sociales relativa a las ciencias, es la desafección de los estudiantes hacia el área científica que se complementa, además, con los bajos resultados que obtienen los alumnos en estas áreas a medida que avanzan es su escolarización (SIMCE, 2016a; Hall, 2012). Se ha apuntado como posible causa, al tratamiento que se le da en clases a las disciplinas asociadas, es decir, Física, Química, Biología y Matemática. En efecto, tal como plantea Hall (2012), generalmente estas disciplinas son estudiadas como entes complejos, orientadas hacia el aprendizaje de nociones y procesos más abstractos que palpables. A lo anterior se suma la imposición de contenidos curriculares que dejan al alumno con poca o ninguna oportunidad de participar en la planificación de su propia formación (Connors-Kellgren, Parker, Blustein, Barnett, 2016).

De esta manera, aún siguen imperando en las áreas científicas, los tradicionales métodos de enseñanza y aprendizaje: clases muy teóricas, poco participativas, además de inflexibles, que lejos de atraer y estimular, aburren, desmotivan y extirpan la motivación por las ciencias (Ouvrier-Buffet, 2011; Colipan, 2016). Estos factores, nos lleva a reflexionar sobre otro elemento importante: la gran distancia que existe entre el contenido de las prácticas escolares y la realidad de la investigación científica y si nos enfocamos a la matemática esto se hace mucho más evidente En efecto, tal como plantea Houdement (2008) y Dias (2014) es usual concebir las matemáticas como una ciencia que se articula en forma de algoritmos y aplicaciones de la teoría y que la posibilidad de experimentar actividades científicas se restringe a las ciencias de la naturaleza y por supuesto alejadas de las matemáticas.

Sin embargo, el carácter experimental de la ciencia está inscrito en el proceso de resolución de problemas en la cual experimentar está en interacción con otras acciones como proponerse nuevos problemas, verificar hipótesis/conjeturas, etc… Y en este sentido el carácter experimental de las matemáticas siempre ha estado presente y, es más, para experimentar en matemática no se necesita herramientas muy complejas, un lápiz y un papel pueden ser suficientes.

Practicar una actividad científica en matemática consistiría entonces en tratar de resolver un problema (que sería el objeto central de la actividad) a través de la puesta en marcha de diferentes acciones, no necesariamente en orden y que eventualmente podrían repetirse, tales como: Proponer nuevos problemas, experimentar, conjeturar, modelar, probar, comunicar, entre otros (Godot 2006; Durrant-Guerrier 2010; Colipan y Grenier, 2017).

En consideraciónde lo expuesto anteriormente, practicar la actividad científica en matemática *in se* y *per se* en el ámbito escolar, podría permitir una articulación armoniosa entre conocimientos (saber), habilidades (saber-hacer) y actitudes (saber ser).

La investigacion que se llevó a cabo, se apoyó sobre dos objetos de estudio: El modelo Situations de Recherche Pour la Clase y problemas derivados de la matemática discreta.

Marco teórico

¿Porqué la Matemática discreta?

La matemática discreta, es un área de la matemática pertinente para trabajar con todo tipo de público. En efecto, la matemática discreta es el origen de situaciones que se contemplan en actividades de divulgación, en olimpiadas o concursos matemáticos y, es más, posee una rama llamada teoría de Juegos.

Otro atractivo de esta área de la matemática es que ofrece la posibilidad de proponer problemas que implican conceptos y nociones de fácil acceso para todos. Además, ella se sirve de otras áreas de la matemática tales como geometría, álgebra, lógica, teoría de conjuntos, teoría de números, combinatoria, entre muchas otras.

La matemática discreta se encuentra casi ausente en gran parte de los programas de estudio a nivel mundial, y Chile no es la excepción, pero esto le da un estatus especial. En efecto, tal como señaló Rolland (2000) "*El hecho que las matemáticas discretas no sean estudias en el plano escolar pueden jugar a su favor, de esta manera no es posible amarrar el problema a una noción ya estudiada, por lo que guarda un atractivo por su carácter novedoso, que pude ser incluso considerado como lúdico*"

Todo lo anterior, es respaldado por numerosas investigaciones que revelan la pertinencia de esta área, de hecho, el International Congress on Mathematical Education(ICME) posee un grupo de estudio permanente sobre matemática discreta y sus implicaciones en el aula. Entre estos trabajos podemos destacar a Goldin, Epstein, Schorr y Warner (2011); Rosenstein (2014); Lockwood y Gibson (2016); Ferrarello y Mammana (2017); Colipan (2018); Hart y Martin (2018), entre otros.

El modelo Situations de recherche pour la classe (SiRC)

El modelo SiRC, es el modelo de situación en la cual nos apoyaremos para simular una actividad científica en matemática (Grenier et payan, 2002; Ouvrier-Buffet, 2009; Grenier, 2012; Colipan, 2016). Este dispositivo didáctico, creado por la Federación de investigación francesa Maths à Modeler, tiene las siguientes características:

La situación debe inscribirse en una problemática de investigación profesional. El enunciado debe ser llamativo, de fácil acceso y no debe estar formalizado en términos puramente matemáticos. Los métodos de resolución no deben estar señalados, el problema debe poder ser abordado a través de variadas pistas, es decir, debe dejar la posibilidad de utilizar múltiples estrategias de resolución.Los conocimientos escolares elementales deben ser suficientes para entender y entrar en la situación, y dominio conceptual en el cual se enmarca, aunque no sea muy familiar, debe ser de fácil acceso para que sea posible tomar fácilmente posesión de la situación. Una vez resuelto un problema de la situación, este debe reenviar a nuevos problemas.Las variables de la situación están a disposición del alumno y no del profesor (como en el caso de las variables didácticas de Brousseau). En una SiRC estas variables son llamadas "variables de investigación".

El objetivo de las SiRC es producir respuestas a interrogantes que nacen de una situación llamada problematica. La diferencia con otros métodos tales como "problem-solving" (Schoenfeld, 1985), "situaciones-problemas" (Douady, 1984), "problemas abiertos" (Arsac, Germain y Mante, 1988), las "situaciones adidacticas" (Brousseau, 1998), radica en que: no hay necesariamente una respuesta final al problema inicial, los conceptos matemáticos que están en juego no están programados y no son restrictivos a priori, ellos están al servicio del problema y su solución, es decir no existe necesariamente una noción o concepto matemático especifico a enseñar, ni la ejercitación de un técnica o método visto durante una clase y es la prueba o demostración el único medio de validación a cargo de los alumnos.

Los aprendizajes esperados en una SiRC son aquellos ligados al saber tranversal, que son agrupados a través de la tripleta (problema, conjetura, prueba). De esta manera, el tránsito entre cada uno de estos elementos moviliza habilidades que constituyen la actividad cientifica en matemática tales como:

Problema-conjetura: Reformular el problema con sus propias palabras, plantearse preguntas, simular la situación, imaginar relaciones con problemas conocidos, dividir el problema en problemas más simples, modificar los datos del enunciado, buscar regularidades, formular hipótesis.

Conjetura-prueba: Organizar las etapas de la resolución, crear argumentaciones, estudiar las relaciones de dependencia entre los objetos del problema, crear una notación pertinente, estudiar todos los casos, utilizar contra-ejemplos, razonar por deducción, razonar por inducción, razonar por condición necesaria y suficiente, efectuar demostraciones por lo absurdo, confrontar los resultados con las conjeturas.

Prueba-Problema: Controlar los resultados obtenidos evaluando pertinencia en función del problema estudiado, verificar que se han contemplado todas las soluciones, dar forma a una solución, comunicar un resultado o pregunta que queda pendiente, argumentar y justificar resultados, utilizar resultados para resolver otros problemas. comunicar y convencer.

Los transitos durante el proceso de resolución de una SiRC, forma parte de las herramientas para el análisis de la producción y actividad de alumnos, inmersos en la resolución de un problema de tipo SiRC.

Resultados obtenidos en la investigación

En esta investigacion utilizamosuna metodologíade tipo cualitativa basada en una ingeniería didáctica (Artigue, 2011). La ingeniería didáctica es una metodología de investigación de origen francés cuya característica principal es su esquema experimental basado en la concepción, realización y análisis de secuencias de enseñanza. El registro está basado en el estudio de casos y la validación es esencialmente interna, fundada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta, Wilhelmi, 2013).

La experimentación se realizó con 50 alumnos cuyas edades fluctuaban entre los 10 y 14 años. Los resultados demostraron que, el estudio en clases de problemas matemáticos con caracteristicas de tipo SiRC, estarían favoreciendo la integración de las diferentes dimensiones de la matemática. Creemos que implementar esta metodología al contexto educacional puede enriquecer la percepción que se tiene de la matemática y paliar así las diferencias que existe entre el tratamiento de la matemática en el aula y la matemática como disciplina científica. En particular, por el hecho de que los problemas, generalmente, no se sitúan en el campo numérico, estas pueden llevarnos a desprender la matemática del cálculo, poniendo en valor el razonamiento y la actividad científica como criterios significativos de una actividad matemática.

Metodología que se utilizará en el taller

El taller estará organizado en dos etapas, cada una de ellas se articulará la exposición del relator con el trabajo práctico de los participantes.

La primera etapa consiste en dar respuesta a un problema matemático, poniendo énfasis en el proceso de investigación, resolución de problemas, análisis, interpretación, síntesis de información y comunicación de resultados. Para esto, consideraremos como resultados: la obtención de soluciones particulares (mínimo resultado), métodos de construcciones locales y globales (procedimientos para la obtención de soluciones), enunciado de conjeturas locales (de casos particulares) o conjeturas globales (propias a un sub-problema), pruebas o demostraciones globales y locales.

La segunda etapa consistirá en analizar las condiciones necesarias para la gestión en el aula de las situaciones estudiadas

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, 72090110. De la Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología (CONICYT), Chile

Referencias y bibliografía

Arsac, G.; Germain, G.; Mante, M. (1988). *Problèmeouvert et situation-problème*. Lyon, Francia: IREM de Lyon.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, Francia: La pensée sauvage éditions.

Colipan, X. (2016). Desarrollo de la actividad científica en clases a través del estudio de juegos combinatorios, el ejemplo del juego del chocolate. *Boletim de Educação Matemática, 30*(55), 691 – 712. http://dx.doi.org/00.1590/1980-4415v30n55a19

Colipan, X. (2018).Mathematical research in the classroom via combinatorial games.En Hart, E.; Sandefur, J. (eds).*Monograph on the Teaching and Learning of Discrete Mathematics*. Berlin, Alemania: Springer.

Houdement, C. (2008). Experimentación y prueba: Dos Dimensiones de las Matemáticasdesde la EscuelaPrimaria. Paradigma, Vol. XXIX, 2, 173 – 185

Ferrarello, D., &Mammana, M. F. (2017). Teoria dei grafi: Come e perchè. *L'insegnamento Della Matematica E DelleScienzeIntegrate, 40,* 249–271.

Douady. R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*, Tesis de doctorado no publicada, Université de Paris VII, Paris, Francia.

Durand-Guerrier, V. (2010). Expérimenter des problèmes de recheColipan, X.; Grenier, D. (2017). Desarrollo de habilidades asociadas a la actividad matemática. Una propuesta para la formación inicial y continua de profesores. En Pino-Fan, L.; Poblete A.; Diaz, V. (eds). Perspectivas de la investigación sobre la formación de profesores de matemáticas en Chile. Osorno, Chile: Cuadernos de Sofía.

Connors-Kellgren, A., Parker, C.E., Blustein, D.L., Barnett, M. (2016). InnovationsandChallenges in Project-Based STEM Education: Lessonsfrom ITEST *Journalof Science Educationand Technology*, 25 (6), pp. 825-832

Dias, T. (2014). Des mathématiquesexpérimentalespourrévélerlepotentiel de touslesélèves. *La nouvelle revue de l'adaptation et de lascolarisation, 65*, 151-161.

Hart E.W., Martin W.G. (2018) DiscreteMathematicsIsEssentialMathematics in a 21st CenturySchool Curriculum. In: Hart E., Sandefur J. (eds) Teachingand Learning DiscreteMathematicsWorldwide: Curriculum andResearch. ICME-13 Monographs. Springer, Cham

rche innovants en mathématiques à l'école. Dans: INRP, Cédérom. Chap. La dimension expérimentale en mathématiques. Enjeux épistémologiques et didactiques.

Godino, J.; Batanero, C.; Contreras, A.; Estepa, A.; Lacasta, E.; Wilhelmi, M. Didacticengineering as design-basedresearch in mathematicseducation. In: Congress Of EuropeanResearch In MathematicsEducation, CERME, 8. 2013. Ankara, Turquía. Proceedings... Ankara: Middle East TechnicalUniversity, 2013. p. 2810-2819.

Godot, K. (2006). La roue aux couleurs: une situation recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3. *Grand N*, 78, 31-52.

Grenier, D.; Payan, C. (2002). Situations de recherche en classe: essai de caractérisation et proposition de modélisation. Paris. *Actes du séminaire national de didactique de mathématiques*. Paris, Francia. p.189-205.

Grenier, D. (2012). Rôle des situations de recherche dans la vulgarisation des mathématiques. Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle. *Actes du colloque EMF2012.*Ginebra:Suiza, pp. 1905–1913.

Goldin, G. A., Epstein, Y. M., Schorr, R. Y., & Warner, L. B. (2011). Beliefsandengagementstructures: Behindtheaffectivedimensionofmathematicallearning. *ZDM MathematicsEducation, 43,* 547–556.

Hall, O. (2012). La Desafección de los Jóvenes por la Ciencia y la Tecnología: Una Tendencia Peligrosa. Documento UNESCO, Paris, Francia.

Lockwood, E., & Gibson, B. (2016). Combinatorialtasksandoutcomelisting: Examiningproductivelistingamongundergraduatestudents. *EducationalStudies in Mathematics,91*(2), 247–270. doi: 10.1007/s10649-015-9664-5.

Ministerio de Educación. (2015): *Bases curriculares 7° a 2° medio.* Santiago, Chile: Autor

Ouvrier-Buffet, C. ; Perrin, M. (2009): Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur- Quoi de neuf ? Approches plurielles en didactique des mathématiques. *Colloque DIDIREM*, Paris : Francia. pp. 132–143.

Ouvrier-Buffet, C. (2011). A mathematicalexperienceinvolvingdefining processes: in-actiondefinitionsand zero-definitions. *EducationalStudies in Mathematics*, Vol. 76, n°2, 165-182.

Rolland, J. (2000). *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication*. Tesis de doctorado no publicada, Université Joseph Fourier, Grenoble, Francia.

Rosenstein, J. G. (2014). *Problemsolvingandreasoningwithdiscretemathematics*. ShivitiPublications (en (enlinea http://www.new-math-text.com)

Simce, (2016). Agencia de Calidad de la Educación, entrega de resultados 2016. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/PPT_Conferencia_ER_2017_web_3.pdf

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL, EEUU: Academic Press.

Desarrollo del Pensamiento Geométrico (PG) a través del uso de las tecnologías digitales

Juddy Amparo **Valderrama** Moreno
Colegio Técnico Vicente Azuero - EDUMAT UIS,
Escuela de Matemática,
Universidad Industrial de Santander
Colombia
juddyamparo2@gmail.com
Daniel **Moreno** Caicedo
Colegio Técnico Vicente Azuero - EDUMAT UIS,
Escuela de Matemática,
Universidad Industrial de Santander
Colombia
dmoreno65@gmail.com

Resumen

Esta experiencia pedagógica, propone un abordaje de la enseñanza de la geometría analítica usando tecnologías digitales, para tal fin se utiliza como medio de representación el software de geometría dinámico “GeoGebra” y sus bondades de experimentación, visualización y comprobación. En particular se pretende abordar los objetos matemáticos de Circunferencia y Parábola desde un todo relacionando los tres conceptos: geométrico, gráfico y expresión algebraica a partir de la resolución de problemas. Para tal fin en este taller se pretende aportar al discurso del profesor elementos pedagógicos, tecnológico y disciplinar para la enseñanza de las secciones cónicas con ayuda del sistema de representación de la geometría dinámica. En consecuencia, se pretende incentivar en el uso de las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC).

Palabras clave: Circunferencia, Parábola, TAC, Tecnologías digitales, Resolución de problemas. Pensamiento Matemático.

Introducción

Responder a interés de los estudiantes donde el uso de tecnologías en su cotidianidad es relevante, las tareas repetitivas de procedimiento los aburre y la inmediatez de la información les permite acceder a ella con facilidad, ha generado cambios de concepción en la enseñanza de la matemática, puesto que en el ciberespacio se encuentra cualquier cantidad de contenidos, sin embargo saber utilizar e identificar la pertinencia de los mismos solo es posible cuando se tiene conocimiento sobre ellos y para tal fin se requiere tener un saber matemático y este solo se logra en la medida que el individuo realice procesos de manipulación de objetos matemáticos contextualizados. Desde esta mirada se ha planteado una experiencia pedagógica en el nivel media donde a través del uso de las tecnologías digitales el estudiante avanza en su proceso de aprendizaje construyendo sus concepciones y con dicha mediación entre la interacción con el medio (GeoGebra), trabajo individual, socialización con sus pares y acompañamiento del experto logra institucionalizar saberes.

El uso de tecnologías digitales en la enseñanza de la matemática

Desde el siglo pasado se ha abordado el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la enseñanza de las diferentes disciplinas y en la matemática no ha sido la excepción, es así como la comunidad científica de la Educación Matemática tanto internacional como nacional ha ahondado en temas que competen a ¿Cómo enseñar objetos matemáticos usando tecnologías? ¿Qué objetos matemáticos se pueden enseñar usando tecnología? ¿Para qué utilizar las tecnologías en la enseñanza de la matemática? Investigadoras como Artigue (2011), manifiesta que el uso adecuado de la tecnología genera la cosificación de objetos matemáticos en la medida que el estudiante puede manipular, visualizar y simular fenómenos; de igual forma desde los años 80´s como investigadora ha incursionado en influenciar en la construcción de micro currículos donde se incorpore las tecnologías al proceso de enseñanza de las matemáticas.

En Colombia el Ministerio de Educación Nacional (MEN) ha impulsado proyectos y estrategias que favorezcan el uso de las tecnologías en la escuela. Para la enseñanza de la matemática en el año 2000 se impulsó el proyecto incorporación de las nuevas tecnologías al currículo de matemáticas en educación básica y media (MEN, 2000), este proyecto impactó a 17 departamentos y 3 distritos capitales y fue liderado por profesores de las facultades de universidades; Se pretendía incursionar en el uso de las TIC en el aula de matemáticas con el objetivo de mejorar practicas pedagógicas para hacer cambios sustanciales al currículo de las matemáticas. Particularmente en el departamento de Santander, fue coordinado por la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, lo cual generó la consolidación del grupo de investigación en Educación Matemática EDUMAT-UIS. Desde ese momento buscamos enriquecer el discurso del profesor que orienta matemáticas para mejorar prácticas pedagógicas usando tecnologías digitales.

TIC o TAC

Las TIC han ido incursionando a pasos agigantados en los diferentes ministerios, en Colombia desde el año 2009 se creó su ministerio y ha pretendido hacer interdisciplinariedad con los demás ministerios. Un ejemplo de ello es que mancomunadamente el Ministerio de Educación y el Ministerio de las tecnologías y las comunicaciones con alianzas, se ha equipado algunas instituciones educativas con laboratorios digitales, cobertura de red, tabletas, tableros digitales, televisores, video beam entre otros aparatos tecnológicos. De igual forma los estudiantes son nativos digitales y tiene mayor destreza en la utilización de la tecnología en comparación con sus profesores, ellos piensan y procesan información significativamente distinta (Prensky, 2011) Pero saber manejar la tecnología es tener los herramientas para responder a lo operativo que se requiere para su funcionamiento, pero saber utilizarla con fines educativos para mejorar procesos de enseñanza son dos cosas distintas. Lo primero con facilidad se logra ya que los estudiantes son nativos digitales, pero ha sido tarea de los profesores y las instituciones de educación superior trabajar al respecto, para aplicar en el manejo las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC).

Por esto se manifiesta de las TIC a las TAC, las primeras su objetivo son el manejo y operatividad de las tecnologías, las segundas en utilizar las tecnologías con objetivos puntuales académicos, para generar procesos de enseñanza con utilización de las tecnologías de tal forma que permita enseñar una disciplina de mejor forma con el objetivo de aprender más.

La enseñanza de objetos matemáticos usando tecnologías digitales

En la medida que el estudiante se apropie de trabajo Matemático y las bondades que le ofrece el software de GeoGebra, su actividad matemática está enriquecida con la experimentación, la visualización de objetos matemáticos con propiedades determinadas por el saber acompañado de un razonamiento matemático. Pero para esto se requiere ir avanzando por niveles de compresión, un ejemplo de ello es que se aborda la temática de circunferencia con el siguiente problema. Dado un punto A poner 20 puntos que se encuentre a igual distancia de dicho punto. A partir de ahí el estudiante inicia su experimentación y con ello sus primeras conjeturas, seguidamente sin intervención directa del profesor el determina infinitos puntos con una propiedad; que el punto fijo se encuentra en el centro determinando un lugar geométrico que se llamará circunferencia. Posteriormente a través de preguntas guiadas determina los elementos de la circunferencia y con ayuda del software navega entre las diferentes representaciones gráfica, algebraica y geométrica y finalmente realiza la práctica de aplicación en diferentes contextos.

Un segundo problema es dado una recta y un punto exterior a ella construir 20 puntos que estén a la misma distancia de ellos. Para resolver el problema se requiere utilizar la mediatriz y la perpendicular, resultado de ello es el lugar geométrico que llamamos parábola. Luego se identifica las relaciones algebraicas de acuerdo con la posición que tiene el punto y la recta con sus diferentes representaciones gráficas. Por la interacción con GeoGebra se pueden visualizar la representación algebraica diferente. Luego se hace el proceso inverso, es decir dada una expresión algebraica de una parábola, hallar la gráfica encontrando el vértice, foco, directriz.

Método

Determinar el método utilizado es hacer un abordaje desde dos miradas, uno desde el trabajo realizado como CoP en pro del proyecto enseñanza aprendizaje de las matemáticas usando tecnologías digitales y otro como se aborda los objetos matemáticos en el aula de clase.

Desde la CoP Tecnologías se busca incentivar la investigación acción en el ciclo formación, aplicación y reflexión y para tal fin se busca enriquecer el discurso Matemático Escolar dME de profesor que orienta matemáticas mediante el encuentro semanal para compartir experiencias y plantear y replantear practicas pedagógicas. Parafraseando a Wenger (2001), las Comunidades de Práctica CoP son grupo de personas que comparten intereses comunes y profundizan su conocimiento mediante la cosificación de saberes. Para tal fin se plantean los interrogantes ¿cómo abordar los objetos matemáticos usando tecnologías digitales?, pero no se trata simplemente de utilizar las tecnologías en cuanto sino cumplir con el objetivo didáctico desde la Educación Matemática, por lo tanto, no se pretende solo manipular GeoGebra, seguir un procedimiento o experimentar clases para intentar reproducirlas, sino discutir el diseño de prácticas pedagógicas; interiorizar los elementos tecnológicos que permiten hacer posible ver un objeto matemático no estático sino con movimiento, pedagógicos que a la luz del saber matemático se tenga elementos comunicativos para expresar lo que la matemática requiere para ser enseñada y finalmente retomar las propiedades y conceptos propios de la matemática que hacen posible que el objeto matemático tenga razón de ser en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Producto de las reflexiones realizadas en la CoP se diseñan y aplican talleres. Para este caso los experimentados con los estudiantes del Colegio Técnico Vicente Azuero del grado décimo temática secciones cónicas. Cada uno de los talleres tiene inmerso una didáctica determinada de la siguiente forma: situación problema, experimentación, socialización, conceptualización y aplicación. A partir de una situación problema el estudiante interactúa con el medio que en este caso es GeoGebra, experimenta para dar solución a dicho problema, realiza conjeturas y saca sus conclusiones; en esta fase los estudiantes consignan sus apreciaciones para poder leerlas en grupo. Terminada esta fase experimentación se pone en común sus primeras conjeturaciones; mediante la socialización se determina sus aciertos y desaciertos; el profesor es mediador donde pone el juego su capacidad de hacer preguntas que permita que el estudiante valide los aciertos propios y del par, recicle sus desaciertos para que pueda verificar la validez del conocimiento matemático. Producto de la conjeturación de aciertos y desaciertos con la mediación del experto en guiar la discusión se realiza la institucionalización del saber donde el estudiante generaliza y conceptualiza el objeto matemático. Finalmente, el estudiante resuelve nuevas situaciones de aplicación donde requiere saber matemático de los objetos presentados.

Un tercer momento es el de la reflexión, el cual es consecuencia de los dos anteriores y genera un nuevo inicio. En este caso la experiencia pedagógica se encuentra en su segunda versión. Como se mencionó anteriormente el proyecto lleva una trayectoria alrededor de dos décadas y hace 2 años se pretendió plantear un proyecto para la media de tal forma que a partir de los resultados de las pruebas saber 9, se hiciera una intervención y revisar los resultados de las pruebas saber 11. En una primera versión se hizo un análisis general puesto que los resultados de las pruebas saber 9 eran grupales; uno de los resultados obtenidos es que los dos grupos intervenidos con el uso de tecnologías se evidenció mayor nivel de desarrollo de Pensamiento Matemático, en cuanto el avance en el aula de clase y en resultados cuantitativos el 45% de los estudiantes que clasificaron en la estrategia del MEN Ser Pilo Paga correspondieron a los 2 grupo intervenidos con el proyecto, a pesar de ser 8 grupos en total los ofrecidos por la institución.

Algunas conclusiones

Al retomar un poco de la historia durante un par de décadas se enseñó la matemática desde el trazo de las gráficas con hojas milimetradas y de forma dirigida se hacían dibujos de las secciones cónicas, no censura este método de representación porque permitía al estudiante hacer una idea y con ayuda de su imaginación podía verificar sus propiedades. Pero al abordar la enseñanza de los objetos matemáticos correspondientes a las secciones cónicas usando GeoGebra como medio de representación permite visualizar propiedades y razonar. La representación que se utilice responde a las voluntades del individuo, pero identificar propiedades matemáticas es ajeno a la voluntad, se requiere refinar el saber matemático y la tecnología tiene objetos diferentes a la voluntad del individuo que permite hacer y observar lo que pasa e identificar las propiedades producto de su experimentación e interacción. En respuesta el uso de GeoGebra en la enseñanza de las secciones cónicas ha permitido mejorar la actitud de los estudiantes frente al aprendizaje de las matemáticas, puesto que se les hace más dinámica y le permite al estudiante corroborar sus conjeturas y dado el caso buscar otra alternativa de solución.

Al abordar la temática le permite al estudiante experimentar, observar comportamientos, conjeturar, volver a experimentar y concluir con validez. Resolver el problema planteado con ayuda de GeoGebra le permite comprobar la valides de sus razonamientos, por lo que se afirma que el uso de tecnologías digitales permite no solo al estudiante sino al profesor determinar propiedades y conceptos matemáticos con mayor claridad y precisión. Al poder visualizar la construcción (conserva las propiedades a la prueba del arrastre) de modelación de la situación problema planteada permite la conjeturación de ideas matemáticas y su comprobación, la organización y análisis de datos con mayor experticia, la precisión de cálculos analiza comportamientos, esto conlleva a relacionar los tres conceptos geométrico, gráfico y algebraico; en consecuencia, se puede decir que se visualiza, razona y modela con mayor facilidad.

En particular se puede decir que los objetos matemáticos no cambian, pero al introducir el movimiento en las representaciones permitir cambiar la forma de preguntar para abordarlos y con ello se mejora el discurso del profesor que orienta el área de matemáticas lo que conlleva a buscar mejores elementos que hagan posible no solo enseñar matemáticas sino lograr mayor impacto en el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes del siglo XXI.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. Cuaderno de Investigación y Formación en Educación Matemática. Volumen (8) 1333. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6948/6634

Chevallard, Y. (1991). *La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Gardner, M. (2011). Matemáticas para todos (y códigos ultrasecretos). Barcelona, España: RBA Libros, S.A.

Hoyles, D. (2015). Comprometerse con las matemáticas en la era digital. Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática. Volumen (1) 36-51 Recuperado de http://cresur.edu.mx/cresur2018/memorias/2.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas.* Recuperado https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2000). *Formación de Docentes sobre el uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas.* Recuperado https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article81040.html

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Recuperado https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Moreno, L. (2014*). Educación Matemática: del signo al píxel*. Universidad Industrial de Santander.

Montiel, G. (2010). *Hacia el rediseño del discurso: Formación docente en línea centrada en la resignificación de la Matemática Escolar.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Volumen (13)69-84 Recuperado de http://www.clame.org.mx/relime/201004d.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Servilla, España: editorial Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Lozano, R. (2011). *De las TIC a las TAC: tecnologías del aprendizaje y el conocimiento.* Anuario ThinkEPI. Volumen (5) 45-47 Recuperado de https://recyt.fecyt.es/index.php/ThinkEPI/article/view/30465/16032

Prensky, M. (2010*). Nativos e Inmigrantes digítales*. Distribuidora SEK, S.A.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y exclusión. Una visión Socioepistemología. Revista Bolema. Volumen (28) 1525-1544. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/bolema/v28n50/1980-4415-bolema-28-50-1525.pdf

Wenger, E. (1998*). Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Villareal, G. (2010). Caracterización del uso de la tecnología, por profesores y alumnos, en resolución de problemas abiertos en matemática (tesis doctoral). Universidad de Barcelona.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

A resolução de problemas por estimativas

Malcus Cassiano **Kuhn**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense – IFSul Câmpus Lajeado
Brasil
malcuskuhn@ifsul.edu.br

Resumo

O físico italiano Enrico de Fermi[1] se tornou conhecido pela resolução de problemas por estimativas. Estimar significa fazer um cálculo aproximado acerca de uma quantia ou uma grandeza. O propósito desta pesquisa qualitativa é estudar problemas que envolvam algum processo de estimativa para chegar à resposta, também chamados de problemas de Fermi. A fundamentação teórica está ancorada no estudo da metodologia de resolução de problemas e da teoria da aprendizagem significativa. A utilização dos problemas de Fermi, que permeiam as ciências, com um enfoque no raciocínio lógico-matemático, permite a interdisciplinaridade em sala de aula e torna a aprendizagem mais significativa.

Palavras chave: resolução de problemas, estimativas, problemas de Fermi, interdisciplinaridade, aprendizagem significativa.

Introdução

Em muitas situações do cotidiano, precisa-se saber apenas uma estimativa de certa quantidade, não se faz necessário obter o valor exato. Consideremos uma situação hipotética em que se noticiou a quantidade de vinte mil pessoas presentes em uma manifestação em praça pública. Como é possível avaliar quantas pessoas estão presentes em determinado evento? Em situações como essa, não importa se na manifestação havia 15478 pessoas ou 24567 pessoas, espera-se apenas um valor aproximado.

Como se estima a área desmatada de uma determinada floresta? A quantidade de explosivos necessária para demolir determinado edifício? Ou até mesmo a quantidade de água armazenada em uma represa? Essas e diversas perguntas recebem respostas aproximadas que podem ser obtidas por meio de estimativas. Além desse tipo de estimativa, envolvendo grandezas

[1] Enrico Fermi viveu entre 1901 e 1954. Suas contribuições mais importantes foram no campo da física nuclear e da teoria quântica: recebeu o Prêmio Nobel de Física por sua contribuição ao desenvolvimento da energia nuclear. No entanto, mal recebeu o prêmio, Fermi foi forçado a deixar a Itália e se converteu ativamente como pesquisador na Universidade de Chicago. Atualmente, um dos laboratórios de física mais importantes do mundo leva o nome de Fermi Lab (próximo a Chicago). Fermi foi membro da equipe que ficou conhecida com o nome de Projeto Manhattan, e que desenvolveu a bomba atômica em Los Álamos, Novo México.

2904

que aparecem naturalmente no nosso dia a dia, nas Ciências Exatas, a estimativa proporciona um grande auxílio na resolução de problemas.

Há diversas maneiras de se realizar uma estimativa. Uma maneira de estimar o resultado de um problema com números grandes é pensar em problemas similares, com números pequenos. A multiplicação é bastante utilizada para respostas estimadas, dividindo-se o todo em grupos iguais e multiplicando-se a quantidade de elementos pela quantidade de grupos. A comparação é também muito utilizada na estimativa de alturas, comprimentos, áreas e volumes, ou seja, conhecendo-se a altura, o comprimento, a área ou o volume de um objeto se pode estimar, com certa precisão, o comprimento, a altura, a área ou o volume de outros objetos comparando-os com o conhecido. Conhecendo-se a capacidade total de um recipiente parcialmente cheio, pode-se usar a noção de metade e de um quarto para estimar o quanto sobra.

Batista & Mozolevski (2010, p. 44) consideram que "uma das tarefas do cientista é de aprimorar sua capacidade de fazer estimativas *a priori* da ordem de magnitude de determinada grandeza, antes de fazer um exame detalhado, seja do ponto de vista teórico ou experimental". Afirmam ainda que Enrico Fermi, um físico italiano que viveu entre 1901 e 1954, introduziu uma prática muito comum entre os físicos de hoje que é a "física do verso de um envelope", isto é, antes de resolver um problema que envolva cálculos complicados é necessário obter estimativas cujos cálculos possam ser realizados no verso de um envelope (Batista & Mozolevski, 2010).

As estimativas estão presentes em cálculos de nosso cotidiano em contextos diversos. Em pesquisas diversas, as estimativas são apontadas como importantes em sala de aula para que o estudante possa perceber que a Matemática não é feita somente por resultados "exatos", mas também de elaboração de argumentos, aproximações, raciocínios e justificativas (Fontanive, Klein & Rodrigues, 2012).

De acordo com Smoothey (1998, p.7), "uma estimativa é um palpite inteligente. Não é um número qualquer escolhido a esmo, mas um número baseado na observação e no raciocínio". Expressões como "cerca de", "aproximadamente", "mais do que", "quase", entre outras, indicam que se trata de uma estimativa. Estimar significa opinar a respeito de algo de que não se tem certeza, fazer um cálculo aproximado acerca de uma quantia ou uma grandeza, como por exemplo, estimar a idade do Universo, estimar a quantidade de pessoas em um show, o número de manifestantes em um evento, o número de átomos que compõem um corpo e o número de bactérias em uma determinada amostra.

Os cientistas, às vezes, fazem essas estimativas antes de optar por métodos mais sofisticados para obter respostas específicas. A capacidade para estimar o tamanho ou a probabilidade de diversas quantidades é útil nas ciências, bem como em muitos outros empreendimentos, para fornecer uma verificação aproximada de cálculos mais exatos; fornecer uma verificação dos resultados da investigação; obter estimativas das quantidades quando outros recursos não estão disponíveis; obter estimativas das quantidades que são difíceis de medir com precisão; obter estimativas de quantidades para as quais não exista uma previsão teórica firme.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) brasileiros também destacam a importância das estimativas:

> A estimativa constrói-se juntamente com o sentido numérico e com o significado das operações e muito auxilia no desenvolvimento da capacidade de tomar decisões. O trabalho com estimativas supõe a sistematização de estratégias. Seu desenvolvimento e

2905

> aperfeiçoamento dependem de um trabalho continuo de aplicações, construções, interpretações, análises, justificativas e verificações a partir de resultados exatos. Desde as primeiras experiências com quantidades e medidas, as estimativas devem estar presentes em diversas estratégias que levem os alunos a perceber o significado de um valor aproximado, decidir quando e conveniente usá-lo e que aproximação e pertinente a uma determinada situação, como, identificar unidades de medida adequadas às grandezas (Brasil, 1997, p. 77).

No Brasil são poucos trabalhos envolvendo estimativas e/ou problemas de Fermi. Um exemplo é o trabalho de Livi (1990) que em seu artigo trata da representação de pequenos e grandes números como potências de base 10 e defende que professores e estudantes devem ser encorajados a fazer estimativas numéricas de qualquer espécie. Sugere para isso, a resolução de problemas de estimativas e fornece diversos exemplos de problemas que podem ser trabalhados com estudantes, os quais se classificam como problemas de Fermi.

Sriraman & Knott (2009) argumentam que os problemas de Fermi que estão diretamente ligados ao cotidiano são mais significativos e oferecem mais possibilidades pedagógicas que exercícios intelectuais. Defendem o uso dos problemas de Fermi que envolvem estimativas do consumo de água doce, o consumo de combustível, o desperdício de alimentos, a quantidade de lixo produzido, entre outros, que além de desenvolverem o raciocínio, levam a uma consciência crítica sobre o uso consciente dos recursos naturais.

Autores de livros didáticos também propõem problemas de Fermi em suas obras. Torres (2013) em sua obra "Física: ciência e tecnologia", voltada para o Ensino Médio, propõe um tópico intitulado "Ordem de grandeza – estimativa de valores" o qual inicia com três problemas que se classificam como problemas de Fermi: "Você tem ideia de quantas gotas de água são necessárias para encher uma piscina olímpica? Quantos grãos estão contidos em um pacote de 5 kg de arroz? Quantos passos um atleta dará durante uma maratona?" (Torres, 2013, p. 46). Os autores discorrem sobre a importância de resolver problemas desse tipo, porém, não propõe estratégias para resolvê-los e não propõe que os estudantes os resolvam, apenas os utilizam como motivação para tratar de ordem de grandeza.

Diante do exposto, compartilha-se uma investigação inicial sobre problemas que envolvam estimativas ou problemas de Fermi[2], fundamentando-se no estudo da metodologia de resolução de problemas e da teoria da aprendizagem significativa.

Fundamentação teórica

Os sistemas nacionais de avaliação da educação básica brasileira, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), junto com os sistemas de avaliação internacional, como o Programme for International Student Assessment (Pisa), cada vez mais têm exigido dos estudantes a competência para resolução de problemas, e não somente em Matemática.

O Enem, por exemplo, traz em sua matriz de referência, no eixo cognitivo, comum a todas as áreas de conhecimento, que o estudante deve enfrentar situações-problema, ou seja,

---

[2] Trata-se de um recorte do Projeto de Pesquisa "Problemas de Fermi – fazendo estimativas com poucas informações", apoiado pela Pró-reitoria de Pesquisa, Inovação e Pós-graduação do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense – IFSul, por meio do Edital PROPESP Nº 05/2018, sob registro PE0506180818/059.

2906

selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representadas de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

Conforme Schoenfeld (1985), a resolução de problemas possibilita aos estudantes mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão em seu alcance. Assim, os estudantes terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos, bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

Dante (2000) assinala o trabalho com resolução de problemas como a principal forma de se alcançar os objetivos em sala de aula, entre eles, o de fazer o estudante pensar produtivamente. Acrescenta que, por meio da resolução de problemas, é possível desenvolver, no estudante, a iniciativa, o espírito explorador, a criatividade, a independência e a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu cotidiano. O autor destaca ainda:

> Mais do que nunca precisamos de pessoas ativas e participantes, que deverão tomar decisões rápidas e, tanto quanto possível, precisas. Assim, é necessário formar cidadãos matematicamente alfabetizados, que saibam como resolver, de modo inteligente, seus problemas de comércio, economia, administração, engenharia, medicina, previsão do tempo e outros da vida diária (Dante, 2000, p. 15).

Dante (2000) também sugere que devemos propor aos estudantes várias estratégias de resolução de problemas, mostrando-lhes que não existe uma única estratégia, ideal e infalível. Cada problema exige uma determinada estratégia. A resolução de problemas não deve se constituir em experiências repetitivas, através da aplicação dos mesmos problemas (com outros números) resolvidos pelas mesmas estratégias. O interessante é resolver diferentes problemas com uma mesma estratégia e aplicar diferentes estratégias para resolver um mesmo problema. Isso facilitará a ação futura dos estudantes diante de um problema novo. Dessa forma, em sala de aula o professor pode trabalhar com as tentativas e os erros dos estudantes, observando o caminho usado para chegar à solução do problema. Essa observação servirá para compreender o raciocínio dos estudantes e preparar as discussões em torno da resolução desses problemas, com o intuito de conceber processos de resolução diferentes dos já aprendidos.

Segundo Polya (1978), o professor que deseja desenvolver nos estudantes o espírito solucionador e a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes oportunidades de imitar e praticar. Para resolver e encaminhar a solução de um problema, segundo Polya (1978), quatro etapas principais podem ser empregadas: compreensão do problema, construção de uma estratégia de resolução, execução de uma estratégia escolhida e revisão da solução.

Quando o professor adota a metodologia da resolução de problemas, seu papel será de incentivador, facilitador, mediador das ideias apresentadas pelos estudantes, de modo que estas sejam produtivas, levando os estudantes a pensarem e a gerarem seus próprios conhecimentos. Deve criar um ambiente de cooperação, busca, exploração e descoberta, deixando claro que o mais importante é o processo e não o tempo gasto para resolvê-lo ou a resposta final. O professor deve propor situações-problema que possibilitem a produção do conhecimento, onde o estudante deve participar ativamente compartilhando resultados, analisando reflexões e respostas, enfim aprendendo a aprender.

2907

Conforme Moreira (1999) a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) ou Teoria da Assimilação de Ausubel é uma teoria cognitivista e construtivista que propõe explicar o processo de aprendizagem que ocorre na mente humana, através da organização e integração do material de aprendizagem na estrutura cognitiva. A TAS considera necessárias duas condições para que a aprendizagem ocorra de forma significativa: a disposição do estudante para aprender e o material didático desenvolvido deve ser potencialmente significativo para o estudante, além de ser construído a partir dos seus conhecimentos prévios. "Novas ideias e informações podem ser aprendidas e retidas, na medida em que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem às novas ideias e conceitos" (Moreira, 1999, p. 152).

Para Moreira & Masini (2001), o aprendizado abrange conceitos novos e também modificações na estrutura cognitiva representada pela interação entre conhecimentos assimilados e os conhecimentos pré-existentes dos estudantes. A esse conhecimento prévio, que sofre interação com o novo conhecimento aprendido, Ausubel dá o nome de "subsunçor". A aprendizagem ocorre quando uma nova ideia ou conceito ancora-se em conhecimentos preexistentes na estrutura cognitiva do indivíduo. Ausubel considera o armazenamento de informações na mente humana como sendo hierarquicamente organizado, resultado de experiências sensoriais do indivíduo. Pensando-se em estimativas numéricas, por exemplo, se o estudante sabe qual o consumo mensal de água de sua família, este conceito serviria de subsunçor para fazer uma estimativa numérica de consumo de água de seu município, de seu estado ou país.

O processo de ancoragem é o aspecto fundamental da teoria de Ausubel. De acordo com Moreira & Masini (2001), novas ideias se relacionam com o que o estudante já sabe e com isso surgem novos significados. No entanto, para que isso ocorra, a relação dessas novas ideias com o conhecimento prévio do estudante deve se dar de modo "substantivo" e "não arbitrário", ou seja, um novo conhecimento não será alocado de modo arbitrário na estrutura cognitiva, ele estará interligado com o conhecimento âncora, como se fosse uma continuação e, além disso, que o estudante consiga resolver problemas com pequenas variações comparando-se com aqueles que lhe foi apresentado, ou ainda, o estudante que aprende um conteúdo de modo substantivo, será capaz de compreender casos cujas estruturas sejam diferentes da forma como foi assimilado, sendo capaz de aplicar o conhecimento para outras situações.

Ausubel considera também que, para que a aprendizagem seja significativa, o material a ser aprendido deve ser "potencialmente significativo". Ou seja, tenha significado para o estudante e que o estudante "manifeste disposição favorável" para aprender de maneira significativa. Para que isto ocorra, recomenda o uso de organizadores prévios que sirvam de âncora para a nova aprendizagem e levem ao desenvolvimento de conceitos subsunçores que facilitem a aprendizagem subsequente (Moreira & Masini, 2001). Os organizadores prévios são materiais apresentados aos estudantes antes do próprio conteúdo a ser aprendido, como por exemplo, um experimento, uma imagem, um texto introdutório ou questionamentos, buscando instigar o estudante a compreender o conteúdo. É uma estratégia que se pode utilizar para manipular a estrutura cognitiva criando um elo entre o conhecimento prévio e o conteúdo a ser aprendido, ou seja, busca mostrar ao estudante a relação entre o conteúdo e o seu conhecimento prévio. Ausubel recomenda o uso de problemas para se procurar evidências da aprendizagem significativa, porém alerta que resolver problemas envolve habilidades que muitas vezes estão além dos conteúdos trabalhados.

2908

Dessa forma, a aprendizagem significativa se torna importante, pois o conhecimento é retido por mais tempo pelo estudante, a aprendizagem é facilitada e, além disso, o conceito que foi aprendido e esquecido pode ser relembrado com mais facilidade. Nesse contexto, o papel do professor seria identificar o que o estudante já sabe organizar no conteúdo a ser aprendido de modo que trabalhe primeiramente os conceitos mais inclusivos, com maior subsunção com o conhecimento prévio do estudante, e utilizar recursos adequados, como a metodologia de resolução de problemas, para que a aprendizagem seja significativa.

Problemas de Fermi

Em 1945, de acordo com Navarro (2013), Fermi conseguiu estimar de maneira muito precisa, a força da bomba atômica que foi detonada no Teste Trinity. A bomba, desenvolvida por Fermi e outros cientistas do Projeto Manhattan, foi estimada em 10 kt (quiloton), um valor bem próximo do real que hoje se tem conhecimento, que é 20 kt. Para tal estimativa, Fermi rasgou uma folha de papel em pedaços pequenos. Quando sentiu o primeiro tremor da onda de choque se espalhando pelo ar, ele lançou os fragmentos de papel acima de sua cabeça. Esses papeis se agitaram para baixo e para longe da nuvem em forma de cogumelo que estava se formando no horizonte, caindo cerca de dois metros atrás dele. Depois de breve cálculo mental, Fermi concluiu que a energia liberada pela bomba seria o equivalente a um milhão de toneladas de TNT.

Na década de 1950, Fermi estimou a quantidade de afinadores de piano que havia em Chicago (Navarro, 2013). A solução para este problema envolveu a tomada de alguns pressupostos, e a multiplicação dos fatores. Primeiro, considerou-se algumas hipóteses:

a) Existem aproximadamente nove milhões de pessoas morando em Chicago.

b) Existem, em média, duas pessoas morando em cada casa em Chicago.

c) Uma casa em vinte possui um piano que é afinado regularmente.

d) Pianos que são afinados regularmente, em média, são afinados uma vez ao ano.

e) Um afinador de piano leva, em média, duas horas para afinar um piano, contando a viagem.

f) Cada afinador de piano trabalha oito horas por dia, cinco dias na semana e cinquenta semanas ao ano.

Logo, para calcular o número de afinadores, primeiro, descobriu-se quantas afinações de piano são feitas por ano:

$$\frac{9000000\text{ de pessoas}}{2\text{ pessoas/casa}} \cdot \frac{1}{20}\text{casas que possuem piano} \cdot 1\text{ afinação do piano/ano} = 225000\text{ afinações/ano.}$$

Em seguida, calcularam-se quantas afinações de piano cada afinador de piano faz em um ano:

$$\frac{50\text{ semanas/ano} \cdot 5\text{ dias/semana} \cdot 8\text{ horas/dia}}{2\text{ horas/afinação}} = 1000\text{ afinações de piano/afinador de piano.}$$

Dividindo-se, o primeiro resultado pelo segundo, chegou-se ao número de afinadores de piano na cidade de Chicago:

2909

$$\frac{225000 \text{ pianos afinados/ano}}{1000 \text{ afinações de piano/afinador de piano}} = 225 \text{ afinadores de piano em Chicago.}$$

Na época, o número verdadeiro de afinadores de piano era cerca 290 afinadores. Isso mostra que o número estimado era compatível com o real. Portanto, Fermi considerou alguns dados sobre a população de Chicago e estimou a quantidade de afinadores de piano, valendo-se das operações de multiplicação e divisão.

Inspirados nos problemas de Fermi, estudantes da Educação Básica podem ser desafiados com as seguintes perguntas:

- Vocês seriam capazes de dizer com que velocidade cresce nosso fio de cabelo? E nossas unhas? Que estratégias vocês utilizariam para fazer tal constatação?

- Quais as consequências físicas, geográficas e sociais se os anos bissextos nunca existissem?

Nesse sentido, essa investigação segue com a utilização da metodologia de resolução de problemas no estudo, criação e resolução de problemas de Fermi, bem como, no desenvolvimento de uma sequência didática com problemas de estimativas para estudantes do Ensino Médio.

Considerações finais

Esta comunicação se propôs a refletir sobre a resolução de problemas que envolvam algum processo de estimativa para chegar à resposta, também chamados de problemas de Fermi. Apresentaram-se dois problemas clássicos de Fermi, um sobre a bomba atômica e o outro relacionado ao número de afinadores de piano em Chicago. Obviamente que ninguém espera que diante de um problema de Fermi o estudante responda com um número exato. Mas também, estimar não é chutar. Tão ou mais importante do que determinar a resposta, é avaliar o processo ou estratégia utilizada de estabelecer uma estimativa para a resposta. Tão melhor será sua estimativa, quanto mais ricas forem suas considerações de variáveis e dados utilizados para o problema em questão.

Fundamentando-se no estudo da metodologia de resolução de problemas e da teoria da aprendizagem significativa, aponta-se que a utilização dos problemas de Fermi, que permeiam as ciências, com um enfoque no raciocínio lógico-matemático, permite a interdisciplinaridade em sala de aula e uma aprendizagem mais significativa.

A resolução de problemas por estimativas possibilita aos estudantes desenvolverem diferentes estratégias para resolver problemas com êxito e que os mesmos reflitam sobre sua resolução, não se preocupando apenas em chegar a uma solução. Outro aspecto positivo da utilização de problemas de Fermi é a possibilidade de uma abordagem experimental para a maioria dos problemas e o envolvimento de conteúdos de diferentes áreas do conhecimento, contribuindo para a superação do paradigma de ensino fragmentado. Além disso, a resolução de problemas por estimativas pode ser feita em grupos de trabalho, pois à medida que tecem hipóteses para resolvê-los, os estudantes interagem para chegar a um consenso de como resolver o problema. Dessa forma, pelo caráter desafiador e interdisciplinar dos problemas de Fermi, desperta-se o interesse dos estudantes para resolução de problemas e se possibilita uma aprendizagem mais significativa.

2910

Referências

Batista, E. & Mozolevski, I. (2010). *Métodos de Física-Matemática.* Santa Catarina: Universidade Federal de Santa Catarina – Consórcio ReDiSul. Recuperado de: <http://mtm.ufsc.br/~ebatista/Eliezer_Batista_arquivos/Metodos_de_Fisica-Matematica_-_28-jul 2010.pdf>.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1997). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Dante, L. R. (2000). *Didática da resolução de problemas de Matemática.* São Paulo: Ática.

Fontanive, N. S.; Klein, R. & Rodrigues, S. S. (2012). Boas práticas docentes no ensino da Matemática. *Estudos & Pesquisas Educacionais,* 3, 195-277.

Livi, R. P. (1990). Como estimar dimensões e grandezas físicas: pequenos e grandes números. *Caderno Catarinense de Ensino de Física.* Recuperado de: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/9798/9034>.

Moreira, M. A. (1999). *Teorias de aprendizagem.* São Paulo: EPU.

Moreira, M. A. & Masini, E. F. S. (2001). *Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel.* São Paulo: Centauro.

Navarro, J. M. G. (2013). Problemas de Fermi. Suposición, estimación y aproximación. *Épsilon - Revista de Educación Matemática,* 30(2), 57-68.

Polya, G. (1978). *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Nova York: Academic Press.

Smoothey, M. (1998). *Atividades e jogos com estimativas.* Tradução: Quadros, S. Revisão técnica: D'Ambrósio, U. São Paulo: Scipione.

Sriraman, B. & Knott, L. (2009). The Mathematics of Estimation: Possibilities for Interdisciplinary Pedagogy and Social Consciousness. *Interchange: A Quarterly Review of Education,* 40(2), 205-223. Recuperado de: <http://www.math.umt.edu/sriraman/Interchange_Sriraman_2009_2.pdf>.

Torres, C. M. A. (2013). *Física: ciência e tecnologia.* (3era ed.) São Paulo: Moderna.

2911