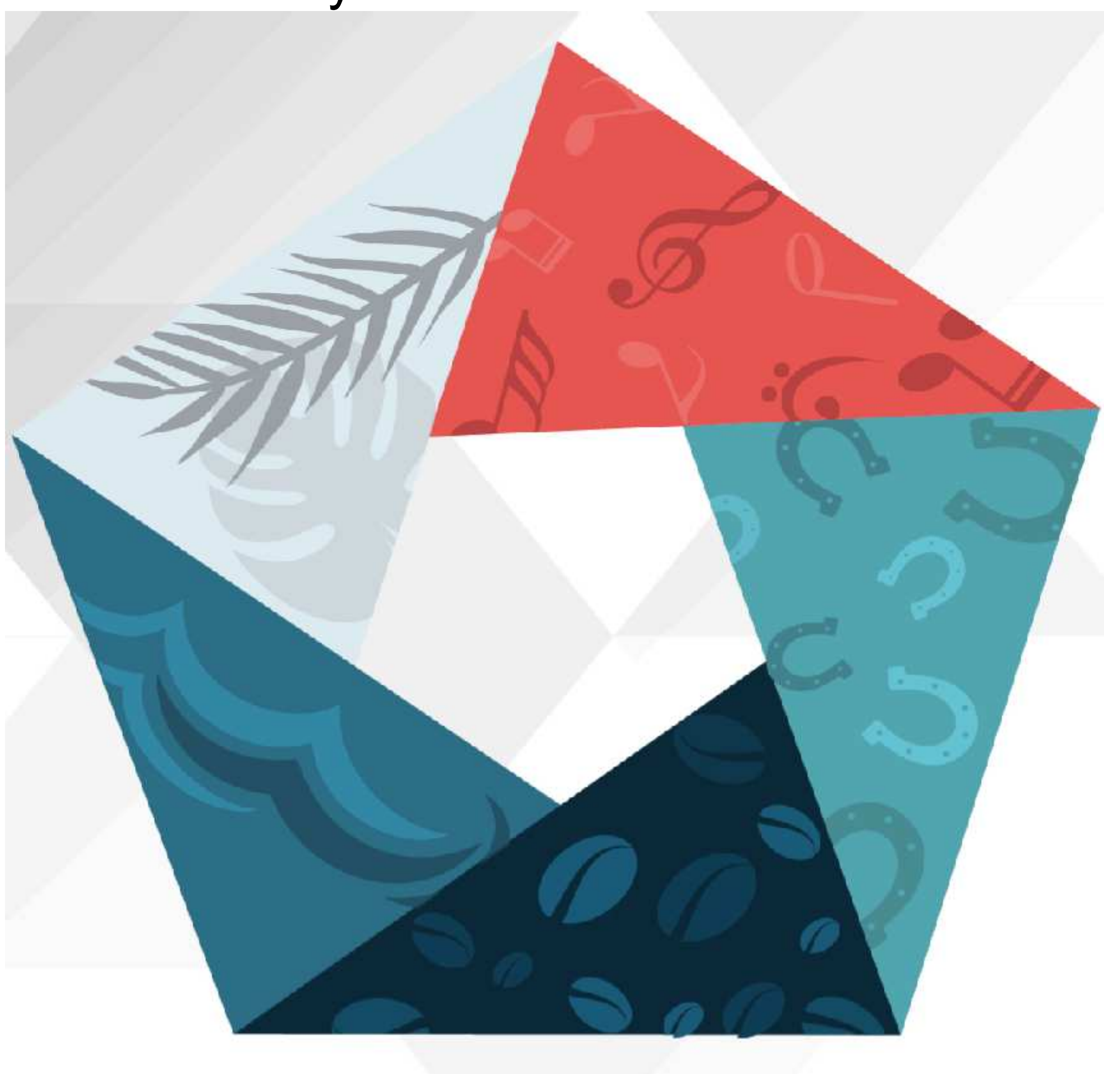
Educación Matemática en las Américas 2019

Volumen 15: Historia y epistemología de las Matemáticas y de la Educación Matemática



CIAEM
IACME
desde - since 1961

Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO
www.ciaem-iacme.org

Educación Matemática en las Américas 2019
Volumen 1: Formación inicial de profesores
Editado por Yuri Morales-López y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN: 978-9945-09-413-8

El *Comité Interamericano de Educación Matemática* (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la *International Commission on Mathematical Instruction*. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera al CIAEM y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no fue previamente publicado en otro medio; y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Se respetaron los metadatos (nombres, apellidos, títulos, entre otros) que los autores proporcionaron cuando postularon su trabajo en la plataforma del evento.

Para citar este libro:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2020). *Educación Matemática en las Américas 2019.* Editores: Yuri Morales-López y Ángel Ruíz. República Dominicana: Autor.

ISBN: 978-9945-09-413-8
9 789945 094138

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LAS AMÉRICAS 2019

Presentación

Para el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es un placer y un honor ofrecer a la comunidad educativa este Volumen de *Educación Matemática en las Américas 2019*, en donde se pueden encontrar muy importantes insumos para comprender el momento histórico que atraviesa la Educación Matemática desde la perspectiva de las Américas.

La *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática* se realizó entre el 5 y 10 de mayo del 2019 en Medellín, Colombia. La Universidad de Medellín y la Universidad de Antioquia fueron las organizaciones académicas anfitrionas del evento. Las sesiones fueron realizadas en el campus de la Universidad de Medellín. Participaron 700 personas provenientes de 25 países de cuatro continentes: Europa, Asia, África y las Américas. Participaron centenares de docentes en servicio de la ciudad de Medellín y del Departamento de Antioquia.

Alrededor de 400 trabajos fueron presentados: conferencias plenarias y paralelas, mesas plenarias, minicursos, sesiones temáticas, comunicaciones cortas, talleres y posters. Unas 50 personalidades del mayor nivel en la comunidad internacional de Educación Matemática expusieron sobre sus investigaciones. Entre ellas Jill Adler (Suráfrica), Ferdinando Arzarello (Italia), Salvador Llinares (España), Yoshinori Shimizu (Japón), Michael Shaughnessy (EUA), Luis Rico (España), Fidel Oteiza (Chile), Carlos Vasco (Colombia), Carlos Sánchez (Cuba), Luis Carlos Arboleda (Colombia), Edwin Chaves (Costa Rica), Nelly León (Venezuela), Vilma Mesa (EUA). Aunque físicamente no pudo estar presente envió su contribución en forma de video Ubiratan D'Ambrosio (Brasil). Los trabajos dentro de la plataforma del congreso se pueden consultar en https://ciaem-redumate.org/conferencia/index.php/xvciaem/xv/schedConf/presentations

La revisión científica de todos los trabajos fue responsabilidad de un Comité Asesor Internacional, un Comité Internacional del Programa y el Comité Ejecutivo del CIAEM. Se contó con la coordinación central de Directores de tema y la Dirección de la plataforma científica realizada por el académico Yuri Morales con el apoyo de la profesora Johanna Mena (ambos de Costa Rica) y con la participación voluntaria de muchísimos revisores científicos de muchos países.

Este volumen incluye trabajos que fueron efectivamente presentados en ese congreso.

Expreso mi agradecimiento a todos los miembros de los comités científicos, directores de tema, revisores científicos, y directores de la plataforma científica. También deseo agradecer por su apoyo en el registro de este libro a Sarah González y a la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra en República Dominicana. Agradezco mucho a todos los autores que decidieron compartir su trabajo en las instancias que abrimos

mediante la XV CIAEM. También a Yuri Morales quien técnica y formalmente generó este volumen para su registro.

En las diversas dimensiones del congreso, de cuya realización este libro es producto, quiero aprovechar esta ocasión para reconocer la valiosa contribución de las Universidades de Medellín y de Antioquia y al Comité Organizador Local de la XV CIAEM, y, además, agradecer al equipo humano del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* que ha sido durante muchos años un sostén crucial en la organización de todos los eventos del CIAEM y de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*; y en particular de este libro que hoy sacamos a la luz pública.

Este volumen es una parte del libro de *Memorias* completo (son 15 volúmenes que se pueden ver/descargar). Se ha respetado aquí la paginación del libro completo. Y las referencias *deben hacerse con base en el libro y su paginación*. No es necesario indicar el volumen específico donde se cita pues esta es una versión funcional al servicio de una mejor visualización o descarga de este valioso material.

Invitamos a los lectores de este libro a promoverlo en sus diversas actividades de docencia, investigación, extensión y divulgación en todos sus países.

Con afecto

Ángel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática
Presentación del 17 de julio de 2024
Costa Rica

Índice

Basado en la información suministrada durante la postulación de cada trabajo

10. Historia y epistemología de las Matemáticas y de la Educación Matemática

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Curiosidades matemáticas no Pequeno Luterano na década de 1940

Malcus Cassiano **Kuhn**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense – IFSul Câmpus Lajeado
Brasil
malcuskuhn@ifsul.edu.br

Resumo

Esta comunicação discute curiosidades matemáticas presentes no periódico O Pequeno Luterano, editado pela Igreja Evangélica Luterana do Brasil, no período de 1939 a 1966. Baseando-se na pesquisa histórica, investigaram-se as edições do periódico, cuja finalidade era, de forma lúdica, inserir as crianças na prática religiosa luterana através de histórias, informações e curiosidades de cunho moral e religioso e de formação geral. Nas edições da década de 1940, os editores propunham desafios matemáticos para desenvolver o raciocínio lógico e valorizam as habilidades concretas e abstratas do aprendizado matemático através do cálculo escrito e mental, em forma de atividades lúdicas.

Palavras chave: História da Educação Matemática, curiosidades matemáticas, Pequeno Luterano, raciocínio lógico, cálculo escrito e mental, atividades lúdicas.

Introdução

Esta comunicação tem por objetivo discutir as curiosidades matemáticas presentes no periódico O Pequeno Luterano durante a década de 1940. Trata-se de um recorte de tese, complementado por pesquisas realizadas durante o estágio Pós-doutoral em um Programa de Pós-Graduação.

O periódico O Pequeno Luterano foi produzido pela Igreja Evangélica Luterana do Brasil – IELB – para o público infantil e publicado pela Casa Publicadora Concórdia[1], de Porto Alegre. Teve sua 1ª edição publicada em agosto/setembro de 1939. Com publicações mensais, bimestrais ou quadrimestrais, o periódico foi usado de forma complementar, por professores paroquiais, no ensino das diferentes áreas do conhecimento nas escolas luteranas do século passado, com 217 edições, totalizando 2061 páginas. O periódico foi editado até junho de 1966 e, posteriormente, passou a circular como encarte de uma página no periódico Mensageiro Luterano.

Como a temática investigada se insere na História da Educação Matemática no Rio Grande do Sul, busca-se na pesquisa histórica o suporte para discussão. Conforme Prost (2008), os fatos

[1] Fundada em 1923, atuava na edição de livros e de periódicos relacionados à literatura religiosa e escolar da IELB. Foi a primeira e a única editora da IELB, existente até os dias atuais. Antes de sua fundação, os livros e os periódicos eram impressos pela Concordia Publishing House, nos Estados Unidos, e enviados ao Brasil.

históricos são constituídos a partir de traços deixados no presente pelo passado, como o periódico O Pequeno Luterano. Assim, o trabalho do historiador consiste em efetuar um trabalho sobre esses traços para construir os fatos. Desse modo, um fato não é outra coisa que o resultado de uma elaboração, de um raciocínio, a partir das marcas do passado. Prost (2008) considera o trajeto da produção histórica como sendo um interesse de pesquisa, com formulação de questões históricas legítimas, trabalho com os documentos (edições do periódico O Pequeno Luterano) e a construção de um discurso que seja aceito pela comunidade.

Certeau (1982) define o fazer história, no sentido de pensar a história como uma produção. Para o autor, a prática histórica é prática científica enquanto a mesma inclui a construção de objetos de pesquisa, o uso de uma operação específica de trabalho e um processo de validação dos resultados obtidos, por uma comunidade.

Para investigar o periódico O Pequeno Luterano se realizaram visitas ao Instituto Histórico da IELB, localizado em Porto Alegre, onde se encontram todas as edições do mesmo[2]. Ao pesquisar minuciosamente cada edição, compilaram-se os excertos relacionados à Matemática para posterior análise das curiosidades matemáticas à luz do referencial teórico-metodológico.

O periódico O Pequeno Luterano

O Pequeno Luterano foi produzido pela IELB para as escolas frequentadas por crianças luteranas, visando à formação do futuro fiel adulto (Weiduschadt, 2012). Teve sua primeira edição publicada em agosto/setembro de 1939. Editado em português, devido ao processo de nacionalização do ensino, em curso no país, O Pequeno Luterano substituiu o periódico Evangelisch-Lutherisches Kinderblatt für Südamerika (Jornal para crianças da Igreja Evangélica Luterana da América do Sul), editado pela IELB no período de dezembro de 1930 a junho/julho de 1939, em alemão gótico.

A redação do periódico O Pequeno Luterano foi realizada por professores paroquiais e/ou pastores que se dispunham a redigir ou adaptar os textos de forma voluntária, ou seja, não eram remunerados para esta função. Os redatores mantinham contato com os leitores, liam as cartas e organizavam o conteúdo do periódico, mas não tinham dedicação exclusiva como redatores. Em geral, acumulavam a função com o exercício do magistério e do pastorado. "Histórias bíblicas eram resumidas e, para cada uma delas, o redator apresentava uma mensagem, alertando o pequeno leitor, se ele estaria seguindo as indicações e exortações da igreja" (Weiduschadt, 2012, p. 65). A edição e a publicação do periódico ficavam por conta da Casa Publicadora Concórdia. As cartas enviadas pelas crianças e por representantes de escolas paroquiais eram encaminhadas para a Casa Publicadora Concórdia, localizada em Porto Alegre, e repassadas aos redatores.

As atividades lúdicas do periódico envolviam aspectos religiosos na sua centralidade, ou seja, mesmo em charadas, adivinhações e palavras cruzadas, o direcionamento religioso era valorizado. O público infantil valorizava e mantinha a assinatura do periódico, basicamente, devido aos temas de entretenimento, ilustrativos e publicitários. Weiduschadt (2012, p. 93), acrescenta que "o aprendizado das crianças seria através de uma leitura controlada e doutrinária do periódico. A preocupação lúdica era um meio, o fim deveria estar na absorção da doutrina e na conduta de práticas relacionadas à igreja". Dessa forma, o propósito do periódico em circular

[2] No Instituto Histórico da IELB, não foram encontradas edições do periódico ou referências sobre sua publicação no período de setembro a dezembro de 1953. Em sua tese, Weiduschadt (2012), também destaca a não localização de edições neste mesmo período.

no meio escolar, apresentando conhecimento geral e ideológico, buscava interlocução entre os leitores através das escolas: primeiro as paroquiais e, após a década de 1960, as escolas dominicais. Weiduschadt (2012) complementa:

> Os preceitos 'conduta das crianças' e 'aplicação da história', eram voltados a orientar a projeção de futuro na formação dos leitores. Ao dirigir-se ao leitor, desejava-se formar o aluno e futuro cidadão/fiel imbricados no mesmo projeto, envolvendo escola, pátria e igreja (Weiduschadt, 2012, p. 258).

Dessa forma, O Pequeno Luterano tinha como principal objetivo inserir as crianças na prática religiosa luterana por meio de textos, histórias, informações e curiosidades de cunho moral e religioso e de formação geral. Os editores usaram a estratégia de elaborar um periódico lúdico, com linguagem e imagens voltadas ao público infantil. A estratégia dos editores de receber cartas dos seus leitores, especialmente de alunos das escolas paroquiais, com depoimentos e respostas das charadas e desafios propostos no periódico, além dos relatos dos professores com informações sobre as escolas paroquiais e o número de alunos, contribuiu para circulação e inserção do periódico O Pequeno Luterano entre o público infantil. Isto foi reforçado pelo uso do periódico pelos professores paroquiais, de forma complementar, no ensino de diferentes conteúdos.

O Pequeno Luterano foi editado 217 vezes em seus quase 27 anos de circulação, sendo 123 edições mensais, 90 bimestrais e quatro edições quadrimestrais. O periódico geralmente era mensal, mas muitas edições circulavam bimestralmente, especialmente, nos meses de janeiro/fevereiro, período das férias escolares. Em momentos de crise, o periódico apresentava menor circulação. Na década de 1940, por exemplo, especificamente em 1945-1946, em todo ano são publicadas quatro e cinco edições, respectivamente, demonstrando as dificuldades encontradas no período de nacionalização do ensino. Houve um aumento no número de páginas do periódico a cada década de sua circulação – 504 páginas na década de 1940, 781 páginas na década de 1950 e 776 páginas na década de 1960 (últimos sete anos de edição) – totalizando 2061 páginas em toda sua história. A última edição do periódico foi publicada em junho de 1966. Posteriormente, passou a circular como encarte de uma página no periódico Mensageiro Luterano.

Curiosidades matemáticas no Pequeno Luterano durante a década de 1940

O tema de maior participação no periódico envolvia religião e doutrina, ficando evidente o objetivo a atingir. Os conteúdos de disciplinas seculares que apareceram no impresso complementavam a educação escolar. "Estas disciplinas foram consideradas de conhecimento geral, porém, com certa conotação religiosa, ou seja, mesmo os conteúdos de conhecimento geral, quase sempre vinham acompanhados de elementos religiosos" (Weiduschadt, 2012, p. 259).

Com relação à Matemática presente nesse periódico, observou-se que os editores apostaram numa estratégia envolvendo uma Matemática mais lúdica, diferente das propostas de ensino apresentadas nas aritméticas da série Ordem e Progresso e da série Concórdia (Kuhn, 2015), editadas pela IELB para suas escolas paroquiais, na primeira metade do século XX. Weiduschadt (2012) acrescenta que:

> De forma lúdica, o conhecimento matemático se dava através de charadas, de brincadeiras e de descoberta de enigmas no intuito de desenvolver o raciocínio lógico. As habilidades concretas e abstratas do aprendizado matemático eram valorizadas, em grande parte, através

> do cálculo mental em forma de brincadeiras lúdicas e prazerosas. (...) Havia relação dos cálculos com as histórias bíblicas (...). Entre as histórias de conhecimento geral, as curiosidades envolvendo a Matemática são apresentadas de inúmeras maneiras. Algumas ensinam cálculos de jogos de descoberta, outras contam a biografia de matemáticos, o modo como lidaram com o conteúdo (Weiduschadt, 2012, p. 151-152).

Com o propósito de ilustrar e ampliar a discussão, nos quadros 1 a 5 são apresentados fragmentos publicados no periódico O Pequeno Luterano, nos seus primeiros dez anos de circulação (década de 1940), e que envolvem curiosidades matemáticas. No Quadro 1, descreve-se o desafio de um quadrado com números:

Quadro 1

Quadrado de aritmética

Colocar os números 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 9, no quadrado que a soma tanto verticalmente como horizontalmente dos algarismos seja 20.

Solução do quadrado de aritmética:

8	4	7	1	20
6	3	5	6	20
4	4	3	9	20
2	9	5	4	20
20	20	20	20	

Fonte 1: O Pequeno Luterano, agosto/setembro 1939, p. 7.
Fonte 2: O Pequeno Luterano, outubro/novembro 1939, p. 16.

O desafio de aritmética, observado no Quadro 1, apresenta 16 números que devem ser distribuídos nos espaços do quadrado de forma que se obtenha a soma 20, na horizontal e na vertical. A solução deste desafio é apresentada na edição posterior do periódico, conforme se pode observar no Quadro 1. Ao apresentar a solução do quadrado de aritmética, o editor do periódico escreve: “Certamente devido ao curto tempo não vos foi possível mandar-me algumas soluções. Talvez noutra ocasião” (O Pequeno Luterano, outubro/novembro 1939, p. 16). Esta afirmação reforça a estratégia dos editores de receber cartas dos seus leitores, contribuindo para circulação e inserção do periódico entre o público infantil.

Ressalta-se que este quadrado de aritmética desenvolve habilidades para o cálculo escrito e mental, além de apresentar algumas semelhanças com o quadrado mágico. Um quadrado numérico é considerado mágico se ele possui n^2 números inteiros positivos e diferentes entre si, tais que, a soma dos n números que figuram nas linhas, colunas, e diagonais, é sempre a mesma. Essa soma comum é chamada constante mágica. Embora, o quadrado descrito no Quadro 1 tenha a mesma soma nas linhas horizontais e verticais, ele não é um quadrado mágico, pois os números 3, 4, 5, 6 e 9 estão repetidos e a soma dos números de cada diagonal não é 20. Complementa-se que “um dos primeiros registros de um quadrado mágico apareceu na China. Conta a lenda que o quadrado foi trazido aos homens por uma tartaruga, através do Rio Lo, há mais de 4000 anos” (Carvalho, 1997, p. 58).

Os editores do periódico O Pequeno Luterano se valiam da estratégia de propor uma Matemática mais lúdica para o seu público leitor, através de charadas e enigmas, conforme se pode observar no Quadro 2:

Quadro 2

Charadas e enigmas

	Respostas
1) Poderás, em 10 segundos dar 3 números que dão o mesmo total, somando ou multiplicando? 2) Se um madeireiro cobrar Cr$ 3,00 para cortar em dois um tronco de árvore, quanto deve cobrar para cortá-lo em quatro? 3) Como se faz a seguinte subtração: O minuendo é 20, o subtraendo 88 e o resto 22? 4) Como podem restar 10, tirando 1 de 9? 5) Uma sala tem 4 cantos; em cada canto há um gato; cada gato vê 3 gatos. Quantos gatos estão na sala? 6) O avozinho deu uma festa para a qual convidou 20 crianças. O bom do velhinho queria dar, no fim da festa, um canário a cada uma, mas foram-lhe dizer que muitos tinham fugido. Mandou o avô um criado buscar outros para substituir os fugitivos, dizendo-lhe: "Traze uma vez e meia tantos quantos ficaram na gaiola, e mais dois canários e meio." Quando o criado voltou com os canários havia de novo vinte. Quantos haviam fugido? 7) Como é que de quatro posso tirar 1 e deixar cinco?	1) Os números são 1, 2 e 3, pois 1 + 2 + 3 = 6 e 1 x 2 x 3 = 6. 2) Cr$ 9,00, pois para cortar um tronco em quatro pedaços são necessários três cortes. 3) XX minuendo 88 subtraendo 22 esto. 4) Do número romano IX (9), tira-se I (1) da frente, fica X (10). 5) 4 gatos. 6) 13 canários. 7) Do número romano IV (4), tira-se I (1) da frente, fica V (5).

Fonte: O Pequeno Luterano, 1941-1949.

Os editores do periódico O Pequeno Luterano também apresentam charadas, enigmas e desafios relacionados com outras áreas do conhecimento. O foco das charadas e dos enigmas apresentados no Quadro 2 é desenvolver o pensamento lógico das crianças e explorar conhecimentos matemáticos envolvendo as quatro operações elementares com números naturais e a numeração romana. A charada 6 do Quadro 2 também pode ser resolvida por meio de uma equação do 1º grau com uma incógnita. Chamando de c o número de canários que permaneceram na gaiola, pode-se escrever e resolver a seguinte equação:

$$c + 1\frac{1}{2}c + 2\frac{1}{2} = 20$$

$$c + \frac{3}{2}c + \frac{5}{2} = 20 \,/\cdot\, 2$$

$$2c + 3c + 5 = 40$$

$$5c + 5 - 5 = 40 - 5$$

$$5c = 35 \,/\cdot\, \frac{1}{5}$$

$$c = 7$$

Portanto, 7 canários ficaram na gaiola e 13 canários fugiram, totalizando os 20 canários.

O conhecimento matemático ainda é explorado através de curiosidades numéricas envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, conforme se observa no Quadro 3:

Quadro 3

Curiosidades numéricas

1) 123456789 x 9 + 10 = 1111111111 123456789 x 18 + 20 = 2222222222 123456789 x 27 + 30 = 3333333333 123456789 x 36 + 40 = 4444444444 123456789 x 45 + 50 = 5555555555 123456789 x 54 + 60 = 6666666666 123456789 x 63 + 70 = 7777777777 123456789 x 72 + 80 = 8888888888 123456789 x 81 + 90 = 9999999999 A tabela ainda fica mais interessante, quando se sabe que os fatores são divisíveis por 9; e que a soma de cada soma-produto (os algarismos dele) menos a parcela, tem como resto 0. Por exemplo: a soma de 3333333333 menos 30 igual a zero.	2) 987654321 x 9 = 8888888889 987654321 x 18 = 17777777778 987654321 x 27 = 26666666667 987654321 x 36 = 35555555556 987654321 x 45 = 44444444445 987654321 x 54 = 53333333334 987654321 x 63 = 62222222223 987654321 x 72 = 71111111112 987654321 x 81 = 80000000001

Fonte 1: O Pequeno Luterano, setembro 1943, p. 36.
Fonte 2: O Pequeno Luterano, janeiro 1944, p. 4.

Os excertos apresentados no Quadro 3 trazem curiosidades numéricas. A primeira envolve o produto do número 123456789 pelos múltiplos de 9, compreendidos entre 9 e 81, somados, respectivamente, aos múltiplos de 10, compreendidos entre 10 e 90, resultando sempre em número com dez algarismos repetidos. O editor complementa esta curiosidade com observações sobre a mesma, instigando os leitores a fazer as verificações. A segunda curiosidade numérica traz os produtos da multiplicação do número 987654321 pelos múltiplos de 9, compreendidos ente 9 e 81. Observa-se que o primeiro e o último algarismos de cada produto, são, respectivamente, o algarismo da dezena e da unidade de cada múltiplo de 9 multiplicado, e os demais algarismos são iguais e uma unidade a menos que o algarismo das unidades do referido múltiplo de 9.

No Quadro 4, apresentam-se outras curiosidades numéricas encontradas no periódico O Pequeno Luterano:

Quadro 4

Outras curiosidades numéricas

1) Escreve-se um número de três algarismos, por exemplo, 365 repetido, assim que dê o número 365365 de seis algarismos, que, como qualquer outro exemplo prova, pode ser dividido por 7, 11 e 13.	
2) 1 x 9 + 2 = 11 12 x 9 + 3 = 111 123 x 9 + 4 = 1111 1234 x 9 + 5 = 11111 12345 x 9 + 6 = 111111 123456 x 9 + 7 = 1111111 1234567 x 9 + 8 = 11111111 12345678 x 9 + 9 = 111111111	3) 1 x 8 + 1 = 9 12 x 8 + 2 = 98 123 x 8 + 3 = 987 1234 x 8 + 4 = 9876 12345 x 8 + 5 = 98765 123456 x 8 + 6 = 987654 1234567 x 8 + 7 = 9876543 12345678 x 8 + 8 = 98765432 123456789 x 8 + 9 = 987654321

Fonte: O Pequeno Luterano, novembro/dezembro 1945, p. 48.

O Quadro 4 traz mais três curiosidades númericas encontradas no periódico. A primeira, parte de números com três algarismos, repete-os igualmente, resultando em um número com seis algarismos e divisível por 7, 11 e 13. Esta explicação é exemplificada com o número 365. A mesma é válida para qualquer outro número com três algarismos, pois 7 x 11 x 13 = 1001 e multiplicando-se um número de três algarismos por 1001, obtém-se um número com seis algarismos, havendo a repetição dos algarismos do número inicial, na mesma ordem. No caso do exemplo apresentado pelo editor do periódico, 365 x 1001 = 365365. A afirmação também é valida para números com três algarismos, sendo dois ou os três repetidos. Por exemplo:

a) 202 x 1001 = 202202 que é divisível por 7, 11 e 13.

b) 999 x 1001 = 999999 que também é divisível por 7, 11 e 13.

A segunda curiosidade apresenta oito resultados interessantes, a partir de multiplicações por 9 e somas de 2 a 9, sendo que os resultados são números com todos os algarismos iguais a 1. Observa-se que a quantidade de algarismos 1 coincide com a parcela que é adicionada a cada produto, sendo que o aumento gradativo do número de algarismos do resultado está relacionado ao aumento de um algarismo, em ordem crescente (2 a 8), no primeiro fator das multiplicações.

Na terceira curiosidade numérica se observam nove multiplicações por 8 e somas crescentes de 1 a 9, sendo que a quantidade de algarismos do resultado de cada cálculo é igual a parcela que está sendo adicionada ao produto. Verifica-se também que há o aumento de um algarismo, em ordem crescente (2 a 9), no primeiro fator das multiplicações e o aumento de um algarismo, em ordem decrescente (8 a 1), nos resultados finais.

Com essas curiosidades numéricas os editores buscavam despertar o interesse e a curiosidade das crianças, contribuindo para a circulação do periódico pelas comunidades em que as escolas paroquiais luteranas gaúchas estavam inseridas.

No Quadro 5, apresenta-se uma habilidade Matemática que pode ser realizada com um livro, segundo o editor do periódico:

Quadro 5

Uma habilidade que se faz com um livro

Convida-se uma pessoa a tirar da estante qualquer livro que deseje; deve abri-lo ao acaso e escolher uma palavra nas primeiras nove linhas da página que tiver a sua frente; toma em seguida nota do número da página e multiplica-o por 10; ao produto junta 25 e o número da linha em que está a palavra que escolheu.

O resultado assim obtido volta a ser multiplicado por 10, juntando-se ao produto o número de ordem da palavra na linha.

Entrega-nos então o livro e um pedaço de papel onde está escrito o número obtido, mas sem as operações donde resultou, e depois de alguns momentos de reflexão conseguiremos abrir o livro e encontrar a palavra escolhida.

Para obtermos este resultado, basta apenas subtrair mentalmente 250 do número que vinha escrito no papel. O último algarismo é o número da palavra, o penúltimo o da linha, e os restantes o da página.

Suponhamos, por exemplo, que a palavra escolhida era a 5ª e estava na 9ª linha da página 100. Neste caso a operação era a seguinte:

100 x 10 = 1000
1000 + 25 + 9 = 1034
1034 x 10 = 10340
10340 + 5 = 10345

Era este número, 10345, que nos era dado, e 5 é o que basta realmente para encontrar o número da página, da linha e da palavra, pois que, subtraindo 250 de 10345 vem:

10345 – 250 = 10095

O número 10095, dividido exatamente como se explicou, dá-nos 100, 9, 5, sendo estas as três parcelas necessárias para descobrir a palavra.

Fonte: O Pequeno Luterano, maio 1944, p. 19.

No excerto, apresentado no Quadro 5, o editor explora uma habilidade Matemática com um livro, a qual exige atenção dos desafiados para fazerem corretamente os cálculos que envolvem as operações de adição, subtração e multiplicação e, então, poderem encontrar a palavra escolhida inicalmente no livro. A curiosidade explora a habilidade de resolução de uma expressão numérica. Observa-se que, de forma lúdica, são desenvolvidas habilidades para o cálculo mental e escrito com os envolvidos na brincadeira.

Considerações finais

O Pequeno Luterano teve 217 edições (mensais/bimestrais/quadrimestrais), no período de agosto/setembro de 1939 a junho de 1966, quando passou a circular como encarte de uma página no periódico Mensageiro Luterano. O principal objetivo dos editores do periódico era, de forma lúdica, inserir as crianças na prática religiosa luterana por meio de textos, histórias, informações e curiosidades de cunho moral e religioso e de formação geral. Dessa forma, foi usado pelos professores paroquiais, complementarmente, no ensino das diferentes áreas do conhecimento nas escolas paroquiais luteranas gaúchas do século passado.

Fundamentando-se no referencial teórico-metodológico da pesquisa histórica, investigaram-se curiosidades matemáticas presentes no periódico O Pequeno Luterano, editado para o público infantil, pela IELB, durante quase 27 anos. O conteúdo lúdico e outros similares foram usados pelos editores como estratégia do periódico para atrair a atenção das crianças. Contudo, ao mesmo tempo, em que tais publicações envolviam curiosidades e desafios, continham elementos doutrinários, principalmente de aprendizado da Bíblia e da vida de Lutero.

Constatou-se que os editores propunham desafios matemáticos para desenvolver o raciocínio lógico das crianças e valorizavam as habilidades concretas e abstratas do aprendizado matemático através do cálculo escrito e mental, em forma de atividades lúdicas e prazerosas. Curiosidades e desafios matemáticos semelhantes aos localizados no periódico O Pequeno Luterano, também estão presentes nos livros de Matemática atuais e em publicações, como as de Malba Tahan. Com este estudo histórico sobre a Matemática no periódico O Pequeno Luterano, pretende-se contribuir para a História da Educação Matemática.

Referências

Carvalho, M. C. C. S. (1997). *Padrões numéricos e sequências.* São Paulo: Moderna.

Certeau, M. (1982). *A escrita da História.* Rio de Janeiro: Forense Universitária.

Kuhn, M. C. (2015). *O ensino da matemática nas escolas evangélicas luteranas do Rio Grande do Sul durante a primeira metade do século XX.* Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

O Pequeno Luterano. (1939-1966). Porto Alegre: Casa Publicadora Concórdia.

Prost, A. (2008). *Doze lições sobre a História.* Belo Horizonte: Autêntica.

Weiduschadt, P. (2012). *A revista "O Pequeno Luterano" e a formação educativa religiosa luterana no contexto pomerano em Pelotas – RS (1931-1966).* Tese de Doutorado em Educação, Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo.

Una problematización del concepto de topología en su dimensión epistemológica

Gabriela **Márquez-García**
Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
gabriela.marquez@cinvestav.mx
Gisela **Montiel** Espinosa
Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

Se presenta parte de una problematización del concepto de topología, realizada desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Escolar. Esta investigación se centra en la búsqueda de ideas germinales, usos y significados del concepto de topología relacionada con la noción de *relación de proximidad*, en su dimensión epistemológica; se enfoca en el estudio de la tesis doctoral del matemático francés Maurice Fréchet, puesto que varios historiadores señalan que a partir de los trabajos de éste matemático, se comienza a desarrollar - de alguna manera - la Topología General, particularmente las ideas alrededor del concepto de espacio topológico y con esto el de topología. Se presentan así algunas consideraciones metodológicas y teóricas, así como un ejemplo del análisis de la actividad matemática en la obra seleccionada, algunos resultados y como conclusión una pequeña reflexión alrededor de la idea de relación de proximidad.

Palabras clave: Socioepistemología, Topología, relación de proximidad.

Introducción

En este escrito se presenta el reporte de una investigación que se realizó para obtener el grado de maestría. Esta investigación reporta un estudio epistemológico en la historia del concepto de topología, desde el enfoque de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Para este estudio se eligió la tesis doctoral del matemático francés Maurice Fréchet. La idea fue buscar y reconocer ideas germinales (razón de ser) y usos del concepto de topología, además entender el papel de la noción de relación de proximidad en este momento histórico.

Planteamiento del problema

La Topología General es una rama de las matemáticas cualitativas cuyo objeto de estudio es la continuidad (Pérez, 2015) además, ésta como la convergencia son propiedades de naturaleza topológica. A esto le sumamos la idea del estudio de la forma de los espacios. Por su parte, Hinrichsen y Fernández (1977) comentan que los conceptos de convergencia y continuidad son *independientes* de la métrica, lo que propicia su generalización a espacios topológicos.

Se considera la posibilidad de que los conceptos de continuidad y convergencia son *independientes* de la métrica, porque estos conceptos se definen en términos de una noción de *proximidad*, que no necesariamente significa distancia (Pérez, 2015). Es decir, no es necesario tener una métrica para hablar de *proximidad*, entonces, nos cuestionamos: ¿dónde y cómo hablamos de *proximidad* en Matemáticas?

En respuesta a esto, encontramos que, la Topología de Conjuntos se ocupa del estudio de los espacios abstractos (Freixenet, 1994), es decir, conjuntos en los que la naturaleza de sus elementos es homogénea, pero cualquiera (Arboleda, 2012), entre los que se establecen ciertas *relaciones de proximidad*. Entonces, vislumbramos que la *relación de proximidad* permite *la generalización* de los conceptos de convergencia y continuidad a los espacios topológicos.

De la definición de Topología que presentan (Dugundji, 1966; Kelley, 1955) en sus libros Topology y General Topology, respectivamente, se observa lo siguiente:

- Los autores consideran un conjunto "X cualquiera" haciendo referencia a un conjunto cuyos elementos son de *naturaleza cualquiera* (Arboleda, 2012; Pérez, 2015).
- Introducen un conjunto de conjuntos, al que se le conoce como topología "la familia $\tau \subset 2^{x}$ es topología", notamos que en las definiciones se reconoce a τ como colección o familia, aclarando que sus elementos son subconjuntos del conjunto X.
- Enuncian las condiciones para que τ sea una topología.

    1. $\emptyset \in \tau, X \in \tau$.
    2. Si $U, V \in \tau, entonces\ U \cap V \in \tau$
    3. Si $W \subset \tau, entonces \cup W \in \tau$ (Márquez-García, 2018)

De lo anterior, se reconoce que la *relación de proximidad* es una noción de mucha importancia para significar el concepto de topología, sin embargo, no se reconoce una relación explicita entre estos. Con base en esto se plantean las preguntas de investigación.

- ¿Qué papel juega la relación de proximidad en la constitución de la topología como saber matemático?
- ¿A qué nos referimos con naturaleza topológica?

Consideraciones teóricas y metodológicas

Dado el planteamiento anterior, se reconoce, de alguna manera, una ausencia de significados del concepto de topología en tanto relación de proximidad. La teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa asume que el conocimiento matemático tiene un origen y una función social, con esto acepta la existencia de prácticas que acompañan la construcción del saber matemático.

En la investigación que se reporta se intenta entender *qué es la naturaleza topológica*, y el papel de la *relación de proximidad* en la constitución del concepto de topología como saber matemático, en otras palabras, queremos entender *los usos* de la *relación de proximidad* en la Matemática (en cierto periodo) antes de configurarse como la definición formal de topología.

Para lograrlo, Cantoral (2013) propone hacer una *problematización* (historización y dialectización[1]) del saber matemático desde una mirada amplia, es decir, descentrándose del objeto. En este caso, asumimos una descentración del concepto de topología al reconocer la *relación de proximidad* como una noción asociada a la *actividad humana* que significa el concepto.

Se realiza un estudio del contexto socio-cultural de la obra a estudiar, basado en la propuesta metodológica de (Espinoza, 2009), que propone estudiar la obra desde tres miradas distintas (una producción con historia, un objeto de difusión, parte de una expresión intelectual más global) con el objetivo de entender cómo el autor entendía su obra, o bien, cómo se entendía esa obra en tanto producción de conocimiento matemático en cierta época. Esto permite hacer un cambio de mirada del conocimiento matemático de la época.

El análisis de la actividad matemática en tanto los usos del conocimiento consiste en 2 fases, en la fase 1 se describe el teorema que se va a analizar, se presenta la demostración propuesta por Fréchet y en la fase 2 se hace el análisis de los usos, para lo que se responden los cuestionamientos analíticos: *¿qué hace?, ¿cómo hace?, ¿para qué hace?, y ¿por qué hace?*, que permiten ver y reconocer los usos y significados del concepto de topología.

Descripción general de la obra

La obra elegida es la tesis doctoral del matemático francés Maurice Fréchet: *Sur Quelques Points Du Calcul Fonctionnel* (Fréchet, 1906).

Fréchet organiza su tesis en dos partes, en la primera parte desarrolla la parte teórica enfocada en la introducción de la noción de límite en conjunto abstractos, y en la segunda parte trabaja sobre aplicaciones de la teoría que construye en la primera parte. En la primera parte de la obra, observamos que, en el capítulo 1 se ocupa de estudiar la noción de límite en un conjunto de elementos dónde define la convergencia de los elementos al que llama clase (L); en el capítulo 2 se ocupa de estudiar la convergencia en un conjunto de elementos por medio de una vecindad, al que llama clase (V).

El uso de las clases (L) y (V) y su definición son de fundamental importancia para esta investigación. Dado que nuestro interés está en estudiar los usos del concepto de topología en tanto relación de proximidad, en este caso la estructura de las clases mencionadas, nos interesa estudiar la actividad matemática de Fréchet que muestra en la primera parte.

Contexto sociocultural de la obra: *Sur Quelques Points Du Calcul Fonctionnel*

A continuación, se presenta, a modo de ejemplo, parte del contexto sociocultural de la obra analizada.

Una producción con historia. Maurice Fréchet (1878-1973) matemático francés, nació el 10 de septiembre de 1878 en Maligny, al sureste de París. Fue el cuarto de seis hijos, sus padres

[1] *Historizar y dialectizar* son mecanismos que propone la TSME para entender la naturaleza social del conocimiento matemático.

Jacques y Zoé Fréchet fueron protestantes. (Taylor, 1982)

Fréchet es conocido principalmente por sus contribuciones a los fundamentos conceptuales de la Topología de Conjuntos, la Teoría de los Espacios Abstractos y el Análisis funcional (Arboleda, 2002). Además, Taylor (1982) considera la obra matemática de Fréchet como pionera en el desarrollo de una rama de la Matemática llamada Análisis Funcional que, luego se extendió al Análisis General; desde la consideración de Taylor es la rama de las Matemáticas que estudia las funciones que mapean un conjunto abstracto en otro conjunto abstracto, ambos conjuntos dotados de una *estructura topológica* (p. 233).

Parte de una expresión intelectual más global. En esta parte se hace una descripción detallada de la obra. Que consiste en un estudio de la producción matemática de Fréchet y su vinculación con trabajos previos, así como el origen de algunos términos que usa Fréchet, entre otras cosas. De acuerdo con (Taylor, 1982) el objeto de estudio de la tesis de Fréchet, se fue configurando en 5 artículos publicados entre los años 1904 y 1905, estos son:, Généralisation d'un théorème de Weierstrass, Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles, Sur les fonctions d'une infinité de variables, La notion d'écart dans le Calcul fonctionnel y Les ensembles de courbes continues. En tales artículos se puede observar la evolución de las ideas alrededor de la búsqueda de la generalización en la que estaba interesado Fréchet.

Con esto, se reconoce el contexto de significación (Espinoza, 2009) de esta obra de Fréchet como el contexto en el que nace una parte de la Topología que se caracteriza por la búsqueda de respuestas a cuestionamientos puramente matemáticos, relacionados específicamente con la generalización de propiedades al espacio de operaciones funcionales; lo que implica un estudio de propiedades *topológicas* de ciertos conjuntos y no solo de los elementos de los conjuntos. Además, por la naturaleza misma de la obra (tesis doctoral de matemáticas) asume el estudio al rededor objetos matemáticos institucionalizados. Respondernos *qué hace, cómo hace, para qué hace y por qué hace*, sobre estos objetos, le da el carácter social a nuestro enfoque y no el de las aplicaciones. (Márquez-García, 2018)

Con la mirada que proporciona este estudio del contexto sociocultural de la obra, se analiza la actividad matemática, con el objetivo de entender el papel de la relación de proximidad en el proceso de generalización; puesto que éste se reconoce como una característica fundamental de la obra y que se asume, comienza a caracterizar la naturaleza social del concepto de topología. (Márquez-García, 2018)

En la búsqueda de ideas germinales

En esta sección se presenta un ejemplo del análisis de la actividad matemática de Fréchet, en relación a los usos del modo de composición que él define, pero que en la investigación que se reporta se le ha llamado "*métrica*" considerando que lo que resulta de la producción de Fréchet, en relación con el modo de composición es la primera definición axiomática de la métrica (Freixenet, 1994), sin embargo, en el análisis que se presenta se buscan los usos e ideas que le dan sentido a este modo de composición y que están relacionadas con alguna idea de proximidad.

El siguiente ejemplo es tomado de (Márquez-García, 2018, p. 117-122)

Teorema 20[2]

Unidad de análisis

Teorema. - Consideremos una operación U definida en un conjunto E formado por elementos de una clase (V). La condición necesaria y suficiente para que U sea una operación continua en E es que, si A es un elemento cualquiera de E y de E', podemos corresponder a todo número $\varepsilon > 0$ un número η_A tal que si desigualdad $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$ para todo elemento de B en E.

Demostración.

1° En efecto, de acuerdo con la definición que hemos dado de la continuidad de U, si U es continua en A y si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiende a A, $U(A_n)$ tiende a $U(A)$. Sea ahora ε un numero positivo cualquiera; si no podemos determinar un numero η_A tal que la desigualdad $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$, podriamos determinar, cualquiera que sea n, un elemento B_n de E tal que

$$(A, B_n) < \frac{1}{n}, \qquad |U(A) - U(B_n)| \geq \varepsilon.$$

Cuando n crece indefinidamente, la primera desigualdad muestra que B_n tiende a B y, de acuerdo con la hipótesis, $U(B_n)$ tiende a $U(A)$, lo que lleva a una contradicción con la segunda desigualdad.

2° Si, para cualquier ε, podemos determinar η_A tal que $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$, vemos que podemos tomar p suficientemente grande para que la sucesión $B_1, B_2, \dots$ tienda a B, la desigualdad $n > p$, implica $|U(A) - U(B_n)| < \varepsilon$. Es suficiente tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$

Esto demuestra que $U(B_n)$ tiende a $U(A)$.

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Es el primer teorema que enuncia en la parte de la continuidad definida por medio de la vecindad, considera que es una segunda definición de operación continua. En palabras de Fréchet, esta definición es menos general que la primera definición (Def. 12) ver Apéndice A, porque solo tiene sentido cuando se puede definir la vecindad.

Descripción del enunciado

Condición necesaria y suficiente para que una operación sea continua.

2. Observaciones y complementos

[2] Esta enumeración corresponde al listado de teoremas y proposiciones del primer capítulo de la tesis de Fréchet en la tesis de maestría: Una problematización del concepto de topología en los inicios de la teoría de conjuntos abstractos de Fréchet. Apéndice A de este documento.

Demostración con complementos

1° En efecto, de acuerdo con la definición que hemos dado de la continuidad de U, (Def. 12)[3], si U es continua en A y si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiende a A, $U(A_n)$ tiende a $U(A)$. Sea ahora ε un numero positivo cualquiera; supone que no existe el número η_A, si no podemos determinar un numero η_A tal que la desigualdad $(A,B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$, podríamos determinar, cualquiera que sea n, un elemento B_n de E tal que

$$(A,B_n) < \frac{1}{n}, \qquad |U(A) - U(B_n)| \geq \varepsilon.$$

Cuando n crece indefinidamente, puesto que la vecindad (A,B) tiende a cero con $\frac{1}{n}$ y $(A,B_n) < \frac{1}{n}$, entonces por la segunda condición de la (Def. 24) la primera desigualdad muestra que B_n tiende a B (en lugar de B es A) y, de acuerdo con la hipótesis se supone que la operación es continua y por la (Def. 12), $U(B_n)$ tiende a $U(A)$, lo que lleva a una contradicción con la segunda desigualdad.

2° Si, para cualquier ε, podemos determinar η_A tal que $(A,B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$, vemos que podemos tomar p suficientemente grande para que la sucesión $B_1, B_2, \dots$ tienda a B, entonces por la segunda condición de la (Def. 24) se tiene que (A,B_n) tiende a cero, es decir, la sucesión B_n tiende a A, luego por hipótesis la desigualdad $n > p$, implica $|U(A) - U(B_n)| < \varepsilon$. Es suficiente tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A,B_n) < \eta_A$

Esto demuestra que $U(B_n)$ tiende a $U(A)$.

Observaciones

En esta demostración podemos observar que la expresión *tiende a* le da el mismo significado que a la expresión $V(A) = \lim_{n=\infty} V(A_n)$, Como lo observamos en esta parte de la demostración donde hace referencia a la definición de operación continua: *"En efecto, de acuerdo con la definición que hemos dado de la continuidad de U, (Def. 12), si U es continua en A y si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiende a A, $U(A_n)$ tiende a $U(A)$."*

3. Definiciones y conceptos que utiliza

Definiciones

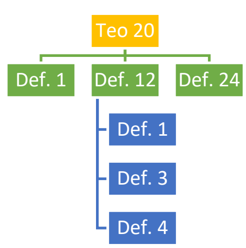


Fig. 1 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

[3] En la demostración que se presenta en español, el texto en azul es parte de la actividad matemática de la autora para entender la actividad matemática de Fréchet. Se marca en otro color para diferenciarla de la actividad matemática de Fréchet.

Fase 2: Analítica[4]

1. Usos de la métrica. Los usos de la métrica que se reconocen son[5]:

- "Es suficiente tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$ esto demuestra que $U(B_n)$ tiende a $U(A)$." Usa la vecindad y demanda de la métrica para decir que un número tiende a otro.

2. Practicas. Preguntas de análisis:

Tabla 1

Respuesta a los cuestionamientos analíticos en tanto usos de la "métrica"

¿Qué hace?	¿Cómo hace?	¿Por qué hace?	¿Para qué hace?
	Demostración		
Garantiza la convergencia de una sucesión de elementos de una clase (V)	Es suficiente tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$	Porque demuestra que la sucesión $B_1, B_2, \ldots$ tiende a A, y por la (Obs. 17)	Para demostrar que $U(B_n)$ tiende a $U(A)$ y así demostrar que cumple la propiedad supuesta.

Discusión y resultados

Del análisis realizado se reconoce como acción: *garantizar la convergencia de una sucesión de elementos de una clase (V)*; de tal manera que representa los términos de una sucesión mientras que el otro representa el elemento límite, entendemos que dicha relación refiere a la idea *algo tiende a algo*.

Entonces, cuando se da la vecindad de dos elementos, se determina una relación de cercanía entre los elementos de la sucesión, es así como se entiende la vecindad, es decir, como una relación de proximidad entre elementos de un conjunto cuyos elementos son de naturaleza cualquiera. En la primera parte de la tesis de Fréchet, esta relación de proximidad siempre es numérica.

Se reconoce como una actividad: *tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$*; puesto que esta tiene una intencionalidad previa, proporcionada por la definición de una clase (V) que se nutre de las respuestas a los cuestionamientos por qué hace y para qué hace.

Las preguntas de investigación se responden brevemente desde el análisis realizado a la primera parte de la tesis doctoral de Maurice Fréchet y en ningún momento se propone una generalización de estos resultados, ya que para hacerlo es necesario robustecer esta problematización desde todas las dimensiones del saber.

- ¿Qué papel juega la relación de proximidad en la constitución de la topología como saber matemático?

Desde esta investigación se puede entender que una relación de proximidad entre los elementos de un conjunto es una propiedad de referencia (estructura/modo de composición) entre los

[4] Se presenta un extracto de esta fase ya que es extensa para el espacio permitido. Se puede encontrar completa en (Márquez-García, 2018, p. 120-122)

[5] Por cuestión de espacio solo se muestra uno de los usos que se reconocieron

elementos del conjunto que permite saber cuándo algo se acerca a algo o bien, cuándo algo se aproxima a algo. (Márquez-García, 2018)

- ¿A qué nos referimos con naturaleza topológica?

Desde esta investigación se considera por naturaleza topológica aquella característica de los conceptos basados en conjuntos que, mediante el establecimiento de una estructura que define una relación de proximidad, demanda del "abandono" de la naturaleza de los elementos considerados. Esto implica la consideración de conjuntos de elementos de naturaleza cualquiera, en los que se pueda determinar una estructura que permita dar sentido a la frase algo tiende a algo. (Márquez-García, 2018)

Conclusión

Desde esta problematización, se asocia al concepto de topología el establecimiento de una relación de proximidad entre los elementos de un conjunto de naturaleza cualquiera, que permite garantizar cuándo algo tiende a algo.

Esta investigación muestra un ejemplo de que la construcción del conocimiento matemático, aun aquel que nace en un contexto puramente matemático como lo es el de topología, también está acompañado de prácticas que se reconocen mediante el estudio del uso del conocimiento.

Referencias y bibliografía

Arboleda, L. C. (2002). El problema didáctico y filosófico de la desaxiomatización de las matemáticas. *Revista Colombiana de Filosofía de La Ciencia*, *3*(7), 59–84.

Arboleda, L. C. (2012). Objetos Matemáticos y Prácticas Constitutivas : La génesis de la Topología de Vecindades. *Notae Philosophicae Scientiae Formalis*, *1*(1), 32–44.

Dugundji, J. (1966). *Topology* (Allyn and). United States of America.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la Analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto politécnico nacional.

Fréchet, M. (1906). *Sur Quelques points du calcul fonctionnel*. https://doi.org/10.1007/BF03017884

Freixenet, J. T. (1994). La topología general desde sus comienzos hasta Hausdorff. In *Historia de la Matemática en el siglo XIX (2da. Parte)* (pp. 191–211). Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Retrieved from http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/HISTORIADELAMATEMATICA_1994_00_00_09.pdf

Kelley, J. L. (1955). *General Topology* (Springer). Retrieved from http://www.archivos.ujat.mx/2012/dacb/Programas_Materias/Matematicas/Sustantiva Profesional/F1143.pdf

Márquez-García, G. (2018). *Una problematización del concepto de topología en los inicios de la teoría de conjuntos abstractos de Fréchet*.

Pérez, J. A. (2015). *Topología de conjuntos. Un primer curso*. (P. Electrónicas, Ed.). Ciudad de México: Sociedad Matemática Mexicana. Retrieved from http://sociedadmatematicamexicana.org.mx/SEPA/ECMS/resumen/P1TE19_1.pdf

Taylor, A. E. (1982). A study of Maurice Fréchet: I. His early work on point set theory and the theory of functionals. *Archive for History of Exact Sciences*, *27*(3), 233–295. https://doi.org/10.1007/BF00327860

Apendice A
Definiciones y teorema de Sur Quelques points du calcul fonctionnel

Las definiciones y teoremas de la primera parte de la tesis de Maurice Fréchet. Muestran en español – traducción hecha por la autora del idioma original, francés– la traducción se realizó respetando en la medida de lo posible los términos y estructura original.

Definiciones

Def. 1 - Considere un conjunto E de elementos cualquiera (números, puntos, funciones, líneas, superficies, etc.) pero tal que se sabe distinguir los elementos distintos. A cualquier elemento A de este conjunto hacemos corresponder un número especifico $U(A)$; definimos lo que llamamos una operación *funcional* uniforme en E. (p. 4)

*[6]Def. 2 - …los conjuntos abstractos, es decir, que no se especifica la naturaleza de los elementos. (p. 4)

Def. 3 - De ahora en adelante, nos limitaremos al estudio de conjuntos extraído de una clase (L) de elementos de naturaleza cualquiera pero que satisfacen las condiciones siguientes: Se puede distinguir si dos elementos de la clase (L) son distintos o no. Además, hemos podido dar una definición de límite de una sucesión de elementos de la clase (L). Por lo tanto, suponemos que eligiéndose una sucesión infinita de elementos aleatorios (distintos o no) de la clase (L), podemos decir de alguna manera si esta sucesión $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiene o no un límite A (por cierto, único). El proceso que permitirá dar la respuesta (es decir, la definición de límite) es por cierto absolutamente cualquiera, que cumpla únicamente las condiciones I y II que hablamos y que son las siguientes:

Si cada elemento de la sucesión infinita $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ es idéntico al mismo elemento A, el resultado ciertamente tiene un límite que es A.

Si una sucesión infinita $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiene un límite A, toda sucesión de elementos de la primera sucesión de elementos tomados en el mismo orden: $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_p}, \dots$. (los números enteros, $n_1, n_2, \dots, n_p$ por lo tanto seguirá aumentando) tiene un límite que también es A. (p.5 y 6)

Def. 4 - Decimos que un elemento A de la clase (L) es un *elemento límite* de E cuando existe una sucesión infinita de elementos de E: $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ que son distintos y tienden a A. (p. 6)

Def. 5 - Llamaremos *conjunto derivado* de un conjunto E y lo denotaremos por E' al conjunto de elementos límites de E. (p. 6)

Def. 6 - Decimos que un *conjunto es cerrado* cuando contiene a su conjunto derivado. (p. 6)

Def. 7 - Es *perfecto* cuando coincide con su conjunto derivado. (p. 6)

Def. 8 - Considerando un conjunto dado H como conjunto fundamental, decimos que un elemento A de un conjunto cualquiera E, formado de elementos de H, es *interior* de E, *en sentido*

[6] Las definiciones y teoremas que están marcados con el símbolo *, son los que se consideraron como tal para esta investigación, pero que Fréchet no los declara como tal.

estricto cuando A es un elemento de E que no es límite de ninguna sucesión de elementos distintos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ que pertenece a H pero no a E. (p. 6)

Def. 9 - Llamaremos *elemento de condensación* de un conjunto E, a un elemento límite de E que también es un elemento límite de todo conjunto que se obtiene eliminando de E una infinidad *numerable* (II, página 2) de elementos. (p. 6)

Def. 10 - Decimos que un conjunto es *compacto* cuando tiene solamente un número finito de elementos o cuando toda la infinidad de sus elementos da lugar al menos a un elemento límite. (p. 6)

Def. 11 - Cuando un conjunto es compacto y cerrado le llamaremos conjunto *extrémal.* (p. 6 y 7)

Def. 12 - Diremos que una operación funcional V uniforme en un conjunto E de elementos de una clase (L) es continua en E, si cualquier elemento A de E límite de una sucesión de elementos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ de E, tenemos: (p. 7)

$$V(A) = \lim_{n=\infty} V(A_n).$$

Def. 13 - Llamamos el límite superior de un conjunto de números, una cantidad μ tal que cualquier número en el conjunto es como máximo igual a μ y que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, hay al menos un número del conjunto, superior a $\mu - \varepsilon$. Cuando dicho número μ no existe, decimos que el límite superior es infinito. (p. 8)

Def. 14 - Diremos que una operación U uniforme en un conjunto E es semi-continua superiormente en E si, cualquier elemento A de E que es límite de una sucesión de elementos distintos de E: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots, U(A)$ es al menos igual al límite más grande *) de la sucesión $U(A_1), U(A_2), U(A_3), \dots, U(A_n), \dots$ (p. 8 y 9)

Def. 15 - Llamo conjunto continuo, un conjunto tal que dado cualesquiera dos de sus elementos A, B, se puede extraer de E un conjunto F en el que cada uno de sus elementos corresponde a un punto del intervalo (0,1) sobre un eje ot e inversamente. La correspondencia se supone tal que si dos elementos A_1, A_2 de F corresponden a dos puntos t_1, t_2, A_1 tiende a A_2 cuando t_1 tiende a t_2. (p. 9)

Def. 16 - Diremos que una sucesión de operación uniformes en E *converge uniformemente* sobre E a una operación U si, para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un entero p tal que $n > p$ implica que $|U_n(A) - U(A)| < \varepsilon$ para todo elemento A de E. (p. 9)

Def. 17 - Diremos que una sucesión de operaciones $U_1, U_2, \dots, U_n$, ..., uniforme en un conjunto E *converge casi-uniformemente* a una operación U, cuando, dado $\varepsilon > 0$ y un entero cualquiera N, podemos determinar, de una vez por todas, un entero $N' > N$ tal que, a todo elemento A de E, le corresponda un entero n_A tal que: (p. 10)

$$N \leq n_A \leq N' \qquad \left|U(A) - U_{n_A}(A)\right| < \varepsilon.$$

Def. 18 - Consideremos una familia Ñ de operaciones continuas en un mismo conjunto E formado de elementos de una clase (L). (p. 11)

Def. 19 - Si la familia Ñ es tal que de cualquier infinidad de operaciones de Ñ distintas, se pueda sacar una sucesión $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ que converge uniformemente a un limite U necesariamente continuo en E. Diremos que la familia Ñ es *compacta.* (p. 11)

Def. 20 - Diremos que las operaciones uniformes en un mismo conjunto E formado de elementos de una clase (L), constituyen una familia Ñ de operaciones igualmente continuas en A en E, si dado un número $\mathcal{E} > 0$ y una sucesión cualquiera de elementos de E: $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, cuyo limite un elemento A de E, se puede encontrar un entero p tal que la desigualdad $n > p$ implica

$|U(A) - U(A_n)| < \varepsilon$

Cualquiera que sea la operación U de la familia Ñ. (p. 11)

Def. 21 - Considere una familia Ñ de operaciones uniformes en un conjunto E. En cada elemento A de E, podemos definir un numero $L(A)$ que sea el límite superior de valores en A de operaciones de Ñ. (p. 14)

Def. 22 - Si las operaciones de Ñ son limitadas en su conjunto en todo elemento de E, determinamos así una operación uniforme en E, que llamaremos límite superior de Ñ. (p. 14)

Def. 23 - Considere la clase (C) de funciones de una variable x definidos en un intervalo fijo J : $0 \leq x \leq 1$ y convenimos decir que una sucesión de tales funciones: $f_1(x), f_2(x), \ldots$ tiende a una función f(x) si, para cada valor x del intervalo J, $f_n(x)$ tiene un limite finito f(x). Esta definición satisface las condiciones I y II del Nº 7. Así que esta clase (C) es una clase (L). (p. 15)

Def. 24 - Consideremos una clase (V) de elementos de naturaleza cualquiera, pero que sepamos distinguir entre dos de ellos si son o no idénticos, además, que a cualquiera dos de sus elementos A, B los podamos hacer coincidir con un número $(A, B) = (B, A) \geq 0$ que goza de las dos propiedades siguientes: 1° La condición necesaria y suficiente para (A, B) sea cero es que A y B sean idénticos. 2° Existe una función positiva bien definida $f(\varepsilon)$ que tiende a cero con ε, tal que las desigualdades $(A, B) \leq \varepsilon$, $(B, C) \leq \varepsilon$ provocan que $(A, C) \leq f(\varepsilon)$ para cualesquiera elementos $A, B\ y\ C$. En otras palabras, es suficiente que (A, B) y (B, C) sean pequeñas para que sea la misma de (A, C). Llamamos vecindad de A y B el número (A, B). (p. 18)

* Def. 25 - Veremos más adelante (no. 43) un caso muy general dónde un conjunto cualquiera es siempre condensado, es decir, una infinidad no numerable cualquiera de sus elementos siempre da lugar a al menos un elemento de condensación. (p. 19)

Def. 26 - Si A es un elemento de D, llamamos ρ_A el límite inferior ≥ 0 de la vecindad de A con los elementos de E'. El número ρ_A es positivo, de lo contrario A sería un elemento límite de E' y como consecuencia pertenecería a E'. (p. 20)

Def. 27 - Llamamos esferoide del centro A y radio ρ al conjunto de todos los elementos B tales que tenemos: $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) < \rho$. Decimos que un elemento C es interior a este esferoide, si tenemos: $(\mathrm{A}, \mathrm{C}) < \rho$. (p. 21)

Def. 28 - Llamaremos *conjunto límite* un conjunto tomado de una clase (V) tal que la vecindad de dos elementos cualquiera de este conjunto sigue siendo inferior a un número fijo. (p. 22)

Def. 29 - Decimos que una sucesión de elementos $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$ de una clase (V) satisface las condiciones de CAUCHY cuando se puede hacer que cualquier número $\varepsilon > 0$ corresponda a un entero n tal que la desigualdad $(\mathrm{A}_n, \mathrm{A}_{n+p}) < \varepsilon$ se satisface para cualquier p. (p. 23)

Def. 30 - Diremos que una clase (V) admite una generalización del teorema de CAUCHY si cualquier sucesión de elementos de esta clase, que satisface las condiciones de CAUCHY, tiene un elemento limite (necesariamente único). (p. 23)

Def. 31 - Llamaremos *clase separable* a una clase que puede considerar, al menos en una forma, como el conjunto derivado de un conjunto numerable de sus propios elementos. (p. 23)

Def. 32 - Finalmente, nos interesa considerar como ya hemos hecho (N ° 33) entre las clases (V) aquellas que son tales que, cerca de un elemento dado, hay elementos cuya vecindad con este es también pequeña como uno quiera sin ser nulo. En otras palabras, cualquier elemento de la clase será un elemento limite. Como por otra parte, el reciproco es verdadero por definición de la clase, diremos que tales clases son perfectas *) (p. 23 y 24)

Def. 33 - Las clases NORMALES, es decir, perfectas, separables y admitiendo una generalización del teorema de CAUCHY. (p. 24)

Def. 34 - Diremos que una operación U es *uniformemente contina* en un conjunto E formado por elementos de una clase (V) si, dado un número positivo ε, podemos elegir un número positivo η tal que, para dos elementos *cualesquiera* de número positivo E: A, B, la desigualdad:

$(A, B) < \eta$, implica que $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$. (p. 28)

Def. 35 - Sea J una familia de operaciones continuas en un conjunto cualquiera E formado por elementos de una clase (V). Si esa familia es tal que, para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos poner en correspondencia con un numero $\eta > 0$ de modo que tenemos.

$|U(A) - U(B)| < \varepsilon$

Para toda operación U de J y para todo par de elementos A, B de E verifícan $(A, B) < \eta$, las operaciones de J son igualmente continuas en E. Esto resulta inmediato de la definición de n° 15…

(p. 29)

Def. 36 - La distancia entre dos elementos y que cumple con las propiedades siguientes: a) La distancia (A, B) es cero, si A y B son iguales. B) Si A, B y C son tres elementos cualesquiera, se tiene $(A, B) \leq (A, C) + (C, B)$. (p. 30)

Def. 37 - Cuando podemos definir la distancia de dos elementos cualesquiera de cierta clase, diremos que es una clase (E). (p. 30)

Teoremas

Teo 1. Dada una operación U uniforme en un conjunto extrémal E, existe al menos un elemento A de E tal que el límite superior *) μ (finito o no) de U en E es igual al límite superior de U en cualquier conjunto K de elementos de E que A es interior en sentido estricto [considerando E como el conjunto fundamental (n°8)]. (p. 8)

Teo. 2. Si U es una operación continua en un conjunto continuo E, U tomará en al menos un elemento de E cualquier valor entre dos valores cualquiera de los tomados por U. (p. 9)

* Teo. 3. Cuando una sucesión de operaciones $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ continuas en cualquier conjunto formado de elementos de una clase (L) converge casi-uniformemente en E a una operación de U, esta es continua en E. (p. 10)

*Teo. 4. Para que una sucesión de operaciones $U_1, U_2, \dots, U_n$, ... continuas en un mismo conjunto E formados de elementos de una clase (L) converge a una operación continua en E, es necesario y suficiente que la sucesión sea convergente casi-uniformemente en todos los conjuntos extremal formados por elementos de E. (p. 10)

Teo. 5. Para que las operaciones continuas de un mismo conjunto extremal E formado de elementos de una clase (L), que pertenecen a un mismo conjunto numerable D o de su derivado D', formen una familia compacta Ñ, es necesario y suficiente que las operaciones de Ñ sean igualmente/también continuas y limitadas en su conjunto en cualquier elemento de E. (p. 13 y 14)

Teo. 6. Dada una familia Ñ de operaciones limitadas en su conjunto e igualmente continuas en un conjunto cualquiera E, el límite superior de Ñ es una operación continua en E. (p. 14)

Teo. 7. Considere las funciones $f_n^{(p)}(x), f_n(x), f(x)$ definidas en un mismo intervalo J, n y p enteros cualesquiera y tales que:

(I) $f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$, $f_n(x) = \lim_{p=\infty} f_n^{(p)}(x)$.Si en general es imposible elegir los enteros n_r, p_r tales que la igualdad

$$f(x) = \lim_{r=\infty} f_{n_r}^{(p_r)}(x)$$

Se verifica en todo punto de J. Al menos siempre es posible determinar de tal manera que esta igualdad se verifique en cualquier punto de J excepto un conjunto de puntos de medida cero. (p. 15)

Teo. 8 cualquier función $f(x)$ dentro de la clasificación de SR. BAIRE (III, page 126) se puede considerar como el límite de una sucesión de polinomios excepto un conjunto de medida cero *). (p. 17)

Teo. 9. El conjunto derivado de un conjunto de elementos de clase (V) es un conjunto cerrado. (p. 18)

Teo.10. El conjunto P de elementos de condensación *) de un conjunto condensado E formado de elementos de una clase (V) es un conjunto perfecto o nulo **) (p. 19)

Teo. 11. Sea E un conjunto condensado formado de elementos de una clase (V). El conjunto D de elementos de E que no son elementos de condensación de E es un conjunto numerable ***) (p. 19)

Teo. 12. El conjunto D de los elementos de un conjunto compacto E de elementos de una clase (V) que no pertenece al conjunto E' derivado de E es numerable *) (p. 19 y 20)

Teo. 13. Si un conjunto cerrado F pertenece a un conjunto compacto E formado de elementos de una clase (V), obtendremos Feliminando de E los elementos INTERIORES a cada esferoide de un cierto conjunto contable de esferoides. *) (p. 21)

Teo. 14. Todo conjunto compacto formado de elementos de una clase (V) es limite. (p. 22)

Teo. 15. Sea E un conjunto extremal formado de elementos de una clase (V). Si existe una sucesión indefinida G de conjuntos I_1, I_2, ... tal que todo elemento de E es interior en sentido estricto de al menos uno de los conjuntos I_n, se puede extraer de G un numero finito de estos conjuntos formando una familia H con la misma propiedad que G *) (p. 22)

Teo. 16. Para que el conjunto $\boldsymbol{K}_\varepsilon$ [correspondiente a un conjunto E de una clase (V) NORMAL] pueda ser elegido, cualquiera que sea ε, de manera que incluya sólo un número finito de elementos, es necesario y suficiente que E sea compacto. (p. 25)

Teo. 17. Sea E un conjunto de elementos de una clase (V) normal. Para que de cada familia H, NUMERABLE O NO *) de conjuntos I tal que cada elemento de E sea interior en el sentido estricto de al menos uno de ellos, podamos extraer un número finito de conjuntos I formando una familia G con la misma propiedad que H, es necesario y suficiente que E sea extremal. (p. 26)

Teo. 18. Todo conjunto no numerable E formado de elementos de una clase (V) normal es condensado. (p. 27)

Teo. 19. Sea E cualquier conjunto formado de elementos de una clase separable (V); existe un conjunto numerable de elementos de E tal que cada elemento de E pertenece, al conjunto D o a su derivado D'. Cuando E es cerrado, tenemos: $E \equiv D + D'$. Cuando E es perfecto, $E \equiv D'$. (p. 27)

Teo. 20. Consideremos una operación U definida en un conjunto E formado por elementos de una clase (V). La condición necesaria y suficiente para que U sea una operación continua en E es que, si A es un elemento cualquiera de E y de E', podemos corresponder a todo número $\varepsilon > 0$ un número η_A tal que si la desigualdad $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$ para todo elemento de B en E. (p. 28)

Teo. 21. Toda operación continua en un conjunto EXTREMAL E formado de elementos de una clase (V), es uniformente continua en E.(p. 29)

Teo. 22. Para que las operaciones continuas en un mismo conjunto extremal E, formado por elementos de una clase (V) separable, forman una familia compacta $\boldsymbol{J}$, es necesario y suficiente que las operaciones de $\boldsymbol{J}$ sean, en todos los elementos de E, igualmente continuas y limitadas. (p. 30)

Teo. 23. La condición necesaria y suficiente para que toda operación continua en un conjunto E de elementos de una clase (E), 1ª sea acotada en ese conjunto, 2ª alcance su límite superior, es que el conjunto E sea extremal. (p. 31)

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

História da Razão Áurea na formação continuada de professores

Arlete de Jesus **Brito**
Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho
Brasil
arlete.unesp@gmail.com
Sérgio Candido de **Gouveia** Neto
Universidade Federal de Rondônia
Brasil
sergio.gouveia@unir.br

Resumo

Esse texto abordará alguns resultados de uma pesquisa colaborativa que visa a investigar os potenciais de um estudo sobre a história da matemática e a de seu ensino, na formação continuada de professores de matemática. Para a análise dos dados foi utilizada o modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTKS - Mathematical Knowledge for Teaching). Os resultados apontam que tal pesquisa possibilitou aos professores transitarem por diversos domínios do conhecimento necessários à prática docente.

Palavras-chave: educação, matemática, história, formação de professores, MTKS.

Essa comunicação pretende relatar resultados de uma pesquisa que tinha por questão: quais os potenciais e limites do estudo da história da matemática e a de seu ensino para a formação continuada de professores? Desde o século XIX, textos abordam a importância da História da Matemática e a de seu ensino para a formação de professores. Furinghetti (2013) aponta trabalhos, como por exemplo, de Forian Cajori e de Hieronymus G. Zeuthen que, no final do século XIX, trazem discussões a esse respeito. Felix Klein (1849-1925), em sua obra *Matemática Elementar desde um Ponto de Vista Superior*, cuja primeira edição foi em 1908, expõe aspectos que, para ele, seriam necessários na formação de futuros professores. Este livro, além de conteúdos matemáticos, trata de assuntos tanto da História da Matemática como da História do Ensino de Matemática. Segundo Klein (1927), os aspirantes ao magistério deveriam conhecer os elementos intuitivos da Matemática, as relações entre seus distintos ramos e, sobretudo, o desenvolvimento histórico desse campo do saber.

Brito (2007) atualiza as considerações tecidas por Miguel e Brito (1996) sobre o assunto aqui tratado. Segundo a autora, a História da Matemática e a da Educação Matemática deveriam participar da formação de professores, pois podem colaborar em reflexões sobre: a orientação das escolhas e decisões metodológicas e didáticas, por meio da análise de pressupostos epistemológicos, teleológicos e axiológicos de tais escolhas; o processo histórico de ensino e aprendizagem de matemática na instituição escolar, a partir da análise de diferentes currículos, dos livros textos e materiais didáticos em geral, utilizados em diferentes momentos históricos; os fundamentos dos conteúdos matemáticos básicos presentes em sua prática docente; a possibilidade de articular seu trabalho em ensino de matemática com as contribuições de outras áreas do conhecimento e com práticas não discursivas; a existência da diversidade cultural no que se refere à produção do conhecimento; as potencialidades e limites da utilização didática de atividades e outros recursos que envolvam a história da matemática. Brito (2007) afirma serem necessárias pesquisas sistemáticas acerca das consequências da introdução da história da educação matemática na formação de professores.

Investigações sobre o tema também têm sido realizadas. Por exemplo, Balestri e Cyrino (2010) entrevistaram oito docentes pesquisadores acerca da participação da história na formação inicial de professores de matemática. Segundo os entrevistados, a história poderia: auxiliar na compreensão dos conteúdos matemáticos, contribuir para compreensão da matemática como área de conhecimento, colaborar na percepção de relações entre a matemática e outras áreas do conhecimento, veicular a matemática como uma construção humana, responder alguns "porquês" que surgem ao construir seu conhecimento matemático, abrir espaços para que o professor solicite aos seus alunos o desenvolvimento de atividades que exijam produções escritas, contribuir em discussões acerca das condições necessárias para o desenvolvimento da matemática, provocar reflexões sobre possíveis encaminhamentos da prática pedagógica do futuro professor. Segundo Balestri e Cyrino (2010), não houve consenso nas respostas dos entrevistados, porém os resultados sugerem que o conhecimento sobre a história da matemática pode colaborar para a qualidade da formação de futuros professores de Matemática.

No encontro History and Pedagogy of Mathematics (HPM), em 2016, Jankvist, Mosvold e Clark (2016) relataram experiência na qual propõem a seus alunos, futuros professores, a seleção de temas sobre História da Matemática ou sobre seu ensino, para elaborarem planos de ensino. Tendo por referencial o Conhecimento Matemático para Formação de Professores - Mathematical Knowledge for Teaching Teachers (MTKS), os autores analisam que tipos de conhecimentos foram desenvolvidos por seus alunos, nesse processo. O trabalho desenvolvido por Jankvist, Mosvold e Clark (2016), como veremos, está muito próximo do realizado por nós. No entanto, o que diferencia nossa investigação é que ela se desenvolveu em um grupo que, no decorrer das reuniões, se constituiu como colaborativo.

A formação do grupo colaborativo

Em outubro de 2017, nós convidamos para uma reunião, alunos da Pós-Graduação em Educação Matemática e da Pós-Graduação em Matemática, da UNESP Rio Claro, e os convidamos a formar um grupo de estudos sobre um tema de História da Matemática que seria escolhido coletivamente. Nessa reunião foi esclarecido que o trabalho desse grupo seria analisado para verificarmos quais os potenciais e os limites do estudo da História da Matemática na formação de professores e os convidamos a participarem também dessa pesquisa, como investigadores. Todos os alunos aceitaram ambos os convites e, dessa maneira, o grupo se constituiu por sete pessoas, das quais, cinco alunos dos cursos de pós-graduação e os dois pesquisadores, autores desse texto. Constituído o grupo, iniciou-se a escolha do tema. Uma das alunas sugeriu que o tema fosse sobre "matemática dos pitagóricos". Após discussão, esse se tornou o nosso tema de estudos e ele foi dividido, entre nós, nos seguintes subtópicos: Números figurados; Arquitetura e misticismo numérico; Matemática e Música; Números primos, amigos e perfeitos; Razão áurea; Noções de Matemática pitagórica em livros didáticos, e constituição histórica do conceito de "pitagorismo". Criamos um grupo no Google Drive para socializarmos os artigos, livros e vídeos que encontrássemos sobre esses temas. Todos os participantes socializaram material para nossos estudos, entre os meses de outubro e dezembro de 2017. Nesse drive foram colocadas também as fotos realizadas nas reuniões, gravações dos encontros e suas transcrições.

Em cada reunião, um ou dois membros discorriam sobre o que haviam estudado e se iniciava o debate. Nelas também organizávamos, coletivamente, nossos cronogramas de trabalho, planejávamos e elaborávamos uma coletânea, além de escrevermos, coletivamente, um capítulo de um livro que está atualmente no prelo e é uma produção resultante de um a exposição que realizamos em um evento. A proposição e organização das atividades, tanto quanto as decisões foram feitas coletivamente, sem que houvesse a centralização de liderança.

Portanto, podemos considerar que o grupo foi se constituindo como colaborativo. Concordamos com Lopes (2018), quando afirma que:

> As condições de exercício profissional com significativa autonomia são ampliadas quando existe um trabalho colaborativo entre os professores. Esses profissionais têm características individuais, atuam em diferentes contextos educacionais e precisam, portanto, estar em constante processo de debate sobre suas práticas pedagógicas, de modo a preparar-se para atender aos seus alunos, que expressam capacidades cognitivas diversificadas e distintas visões de mundo (Lopes, 2018, p. 74).

Em nosso grupo, as atitudes de respeito mútuo, com o passar das reuniões, fizeram surgir laços afetivos e de confiança que nos levaram tanto a compartilhar conhecimentos, quanto a mostrar nossas dúvidas e ignorância em alguns assuntos. Nesse sentido, esse grupo colaborativo teve características semelhantes às de outros, como, por exemplo, o Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática nos/dos Anos Iniciais (GEPEMAI). Biani e Lorenzato ao relatar as atividades do GEPEMAI, concluem que nos grupos colaborativos:

> Os ganhos também são afetivos, pelas relações que se estabelecem entre seus membros. A colaboratividade exige cumplicidade, cooperação, confiança; implica saber falar e saber ouvir, respeitar o outro; requer dedicação, tempo e tantas outras coisas que estão inscritas na dimensão da afetividade pedagógica. (Biani, Lorenzato, 2018, p. 93).

Como todos os elementos do grupo se constituíram em pesquisadores da investigação, a pesquisa também se tornou colaborativa. Segundo Fiorentini (2004), uma pesquisa colaborativa se caracteriza pelo fato de todos os membros participarem do processo investigativo, incluindo a concepção, o planejamento (escolha da metodologia), a realização da pesquisa (coleta e análise dos dados), incluindo a construção da base teórica, culminando com as escritas do relatório e dos trabalhos para publicações. Contudo, não há unanimidade sobre estes aspectos, sendo que alguns pesquisadores afirmam que a colaboração não requer a participação dos envolvidos em todas as etapas, a não ser que isso seja o motivo que os levaram a participar da pesquisa (Desangné, 1997 apud Teles & Ibiapina, 2009; Zeichner, 1998). Na situação aqui descrita, a concepção inicial do tema a ser investigado – os potenciais de um estudo de História da Matemática e de seu ensino na formação de professores - não foi do grupo todo, porém, no momento em que todos aceitaram ser pesquisadores dessa investigação, ela tomou novos rumos, de modo que todos nós nos tornamos sujeitos e pesquisadores de nossas aprendizagens mediadas pelo estudo de um tema da História da Matemática e de seu ensino, qual seja, “a matemática dos pitagóricos”, que foi escolhido pelo grupo.

Os instrumentos de coleta de dados foram as gravações em áudio, com posterior transcrição, os diários individuais e algumas fotos de anotações feitas na lousa, em momentos de discussão. Para análise das discussões, das reflexões individuais e das anotações em lousa, consideramos o referencial sobre Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK) (Aguilar et al, 2013) que é um desdobramento das teorias sobre Conhecimento Matemático para Ensino - Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Ball, 2008). Segundo esse referencial, o conhecimento especializado do professor se divide em: 1) Conhecimento do Professor sobre a Matemática que engloba tanto o conhecimento dos temas e suas relações quanto os da prática matemática, como, por exemplo, modos de realizar demonstrações matemática, além de referir-se à estrutura matemática 2) Conhecimento Didático do Conteúdo em que se inserem o conhecimento do ensino de matemática, o sobre aspectos da aprendizagem matemática e o conhecimento dos currículos e propostas para o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Todos esses conhecimentos são permeados pelas crenças dos professores acerca do processo de ensino e aprendizagem da matemática. O enfoque do estudo do episódio, exposto aqui, foi sobre a razão áurea. Sua análise nos indicou possibilidades, na formação continuada, acerca do desenvolvimento do Conhecimento do Professor sobre a Matemática, de acordo com o referencial do MTKS.

A seguir, nos embasaremos nos subdomínios do referencial MTSK para realizar a análise de alguns diálogos das reuniões de nosso grupo colaborativo. Nessa análise, os nomes das pessoas envolvidas serão suprimidos[1].

A história e o conhecimento especializado do professor sobre a matemática

A aluna R. havia se proposto a estudar a razão áurea e resolveu, ler *A Divina Proporção* de H. E. Huntley, obra que traz tanto aspectos históricos quanto matemáticos sobre o tema. Segundo Huntley (1985), o problema das relações entre as diagonais do pentágono era familiar aos Pitagóricos. Esse problema está associado à divisão áurea, pois, dado um pentágono, o ponto de interseção P de duas de suas diagonais divide cada uma delas na proporção áurea. O traçado das diagonais gera o pentágono estrelado que, como sabemos, constituía o símbolo especial da escola pitagórica (Boyer, 1996). Ainda de acordo com Huntley, "um outro fato do conhecimento desses antigos geômetras era que a razão do raio do circuncírculo de um decágono regular para um dos lados é a razão áurea" (HUNTLEY, 1985 p. 36) e o problema da determinação da divisão áurea de um segmento está solucionado nos Elementos. Assim, R. buscou no livro *Os Elementos*, de Euclides[2], o que havia sobre o assunto.

Assim, R expõe como o conceito de razão áurea foi mudando ao longo do tempo e, a seguir, lê, para o grupo, o texto atribuído a Euclides. A seguir, faz o seguinte comentário:

> R - Ah eu li, eu consegui achar no Euclides a razão áurea, e eu descobri porque eu não estava achando! Porque ele fala de extrema e média razão, então ele define que uma reta está cortada em extrema e média razão, como o todo esteja para o maior

[1] Os nomes serão representados pelas letras R, S, I, D, A, J, C e S

[2] Foi utilizada a tradução em português realizada por Irineu Bicudo.

> segmento, o maior para o menor. No começo eu tive bastante dificuldade, daí eu fui pesquisar o que ele estava querendo dizer com esses termos.

Nesse trecho, R. expõe sua dificuldade em compreender de que se tratava a definição encontrada no *Os Elementos*, devido ao desconhecimento dos significados dos termos envolvidos ("*como o todo esteja para o maior segmento, o maior para o menor").* Percebemos um problema no que se refere ao Conhecimento do Professor sobre a Matemática, porque, apesar de R. já ter estudado esse conteúdo na licenciatura, não conseguia compreender os termos da definição.

Sua leitura, para o grupo, da proposição[3] de Euclides desencadeou a seguinte discussão sobre representação matemática.

> R – Daí, ele fala assim óh: fique descrito sobre AB o quadrado de BC. O que ele quer dizer com quadrado BC? Ele trata das diagonais sempre, então quando ele fala de quadrado, retângulo, ele vai usar as diagonais do quadrado e do retângulo ou do paralelogramo. Aí, quer ver: fique descrito sobre AB o quadrado BC e aplicado a AC o paralelogramo CD. Quer que eu desenhe?
> A – A gente aqui, sem entender.... Está todo mundo nesse nível.... Precisa desenhar, porque...

Conforme Szabó (1978), a visualização fez parte da tradição da geometria grega, desde seus inícios, pois o verbo "demonstrar" - δεικνυμι – significava "visualizar concretamente". O ensino de geometria tem recorrido a essa tradição, de modo que as figuras assumam uma função heurística, na resolução de problemas geométricos. É essa tradição que R. e A. mobilizam quando explicitam a crença de que o desenho na lousa ajudará a compreensão do enunciado. Porém, Duval (2005) ressalta que o enunciado em língua materna, as figuras e as representações dessas por meio de nominação de pontos dos vértices são tipos de registro semióticos heterogêneos. Além disso, a figura plana visualizada e o registro por meio de pontos referem-se a dimensões diferentes, portanto, a compreensão da passagem de uma forma de registro para outra pode não ocorrer com facilidade. R. vai à lousa e faz a figura, explicando que cada dupla de pontos é usada para designar um quadrilátero. O aluno J. incorpora essa forma de representação e, lendo o texto de Euclides, dá a seguinte explicação sobre a figura desenhada por R:

> J – Porque ele [Euclides] fala assim, mas o BC é um quadrado, portanto, também AD é um quadrado, então se você tem que BC é um quadrado, então AD vai ser um quadrado, por ser figura semelhante mesmo.

A partir do diálogo que ocorre no grupo, a representação dos quadriláteros por meio de dois dos seus vértices é criticada, mas passa a ser compreendida e a discussão se volta à tentativa de entender como o raciocínio apresentado na proposição conduzirá à razão áurea. Desse modo, se estabelece uma discussão no grupo sobre o porquê de as medidas dos segmentos construídos na demonstração serem proporcionais e sobre o modo como a demonstração está construída:

> A – Porque.... Como é que ele faz? Ele não corta [o segmento] em qualquer lugar, como ele faz essa construção?
> R - Ele não faz!

[3] O teorema em questão é a proposição 30, do livro 6.

A - Como não faz?
J - É porque isso fica decorrente do ponto D, pelo que eu li aqui.
R - Ele não faz, ele só fala construir CD tal que seja igual a CB, ele pula esse passo de construção.
A- Não, ele não pode pular isso.

Esse trecho indica um momento de reflexão do grupo sobre o modo como algumas demonstrações são realizadas, sem que se explicitem proposições envolvidas no processo e a partir desse questionamento, as pessoas tentam explicitar quais seriam as proposições e os passos envolvidos naquele raciocínio demonstrativo. Nesse momento, A., S. e J. também já estão diante da lousa. O aluno J. relê o livro e explicita qual o objetivo da construção, qual seja, a determinação de um ponto que divida o segmento $\overline{BD}$ em extrema e média razão.

Durante o diálogo, A. percebe que o teorema de Tales está envolvido na demonstração. As pessoas, na lousa, começam a representar as medidas dos segmentos por meio variáveis.

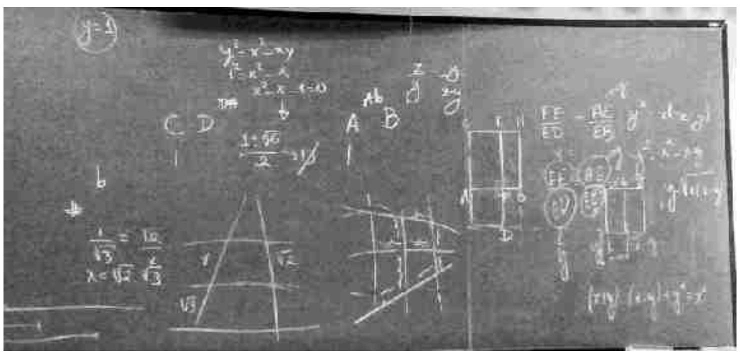


Figura 1. Fotografia da lousa

No entanto, se mantém a comparação entre as duas formas de representação, como se observa pela foto anterior (Figura 1). Instala-se uma argumentação coletiva sobre a demonstração, por meio de conjecturas e refutações a partir da análise voltada às retas paralelas cortadas por transversais, como se observa pelo trecho transcrito abaixo:

A. - Então, se ele é a média geométrica então AE, que é y...
J. - o x é AC, não, AB
A. - o x é AB, AB sobre AE é igual AE sobre EB. Ah, ele [Euclides] errou aqui, aqui era AB.
[risos]
R. – Não! Mas é que, Arlete, FE é igual que x, então você pode usar AB
J. - É a mesma coisa!
A. - Espera aí, FE é igual a quem?
R. - É a mesma coisa que x, então você pode usar ...
J. - E agora o ED, que é a mesma coisa que o y
A. - E agora o ED que é a mesma coisa que o AE.
J. – Isso! Tá certo!

Naquele momento, além de serem tecidas as relações entre diferentes formas de registro, estavam sendo mobilizados, ao mesmo tempo, conhecimentos sobre congruência de ângulos, teorema de Tales, noção de figuras de mesma área, semelhança, proporcionalidade, média geométrica e divisão de um segmento em extrema e média razão. Segundo Aguilar (2013), reflexões sobre diferentes formas de representação e sobre a relação entre diferentes conteúdos são conhecimentos que fazem parte do Conhecimento do Professor sobre a Matemática.

> S – É, então, y ao quadrado é igual a x ao quadrado, agora então y ao quadrado é igual a x(x-y)
> J – $y^2 = x\ (x-y)$
> S. - Mas é, porque essa área aqui é igual a essa área [mostrando as figuras na lousa], não é?

Quanto o grupo chega à conclusão procurada, a aluna I. questiona sobre como a proporção obtida leva ao número ϕ. R. e A. analisam se a substituição de y ou de x por 1, resultaria no valor de ϕ. A substituição é feita e o número é obtido.

Dos tópicos relevantes que comporiam o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTKS), abordados por Jankvist, Mosvold e Clark (2016), esse processo colaborativo de estudo histórico sobre razão áurea nos levou a: relacionar uma representação a outras representações, conectar um tópico de ensino a outros tópicos, modificar questões para torná-las mais simples, escolher definições úteis ao desenvolvimento do processo de demonstração, usar notações e linguagem matemática, formular questões matemáticas produtivas e escolher representações convenientes para a proposta.

Algumas conclusões

Nossas análises apontam para o potencial de um estudo histórico, em grupo colaborativo, para a aprendizagem de conhecimentos matemáticos necessários à prática docente. Assim, concordamos com Ferreira (2008), quando afirma que o grupo colaborativo pode tornar-se "o contexto no qual são criadas oportunidades para o professor explorar e questionar seus próprios saberes e práticas" (Ferreira, 2008, p. 152). No entanto, nosso grupo colaborativo possui uma especificidade que deve ser considerada na análise: ele é composto apenas por docentes que já possuem ou estão em processo de obtenção de título de pós-graduado. É necessário comparar esse processo com os desenvolvidos em outros, cujos grupos não possuam essa especificidade.

Ressalta-se que a proposta do estudo sobre parte da história da razão áurea surgiu por meio das discussões do grupo colaborativo e acreditamos que o tema poderia ter sido qualquer outro. Por meio dessas discussões é que foi possível analisar os potenciais do processo colaborativo no estudo de história da matemática, na formação continuada de professores. Porém, alguns questionamentos precisam ser feitos: Os resultados teriam sido diferentes se o tema fosse outro? Quais seriam os potenciais e limites em outro caso?

Por fim, destaca-se que a nossa discussão girou em torno de apenas um aspecto do modelo MTKS, ou seja, o Conhecimento do Professor sobre a Matemática.

Referências e bibliografia

Aguilar, A. et all. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. *Actas del VII CIBEM*. Uruguai, VII, 5063-5069.

Balestri, R. D.; Cyrino, M. C. C. T. (2010). A história da matemática na formação inicial de professores de matemática. Alexandria – *Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*. . 3 (1). 103-120. Doi:

https://doi.org/10.5007/%25x

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. Doi: https://doi.org/10.1177%2F0022487108324554

Bicudo, I. (2009). Prefácio e introdução. Euclides. *Os Elementos*. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP.

Brito, A. J. A. (2007). História da Matemática e a da Educação Matemática na Formação de Professores. *Educação Matemática em Revista*. 22 (13), 11-15.

Boyer, C. (1996). *História da Matemática*. Tradução de Elza Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher.

Duval, R (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la Géométrie développement de la visualization: Différenciation des raisonnements et Coordination de leurs fonctionnements. *Annalles de Didactique et Sciences Cognitives*. 10, 5-53.

Ferreira, A. C. (2008). O trabalho colaborativo como ferramenta e contexto para o desenvolvimento profissional: compartilhando experiências. In Nacarato, A. M. e Paiva, M. A. V. (Orgs). *A formação do professor que ensina matemática* (pp. 149-166). Belo Horizonte: Autêntica

Fiorentini, D. (2004). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: Borba, M. C.; Araújo, J. L. (Orgs.). *Pesquisa qualitativa em educação matemática* (pp. 47-76). Belo Horizonte: Autêntica.

Furinghetti, F. (2013). History and epistemology in mathematics education in History of Mathematics, [Eds. UNESCOEOLSS Joint Committee], in *Encyclopedia of Life Support Systems* (EOLSS). Oxford: Eolss Publishers.

Huntley, H. E. (1985). A divina proporção. Brasilia: Editora da UNB.

Jankvist, U. T.; Mosvold, R.; Clark, K. (2016). Mathematical knowledge for teaching teachers: the case of history in mathematics education. *HPM Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting*. Montepellier: IREM. 441-452

Klein, F. (1927). *Matemática Elemental desde un punto de vista superior*. Madrid: Biblioteca Matemática Rey Pastor.

Lopes, C. (2018). Participação em grupos colaborativos e suas contribuições para Educação Matemática. In Fernandes, F. L. P; Biani, R. P; Longo, C. A. C; Tinti, D. S. (orgs). *Diferentes contextos do trabalho colaborativo na formação de professores que ensinam matemática* (pp. 73-76). Campinas: FE/UNICAMP.

Miguel, A.; Brito, A. J. (1996). A história da matemática na formação do professor de matemática. *Caderno CEDES*. N. 40. Campinas: Papirus. p. 47 a 61.

Szabó, A. (1978). *The beginnings of Greek mathematics.* Boston: D. Reidel Publishing Co.

Teles, F. P.; Ibiapina, I. M. L. M. (2009). A pesquisa colaborativa como proposta inovadora de investigação educacional. *Diversa*. 2 – nº 3, jan-jun

Zeichner, K. M. (1988). Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico. In: GeraldiI, C. M.; Fiorentini, D. e Pereira, E. M. (orgs.) *Cartografia do trabalho docente: professor (a)-pesquisador(a*) (pp. 207-236).Campinas: Mercado de Letras/ABL.

A relevância dos conteúdos de Matemática ensinados nas décadas de 1940 e 1950 no município de Canoas/RS (Brasil)

Alexandre Ausani **Huff**
Doutorando - PPGECIM, Universidade Luterana do Brasil – ULBRA
Brasil
alexandre_ah@hotmail.com
Arno **Bayer**
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA
Brasil
arnob@ulbra.br

Resumo

Este trabalho apresenta o contexto educacional da rede pública municipal de Ensino do Município de Canoas/RS (Brasil) nos anos 1940 e 1950. Foi elaborado a partir de um recorte da Dissertação de Mestrado "A História do Ensino de Matemática nas escolas Públicas Municipais de Canoas de 1940 a 2016". Nele estão presentes as discussões sobre o Ensino de Matemática proposto pela Prefeitura Municipal de Canoas, nas duas primeiras décadas, após a fundação do município. A pesquisa se desenvolveu a luz da Hermenêutica de Profundidade, que prima pela interpretação dos documentos históricos através do contexto, reconstruindo a história da melhor forma possível. Após a análise dos documentos, da legislação e do momento em que a sociedade brasileira vivia, especialmente na cidade de Canoas, foi possível escrever sobre os conteúdos de Matemática que foram ensinados nas décadas de 1940 e 1950 nas escolas da rede pública municipal de Canoas.

Palavras clave: educação matemática, hermenêutica de profundidade, programas de ensino, currículo, história da matemática, ensino primário no Brasil.

Introdução

O trabalho refere-se a um recorte da Dissertação de Mestrado, cujo título é "A História do Ensino de Matemática nas escolas públicas municipais de Canoas de 1940 a 2016". Neste artigo iremos retratar o ensino de Matemática nas escolas públicas municipais de Canoas nas décadas de 1940 e 1950. Trata-se, portanto, de um estudo histórico, dirigido às bases que formaram o currículo que possuímos atualmente nesta rede de ensino.

O estudo histórico é importante para que os professores possam conhecer o cenário que constituiu o Ensino de Matemática, para que possam reconhecer o panorama educacional e o contexto social que envolve a formação do currículo escolar e, com isso, ampliar a visão sobre a importância da educação.

Para que o pesquisador entenda o contexto sócio histórico, é necessário que ele estude toda a situação da região, no período pesquisado. Para tanto, foi utilizada a metodologia da Hermenêutica de Profundidade de John Thompson, que se baseia na Hermenêutica de Friedrich Daniel Ernst Schleiermacher, que criou uma maneira de realizar a interpretação, a exegese. Thompson, ao adaptar a metodologia de interpretação hermenêutica para a realização de estudos historiográficos, desenvolveu o método da Hermenêutica de Profundidade, que aproxima o pesquisador das características que envolvem a sociedade do período estudado.

Hermenêutica de Profundidade

A metodologia de pesquisa utilizada para a realização da pesquisa histórica foi constituída a luz da Hermenêutica de Profundidade. De acordo com Strecker e Schnelle (1997, p. 179) "a*l definir la hermenéutica como 'arte de la comprensión' y como disciplina filológica, Schleiermacher consigue superar la distinción entre la hermenéutica sacra y la hermenéutica profana"*[1]. Assim, a Hermenêutica de Profundidade, segundo Thompson (2011, p. 33):

> Ao mesmo tempo em que a tradição da hermenêutica pode chamar nossa atenção para essas e outras condições hermenêuticas da pesquisa sócio-histórica, ela pode também nos propiciar, num nível mais concreto, algumas orientações metodológicas para pesquisa. Desenvolvo essas orientações através do que chamarei de referencial metodológico da hermenêutica de profundidade. A ideia da hermenêutica de profundidade é tirada do trabalho de Paul Ricoeur, entre outros. O valor dessa ideia é que ela nos possibilita desenvolver um referencial metodológico que está orientado para a interpretação (ou reinterpretação) de fenômenos significativos, mas em que os diferentes tipos de análise podem desempenhar papéis legitimados e que se apoiem reciprocamente. Ela nos possibilita ver que o processo de interpretação não se opõe, necessariamente, aos tipos de análise que tratam das características estruturais das formas simbólicas, ou as condições sócio-históricas de ação e interação, mas que, pelo contrário, esses tipos de análise podem estar conjuntamente ligados e articulados como passos necessários ao longo do caminho da interpretação. Possibilita-nos também ver

[1] Ao definir a hermenêutica como 'arte de compreender' como disciplina filológica, Schleiermacher consegue superar a distinção entre hermenêutica sagrada e hermenêutica profana (tradução do autor).

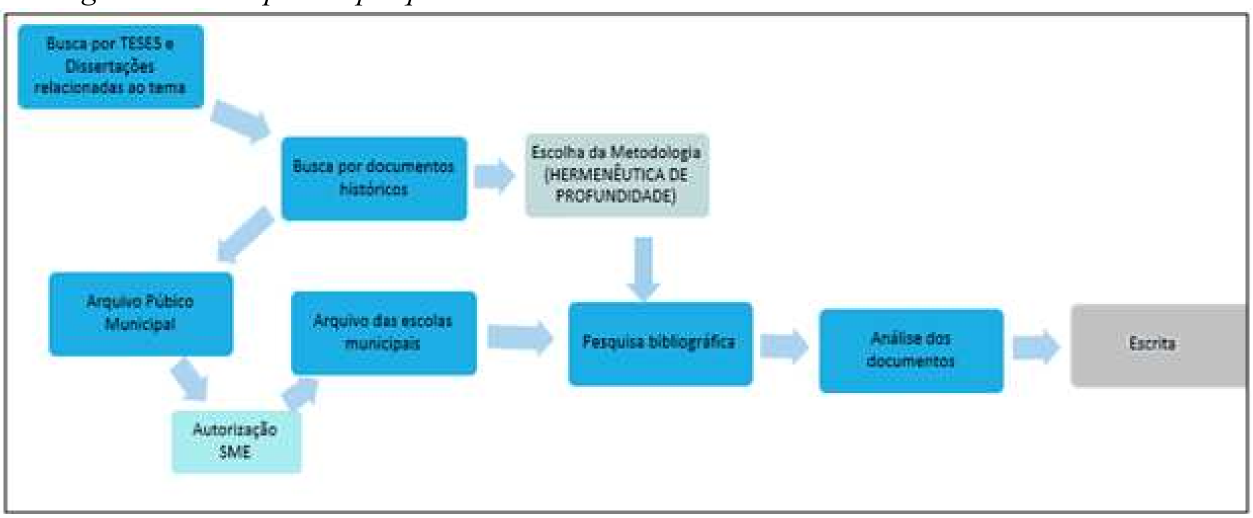
> que métodos particulares de análise podem iluminar alguns aspectos do fenômeno às custas de outros, que sua força analítica pode estar baseada em limites estritos, e que esses métodos particulares podem ser melhor analisados como estágios parciais dentro de um enfoque metodológico mais abrangente.

A Hermenêutica de Profundidade, então, está embasada na interpretação dos símbolos expressos nos documentos históricos. Esses símbolos são os fatores constituídos através das situações que se desenvolveram na sociedade, no período pesquisado, gerando o contexto histórico que está por trás da confecção destes documentos. Segundo Huff (2018, p. 37):

> Para analisar textos históricos é necessário interpretar a simbologia que nos remeta ao contexto mais próximo da realidade, isto é, utilizar as narrativas que possam nos guiar para o caminho dos fatos ocorridos. É necessário que o pesquisador fique atento a interpretação ou reinterpretação dos objetos que em conjunto irão nos encaminhar para a reconstrução dos elementos que fizeram parte do conteúdo estudado.

Assim, a pesquisa foi realizada através da interpretação dos documentos encontrados nos arquivos da biblioteca pública e das escolas públicas municipais, com o auxílio de referenciais teóricos que compõem a contextualização da sociedade canoense, do período pesquisado. O Quadro 1 representa as etapas da pesquisa:

Quadro 1
Fluxograma das etapas da pesquisa



Fonte: autoria própria

Portanto, a partir da análise dos documentos através da ótica propiciada pela Hermenêutica de Profundidade, foi possível realizar a escrita da história do Ensino de Matemática das escolas Públicas municipais de Canoas e desta comunicação científica.

O Ensino de Matemática nas escolas Públicas municipais de Canoas (1940 e 1950)

Canoas é um município brasileiro, localizado no Estado do Rio Grande do Sul. Sua emancipação ocorreu no ano de 1939, porém o primeiro prefeito, Edgar Braga da Fontoura, só foi empossado no dia 15 de janeiro de 1940. A partir desta data, iniciou o processo de municipalização das instituições, entre elas, a criação da rede pública municipal de ensino, na data de 31 de maio (Huff, 2018).

A partir da criação da rede pública municipal de ensino, houve a publicação do primeiro edital para contratação de professores, por meio de concurso público. Da mesma forma, por meio de decreto, a Prefeitura Municipal de Canoas estabeleceu as orientações de ensino e as atribuições referentes às atividades docentes e discentes. Ainda, no ano de 1940, houve a criação das primeiras escolas públicas municipais, sendo:

> A escola, primeiramente denominada de Escola Unitária Municipal e, posteriormente, chamada de Escola Municipal de Ensino Fundamental Irmão Pedro, que fica localizada na Rua Dr. Olavo Fernandes, 91, bairro Estância Velha (esquina com a Avenida Santos Ferreira) (Huff, 2018, p. 62).

As escolas públicas, depois de instaladas, receberam as orientações sobre os conteúdos a serem desenvolvidos no Ensino Primário (a rede pública municipal de ensino de Canoas, apenas ofertava vagas para o Ensino Primário, que contava com os primeiros cinco anos da escolarização). Esses programas de ensino foram "formulados pela Diretoria de Ensino da Prefeitura Municipal de Canoas, que estavam de acordo com as orientações de ensino para o Estado do Rio Grande do Sul" (Huff, 2018, p. 65).

A legislação brasileira, perante a educação, só regulamentou o Ensino Primário no dia 2 de janeiro de 1946, através do Decreto-Lei 8.529, sancionada pelo presidente José Linhares, que registrou a Lei Orgânica do Ensino Primário, cujas finalidades eram:

> a) proporcionar a iniciação cultural que a todos conduza ao conhecimento da vida nacional, e ao exercício das virtudes morais e cívicas que a mantenham e a engrandeçam, dentro de elevado espírito de Naturalidade humana;
> b) oferecer de modo especial, às crianças de sete a doze anos, as condições de equilibrada formação e desenvolvimento da personalidade;
> c) elevar o nível dos conhecimentos úteis à vida na família, à defesa da saúde e à iniciação no trabalho (BRASIL, 1946).

A lei Orgânica do Ensino Primário foi estabelecida pelo Governo Federal do Brasil para que houvesse uma base mínima comum de conteúdos, entre as diversas redes de ensino do país.

Outro fator importante foi o registro de sanções estabelecidas para as famílias que não matriculassem seus filhos nesta etapa da educação (Huff, 2018). Assim, de acordo com o Decreto-Lei:

> Art. 41. O ensino primário elementar é obrigatório para todas as crianças nas idades de sete a doze anos, tanto no que se refere à matrícula como no que diz respeito à frequência regular às aulas e exercícios escolares.
> Art. 42. A administração dos Estados, dos Territórios e do Distrito Federal baixará regulamentos especiais e sobre a obrigatoriedade escolar, e organizará, em cada Município ou distrito, serviços de Cadastro Escolar, pelos quais se possa tornar efetiva essa obrigatoriedade.
> Art. 43. Os pais ou responsáveis pelos menores de sete a doze anos que infringirem os preceitos da obrigatoriedade escolar, estarão sujeitos às penas constantes do art. 246, do Decreto-lei nº 2.848, de 7 de dezembro de 1840 (Código Penal) (Brasil, 1946).

Então, seguindo as normas estabelecidas em Lei, a Prefeitura Municipal de Canoas, através da Diretoria de Ensino, formulou os Programas de Ensino e repassou para as escolas da rede Pública Municipal de Ensino. Averiguando os conteúdos de Matemática que compõem o currículo do Ensino Primário, desta rede de ensino, foi possível constatar:

> [...] que os conteúdos de Matemática, divididos entre os cinco anos do Ensino Primário, nas décadas de 1940 e 1950, era basicamente voltado para o ensino e aplicação de cálculos aritméticos, noção de frações e de números decimais, conceitos de geometria e, no último ano do Ensino Primário, era proposto o aprendizado de noções de proporcionalidade e cálculo através da regra de três (Huff, 2018, p. 66).

A proposta do Ensino de Matemática no currículo do Ensino Primário, nas primeiras décadas da história do município de Canoas, seguiam fidedignamente as proposições estabelecidas na Lei Orgânica, que regimentava a educação brasileira, pois,

> O programa para o ensino da Aritmética projetava um estudo dos números gradativamente complexificado, iniciando pela contagem, soma e subtração mental, estendendo-se à multiplicação e divisão e aos algoritmos das operações na pedra ou na lousa, passando pelas frações decimais e ordinárias, pelo uso do sistema métrico decimal e avançando, na terceira classe, até as regras de três simples e composta, a extração da raiz quadrada e da raiz cúbica de números inteiros, decimais e fracionários (Búrigo, 2014, p. 15).

O Programa de Ensino de Matemática, então, envolve uma série de conteúdos que consiste em alto nível de compreensão para crianças que possuem entre sete e dez anos de idade. A capacidade de abstração, talvez, ainda não estivesse totalmente desenvolvida para compreender as noções de frações, área e volume, por exemplo. Assim, “o apelo ao concreto e à intuição reaparecia no objetivo enunciado de proporcionar à criança, ‘em ação direta e pessoal sobre as cousas, o material concreto e vívido que servirá de base às abstrações matemáticas’” (Búrigo, 2014, p. 20).

Os Programas de Ensino, ao apresentar os conteúdos de Matemática, trazem uma lista de conteúdos e algumas formas de abordá-los. Como por exemplo, o trabalho com sistema monetário e a utilização do cálculo mental, que apesar de estar escrito lá, de forma equivocada, traz o fato de que o Ensino de Matemática estava tendo uma abordagem contextualizada para o educando. Então, entre as habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos está a capacidade de realizar cálculos mentais.

> Alguns aspectos interessantes devem ser ressaltados, a aplicação de conceitos de unidades de medidas como: xícaras, sacos, colheres, além das formais litros, metros e gramas. Assim, dependendo da abordagem do professor em sala de aula, era possível mostrar ao aluno a utilidade da Matemática em tarefas que poderiam fazer parte de sua rotina caseira. Como a sociedade da época estava situada em um ambiente propício ao exercício da culinária e a construção de objetos de madeira, os alunos poderiam utilizar os conceitos Matemáticos estudados na escola, auxiliando seus pais em suas tarefas (Huff, 2018, p. 71).

O professor de Matemática, então, utilizava recursos pedagógicos para vincular os conteúdos da disciplina às atividades diárias dos educandos. Essa aproximação possibilitava uma melhor compreensão dos conteúdos, pois a contextualização permitia que os educandos aplicassem esses conteúdos fora da sala de aula, como exemplo: o uso de frações na culinária.

> A noção dos conceitos de fração era ensinada juntamente com a revisão de quantificação de grandezas, como litros, metros e gramas. A importância de utilizar estas nomenclaturas se faz pelo fato dos alunos estarem inseridos em uma sociedade que se utilizava muito estes conceitos nos pequenos comércios da cidade (Huff, 2018, p. 71).

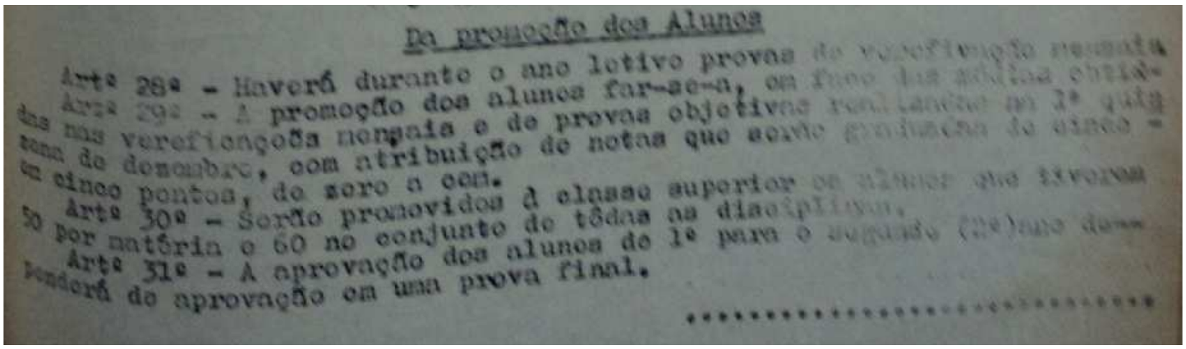
Uma característica importante, que influenciava a prática do professor, era que o Ensino de Matemática deveria apresentar ao educando as nomenclaturas mais precisas, evitando expressões corriqueiras, pois o rigor matemático era considerado fundamental para que o aluno desenvolvesse o raciocínio necessário para o aprendizado dos conteúdos.

> Cabia ao professor oferecer, para facilitar o processo de ensino e aprendizagem, um ensino gradual e na ordem correta, pois dessa forma os alunos conseguiriam abstrair e aprender de forma mais generalizada, capacitando-os a realizar os cálculos com mais precisão (Huff, 2018, p. 76).

A Educação brasileira, neste período, estava certamente embasada pela Tendência Formalista de Ensino. Isso fica evidente pelo fato de que o professor era o centro das ações no contexto educacional. As atividades, embora se relacionassem com o cotidiano do educando, eram planejadas para que o estudante aprendesse o método de resolução sugerida pelo professor (que seguia as orientações da Diretoria de Ensino municipal de Canoas).

> O esforço de, ao mesmo tempo, orientar e controlar a ação das professoras é evidenciado no detalhamento com que era descrito o mínimo essencial para cada ano, em que as dificuldades, os aprofundamentos ou ampliações deviam ser introduzidos gradativamente (Búrigo, 2014, p. 19).

O controle da Prefeitura Municipal de Canoas ocorria até mesmo na aprovação ou retenção dos alunos. Os professores recebiam as provas, chamadas de Exames Finais, para serem aplicadas ao final de cada ano letivo. Essas provas eram decisivas para a progressão para o próximo ano. As orientações podem ser observadas na Figura 1.



Da promoção dos Alunos

Artº 28º - Haverá durante o ano letivo provas [illegible]

Artº 29º - A promoção dos alunos far-se-á, em [illegible] das nas verificações mensais e de provas objetivas [illegible] de dezembro, com atribuição de notas que [illegible] em cinco pontos, de zero a cem.

Artº 30º - Serão promovidos à classe superior [illegible] 50 por matéria e 60 no conjunto de tôdas as disciplinas.

Artº 31º - A aprovação dos alunos do 1º para o [illegible] dependerá de aprovação em uma prova final.

Figura 1. Promoção dos alunos

Fonte: Arquivo público municipal

Este é outro fator que evidencia o embasamento pela Tendência Formalista, a construção diária do educando não é considerada no momento da avaliação final, que permitia ao aluno o avanço para o ano seguinte ou que fosse retido. Todo o processo de aprendizagem era focado em uma única avaliação.

Considerações Finais

O município de Canoas foi fundado em meio às discussões nacionais da educação básica. O Ensino Primário foi organizado em 1946 no governo de José Linhares, que garantiam os Conteúdos Mínimos a serem ensinados nesta etapa da educação. A partir dessa organização, o Ensino de Matemática se caracterizou por possuir uma gama de conteúdos de difícil compreensão por exigir elevado nível de abstração.

Na rede pública municipal de ensino de Canoas, o currículo era organizado por uma Diretoria de Educação que pertencia à Prefeitura municipal. Esse currículo vinha composto por Programa de Ensino, separado por ano, orientações e normativas que deveriam ser seguidas pelos docentes. A falta de autonomia dos professores era evidente, os mesmos deviam planejar suas aulas, mas tendo em vista a organização pedagógica que lhes eram entregue.

Na sociedade da época, eram utilizados os conceitos matemáticos nas diversas profissões existentes, os conteúdos, em sala de aula, eram facilmente abordados de forma contextualizada. A aproximação dos conteúdos com as atividades diárias dos educandos facilitava o trabalho do professor, porém, de nada adiantaria o aluno aprender a utilizar na prática se o mesmo não passasse no Exame Final, proposto pela Diretoria de Ensino.

O controle sobre a vida escolar de cada aluno era fortemente visível, pois a família era obrigada a matricular suas crianças na escola, para não sofrer punições civis, mas ao mesmo tempo, o governo municipal detinha o poder de aprovar ou reprovar os alunos. Pois, o processo de aprendizagem não compunha a avaliação, somente era levada em conta a nota obtida no Exame Final. O professor, então, representante do estado, era o ponto central para a vida do estudante, pois para passar de ano o aluno devia seguir os passos ensinados por ele.

O contexto educacional apresentado pelos anos 1940 e 1950 era de escolas pequenas, com alunos de anos diferentes em uma mesma sala de aula, onde um único professor deveria dar conta de ensinar os diversos conteúdos, entre eles a Matemática. O cenário, visto de hoje, era catastrófico, pois crianças com pensamentos distintos, com experiências de vida distintas e de anos diferentes, deveriam aprender os conteúdos relativos ao seu ano e ainda passar por uma prova final para avançar. Por isso, quando se estuda a educação, é necessário conhecer a história.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

Brasil. *Decreto-Lei n. 8.529, de 2 de janeiro de 1946*. Lei Orgânica do Ensino Primário. Disponível em: http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-8529-2-janeiro-1946-458442-publicacaooriginal-1-pe.html. Acesso em: 24 out 2017.

Búrigo, E. Z. (2014). Aritmética nas escolas primárias gaúchas na primeira metade do século 20: o ensino prescrito. *Hist. Educ. [Online].* 18 (44), p. 9-25. Porto Alegre.

Huff, A. A. (2018). *A história do Ensino de Matemática nas Escolas Públicas Municipais de Canoas de 1940 a 2016*. Canoas: ULBRA.

Strecker, G.; Sschnelle, U. (1997). *Introducción a la exégesis del Nuevo Testamento.* Salamanca: Sigueme.

Thompson, J. B. (2011). *Ideologia e Cultura Moderna: Teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa.* 9. Petrópolis: Vozes.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Concepto de determinante: una revisión de los libros de álgebra lineal.

Resumen

El siguiente texto expone la revisión de algunos libros utilizados en los cursos de álgebra lineal I de la Universidad Industrial de Santander, esta revisión hace parte de una investigación mayor; "Análisis histórico-epistemológico del concepto de determinante", la cual permitirá comprender el tratamiento que se da al concepto de determinante en los diversos textos. Se busca en ellos información sobre cómo se desarrollan los contenidos de enseñanza, los contenidos científicos, antecedentes y la proyección en el futuro. Se indaga en la importancia que generan los autores, las teorías, y su aplicación en las aulas de clases, así como los aspectos filosóficos y epistemológicos abordados en el proceso de enseñanza/aprendizaje.

Palabras clave: educación, matemática, epistemología, álgebra lineal, determinante.

Introducción

Los cursos de álgebra lineal se encuentran presentes en la mayoría de los programas de Ingenierías, licenciaturas en Matemáticas y Física. Son numerosas las investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que atraviesan los estudiantes para comprender los diferentes conceptos relativos al álgebra lineal, (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 2000; Dubinsky, 2001; Dorier y Sierpinska, 2001). Los anteriores investigadores coinciden en que las dificultades radican en la construcción de diversos conceptos de álgebra lineal en los estudiantes recién ingresados a la universidad, estos se ven exigidos a construir conceptos con un lenguaje formal y abstracto, cuando su preferencia siempre se limita al trabajo con procedimientos mecánicos, lo que imposibilita la comprensión de los conceptos involucrados (Dubinsky, Dauterman, Leron y Zazkis, 1994).

Esta dificultad ha sido una problemática de interés dentro de la Matemática Educativa, ya que no son exclusivas de los individuos que abordan actualmente los conceptos básicos de Álgebra Lineal, sino que hace parte de obstáculos que surgieron en la construcción de los conceptos mismos. El estudio de aspectos históricos y epistemológicos de los objetos matemáticos ampliará la mirada y podrá aportar elementos para repensar aspectos de orden curricular, matemático y/o didáctico (Gómez 2003; Arboleda 2011).

Sí se conoce los aspectos relativos a la construcción histórica-epistemológica de la noción de determinante, se podrá proponer herramientas puntúales para un curso de Álgebra Lineal. Esto es, proponer aspectos curriculares referentes al contenido y aspectos didácticos asociados con el diseño de situaciones que den lugar a ampliar y generar una nueva mirada del concepto de determinante, más allá de la aplicación de un algoritmo.

El análisis y revisión de los libros de texto, está enfocado en tres libros que se usan como guía en los cursos de Álgebra Lineal I en la Universidad Industrial de Santander, se analiza el enfoque y el contenido en cuanto al concepto de determinante.

Marco Teórico

El marco teórico del estudio tiene varias fuentes de las que se expondrá únicamente lo más esencial al desarrollo de la investigación, ofreciendo la perspectiva teórica a la cual va orientada.

La historia de las matemáticas y educación matemática como investigación

Esta primera sección consiste en establecer un "mapa" en la cual se evidencie cómo se encuentra la investigación de la historia matemática y cómo podemos aprovecharla para la educación matemática además de considerar la pertinencia de un estudio de este tipo.

Anacona (2003) establece varias maneras de abordar el trabajo histórico en torno al conocimiento científico; la autora hace hincapié en dos corrientes: internalista y externalista. La primera hace énfasis en que el objeto de las ciencias es la ciencia misma, esto se puede entender como "hacer historia" de acuerdo con su estructura formal de construcción. Ya en la corriente externalista se tiene en cuenta el ámbito social. La autora enfatiza en el peligro inminente de estar en cualquiera de las dos corrientes, desde la corriente internalista se corre el riesgo de eliminar los componentes que ayudan a la construcción y apropiación del conocimiento el desarrollo científico se independiza totalmente del contexto socio-cultural. La segunda postura crea el riesgo que el estudio se limite dejando de lado el entramado teórico en sí, sería una historia de matemáticas sin matemáticas; sin fundamentos y totalmente vacía.

Una tercera forma de abordar el trabajo histórico está en la intersección entre las dos posturas; filosóficas y metodológicas. Al respecto Anacona (2003) menciona:

> … es posible pensar en un trabajo en Historia de las Matemáticas que dé cuenta de los complejos procesos de génesis, evolución y consolidación de una teoría matemática, sin olvidar que estos procesos de construcción se desarrollan en el marco de un contexto sociocultural donde circulan de manera particular concepciones pedagógicas, filosóficas y teológicas, así como políticas educativas, entre otras. (p. 33)

Este pensamiento hace emerger las bases de nuestra investigación, bases fuertes que se originan en:

- Un estudio de la génesis histórica: esto pone en manifiesto los diversos puntos de vista que para un concepto matemático fueron considerados como correctos y posteriormente rechazados o modificados.
- La epistemología: esta ayuda a establecer qué elementos constituyen la significación de un determinado concepto.
- El contexto sociocultural: es allí donde los libros de texto entran en función pedagógica, social y política. En función pedagógica ya que ocupa la transmisión de los saberes básicos, en función social porque contribuye a la inculturación de las jóvenes generaciones y en función política ya que sus contenidos están regulados por poderes públicos.

Dicho contexto socio-cultural es el que enmarca este escrito, debido a que miraremos dentro de ellos, observaremos como están constituidos, en que se diferencian y muchas más características que en la metodología mencionaremos, de por si es importante establecer en cuanto a los libros de texto utilizados en la enseñanza del Álgebra Lineal I en la Universidad Industrial de Santander estos pueden considerarse fuentes primarias como lo afirma (Cardoso,

2000) y documentos de útiles escolares (Berrio, 1976).

Ya adentrándonos a la segunda parte de este artículo, que está enmarcado en lo que Gómez (2003) llama un análisis de los libros de texto que se realizó durante la investigación histórico-epistemológica. Con esto se buscó obtener una imagen de la situación histórica y la actual de la enseñanza del concepto de determinante, basándose en el enfoque que establecen los libros de texto utilizados en la UIS, los cuales fungen como documentos históricos educativos y son reflejo de las prácticas pedagógicas utilizadas actualmente (Berrio, 1976; Gómez, 2003).

Metodología

Los libros fueron dados al autor de este estudio por profesores que ejercen en la mencionada cátedra universitaria, y que a su vez hacen parte del seminario de álgebra lineal de la UIS. Por medio de una solicitud tipo encuesta-informe, en la cual se solicitaba la información del desarrollo del curso de algebra lineal, en dicho informe se debían tener en cuenta los siguientes ítems:

- Distribución de los temas, el número de evaluaciones y su ponderación.
- Texto(s) guía(s) y la bibliografía.
- Temas de los parciales, resultados obtenidos en promedio en cada parcial.
- Enfoques predominantes: Algorítmico, argumentativo, geométrico y/o computacional.
- Dificultades y aciertos detectados.

Para esta ponencia se tiene en cuenta el segundo ítem, el cual enuncia los textos guías. Al mirar los diferentes textos guías que utilizan los maestros se vio que en mayor medida utilizan los siguientes libros:

Tabla 1
Fuentes primarias de los libros de álgebra lineal analizados

Autor	**Titulo**	**Año publicación**
Howard Anton	Introducción al Álgebra Lineal, tercera edición	1976
Stanley Grossman	Álgebra Lineal, quinta edición.	1996
David Poole	Álgebra Lineal Una introducción moderna, tercera edición	2011

Siguiendo a Cardoso (2000), ambos análisis se llevaron cabo de manera interpretativa (hermenéutica), es decir, se intentó reconstruir los hechos históricos entendiéndolos tal como los entendieron los actores, pero aprovechando la perspectiva que nos da estar en el presente para generar nuevos conocimientos.

Cuadro Comparativo De Los Libros De Álgebra Lineal Analizados.

Intentáremos mostrar a nivel muy general las diferencias que se encuentran en los libros Analizados, esto con el fin de ver el enfoque que estos tienen acerca del concepto de determinante, también el ojear con un poco más de información el tratamiento que le dan al concepto de determinante, este cuadro tratará de ser lo más completo posible.

Se establecieron para el cuadro comparativo los siguientes criterios, los cuales se mostrarán los resultados analizados de los primeros cuatro.

1. Contenido: como está organizado el contenido

2. Capítulo sobre determinantes: reconocimiento del capítulo de determinantes
3. Estructura del capítulo de determinantes: como aborda el capítulo de determinantes
4. Otras menciones del concepto de determinante: menciones sobre el determinante fuera del capítulo específico.
5. Referencias históricas: menciones históricas o apartes sobre autores matemáticos.
6. Concepto de determinante: cómo define el determinante
7. Importancia de los teoremas: como se da el tratamiento a los teoremas
8. Teoremas mencionados
9. Representación geométrica: representación geométrica con relación al concepto de determinante
10. Demostraciones: el tratamiento de las demostraciones
11. Matemáticos citados: que matemáticos son mencionados.
12. complementos adicionales: ayudas extras que presenta el libro

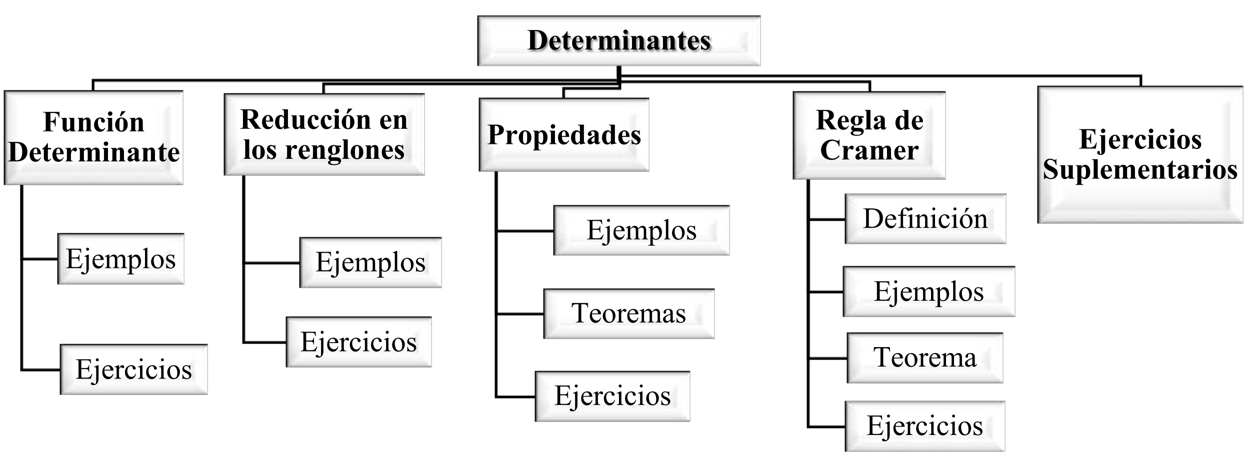
Para la recolección de los datos en los libros mencionados se tenía en cuenta la lista anterior y se iban tomando notas y a partes de lo encontrado en relación a los temas del determinante, todo era organizado en fichas sencillas, las cuales permitían organizar los datos adquiridos para poder formar el cuadro comparativo.

Resultados.

Introducción Al Álgebra Lineal. Howard Anton, Tercera Edición, 1976.

El libro Introducción al Álgebra Lineal de Howard Anton en su tercera edición del año 1976 proporciona un tratamiento elemental de la materia. Dedica el primer capítulo del libro a los sistemas de ecuaciones lineales, y posteriormente, de manera similar a como lo hacen otros libros de texto, dedica un capítulo completo a la presentación del concepto de determinante, sin embargo, existe la particularidad que en el desarrollo del capítulo precedente no se menciona en ningún momento el concepto de determinante.

Cada capítulo tiene una estructura similar a lo que se plantea en la gráfica, sin embargo, cada uno tiene sus particularidades según el tema del que trate. En particular el capítulo dedicado a los determinantes tiene la siguiente estructura:



Esquema 1. Estructura del tema determinantes en el libro.

Álgebra Lineal. Una Introducción Moderna, David Poole, Tercera Edición, 2011.

El libro cuenta con características particulares que lo han convertido en uno de los textos de álgebra favoritos de los educadores. Los temas que se tratan en el libro son abordados en un lenguaje simple, fácil de comprender por todos, se dan ejemplos y aplicaciones de los teoremas y de los ejercicios propuestos.

Este libro a diferencia de otros similares no dedica un capítulo específico al concepto de determinante, sin embargo, en el apartado 2 del capítulo 4 hace mención extensa del tema e introduce el concepto de determinante contextualizándolo primero en el origen y uso del término.

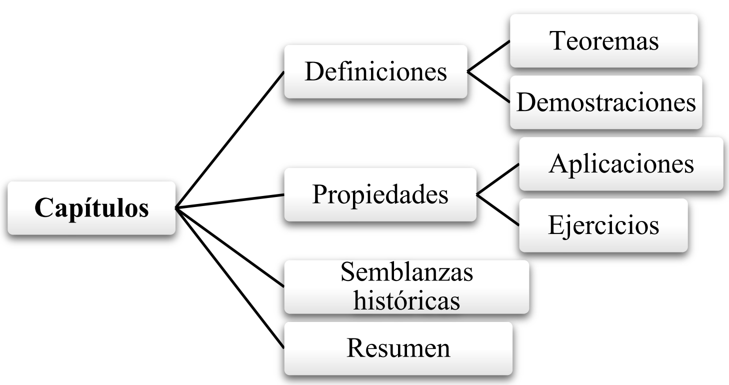
Destaca el hecho de que en el libro comentan que el concepto de determinante se originó dos siglos antes del concepto de matrices a pesar de que actualmente se enseñan de forma inversa.

Álgebra Lineal, Stanley Grossman, Quinta Edición, 1996.

Grossman (1996) quiere hacer accesible el álgebra lineal al mayor número posible de estudiantes en una gran variedad de disciplinas, destacando sus distintas aplicaciones. También quiere reforzar conceptos en aquellos estudiantes que “necesitan solo conocimientos firmes del álgebra correspondiente a la enseñanza media superior” (p. vii).

Al igual que Poole (2011), Grossman considera importante contextualizar algunos conceptos, por eso incluye lo que él llama “semblanzas históricas” dispersas a lo largo del libro.

El libro se encuentra organizado por capítulos y ellos a su vez tienen una estructura en la que presentan el contenido. Tal estructura es similar a la que se muestra a continuación en el esquema 3.



Esquema 3. Estructura de los capítulos

Grossman (1996) dedica un capítulo completo al tema de los determinantes, específicamente el segundo capítulo del libro. Este se presenta tras haber abordado con anterioridad el tema de las ecuaciones lineales y matrices.

Tabla 2
Elementos del cuadro comparativo de los libros de álgebra lineal analizados.

Elementos del Cuadro comparativo de los libros de álgebra lineal analizados.	**Álgebra lineal una introducción moderna David Poole, tercera edición 2011.**	**Introducción al álgebra lineal Howard Anton, tercera edición 1976.**	**Álgebra lineal de Stanley Grossman, quinta edición 1996**

CONTENIDO	Presenta 7 capítulos y 5 apéndices, ninguno de ellos dedicado a determinantes	Consta de 8 capítulos y una sección de respuestas a los ejercicios, de los cuales el 2do capítulo está dedicado a los determinantes	Contiene 6 capítulos y 5 apéndices, adicionalmente consta con un apartado sobre Matlab. El capítulo 2 dedicado a determinantes
CAPÍTULO SOBRE DETERMINANTES	No tiene un capítulo específico dedicado a los determinantes, aborda este concepto en el capítulo de eigenvectores.	Dedica el segundo capítulo del libro a los determinantes, luego de haber abordado los sistemas de ecuaciones lineales y matrices en el capítulo 1.	Dedica el segundo capítulo del libro a los determinantes, luego de haber abordado los sistemas de ecuaciones lineales y matrices en el capítulo 1.
CONCEPTO DE DETERMINANTE	Propone la definición del determinante como la sumatoria (o resta) del producto de los elementos de una matriz de nxn en sus diagonales.	Comprende el determinante como una función que asocia un número real a una matriz dada.	Da exactamente la misma definición de Poole, destacando, al igual que él, que no debe confundirse la notación de determinante con la de valor absoluto, por las barras con que se representa.
ESTRUCTURA DEL CAPÍTULO DETERMINANTES	No tiene capítulo de determinantes	Inicia el capítulo hablando sobre la función determinante, sigue con la explicación de la reducción por renglones, luego las propiedades de los determinantes y finaliza con la regla de Cramer a la que siguen algunos ejercicios suplementarios	Grossman comienza con la definición de determinante a la que sigue las propiedades del mismo luego demostraciones de dos teoremas que considera importantes junto con una semblanza histórica sobre los determinantes a la que le sigue la explicación de determinantes e inversas y finaliza con la explicación de la Regla de Cramer a la cual le sigue un resumen del capítulo junto con unos ejercicios de repaso
OTRAS MENCIONES DEL CONCEPTO DE DETERMINANTE	Solo hace mención al concepto de determinante dentro del capítulo de eigenvectores.	No hace mención en los capítulos precedentes al segundo sobre el concepto de determinante, sin embargo, en el capítulo siguiente dedicado a vectores, en el apartado 3.4 sobre producto vectorial (cruz) usa la notación de determinantes como otra forma de representar la definición.	Es importante mencionar que ya en el capítulo 1 en el apartado de matrices, cuando se está hablando de la inversa de una matriz, se da la primera definición de determinante que presenta el libro, antes del segundo capítulo que es el que dedica específicamente al tema de los determinantes.

TEOREMAS MENCIONADOS	Teorema de expansión de Laplace, Teorema de una matriz triangular, teorema de una matriz cuadrada, teorema de una matriz invertible, teorema del determinante de $(kA) = k ** ndetA$, teorema de la propiedad conmutativa de los determinantes, Regla de Cramer	Teorema de reducción por renglones, teorema de una matriz triangular, teorema de operaciones elementales sobre renglones de cualquier matriz, teorema de matrices cuadradas del mismo tamaño, teorema de una matriz cuadrada inversible, teorema de una matriz inversible, regla de Cramer	Teorema de una matriz triangular, teorema de una matriz triangular invertible, teorema del área generada por el determinante de A, teorema de la propiedad conmutativa de los determinantes, teorema de la factorización LU de una matriz cuadrada, teorema de una matriz permutación, teorema de la traspuesta de una matriz, teorema básico, teorema de una matriz de nxn invertible, teorema del $detA$ diferente de 0, teorema de una matriz de nxn, teorema de una matriz invertible, teorema resumen, regla de Cramer
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	Este autor habla de vectores antes de profundizar en determinantes, ya que considera que el álgebra lineal se compone esencialmente de vectores y que la comprensión de estos en ciertos escenarios concretos, con la finalidad de obtener la comprensión geométrica necesaria	No hace alusión a la representación geométrica de los determinantes	Incorpora la interpretación geométrica de un determinante de 2x2 por considerar que algunas ideas importantes en el álgebra lineal se observan mejor a través de su interpretación geométrica

Conclusiones y discusiones.

El libro de David Poole tercera edición se enmarca en un énfasis geométrico, el mismo autor detalla que conserva la filosofía del álgebra lineal de vectores subrayando la intuición geométrica. Otra cuestión interesante ya adentrándonos a nuestro tema en particular, los determinantes es que esta versión se introduce el método de condensación de Lewis Carroll.

Otro detalle interesante de mencionar y que ya lo hemos tocado en el cuadro comparativo son los bosquejos biográficos e históricos, el libro de Poole hace varios a partes históricos y biográficos a lo largo de su recorrido, enmarca estos a partes como un “esfuerzo social y cultural, así como científico”. También el libro hace apartes etimológicos, para atender el problema de la terminología.

Lo más interesante de mencionar el libro “Introducción al Álgebra Lineal” de Howard Anton es el tratamiento que da a los determinantes, este enfoque guiado por el enfoque clásico de las permutaciones hace del libro de Howard Anton único en su clase. Al hacer un tratamiento del enfoque de permutaciones el autor deslinda el problema de definir el concepto a través de n formas lineales alternantes esto da al estudiante una mejor comprensión, más intuitiva del tema.

En diferencia a los otros libros de álgebra lineal el libro de Grossman inicia el capítulo definiendo la solución de un determinante de orden 2, establece su notación e invita al lector a no confundir la notación del determinante con el valor absoluto. El libro de Grossman al contrario del libro de álgebra lineal de Howard Anton basa su capítulo de determinantes por el método inductivo. Al definir el determinante de orden 3x3 da pautas de cómo resolverlo de forma sencilla y allí entra la primera dificultad no se puede seguir por el mismo método para el determinante de orden 4. Para seguir se hace necesario introducir las definiciones necesarias para manejar el determinante por cofactores y así poder generalizar al determinante de una matriz de nxn.

El enfoque del libro de álgebra lineal de Grossman se guía más por un enfoque orientado a los sistemas de ecuaciones lineales. A la utilización del determinante como una herramienta y no pasa de allí.

Referencias y bibliografía

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. Investigación e innovación en educación matemática, 8(1), pp.30-46.

Anton, H. (1976). *Introducción al Álgebra Lineal (3ra ed.),* México DF, México: Editorial Limusa.

Arboleda, L. (2011). *Los estúdios históricos en educación matemática desde la perspectiva de la práctica docente*. XIII Conferência Interamericana de Educación Matemática. Recife: Universidade federal de Pernambuco.

Berrio, J. (1976). El método histórico de la investigación histórica de la educación. *Revista Española De Pedagogía*, 34(134), pp. 449-475. Recuperado de: http://www.jstor.org/stable/23763481

Cardoso, C. (2000). Introducción al trabajo de la investigación histórica: conocimiento, método e historia (5ta ed.), Barcelona, España: Editorial Crítica, S.L.

Dorier, J.L., & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In D. Holton (Ed.), The teaching and learning at university level - an ICMI study (pp. 255-273). Dordrecht, Boston, LOndon: Kluwer Academic Publishers. Recuperado de: https://archive-ouverte.unige.ch/unige:16848

Dorier, J.L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). On a Research Program about the Teaching and Learning of Linear Álgebra in First Year of French Science University. *International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology,* (2), pp. 111-137.

Dubinsky, E. (2000). *Research in Collegiate Mathematics Education IV* (Vol. 8). American Mathematical Soc.

Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U. & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of Group Theory. *Educational studies in Mathematics*, *27*, pp. 267-305.

Gómez, B. (2003). *La investigación histórica en Didáctica de la Matemática.* En Castro, E., Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 79-86). Granada, España: Universidad de Granada.

Grossman, S. (1996). *Álgebra Lineal (5ta edición.)*, Mexico DF, Mexico: Editorial Mc Graw Hill.

Poole, D. (2011). *Álgebra lineal una introducción moderna*, Mexico DF, Mexico: Editorial International Thompson.

Aproximações entre História da Matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação: um primeiro exercício

Adriana de **Bortoli**
Faculdade de Tecnologia de São José do Rio Preto
Brasil
adrianadebortoli1@hotmail.com
Zionice Garbelini **Martos Rodrigues**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo- Campus de Birigui
Brasil
zionice@gmail.com
Mário Eduardo Alves **Mari**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo- Campus de Birigui
Brasil
marioeduardomari@gmail.com

Resumo

Este artigo relata parte das nossas investigações que tem a intenção de verificar as aproximações entre duas tendências da Educação Matemática: História da Matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação. Nesse texto, discorremos sobre dados coletados por um aluno de graduação do curso de Matemática junto de sua orientadora, cujo objeto de investigação consta do conceito de área no Ensino Fundamental (Ciclo II) e também no Ensino Médio num curso de aprimoramento de professores em exercício do município de Birigui, pelo viés metodológico da História da Matemática a qual foi proposto, um problema contido no papiro *Rhind* (1650 a.C.) de número 48. Em sessões posteriores, foi apresentado um jogo digital que busca desenvolver habilidades para que o usuário do jogo se aproprie de conceitos de matemática de área de figuras planas em uma malha quadriculada. Como resultados, verificamos um interesse maior pela tendência Tecnologias da Informação e Comunicação.

Palavras- chave: História da Matemática. Tecnologias da Informação e Comunicação. Ensino de Matemática. Geometria. Papiro de *Rhind.*

Introdução

Nesse artigo procuraremos dialogar sobre os resultados de nossas pesquisas que estão sendo realizadas a fim de investigar a associação de duas tendências de ensino da Educação Matemática: História da Matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação como possibilidade de potencialização do ensino de Matemática.

A primeira autora desse texto tem buscado entender e apresentar os resultados de suas investigações sobre as chances de aliar as duas tendências de ensino.

Em trabalhos realizados atualmente, junto da segunda autora desse texto, tem investigado sobre a inserção da História da Matemática como ferramenta de ensino e aprendizagem de Matemática. Como resultados, dois textos foram produzidos "(Re) encontros de pesquisa em História da Matemática" (no prelo), onde temos um capítulo intitulado: "Potencialidades de um trabalho colaborativo a partir de problematizações históricas; em foco o tema área e perímetros" e será publicado pelo editora da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, e "Uma proposta do uso da história da matemática na formação continuada de professores, uma experiência com professores do interior do estado de são Paulo"**,** que foi apresentado no VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, em novembro de 2018.

As preocupações com ensino e aprendizagem de Matemática decorrem de nossas práticas docentes aliada as informações sobre a avaliações externas como: Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Sistema de Avalição do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) e Prova Brasil, que afirmam sobre o fracasso escolar.

Ademais, temos a crença de que é importante um diálogo com quem ensina Matemática como nos informa Fiorentini e Miorim (1990) sobre dois vieses para esse problema: por um lado, o aluno que não consegue entender a Matemática que lhe é transmitida pela escola e; por outro, o professor, que não conseguindo alcançar resultados satisfatórios junto a seus alunos, acaba lotando as salas de aula em cursos, em encontros e em congressos, buscando materiais didáticos que possam resolver os seus problemas em sala de aula.

De acordo com esses indicativos e o cenário educacional a qual estamos inseridas, junto a intenção de um graduando em Matemática, de realizar sua pesquisa que irá resultar no seu trabalho de conclusão de curso, fizemos o contato e elaboramos uma proposta com quatro professores da Escola Estadual Hermínio Cantisani localizada no município de Birigui, a fim de oferecer uma oficina de aprimoramento docente com o uso da História da Matemática e de materiais curriculares educativos em conjunto com a metodologia de Tecnologias da Informação e Comunicação.

Para a realização desse trabalho, o aporte teórico que guiou a pesquisa consta dos textos: "A disciplina histórica da Matemática e a formação do professor de Matemática: dados e circunstâncias de sua implantação na Universidade Estadual Paulista, *campi* de Rio Claro, São José do Rio Preto e Presidente Prudente" (STAMATO, 2003); "A História da Matemática e a Educação Matemática na Formação de Professores (BRITO, 2007) e "A história nos planos de ensino de futuros professores de matemática" (BRITO; SANTOS; TEIXEIRA, 2009). Além é claro, da literatura que discute o uso da Tecnologia da Informação e Comunicação para o ensino e aprendizagem de Matemática.

Metodologia

A pesquisa apresenta uma abordagem qualitativa aglutinando aspectos da pesquisa-ação, cuja intenção consta de elaboração de atividades na ótica de possíveis ligação entre História da Matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação.

Além de produções acadêmicas, em forma de livros, artigos em periódicos e trabalhos em eventos, alguns professores da escola básica, ainda de forma tímida, vêm tornando públicas novas experiências advindas de grupos de estudos, dentre eles os colaborativos.

Desse modo, aliado às recomendações dos documentos curriculares nacionais relativos ao ensino de matemática que destacam a importância de um trabalho colaborativo vamos encaminhar o trabalho por uma das formas de colaboração que é por meio de estudos em grupo.

A colaboração tem vindo a ser reconhecida como uma forma de trabalho fundamental em muitas áreas da educação e em muitos outros campos da atividade social. Ela constitui, cada vez mais, um elemento importante de muitos projetos envolvendo professores ou educadores matemáticos (HARGREAVES, 1998; JAWORSKI, 2001; PETER-KOOP et al., 2003 *apud* PONTE, J. P. SERRAZINA, L., 2003). Hoje em dia, é impensável concretizar uma tarefa ou um projeto com um mínimo de complexidade, sem recorrer aos esforços conjugados de toda uma equipa de trabalho. Na verdade, a colaboração é uma estratégia de grande utilidade para enfrentar problemas ou dificuldades, em especial aqueles que não se afigurem fáceis ou viáveis de resolver de modo puramente individual como os que surgem frequentemente no campo profissional.

É de notar que algumas atividades de colaboração realizam-se entre “pares”, ou seja, todos os membros da equipe pertencem a um mesmo grupo (profissional ou outro); outras, envolvem participantes com estatutos profissionais diferentes.

Como referimos, num trabalho de colaboração, existem necessariamente objetivos comuns entre os diversos participantes. No entanto, para além disso, cada um deles tem, como é natural, os seus próprios objetivos individuais. Para a coesão do grupo, é importante que todos os participantes partilhem em grau significativo os objetivos comuns. Mas também é importante que tenham os seus objetivos individuais, ligados à sua função profissional, à sua personalidade, aos seus projetos, pois isso reforça naturalmente o seu envolvimento no trabalho e o seu sentido de realização pessoal.

A pesquisa tem como sujeitos quatro docentes que lecionam Matemática, da Escola Estadual Hermínio Cantizani[1] e propomos a eles cinco encontros que ocorreram com registros de narrativas, a partir de sessões de estudos sobre o tema referido. Durante os encontros fizemos as vídeo-gravações a fim de que pudéssemos analisar em momentos posteriores os frutos dessas atividades, modificando-as a cada novo encontro e refletindo sobre os aspectos teóricos relacionadas à prática docente.

---

[1] O convite foi realizado a esse grupo de professores da escola citada por serem professores que se apresentam abertos ao diálogo com o Grupo Colaborativo em Educação Matemática (GCEM), em que a segunda proponente desse artigo é líder e já houve uma participação deles em outros eventos de aprimoramento docentes promovidos pelo GCECM.

Como questão dessa investigação buscamos responder: Que relações ocorrem ao usar História da Matemática e Tecnologia da Comunicação e Informação? Uma tendência sobressai a outra?

Desenvolvimento

Programamos cinco encontros ao qual denominaremos de seções de estudo, com quatro professores de uma escola da rede pública paulista, com registros de narrativas, a partir de sessões de estudos sobre o tema referido, que serão descritos brevemente a seguir:

- 1ª Seção: conversa inicial com os professores sobre suas metodologias de trabalho com o conceito em estudo.
- 2ª Seção: caracterização da civilização egípcia e apresentação dos problemas 48 e 50 a partir da tradução do problema apresentado no papiro de *Rhind*, junto das obras de referências clássicas de História da Matemática, como os textos de Boyer e Eves.
- 3ª Seção: nesse encontro havia o interesse de apresentar um material didático (poliminós) que teve como um dos precursores de seu uso o professor Ruy Madsen Barbosa.
- 4ª Seção: atividades relacionadas a pentaminós: coleções didático-pedagógicas de Ruy Madsen Barbosa, discussão e execução das atividades propostas na coleção. Adicionalmente, uma coleção do mesmo assunto, publicada em 1992, por Antonio José Lopes.
- 5ª Seção: jogo associado ao *Geogebra*. Nesse encontro associamos as discussões anteriores ao uso do Geogebra para o trabalho com os pentaminós.

Depois de conhecer as propostas metodológicas dos professores acerca do tema área e perímetro foi apresentado considerações históricas sobre o papiro de *Rhind*, segundo os clássicos textos de história da matemática, como segue:

> Datado de aproximadamente 1650 a.C., consta de um texto matemático na forma de manual prática que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. O papiro foi adquirido no Egito por Rhind, sendo mais tarde comprado pelo museu britânico (Eves, 2004, p.69).

Outro texto de referência trouxe informações adicionais do documento, que também foram apresentadas aos professores: o papiro de *Rhind*, com sua dimensão cerca de 0,30 metros de altura e de 5 metros de comprimento (BOYER, 2003, p.9), e contendo 85 problemas matemáticos, copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo, em que 10 tratam de geometria. O papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind.

Uma característica a ser ressaltada sobre esses problemas, 48 e 50, é que eles apresentam um diferencial em relação a outros pelo fato de apresentarem uma ilustração geométrica, conforme podemos observar pela figura 1:

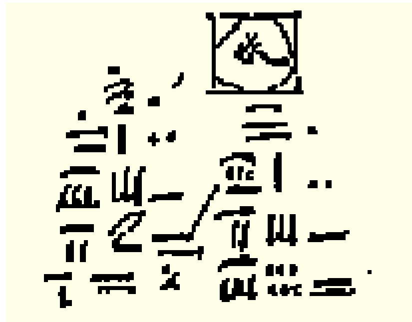


Figura 1: Imagem google, 2018

Ainda durante esse mesmo encontro, foram abordadas questões relacionadas aos modos em que os primeiros registros do conceito de área são tratados nos livros de História da Matemática. Adicionalmente, os professores cursistas tiveram a oportunidade de explanar sobre suas práticas docentes acerca das suas escolhas quanto a forma de como eles trabalham tal conceito em sala de aula. Como resultados, as afirmações do trabalho docente desse grupo de professores apontam por uma escolha de forte intenção pelo caminho de contextualização do conceito, especialmente relacionado a realidade de seus alunos.

Sequencialmente, com o objetivo de relacionar um método historicamente produzido a um formato trabalhado por um educador matemático, apresentamos uma apostila denominada *Poliminós*, na qual traz importantes contribuições para a área de Educação Matemática por destacar um tratamento diferenciado do Poliminós na perspectiva da Educação Matemática. Nessa apostila, seu autor, Ruy Madsen Barboda, menciona o trabalho do professor Antônio José Lopes, retratando um breve histórico do modo como este material chega ao Brasil. Barbosa (2005) propunha aos professores uma possibilidade de trabalhar os assuntos área e perímetro com "pentaminós". Possibilidade essa já apontado nos 1990 pelo professor Antônio José Lopes.

Dado que os professores parceiros já haviam feito curso de capacitação docente pela Secretaria de Educação de Estado na Diretoria de Ensino da cidade de Birigui sobre o uso dos pentaminós, em reunião no grupo de pesquisa, decidiu-se não prosseguir com o planejamento inicial por acreditar que as sessões de estudo poderiam tornar-se repetitivas e redundantes.

Dessa maneira, como um dos autores deste trabalho tinha como objetivo desenvolver um trabalho de pesquisa relacionado a Tecnologia Digitais de Comunicação, o grupo fez a opção por dar continuidade ao manuseio da plataforma Geogebra no tocante ao tema de áreas e perímetros. Consequentemente, em sessões de estudo com os professores da Educação Básica já citados nesse artigo, seguimos com o estudo dos seguintes temas: Criação de projetos; Layout do software; Documentação do Geogebra; Utilização de algumas ferramentas do software. Mais precisamente as que envolvem área e perímetro; Escolha do tipo de polígono iríamos trabalhar e quais ferramentas utilizaremos para a construção dele; Como salvar um projeto local ou online em compartilhamento em grupos de estudos; Pesquisas, download e edição de materiais do site do Geogebra; Criar conta ou realizar *login* no site do Geogebra; Trabalhar com grupos de pesquisa no Geogebra; Compartilhamento de materiais em grupos de pesquisa;

Ao fim da apresentação de todo o conteúdo foi explanado que o roteiro a ser trabalhado seria conhecer a ferramenta Geogebra, utilizá-lo num trabalho *offline* criando um polígono e online por meio de grupos de compartilhamento de materiais.

Considerações Finais

Apresentamos as etapas e os apontamentos iniciais de um projeto ainda em desenvolvimento. Assim, diante dos referidos encontros pudemos perceber que os professores em exercício estão abertos a fazer uso da história da matemática, desde que seja possível um apoio do professor pesquisador no sentido de orientar e de suprir as carências que eles relatam pela falta da disciplina história da matemática em suas formações. No entanto, nessa proposta em específico, não conseguimos alongar a inserção do uso da História da Matemática como ferramenta de ensino, devido as ocorrências já mencionadas.

De outra parte, sobre o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação os professores se mostraram interessados em conhecer e usar o Geogebra e incorporá-lo em suas práticas docentes conforme depoimento de alguns deles.

Entendemos que a devolutiva de um dos participantes do grupo traz aspectos favoráveis a esse tipo de ação de formação, nas palavras de um dos participantes justifica nossa ação de formação. Em suas palavras:

> Minha aproximação com o software Geogebra se deu há cerca de cinco anos. A exploração inicial aconteceu em turmas do ensino médio, na observação das representações gráficas das diversas funções (1ºgrau, 2º grau, exponencial, logarítmica, trigonométrica), como um recurso facilitador das aprendizagens dos alunos por proporcionar uma visualização detalhada de deslocamentos dos diferentes parâmetros e seus impactos. Nesse período, vídeos no youtube me auxiliaram muito como ajuda para eu conhecer o software. Posteriormente, tive a oportunidade de participar de alguns minicursos, que exploravam todo potencial pedagógico do Geogebra em outros conteúdos matemáticos, (áreas, perímetros, geometria espacial, planificações, etc). Nesse sentido, a parceria com o Instituto Federal - Campus Birigui, tem trazido grandes contribuições formativas para nós, professores de Matemática da rede estadual. Digo isso, pois na formação continuada geralmente contempla assuntos gerais e comuns da prática educativa. Oportunizar o aprimoramento específico do conhecimento matemáticos, bem como recursos e estratégias de ensino, é sempre muito enriquecedor, para os educadores, mas em especial, para os alunos. (PARTICIPANTE DO CURSO DE FORMAÇÃO, 2018)

Pela fala dessa participante junto de outras manifestações ocorridas em nossos encontros, observamos certa preferência pelo uso da informática à história da matemática. No entanto, como temos dados iniciais e um grupo pequeno de profesores, não ousamos a afirmação de que uma tendencia de ensino sobressai àc outra, contudo, que junto de outras ações por nós já programadas teremos mais adiante outros indicativos que definam ou delineiam essa questão.

Referências e bibliografia

Alves, F. 2014. *Gamification*: como criar experiências de aprendizagem engajadoras um guia completo-do conceito à prática. São Paulo; DVS.

Ball, D. L.; Thames, M.H.; Phelps, G. Content for teaching What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, n.59 (5). p.389-407.

Borba, M.C; Silva, R.S.; Gadanidis, G. (2014). *Fases das tecnologias digitais em educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Borba, M.C.; Penteado, M. G. (2003). *Informática e Educação Matemática*. 3ªed. Belo Horizonte: Autêntica.

Borba, M.C. Softwares e internet na sala de aula de Matemática. (2010). *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*.

Bortoli, A.; Rodrigues, Z. G. M. (2016). Como fica a avaliação na aprendizagem de matemática quando se trabalha com a tecnologia em informática? *Anais IV Congresso Nacional de Avaliação e Currículo*, Bauru.

Bortoli, A.; Rodrigues, Z. G. M. (2016). *Aplicativos para a aprendizagem de matemática e o uso de vídeo-gravações*. II Congresso Iniciação Científica FATEC Lins.

Boyer, H. (2003). *Introdução à história da matemática.* Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP.

Brasil, Mec. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental - Matemática*. Brasília: MEC.

Brito, A. J. História da Matemática e da Educação Matemática na Formação de Professores. (2007). *Educação Matemática em Revista*. nº 2, ano 13.

Brito, A. J.; Santos, K. E. S.; Teixeira, M. R. G. (2009). A história nos planos de ensino de futuros professores de matemática. *Horizontes*. v.27, n.1, pp.115 a 120.

Dullius, M.M; Quartieri, T. (org.) (2014). *Explorando a matemática com aplicativos computacionais: anos finais do ensino fundamental*. Lajeado: Univates.

Eves, C.B. (2004). *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher.

Fiorentini, D. (2008). A Pesquisa e as Práticas de Formação de Professores de Matemática em face das Políticas Públicas no Brasil. *BOLEMA.* Rio Claro (SP), Ano 21, nº 29, pp.43 a 70.

Fiorentini, D. (2009). Quando acadêmicos da universidade e professores da escola básica constituem uma comunidade de prática reflexiva e investigativa. In: *Práticas de formação e pesquisa de professores que ensinam Matemática.* Campinas: Ed. Mercado das Letras.

Fiorentini D. Miorin M. A (1990). Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da Matemática. *Boletim da SBEM-SP*, n. 7.

Fiorentini, D; Lorenzator, S. (2007). *Investigação em Educação Matemática:* percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

Franchi, A. et al. (1992). *Geometria no 1º grau: da composição e da decomposição de figuras às fórmulas de área.* São Paulo: CLR Balieiro. (Coleção Ensinando- -aprendendo, Aprendendo Ensinando; 7), 43 p.

Lopes A. J. (1992). Pentaminós Capítulo 2 In**:** FRANCHI, A. et al. *Geometria no 1º grau: da composição e da decomposição de figuras às fórmulas de área.* São Paulo: CLR Balieiro. (Coleção Ensinando--aprendendo, Aprendendo Ensinando; 7),43 p.

Martos-Rodrigues, Z. M.; Bortoli, A. Potencialidades de um trabalho colaborativo a partir de problematizações históricas : em foco, o tema área e perímetros. In: *(Re) encontros de Pesquisa em História da Educação Matemática***.** Ed UFRN. Natal, 2018. (no prelo).

Miguel, A. (1998). As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos Reforçadores e questionadores. *Zetetiké*, pp. 73 a 105.

Miguel, A. & Brito, A. J. (1996). A História da Matemática na Formação do Professor de Matemática. *Cadernos CEDES - História e Educação Matemática.* Campinas: Papirus, n. 40, pp. 47-61.

Ponte, J. P. Serrazina, L. (2003). Professores e formadores investigam a sua própria prática. O papel da colaboração. *ZETETIQUE.* V.2, n.11. pp.9-55

Robins, G. Shute, C. (1987). *The Rhind Mathematical Papyrus:* an ancient Egyptian text. London: British Museum Press.

Romanello, L. A.; Maltempi, M. V. (2016). A utilização do smartphone no ensino de função: a visão dos alunos. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo. *Anais XII Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2016, p.1-12.

São Paulo (2014-2017). Secretaria de Educação. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo:** Matemática. Caderno do Aluno 5 série/6º ano São Paulo: SEE.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Confêrencia Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

Os diamantes que os garimpeiros não encontraram: histórias da formação dos professores (de Matemática) em uma região de garimpo

Eliete Grasiela Both
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Unesp
Brasil
eliete.both@bag.ifmt.edu.br
Ivete Maria Baraldi
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Unesp
Brasil
ivete.baraldi@unesp.br

Resumo

O presente artigo é um recorte de uma pesquisa de doutoramento que está investigando a formação de professores (de Matemática) em uma região, surgida do garimpo de diamantes, formada pelos seguintes municípios: Araguaiana, Barra do Garças, Pontal do Araguaia e Torixoréu, no estado de Mato Grosso e Aragarças e Baliza, no estado de Goiás. O recorte temporal abrange da década de 1920 (início do garimpo e povoamento urbano no local) à de 1980 (criação da Universidade Federal de Mato Grosso em Barra do Garças). Utilizando a metodologia da História Oral, cotejamos fontes orais, por nós produzidas, e demais fontes disponíveis, construindo narrativas históricas sobre características da Educação Matemática na região citada. Até o momento, realizamos nove entrevistas com professores que atuaram em Aragarças, Araguaiana, Barra do Garças e Torixoréu, e pesquisa documental em algumas escolas. Pelo desenvolvimento destas ações está sendo possível conhecermos aspectos da formação docente no local.

Palavras chave: História Oral, formação docente, região de Barra do Garças.

Introdução: os primeiros diamantes por nós encontrados

Em nossa pesquisa de doutoramento estamos à procura de grandes diamantes que juntos comporão o tesouro que pretendemos formar, nossa tese. Fazendo uma analogia com o garimpo, pois nosso trabalho será desenvolvido em uma região que é oriunda do garimpo de diamantes às margens de dois grandes rios, Garças e Araguaia, nos estados de Goiás e Mato Grosso (Brasil), os diamantes por nós procurados são as histórias sobre a formação dos professores (de Matemática). A região, a qual nos referimos, compreende quatro municípios mato-grossenses e dois municípios goianos e é conhecida pelos moradores locais como região de Barra do Garças.

Durante nossas escavações, antes de encontrarmos os grandes diamantes que tanto desejamos, fomos encontrando outros tantos diamantes que foram nos animando e indicando o caminho para a composição de nosso tesouro. Esses diamantes são os resultados das escavações prévias que realizamos, que nos ambientaram com o cotidiano da garimpagem e nos ajudaram a compreender como devíamos estruturar a busca dos diamantes maiores, que eram nosso principal objetivo.

Para isso, estamos nos valendo da metodologia da História Oral (a qual é um método e também uma perspectiva de pesquisa), por meio da qual constituímos um cotejamento entre as fontes orais, por nós produzidas a partir de entrevistas com professores que ensinaram matemática no período enfocado, com outras fontes documentais e bibliográficas, de modo que seja possível escrever uma história (ou histórias) da formação dos professores (de Matemática), na região de Barra do Garças.

Dessa maneira, queremos esclarecer que a parte do tesouro que aqui apresentamos é um pequeno lote de nossa garimpagem que está sendo desenvolvida, onde queremos mostrar algumas faces dos grandes diamantes já encontrados, ou seja, esboçarmos alguns aspectos que percebermos, até o momento, sobre a formação docente na região.

Nosso Garimpo

Nossa região de garimpagem é formada por seis municípios de emancipação relativamente recente, e características peculiares. Todos se originaram do garimpo de diamantes, sendo que a região nesse período inicial era formada por apenas três municípios, situados às margens dos rios Araguaia e Garças: Araguaiana, que originou Barra do Garças, Torixoréu, do qual se desmembrou Pontal do Araguaia, e Baliza, da qual Aragarças é oriunda (Figura 1).

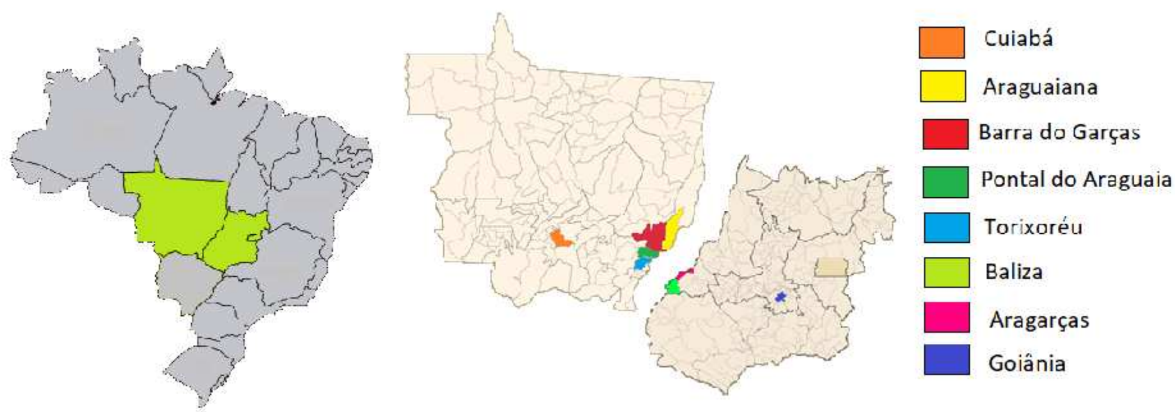


Figura 1. Região da Pesquisa[1].

Conforme Valdon Varjão (2000), historiador regional, a história dessa localidade pode ser dividida em quatro fases principais. A fase garimpeira, que teve seu apogeu de 1924 a 1942, período no qual um grupo de garimpeiros se instalou na região na busca por diamantes, foi a

[1] Os municípios de Cuiabá e Goiânia não participam da pesquisa, mas por serem as capitais dos estados de Mato Grosso e Goiás, respectivamente, estão destacados no mapa como forma de referência de localização.

primeira delas. Esses trabalhadores construíram as primeiras casas e abriram algumas ruas, dando início aos povoados de Barra Cuiabana (atual Barra do Garças) e Barra Goiana (atual Aragarças), em margens opostas dos rios Garças e Araguaia, nos municípios de Araguaiana – MT e Baliza – GO, respectivamente.

A Fundação Brasil Central – FBC assumiu o protagonismo da segunda fase, 1943 a 1964. Conforme Varjão (1980, p.62), nessa época os municípios do oeste goiano e leste mato-grossense, nossa região de estudo, com destaque para Aragarças, foram custeados por essa fundação, a qual foi instituída pelo Ministro João Alberto e instalada em Aragarças em agosto de 1943 e a partir de então "dominou econômica e politicamente o Brasil Central, trazendo um afluxo de progresso e melhoramento à região, importando novos costumes, e até mesmo uma civilização aprimorada".

A terceira fase se refere aos projetos de incentivos fiscais que marcaram o período entre 1965 e 1973. Varjão (2000) relata que os projetos Sudam e Sudeco incentivavam as empresas que se instalavam na região, criando oportunidades de emprego e atraindo grandes grupos financeiros.

A migração e a colonização gaúcha marcam a quarta fase histórica da região, período entre 1974 e 1985. Essa fase

> [...] pode ser considerada o passo decisivo da implantação da agricultura de nível extraordinário. Foram criadas cooperativas para imigrar colonos gaúchos para a região, com o objetivo de implantar a agricultura. Foi introduzida a tecnologia no trabalho da terra, com grandes áreas plantadas. Ao longo dos anos, a pecuária moderna foi sendo introduzida e incentivada. (Varjão, 1985, p.85).

A partir disso, tomando como referência as fases destacadas por Varjão, decidimos o período sobre o qual iríamos nos debruçar em nosso processo de garimpagem: a partir da década de 1920, quando iniciou a fase garimpeira na região de Barra do Garças, implicando no surgimento dos primeiros conglomerados urbanos, até a década de 1980, quando foi instituído um campus da Universidade Federal de Mato Grosso no município de Barra do Garças.

Metodologia: os diamantes que fazem brilhar o caminho

Para o desenvolvimento de nossa garimpagem estamos nos deixando guiar por um tesouro de diamantes valiosíssimos, que nos ajudam a encontrar o caminho na busca do nosso próprio tesouro. Não podemos nos apropriar desses diamantes, pois eles são um tesouro público, mas podemos usufruir de seu brilho e pretendemos ajudar a aumentá-lo.

Esse tesouro é a metodologia de pesquisa na qual nos estruturamos, no caso, estamos nos valendo da metodologia da História Oral. Entendemos que, por meio dela, é possível elaborarmos versões históricas para nosso objeto de pesquisa, com uma amplitude diferenciada, nos valendo dos depoimentos de nossos colaboradores, bem como, de fontes escritas, áudios, vídeos, ou outras que consigamos encontrar. Pretendemos sempre o cotejamento entre tais fontes, pois não as entendemos como opostas, mas como complementares, pois, conforme Albuquerque Jr. (2007, p.230), "haverá sempre um traço de oralidade riscando a escritura e as falas sempre carregarão pedaços de textos". Com os depoimentos, constituímos narrativas que são o suporte para o desenvolvimento da pesquisa e, assim, por meio destas, com o auxílio das demais fontes, é possível analisar nosso foco de interesse. É importante ressaltarmos que não nos valemos de diversas vertentes buscando uma checagem ou validação de informações e sim como possibilidade de "complementação, esclarecimento, compreensão de perspectivas e possibilidades" (Baraldi, 2003, p. 218).

Ao escolhermos a História Oral não temos uma metodologia "fechada", pois em todo momento a questionamos, avaliamos e testamos, buscando encontrar possibilidades, restrições e respaldo das ações que desenvolvemos, portanto, é "entremeada por reflexões, sistematizações, aproveitamentos e abandonos: uma antropofagia" (Garnica, 2013, p. 35).

Um dos aspectos mais marcantes da História Oral consiste na produção intencional de fontes históricas, por meio das narrativas constituídas a partir das entrevistas. Para a criação dessas fontes foram considerados alguns procedimentos, que iniciaram na escolha do tema, o que levou à busca de bibliografias e leituras relevantes ao desenvolvimento do trabalho, e trouxe, possibilidades de colaboradores, os quais estão sendo escolhidos relativamente ao envolvimento, direto ou indireto, com o objeto de estudo. É prática comum no Grupo de Pesquisa História Oral e Educação Matemática – Ghoem, do qual somos membros, os depoentes serem escolhidos pelo critério de rede, em que um depoente indica nomes de outros possíveis colaboradores, que possam auxiliar no processo de constituição de fontes, em nossa pesquisa, em alguns momentos, estamos nos valendo deste critério também.

Depois da escolha dos possíveis depoentes, fazemos um primeiro contato explicando a pesquisa a ser realizada e solicitamos a colaboração. Análises iniciais do assunto, sobre os colaboradores e acerca do que se pretende com cada um, possibilitaram a elaboração dos roteiros e ofereceram um nível prévio de embasamento no momento das entrevistas. O roteiro, ou os temas norteadores do roteiro, podem ser enviados antes da entrevista àqueles que aceitaram participar, isso auxilia na rememoração, e, ainda, na procura de materiais que possam ser válidos à pesquisa. O roteiro serve como um balizador durante a entrevista, porque embora possam ser realizadas as mesmas perguntas, as entrevistas dificilmente seguem um mesmo rumo, uma vez que o entrevistado é o protagonista da direção que cada uma segue.

Após a realização das entrevistas segue-se o próximo ciclo, a transcrição, que é o registro escrito do que foi gravado em áudio, depois disso, textualizamos a entrevista, momento em que são removidos alguns vícios de linguagem e repetições buscando uma maior homogeneidade do texto, neste momento a ordem cronológica ou temática também pode ser revista, procurando um melhor atendimento ao objeto estudado. É importante que mesmo após algumas falas serem suprimidas, o entrevistado se reconheça na narrativa final. As textualizações são, basicamente, desenvolvidas pelo pesquisador, logo, representam textos repletos de interpretações e vieses, sendo um movimento prévio de análise e diálogo entre entrevistador e depoente.

Finalmente, de posse de ambos os textos, transcrição e textualização, retornamos aos depoentes para que estes possam verificá-los, essa conferência pode se dar apenas pelo entrevistado ou acontecer junto ao pesquisador. Após essa acareação e adotadas as alterações solicitadas, o depoente assina uma carta de cessão que permite, totalmente ou não, a publicação dos dados fornecidos.

Com a conclusão de todos os procedimentos descritos, tem início o último passo, que é a análise formal, propriamente dita, porque entendemos que a produção de informações, somente, não finaliza a pesquisa, devendo ser feito um arremate, uma interpretação do pesquisador, a partir do que se apresenta. Porém, fazer a análise não consiste em tecer julgamentos sobre os depoentes ou testemunhos, nem procurar verdades absolutas ou preencher completamente lacunas, ela representa uma maneira de desenvolver uma nova narrativa relativa ao tema, partindo, para tanto, dos documentos encontrados, das entrevistas, memórias, presente e passado dos colaboradores e do pesquisador.

Agora que permitimos que o brilho dos diamantes que nos conduzem na busca por nosso tesouro fosse vislumbrado, ainda que de relance, iremos mostrar algumas pequenas faces entre as múltiplas (e talvez infinitas) faces existentes nos diamantes do tesouro que estamos compondo.

Histórias da formação dos professores (de Matemática) na região de estudo: os diamantes que procurávamos

Ainda não conseguimos completar as escavações que nos permitirão alcançar os diamantes tão almejados, mas já nos é possível contemplar o brilho de algumas de suas faces, o que pretendemos mostrar a seguir.

Como falado no início, o tesouro que buscamos são os grandes diamantes que os garimpeiros, pioneiros da região de Barra do Garças, não conseguiram encontrar. Esses diamantes que tanto queremos são as histórias da formação dos professores (de Matemática) que atuaram em nossa região de garimpagem, desde a década de 1920 até a década de 1980.

Para apresentar essas pequenas faces, iniciaremos pela composição estadual. Em Mato Grosso, a formação de professores, em nível superior, teve início tardio, relativamente aos estados brasileiros das regiões Sul e Sudeste. A Escola Normal e a Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário (Cades) eram as únicas responsáveis pela formação docente no estado até meados da década de 1960 (Both, 2014). Conforme nossos depoentes, também em Barra do Garças, anteriormente à instalação da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), na década de 1980, a formação docente ficava a cargo da Escola Normal, curso em nível de Magistério ofertado no Instituto Madre Marta Cerutti, uma das escolas pioneiras do município existente ainda hoje.

Em 1970 foi fundada, em Cuiabá, a UFMT e, a partir de meados da mesma década, iniciou-se um movimento de interiorização desta Universidade, cujo objetivo era expandir a formação docente para que os graduados pudessem atuar no cenário educacional mato-grossense. Isso ocorreu com a fundação de campus em municípios que, por algum motivo, eram polos no interior do estado.

Um dos municípios escolhidos foi Barra do Garças, onde foi criado, em 1981, o Centro Pedagógico de Barra do Garças (UFMT, 2015). Essa criação foi regulamentada pela Resolução 13/81, do Conselho Diretor da UFMT, e foram instituídos, pelo artigo 4º da mesma Resolução, três cursos: Licenciatura Curta em Ciências[2], Licenciatura Plena em Letras, e Educação Física, mas o último não chegou a ser ofertado à época (UFMT, 1981).

Esse curso de Licenciatura Curta em Ciências teve ingressos até 1987, momento em que

---

[2] As Licenciaturas Curtas em Ciências eram cursos voltados à docência de Matemática e Ciências, apenas para o Primeiro Grau, atual Ensino Fundamental II, e duravam dois anos. (UFMT, 1974). Estas foram instituídas com obrigatoriedade, em substituição às Licenciaturas Plenas em Matemática, Física, Química e Biologia, pela Resolução 30/74. (BRASIL, 1974). Quem desejasse lecionar para o Segundo Grau, atual Ensino Médio, deveria cursar uma Habilitação na área específica (Matemática, Física, Química ou Biologia), a qual tinha também duração aproximada de dois anos.

foi convertido em duas Licenciaturas Plenas, em Matemática e em Biologia[3] (UFMT, 2015), conversão regulamentada pela Resolução 09/87 do Conselho Diretor da UFMT. Durante o movimento de transição entre as Licenciaturas Curta e Plena, os dois cursos existiram paralelamente, para que aqueles que iniciaram o curso de Ciências tivessem a oportunidade de concluí-los. Como alternativa, aos alunos que estavam cursando Ciências e quisessem migrar para um dos dois novos cursos, foi permitido fazê-lo sem passarem pelo processo de vestibular.

Após a instalação desse campus da UFMT, conforme Both e Both (2016), a formação de professores na região de Barra do Garças ficou majoritariamente a cargo desta instituição. Em nossa pesquisa de doutorado, estamos estudando a formação dos professores (de Matemática), na mesma região, no período que antecede tal feito, buscando compreender quais eram os processos formativos dos docentes que nela atuavam com a inexistência de oferta de formação, em nível superior, no local. A esse respeito, foi possível observarmos algumas particularidades tanto por meio da pesquisa documental que estamos desenvolvendo, quanto das entrevistas que realizamos.

Uma de nossas garimpagens, a pesquisa documental, foi realizada em algumas escolas da região, entre as quais se destaca a Escola Estadual Coronel Antônio Cristino Cortes, pioneira do município de Barra do Garças, que iniciou seus trabalhos em 1933 de maneira itinerante, ou seja, os professores ministravam aulas aos alunos em suas próprias casas. Esta passou a ter um espaço físico de funcionamento e uma diretora, Teresa Melo Bosaipo, indicada pelo prefeito Ladislau Cristino Cortes, em 1949. A partir disso, recebeu o nome de Escolas Reunidas Coronel Antônio Cristino Cortes. Seu prédio próprio foi construído em 1953, quando passou a ser Grupo Escolar Coronel Antônio Cristino Cortes.

Um meio primordial de garimpagem que faz parte de nossa busca pelo tesouro, é a realização de entrevistas com os professores (de Matemática) que lecionaram em nossa região e período de interesse. Por meio dessas escavações, estamos encontrando diamantes com múltiplas (talvez infinitas) facetas extremamente brilhantes.

Um dos caminhos que escolhemos garimpar nos levou ao professor Condeliz, que atuou mais efetivamente no município de Aragarças, Goiás, e sempre lecionou sem a formação específica exigida, à época o Curso Normal. Ele possui os cursos de Técnico em Máquinas e Motores, Técnico em Desenho Mecânico e Técnico em Contabilidade, mas estes não o habilitavam para exercer a docência. Chegou em Aragarças, em 1981, e foi convidado a lecionar no estado de Goiás, prestou uma prova para tal, mas, por não ter o curso Normal, pode concorrer somente para professor do Jardim de Infância[4]. No entanto, como a escola estava sem professor de Física e Matemática para lecionar no Ginásio[5] e Segundo Grau[6], foi contratado para o cargo, sob a responsabilidade da diretora perante a Secretaria de Educação do Estado. Ele cursou dois anos de Licenciatura em Matemática, mas, por problemas de saúde, acabou desistindo do curso.

Outra garimpagem nos apresentou à professora Enói, de Barra do Garças, que lecionou

[3] O Conselho Federal de Educação (CFE), através da Resolução 05/78, revogou a obrigatoriedade de conversão de todos os cursos de formação de professores das áreas de Matemática, Física, Química e Biologia, para Licenciatura Curta em Ciências. (BRASIL, 1978). Desse modo, retornaram, progressivamente, as ofertas das Licenciaturas Plenas nas áreas específicas.

[4] Nível correspondente à Educação Infantil.

[5] Atual ensino Fundamental II.

[6] Atual Ensino Médio.

exclusivamente de primeira à quarta série do Primário[7], nível de ensino em que ministrava todas as disciplinas. Sobre a formação disponível na região em sua juventude, lembra que as opções de Segundo Grau eram Técnico em Contabilidade e o curso Normal. Tendo ela optado pelo último, começou a lecionar antes mesmo de concluir o curso. Lecionou por quinze anos apenas com essa formação, depois disso cursou Pedagogia, na Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Jales, no município de Jales, estado d e São Paulo, curso em que os alunos permaneciam duas semanas, a cada dois meses, na sede da Universidade e o restante do tempo em suas próprias cidades.

Uma terceira escavação nos permitiu encontrarmos o professor Wanderlei, que reside no município de Aragarças e atuou durante toda sua carreira tanto ali quanto em Barra do Garças. Cursou Escola Normal, no município de São José do Rio Preto, estado de São Paulo, no Instituto Estadual de Educação Monsenhor Gonçalves. Não chegou a cursar graduação, tendo lecionado Matemática e outras disciplinas durante toda a carreira com os conhecimentos obtidos no curso Normal.

A quarta garimpagem nos apresentou duas professoras de Torixoréu. A primeira, professora Terezinha, começou a lecionar apenas com o curso Técnico em Contabilidade, mais tarde cursou o Magistério no próprio município, na Escola Estadual Arthur da Costa e Silva. Lecionou, durante quase toda a carreira, apenas com o Magistério. Quando estava prestes a se aposentar, cursou Pedagogia, em um curso de férias pelas Faculdades Unidas do Vale do Araguaia (Univar), em Barra do Garças. Foi professora de diversas disciplinas para o Primário, Ginásio e Segundo Grau, e de Matemática para a quinta e sexta série do Ginásio.

A segunda, professora Lenir, começou lecionar aos 15 anos, quando possuía somente o Primário. Cursou o Ginásio e mais tarde o Segundo Grau em Técnico em Contabilidade, durante os quais lecionava às séries anteriores à que estava cursando. Lecionou Matemática a todos os níveis do ensino básico. Depois de vários anos na docência, cursou Licenciatura Curta em Pedagogia, modalidade Parcelada, em Barra do Garças, curso ofertado pela Universidade Estadual de Mato Grosso (UEMT), no período do Mato Grosso Uno. Referências a esse curso haviam surgido na pesquisa documental realizada nas escolas e, também, na pesquisa de Gonzales (2017). Ainda não dispomos de maiores informações, mas estamos atentas a ele em nossa pesquisa. Mais tarde a depoente cursou a complementação para Licenciatura Plena em Pedagogia na Faculdade Auxillium de Lins, no município de Lins, estado de São Paulo.

Ainda estamos em processo de constituição de nosso tesouro. Mas já nos foi possível perceber que os diamantes que estamos encontrando são de grandes quilates, portanto, de altíssimo valor. Nosso tesouro tem grande potencial de exploração e composição de joias valiosíssimas, com múltiplas e infinitas combinações. Nesse sentido, até o momento, nos foi possível perceber que, assim como em outros trabalhos do Grupo de História Oral e Educação Matemática - Ghoem, grupo de pesquisa interinstitucional do qual participamos, em diversas regiões, devido a carência de formação específica, em nível superior, os docentes que atuavam na região de Barra do Garças, em nosso período de interesse, exerceram a profissão, em sua grande maioria, sem formações específicas. A garimpagem está em fase inicial e com certeza muitas outras faces dos diamantes que já visualizamos, dados acerca da formação dos professores que ensinavam matemática na região de Barra do Garças, ainda irão se mostrar em momentos futuros.

[7] Atual Ensino Fundamental I.

Referências e bibliografia

Albuquerque Jr, D. M. (2007) *História:* a arte de inventar o passado. Bauru, SP: Edusc.

Baraldi, I. M. (2003) *Retraços da educação matemática na região de Bauru (SP):* uma história em construção. 2003. 241f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Both, B. C. (2014) *Sobre a formação de professores de matemática em Cuiabá – MT (1960-1980)*. 402f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Both, E.G.; Both, B.C. (2016) Um Olhar sobre a formação de professores de Matemática na região do Médio Araguaia mato-grossense. In: *Encontro Nacional de Educação Matemática*, XII ENEM, São Paulo, 2016. Anais... São Paulo – SP.

Brasil. (1974, julhor) *Resolução nº 30*, de 11 de julho de 1974. Dispõe sobre o curso de licenciatura de Ciências e fixa o respectivo currículo mínimo. Conselho Federal de Educação. Disponibilizada pelo Departamento de Matemática da UFMT de Cuiabá.

Brasil. (1978, junho) *Resolução nº 5*, de 15 de junho de 1978. Adia o prazo estabelecido pela Resolução nº 37/75 e para a obrigatoriedade da conversão em Ciências nos moldes da Resolução nº 30/74. Conselho Federal de Educação. Documenta, Brasília, (211).

Garnica, A. V. M. (2013) *Cartografias contemporâneas:* mapa e mapeamento como metáforas para a pesquisa sobre a formação de professores de Matemática. Alexandria- Revista de Educação em Ciências e Tecnologia. Florianópolis, (6), n.1, 35 – 60.

Gonzales, K. G. (2017) *Formar Professores que Ensinam Matemática:* uma história do movimento das Licenciaturas Parceladas no Mato Grosso Do Sul. 2017. 534 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru.

UFMT - Universidade Federal de Mato Grosso. (1974, dezembro) *Resolução do Conselho Diretor nº 82*, de 02 de dezembro de 1974. Cuiabá – MT. Disponível em: <http://sistemas.ufmt.br/ufmt.resolucao/OpenResolucao.aspx?resolucaoUID=579&ano=1974&tipoUID=1 >. Acesso em: 23 mar. 2014.

UFMT - Universidade Federal de Mato Grosso. (1981, janeiro) *Resolução do Conselho Diretor nº 13*, de 27 de janeiro de 1981. Cuiabá – MT. Disponível em: <http://sistemas.ufmt.br/ufmt.resolucao/OpenResolucao.aspx?resolucaoUID=1108&ano=1981&tipoUID=1>. Acesso em: 12 abr. 2015.

UFMT – Universidade Federal de Mato Grosso. (2015) *Campus Universitário do Araguaia - UFMT*: histórico. Barra do Garças. Disponível em: <http://araguaia.ufmt.br/?pg=historico>. Acesso em: 12 abr. 2015.

Varjão, V. (1980) *Barra do Garças no Passado*. Brasília: [s.n.].

Varjão, V. (1985) *Barra do Garças:* Migalhas de sua História. Brasília: Senado Federal, Centro Gráfico.

Varjão, V. (2000) *Janela do Tempo:* Homenagem ao passado. Barra do Garças: [s.n.].

Tratado de Aritmética Elemental (Indalecio Liévano, 1856): un texto con mucho que enseñarnos

Gilberto **Obando** Zapata
Universidad de Antioquia
Colombia
gilberto.obando@udea.edu.co

Resumen

El libro *Tratado de Aritmética Elemental*, de Indalecio Liévano, 1856, es uno de los primeros libros de matemáticas que se escribió en la naciente república de Colombia. Tenía por objeto la enseñanza de los fundamentos de la aritmética, y se apartó de la tradición euclidiana de presentación de la aritmética, muy común en la época (aunque no del todo). Esta separación se puede identificar en la presentación de los números a partir de las cantidades (magnitudes) y sus medidas, de la distinción entre cantidades continuas y discretas (fundamentadas nociones topológicas de los números), y por la forma en que se realiza un tratamiento del infinito matemático. Sus ideas pueden definirse como novedosas en su momento, y, pueden mostrarnos un camino no explorado en la actualidad para la enseñanza del número a lo largo de la educación básica. Algunas de estas lecciones son exploradas en este artículo.

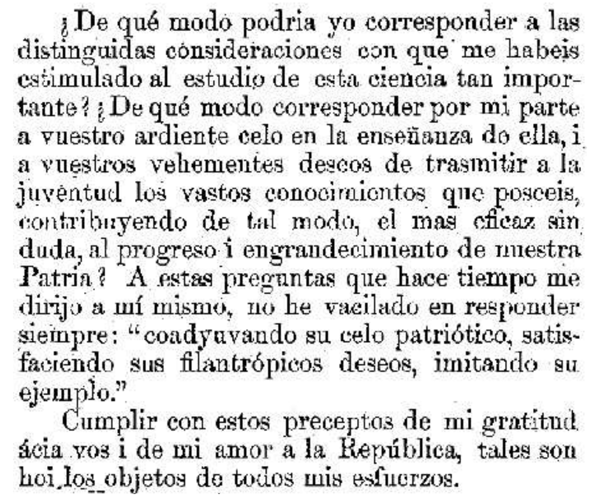
Palabras clave: historia de las matemáticas en Colombia, historia del número, historia de textos escolares, aritmética elemental, pensamiento numérico.

Introducción

El presente artículo aborda el análisis de un libro de texto publicado en Colombia a mediados del siglo XIX, de gran valor no solo matemático, sino histórico y pedagógico. Se trata del *Tratado de Aritmética Elemental*, de Indalecio Liévano (1856). El valor histórico debe entenderse en el marco de una república naciente (luego de las batallas de liberación contra los españoles, siendo la del puente de Boyacá, en agosto de 1819, una de las más importantes) que buscaba proyectarse en el mundo moderno del desarrollo industrial, pero que tiene que luchar con siglos de atraso producto de la colonización española.

Liévano es parte de una élite de ciudadanos que se forman como ingenieros matemáticos, y qué, por su posición social pueden ocupar altos cargos del estado, desde dónde inciden en el desarrollo social y político del estado naciente. La figura 1 muestra un fragmento tomado de la dedicatoria que el autor hace a su maestro, Lino de Pombo, dónde se dejan ver los intereses políticos de una obra que tiene por objeto brindar una formación matemática a los futuros ciudadanos de la república naciente. En este mismo fragmento (figura 1) se pueden ver las intenciones pedagógicas: *formar en matemáticas, para engrandecer la Patria*. Pero esta intención pedagógica se puede ver con más claridad en el primer párrafo del prólogo (ver figura 2), donde el autor habla de las limitaciones que se tienen en el momento para el aprendizaje de las matemáticas superiores, derivadas de los escasos conocimientos en los fundamentos de la aritmética (aquí se refiere a la escasa formación en aritmética que se daba en los primeros años de escolaridad de los niños y jóvenes, en las escuelas elementales). Adicionalmente, es de llamar la atención como el autor, al final del párrafo, expresa que la forma de presentar estos fundamentos de la aritmética no sigue la manera tradicional de hacerlo en el momento. Por supuesto, Liévano es consciente de las posibles dificultades en el aprendizaje de los estudiantes, derivadas de su forma de presentación de la aritmética y sus posibilidades de ser enseñada.

Así, en lo que sigue se analizarán algunos apartados del libro de Indalecio Liévano, buscando mostrar las diferencias sustanciales de la forma de presentación de la aritmética de la cual él habla en su prólogo, pero a la vez, analizando cómo este entramado conceptual responde a una intencionalidad pedagógica y no solo matemática.


¿De qué modo podria yo corresponder a las distinguidas consideraciones con que me habeis estimulado al estudio de esta ciencia tan importante? ¿De qué modo corresponder por mi parte a vuestro ardiente celo en la enseñanza de ella, i a vuestros vehementes deseos de trasmitir a la juventud los vastos conocimientos que poseeis, contribuyendo de tal modo, el mas eficaz sin duda, al progreso i engrandecimiento de nuestra Patria? A estas preguntas que hace tiempo me dirijo a mí mismo, no he vacilado en responder siempre: "coadyuvando su celo patriótico, satisfaciendo sus filantrópicos deseos, imitando su ejemplo."

Cumplir con estos preceptos de mi gratitud ácia vos i de mi amor a la República, tales son hoi los objetos de todos mis esfuerzos.

Figura 1. Dedicatoria al profesor Lino de Pombo (Liévano, 1856, p. 4)

Sobre el análisis histórico

En el presente trabajo, en la línea de la Historia y la Educación matemática, hemos indagado por las prácticas matemáticas (Obando, 2015) en un momento histórico específico de la historia de la educación matemática en Colombia.

Así, con Obando (2015, citando a Ferreirós (2010) y Kitcher (1984)), se asume que las prácticas matemáticas caracterizan la actividad de las personas de una época y lugar en función de la manera como interrelacionan diversidad de lenguajes (lenguaje natural, expresiones técnicas, medios simbólicos, etc.), de formas de enunciar (proposiciones, teoremas, afirmaciones, etc.), de métodos y formas de razonamiento, y de problemas por resolver. Todos estos elementos en su conjunto, en las personas y en las comunidades, toman forma en, a la vez que moldean, la acción matemática específica de los sujetos. Igualmente, con Obando (2015, citando a Jankvist and Kjeldsen (2010), Epple (2004)), se reconoce en esta noción de práctica matemática la idea de configuración epistémica, la cual refieren al conjunto de recursos intelectuales disponibles en un episodio histórico específico, y que determinan el curso de la actividad matemática de un matemático o grupo de matemáticos en esa época y lugar.

Desde la anterior noción de práctica matemática, se busca desde la historia de las matemáticas lecciones pedagógicas que permitan: (1) orientar los procesos de estudio de los estudiantes, (2) mejorar la comprensión de los objetos de conocimiento que se pretende enseñar y (3) tener mejores elementos en la comprensión de lo que hacen los estudiantes. (Obando 2015, citando a Mosvold, Jakobsen, and Jankvist (2014)). De esta forma, se espera, como dice Vasco (1995), identificar sobre la base de los acontecimientos del ayer, fuentes heurísticas para planificar los eventos de aprendizaje de las escuelas del mañana.

Estructura del Texto analizado

El libro *Tratado de Aritmética Elemental*, de Indalecio Liévano (1856), se estructura en dos partes, la primera, dedicada a presentar los conceptos fundamentales de los números y sus operaciones básicas, y la segunda, dedicada a la potenciación y radicación, y las razones y proporciones, con algunas aplicaciones comerciales. Cada parte se encuentra organizada en lecciones (7 lecciones en la primera y 4 en la segunda).

A lo largo de toda la obra se percibe un esfuerzo por mostrar las nociones intuitivas desde las que se fundamentan los conceptos de la aritmética, pero a su vez, de realizar una presentación rigurosa basada en axiomas y teoremas, con sus respectivas demostraciones. Es así que la lección primera es dedicada a presentar un conjunto básico de definiciones sobre los números, la notación y las operaciones. Las lecciones segunda y tercera se dedican a presentar las reglas para efectuar las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división). La cuarta lección se dedica a cuestiones relacionadas con los números y sus propiedades, en lo que en palabras modernas podemos llamar nociones básicas de teoría de números. La lección V, retoma las operaciones de la aritmética, pero ahora extendiendo lo formulado para los números enteros (en lenguaje moderno los números naturales), a los números quebrados y fraccionarios (léase, en palabras modernas, números racionales). La lección VI es dedicada a las aplicaciones de los números quebrados y fraccionarios a diferentes tipos de problemas, sobre todo, problemas comerciales de pesos y medidas. La lección VII es dedicada a la presentación del sistema de numeración decimal y, en palabras del autor, la presentación de un nuevo sistema de pesos y medidas (sistema métrico decimal).

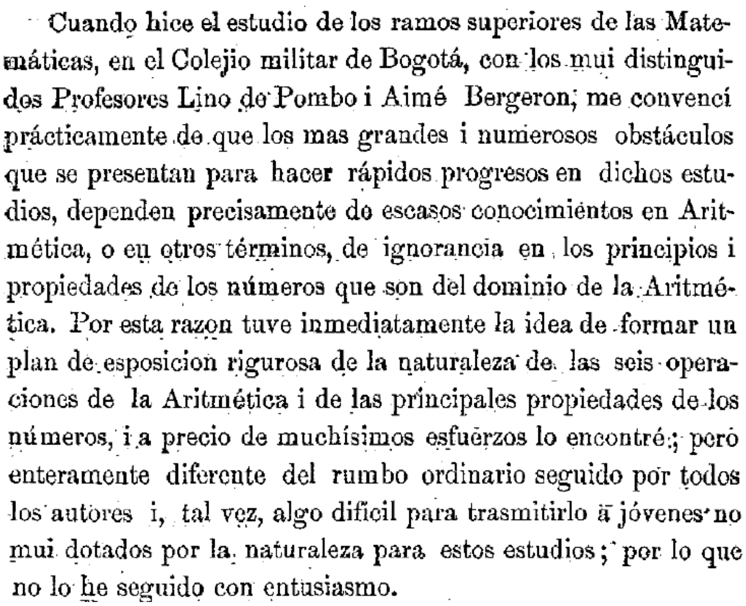

Cuando hice el estudio de los ramos superiores de las Matemáticas, en el Colejio militar de Bogotá, con los mui distinguidos Profesores Lino de Pombo i Aimé Bergeron, me convencí prácticamente de que los mas grandes i numerosos obstáculos que se presentan para hacer rápidos progresos en dichos estudios, dependen precisamente de escasos conocimientos en Aritmética, o en otros términos, de ignorancia en los principios i propiedades de los números que son del dominio de la Aritmética. Por esta razon tuve inmediatamente la idea de formar un plan de esposicion rigurosa de la naturaleza de las seis operaciones de la Aritmética i de las principales propiedades de los números, i a precio de muchísimos esfuerzos lo encontré; pero enteramente diferente del rumbo ordinario seguido por todos los autores i, tal vez, algo difícil para trasmitirlo á jóvenes no mui dotados por la naturaleza para estos estudios; por lo que no lo he seguido con entusiasmo.

Figura 2. Fragmento del prólogo (Liévano, 1856, p. 5)

Primera lección: el concepto de número

En el numeral 2 lee: "se da el nombre de *cantidad* o *magnitud*, a todo lo que es algo i ilimitado; se denomina *cero* a la carencia absoluta de todo lo que es algo […] Son cantidades las líneas, las superficies, los espacios, el tiempo, la fuerza, el valor […]"[1] (p. 8). Más adelante, en el numeral 5 de la página 9 se lee:

> Se llama *unidad* una cantidad que se toma arbitrariamente, o que se elije para espresar en valores de ella (mediante el número) las diferentes magnitudes de su naturaleza […] Se llama número el resultado de la comparacion de una cantidad cualquiera con la unidad. (p. 9)

En estos dos fragmentos se puede comprender por qué el autor declara en el prólogo que su presentación de la aritmética se aparta de la forma usual: los textos de aritmética de finales del siglo XVIII, y comienzos del XIX seguían la tradición euclidiana, reproduciendo muy de cerca la organización del libro VII de los Elementos (Euclid, 1908), en dónde el número es considerado como una colección de unidades, y la unidad, la mónada, no es considerada en esencia, un número. En este sentido, la idea de número sobre la que se encuentra organizado este texto es

[1] En las citas textuales del autor, se ha conservado la grafía original, y, por lo tanto, lo que parecen faltas de redacción u ortografía son las formas adecuadas de escribir en la época.

más cercana a la idea de número en Newton, que a la idea de número en Euclides.[2]

Este énfasis en la noción de magnitud, se puede ver igualmente en la forma como el autor define las magnitudes continuas y las discretas (ver figura 3): Nótese en primer lugar, la idea de cantidad, que está al final del fragmento: aquello que puede ser objeto de aumento o disminución. Esta es una apuesta Aristotélica sobre la noción de cantidad y, en ese sentido, sigue la línea de los autores clásicos del momento, pero, en lo que si toma distancia es en las definiciones de cantidades continuas y discretas. Al plantearse la necesidad de distinguir las cantidades continuas de las discretas se pone en un lugar de vanguardia, pues el problema de la continuidad era precisamente uno de los asuntos centrales de los matemáticos europeos del momento, a raíz de los trabajos de Bolzano sobre lo que hoy conocemos como el *falso teorema de Cauchy*. En la definición de cantidades continuas, se puede ver una noción de lo que modernamente llamamos la *densidad de los elementos de un sistema* (hoy sabemos que no es suficiente con la idea de densidad para definir la continuidad). Por su parte, la definición de cantidades discretas se fundamenta en una de las propiedades de los sistemas discretos, a saber, la existencia de cantidades tales que, entre ellas, o no existe ninguna otra cantidad de la misma naturaleza, o existe un número finito de ellas. En ambos casos, la manera cómo define la naturaleza de lo continuo y lo discreto, se basa en las propiedades topológicas de los sistemas numéricos (por supuesto, es una expresión en términos modernos, no explícita en el lenguaje del autor), lo cual está en la base de las nociones modernas del número real, tal como lo mostraron Cantor (1915) o Dedekind (1927), *solo que Liévano lo hace 30 años antes de los trabajos clásicos de dichos autores*. Estas aproximaciones implican una profunda reflexión sobre la naturaleza del número, y, sobre todo, en lo que se puede enunciar como la naturaleza, la esencia del número, muy en el sentido expresado por Dedekind (1930) en la introducción de su trabajo *Qué son y para qué sirven los números*.

En resúmen: diremos que la cantidad se divide en contínua i discreta, i que:

1.º Se llama cantidad *contínua* a la de especie tal, que una magnitud cualquiera tiene siempre otra menor, i que entre dos magnitudes diferentes cualesquiera, hai siempre una infinidad de magnitudes comprendidas. Se verifica, pues, que la cantidad continua puede crecer i decrecer indefinidamente.

2.º Se llama cantidad *discreta* a la de especie tal, que tiene alguna magnitud que no tiene otra menor, i que entre dos magnitudes cualesquiera, no hai sino ciertas i determinadas magnitudes comprendidas. Se verifica, pues, que la cantidad discreta solo puede crecer indefinidamente.

Se llaman *Matemáticas* las ciencias que hacen el estudio de la cantidad, tomada esta en su mayor abstraccion; es decir, no considerándole mas atributo que el de ser susceptible de aumentar o disminuir.

Figura 3. Fragmento en el que se muestran las definiciones de cantidades *continuas* y *discretas*. (Liévano, 1856, p. 8)

Finalmente, resta ver cómo esta idea de cantidad, de magnitud, se usa para mostrar que todo número emerge de la medida de cantidades:

> Es mui fácil hacer ver que no puede haber mas de estas tres especies de números; pues para esto basta el proponerse, de una manera jeneral, la cuestion de medir con la unidad una cantidad que sea conmensurable con ella, i proceder por cada uno de los dos métodos indicados. Así, si procediéramos por el primer método, dividiríamos la cuestión en los tres casos siguientes: 1° Que la unidad sea magnitud alícuota de la cantidad propuesta, i se

[2] Newton, en su libro *Aritmética Univesalis*, define el número como: "por número entenderemos no tanto la Multitud de Unidades, sino la *Razón* de cualquier Cantidad, con respecto a otra Cantidad del mismo Tipo, la cual es tomada como Unidad" (Newton, 1720)

> tendria el número *entero;* 2° Que la cantidad sea menor que la unidad, i se tendría cero unidades i una fraccion, es decir, la *fraccion*; i 3° Que siendo la cantidad mayor que la unidad, no sea esta parte alícuota de aquella, i se tendría el numero *fraccionario.* Ahora, si en cualquiera de los tres casos que acabamos de considerar, i que los comprenden todos, procedemos por el segundo método, es decir, procedemos a espresar la cantidad por un solo conjunto de partes alícuotas iguales de la unidad, tendremos el número que lleva el nombre jeneral de *quebrado,* i que se divide en impropio i propio (Liévano, 1856, p. 10).

En la anterior cita, la noción de parte alícuota se entiende en el sentido euclidiano del término: aquella cantidad que por ser contenida un número exacto de veces en otra cantidad, entonces es la *n-ésima* parte de aquella (lo cual, en lenguaje moderno no es más que la relación de equivalencia: $y = nx$ si y solo si $x = \frac{1}{n}y$). De otro lado, la fracción es entendida por el autor como la repetición de cierto número de partes alícuotas de la unidad, hasta completar la cantidad dada (es decir, en lenguaje moderno, la fracción $\frac{m}{n}$ se interpreta como $\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m-veces}$). Por supuesto, estas ideas son mucho más potentes para comprender el número racional, que las actuales aproximaciones en los textos escolares basados en partir, contar y colorear partes de una unidad (ver Obando, 2015, 2003). El potencial radica en que se basan en medir, comparar medidas (establecer razones entre cantidades), y, por ende, todos los números tienen origen en el mismo tipo de actividad. Nótese que la actual aproximación escolar a los números, basada en los conjuntos, hace que lo aprendido sobre los naturales no pueda ser trasladado al aprendizaje de los enteros, o los racionales, y mucho menos, a los reales.

Lección VII: el sistema de numeración decimal

La lección VII inicia con una discusión amplia sobre la forma de extender el sistema de numeración decimal para expresar cantidades que no sean enteras, relacionando las cifras que quedan a la derecha de la coma, con fracciones que tiene por denominador una potencia de 10. Dedica una buena cantidad de páginas a las reglas del sistema de numeración decimal, a la forma de realizar conversión entre la notación fraccionaria y la notación decimal, y las reglas de las operaciones en el sistema de numeración decimal, lo cual se hace enfatizando que son las mismas reglas de las operaciones con números enteros (naturales en lenguaje moderno): "107: S*e deberán seguir exactamente las mimas reglas establecidas para los números enteros*" (Liévano, 1856, p. 83, cursiva en el original).

Es importante notar que este énfasis en el sistema de numeración decimal no es tanto por introducir otra forma de escribir y operar con los números, sino por el interés de presentar los nuevos sistemas de pesos y medidas, a saber, sistemas decimales de medidas para medir la longitud, el área, el volumen, la capacidad, el peso y el valor (el dinero). Para el autor es claro que una de las ventajas de los sistemas decimales para los pesos y medidas es que las reglas de las operaciones se hacen de igual manera como se calcula con los números:

> 120: *Conclusión.* –El cálculo de las medidas i pesas métricas debe hacerse, por los números decimales; porque dichas medidas i pesas siguen la lei decimal. I cuando se hagan aplicaciones debe suspenderse el cálculo en las unidades, que con arreglo a la cuestión, los errores que resulten sean despreciables, teniendo si el cuidado (n° 117) de que el error cometido sea menor que la media unidad decimal […] (Liévano, 1856, p 95, cursiva en el original)

Es importante notar entonces que, para una época en la que los sistemas metrológicos decimales apenas se estaban posicionando en el mundo, este tipo de planteamientos son ampliamente novedosos, sin dejar de lado las consideraciones que, en el país, ya era oficial el uso de tales de sistemas de pesos y medidas, gracias a la influencia política de Lino de Pombo (maestro del Indalecio Liévano).

Para finalizar, es de especial interés la discusión presentada por el autor sobre "los números inconmensurables" (página 90 y siguientes): los números irracionales (números inconmensurables en palabras del autor) se presentan como una construcción sobre la base de sucesiones de números racionales (fraccionarios y quebrados, en palabras del autor) que tienden al número inconmensurable dado, lo que le permite extender las propiedades ya estudiadas en los racionales, a los reales (números inconmensurables). La idea es simple: se analizan los casos de los decimales infinitos periódicos, mostrando que, si el periodo a partir de una cifra decimal es 9, entonces esa parte del número es igual a una unidad de la fracción decimal a la cifra anterior al inicio del periodo (por ejemplo, en palabras del autor, 7,52999…=7353). Luego afirma que, si el periodo es diferente de 9, esta parte del número no alcanza a completar la unidad anterior al inicio del periodo. Con este principio, demuestra por contradicción que, si el decimal no es periódico, entonces no puede expresarse por un número quebrado. Al final de dicha demostración se lee: "Luego *la cantidad representada por el número decimal ilimitado i no periódico* (puesto que no puede espresarse esactamente por ningún quebrado) *no tendrá parte alícuota común con la unidad i será por tanto no* (n° 3) *conmensurable con ella*" (Liévano, 1856, p. 91, cursiva en el original). Con estas ideas entonces procede a expresar que si bien los números inconmensurables no se pueden expresar con un número decimal, se pueden aproximar tanto como se quiera por números quebrados (en sus palabras "se puede obtener un quebrado que la represente con un error menor que cualquier magnitud dada" (p 91)), iterando este proceso tanto como necesitemos (en lenguaje moderno, aproximar un irracional por una sucesión de racionales) se puede obtener una expresión para el número inconmensurable dado.

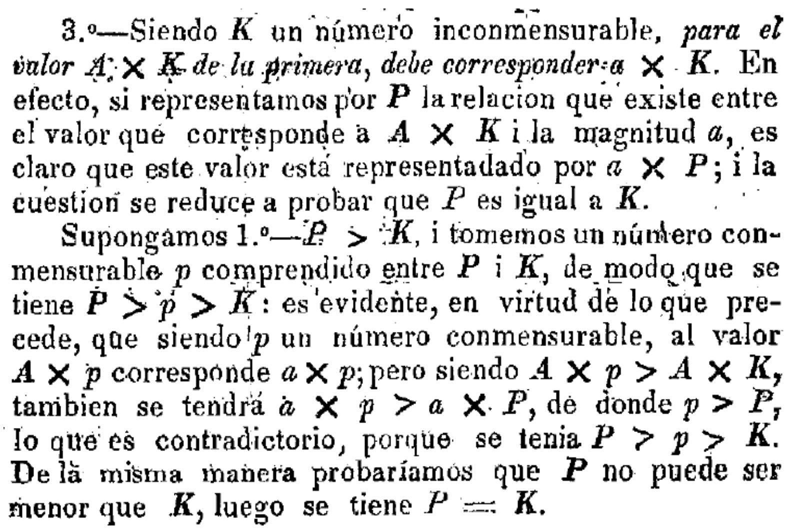
> […] sin embargo, si se puede obtener un quebrado que la represente con un error menor que cualquier magnitud dada. Para esto dividiremos la unidad en un número tan grande de partes iguales que cada parte sea menor que la magnitud dada (*); i entonces el quebrado que tiene por numerador el número de veces que esta pequeña parte cabe en la cantidad, i por denominador el número de partes en que se ha dividido la unidad, satisface a la condición requerida. Si ahora queremos aproximarnos más, valuaremos con un cierto error la parte inconmensurable que nos queda, i agregamos este nuevo número al número primitivo; i si esta serie de operaciones se supone prolongada indefinidamente, puede considerarse la cantidad espresada esactamente por la suma de una infinidad de números. Llamaremos número *inconmesurable* a la espresión esacta de una cantidad inconmensurable con la unidad (Liévano, 1856, p 91, cursiva en el original).

De la anterior cita, se debe notar, además, la definición de número inconmesurable (número irracional) al final de la misma: es claro que no hay un número racional para expresarlo, pero el procedimiento definido lo objetiva como una cantidad con las mismas propiedades del número racional. Esta idea de que estas cantidades son igualmente números, queda clara en la frase al inicio del numeral 116: "Pasamos ahora a hacer estensivas al número inconmensurable; las propiedades jenerales del número conmensurable." Liévano, 1856, p 91). Así objetiva las nuevas entidades como números. Este procedimiento es novedoso en la época (y anticipado a las soluciones dadas en Europa), y se basa en una idea potente (que se hará visible en los trabajos de Cantor y Dedekind): *construir los reales a partir de los racionales, y extender las propiedades demostradas en dicho sistema, al nuevo sistema, con lo cual adquieren el mismo sentido* *numérico del sistema de origen*.

Esta aproximación a los números reales cierra con el teorema demostrado en la página 132 (en esencia, un parafraseo de la definición 5, del libro V de los elementos de Euclides):

> *150. TEOREMA Siempre que se tengan dos especies de cantidades tales, que para cada valor particular i creciente de la una, corresponda un valor particular i creciente de la otra; i está en la naturaleza de estas variaciones el corresponder para un múltiplo cualquiera de la primera el, mismo múltiplo de la segunda* i estas dos cantidades gozan de la propiedad de que *dos órdenes de magnitud cualesquiera de la primera, guardan la misma relación que los correspondientes ordenes de magnitud de la segunda.* (Liévano, 1856, p 132, cursiva en el original).

La demostración del anterior teorema se basa en que, si las dos magnitudes son conmensurables, la razón entre ellas se puede representar por un número racional, y, por ende, cualquier par de cantidades múltiplos correspondientes de las dos primeras, estarán en la misma razón. En caso de no ser conmensurables, la razón se expresa por un número inconmensurable (número real), y se demuestra por contradicción, que cualquier secuencia de números raciones que acote superior e inferiormente a dicho número inconmensurable, es idéntica a dicho número (ver figura 4). En el fondo, es una demostración de la continuidad de los reales, pues en esencia demuestra que cualquier cantidad, o es un número racional, o es un número irracional, y el autor es consciente de dar solución a un problema no resuelto en Europa, como se puede ver en la extensa nota al pie de la página 133:


3.º—Siendo K un número inconmensurable, *para el valor $A \times K$ de la primera, debe corresponder $a \times K$.* En efecto, si representamos por P la relacion que existe entre el valor que corresponde a $A \times K$ i la magnitud a, es claro que este valor está representadado por $a \times P$; i la cuestion se reduce a probar que P es igual a K.

Supongamos 1.º—$P > K$, i tomemos un número conmensurable p comprendido entre P i K, de modo que se tiene $P > p > K$: es evidente, en virtud de lo que precede, que siendo p un número conmensurable, al valor $A \times p$ corresponde $a \times p$; pero siendo $A \times p > A \times K$, tambien se tendrá $a \times p > a \times P$, de donde $p > P$, lo que es contradictorio, porque se tenia $P > p > K$. De la misma manera probaríamos que P no puede ser menor que K, luego se tiene $P = K$.

Figura 4. Demostración del tercer caso del teorema 150, cuando las cantidades son inconmensurables (Liévano, 1856, p 132)

> Tengo la satisfacción de presentar al público 1a demostración rigurosa de esta proposición, manifestando que he sido conducido a ella investigando las condiciones necesarias para la proporcionalidad de las cantidades. Hasta ahora los más famosos Matemáticos se han contentado con establecer las propiedades jenerales del número conmensurable i aplicar silenciosamente estas mismas propiedades al número inconmensurable; pero este jénero de deducción está mui lejos de ser riguroso: Yo notando este vacío en la Aritmética me propuse llenarlo, i después de mui detenidas meditaciones he coronado completamente mis esfuerzos, pues he logrado (n° 115) hacer estensivas al número inconmensurable las propiedades jenerales del número conmensurable […]. (Lívano, 1856, p. 133)

Para cerrar este episodio, es importante resaltar que Liévano también muestra cómo este tipo de razonamientos sobre las razones y las proporciones, aplica por igual cuando las cantidades (magnitudes) son de la misma especie (homogéneas), que cuando son de naturaleza diferentes (heterogéneas). Esto muestra una concepción moderna del número, en dónde este emerge de las razones entre cantidades de magnitud (en lenguaje moderno): *todos los números* *tienen el mismo fundamento epistemológico*.

Consideraciones finales

En lo analizado hasta el momento se pueden ver entonces apuestas epistemológicas y ontológicas sobre el concepto de número que se posicionaron como novedosas en la época en la que fueron propuestas. Estas ideas sobre el número se constituyeron como potentes para presentar las ideas fundamentales de la aritmética de una manera sistemática, en la que los diferentes sistemas numéricos tienen su origen en la misma fuente fenomenológica: las magnitudes, sus medidas y las razones entre dichas cantidades. Esta apuesta le permite al autor, no solo presentar los viejos problemas de la aritmética en una nueva forma, sino también abordar problemas no resueltos en su momento: la continuidad de los reales. Por supuesto se podrán encontrar algunos vacíos en su argumentación, pero sin pretender ignorar estas posibles faltas de rigor (visto el rigor en forma anacrónica desde el desarrollo actual de las matemáticas), en el tratamiento que el autor da a la aritmética hay un conjunto de lecciones que pueden ser aplicadas a la enseñanza actual: ¿Qué tal si fundamentamos la enseñanza del número, no desde la teoría de conjuntos, sino desde las magnitudes y sus medidas? ¿Qué tal si centramos los esfuerzos en la comprensión de los elementos esenciales de la naturaleza de tales sistemas numéricos?

No se debe cerrar esta discusión sobre la naturaleza del número, sin mencionar que autores como Davidod (1988) llaman la atención sobre la necesidad de reformular la enseñanza usual de la aritmética escolar, y propone que los fundamentos de la misma no deberían ser los conjuntos, sino las magnitudes y sus medidas, las relaciones y las acciones con las cantidades, y por ende, las relaciones y operaciones con los números.

Referencias y bibliografía

Cantor, G. (1915). *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers* (P. Jourdain, Trans. 1 ed.). New York: Dover Publications, INC.

Euclid. (1908). *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (Vol. 2). Cambridge: Cambridge The University Press.

Davidov, V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico, Investigación psicológica teórica y experimental* (M. Shuare, Trans.). Moscú: Editorial Progreso.

Dedekind, R. (1927). Continuidad y números Irracionales. Traducción de la quinta edición (1927) por J. Bares y J. Climent. Recuperado desde http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Dedekind.pc.pdf

Dedekind, R. (1930). ¿Qué son y para qué sirven los números? Traducción de la sexta edición (1930) por J. Bares y J. Climent. Recuperado desde http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Dedekind.pc.pdf

Liévano, I. (1856). *Tratado elemental de aritmetica*. Bogotá: Imprenta de Echavarría Hermanos.

Newton, I. (1720). Universal Arithmetick: or, a treatise of arithmetical composition and resolution (M. J. Raphson, Trans.). In *Universal Arithmetick: Or, A Treatise of Arithmetical Composition and Resolution. To which is Added, Dr. Halley's Method of Finding the Roots of Equations Arithmetically*. London: J. Senex.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA, 8*(2), 157-182.

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3º y 4º de una institución educativa de la Educación Básica.* (Tesis Doctoral), Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado desde http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/9472/1/CB-0519794.pdf

Vasco, C. (1995). History of mathematics as a tool for teaching mathematics for understanding. In D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. Maxwell West, & M. Stone Wiske (Eds.), *Software goes to school:*

teaching for understanding with new technologies (pp. 56-69). New York, NY: Oxford University Press.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Ingeniería Didáctica para el estudio de la variación de las funciones: Análisis preliminar

Noé Oswaldo Cabañas Ramírez
Universidad Autónoma de Guerrero
México
noe_ocr@hotmail.com
Edgardo Locia Espinoza
Universidad Autónoma de Guerrero
México
lociae999@hotmail.com
Armando Morales Carballo
Universidad Autónoma de Guerrero
México
armando280@hotmail.com

Resumen

Se presentan los avances de una investigación en desarrollo que tiene como objetivo el diseño y puesta en escena de una Ingeniería Didáctica para el estudio del sentido de variación de las funciones en el nivel preuniversitario. En particular, se presenta un análisis de los principales textos que se utilizan en el preuniversitario y primeros años de universidad, y algunos elementos histórico-epistemológicos en relación a la temática. Más precisamente, se analizan las concepciones de crecimiento y de decrecimiento de una función que subyacen en las demostraciones del teorema que vincula el signo de f' con el sentido de variación de f, dadas por Lagrange y Cauchy, las cuales difieren de la concepción que subyace en la definición formal actual.

Palabras clave: Sentido de variación de funciones, teoría de situaciones didácticas, análisis epistemológico, ingeniería didáctica.

Introducción

La problemática de la enseñanza y aprendizaje del cálculo, ha sido abordada desde diferentes marcos teóricos y metodológicos. Investigaciones referentes a este tema, ponen de manifiesto que los alumnos presentan problemas sobre la comprensión de los conceptos básicos del cálculo; tales como el concepto de función, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, entre otros (Reséndiz, 2006; Zúñiga, 2009; Castillo, 2009; Díaz, 2009; Salinas & Alanís, 2009; Rubí, Moreno, Pou, & Jordán, 2010; Pineda, 2013; Delgado, 2013; Ruiz, Hernández, & Gutiérrez, 2015; Cuevas & Delgado, 2016).

Con el propósito de contribuir en la solución de la problemática identificada, se plantea como objetivo de investigación el diseño de una Ingeniería Didáctica para favorecer el estudio y la comprensión del sentido de variación de funciones en el preuniversitario.

Esta investigación forma parte de un trabajo más amplio. De manera particular, en este reporte se describen algunos elementos de carácter histórico-epistemológico relacionados con los conceptos y teoremas que intervienen en el análisis del sentido de variación de una función; así como la adhesión de estas definiciones en los libros de texto más representativos para este nivel.

Antecedentes y planteamiento del problema

La importancia del estudio del sentido de variación de funciones radica en que es un tema indicado como obligatorio en los planes y programas de estudio del tercer año del nivel medio superior, en México. Se trata de un contenido integrador en donde convergen y se necesitan los principales conceptos del cálculo diferencial, así como una madurez de razonamiento matemático en los alumnos para poder entender y aplicar los teoremas y resultados que fundamentan este análisis.

De la revisión a la literatura especializada, se puede identificar que, en la educación media superior en México, a pesar de que se han realizado diversas investigaciones desde diferentes referentes teóricos y metodológicos sobre el estudio del sentido de variación de una función (Zúñiga, 2009; Engler, Vrancken, Gregorini, Müller, Hecklein & Henzenn, 2008; Díaz, 2009; Rey Cabrera, 2016), aún persisten muchas dificultades para la comprensión y manejo de este contenido, tanto en el profesor como en el estudiante. Por ejemplo, Sánchez-Matamoros, García, & Llinares (2008), Russo (2016), documentan las dificultades a las que se enfrentan los alumnos en cuanto a la comprensión, construcción e interpretación de los conceptos básicos del cálculo, tales como el concepto de función, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos. También, Engler & Vrancken (2002), observaron que los alumnos presentan dificultades para resolver problemas que involucran conceptos fundamentales del cálculo como: primera y segunda derivada y sus relaciones con el crecimiento y decrecimiento de una función, concavidad y convexidad, puntos de máximo y mínimo, y de inflexión. Por otro lado, en un estudio hecho por Valero (2003) encontró que estudiantes de bachillerato quienes habían abordado ya el tema del análisis de funciones, identificaron las funciones crecientes con funciones positivas y las decrecientes con funciones negativas.

Por lo tanto, hemos planteado el siguiente **problema de investigación:** Existen dificultades en estudiantes de nivel medio superior sobre la comprensión de los conceptos y teoremas que fundamentan el estudio del sentido de variación, la determinación de los extremos y la construcción de las gráficas de las funciones.

Pregunta de investigación. ¿Qué elementos teóricos y metodológicos permiten elaborar una ID para el tratamiento de los conceptos, teoremas y procedimientos para el estudio del sentido de variación, determinación de extremos y construcción de gráficas de funciones en la enseñanza del cálculo en el nivel medio superior?

Fundamentación teórica

La presente investigación se sustenta en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y la Teoría de la Transposición Didáctica (TTD) desarrolladas por G. Brousseau e Y. Chevallard, respectivamente, ya que estas teorías se adaptan a los procesos que se pretenden utilizar en el desarrollo de las actividades e interacciones en el aula y enmarcan a la Ingeniería Didáctica utilizada en este proceso de estudio como metodología de investigación. Según lo descrito por Chevallard, la TTD considera la transformación que siguen los saberes desde su génesis, su constitución como un saber científico y su transformación en un saber escolar según los roles de los involucrados en la modelización que en ella se hace de la actividad matemática del matemático, la actividad matemática y didáctica del profesor y la actividad matemática del alumno, en relación a un saber específico.

En el proceso de transmisión de un conocimiento determinado, Brousseau plantea el diseño de Situaciones que incluyan un conjunto de actividades, en las que se propicie una génesis ficticia de los conocimientos que hagan que el estudiante recorra un camino similar al que recorren los matemáticos (proceso descrito por Lakatos), en el que el error y la existencia de contradicciones en los argumentos (puestas en evidencia por los contraejemplos) no sean vistos sólo como una contingencia, sino que adquieran un estatus positivo propiciando que los estudiantes examinen sus argumentos, diagnostiquen sus problemas y los superen, den significados a los contenidos, los procedimientos o los procesos cognitivos.

Buscando convertir la clase en una micro-comunidad científica dentro de la cual los conocimientos (conceptos y resultados) se construyan como herramientas necesarias y óptimas para superar los obstáculos que se plantean en ellas, dando lugar a las diferentes etapas a-didácticas y didácticas (situaciones de acción, de formulación, de validación y de institucionalización) descritas en la teoría. En donde los alumnos formulen, de manera individual o por equipos, sus propuestas que contribuyan a la superación de los obstáculos, las sometan a discusión con sus pares, sean validadas o cuestionadas a través de contraejemplos, estableciéndose una dialéctica entre la validación y la refutación similar a la que describe Lakatos (1976) en su modelo de la actividad del matemático y la lógica del descubrimiento en matemáticas.

Sin embargo, en el contexto escolar, Locia (2000) afirma que, muchos estudiantes e incluso profesores manifiestan desconocimiento en el razonamiento matemático, en particular, no tienen el hábito de buscar un contraejemplo para poner a prueba una afirmación que se necesita aplicar, pero cuya veracidad no ha sido establecida en la clase. Por otro lado, Morales (2008), Zazkis & Chernoff (2008), Klymchuk (2010), García & Morales (2013), coinciden en que la formulación de conjeturas y el empleo de contraejemplos, permite estimular el razonamiento en los estudiantes del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones, y disminuir los procedimientos memorísticos y algorítmicos de aprendizaje, por lo que es necesario introducir en el aula escenarios que propicien el aprovechamiento de las virtudes pedagógicas de los contraejemplos.

Para el desarrollo de esta investigación se utiliza la metodología de la Ingeniería Didáctica (ID), la cual en la etapa de los análisis preliminares incluye la realización de un estudio epistemológico, didáctico y cognitivo sobre el objeto de estudio, en nuestro caso el relacionado al sentido de variación de funciones de variable real. En este sentido estaremos interesados en analizar el desarrollo histórico-epistemológico de las diferentes concepciones que se han ido sucediendo de los saberes involucrados en el estudio del sentido de variación de las funciones y las disparidades y coincidencias entre el saber en construcción, el saber científico y el saber enseñado. En el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, se analiza el papel que juegan los libros de texto a través de las caracterizaciones o comunicaciones que de ellos extrae el profesor. Del análisis de las concepciones de los estudiantes, a través de un estudio se obtiene información del alumno referente a la aplicación y uso correcto de las propiedades, conceptos, teoremas o definiciones.

Resultados y conclusiones

Elementos histórico-epistemológicos, didácticos y cognitivos de la noción de Sentido de Variación

Respecto a los hallazgos obtenidos de este análisis, hoy día encontramos que el teorema de Rolle fue demostrado primero en álgebra (en 1691) para contribuir a dar solución al problema de la existencia de raíces de ecuaciones de grado arbitrario, y las primeras demostraciones del teorema que asocia el sentido de variación de una función y el signo de su derivada no lo utilizaban.

Lagrange (1797) enuncia y demuestra el siguiente lema (p. 45):

> *Si una función prima de z tal que $f'z$ es siempre positiva para todos los valores de z, desde $z = a$ hasta $z = b$, b siendo $> a$, la diferencia de las funciones primitivas que corresponden a estos dos valores de z, a saber, $fb - fa$, será necesariamente una cantidad positiva.*

Es importante mencionar que Lagrange rechazaba fundamentar el análisis a partir de la noción de límite, de cantidades evanescentes o de infinitésimos, poniendo como concepto central, el desarrollo de una función en serie de potencias y definiendo a la derivada como el coeficiente del término de primer grado en ese desarrollo. Este lema le permitía determinar cotas para el resto de la serie, principio que él considera fundamental y del cual se desprende el resultado que actualmente se conoce como teorema de los incrementos finitos. Para la demostración de este lema, Lagrange evade utilizar la noción de límite y utiliza otro "principio básico" enunciado y demostrado casi al inicio de su obra (p.12) el cual "se debe ver […] como uno de los principios fundamentales de la teoría": en el desarrollo en serie de una función, se puede tomar siempre i suficientemente pequeño para que un término cualquiera sea más grande que la suma de los términos que le siguen.

Por otro lado, a diferencia de Lagrange, Cauchy funda sus trabajos de rigorización del análisis en la noción de límite. Cauchy (1823) define la derivada como un límite y plantea el siguiente problema relacionado con el teorema que vincula el signo de la derivada con el sentido de variación de una función (p. 37):

> ***Problema.*** *Suponiendo que la función $y = f(x)$ sea continua respecto a x en la vecindad del valor particular $x = x_0$, se pide si, a partir de este valor, la función crece o disminuye, mientras que se hace crecer o disminuir la variable misma.*

Podemos resumir la demostración dada por Cauchy de la siguiente manera: primero, un paso de lo infinitesimal (la positividad de $f'(x_0)$) a lo local (de la positividad de $f'(x_0)$ deduce la positividad de $\Delta y/\Delta x$ para valores muy pequeños de Δx). Después pasa de lo local a lo global sobre un intervalo. En el paso de lo infinitesimal a lo local, hoy en día sabemos que no es posible deducir el crecimiento de f en una vecindad de x_0, del hecho de que $f'(x_0)$ sea positivo. Ello puede hacerse evidente con el siguiente contraejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En efecto, puede demostrarse que esta función definida, continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ satisface que $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$, sin embargo no es creciente, según la definición de función creciente que conocemos en la actualidad, en ninguna vecindad de 0.

En las pruebas dadas por Lagrange y Cauchy, se vislumbra que ambos tienen concepciones implícitas de lo que es una función creciente (nunca dan una definición), pero éstas no coinciden exactamente. La concepción de Lagrange es más cercana a la que encontramos actualmente en los libros de texto de nivel superior, pues a partir de la hipótesis de la positividad de la derivada y de la desigualdad $b > a$, deduce que la diferencia $f(b) - f(a)$ es positiva.

Por otro lado, la definición implícita de Cauchy de una función creciente se puede formular de la siguiente manera: una función f definida en un intervalo I es una función creciente, si para cualquier elemento a de I, existe una vecindad $V(a)$ tal que para cualquier x en $V(a)$, el orden entre $f(a)$ y $f(x)$ es el mismo que entre a y x. La definición de Lagrange es global y puntual y se refiere a dos puntos dados (arbitrariamente, y de manera independiente); en la definición de Cauchy, las propiedades locales se mantienen en una vecindad de cada punto dado arbitrariamente. Se puede demostrar, no sin dificultad, que ambas definiciones son equivalentes desde un punto de vista matemático. Sin embargo, según Chorlay (2007) difieren significativamente, tanto desde un punto de vista epistemológico (en el que, por ejemplo, se pone de relieve la diferencia entre propiedades locales y globales), como desde un punto de vista cognitivo.

La primera "definición" explícita de función creciente, la encontramos con Ampère (1924) enunciada en los siguientes términos (p. 11):

> *Se dice que una función continua es creciente en el intervalo de dos valores de la variable independiente, cuando ella aumenta a medida que se dan a esta variable valores cada vez más grandes, y que irá por consecuente disminuyendo, si se le dan a la misma variable valores cada vez más pequeños*

Observemos que más que una definición, se trata de una descripción de la variación intuitiva de cómo cambian dos cantidades una de las cuales depende de la otra (al aumentar una la otra también, si se trata del crecimiento o al aumentar una, la otra disminuye, si se trata del decrecimiento). A esto Chorlay (2007), lo llama "el estilo narrativo", el cual es anterior a la formalización.

Es sorprendente que la noción de sentido de variación de una función no llegó a definirse, tal como se conoce en la actualidad, sino hasta 1912 por Osgood. Así, la noción de crecimiento y de decrecimiento de una función de variable real, durante mucho tiempo evocada de una manera puramente narrativa (Chorlay, 2007) y que se encuentra de manera explícita por primera vez en los trabajos de Ampère, encuentra en Osgood una formulación puramente puntual adquiriendo, hasta ese momento, el estatus de una verdadera definición. La concepción que subyace en ella, es la de transformación de un conjunto ordenado en otro conjunto ordenado, de tal manera que el orden se preserva, si la función es creciente o se invierte si la función es decreciente.

Las definiciones y los teoremas en los libros de texto

En el proceso de búsqueda de las definiciones y su inserción en los libros de texto más representativos al menos en nuestro país, identificamos esencialmente cuatro definiciones de función creciente:

Definición 1: Una función f es creciente en un conjunto S, si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 de S, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definición 2: Una función f se llama *creciente*, cuando a un mayor valor del argumento x corresponde un mayor valor de la función. Dicho de otro modo, f es creciente si al aumentar x, aumenta $f(x)$ y si al disminuir x, disminuye $f(x)$.

Definición 3: Una función es creciente en el intervalo (a, b), si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$.

Definición 4: Se dice que una función $y = f(x)$ es creciente para $x = a$ si en un entorno de a se verifica que: Si $x > a$ es $f(x) > f(a)$ y si $x < a$ es $f(x) < f(a)$. Se dice que una función $y = f(x)$ es creciente en un intervalo si es creciente en todos sus valores del intervalo.

Las definiciones de función decreciente se formulan de manera análoga.

En términos generales, podemos decir que la definición 1 coincide con la dada por Osgood (1912). Observemos que la idea de función en la que se basa esta definición 1, es aquella de que una función es una aplicación o transformación entre dos conjuntos, por lo que, las propiedades de variación son propiedades de las aplicaciones entre dos conjuntos ordenados. Hemos dicho que la concepción que subyace en ella es aquella de que el orden se preserva, si la función es creciente o se invierte si la función es decreciente. Encontramos esta definición, con ciertas variaciones, en los libros (Apóstol, 1967; Swokowsky, 1982; Leithold, 1992; Ortiz, 2009; Stewart, 2007; Ortiz, Ortiz y Ortiz, 2011; Arteaga y Espinoza 2014; Valdés, 1983).

La **definición 2**, puede ser equiparada con la definición dada por Ampère en 1824, y hemos dicho que más que una definición es la expresión o la explicación, en términos informales, de la idea de crecimiento y de decrecimiento acorde con la idea intuitiva de variación dinámica de las funciones que se mencionó en párrafos anteriores. Esta definición es presentada por los libros (Granville, 2007; Ibañez y García, 2007; Cuéllar, 2007; Contreras, 2014; Garza, 2015; Ayres, 1971; Ayres y Mendelson, 2001).

La **definición 3**, introduce fuertes restricciones al campo de aplicación de las funciones a las cuales se les puede considerar como crecientes o decrecientes. La primera de ellas se refiere a que condiciona a que las funciones deben estar definidas en un intervalo, mientras que en la definición 1 se consideran funciones definidas en un conjunto numérico S arbitrario. La otra restricción, más fuerte aún que la primera, es la exigencia de diferenciabilidad en los puntos interiores del intervalo dominio. Más que una definición, se trata en realidad de la condición que se establece en el teorema que vincula el signo de la derivada con el sentido de variación de la función. Encontramos esta definición en los textos de (Aguilar, et. al., 2010; Arteaga y Espinoza, 2014; Silva, 2014; Garza, 2015).

En la **definición 4**, se define primero el crecimiento de una función de manera puntual y, a partir de ella, se define la noción de crecimiento global introduciendo un cuantificador universal para los puntos de un intervalo. Se observa en la definición, la condición de que las funciones deben estar definidas en un intervalo, condición que es absolutamente necesaria y no es posible debilitarla más sustituyendo el intervalo por un conjunto arbitrario, pues si el dominio es un conjunto no conexo. Es posible demostrar, que, en un conjunto arbitrario, si una función es creciente en el sentido de la definición 1, entonces es también creciente en el sentido de la definición 4, pero la afirmación recíproca no se cumple (contraejemplo: $f(x) = -\frac{1}{x}$ definida en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$). Sin embargo, en un dominio conexo, ambas definiciones son equivalentes. Esta definición solo se encontró en Sántalo y Carbonell (2011).

Análisis de los principales teoremas y sus resultados

Solo los textos de (Apóstol, 1967; Leithold, 1982; Swokowski, 1982; Valdés, 1983; Ayres y Mendelson, 2001; Piskunov, 2008; Ayres, 1971); (que en esencia se utilizan en los primeros años de universidad), explicitan los teoremas que vinculan el signo de la derivada con el sentido de variación de una función, sobre ellos hacemos las siguientes observaciones. Estos textos presentan las demostraciones clásicas; es decir, lo demuestran a partir del teorema de los incrementos finitos. Además, presentan explicaciones gráficas, en las que, intuitivamente pretenden hacer evidente que, en los puntos, de los intervalos en los cuales las funciones son crecientes, las rectas tangentes a las curvas que representan las funciones, tienen pendiente positiva e inmediatamente la asocian con la derivada de la función. Los libros (Ortiz, 2007; Stewart. 2007; Ortiz, Ortiz y Ortiz, 2011; Contreras, 2014;) presentan el teorema sin hacer la demostración.

Un detalle importante**:** en los libros de Ayres (1971) y Granville (2007), el teorema se enuncia en un solo sentido. Sin embargo, las demostraciones que ambos presentan, son idénticas (salvo quizás ciertas diferencias de notación) a la que presentada en Cauchy (1823). Hemos mencionado en el estudio epistemológico, que esta demostración contiene un paso erróneo. Nos referimos al paso en el que se concluye que a partir de la positividad de f' en un punto x_0 se deduce el crecimiento de la función f en una vecindad de x_0. En el caso del texto de Ayres y Mendelson (2001), este error es subsanado y se presenta la demostración clásica utilizando el teorema de los incrementos finitos.

Sobre las producciones de los estudiantes

En un estudio previo realizado con estudiantes de primero de licenciatura (quienes habían abordado ya este contenido), se les pidió expresar lo que entendían por una función creciente o decreciente, ninguno de ellos consiguió definir de manera correcta estas nociones, utilizando expresiones como "si la gráfica sube, la función es creciente y si baja es decreciente". Cuando se les mostró la gráfica de una función monótona a trozos, que era creciente en algunos intervalos y decreciente en otros, en particular una parábola, respondieron que, "ubicándonos en el vértice de la parábola, si caminamos hacia la izquierda, la función es creciente, y si caminamos hacia la derecha, la función también es creciente". Al preguntarles cómo se ordenaban los números $f(-1)$ y $f(1)$, sabiendo que f es una función decreciente, afirmaban que $f(-1)$ tenía que ser menor que $f(1)$ porque -1 es un número negativo. De manera general, les resultó muy complicado comparar imágenes de una función, solo con tener la información de la monotonía. A nivel de procedimientos, también se encontraron dificultades para analizar sobre ejemplos concretos, el sentido de variación de una función.

Conclusiones

El estudio histórico-epistemológico nos arrojó que existieron diferentes concepciones acerca del sentido de variación de una función y que la definición actual fue dada hasta en el año 1912. En ella subyace la idea de una función como una transformación abstracta entre dos conjuntos ordenados. Sin embargo, esta idea de las funciones no es abordada con profundidad en el nivel medio superior, si acaso se hace referencia a ella al inicio de la introducción del tema, cuando se ilustran los diferentes tipos de relaciones (funcionales o no) mediante diagramas de flechas. La idea de función que prevalece en las matemáticas del bachillerato, es aquella (más intuitiva) de "cantidad variable" y "dependencia entre dos cantidades" en la que dos cantidades x y y tienen variaciones dependientes. La revisión de los libros de texto, nos puso en evidencia la poca importancia que se les da en ellos a las definiciones y a los teoremas, encontrándose también, en algunos textos, las concepciones que se identificaron en el estudio histórico epistemológico; dando como consecuencia que los procedimientos que se utilizan para analizar el sentido de variación de funciones se presenten como una secuencia mecánica de pasos. Todo esto dificulta la apropiación de estas definiciones y estos teoremas, incluso a largo plazo, y este hecho se hizo patente, en el estudio con estudiantes, ya que encontramos que se apegan a las caracterizaciones encontradas en los libros de texto dejando de lado las definiciones y teoremas. Esto nos indica que en la Ingeniería Didáctica se hará necesaria, una estrategia de transición que vaya desde la comprensión puramente intuitiva de la variación de una cantidad que depende de la variación de otra (la cual es una idea dinámica), hasta la formulación de la definición formal de función creciente (definición 1), en la cual subyace una idea puramente estática, de aplicaciones o transformaciones entre los conjuntos ordenados (y no expresa en absoluto, idea alguna de "variación").

Referencias y bibliografía

Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. & Reyes, R., (2010). Cálculo Diferencial. México: Progreso.

Ampère, A. M. (1824). Précis des leçons sur le calcul différentiel et le calcul intégral, CRH cours : A3a 174, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique. P. 12.

Arteaga, S. & Espinoza, J. (2014). Cálculo. México: Fondo de cultura económica.

Apóstol, T. (1984). Calculus. México: Reverté.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, I Moreno, y P. Gómez Gómez, P. (Ed.) Ingeniería Didáctica en Educación Matemática (pp. 33-59). Bogotá, Colombia, Grupo Editorial Iberoamérica.

Ayres, F. (1967). Cálculo diferencial e integral. México. Mc Graw Hill.

Ayres, F. & Mendelson, E. (2001). Cálculo. México: Mc Graw Hill.

Brousseau, G. (1978), "La cours a 20", en Theorie des situations didactiques (1998) La Pensee Sauvage, pp. 24-43. Una primera version, de 1978, en Etude locale des processus d'acquisition en situation scolaire, Etude sur l'enseignement elementaire (Cuaderno 18,7-21). Bordeaux, IREM y Universidad de Bordeaux 1.

Castillo, M. (2009). Un estudio de concepciones del concepto de función en estudiantes de ingeniería. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22, 419–427. Cauchy, A. (1821). "Analyse Algébrique". Cours d'Analyse de l'Ecole royale polytechnique. L'Imprimerie Royale, Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi.

Cauchy, A. (1823). Resumé des lecons d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. 1ère partie Analyse Algebraique. Paris: Gauthiers-Villars.

Chevallard, Y. (1980). The didactics of mathematics: its problematic and related research. Recherches en Didactiques des Mathématiques, 1, 146-157.

Chorlay, R. (2007) La multiplicité des points de vue en Analyse elementaire comme construit historique, in Histoire et enseignement des mathématiques: erreurs, rigueurs, raisonnements, E. Barbin y D. Bénard (eds). Lyon: INRP, 203-227

Contreras, S. (2014). Cálculo Diferencial. México: Fondo de cultura económica.

Cuéllar, J. (2007). Matemáticas V. Cálculo Diferencial. México: Mc Graw Hill.

Cuevas, C., & Delgado, M. (2016). ¿Por qué el concepto de función genera dificultad en el estudiante? ReCalc, 7, 108-119.

Delgado, M. (2013). Un problema con la concepción de la continuidad de una función. El Cálculo y su Enseñanza, 4, 27-44.

Díaz, M. (2009). Conocimientos de los profesores preuniversitarios de Cálculo acerca del significado y las interpretaciones de la derivada. El Cálculo y su Enseñanza, 1, 75-90.

Engler, A., Vrancken, S., Gregorini, M. I., Müller, D., Hecklein, M., & Henzenn, N. (2008). Estudio del

comportamiento de la función a partir de la derivada. Alme, 21,466–476.
García, O. & Morales, L. (2013). Ideas para enseñar: El Contraejemplo como Recurso Didáctico en la Enseñanza del Cálculo. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. 35, 161-175.
Garza, B. (2015). Cálculo diferencial. México: Pearson.
Granville, W. A. (2007). Cálculo diferencial e integral. México: Limusa.
Ibañez, P. & García, G. (2007). Matemáticas V. Cálculo Diferencial. México: Cosegrat.
Klymchuk, S. (2010). Counterexamples in calculus. EEUU. Mathematical Association of América.
Lagrange, L. (1797)Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégages de toute considération d'infiniment petits ou de'évanouissans, de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies en el 9º cuaderno del Journal de l'École Polytecnique. Paris: République.
Lakatos, I. (1976). Pruebas y refutaciones: ensayo sobre la lógica del descubrimiento matemático. Editorial Alianza Universidad.
Leithold, L. (1992). El cálculo con Geometría Analítica. México: Harla.
Locia, E. (2000). Les contre – exemples dans l`enseignement des mathèmatiques. (Tesis Doctoral), Universidad Paul Sabatier. Touluse, Francia.
Morales, A. (2008). El papel que juega el contraejemplo en la construcción de las definiciones en matemáticas: El caso de la función convexa. (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Guerrero, México.
Ortiz, F. (2009). Cálculo Diferencial. México: Ed. Patria.
Ortiz, F.; Ortiz, F. & Ortiz, F. (2011). Cálculo diferencial. México: Ed. Patria.
Osgood, W. F. (1912). Lehrbuch der Funktionentheorie. Berlín: B. G. Teubner.
Pineda, C. (2013). Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.
Piskunov, N. (2018). Cálculo diferencial e integral. México: Limusa
Rey Cabrera, M. (2016). Propuesta didáctica para la formación del profesorado: el caso de la derivada como herramienta de modelización matemática. (Tesis de Maestría). México: Cinvestav.
Reséndiz, E. (2006). La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 9(3), 435–458.
Rubí, G., Moreno, M., Pou, S., & Jordán, A. (2010). Problemática persistente en el aprendizaje de Cálculo Caso de la Facultad de Ciencias, UABC, 1–10.
Russo, C. (2016). Diseño de una secuencia didáctica para el estudio del concepto de función utilizando software de geometría dinámica. (Tesis de Maestría). México: Cinvestav.
Ruiz, E., Hernández, J., & Gutiérrez, J. (2015). Aplicaciones en dispositivos móviles enfocadas al estudio de conceptos de cálculo, El cálculo y su enseñanza. 6, 123–144.
Salinas, P., & Alanis, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institucion educativa. Relime. 12(3), 355-382.
Sánchez-Matamoros, G., García, M. & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. Relime. 11(2), 267-296.
Sántalo, M. & Carbonell, V. (2011). Cálculo diferencial. México: Diana
Silva, J. (2014). Cálculo Diferencial. México: Anglo.
Stewart, J. (2007). Cálculo Diferencial e Integral. EEUU: Thomson.
Swokowski, E. (1982). Cálculo con Geometría Analítica. EEUU: Wadsworth Internacional Iberoamérica.
Valdés, C. (1983). Análisis matemático, Tomo II. La Habana: Editorial Pueblo y Educación
Valero, S. (2003). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar. (Tesis Doctoral). CICATA-IPN. México.
Zazkis, R., & Chernoff, E. (2008). What makes a counterexample exemplary?. Educational Studies in Mathematics, 68, 195-208.
Zúñiga, M. (2009). Un estudio acerca de la construcción del concepto de función, visualización. en alumnos de un curso de cálculo I. (Tesis de maestría) UPN. Tegucigalpa, Honduras.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

História da matemática e formação de professores: uma relação possível a partir de pesquisas acadêmicas

Virgínia Cardia **Cardoso**
Universidade Federal do ABC
Brasil
virginia.ufabc@gmail.com

Resumo

Apresentamos o relato de uma pesquisa em fase inicial de desenvolvimento, na qual investigamos como se caracterizam as dissertações e teses desenvolvidas em programas de pós-graduação de universidades paulistas e concluídas a partir do ano 2010, que relacionam a História com a formação de professores que ensinam Matemática. Nosso objetivo é analisar trabalhos acadêmicos que relacionam História da Matemática, História da Matemática no ensino ou História da Educação Matemática, com a formação de professores, levantando as suas principais características para compreender como se constitui tal relação. Metodologicamente, a pesquisa está sendo desenvolvida em duas etapas. Primeiramente estamos realizamos um levantamento e fichamento das produções acadêmicas que atendem aos nossos interesses a partir de buscas das informações disponíveis na Internet. Em uma etapa posterior analisaremos as produções selecionadas pela Hermenêutica de Profundidade. Trouxemos, neste texto, os primeiros dados das produções selecionadas do PEHCM - UFABC.

Palavras chave: história da matemática, formação de professores, pós-graduação, hermenêutica de profundidade, educação matemática.

Introdução

A História da Matemática está presente como linha de pesquisa nos principais programas de pós-graduação de Educação Matemática brasileiros, desde a década de 1980. Nas décadas de 1980 e 1990 foram produzidos muitos trabalhos de pesquisa que relacionam a História com a Educação Matemática, seja para a formação de professores, para o ensino, para a análise de materiais didáticos, para o fortalecimento das bases científicas da Educação Matemática ou mesmo para o desenvolvimento de novos conhecimentos históricos da Matemática. Atualmente, o interesse pelas relações entre História e Educação Matemática continua presente no cenário acadêmico, possivelmente com características diferentes das décadas de 1980 e 1990. Nessa pesquisa pretendemos compreender como se dá a relação entre a História e a formação de professores que ensinam Matemática nas pesquisas concluídas na última década.

Apresentamos um recorte de uma pesquisa em andamento no Programa de Mestrado em Ensino e História das Ciências e da Matemática (PEHCM) da Universidade Federal do ABC (UFABC), localizado em Santo André, SP. A questão investigada é: como se caracterizam as pesquisas acadêmicas, desenvolvidas em programas de pós-graduação de universidades paulistas e concluídas a partir do ano 2010, que relacionam a História com a formação de professores que ensinam Matemática. O objetivo geral é mapear e analisar trabalhos acadêmicos que tratam da História da Matemática, História da Matemática no ensino e História da Educação Matemática, relacionando estes temas com a formação de professores, levantando as suas principais características para compreender como se constitui tal relação.

Queremos entender quais aspectos constitutivos da relação História da Matemática – Formação de Professores têm sido mais valorizados nas pesquisas acadêmicas desenvolvidas em universidades paulistas e concluídas a partir do ano 2010. As restrições indicadas estão relacionadas à viabilidade de desenvolvimento em dois anos, por um ou dois pesquisadores. A pesquisa está sendo desenvolvida, no momento, apenas pela docente do programa, mas tem a possibilidade de envolvimento de um futuro mestrando.

Vários cursos de Licenciatura em Matemática brasileiros oferecem a História da Matemática como disciplina regular ou optativa, em muitos casos, amparados pela literatura que indica argumentos favoráveis à História da Matemática no ensino, seja no nível básico ou no nível superior. Por outro lado, há diferentes abordagens da História da Matemática nas pesquisas acadêmicas, embora nem todas relacionem a História com a Formação de professores. Focaremos nas pesquisas que, de algum modo, estabelecem um vínculo entre estes dois temas, procurando pelos indícios do papel a ser desempenhado pela História na formação inicial de professores. Queremos, com a pesquisa que aqui se apresenta, identificar os tais indícios e entender melhor este papel.

Neste texto trouxemos os primeiros dados levantados para constituir este mapeamento: as pesquisas realizadas no PEHCM – UFABC que relacionam História e Educação Matemática. Tais pesquisas serão futuramente analisadas, juntamente com pesquisas de outros programas de pós-graduação paulistas.

Referencial teórico

As relações entre História e Educação Matemática são antigas. A História da Matemática é reconhecida como um potencial recurso pedagógico desde, pelo menos, 1772, com a publicação dos **Elementos de Geometria** de Clairot. Nas décadas de 1980 e 1990, a História da Matemática foi investigada como recurso de ensino por vários pesquisadores brasileiros. Dentre estes podemos destacar Miguel (1997) e Miguel e Miorim (2011), que apresentam vários argumentos reforçadores para a abordagem histórica como recurso pedagógico no ensino da Matemática. De acordo com este autor, a História da Matemática:

- é uma fonte de motivação e objetivos para o estudo da matemática;
- é uma fonte de métodos adequados e de problemas práticos, interessantes, curiosos, ou recreativos para o ensino da matemática;
- possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação do seu ensino;
- é um instrumento de formalização de conceitos;
- é um instrumento de promoção de pensamento crítico e independente, atitudes e valores;
- relaciona os diferentes campos da matemática.

Também os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (Brasil, 1998) apoiaram a abordagem histórica como um valioso recurso pedagógico para o ensino da Matemática:

> Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns porquês e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento (Brasil, 1998, pg. 43).

Além disso, os Parâmetros trazem outro importante argumento, colocando a Matemática como um produto cultural: “conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural” (Brasil, 1998, pg. 42).

Assim como a abordagem da História da Matemática como recurso pedagógico para o ensino da Matemática não é recente, a abordagem da História da Matemática como recurso para a formação de professores, também não é uma novidade. De acordo com Miguel e Brito (1996), a relação entre História e a formação de professores que ensinam Matemática reporta-se a época de 1920. Para estes autores, a História da Matemática deve estar presente nos cursos de formação inicial para os professores, mas não como disciplina isolada e sem conexão com as demais do curso: “defenderemos a tese de uma participação orgânica da história da matemática nessa formação o que significa, primeiramente, a tentativa de se imprimir historicidade às disciplinas de conteúdo específico” (Miguel e Brito, 1996, pg. 49). Para estes autores:

> uma participação orgânica na história na formação do professor, tal como a entendemos, conceberia a história como fonte de uma problematização que deveria contemplar as várias dimensões da matemática (lógica, epistemológica, ética, estética etc) e da educação matemática (psicológica, política, axiológica, didático-metodológica etc), o que remeteria, inevitavelmente, os formadores de professores a destacar e discutir com seus alunos as relações de influência recíproca entre matemática e cultura, matemática e sociedade, matemática e tecnologia, matemática e arte, matemática e filosofia da matemática etc., fazendo com que o discurso matemático abra-se ao diálogo com os demais discursos que se constituem com ele, a partir dele, contra ele, a favor dele etc. A finalidade dessa problematização é fazer com que o professor alcance um metaconhecimento da matemática que lhe propicie a abertura de novos horizontes e perspectivas (Miguel e Brito, 1996, pg. 49).

Miguel e Brito (1996) defendem que a História da Matemática seja incorporada organicamente à formação do professor, possibilitando a formação do licenciando como profissional reflexivo e crítico. Ainda, de acordo com os autores:

> a participação orgânica da história na formação do professor de matemática poderia vir a contribuir para uma adequada compreensão de tópicos de crucial importância para a sua ação pedagógica, tais como: a concepção da natureza dos objetos da matemática, a função da abstração e da generalização, a noção de rigor e o papel da axiomatização, a maneira de se entender a organização do saber, os modos de se compreender a dimensão estética da matemática e valorização da dimensão ético – política da atividade matemática (Miguel e Brito, 1996, pg. 50).

Acrescendo aos argumentos acima citados, podemos apontar outros argumentos que reforçam a ideia que a abordagem histórica da Matemática traz vantagens à formação de professores. Cardoso (2010) afirma que:

> ...a História contribui se objetivar levar o indivíduo a ser aberto a outras formas de pensamento, diferentes dos seus próprios pontos de vista, outras formas de construir o conhecimento, a se desvencilhar de seus preconceitos e ampliar os seus horizontes de saber. Enfim, a História deve contribuir para a constituição de conhecimentos, valores e atitudes, de forma crítica e reflexiva (Cardoso, 2010, pg.5).

Além disso, a História pode assumir diversos papéis na formação, dependendo do momento em que ela é inserida no curso. Por exemplo, no caso de um aluno ingressante em um curso de licenciatura, a disciplina pode contribuir...

> ...para a sua formação geral, iniciando nesse aluno um "hábito cultural", isto é, mostrando a importância que textos escritos (e noticiados por veículos de informação especializados e diários) têm para a formação acadêmica, incentivando-o a refletir sobre novos conhecimentos adquiridos e como relacionar os conceitos de diversas áreas para a constituição de conhecimentos (Cardoso, 2010, pg. 6).

Já, para um aluno concluinte, a autora relatou a sua própria experiência, quando estudou História da Matemática no último ano de seu curso de licenciatura. Neste caso, a História possibilitou...

> ...compreender melhor os conceitos matemáticos aprendidos em outras disciplinas e possibilitou estabelecer algumas relações, mostrando que as teorias e os conceitos matemáticos não surgem formalizados numa linguagem rigorosa, de acordo com a lógica dedutiva, e nem sempre estão totalmente coerentes com a teoria na qual se inserem. Isto é, a História mostrou uma outra forma de estudar a Matemática, que não era a forma axiomática euclidiana. Tal disciplina e as leituras sobre o assunto nos incentivaram a estudar mais profundamente este campo, mesmo após a graduação (Cardoso, 2010, pg. 6).

Finalmente, para a formação continuada do professor, a História contribui para a reflexão da prática docente, reiterando os argumentos já apontados para a o emprego da História da Matemática como recurso pedagógico no ensino.

Entendemos, portanto, que há diversas maneiras de relacionar a História da Matemática à formação de professores. Isso nos incentiva a querer entender como a relação entre História e formação de professores está sendo apresentada nas pesquisas acadêmicas desta última década.

Referencial metodológico

A pesquisa foi iniciada com o levantamento das pesquisas que relacionam História à formação de professores que ensinam Matemática. A coleta de dados está sendo realizada a partir dos sites das universidades paulistas que possuem programas de mestrado e/ou doutorado em Educação, Educação Matemática ou Ensino de Ciências e de Matemática. Possivelmente, para completar as informações encontradas, outros sites serão consultados: o banco de teses da CAPES[1], os currículos Lattes[2] dos professores orientadores em cada programa, os currículos Lattes dos egressos de cada programa e os sites das bibliotecas das universidades envolvidas. Também poderão ser consultados os sites de grupos de pesquisa relacionados à temática, bem como a plataforma de grupos de pesquisa do CNPq[3]. Nesta primeira fase faremos o levantamento dos trabalhos que foram concluídos a partir de 2010, e que têm como temáticas a História da Matemática, História da Matemática no Ensino e História da Educação Matemática. São considerados alguns indícios, tais como título e palavras-chave, para que o trabalho faça parte do levantamento. Os trabalhos encontrados estão sendo fichados com a identificação das seguintes informações: Universidade; Programa; Curso (nível); Título do trabalho; Autor; Orientador(es); Ano de Conclusão; Resumo do autor; Palavras-chave.

As informações dos fichamentos nos permitirão perceber se o trabalho em questão está dentro do escopo de nossa pesquisa ou não, isto é, se nele é estabelecida alguma relação entre a História e a formação de professores que ensinam Matemática. Os trabalhos selecionados são as formas simbólicas de nossa pesquisa e serão analisados a partir da Hermenêutica de Profundidade (HP). Esta é uma metodologia de pesquisa qualitativa criada por John B. Thompson – sociólogo e professor da Universidade de Cambridge (Inglaterra) – para o estudo crítico das formas simbólicas. Formas simbólicas são ações, falas, imagens e textos produzidos e reconhecidos como significativos para os sujeitos envolvidos nos contextos de produção, emissão e recepção. A HP é um modo de análise de formas simbólicas em relação aos contextos que as produzem, as transmitem e as recebem.

Thompson apresentou sua metodologia em sua obra publicada no Brasil em 1995[4], com o título *Ideologia e Cultura Moderna: teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa*, na qual propôs trazer enfoque para a Teoria Crítica para analisar a ideologia. Analisar as formas simbólicas em seu aspecto ideológico nos dá uma dimensão crítica, cuja finalidade é revelar como o significado das formas simbólicas serve para estabelecer e sustentar as relações de dominação em um contexto socialmente determinado. A ideologia não é inerente a uma forma

---

[1] CAPES: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Trata-se de órgão de fomento à pesquisa e mantém, dentre outras iniciativas um banco de teses e dissertações.

[2] Currículo Lattes: currículo *online* de pesquisadores em plataforma do CNPq.

[3] CNPq: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico. Também é um órgão de fomento à pesquisa e mantém uma plataforma de Grupos de Pesquisa e de Pesquisadores.

[4] Baseamo-nos na 5ª edição, publicada em 2000.

simbólica própria. Ideologia é, de acordo com Thompson (2000), um efeito que surge quando o significado de uma forma simbólica é usado para sustentar uma relação de dominação em um contexto específico.

A HP compõe-se de duas etapas: Hermenêutica do Cotidiano e Hermenêutica de Profundidade. A Hermenêutica do Cotidiano considera como as formas simbólicas são interpretadas e compreendidas no cotidiano, pelo senso comum. Essa é a primeira leitura que será realizada nas produções selecionadas e nos apontará indícios de características. A partir daí se realiza a Hermenêutica de Profundidade, que se caracteriza por três dimensões.

A primeira dimensão é chamada de análise sócio histórica e tem como objetivo reconstruir as condições sociais e históricas de produção, circulação e recepção das formas simbólicas, evidenciando as relações de dominação que caracterizam o contexto. Nessa dimensão, a preocupação será a de identificar e descrever as situações espaços-temporais em que os trabalhos acadêmicos, isto é, as formas simbólicas foram produzidas. A segunda dimensão é chamada de análise formal ou discursiva. As formas simbólicas têm uma estrutura interna articulada que facilita ou não a mobilização do significado. Mapear as afirmações de um discurso em termos de operadores "quase-lógicos": implicações, contradições, pressupostos, exclusões, etc. Nesta fase, analisamos o texto em si – o que o autor disse – e destacamos fragmentos que são significativos, na interpretação do pesquisador, para responder à questão da pesquisa. A terceira dimensão é a interpretação ou reinterpretação. Trata-se de construir ou reconstruir os significados do discurso. É desvendar a conexão entre as construções simbólicas e as relações de poder. Ou seja, é desvendar a Ideologia. Em nossa pesquisa o aspecto ideológico está nas características reveladas em nossa interpretação, a partir da leitura e análise dos trabalhos acadêmicos selecionados.

Neste presente momento foi iniciado o levantamento e fichamento, a partir das produções do PEHCM – UFABC. O próximo passo é estender esses processos às dissertações e teses desenvolvidas em outras universidades paulistas. A HP ainda não foi aplicada, mas será apenas quando a fase do levantamento e seleção das produções acadêmicas for concluída.

Os primeiros dados da pesquisa

Demos início à nossa pesquisa com o programa de pós-graduação da UFABC. O curso de mestrado acadêmico foi criado como Mestrado em Ensino História e Filosofia das Ciências e da Matemática, em 2011, na área 46 da CAPES – Área de Ensino de Ciências e Matemática – por professores vinculados aos cinco cursos de licenciatura da UFABC (Ciências Biológicas, Filosofia, Física, Matemática, Química), além de colaborados externos. Em 2015 o curso passou por uma reformulação, em decorrência de dois fatores: a criação do curso de Mestrado em Filosofia na UFABC e mudanças na área 46 da CAPES. Desde então, o curso passou a se chamar Curso de Mestrado em Ensino e História das Ciências e da Matemática (PEHCM), contando com três linhas de pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática; Formação de Professores de Ciências e Matemática e História das Ciências e Matemática e interfaces com a Educação. O público alvo preferencial do curso é constituído de graduados nas áreas de Biologia, Física, Matemática, Química e Pedagogia, mas não restringe a participação de egressos de outras áreas.

No levantamento dos trabalhos concluídos no programa PEHCM – UFABC foram identificadas, a partir do título e palavras-chave, quatro dissertações de mestrado que relacionam a História à Educação Matemática. Tais produções foram desenvolvidas nas linhas de pesquisa Ensino e Aprendizagem das Ciências e da Matemática e Formação de professores de Ciências e Matemática, e estão listadas no quadro 1.

Quadro 1

Dissertações selecionadas do PEHCM - UFABC

Ano de conclusão	Título	Autor(a)
2015	A história da matemática como recurso pedagógico: uma análise hermenêutica sobre as concepções de alguns professores	Ana Jimena Lemes Pérez
2015	A história da matemática no portal do professor: uma análise hermenêutica dos planos de aula	Rosana Rodrigues da Silva
2015	A contribuição de Achille Bassi para a matemática no Brasil	Aline Leme da Silva
2016	Abordando frações em perspectiva histórica: uma possibilidade de ensino para a educação básica	Lídia de Sousa da Cruz

Fonte: Construção da autora

Considerando os fichamentos das dissertações listadas no quadro 1, podemos afirmar que das quatro dissertações encontradas em nosso primeiro levantamento, apenas as duas primeiras relacionam a História da Matemática à formação do professor. Para tanto, foram consideradas as informações do resumo de cada trabalho. Ana Jimena Pérez (2015) entrevistou docentes de dois cursos de Licenciatura em Matemática para discutir sobre como a disciplina História da Matemática pode ser compreendida em um curso de formação inicial de professores de Matemática. Rosana Silva (2015) analisou os planos de aula do Portal do professor do MEC que abordavam a História da Matemática. Como este portal foi entendido como espaço de formação continuada, Rosana Silva (2015) estabeleceu uma relação entre História e formação de professores.

Já a terceira dissertação, de Aline Silva (2015), traz uma pesquisa biográfica do matemático italiano Achille Bassi, traçando sua trajetória profissional desenvolvida no Brasil. Esta pesquisa não aborda a formação de professores e sim concentra-se na vida e na obra do matemático. A quarta dissertação, de Lídia da Cruz (2016), desenvolveu uma intervenção didática para o ensino de frações na educação básica, na qual se abordava a História da Matemática. Ou seja, a autora abordou a História como recurso para o ensino e não para a formação de professores.

Dos quatro trabalhos encontrados no nosso primeiro levantamento, apenas dois foram selecionados para serem analisados na Hermenêutica de Profundidade posteriormente: o de Ana Jimena Pérez (2015) e o de Rosana Silva (2015), pelo fato destes se referirem diretamente, ou indiretamente, à formação de professores. Procederemos do mesmo modo com as dissertações e teses desenvolvidas em outros programas de pós-graduação a serem investigados.

Considerações finais

A pesquisa está em uma fase inicial de levantamento dos dados com as buscas de informações nos sites dos programas de pós-graduação das universidades paulistas e com o fichamento das dissertações e teses encontradas. Baseando-nos em nosso referencial teórico, podemos afirmar que são muitas as possibilidades de entender a relação entre a História da Matemática e a formação de professores. Queremos compreender como se dá tal relação nas produções de nossa década atual, que foram desenvolvidos nas universidades paulistas.

Com o fichamento das produções acadêmicas encontradas em nosso levantamento pretendemos ter uma visão panorâmica da relação. Com a análise via Hermenêutica de Profundidade obteremos uma compreensão profunda acerca dos elementos que constituem tal relação. Nossa expectativa é que a pesquisa nos auxilie a identificar as potencialidades da História da Matemática como instrumento de formação de professores dentro dos contextos educacional e social atuais.

Bibliografia

Brasil, MEC. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental - Matemática.* Brasília: MEC.

Cardoso, V.C. (2009). *A Cigarra e a Formiga: uma reflexão sobre a Educação Matemática brasileira da primeira década do século XXI***.** Campinas: UNICAMP, tese de doutoramento.

_________. (2010). A história da matemática na formação de professores que ensinam matemática (Mesa Redonda). *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM),* Salvador: SBEM.

Gomes, L.F. e Araman, E.M.O. (2016). História da Matemática no ensino de Matemática: um mapeamento dos artigos publicados em alguns periódicos nacionais na última década. *Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM).* São Paulo: SBEM.

Miguel, A. (1998). As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos Reforçadores e questionadores. *Zetetiké,* 73-105.

Miguel, A. e Brito, A. J. (1996). A História da Matemática na Formação do Professor de Matemática. *Cadernos CEDES - História e Educação Matemática.* Campinas: Papirus, 40, 47-61.

Miguel, A. e Miorim, M. A. (2011). *A História na Educação Matemática: propostas e desafios.* Belo Horizonte: Autêntica.

Thompson, J. B. (2000). *Ideologia e Cultura Moderna: teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa.* (5ª ed.) Petrópolis: Editora Vozes.

Interpretaciones del método de Descartes en Didáctica del álgebra. Estudio documental[1]

Jhon Helver **Bello** Chávez
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
jhonhelver@gmail.com

Resumen

Esta comunicación presenta un estudio documental de las interpretaciones del método cartesiano en tres libros sobre enseñanza y aprendizaje del álgebra, su influencia y uso en la comprensión del álgebra escolar.

Se encontraron argumentos para indicar que algunas interpretaciones usadas en didáctica respecto a la práctica matemática de Descartes develan una concepción del método cartesiano que privilegia aspectos de tipo sintáctico y metódico, dejando a un lado el análisis del tratamiento representacional y semántico que se encuentra en la obra. La importancia educativa que se le otorga al método de análisis está relacionada con la manipulación algebraica y la construcción de un sistema simbólico, las reflexiones sobre las necesidades interpretativas, diagramáticas y semánticas del método en la solución de problemas son exiguas.

Palabras clave: método de Descartes, didáctica del álgebra, enseñanza del álgebra, Geometría, historia de la matemática

Problemática a estudiar

La participación por parte de la Historia de la Matemática en la Didáctica implica la interpretación, selección y análisis de aspectos que el didacta considera relevantes para los procesos de enseñanza aprendizaje. El didacta interpreta y analiza las matemáticas a partir reconstrucciones históricas centradas en diferentes aspectos; sociales, epistemológicos o sociológicos. De esta manera, organiza un nuevo relato histórico que considera relevante para su práctica respecto a un objeto matemático de estudio. En consecuencia, reconstruye la historia desde necesidades específicas respecto al tipo de conocimiento que desea trabajar, reconoce

[1] Este estudio hace parte de los antecedentes del proyecto de tesis doctoral: Diagramas y práctica matemática en la geometría cartesiana (1637-1750). Contribución de la historia de la matemática a la formación de profesores. Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis en Educación Matemática de la Universidad del Valle -Colombia-.

algunos acontecimientos históricos que inspiran su acción; este proceso lo realiza desde una mirada epistemológica del objeto en la Didáctica.

Este documento devela en tres libros sobre enseñanza y aprendizaje del álgebra las interpretaciones en relación con los trabajos históricos, especialmente la *Geometría* (Descartes, 1637). Se estudia la posición teórica que han realizado los didactas de estos acontecimientos desde el conocimiento que los historiadores tienen de la obra de Descartes. Se estudia en un momento de la Didáctica de la Matemática las interpretaciones y usos de la obra histórica.

Los textos fueron escogidos porque en el contexto nacional, especialmente en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, son usados para formar profesores, para dar a conocer la parte histórica del trabajo que se ha realizado en el campo. Los textos se ubican en una etapa de consolidación de la investigación en enseñanza y aprendizaje del álgebra, desde 1996 hasta 2004. En el primero, *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*, se estudia la parte I: *Historical Perspectives in the Development of Algebra* (Bednarz, Kieran, & Lee, 1996). En el segundo texto se profundiza en el capítulo ocho *Working Group on Algebra History in Mathematics Education* del estudio 12th ICMI (Stacey, Chick, & Kendal, 2004). Este capítulo tiene como propósito analizar estudios en historia del álgebra que en el futuro puedan examinarse para la enseñanza y aprendizaje. El tercer texto *Perspectives on School Algebra* (Sutherland, Rojano, Bell, & Lins, 2002).

¿Qué dice la Historia de las Matemáticas de la obra matemática de Descartes?

El análisis de Liu (2017) reseña que los investigadores han realizado dos tipos de lecturas del papel de la geometría y el álgebra en la obra de Descartes, la lectura tradicional y la lectura progresista. La primera caracterizada por dar más prioridad a la herencia euclidiana, en especial al papel de la construcción geométrica. En esta perspectiva se entiende una mayor importancia epistemológica a la geometría que al álgebra. Esta se comprende como una herramienta que posibilita la solución de problemas geométricos.

La lectura progresista reconoce en la obra de Descartes mayor contribución al desarrollo de una concepción de matemática más cercana a la actual. De esta manera, este tipo de interpretación le reconoce menos valor al trabajo geométrico -sin desconocerlo- y le pone énfasis a la contribución en la estructuración del álgebra; al análisis y organización de entidades abstractas que luego contribuyeron con la matemática. En este tipo de lectura se entiende que Descartes liberó a la magnitud y el número de intuiciones espaciales.

Reconociendo las diferencias entre los enfoques que han estudiado la obra matemática de Descartes, este estudio centra el marco referencial con el que estudia el corpus documental desde la práctica que relaciona geometría y álgebra a través del método de resolución de problemas, idea que reconocen los dos enfoques históricos del texto. El método es el centro de la práctica matemática que se desarrolló a través de la publicación de la *Geometría*, que, como se sabe, hace parte del *Discurso del método para conducir bien la propia razón y buscar la verdad en las ciencias* (Descartes, 1637).

Método de solución de problemas

Es conocida la oposición que Descartes tuvo a la silogística de razonamiento llevada a cabo por los escolásticos, en especial su crítica al papel convincente para probar cosas que se conocen (Descartes, trad. en 2010, trad. en 1996). Sustentó la necesidad en avanzar en un proyecto para encontrar un método de descubrimiento de verdades, con la idea de descomponer en los elementos más simples cada problema geométrico (Gaukroger, 1989).

Dentro de su filosofía esta técnica estuvo encaminada a orientar la solución de cualquier problema geométrico, fue basada en el método de análisis y planteó una separación de la técnica argumentativa Euclidiana.

> Sobre el procedimiento para acceder a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas. Si, pues, deseamos resolver un problema, inicialmente debe suponerse efectuada la resolución dando nombre a todas las líneas que se estimen necesarias para su construcción, tanto a las que son desconocidas como a las que son conocidas. A continuación, sin establecer distinción entre las lineas conocidas y las desconocidas, debemos decifrar el problema siguiendo el orden que muestre, de modo más natural, las relaciones entre estas líneas, hasta que se identifique un medio de expresar una misma cantidad de dos formas: esto es lo que se entiende por una ecuación. (Descartes, trad. en 1996, p.392).

En el método la ecuación se convirtió en un medio que permitió otra forma de argumentación respecto a la tradición griega. El trabajo de Descartes desarrolló el método de análisis el cual permitió superar el uso de figuras arbitrarias que generalizaban las propiedades de los objetos y contribuyó con diagramas que muestran las relaciones entre objetos geométricos y permitieron especificar a partir de ecuaciones lo que se considera dado,

> En adelante se podían incluir en el razonamiento todos los elementos que estaban implicados, como si todos fueran dados, sin que esta unificación de tratamientos y procedimientos implicaran en ningún momento el menor riesgo de confusión en cuanto al estatuto exacto de cada uno de ellos Gardies (como se citó en Arboleda, 2012, pág. 3).

Descartes plantea en su *Geometría* el uso de símbolos de manera temprana, al advertir el uso de la letra para designar la magnitud a partir de un segmento de recta

> Sobre el uso de letras en geometría. Pero frecuentemente no es necesario trazar de esta forma tales líneas sobre el papel, siendo suficiente designar cada una de ellas por una letra. Asi para sumar la línea AB y CH, llamo a la una a a la otra b y escribo $a + b$ (Descartes, trad. en 1996, p. 391).

Este aspecto contribuye a superar la visión euclideana de homogeniedad. En Descartes $a^2, a^3, \sqrt[n]{a}, n \geq 0$, pueden ser representados mediante una linea recta, se obtienen construcciones geométricas por medio de segmentos que representan por ejemplo, ecuaciones de grado n.

Esta nueva forma de operar involucró una metafísica que en su época revolucionó la forma de hacer matemáticas, su base fundamental estuvo en dejar a un lado la perspectiva de los objetos y enfocarse en las relaciones (Macbeth, 2004, 2014). El interés de estudio en las matemáticas cambió, de objetos geométricos como líneas, círculos y polígonos a relaciones entre segmentos de línea; las cuales se entienden como representantes de cantidades arbitrarias y se pueden representar por medio de proporciones: las matemáticas vistas desde la simplicidad de las relaciones entre líneas.

Dos momentos en la interpretación del signo se establecieron en el método de solución de problemas; el primero vinculado con la interpretación de la situación por ejemplo, en el problema de Pappus parte de las inferencias que se realizan son producto del diagrama que usa, el cual no cambia durante toda la obra, las rectas están en posición dada, esto permite deducir las relaciones entre las rectas para la solución y sus implicaciones en la forma de las curvas y de las representaciones simbólicas (Maronne, 2007). El otro momento se establece al construir geométricamente los segmentos de linea con longitudes iguales a las raices de una ecuación, representar geometricamente la solución de ecuaciones es parte del método propuesto.

Según (Mancosu, 1996) en los comentaristas de la obra de Descartes existen dos interpretaciones del papel del álgebra en *La Geometría*. La primera representada por los trabajos de Bos, Boyer, Grosholz, Lachterman y Lenoir, la cual sostiene que el álgebra es una herramienta que ayuda a proporcionar la economía, de esta manera el estatus epistemológico de la representación simbólica era ese, herramienta; el medio de representación y definición era la curva. Una segunda interpretación es la de Giusti, quien considera que la identificación de la curva por medio de la ecuación, está en el corazón del programa cartesiano, los medios para construir curvas son secundarios.

Parte del trabajo que se presenta en la *Geometría* se sustenta en mostrar las limitaciones de la regla y el compás, aceptar instrumentos articulados para trazar curvas involucró los medios de construcción en una nueva organización, algunas denominadas por los antiguos como mecánicas ahora cumplen los criterios para ser geométricas.

> …pues si pensamos que las han denominado de tal modo porque es necesario utilizar algún instrumento para trazarlas, entonces deberíamos rechazar por la misma razón los círculos y las líneas rectas, puesto que no se trazan sobre el papel, sino utilizando la regla y el compás que también pueden ser considerados como máquinas… (Descartes, trad. en 1996, pág. 409).

Descartes incluye el tratamiento de instrumentos mecánicos, compases, que le permiten ir trabajando alrededor de ideas primarias sobre las matemáticas, como por ejemplo la media proporcional. Es cierto que la revisión de la *Geometría* deja duda sobre la existencia de este tipo de instrumentos, pues estos podrían ser diagramas para comprender los problemas; sin embargo algunos comentaristas que han investigado las correspondencia de Descartes en especial con Beeckman y el tratado de *private reflections* aseguran la existenica de estos instrumentos (Bos, 2001; Shea, 1993). Se construían curvas que daban muestra de las relaciones que se sintetizaban en la escritura de una ecuación. Este es un procedimiento que aparece frecuentemente en la *Geometría.*

Descartes fue elaborando un enfoque unificado de técnicas algebraicas, en donde los problemas que son suceptibles de construcción podrían reducirse a un grupo de problemas estándares, los cuales podrían ser representados por las relaciones de una construcción conocida. Relacionó los instrumentos que hacen posible trazar una curva, la construcción geométrica y la solución de la ecuación, con expresiones algebraicas estandarizadas y generales. Mostró el potencial del método para integrar problemas que en la clasificación de los antiguos estaban separados.

Análisis de los textos

El estudio establece relaciones entre los niveles semánticos y pragmáticos de fragmentos de los textos analizados. Las unidades básicas son frases tomadas entre puntos apartes o puntos seguidos, y citas textuales relacionadas con la *Geometría* o respecto a Descartes. Una primera revisión del corpus documental permitió develar dos categorías de análisis, una a nivel explicativo de la obra historica, las interpretaciones del método y otra a nivel de la praxis dentro de la didáctica, los usos didácticos del método.

Respecto a las interpretaciones del método

En esta categoría de análisis resaltan dos elementos de discusión, el papel del símbolo en el desarrollo de método y el papel del análisis en la resolución de problemas geométricos.

En los tres textos se evidencia un reconocimiento y énfasis de la necesidad de escritura simbólica para el desarrollo del método. Sin embargo, no se evidencia referencia ni uso de los procesos constructivos geométricos que garantizaron la posibilidad de interpretación de lo desconocido como dado. Parte del método consiste en interpretar lo que se busca con las mismas características y propiedades de lo conocido.

El constraste entre una relación geométrica y su representación simbólica se encontraba mediada por el papel de la construcción. Este aspecto se reconoce como el propósito metodológico de la Geometría, el cual consiste en enfrentar una cuestión crucial en la tradición de la resolución de problemas geométricos: ¿cómo construir cuando regla y compás son insuficientes? (Bos, 1984, 2001).

Los apartes de los textos analizados hacen referencia a un análisis desprovisto de relaciones geométricas contradiciendo la perspectiva que presenta Descartes. En obras posteriores como en Arnauld y Prestet (Schubring, 2005), se evidencia una versión de método más cercana a la que presentan los textos didácticos. En frases como la siguiente se evidencian estas concepciones:

> They observe that the history of symbolism in algebra is the invention of a system that makes it possible to solve problems by manipulation of symbols according to rules, and without recourse to what the symbols mean. This is the legacy of Descartes and others. (Stacey, et al., 2004, p.10).

Esta concepción se corresponde con la lectura progresista del método. Fundamentalmente, se vincula con la creación del sistema de signos matemáticos que posibilitó una estructuración de las expresiones polinómicas y de la resolución de problemas identificando expresiones canónicas:

> Thus the method continues by transforming the written algebraic expressions and the resulting equations in order to reduce them to a canonical form. This implies that it has previously been determined which expressions and which equations will be considered canonical, and that one has a catalogue of all the possible canonical forms and procedures for solving each of them. (Stacey, et al., 2004, p.194).

En la obra se trabajó la forma canónica de los polinomios, sin embargo, este hecho es consecuencia del trabajo sobre aspectos geométricos de la curva. Las unidades de análisis no permiten determinar el alcance que se sugiere de las relaciones entre la curva y su forma canónica. La figura, la construcción, el desarrollo de la gráfica, está ausente en los análisis que se realizan en el texto sobre el método de solución de problemas geométricos. Las duplas de problema geométrico/construcción (curva) y construcción (curva)/ecuación son fundamentales en la comprensión de la importancia histórica de la *Geometría*.

Solamente uno de los textos hace referencia a la representación de las magnitudes y al trabajo relacional que se involucra en el desarrollo del método, pero no describen el tipo de relaciones que permiten el análisis:

> In geometry, analysis revolves around the search for what is known among what seems to be unknown. The core of analysis is the hypothesis, that is the assumption that the problem is solved. As said before it imposes the development of a certain way of representing the unknown magnitudes that are considered given by hypothesis. In that process, all lines or parts of a figure are dealt with in the same way. Relations between those lines are studied, whether the lines are given or not. (Bednarz, et al., 1996, p.36).

El proceso analítico está delineado por una buena elección de lo conocido y desconocido en el problema geométrico. Este aspecto está sustentado en la posibilidad que el método de descubrimiento que posibilita el uso de técnicas algebraicas quede cubierto por la comprensión de los asuntos que anteceden la suposición de resolución del problema (Gaukroger, 1989). La ecuación contiene elementos conocidos y desconocidos; pero su conformación es sustentable por saber geométrico.

Uso didáctico del método

Las secciones analizadas hacen refencia a la importancia del método en la adquisición del sistema simbólico del álgebra escolar. Le otorgan relevancia en la construcción de una sintaxis para la matemática, categorizando al método cartesiano como algebraico. En la solución de problemas el método aparece relacionado con el reconocimiento de cantidades dadas y desconocidas

> What lies at the heart of algebraic problem solving is the expression of problems in the language of algebra by means of equations. In order to be able to compare the ways of writing equations that represent word problems in different historical texts so that the comparison brings out what is pertinent for teaching, a good strategy is to take as a reference what is done in the Cartesian Method, which is the algebraic method *par excellence* and may be considered as the canon of the methods traditionally taught in school systems. (Stacey, et al., 2004, p.191).

En el tratamiento didáctico no se evidencian propuestas de trabajo respecto a la representación de magnitudes por medio de segmentos. La dificultad que se enuncia en la enseñanza refiere al papel del símbolo que subyace al uso del método. En las fases que se reconocen no se involucra la interpretación de problemas por medio de construcciones diferentes a la simbólica, desconociendo la fase interpretativa del problema a partir del diagrama que permite inferir las relaciones que se representan en ecuaciones. Sin embargo, se reconocen diferentes interpretaciones de la letra en el proceso de construcción del método, el paso de la incognita a la variable

> …competent use of the Cartesian Method is linked with the creation of families of problems that are represented in the mathematical sign system (MSS) of algebra as canonical forms. This implies an evolution of the use of symbolisation in which, finally, the competent user can give meaning to a symbolic representation of the problem that arises from the particular concrete examples given in teaching. Student will make sense of the Cartesian Method when they become finally awarethat by applying it they can solve families of problems, defined by the same scheme of solution. (Stacey, et al., 2004, p.191).

En los documentos no se profundizan los medios que hacen posible comprender los problemas o realizar el primer paso del método, establecer las relaciones de lo conocido y de lo desconocido. El énfasis se pone en el reconocimiento de técnicas algebraicas, de las ecuaciones como una nueva forma de resolución de problemas al margen de los procedimientos aritméticos y geométricos. Las únicas experiencias que se presentan involucran problemas en la relación aritmética – álgebra y vinculan diferentes recursos como hojas de cálculo, exploración por métodos artiméticos y gráficas de curvas, siempre en la construcción de familias de problemas, en busca de la comprensión de la operatividad de lo simbólico

> The role played by intermediate methods in the passage from the classical arithmetic method to the Cartesian one has to do with the possibility of the user constructing meanings for the algebraic relationships between the elements of the problem. Although it should be pointed out that, on the other hand, the essential difference between the introduction of algebra and all previous approaches lies in that in the latter, when solving problems, the unknown is represented, although it is not operated. Inferences are made with a reference to the representation of the unknown; but if operated, this is always done by means of the data: if a mention is made of unknowns, this is only in terms of the results of operations which are being done with the data. (Sutherland, et al., 2002, p. 175).

En esta categoría se evidencia que hasta la fecha de producción de los documentos analizados, el método cartesiano seguía siendo un elemento de análisis para la didáctica de la matemática. Por un lado vinculado a la construcción de sistemas simbólicos y por otro a la resolución de problemas por medio del reconocimiento de la estructura simbólica canónica de los polinomios.

Reflexión final

Los estudios históricos sobre la obra matemática de Descartes en especial de la *Geometría* (Descartes, 1637), muestran un método ligado a la resolución de problemas geométricos y al análisis. La representación de datos conocidos y desconocidos por medio de segmentos, la representación de relaciones geométricas por ecuaciones y el estudio de su solución por instrumentos o construcciones geométricas, hacen parte de las actividades que caracterizan la práctica. La construcción se entiende como un elemento fundamental en la obra. El estudio de las propiedades de las curvas y una clasificación que incluye nuevos problemas como geométricos, permiten comprender y usar el método propuesto por Descartes.

En los textos analizados de enseñanza y aprendizaje del álgebra se desarrolla una idea de método cartesiano vinculada con el dominio de técnicas algebraicas y con la resolución de problemas a partir de expresiones canónicas. Aunque los textos reconocen la importancia didáctica del método, la concepción que persiste está más vinculada con autores posteriores a Descartes, se fortalece la técnica algebraica y la representación simbólica de las curvas no depende de planteamientos geométricos. No se vinculan medios de representación diferentes al simbólico y la noción de curva es poco trabajada como medio que permite comprender la expresión algebraica, en las oportunidades que aparece lo hace más como representación de los símbolos y no como justificación o representación de ellos.

La interpretación que hacen los libros analizados descarta el uso de reflexiones didácticas sobre la semántica que se desarrolla en la obra de Descartes, los diagramas de los problemas que permiten la construcción de relaciones geométricas y la evolución en el método del tratamiento de la letra no se encuentran desarrollados dentro de los textos. El espíritu relacional de la matemática en Descartes no hace parte de argumentos que acerquen el análisis histórico de la obra a la didáctica. En correspondencia, la posibilidad de uso a la que se refieren está ligada al desarrollo del sistema simbólico y por medio de éste a la identificación de formas canónicas de solución de problemas.

Referencias y Bibliografía

Arboleda, L. (2012). El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas. *13º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (p.764 -777). Medellín: Universidad de Medellín. Obtenido de http://asocolme.org/images/eventos/13/MATEMATICA_EDUCATIVA_13_Encuentro_Colombiano%20ECME.pdf

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee , L. (Eds.). (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bos, H. (1984). Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory: the construction of ecuations. 1637 - 1750. *Archive for History of Exact Sciences*, 331 - 380. Obtenido de http://www.jstor.org/stable/41133725

Bos, H. (2001). *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction.* New York: Springer.

Descartes, R. (1637). *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences.* Recuperado de https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86069594

Descartes, R. (2010). *Reglas para la Dirección del Espíritu.* (J. Navarro Cordón, Trad.). Madrid: Alianza Editorial.

Descartes, R. (1996). *Discurso del Método. La dióptrica. Los meteoros. La geometría.* (J. Sánchez Ron, Eds., & G. Quíntas, Trad.). Barcelona: Círculo de Lectores.

Gaukroger, S. (1989). *Cartesian Logic.* Oxford: Clanderon press.

Liu, C. (2017). Re-examining Descartes´ Algebra and Geometry. *Analytic Philosophy, 58*(1), 29 - 57.

Macbeth, D. (2004). Viète, Descartes, and the Emergence of Modern Mathematics. *Graduate Faculty Philosophy Journal, 25*(2), 87 - 117.

Macbeth, D. (2014). *Realizing Reason. A Narrative of Truth and Knowing.* Oxford: Oxford University Press.

Mancosu, P. (1996). *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century.* Oxford: Oxford University Press.

Maronne, S. (2007). *La théorie des courbes et des équations dans la Géométrie cartésienne: 1637 - 1661.* (Tesis doctoral, Université Paris - Diderot- Paris VII). Recuperada de: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00203094/document

Schubring, G. (2005). *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number concept Uniderlying the development of Analisis in 17-19th Century France and Germany.* New York: Springer.

Shea, W. (1993). *La magia de los números y el movimiento. La carrera científica de Descartes.* Madrid: Alianza Editorial.

Stacey, K., Chick, H., & Kendal, M. (Eds.). (2004). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study.* Boston: Kluwer Academic Publishers.

Sutherland, R., Rojano , T., Bell, A., & Lins, R. (Eds.). (2002). *Perspectives on School Algebra.* Boston: Kluwer Academic Publishers.

Hacia un Diálogo entre Teorías Relacionadas con las Nociones de Obstáculo y Conflicto Semiótico en Educación Matemática

Gloria Inés Neira Sanabria
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Colombia
gineiras@correo.udistrital.edu.co

Resumen

¿Es un obstáculo epistemológico un error, una mala comprensión, una incomprensión, o sencillamente una cierta forma de conocer que funciona en algunos dominios restringidos pero se revela inadecuada en otros? Se presentan diferentes tendencias, teorías y enfoques relacionados con la noción de obstáculo epistemológico, nociones como conflictos, errores, dificultades, mis-concepciones, de origen epistemológico, semiótico, cultural, didáctico…El concepto de "obstáculo epistemológico" concebido como esquemas de pensamiento culturalmente adquiridos, creencias no cuestionadas acerca de la naturaleza de las matemáticas, emerge en la educación matemática como una manera de explicar las dificultades de comprensión que no dependen solamente de falta de experiencia con las matemáticas, ni de falta de habilidades o destrezas, sino también del simbolismo, del lenguaje, de la semiótica, de la naturaleza de los conceptos matemáticos mismos y de la cultura en la cual estos han sido desarrollados.

Palabras clave: Obstáculo epistemológico, conflictos semióticos, concepciones, comprensión, discursos.

Introducción

El término obstáculo epistemológico fue construido por el físico y filósofo francés Gastón Bachelard (1938/2004), quien postuló que la naturaleza no nos es dada y nuestras mentes nunca son vírgenes en frente de la realidad, pues sea lo que sea que veamos, digamos u observemos está direccionado por lo que ya conocemos, pensamos, creemos o queremos ver.

Enunció algunos obstáculos en su obra: la experiencia básica o conocimientos previos, el conocimiento general, el obstáculo verbal, el conocimiento unitario y pragmático, el obstáculo sustancialista y el animista. No dio una definición explícita de obstáculo epistemológico, y ninguno de los ejemplos de obstáculo epistemológico dado por Bachelard se aplica a las matemáticas, como él mismo lo advirtió,[1] puesto que la matemática no es una ciencia natural, no trata acerca de fenómenos del mundo real, ni se basa en la observación y la inducción. Sin embargo, a partir del debate que desató la incorporación del concepto a la educación matemática, se empezó a creer que sí tenía sentido hablar de obstáculos epistemológicos en matemáticas, y que podían ser la explicación para eso que a diario se detectaba como obstaculizante en los aprendizajes de los estudiantes. Se buscaba un fundamento teórico para el nuevo concepto, y naturalmente transferir este concepto de las ciencias naturales a las matemáticas requería adaptaciones cuidadosas y profundas reflexiones filosóficas acerca de la naturaleza de las matemáticas.

Esta visión, a su vez, requirió repensar la enseñanza y la valoración de la comprensión de los estudiantes, lo cual explicaba sus errores, pues algunos de ellos eran causados por formas de pensar completamente legitimas con una cierta estructura de la mente, un cierto contexto de problemas y ciertas creencias acerca de lo que es verdadero en matemáticas.

Emergió claramente entre algunos investigadores que algunas de las formas de comprensión de los estudiantes merecían más respeto y atención, y que en vez de tratar de reemplazar el conocimiento errado por el correcto, el esfuerzo de los profesores debería ser invertido en la negociación de significados, en la invención de problemas especiales en los cuales los estudiantes experimentaran un conflicto mental que los hiciera conscientes de que dichas formas de comprensión habituales, posiblemente no sean las únicas y que no son universales.

Bachelard construye esta epistemología en 1938 y es hasta el año 1976 que Brousseau la incorpora a la investigación en educación matemática. Se describe brevemente el tránsito de esta noción hacia el campo específico de la investigación en educación matemática, que se tarda alrededor de 38 años.

Desarrollo

Aproximación desde la educación matemática

Brousseau (1983/1995) ya veía en la noción de obstáculo el medio de cambiar el estatuto del error mostrando que el error y el fracaso no tienen el papel simplificado que queremos a veces hacerles jugar, dado que el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de ese tipo no son erráticos e imprevisibles, ellos se constituyen en obstáculos. Tanto en el funcionamiento del profesor como en el del alumno, el error es constitutivo de sentido del conocimiento adquirido.

Distinguió, tres orígenes fundamentales de los obstáculos encontrados en la enseñanza matemática:

• *Un origen ontogenético, debido a las limitaciones impuestas, por el nivel de desarrollo de las capacidades cognitivas de los alumnos, en el proceso de enseñanza.*

• *Un origen didáctico, debido a las decisiones del sistema educativo, o las acciones del*

[1] "…en efecto, la historia de las matemáticas es una maravilla de regularidad. Ella conoce pausas. Ella no conoce los periodos de errores. Ninguna de las tesis que sustentamos en este libro apunta hacia el conocimiento matemático. No se refieren sino al conocimiento del mundo objetivo". (1938/2004) Pág. 25

profesor en el proceso de enseñanza.

• *Un origen epistemológico, por los obstáculos ligados a la naturaleza del conocimiento mismo y que son propios de él, se repiten en la historia, muestran su persistencia y dificultad para evolucionar,* es decir, los obstáculos en el sentido de Bachelard.

Todo un programa de investigación empezó a desarrollarse alrededor de la noción de obstáculo epistemológico. Como un ejemplo de lo anterior se cita el trabajo de Sierpinska (1994) acerca de los obstáculos epistemológicos ligados a las matemáticas que se enseñan en la escuela y encontrar los medios didácticos para ayudar a los alumnos a superarlos, conservando dos aspectos de la noción de obstáculo epistemológico según Bachelard (1938/2004): el carácter inevitable de su aparición, y la repetición de su aparición en la filogénesis y la ontogénesis de los conceptos. Reafirma a partir de esta investigación, que aquello que está en la base de cualquier clase de obstáculo epistemológico, es su aparición inevitable y su resistencia en la historia de los conceptos considerados.

Sierpinska (1994) explica la comprensión en matemáticas basada precisamente en la teoría de los obstáculos epistemológicos. El primer supuesto que enuncia de los obstáculos epistemológicos es que de un nivel de conocimiento y comprensión a otro hay necesidad de integración y reorganización. Afirma que la cognición no es un proceso acumulativo, pues las nuevas comprensiones pueden solamente ser parcialmente construidas sobre caminos de desarrollo previos. El otro supuesto de la filosofía de los obstáculos epistemológicos que enuncia, es que no podemos hacer metafísica de la comprensión científica, lo cual significa que los obstáculos epistemológicos son inevitables: su superación requiere una reconstrucción de comprensiones fundamentales.

Así mismo postula que la comprensión no es independiente del desarrollo, ni del lenguaje en el cual se comunica, ni tampoco de la cultura en la cual ella se socializa. Sus creencias, normas cognitivas, visiones de mundo, pueden ser todas fuentes de obstáculos para comprender la estructura teórica del conocimiento científico. Tanto en la instrucción como en el desarrollo hay momentos críticos: esos momentos gobiernan lo que precede y lo que sigue.

Se formulan entonces varias preguntas: ¿Sobre qué bases podemos afirmar que el pensamiento de los estudiantes se encuentra influenciado por obstáculos epistemológicos? ¿Es un obstáculo epistemológico un error, una mala comprensión, una incomprensión, o sencillamente una cierta forma de conocer que funciona en algunos dominios restringidos, pero se revela inadecuada en otros? ¿O es una actitud de la mente que permite tomar opiniones por hechos, y unos pocos casos de evidencia por leyes generales?

Propone su ya conocida lista de cinco grupos de obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite, de los que se concluye que aquello que está en la base de cualquier clase de obstáculos epistemológicos, es su aparición y su resistencia en la historia de los conceptos considerados, tal como había sido postulado por Bachelard y por Brousseau en su conocida "arqueología de los obstáculos epistemológicos", así como la observación de concepciones análogas en los alumnos. Los obstáculos se presentan entonces en el camino del cambio del pensamiento común al pensamiento científico; es decir en la transición de una clase de racionalidad a otra clase de racionalidad.

Otros enfoques relacionados con la noción de obstáculo epistemológico

Se describen brevemente en una línea de continuidad sin contraponerlos, otros enfoques vinculados con la noción de obstáculo, que algunos investigadores desde otras tendencias y teorías han considerado.

Artigue (1995) utiliza el término «concepción», término que, como el de obstáculo, ha trazado su camino en el edificio didáctico, al menos en Francia, suscitando menos pasión que la noción de obstáculo, pero quizá por eso mismo, menos trabajada por la comunidad. (Delgado, 1998). La noción de concepción responde a dos necesidades distintas: Por un lado pone en evidencia la pluralidad de los puntos de vista posibles sobre un mismo objeto matemático, diferencia las representaciones y modos de tratamiento que les son asociados a ellas, y pone en evidencia su adaptación más o menos buena a la resolución de tal o cual clase de problemas. Por otra parte, ayuda al didacta a luchar contra la ilusión de transparencia de la comunicación didáctica propiciada por los modelos empiristas del aprendizaje, y le permitirle diferenciar el saber que el profesor va a transmitir y los conocimientos efectivamente construidos por el alumno.

Este término de «concepción» va a aparecer en la literatura didáctica, importado en cierto modo del lenguaje corriente, sin que de parte de los autores se sienta la necesidad de dar una definición didáctica de él. La palabra concepción se usa aquí para establecer una distinción entre el objeto matemático que es único y las significaciones variadas que le pueden asociar los estudiantes, a medida que su conocimiento va evolucionando hacia un estatus superior.

La identificación y caracterización de las concepciones que los estudiantes construyen, a medida que avanzan en el estudio de las matemáticas, es un tema que ha despertado el interés de los investigadores en didáctica de las matemáticas porque, como ha señalado Delgado (1998), son conocimientos que, en algunos casos, se constituyen en obstáculos para el aprendizaje, en torno a los cuales se reagrupan los errores recurrentes. Además el estudio de las concepciones permite conocer el efecto de la enseñanza al determinar qué es lo que realmente están aprendiendo los estudiantes y tomar decisiones al respecto.

Otra tendencia asociada que se encuentra al revisar la literatura es la mirada dirigida hacia la noción de error. Si los errores son elementos usuales en nuestro camino hacia el conocimiento verdadero, concluiremos que en el proceso de construcción de los conceptos matemáticos van a aparecer de forma sistemática errores y el proceso de construcción deberá incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación, mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones (Rico 1998, p. 75).

Rico (1998, p. 84) enuncia algunas características generales: Los errores son sorprendentes, extremadamente persistentes y resistentes a cambiar por sí mismos ya que puede requerirse una reorganización fundamental del conocimiento de los alumnos. Pueden ser: sistemáticos o por azar. Los primeros son mucho más frecuentes y se toman como síntomas que señalan hacia un método o comprensión equivocada subyacente, que el estudiante considera como correcto. Los errores por azar reflejan falta de atención y lapsus ocasionales, que tienen relativamente poca importancia. Surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente. Cualquier teoría de instrucción debe modificar la tendencia a condenar los errores y a culpabilizar a los estudiantes de los mismos, sin perder de vista que todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores.

Avanzando hacia una mirada de los obstáculos en la perspectiva de la teoría de la objetivación cultural, se encuentra a Radford (2007), quien desde una aproximación histórico-cultural al pensamiento matemático, sostiene que aquello que conocemos y el modo con el cual llegamos al conocimiento, debe enmarcarse no sólo por medio de aquello que hacemos ahora y cómo lo hacemos, sino también por una inteligencia histórica que reposa en prácticas sociales, instituciones, lenguaje, artefactos, libros, monumentos,... El conocimiento y el conocer son ambos sostenidos por esta inteligencia histórica que hemos heredado de las generaciones pasadas. La historia nos hace conscientes del hecho de que no somos ni el producto exclusivo de nuestras actividades, ni el producto irrevocable de nuestras prácticas discursivas.

Aquello que hace que un obstáculo sea epistemológico es su presunta naturaleza no cultural, no didáctica, no onto- genética: lo es por su propia naturaleza epistémica intrínseca. Según lo cual Radford (2007), interpreta que la naturaleza epistémica de la cultura está excluida desde el inicio. Se pregunta qué tan fuerte puede ser el vínculo del obstáculo epistemológico y los factores sociales, y se atreve a concluir que no puede ser tan fuerte, pues si lo fuera la idea de obstáculo epistemológico resultaría destruida y la tipología de obstáculos (onto-genético, didáctico, cultural y epistemológico) ya no tendría sentido.

Si el término “obstáculo epistemológico” refiere un tipo de conocimiento parcial, puesto en alguna parte del recorrido del desarrollo conceptual, un conocimiento que sirve para resolver ciertos problemas, pero que comienza a ser causa de errores en el momento en que es aplicado por fuera de ese tipo de problemas, entonces para él la cuestión fundamental a tratar concierne a la explicación de la naturaleza del camino, que se supone es recorrido por todos nosotros durante el desarrollo conceptual, prescindiendo de nuestro encuadramiento temporal y cultural.

Radford (2007) privilegia la construcción social, histórica y cultural del conocimiento y por tanto los obstáculos los concibe en tanto culturales o didácticos. Según esta mirada socio-cultural se debe, a partir de las perspectivas culturales explicar el trabajo de los alumnos: cuál es el valor social que hace que uno cambie una cosa por otra, cuáles son las cosas que permitieron ese desenvolvimiento.

Por otra parte, Godino, Batanero y Font (2003), hablan de conflictos semióticos y los definen como: “Cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa”.

Los conflictos semióticos se consideran como explicaciones potenciales de las dificultades y limitaciones de los aprendizajes matemáticos. Aclara que si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo, en tanto que cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales.

Esta teoría concibe conflicto como una noción más general que la de Obstáculo, y algo más específica que la de “error” o “dificultad”, enfatizando que la idea de conflicto sugiere un origen (semiótico) de tales errores o dificultades, y dota a tales nociones de un sentido pragmático mediado por la actividad y la práctica.

En el EOS se considera que cabe hacer la distinción entre el significado personal global, el declarado y el logrado. La parte del significado declarado no concordante con el institucional es lo que habitualmente se considera como errores de aprendizaje. Godino, Batanero y Font (2003) distinguen tales categorías:

- Se habla de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar.
- El término dificultad indicará el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja.

A veces el error no se produce por una falta de conocimiento, sino porque el alumno usa un conocimiento que es válido en algunas circunstancias, pero no en otras en las cuales se aplica indebidamente. Afirman que si un tipo de error se manifiesta en un cierto número de alumnos de manera persistente en una tarea, su origen se debe buscar en los conocimientos requeridos por la tarea, y no tanto en los propios alumnos. La complejidad semiótica asociada a la práctica matemática es una posible causa de las dificultades de aprendizaje. El análisis de la trama de funciones semióticas asociada al contenido matemático permite prever su grado de dificultad potencial, e identificar las variables a tener en cuenta para facilitar su enseñanza.

Cuando el error se produce porque el alumno usa un conocimiento, que es válido en algunas circunstancias, en contextos donde no se puede aplicar se dice que existe un obstáculo. La superación del obstáculo requiere que el alumno construya un significado personal del objeto en cuestión suficientemente rico, de manera que la práctica que es adecuada en un cierto contexto no se use en otro en el que no es válida. Para ello será necesario, además, que los significados pretendidos e implementados sean suficientemente representativos de los significados de referencia.

Los errores, dificultades y obstáculos que tienen su origen en la complejidad semiótica o bien en la falta de representatividad de los significados pretendidos e implementados, en el EOS se llaman conflictos semióticos y conflictos epistémicos.

Afirman Godino, Batanero y Font (2003), que la noción de obstáculo se puede interpretar en términos de "conflictos de significados", a lo cual concretamente lo llama "semiótico": "Siempre que podemos decir que hay un obstáculo, existe un conflicto de significados. Pero no a la inversa, o sea no todo conflicto semiótico es un obstáculo, en el sentido de Brousseau. La noción de conflicto semiótico y sus tipos puede ser más flexible al aplicarse en situaciones menos exigentes que la de obstáculo (según la concibe Brousseau), y además aporta una posible explicación: disparidad de significados".

De otro lado, D'Amore (2007) explica los conflictos cognitivos en términos de imágenes, al afirmar que un estudiante ha podido en el transcurso del tiempo, adquirir un concepto y haberse hecho una imagen, imagen misma que pudo haber sido reforzada en el tiempo a través de pruebas, experiencias repetidas, pero entonces ella se revela inadecuada respecto a otra del mismo concepto… se crea así un conflicto entre la imagen que tenía el estudiante y que la creía válida, in cuestionada (verdadera), y la nueva, que generalmente amplía los limites o profundiza la aplicabilidad del concepto. Asocia la misconcepcion o concepto errado afirmando que para alcanzar la construcción de un concepto es necesario pasar por una misconcepción momentánea.

Algunas imágenes pueden ser misconcepciones, interpretaciones erradas de informaciones recibidas. Por tanto, el conflicto cognitivo es un conflicto interno, a causa de la no congruencia entre dos conceptos, o entre dos imágenes o entre una imagen y un concepto.

Concluye que la carrera escolar de un individuo en las matemáticas, se construye por el paso o tránsito de miss concepciones a concepciones correctas, luego la miss concepción es una concepción momentánea no correcta, en espera de consolidarse cognitivamente más elaborada, ellas no pueden ser eliminadas, ni son un daño ni un error, parecen ser un momento necesario y delicado hacia el concepto correcto.

Hacia una conceptualización propia de obstáculo

De este panorama presentado: obstáculo epistemológico, concepciones, obstáculos culturales, obstáculos didácticos, conflictos semióticos epistémicos, cognitivos e interaccionales, misconcepciones podemos ver que, reconociendo sus diferencias sustanciales, han existido en la literatura distintos modos de enunciar esas "dificultades", errores, caídas, tropiezos que los maestros detectamos en nuestros estudiantes en las aulas de clase, en todos los niveles de escolaridad, en toda clase de instituciones, de diferentes maneras, y que se ha focalizado el interés de los investigadores en indagar lo que subyace a tales dificultades con el afán de proponer categorías de análisis para explicarlas potencialmente.

Y ¿por qué es importante presentar ese panorama de tendencias, de discursos, de miradas y de perspectivas? Por un lado, para resaltar la importancia de la problemática, por otro para caracterizar las tendencias y perspectivas actuales alrededor de los obstáculos y conflictos, y finalmente y sobre todo para "construir" un enfoque propio que se sustente con conocimiento de las diferentes miradas, tendencias y enfoques y poner de relieve algunos aspectos centrales que conformarán este desarrollo discursivo.

Se va a entender aquí la noción de obstáculo como un conocimiento y no una ausencia de conocimiento; como un conocimiento y no como un error; Un conocimiento que funciona bien en algunos contextos, pero que al ser aplicado en otros produce "errores".

Se conciben los errores como los síntomas, los indicadores de la posible existencia de obstáculos. Aquí la palabra error no se entiende como juicio calificador, como la palabra que juzga un comportamiento, conducta o respuesta errónea del estudiante, sino como aquella conducta que no sigue las reglas institucionales. Se reconoce en los errores que cometen los estudiantes creatividad, comprensiones divergentes de las preguntas formuladas. Se trata de no cargar la palabra semánticamente con la tradición que la asocia al enjuiciamiento peyorativo y calificativo hacia los estudiantes. Son la fuente de indagación más importante, pues los obstáculos pueden inferirse de los errores en las prácticas y de la dificultad experimentada por los que participan en ellas.

Si la conducta errática se repite sistemáticamente se le buscará la etiología en algo que no se reduce a la habilidad motora incipiente. Esa conducta, error, equivocación, violación de la regla institucional, es un síntoma de que ahí hay un obstáculo que no depende de falta de habilidades: Vendrá entonces la caracterización, para precisar su naturaleza.

Se concibe obstáculo como un constructo del que suponemos o inferimos su presencia como fuente de los errores sistemáticos y de las dificultades experimentadas por los estudiantes en las Prácticas Escolares (PE). Es una atribución de causalidad a las dificultades manifiestas. Una dificultad concreta que se presenta en un tema y que se revela en los errores que se cometen, en las dudas, en la perplejidad, puede deberse a que no se tienen los conocimientos necesarios, o puede deberse a que los conocimientos que sí se tienen dificultan el trabajo. A diferencia del conocimiento que falta, el conocimiento que sí está pero que provoca dificultades y conflictos, dudas, errores son síntomas de conocimientos previos que no tienen o que sí tienen pero entorpecen, dificultan el conocimiento. Y esta misma diferencia se plantea en el tipo de errores detectados: errores accidentales, ocasionales, lapsus y errores sistemáticos, que se deben a algo, ¿a qué se deben?

Conclusión

En la conceptualización de obstáculos planteamos como supuesto una contraposición entre el conocimiento ausente (ignorancias) y el presente pero dificultante que son los obstáculos. En el camino hacia el conocimiento, no se trata de descartar los conocimientos, modelos y teorías previos sino de tener conciencia, de ver cuándo se usan, por qué son potentes, qué peligros tienen y en qué casos no son aplicables.

Los obstáculos epistemológicos no son obstáculos para una correcta o incorrecta comprensión: ellos son obstáculos para un cambio conceptual, paradigmático. Así que podemos introducir a los estudiantes en una nueva situación o problema y esperar que emerjan toda clase de dificultades, malas comprensiones y obstáculos y precisamente esta es una de nuestras principales tareas como profesores, ayudar a los estudiantes a superarlos, a objetivar y ser conscientes de las diferencias, entonces los estudiantes quizá puedan hacer sus propias reorganizaciones.

La razón por la cual los formadores de profesores, los educadores matemáticos de cualquier nivel de enseñanza deben interesarse por estas teorías es porque el patrón del desarrollo conceptual de la niñez a la adolescencia parece ser recapitulado cada vez que un estudiante se embarca en el proyecto de comprensión de algo nuevo o en la construcción de un nuevo concepto. Es entonces cuando los discursos asociados a la noción de obstáculo epistemológico pueden emerger y devenir en campos didácticos al provocar y analizar prácticas, formas de participación, preguntas, recapitulaciones una y otra vez en esa dinámica de interacciones que es la educación en general y la educación matemática en particular.

Bibliografía y Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognoscitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática (pp. 97-135). Bogotá: una empresa docente - Iberoamérica.

Bachelard, G. (2004). *La Formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI editores, vigésimo quinta edición en español. (Obra original publicada en francés en 1938).

Brousseau, G. (1976). La problématique et l'enseignement des Mathématiques, XXVIIIème Rencontre de la CIAEM, Louvain la Neuve

Delgado, C. (1998) Estudio Microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de Límite y Continuidad en universitarios de primer curso. Tesis doctoral inédita. Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències Experimentals.

Godino J., Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas para Maestros. Granada: Universidad de Granada

Radford, L., D'Amore B. y Bagni, G. (2007). Obstáculos Epistemológicos y Perspectiva Socio-cultural de la matemática. Cuadernos del seminario en educación, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá,

Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. EMA, "Una Empresa Docente" J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (eds). Educación Matemática. pp. 69 – 108. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Sierpinska, A. (1994). Understanding in Mathematics. Studies in Mathematics Education Series. London, Falmer Press. London. Washington, D.C

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

La teoría de los indivisibles matemáticos en el siglo XVII

Leonardo Solanilla Chavarro
Departamento de Matemáticas, Universidad del Tolima
Colombia
leo.solanilla.cha@gmail.com
Juan Felipe Gutiérrez Flórez
Universidad Nacional de Colombia
Colombia
jfgutier@unal.edu.co
Ana Celi Tamayo Acevedo
Universidad de Medellín
Colombia
actamayo@udem.edu.co

Resumen

La teoría de los indivisibles matemáticos, en la cual la comprensión y el uso de lo infinito y lo continuo se hace indispensable, emergió a principios del s.XVII, después de una larga gestación europea que comenzó a finales de la Edad Media. Nuestra investigación se limita a estudiar algunas de las obras principales de Cavalieri, Mengoli, Pascal y Roberval. Se presentan y analizan con cierto detalle no sólo las ideas matemáticas tal como aparecen en los textos originales, sino también su contexto cultural con herramientas de la Hermenéutica, la Historia Conceptual y de las Ciencias. El análisis se realiza con el propósito de evitar el prejuicio tradicional que encasilla a los indivisibles matemáticos como precursores del cálculo infinitesimal; con la intención de devolverles el lugar y el valor histórico y matemático que les es propio, pues en su momento solucionaron problemas como el cómputo de cuadraturas y cubaturas de figuras geométricas.

Palabras clave: Indivisible, infinito, continuo, Historia Conceptual, Historia Cultural de las ciencias, Historia de las matemáticas.

La Teoría matemática de los indivisibles en el siglo XVII.

Introducción

A comienzos del siglo XVII algunos matemáticos innovadores encontraron en los indivisibles la solución definitiva a algunos problemas que venían reelaborándose desde antiguo: centros de gravedad, cuadraturas y cubaturas de figuras planas y espaciales, principalmente.

Estos viejos problemas encerraban el tratamiento de lo infinito y lo continuo, considerándose herederos de una tradición que se remontaba a la Grecia Antigua.

La Historia de las Matemáticas (HM) se debe abordar desde las teorías de la Historia, en particular de la Historia de las Ciencias (HC) (Serres, 1989), de la Historia de los Conceptos (Koselleck, 2004) y de la Historia Intelectual y de las ideas (Pimentel, 2010). Teniendo cuidado de no caer en una mirada netamente internalista o externalista del objeto histórico en estudio (Rossi, 1990) y liberando el análisis que surja de la búsqueda de los precursores expuesta por Canguillem en 1983. Además, el análisis histórico que surja se fundamenta en la Hermenéutica bajo el propósito de confrontar directamente al texto, así el documento escrito se vuelve un "interlocutor", pues el que quiere comprender un texto debe estar dispuesto a dejar decirse algo por éste (Koselleck, Gadamer, 1987). Debido a que el intérprete no se acerca nunca al texto como *tabula rasa*, sino previsto de su precomprensión, con prejuicios, pretensiones y expectativas, entonces se hace necesario durante el proceso hermenéutico asumir dos momentos: 1-Camisa de Fuerza (*Straitjacketing*) y 2- Tomar Alas (*Tanking wings*). En el primer momento se parte del hecho de que cuando se lee un texto matemático por primera vez no se debe comenzar por establecer relaciones con lo que sabemos de las matemáticas tratadas en éste. Hay que hacer un esfuerzo por desligarse de todo. Lo único que importa es el autor y cómo lo dice, en una palabra, lo singular (Solanilla y Tamayo, 2014). En el segundo momento, después de que se haya entendido lo que dijo un matemático en su obra, se puede comenzar a relacionar su pensamiento con el de otros autores y con nuestros conocimientos matemáticos.

Además, la HM debe analizarse desde un enfoque estructuralista pues bajo esté se "pretende captar las reglas que, arraigadas en el espíritu de la humanidad, estructuran no sólo las producciones sino también los productos mentales" (Reale & Antiseri, 1988, p.829, V.3). Adicionalmente, asumiendo un enfoque estructuralista se deroga el mito del progreso científico (Foucault, 1971) algo que ha sido marcado por la Historia oficial de las Matemáticas.

Pero adoptar una posición Hermenéutica y un enfoque Estructuralista no es suficiente para hacer la HM, adicionalmente se debe acoger una epistemología baja una idea de "un tribunal" que revisa las sentencias pronunciadas por las ciencias (Lakatos, 1978), reconociendo que el lenguaje de la ciencia está en un estado de revolución semántica permanente (Rossi, 1990). Bajo tal metodología, aquí se pretende presentar la historia de La Teoría de los indivisibles matemáticos en el siglo XVII, donde la respuesta a la pregunta: ¿cómo interpretar, por fuera del prejuicio de los precursores, desde hoy y con herramientas de la HC (socio-cultural y epistemológica), las búsquedas subyacentes en las representaciones matemáticas sobre los indivisibles en las obras de Cavalieri, Mengoli, Roberval y Pascal durante la primera parte del siglo XVII? Direcciona el estudio en mención.

Sueños de infinito, sueños de indivisible

Para comprender la Teoría Matemática de los indivisibles en el siglo XVII, no se puede dejar de lado los sueños de infinito y los sueños de indivisibles que se remontan desde la antigüedad. En el antiguo periodo griego de las matemáticas se tuvieron varias concepciones sobre tales conceptos. Por ejemplo, el presocrático Anaxágoras (-500,-428) argumentaba que: "En relación con lo pequeño, no ha mínimo; pero siembre hay uno más pequeño, porque no es posible que el ser se anule por la división" (Anaxágoras. Tomado de Szwajcer, M., s.f). También se tienen las ideas que sobre lo indivisible, lo continuo y lo indivisible del sofista Zenón de Elea (-480,-420), para quien el infinito no es ni lo infinitamente grande ni lo infinitamente pequeño, tal posición lo condujo a escollos lógicos (paradojas). Tampoco se puede dejar de lado las bien conocidas ideas de Platón y Aristóteles en cuestión de lo infinito, el primero, pensaba que lo "ilimitado" o "indefinido" existía en acto, y el segundo, en contra de tal existencia, lo concebía solo en potencia y su uso matemático debía ser puramente operatorio. Otros matemáticos de la antigua Grecia que ameritan estudiarse cuando se aborda dichos conceptos son: Xenócrates (-396, -314), Eudoxo de Cnido (*ca*. -390, *ca*. -337 a. C, fechas inciertas) y el gran Arquímedes (-287, -212), este último en su "*Método*" hace un uso impecable de los indivisibles para hallar cuadraturas de figuras, en especial, la de la parábola (Heiberg, J. L. 1909).

Además, los sueños de lo infinito y lo indivisible perduraron durante la decadencia del Imperio Romano y la Alta Edad Media, las ideas y pensamientos teológicos, filosóficos y matemáticos de Alcuino de York (735, 804), Santo Tomas de Aquino (1221, 1279), Johns Duns Scotus (1266, 1308), Nicolás de Oresme (ca,1320, 1382) y Nicolás de Cusa (1401,1464), así lo confirman. Vale resaltar el pensamiento de Cusa, que desde la doctrina filosófica sobre la unidad de los contrarios, se indaga sobre lo indivisible, lo continuo y lo infinito, pues en tal doctrina los máximos y los mínimos están relacionados entre sí, algo que se explica sólo con lo indivisible.

Bajo tales sueños la categoría escolástica de los indivisibles, al lado del decreto de existencia del infinito, tomó las proporciones de un paradigma. En el momento en que emergen los indivisibles, las posibilidades de solución práctica (es decir, de uso) para el infinito eran tres:

- Un continuo está compuesto por sus indivisibles. Cada uno de los puntos de una recta tiene un predecesor y un sucesor (posición platónica pura). Lo propio sucede con los segmentos de recta que forman una figura plana y con las porciones de plano que forman los cuerpos sólidos.
- Un continuo se genera como el rastro o traza que deja el movimiento de un indivisible en el espacio (posición intermedia).
- Un continuo no está compuesto por indivisibles (posición aristotélica).

Teniendo presente estos sueños de indivisible e infinito de los diversos autores señalados y de otros más, se puede enfrentar la historia de la Teoría de los indivisibles matemáticos en el siglo XVII, historia que presentamos bajo el concepto de escenificación considerando cuatro de sus grandes exponentes , a saber: Bonaventura Cavalieri (1598,1647), Pietro Mengoli (1626,1647), Blaise Pascal (1623,1662) y Gilles Personne de Roberval (1602,1675) los dos primeros italianos y papistas, los dos últimos franceses, uno Jansenista y el otro un libre pensador de su época. Para dicho estudio histórico que se presenta en (Tamayo, 2018) se tomaron algunos apartes significativos de las obras que sobre el tema de los indivisibles dichos matemáticos escribieron, tales obras son:

- *Geometria indiuisibilibus continuorum noua quadam ratione promota* (1635) de Buenaventura Cavalieri.
- *Geometriae speciosae elementa* (1659) de Pietro Mengoli.
- *Lettre de A. Dettonville à Monsieur de Carcavy*, conocida informalmente como *"Traité de la roulette"* (1658) de Blaise Pascal.
- *Traité des indivisibles* (aparecido en 1693, pero redactado mucho antes) de Gilles Personne de Roberval.

Escena1: *Ursus degluttiens*. La Geometría de Cavalieri

Describir a Cavalieri no es tarea sencilla, su vida de monasterio acompañada de la incesante disciplina y de su enfermedad de gota, representan en él una gran fuerza de voluntad. En la Geometría de Cavalieri se hace palpable el gusto del autor por un tema que le apasiona y que considera necesario para acercarse al Dios y entender algunos de los atributos que lo determinan: Indivisibilidad, infinidad y continuidad. (Andersen, 1995; Tamayo 2018)

Desde la plena y la baja edad media, Europa estaba cambiando y existía una nueva realidad, una nueva materialidad, estos hechos exigieron la creación de un nuevo lenguaje incluso en las matemáticas. Cavalieri en el entorno de Galileo fue un pionero y con disciplina férrea propuso un primer sistema lingüístico para dar cuenta de esta nueva realidad. Su nuevo lenguaje ayuda a la comprensión de los dos métodos que propone: el colectivo y el distributivo. El primero se fundamenta en los conceptos cuestionables de *omnes lineae* y *omnia plana* y tiene la ventaja de permitir establecer relaciones entre figuras con alturas diferentes, mientras que el segundo tiene la ventaja de evitar los infinitos y permite establecer relaciones o proporciones entre las colecciones de los indivisibles, en cuanto magnitudes en el sentido tradicional euclidiano. Cavalieri lo considera como un método digno de aceptación pues demuestra las cosas que han sido probadas con el colectivo. (Lombardo-Radice, 1966).

El valor lingüístico en la nueva Geometría de Cavalieri es verdaderamente valioso, pues el maestro milanés le hizo frente a la tarea de nombrar las cosas de un nuevo mundo con léxico, sintaxis y semántica, en ese sentido su labor es como mágica o mística, se inventa una nueva forma de hablar sobre los objetos de la geometría, de la misma manera que los escritores del siglo de oro español crearon un nuevo lenguaje para dar cuenta de la nueva realidad (Tamayo, 2018).

Cavalieri rompe con la realidad dogmática que se tuvo en la Edad Media, donde el experimento no era un criterio para validar una proposición. La Geometría de los indivisibles es para Cavalieri la forma de mostrar como su pensamiento se alejaba de la escolástica reinante en aquella época (Lombardo-Radice, 1966).En la geometría de Cavalieri el asunto del movimiento está escondido en apariencia pero éste es una realidad porque se usa. Por ejemplo, para definir todas las líneas de una figura plana usa el movimiento de la *regula* para determinar la colección de los indivisibles que la constituyen. La aceptación del movimiento para el estudio de los objetos geométricos es un primer alejamiento del pensamiento de Cavalieri con la reinante geometría euclidiana, la cual está estrechamente vinculada con la escolástica aristotélica. El maestro milanés con su nueva Geometría incorpora implícitamente el movimiento pues por medio de éste el concepto de indivisible, infinito y continuidad puede entenderse mejor, pero verlo y percibirlo bajo la idea que el geómetra milanés pretende no es tarea sencilla solo una mente imaginativa y sensible puede percibirlo. La geometría de Cavalieri que inicialmente parece ser Euclidiana, encierra el germen de la geometría del movimiento,

Escena 2: *Aritmeticae artis certitudo*. La geometría con álgebra de Mengoli

Pietro Mengoli, representa al ser simbólico que utiliza de manera exagerada los signos y símbolos para comunicarse. En su geometría *Speciosa* acepta e incorpora el álgebra a diferencia de su maestro Cavalieri que nunca la quiso aceptar del todo. El lenguaje se torna algebraico, este hecho proviene de que Mengoli venia del "mundo"- (vivió y luego se hizo cura). El álgebra renacentista ya estaba lo suficientemente pulida desde el siglo anterior por Vieta, Herigone y Cardano, entre otros (Massa, 1998). El maestro de Bolonia fue fuertemente criticado por su notación excesiva en el norte de Europa, esa obsesión por el lenguaje es claramente barroca. Mengoli siente que es necesario explicar en una definición hasta el más mínimo detalle.

Sus arreglos triangulares buscan automatización y rapidez en los cómputos aritméticos para hallar, por ejemplo, cuadraturas de figuras con un lado curvo (Mengoli, 1659). Tal necesidad, quizás, le surge por los requerimientos de eficiencia y eficacia que se están imponiendo en una época del capitalismo naciente. Además, la disposición triangular también evoca una experiencia mística por su relación con la santísima trinidad, su religiosidad no puede dejarse de lado cuando se analiza su obra.

La colección de puntos, líneas o planos de Cavalieri, en su discípulo toma un sentido aritmético y algebraico por medio de su simbología y notación *O* que para algunos historiadores, como Massa (1998), significa el *omnes* de Cavalieri. El adjetivo *Speciosa* que usa para referirse a su geometría es ambiguo pues puede referirse a que la geometría es bella o puede referirse a las especies algebraicas (monomios u otros términos algebraicos que usa).

Escena 3: L'esprit de finesse. El Traité de la roulette de Pascal

La escena de Pascal es la escena "trágica de los indivisibles" pues es el desconcierto del autor frente al objeto de su obra. Pascal es un personaje difícil de comprender. Su filosofía del corazón, su dialéctica, el enfrentamiento con Descartes, sus crisis nerviosas, sus apegos familiares, sus conversiones lo hace un personaje desconcertante (Brunschivicg, 1912; Bishop, 1928).Su pensamiento encierra la profundidad de su filosofía, que trasciende del espíritu geométrico al espíritu de la finesa. La matemática y la física de Pascal es entendible solo cuando se logra hacer una clara distinción entre estos dos espíritus. Pascal es el hombre del siglo XVII que busca trascender su humanidad en medio de la soledad incesante que siente al estar en el mundo. Es inventor de la pascalina y de un sistema de transporte público, por lo tanto, su pensamiento creativo e imaginativo lo hacen más complejo todavía (Brunschivicg, 1912). Toda su filosofía está sujeta al Jansenismo que es una postura ética, la defensa que hace del jansenista Arnauld (Filósofo, matemático y teólogo), así lo devela. Pascal es un burgués que se mueve en el círculo de los nobles, aprende de ellos las cosas mundanas, las vive y experimenta; pero después de vivirlas llegan las conversiones, que se pueden interpretar como una búsqueda más de Pascal para entender la trascendencia del Ser. (Brusnchivicg, 1942; Bishop, 1928)

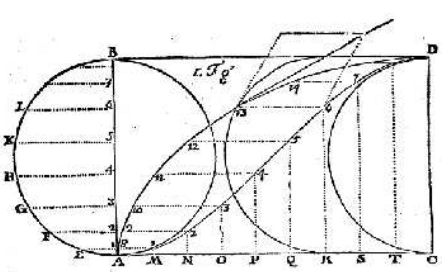
La incursión de Pascal en los indivisibles es un episodio desconcertante porque oficialmente ya se había retirado de las matemáticas y, ciertamente, no estaba al tanto del "estado del arte" en ese momento, por ello tuvo que cambiar los términos del concurso que había propuesto para resolver problemas relacionados con la Ruleta (Cicloide), porque muchos ellos ya habían sido resueltos (Merker, 1995). En su obra el *Tratado de la Ruleta*, que es una compilación de cartas, presenta su trabajo sobre los indivisibles (Pascal, 1658). En este utiliza el método de la balanza de Arquímedes para hallar, por ejemplo: el centro de gravedad de una figura, esto es desconcertante pues para la época el método del gran geómetra alejandrino estaba perdido (Heiberg,1909). Pascal es un ser que se siente "perdido" en el mundo y busca desesperadamente algo a lo cual aferrarse, busca un centro y una periferia. Según Borges, en la *Esfera de Pascal*, buscaba estas cosas en el universo, ya no en Dios. Los indivisibles fueron tal vez su última búsqueda, una búsqueda que no es propiamente matemática, sino metafísica. Por eso, quizás, la influencia que tuvo en Leibniz. Los pasajes del *Tratado de la Ruleta* en los que aborda los indivisibles están llenos de contradicciones formales que se disuelven en miradas dialécticas. Este camino no es geométrico, no es matemático, es el camino de los espíritus finos, cada contradicción formal, por ejemplo aquella entre lo finito y lo infinito, es un camino que se divide en dos, una bifurcación. Borges tiene razón, cuando dice que Pascal estaba en un laberinto, en una sin-salida de cara a la nada, al vacío.

Escena 4: *La métaphysique chymérique*. El *Traité des indivisibles* de Roberval

Es la escena "liberadora de la geometría de los indivisibles". El controvertido personaje no proviene de la nobleza, ni de la burguesía, es hijo de campesinos y comienza sus estudios a los 14 años de vida. Catalogado por los intelectuales de la época (Descartes, Fermat, Torricelli, entre otros) como un hombre pendenciero y "vulgar", pese a ello se mantiene y es reconocido en el medio de los intelectuales, sus luchas por lograrlo son admirables (Jullien, 2009). Este hombre con sus ideas filosóficas desea liberar la geometría de la teología y de la metafísica, considerando esta última como quimérica. A los indivisibles los libera del excesivo rigor matemático que los escolásticos le exigen, rigor que posiblemente no se hace necesario cuando se indaga por el cómo de las cosas. Sorprenden las 5 reglas y 35 principios que establece para lograr el conocimiento, llama la atención el primer principio que dice: "Cualquiera que piense es un ser, y todo esto que se piensa, es verdadero si se le piensa", algo que evoca el famoso "*Cogito ergo sum*" de Descartes. Roberval fue completamente anticartesiano (Cousin, 1845).

El *Tratado de los indivisibles* es un manuscrito que se encuentra al momento de la muerte de Roberval y publicado posteriormente por la Academia de Ciencias en 1693. Son apuntes, no totalmente organizados. Al inicio Roberval expone que usará el método de los indivisibles y que para ello se hace "preciso suponer que toda línea, sea recta o curva, puede dividirse en una infinidad de partes o líneas pequeñas, todas iguales entre sí o que cumplen entre ellas cierta progresión prescrita..." (Roberval, 1693). Inicia con argumentos sobre el tratamiento de un conjunto finito de puntos y lo extiende a los conjuntos infinitos, después sigue con la cicloide y otros temas que pueden ser encontrados en Tamayo (2018). Es interesante la forma como por medio del conteo de puntos llega a que el área del triángulo es la mitad del área de un rectángulo, durante el proceso analiza la expresión *1/n* que tiende a cero cuando *n* tiende a infinito.

De la cicloide hace una definición precisa y haciendo uso de los indivisibles detalla la forma de hallar el área bajo media cicloide, para guiar a los lectores en la solución al problema usa el siguiente dibujo:



(Tomado de: Roberval,1693)

Llega de manera clara e impecable a que el área bajo media cicloide es $\frac{3}{2}\pi r^2$, donde r es el radio de la circunferencia que la genera (Roberval, 1693; Tamayo, 2018).

A modo de Conclusiones

Cualquier estudio que se hace es solo una aproximación al objeto en cuestión. En el estudio realizado se enfatizó en el objeto autor – obra, surgiendo las siguientes reflexiones.

El símbolo de los indivisibles:

El término indivisible no se define en ninguna de las obras de nuestros personajes, solo lo usan, pues como bien lo pensaba Roberval: "su definición se hace innecesaria porque es clara para todos". Se puede interpretar como un símbolo para entender el continuo y la estrecha conexión que tiene con el movimiento. El conocimiento como símbolo es una expresión que configura ideas de poder, intelecto, entre otras. A este tipo de expresiones se vieron avocados nuestros personajes cuando dieron a conocer sus teorías sobre los indivisibles.

Diversos lenguajes para los indivisibles:

Para Cavalieri los indivisibles son colecciones de objetos a los cuales se le puede asignar una cantidad o medida. Para Mengoli son, de otro lado algebraicos, es decir, se pueden sumar y multiplicar. Para Pascal son homogéneos y heterogéneos, algo que solo se hace comprensible si se comprende su dialéctica. Desde la altura del pensamiento de Pascal todo se reduce a cómo decir las cosas y él lo dice de varias maneras que pueden ser contradictorias para la lógica formal. Roberval es un matemático con tendencia "moderna" aprovecha y usa todo lo conocido de los indivisibles, por ejemplo suma los indivisibles de una línea, infinitamente pequeños pero variables, al estilo de Mengoli.

Rigor y demostración en las teorías de los indivisibles

La emergencia de los indivisibles deja ver una fuerza de voluntad que es mucho más fuerte que todos los requisitos de rigor y los estrictos argumentos en las demostraciones. Nuestros personajes recurren más a las explicaciones intuitivas y heurísticas, las cuales se revelan más poderosas y significativas que el formalismo del aparato apodíctico que se pretende defender.

Las verdades primeras en las teorías de los indivisibles se ven cobijadas por una oscuridad que se puede aclarar fácilmente si se acepta que ellas no deberían ser objeto de una demostración, sino más bien un postulado o axioma (verdades de fe). Roberval se deshace convenientemente de los tales "principios fundamentales", los da por sentado y se dedica a encontrar sus consecuencias.

La "desaparición" de los indivisibles en la historia oficial de las matemáticas.

En muchos casos los historiadores de las ciencias y de las matemáticas, buscan que los conceptos "triunfantes" tengan un sustento histórico y epistemológico para reafírmales su trascendencia y validez. Así, "la historia se va distorsionando y falseando en medio de la ausencia mística que rodea el conocimiento humano" (Koselleck, 2004). La historiografía de los indivisibles se ha puesto siempre en relación directa con la historia de los infinitesimales, haciendo que las circunstancias que se vivieron entorno a ellos se desvanezcan y desaparezcan en el tiempo. En la historia oficial, los indivisibles son interesantes porque permitieron "dar luz a los infinitesimales", por esta razón y otras más, los indivisibles sucumbieron dentro de los infinitesimales.

El concepto de los indivisibles en relación con la historia cultural de la ciencia.

El concepto indivisible usado por nuestros personajes es propio de su época y tiene relación interna con el contexto social, cultural y científico. La Historia Conceptual que está en relación con la Historia Social y con la Historia Cultural de las Ciencias, considera que los conceptos, fuentes inspiradoras para las teorías, se construyen y configuran de acuerdo con el contexto social en el que van emergiendo, pues los conceptos no tienen un único lugar histórico, por ejemplo el concepto de indivisible sufrió diversas metamorfosis desde la antigüedad hasta el Renacimiento, mediadas por el ámbito social y cultural. Por ejemplo en la época de nuestros personajes, el término indivisible se configura, en sentido universal y semántico, a la manera de un concepto con contenido propio que alude a las nociones de lo no divisible, lo continuo, lo infinito y lo cambiante (el movimiento); esta última noción se revela más incipiente que las otras. Bajo tal idea nuestros personajes resolvieron de forma "lógica" los problemas matemáticos que se discutían científica y socialmente. Ellos soñaron y crearon una idea de indivisible que no la podemos desconocer y esconder, tampoco la debemos supeditar a que emerja histórica y epistemológicamente bajo los estudios de los conceptos "triunfantes" (infinitesimales), pues los indivisibles pudieron haber sido el lenguaje hegemónico del análisis del infinito en el cenit de la Modernidad.

BIBLIOGRAFIA

Andersen, K. (1985). Cavalieri's method of indivisibles. *Archive for History of Exact Sciences*, 31 4, 291-367. Recuperado de http://www.math.ist.utl.pt/~jroquet/Andersen.pdf

Bishop, M. (1928). *Pascal: La vida del genio*. México: Hermes.

Brunschivicg, L. (1924). *Le Génie de Pascal*. Paris: Librairie Hachette.

Cavalieri, B. (1653). *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Bononiae, de Ducijs,.

Cousin, M. (1845). *Roberval Philosophe.* Journal des Savants, mars, p.129

Foucault, M. (1971). *Nietzsche, la genealogía, la historia* España, Valencia: Pre-Textos, 1992.

Heiberg, J. L. (1909). *Geometrical Solutions Derived from Mechanics: A Treatise of Archimede.* Chicago: Open Court

Jullien, V. (2009). *Une épistémologie du XVIIe siècle, Roberval*. Actes du congrès 2008 de Montpellier de la Société Guillaume Budé, 2009. Recuperado en http://www.caphi.univ-nantes.fr/Une-epistemologie-du-XVIIe-siecle

Koselleck, R. (2004). *historia/Historia*. Madrid: Editorial Trota, S.A.

Koselleck, R; Gadamer, H-G. (1987). *Historia y Hermenéutica*. España, Barcelona: Ediciones Paidós.

Lakatos, I (1978). Escritos Filosóficos 2. Matemáticas, Ciencias y Epistemología. España: Editorial Alianza.

Lombardo- Radice, L (1966). *Geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri*. Stampato in Italia, Tipografia Torinese S.p.A – Strada del Barrocchio 83, Torino.

Massa, Mª R. (1998). Estudis matemàtics de Pietro Mengoli (1625-1686): Taules triangulars i quasi proporcions com a desenvolupament de l'àlgebra de Viète. *Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona*, Barcelona.

Merker, C. (1995). *Le chant du cygne des indivisibles. Le calcul intégral dans la dernière oeuvre scientifique de Pascal.* Collection «*Didactiques*», Série «*Mathématiques* ». Éditeur Presses Universitaires Franc-Comtoises Université de Franche-Comté 25030 BESANÇON Cedex – France.

Mengoli, P. (1659). *Geometriae speciosae elementa*. Library University of the Michigan. Recuperado en: https://archive.org/details/geometriaespeci00menggoog

Pascal, B. (1658). *Lettre de A. Dettonville à Monsieur de Carcavy* o *Traité de la roulette*. En Oeuvres de Blaise Pascal. Nouvelle Édition. Tome Cinquiéme. A Paris, Chez Lefèvre, Libraire, Rue de L'éperon, 3 6, 1819.

Pimentel, J. (2010). ¿Qué es la historia cultural de la ciencia? *ARBOR Ciencia y pensamiento Cultural*, CLXXVI (743), mayo-junio, 417-424.

Reale, G; Antiseri, D (1988). *Historia del pensamiento filosófico y científico*. Vol. 3. Barcelona, España: Herder.

Roberval, G, P. (1693). *Traité des indivisibles*. En Académie des sciences. Paris. Divers ouvrages de mathématiques et de physique. Recuperado en: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5493994j?rk=21459;2

Serres, M. (1989). *Historia de las Ciencias*. España: Cátedra.

Solanilla, L; Tamayo, A.C. (Mayo de 2014). Lectura e interpretación de textos históricos matemáticos: el "método" de Arquímedes. En Rúa (Director). VI Congreso Internacional en formación y Modelación en Ciencias Básicas. Universidad de Medellín, Colombia

Szwajcer, M (s.f). Anaxagore. Doxographie-fragments. Recuperado en: http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/anaxagore/fragments.htm

Tamayo, A, C. (2018). Escenas de representación matemática de los indivisibles en el siglo XVII. (Tesis doctoral). Facultad de Ciencias Económicas y Humanas, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín.