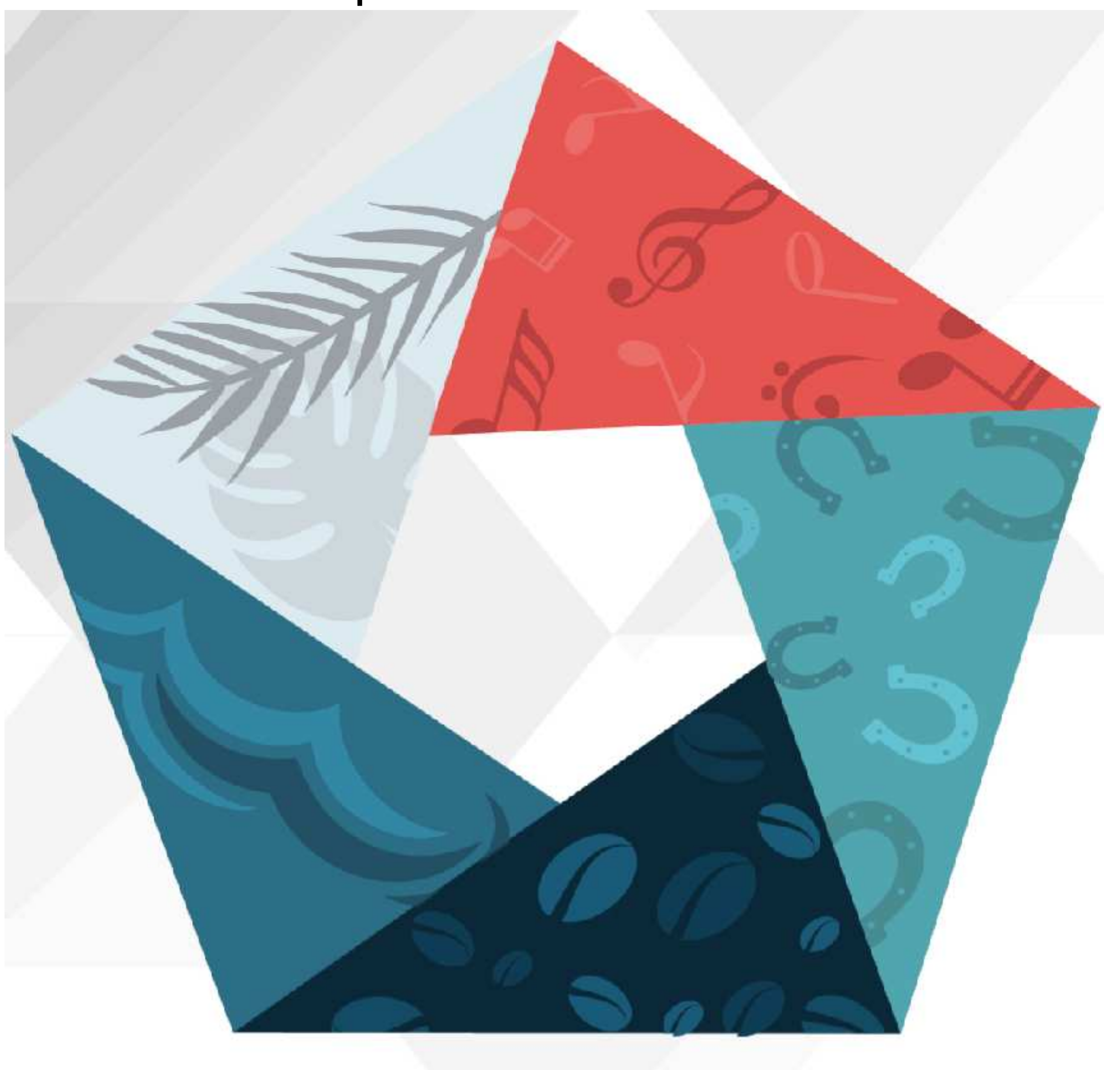
Educación Matemática en las Américas 2019

Volumen 14: Educación Matemática en la educación superior



CIAEM IACME

desde - since 1961

Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO
www.ciaem-iacme.org

Educación Matemática en las Américas 2019
Volumen 1: Formación inicial de profesores
Editado por Yuri Morales-López y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN: 978-9945-09-413-8

El *Comité Interamericano de Educación Matemática* (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la *International Commission on Mathematical Instruction*. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera al CIAEM y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no fue previamente publicado en otro medio; y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Se respetaron los metadatos (nombres, apellidos, títulos, entre otros) que los autores proporcionaron cuando postularon su trabajo en la plataforma del evento.

Para citar este libro:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2020). *Educación Matemática en las Américas 2019.* Editores: Yuri Morales-López y Ángel Ruíz. República Dominicana: Autor.

ISBN: 978-9945-09-413-8
9 789945 094138

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LAS AMÉRICAS 2019

Presentación

Para el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es un placer y un honor ofrecer a la comunidad educativa este Volumen de *Educación Matemática en las Américas 2019*, en donde se pueden encontrar muy importantes insumos para comprender el momento histórico que atraviesa la Educación Matemática desde la perspectiva de las Américas.

La *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática* se realizó entre el 5 y 10 de mayo del 2019 en Medellín, Colombia. La Universidad de Medellín y la Universidad de Antioquia fueron las organizaciones académicas anfitrionas del evento. Las sesiones fueron realizadas en el campus de la Universidad de Medellín. Participaron 700 personas provenientes de 25 países de cuatro continentes: Europa, Asia, África y las Américas. Participaron centenares de docentes en servicio de la ciudad de Medellín y del Departamento de Antioquia.

Alrededor de 400 trabajos fueron presentados: conferencias plenarias y paralelas, mesas plenarias, minicursos, sesiones temáticas, comunicaciones cortas, talleres y posters. Unas 50 personalidades del mayor nivel en la comunidad internacional de Educación Matemática expusieron sobre sus investigaciones. Entre ellas Jill Adler (Suráfrica), Ferdinando Arzarello (Italia), Salvador Llinares (España), Yoshinori Shimizu (Japón), Michael Shaughnessy (EUA), Luis Rico (España), Fidel Oteiza (Chile), Carlos Vasco (Colombia), Carlos Sánchez (Cuba), Luis Carlos Arboleda (Colombia), Edwin Chaves (Costa Rica), Nelly León (Venezuela), Vilma Mesa (EUA). Aunque físicamente no pudo estar presente envió su contribución en forma de video Ubiratan D'Ambrosio (Brasil). Los trabajos dentro de la plataforma del congreso se pueden consultar en https://ciaem-redumate.org/conferencia/index.php/xvciaem/xv/schedConf/presentations

La revisión científica de todos los trabajos fue responsabilidad de un Comité Asesor Internacional, un Comité Internacional del Programa y el Comité Ejecutivo del CIAEM. Se contó con la coordinación central de Directores de tema y la Dirección de la plataforma científica realizada por el académico Yuri Morales con el apoyo de la profesora Johanna Mena (ambos de Costa Rica) y con la participación voluntaria de muchísimos revisores científicos de muchos países.

Este volumen incluye trabajos que fueron efectivamente presentados en ese congreso.

Expreso mi agradecimiento a todos los miembros de los comités científicos, directores de tema, revisores científicos, y directores de la plataforma científica. También deseo agradecer por su apoyo en el registro de este libro a Sarah González y a la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra en República Dominicana. Agradezco mucho a todos los autores que decidieron compartir su trabajo en las instancias que abrimos

mediante la XV CIAEM. También a Yuri Morales quien técnica y formalmente generó este volumen para su registro.

En las diversas dimensiones del congreso, de cuya realización este libro es producto, quiero aprovechar esta ocasión para reconocer la valiosa contribución de las Universidades de Medellín y de Antioquia y al Comité Organizador Local de la XV CIAEM, y, además, agradecer al equipo humano del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* que ha sido durante muchos años un sostén crucial en la organización de todos los eventos del CIAEM y de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*; y en particular de este libro que hoy sacamos a la luz pública.

Este volumen es una parte del libro de *Memorias* completo (son 15 volúmenes que se pueden ver/descargar). Se ha respetado aquí la paginación del libro completo. Y las referencias *deben hacerse con base en el libro y su paginación*. No es necesario indicar el volumen específico donde se cita pues esta es una versión funcional al servicio de una mejor visualización o descarga de este valioso material.

Invitamos a los lectores de este libro a promoverlo en sus diversas actividades de docencia, investigación, extensión y divulgación en todos sus países.

Con afecto

Ángel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática
Presentación del 17 de julio de 2024
Costa Rica

Índice

Basado en la información suministrada durante la postulación de cada trabajo

9. Educación Matemática en la educación superior

Derivada clássica e derivada fraca: uma análise da compreensão dos conceitos com base na teoria APOS

Janice **Rachelli**
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil
janicerachelli@gmail.com
Vanilde **Bisognin**
Universidade Franciscana
Brasil
vanildebisognin@gmail.com

Resumo

Neste artigo apresentamos resultados de uma investigação, desenvolvida com estudantes brasileiros de um curso de mestrado em ensino de Matemática, que teve por objetivo analisar como se dá a compreensão do conceito de derivada clássica e derivada fraca. A teoria APOS foi utilizada na pesquisa como referencial teórico e metodológico. Para tanto, seguimos os passos da metodologia de pesquisa proposta pela teoria: Análise teórica, Planejamento e implementação e Coleta e análise de dados e utilizamos o ciclo de ensino ACE como metodologia de ensino no desenvolvimento de atividades em sala de aula. Os dados obtidos, por meio dos registros dos alunos e das observações anotadas no diário de campo, nos permitiram identificar mecanismos mentais de abstração reflexionante e estruturas mentais, previstos na decomposição genética e que foram desenvolvidos pelos estudantes na resolução das atividades. Além do mais, há evidências de que as atividades propostas facilitaram a compreensão dos conceitos.

Palavras-chave: derivada clássica, derivada fraca, teoria APOS, decomposição genética, ciclo de ensino ACE.

Introdução

A derivada tem sua origem associada aos estudos de Newton e Leibniz, no século XVII, sobre a teoria das fluxões, a determinação de tangentes e o estudo de diferenciais. Com a necessidade de formalização dos conceitos do Cálculo, Cauchy, no século XIX, definiu a função derivada como o limite da razão incremental. Desde então, este conceito, tornou-se um instrumento indispensável à descrição científica de fenômenos das ciências físicas, naturais, tecnológicas e sociais. Muitos desses fenômenos envolvem taxas de variação e podem ser descritos com a utilização do conceito de derivada clássica[1].

A derivada fraca[2], introduzida por Sobolev, no século XX, surgiu da necessidade de desenvolver uma análise matemática para tratar de problemas e teorias associadas a equações diferenciais parciais em que a noção de derivada fosse global e não pontual como a de derivada clássica.

Os conhecimentos sobre os conceitos tratados no Cálculo e nas Equações Diferenciais, em particular, os conceitos de derivada clássica e derivada fraca, são essenciais na formação dos estudantes em diferentes carreiras do ensino superior, como engenharias, física e matemática, tanto em cursos de graduação como em cursos de pós-graduação, pois servem de fundamentos para disciplinas científicas que utilizam a matemática como ferramenta na resolução de problemas. Nisso reside o interesse e a importância em investigar os processos de ensino e aprendizagem desses conceitos.

Com relação ao ensino e aprendizagem da derivada, pesquisas na área da Educação Matemática apontam dificuldades apresentadas, no seu estudo, pelos alunos (Pino-Fan, Godino & Font, 2015; Vega, Carrillo & Soto, 2014) e destacam a utilização de diferentes teorias e metodologias para serem utilizadas em sala de aula como forma de facilitar a aprendizagem (Asiala et al., 2001; Ferrão & Manrique, 2014; Vrancken & Engler, 2014). Uma dessas teorias é a APOS, a qual vem sendo utilizada por pesquisadores como forma de conhecer as dificuldades dos alunos com os conceitos matemáticos do ensino universitário e analisar as construções mentais utilizadas na aprendizagem desses conceitos.

Nesse sentido, o presente estudo, que é parte de uma pesquisa de doutorado concluída (Rachelli, 2017), tem o objetivo de analisar como se dá a compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca por estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática. Para isso, levamos em conta a evolução histórica do conceito de derivada e utilizamos a decomposição genética para a elaboração de situações de ensino que possibilitam analisar se os estudantes constroem mecanismos de abstração reflexionante e estruturas mentais que favoreçam a compreensão dos conceitos.

Quadro teórico

A base teórica na qual fundamentamos este estudo é a teoria APOS. Tendo como base as ideias de Piaget (1995) sobre a abstração reflexionante, a teoria APOS busca compreender como ocorre a construção de um novo conceito matemático pelo aluno e como ele utiliza este conhecimento para a construção de novos conceitos.

Duas ideias são chaves neste modelo teórico: a de construções mentais e de mecanismos mentais no qual os indivíduos realizam estas construções. Para Dubinsky (1991), a partir de situações matemáticas problemáticas os alunos são encorajados à construção dos objetos matemáticos, cujas soluções envolvem ações, processos, objetos e relações entre esquemas que se constituem para resolver determinada situação. Assim, os esquemas mentais dos alunos evoluem, à medida que novos esquemas são formados e nos quais o conhecimento matemático cresce.

A interação entre as estruturas e os mecanismos para a construção do conhecimento

[1] Entendemos a derivada clássica como a definida pelo limite da razão incremental.
[2] O conceito de derivada fraca pode ser encontrado em Medeiros & Miranda (1988).

matemático é descrita da seguinte forma: a compreensão de um conceito matemático começa com a manipulação de objetos mentais ou físicos para formar ações; ações são então interiorizadas para formar processos, os quais são, por sua vez, encapsulados para formar objetos. Os objetos podem ser desencapsulados e voltar a serem processos dos quais eles foram formados. Finalmente, ações, processos e objetos podem ser organizados em esquemas (Asiala et al., 1996).

Na teoria APOS, a análise do conceito matemático específico leva à chamada decomposição genética desse conceito, que descreve as estruturas e os mecanismos mentais que um estudante precisa construir para aprender um conceito matemático específico. Geralmente, começa como uma hipótese, tendo como base as experiências dos pesquisadores no ensino e aprendizagem do conceito, o conhecimento sobre a teoria APOS, os conhecimentos matemáticos, o desenvolvimento histórico do conceito e as pesquisas publicadas anteriormente. A decomposição genética busca uma descrição detalhada de como o sujeito poderá fazer a construção do conhecimento.

Para cada conceito matemático, são elaboradas sequências de ensino que se organizam no que se denomina ciclo de ensino ACE composto por três componentes: (A) Atividades, (C) Discussão em classe e (E) Exercícios. De acordo com Arnon et al. (2014), para as atividades que constituem o primeiro passo do ciclo, os estudantes trabalham cooperativamente em grupos, em tarefas projetadas para fazerem as construções mentais sugeridas pela decomposição genética. O foco dessas tarefas é promover a abstração reflexionante. Nas discussões em sala de aula, a segunda parte do ciclo, os alunos desenvolvem, discutem e refletem sobre as atividades designadas pelo professor. Como o professor guia as discussões, ele pode fornecer definições, explicações e apresentar uma visão geral do que está sendo discutido. Os exercícios, a terceira parte do ciclo, consistem em problemas considerados padrão, que servem para reforçar as atividades de sala de aula. Os exercícios ajudam no desenvolvimento contínuo das construções mentais sugeridas pela decomposição genética. Eles também orientam os alunos a aplicar o que aprenderam e a considerar ideias matemáticas relacionadas.

Metodologia

No desenvolvimento deste estudo seguimos os pressupostos de uma pesquisa qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) e empregamos as três componentes da metodologia de pesquisa proposta pela teoria APOS (Arnon et al., 2014): Análise teórica, Planejamento e implementação e Coleta e análise dos dados.

Na Análise teórica, elaboramos a decomposição genética dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca tendo como base a compreensão matemática e as construções históricas, as pesquisas de Asiala et al. (2001), García, Gavilán e Llinares (2012) e Vega, Carrillo e Soto (2014) e livros didáticos de Cálculo e Equações Diferenciais, a qual descrevemos sucintamente no que segue. Mais detalhes podem ser encontrados em Rachelli (2017).

Para a derivada clássica, é desejável que o aluno tenha como pré-requisitos conhecimentos algébricos e geométricos sobre funções. A construção do esquema da derivada se inicia a partir do esquema de função em que o estudante deve desenvolver ações de substituir os valores da função em pontos específicos e calcular a variação da função e a razão das variações. Essas ações devem ser interiorizadas em um processo, ao considerar o limite da razão incremental, para obter o conceito de derivada. Esse processo deve ser coordenado para obter a derivada por meio do limite e encontrar a derivada de funções utilizando regras de derivação. Com a encapsulação obtém-se a definição da derivada da função f no ponto a e a função derivada $f'(x)$. O aluno deverá coordenar as diversas interpretações de $f'(a)$ e utilizar o conceito de derivada em outros contextos como, por exemplo, nas equações diferenciais. Assim, a interiorização das ações necessárias para entender o processo da derivada, a coordenação das diversas interpretações, a encapsulação do processo da derivada, a coordenação e a generalização do esquema da função com sua derivada, a reversibilidade do processo, em que, conhecendo as características do objeto derivada, é possível obter as propriedades da função, são mecanismos mentais de abstração reflexionante indispensáveis para construir o esquema da derivada.

Para a derivada fraca, o aluno deverá ter conhecimentos sobre a derivada e a integral de uma função, o cálculo da integração por partes e a definição de função com suporte compacto. A construção do esquema da derivada fraca envolve ações de substituir a função e os intervalos na equação integral, a coordenação da fórmula de integração por partes com o teorema fundamental do Cálculo e com a definição de funções com suporte compacto e a encapsulação deste processo de obter a derivada fraca w a partir da equação integral $\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b w(x)\varphi(x)dx$.

Na etapa de Planejamento e implementação, elaboramos situações de ensino compostas por doze atividades que tratam das construções históricas, do conceito e interpretações da derivada, da solução de equações diferenciais e do conceito de derivada fraca.

Apresentamos, a seguir, duas das atividades propostas e uma descrição das construções mentais a serem efetivadas pelos estudantes quando da realização destas atividades.

Atividade 1. Uma corda elástica de comprimento $L = 20$ é puxada e depois colocada em movimento a partir da posição inicial u_0. Suponha que

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 10 \\ -\frac{1}{2}(x-20), & 10 < x \leq 20 \end{cases}.$$

a) A função u_0 é derivável no sentido clássico? Por quê?
b) A função u_0 é derivável no sentido fraco? Qual é a sua derivada fraca?
c) O que você pode concluir quanto aos resultados obtidos em (a) e (b)?

Na Atividade 1(a), o aluno deverá utilizar o esquema da derivada clássica para verificar se a função u_0 é derivável. Para tanto poderá desenvolver ações e processos para por meio do limite da razão incremental mostrar que a função u_0 não é diferenciável em $x = 10$ ou, por meio da interpretação geométrica da derivada observar que o gráfico da função u_0 apresenta um ponto anguloso em $x = 10$. Em (b) deverá utilizar a equação integral e por meio de ações e processos coordenar a fórmula de integração por partes, o teorema fundamental do Cálculo e o conceito de funções com suporte compacto, para encapsular o objeto matemático, derivada fraca da função u_0. Após, em (c), o aluno deverá coordenar os esquemas da derivada clássica e derivada fraca.

Atividade 2. Em cada uma das afirmações abaixo, verifique se são verdadeiras ou falsas. Se a afirmação for verdadeira, faça a prova, se for falsa, dê um contraexemplo.

a) Toda função real de variável real que é contínua em um ponto é também derivável neste ponto.
b) Se uma função é fracamente derivável então ela é derivável no sentido clássico.
c) A função $f(x) = \begin{cases} -x^2, & -1 < x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ é derivável no sentido clássico no intervalo $(-1,1)$.
d) A função $f(x) = \begin{cases} -x^2, & -1 < x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ é derivável no sentido fraca no intervalo $(-1,1)$.

A Atividade 2 tem como objetivo analisar a compreensão do aluno com relação aos conceitos de continuidade e diferenciabilidade e da existência da derivada clássica e da derivada fraca. Assim como na Atividade 1, é necessário que o aluno utilize construções mentais que estão associadas aos esquemas de derivada clássica e derivada fraca.

Essas atividades foram desenvolvidas junto a cinco estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática de uma universidade brasileira matriculados em uma disciplina que trata dos fundamentos do Cálculo e contempla tópicos de derivada, integral e equações diferenciais.

A coleta de dados se deu por meio do desenvolvimento das situações de ensino, em sala de aula, com a responsabilidade de uma das professoras pesquisadoras, em que utilizamos o ciclo de ensino ACE como metodologia de ensino. Em cada uma das aulas desenvolvidas, as atividades foram inicialmente discutidas em pequenos grupos e, na medida em que as dúvidas foram surgindo, a professora forneceu as definições e explicações, apresentando uma visão geral dos conceitos que estavam sendo discutidos.

Análise dos dados e resultados

A análise dos dados foi realizada a partir dos registros dos alunos nas atividades propostas e das anotações no diário de campo, em que procuramos verificar se os alunos fizeram as construções mentais indicadas pela decomposição genética e avaliar a compreensão do conceito de derivada clássica e fraca pelos estudantes.

A fim de exemplificar como se deu a compreensão do conceito de derivada clássica e de derivada fraca, apresentamos a trajetória individual do aluno, que chamaremos de Aluno E5, em que descrevemos a forma como o estudante resolveu cada uma das atividades e as construções mentais desenvolvidas por ele.

Na Atividade 1(a), o Aluno E5 representou corretamente o gráfico da função u_0 e respondeu que a função não é derivável no sentido clássico pois "Possui um bico no ponto $x = 10$" (Figura 1). Isto evidencia sua compreensão sobre a interpretação geométrica da derivada em um ponto.

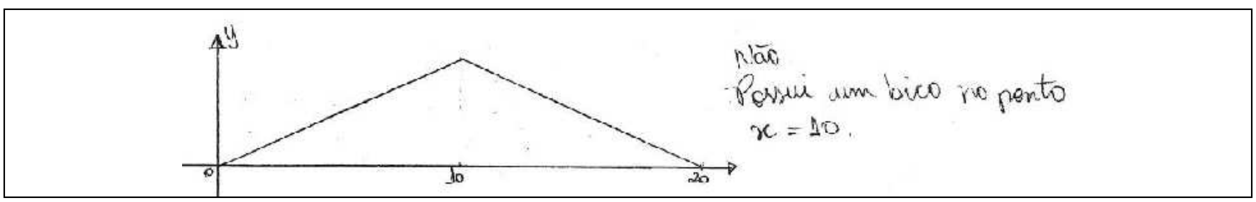
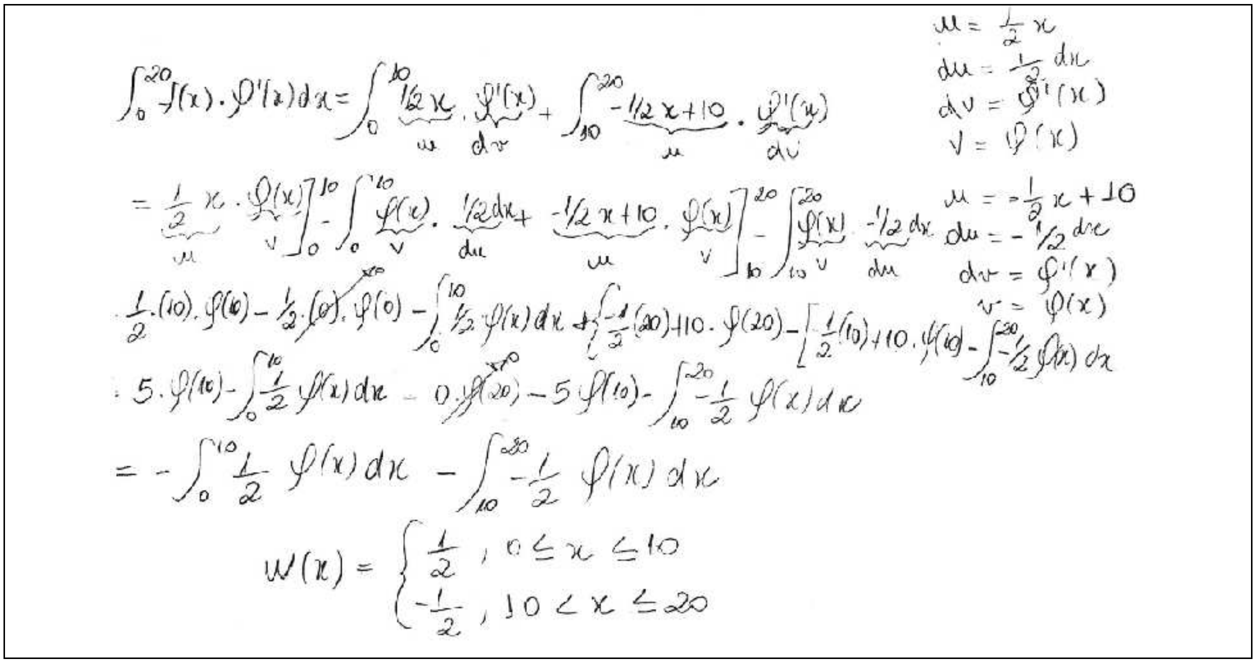


Figura 1. Resolução da Atividade 1(a) feita pelo Aluno E5.

Para resolver a Atividade 1(b), o aluno E5 escreveu que é preciso: "Achar w tal que $\int_0^{20} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{20} w(x)\varphi(x)dx$", mostrando assim, ter clareza sobre o conceito da derivada fraca de uma função. A obtenção da derivada fraca está ilustrada na Figura 2.

Observamos que para a obtenção de w, o aluno desenvolveu as seguintes construções mentais: ações de substituir a função u_0 na equação integral que define a derivada fraca considerando os intervalos [0,10] e [10,20]; interiorização dessas ações por meio do processo de integração por partes; coordenação da fórmula de integração por partes e do teorema fundamental do Cálculo, considerando φ de suporte compacto no intervalo [0,20]; encapsulação deste processo para obter o objeto matemático $w(x)$ que é a derivada fraca da função $f(x)$.



$$\int_0^{20} f(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = \int_0^{10} \underbrace{\tfrac{1}{2}x}_{u}\cdot\underbrace{\varphi'(x)}_{dv} + \int_{10}^{20} \underbrace{-\tfrac{1}{2}x+10}_{u}\cdot\underbrace{\varphi'(x)}_{dv}$$

$u = \frac{1}{2}x$
$du = \frac{1}{2}dx$
$dv = \varphi'(x)$
$v = \varphi(x)$

$$= \underbrace{\tfrac{1}{2}x}_{u}\cdot\underbrace{\varphi(x)}_{v}\Big]_0^{10} - \int_0^{10} \underbrace{\varphi(x)}_{v}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{2}dx}_{du} + \underbrace{-\tfrac{1}{2}x+10}_{u}\cdot\underbrace{\varphi(x)}_{v}\Big]_{10}^{20} - \int_{10}^{20} \underbrace{\varphi(x)}_{v}\,\underbrace{-\tfrac{1}{2}dx}_{du}$$

$u = -\frac{1}{2}x+10$
$du = -\frac{1}{2}dx$
$dv = \varphi'(x)$
$v = \varphi(x)$

$$\tfrac{1}{2}\cdot(10)\cdot\varphi(10) - \tfrac{1}{2}\cdot\cancel{(0)}\cdot\varphi(0) - \int_0^{10}\tfrac{1}{2}\varphi(x)\,dx + \left[-\tfrac{1}{2}(20)+10\cdot\varphi(20)\right] - \left[-\tfrac{1}{2}(10)+10\cdot\varphi(10)\right] - \int_{10}^{20}-\tfrac{1}{2}\varphi(x)\,dx$$

$$= 5\cdot\varphi(10) - \int_0^{10}\tfrac{1}{2}\varphi(x)\,dx - 0\cdot\cancel{\varphi(20)} - 5\varphi(10) - \int_{10}^{20}-\tfrac{1}{2}\varphi(x)\,dx$$

$$= -\int_0^{10}\tfrac{1}{2}\varphi(x)\,dx - \int_{10}^{20}-\tfrac{1}{2}\varphi(x)\,dx$$

$$w(x) = \begin{cases} \tfrac{1}{2}, & 0 \le x \le 10 \\ -\tfrac{1}{2}, & 10 < x \le 20 \end{cases}$$

Figura 2. Resolução da Atividade 1(b) feita pelo Aluno E5.

Ao concluir sobre os resultados obtidos em (a) e (b) o Aluno E5 escreveu que a função u_0 não é diferenciável no sentido clássico no ponto $x = 10$, mas tem derivada fraca no intervalo [0,20]. Sua resposta nos fornece evidências de que o estudante foi capaz de coordenar os esquemas da derivada clássica e da derivada fraca, tornando clara a sua compreensão de que a derivada clássica é definida pontualmente e a derivada fraca é definida em um intervalo.

Na resolução da Atividade 2(a), após ilustrar com um contraexemplo o gráfico uma função que é contínua, porém não diferenciável, o Aluno E5, escreveu que a afirmativa é falsa e usou a justificativa: "Para a função ser diferenciável tem que existir a derivada no ponto, e neste exemplo, a função não possui a inclinação da reta tangente no ponto $x = 1$, ou seja, ela não é diferenciável no ponto $x = 1$. Porém esta função é contínua". De forma análoga, na Atividade 2(b), o Aluno E5 respondeu que a afirmativa é falsa e justificou citando como contraexemplo a função u_0 da Atividade 1, justificando que a função possui derivada fraca, mas não é derivável em $x = 10$. Isto demonstra que o aluno tem clareza do conceito de diferenciabilidade de uma função.

Para responder a Atividade 2(c), o Aluno E5 utilizou regras de derivação para encontrar a derivada de f para $x > 0$ e para $x < 0$ e a definição da derivada em um ponto para encontrar a derivada $f'(0)$, conforme pode ser observado na Figura 3.

Observamos que a decomposição genética para a derivada, prevista na Análise teórica, foi desenvolvida pelo estudante: ações de substituir os valores da função em 0 e $0 + h$, calcular a variação da função e a razão das variações $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$, para interiorizar essas ações e por meio de um processo, calcular o limite e então, encapsular esse processo para obter a derivada da função em $x = 0$. Além do mais, utilizou regras de derivação para a determinação da derivada nos intervalos $(-1,0)$ e $(0,1)$.

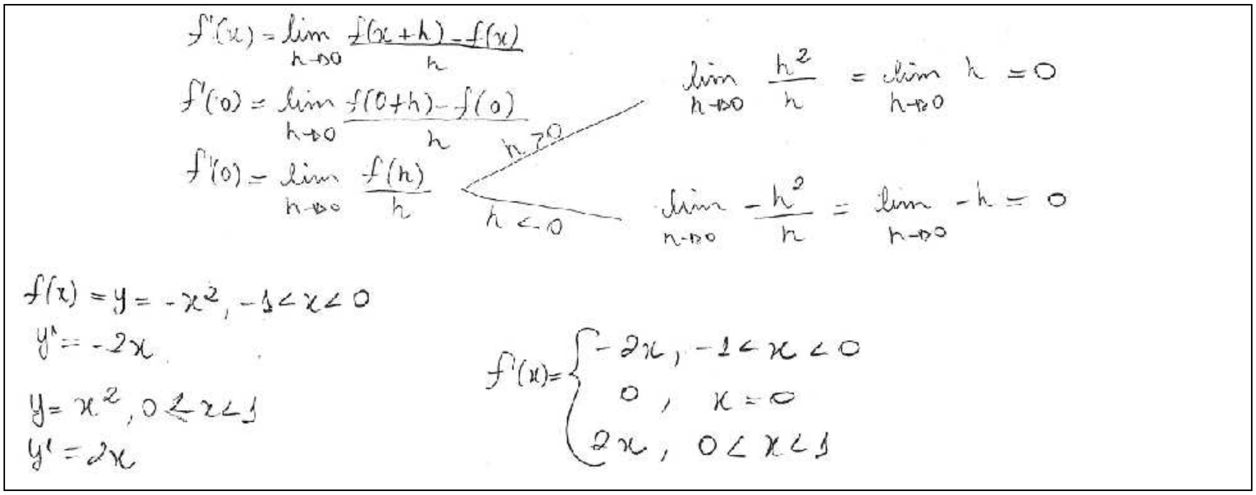


Figura 3. Resolução da Atividade 2(c) pelo Aluno E5.

Ao resolver a Atividade 2(d), o aluno E5 utilizou as construções mentais previstas na decomposição genética: substituiu a função f na equação integral que define a derivada fraca considerando os intervalos $[-1,0]$ e $[0,1]$; utilizou a fórmula de integração por partes para resolver as integrais; substituiu corretamente os limites de integração o que está de acordo com o teorema fundamental do Cálculo; usou o fato da função auxiliar φ ser infinitamente contínua e ter suporte compacto no intervalo $[-1,1]$, considerando $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ e, a partir da equação integral, obteve a derivada fraca

$w = \begin{cases} -2x, & -1 < x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ da função f.

Estas construções também foram observadas nos registros dos demais estudantes, porém, em algumas resoluções, não ocorreu coordenação dos esquemas de integração por partes com o teorema fundamental do Cálculo.

Considerações finais

Apresentamos neste artigo, resultados que se referem à compreensão do conceito de derivada clássica e derivada fraca por estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática. Os dados que advieram dos registros dos alunos nas atividades propostas e das observações em sala de aula nos permitem afirmar que, mediante a decomposição genética dos conceitos, tendo como base a teoria APOS, foi possível a construção de mecanismos e estruturas mentais pelos alunos que possibilitaram a compreensão dos conceitos. Esse resultado é, para nós, surpreendente, pois acreditávamos que, pelo fato de o conceito de derivada fraca envolver conceitos e teorias muito complexas, e os alunos estarem estudando pela primeira vez esse conceito, teriam mais dificuldades, o que não se confirmou. Acreditamos que as atividades propostas, que iniciaram com questões sobre soluções de equações diferenciais e modelos matemáticos para o problema de vibrações de uma corda, em que foram discutidas condições sobre as funções e a necessidade de novas teorias para a resolução desse problema, possibilitaram o desenvolvimento de mecanismos de assimilação e de acomodação, que propiciaram aos estudantes a compreensão do conceito de derivada fraca de uma forma bastante satisfatória. Além do mais, todos os exercícios que precederam ou que foram resolvidos juntamente com os exercícios que envolveram a determinação da derivada fraca, também reforçaram a construção do esquema da derivada clássica. Salientamos que a metodologia de ensino utilizada, tendo por base o ciclo de ensino ACE, com o desenvolvimento de atividades, discussões em classe e exercícios, e que as atividades elaboradas a partir da decomposição genética e apresentadas aos alunos, favoreceram a compreensão.

Referências e Bibliografia

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in Mathematics Education*. New York, NY: Springer.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. E. (2001). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 1-37.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, n. 2, p. 1-32.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: Tall, D. (Org.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ferrão, N. S. & Manrique, A. L. (2014). O uso de mapas conceituais como elemento sinalizador da aprendizagem significativa em Cálculo. *IENCI*, Porto Alegre (RS), v. 19, n. 1.

García, M., Gavilán, J. M. & Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del professor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del professor. *Enseñanza de las Ciencias*, 30.3, 219-236.

Medeiros, L. A. & Miranda, M. M. (1988). *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: Caderno Didático UFRJ.

Piaget, J. (1995). *Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Pino-Fan, L. R., Godino J. D. & Font, V. (2015). Uma propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros professores sobre derivadas. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 60-89.

Rachelli J. (2017). *Compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca: análise segundo o modelo cognitivo APOS*. 2017. 294 f. Tese (Doutorado em Ensino de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria.

Vega, M. A., Carrillo, J. & Soto, J. (2014). Análisis según el modelo cognitivo APOS del aprendizaje construido del concepto de la derivada. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p.403-429.

Vrancken, S. & Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 449-468.

Entorno virtual de aprendizaje: *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* bajo un enfoque bimodal

Enrique Vílchez Quesada
Escuela de Informática, Universidad Nacional
Costa Rica
enrique.vilchez.quesada@una.ac.cr

Resumen

En el contexto del curso de *Proyecto de Intervención* de la *Maestría en Entornos Virtuales de Aprendizaje* impartida por la Universidad Técnica Nacional de Costa Rica (UTN), se desarrolló un proceso de planificación y diseño de un entorno virtual de aprendizaje (*EVA*) para una materia perteneciente al plan de estudios de la carrera *Ingeniería en Sistemas de Información* de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA). La propuesta de curso se fundamenta en un enfoque bimodal con la innovación de introducir un *EVA* como resultado de un proyecto visionario que a mediano plazo circunscribe a la cátedra *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* en el marco de una propuesta pedagógica disruptiva relacionada con los beneficios que ofrece el aprendizaje virtual. Este trabajo comparte su desarrollo, la visión de futuro que integra y esencialmente el entorno virtual creado como un insumo novedoso y original para otros escenarios con características similares.

Palabras clave: enseñanza, aprendizaje, bimodal, matemática, discreta.

Introducción

El presente trabajo describe el proceso de diseño y desarrollo de un entorno virtual de aprendizaje para la materia *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* que forma parte del plan de estudios de la carrera *Ingeniería en Sistemas de Información* de la Universidad Nacional de Costa Rica. Este entorno responde a una serie de necesidades pedagógicas sentidas en el contexto de la cátedra *EIF-203* reconociendo el impacto positivo que puede tener el uso de las tecnologías digitales dentro del marco de una planificación didáctica seria y en concordancia con el modelo pedagógico integrado de manera institucional en la UNA.

La propuesta posee una fundamentación que abarca el planteamiento de un problema y su justificación, una prospectiva, una respuesta pedagógica y aspectos operativos inmersos dentro de un proyecto educativo que traslada a la cátedra del curso *EIF-203* a un escenario donde se abandona la presencialidad como el único dominio de enseñanza y aprendizaje para dar paso a la virtualidad en una combinación enriquecedora de ambos espacios formativos.

La Universidad Nacional de Costa Rica desde su fundación ha sido tradicionalmente una institución universitaria de naturaleza presencial, por lo que el planteamiento de este proyecto constituye una innovación pedagógica disruptiva. Esta innovación encontró su desarrollo bajo una perspectiva pedagógica que reconoce el aprendizaje como un resultado social y activo (Becerra y otros, s.a.), de construcción de conceptos y resolución de problemas, aproximando los contenidos de clase a situaciones reales simuladas por el uso de las tecnologías con fines educativos. Lo anterior, resignifica el ejercicio docente hacia experiencias de aprendizaje donde los educandos ocupen una posición central en la dinámica de una red de conexiones dentro de un ecosistema digital como nicho subyacente de la eclosión de un nuevo conocimiento y sus aplicaciones.

El entono virtual de aprendizaje creado para el curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* bajo un enfoque bimodal, se ha implementado en el aula virtual institucional de la UNA, ofreciendo refrescantes alternativas de aprendizaje en las clases diseñadas. No se presentan resultados de campo pues aún la experiencia no se ha extendido a ningún grupo experimental.

El problema

En el contexto de la cátedra del curso *EIF-203* surge un problema pragmático muy claro; continuar con la materia *Estructuras Discretas para Informática* bajo un enfoque bimodal o volverla a impartir con sus características netamente presenciales.

El problema trasluce elementos de mayor complejidad, creemos y demostramos en el año 2013 (Vílchez y González, 2014) que el curso *EIF-203* fortalece las competencias de los alumnos en cuanto al uso de recursos didácticos innovadores, además de mejorar sus condicionamientos cognitivos generando oportunidades para favorecer el autoaprendizaje y el coaprendizaje. Sin embargo, ¿por qué en años posteriores los resultados no han sido, en algunos casos, los esperados? Tenemos algunas hipótesis y este es el problema que debemos resolver. Consideramos que el curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* ofrece verdaderamente los espacios de enseñanza y aprendizaje descritos, pero para ello, el perfil docente, la propuesta pedagógica, los insumos tecnológicos ofrecidos por la institución a profesores y estudiantes, la normativa que rige la implementación de estas modalidades, la resistencia al cambio y la herencia cultural de un sistema educativo predominantemente presencial y positivista, requieren de un análisis de construcción de futuro que albergue los retos y alternativas de solución enmarcados no solo en la coordinación de la materia, sino también, en la unidad académica en su conjunto y en la universidad en general (Prieto, 2008).

Justificación

Construir futuro en la Escuela de Informática de la Universidad Nacional de Costa Rica, no significa ir en concordancia ciega con las nuevas o relativamente nuevas tendencias hacia el uso de las tecnologías digitales, significa pensar y repensar la manera en cómo ellas pueden impactar el futuro de la educación para las ingenierías (Ulate y Vílchez, 2010).

Buscamos soluciones en el mediano y largo plazo que tengan una repercusión en las prácticas educativas de los docentes y por tanto en las prácticas de aprendizaje de los estudiantes. Con frecuencia llamamos a nuestros actuales educandos “nativos digitales”, sin embargo, qué significa realmente ser un nativo digital, ¿bastará con haber crecido presionando botones y conviviendo con pantallas?, pareciera que esta es la convicción irracional de muchos. Ciertamente en esta época confusa nos encontramos con “cafres digitales” e “ilustrados digitales”, ¿qué estamos formando?, somos conscientes de lo que queremos y la dirección contextual que deben llevar las tecnologías hacia la estructuración de una sociedad conformada por personas competitivas, críticas y altruistas (Prieto y Van de Pol, 2006). Creemos que los pasos de transformación de esta utopía a un escenario real, inicia con acciones concretas, aventureras, pero no descabelladas, ambiciosas, pero no descontextualizadas, en el marco de lo idealizable, pero no de lo desproporcionado (Vílchez, 2014). A esto precisamente, aspira responder el proyecto del curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* bajo un enfoque bimodal, hay razones muy puntuales ya mencionadas en el apartado anterior, para justificar la continuidad de este trabajo dada su importancia y aportes institucionales.

En el año 2018 ante las dificultades presentadas, las limitaciones detectadas y la necesidad de no desperdiciar los recursos económicos y humanos de la UNA, se hizo fundamental hacer un alto en el camino, no para negar la responsabilidad ya adquirida, sino para establecer un replanteamiento de esta cátedra, en cuanto a la estructura curricular del curso, lo que podemos actualmente lograr con las condiciones institucionales, la necesidad de crear un perfil docente y a partir de él la capacitación que posibilite a los profesores de la unidad académica dar un salto seguro y firme que consolide el curso con sus características virtuales. Nos encontramos ante un océano de oportunidades que con el tiempo creemos convergerán evolutivamente a una oferta de servicios, en temas relacionados con la calidad en la docencia semipresencial en Costa Rica.

Propuesta pedagógica

En la cátedra del curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* bajo un enfoque bimodal, el uso, construcción y aplicaciones en el ámbito educativo de diversos recursos didácticos digitales, se fundamenta en el reconocimiento del aprendizaje como un producto social (Vygotsky, citado por Espiro, 2008a) y como un proceso activo (Ausubel y Bruner, citados por Espiro, 2008a) a partir del cual los alumnos construyen o reconstruyen ideas, conceptos, soluciones, estrategias, conjeturas y aplicaciones de la teoría a situaciones reales o hipotéticas en los diversos contextos que caracterizan al sistema productivo nacional en el campo de las tecnologías de la información.

En este curso se fomenta la construcción social del conocimiento mediante el trabajo en equipo, cooperativo y colaborativo. Se espera que los alumnos se apropien de habilidades y destrezas de investigación, que les permita tener una mayor independencia sobre sus propias estructuras de pensamiento, aprendizaje de estrategias de aprendizaje (aprender a aprender) y el desarrollo de un pensamiento crítico a través del ejercicio dialógico, el respeto por los saberes individuales y colectivos, y la creación conjunta de nuevas ideas, tal y como nos lo plantea la educación liberadora propuesta por Paulo Freire (Espiro, 2008b).

El andamiaje citado por Bruner y el aprendizaje significativo desarrollado por Ausubel, en muchas de las estrategias didácticas que caracterizan a este curso, cobran una posición central tanto en el ejercicio de la tutoría virtual y presencial, como en las actitudes que se espera desarrollar en los educandos. El docente asumirá el reto de elaborar y seleccionar materiales de apoyo a través de su experiencia personal y el trabajo colaborativo con los otros docentes que forman parte de esta cátedra (lecturas, presentaciones, *links*, recursos de la Web 2.0, problemas, entre otros) que inciten el descubrimiento de técnicas y métodos donde el alumno encuentre los espacios necesarios para una construcción y aplicación personal y colectiva de los conocimientos relacionados con el campo de la matemática discreta.

Esta propuesta pedagógica toma en consideración también, la importancia del aprendizaje receptivo y el condicionamiento operante propuesto por Skinner (Espiro, 2008a), en el ejercicio de la tutoría virtual estimulando la práctica de una conducta social adecuada y los fundamentos de una comunicación asertiva, respetuosa y tolerante, utilizando las distintas herramientas de comunicación tanto sincrónicas como asincrónicas del aula virtual. Además, se reconoce el valor del aprendizaje memorístico como puente para conciliar los conocimientos teóricos previos, con estrategias de enseñanza no mecanicistas.

Finalmente, se reconoce en el conectivismo la teoría de aprendizaje (Siemens, 2004) que permite comprender las interacciones sujeto-sujeto, sujeto-red, sujeto-artefacto, artefacto-artefacto, sujeto-comunidad, comunidad-comunidad implicadas en las nuevas formas de interacción e integración cognitiva que emergen como un producto de la expansión de los ecosistemas digitales (en mucho favorecida por la Internet) caracterizados por nuevas estructuras de comunicación, interrelación y operacionalización de procesos en la adquisición de conocimientos y génesis de nuevo contenido. Los entornos de aprendizaje actuales fundamentados en una dinámica sociocultural globalizada no pueden ser explicados intentando llenar los vacíos que las teorías clásicas del aprendizaje han dejado, como es el caso del conductismo, el cognitivismo y el constructivismo. En la teoría del conectivismo (Siemens, 2004) se reconoce en este proyecto la esencia de comprender cómo se puede dar un paso evolutivo de una sociedad de la información a una sociedad del conocimiento, a través de un aprendizaje en red.

Objetivos

El objetivo general que se ha dispuesto para la implementación y redireccionamiento del curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* bajo un enfoque bimodal, es el siguiente: desarrollar un proceso formativo en los educandos hacia el uso y aplicación de distintos tipos de recursos didácticos y software como apoyo en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta, a través de una construcción individual y social del conocimiento que promueva una conciencia crítica y constructiva, de las aplicaciones y limitaciones que tienen las tecnologías digitales y el conocimiento matemático discreto para resolver problemas en el ámbito de la informática.

Por otra parte, los objetivos específicos son:

- Utilizar distintos tipos de tecnologías digitales (*Second Life*, plataforma *LMS* y *Augment*) y software especializado (*Wolfram Mathematica* y paquete *VilCretas*) como apoyo en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta.
- Construir soluciones a problemas no triviales de matemática finita y sus aplicaciones en ingeniería en sistemas de información y ciencias de la computación a través del uso de distintas tecnologías digitales y software especializado.
- Identificar ventajas y desventajas del uso de tecnologías digitales y software especializado para resolver problemas contextualizados en el campo de la ingeniería en sistemas de información y las ciencias de la computación.

Entorno virtual de aprendizaje creado para el curso *EIF-203*

El *EVA* construido para la materia *EIF- 203 Estructuras Discretas para Informática* bajo un enfoque bimodal se ha basado en un modelo propuesto por el *Instituto Latinoamericano de Desarrollo Profesional Docente: Aprende Virtual* bajo la tutoría de la profesora *Mariela Delauro* (Delauro, 2011). Las etapas que lo caracterizan están sustentadas en:

- Propuesta del proyecto: el problema, la prospectiva, manifiesto pedagógico, objetivos, resultados esperados, aspectos operativos, evaluación y seguimiento, cronograma y presupuesto.
- Desarrollo del proyecto: selección y justificación de las herramientas tecnológicas a utilizar, planificación de las clases a implementar, redacción de las clases y capturas de pantalla del *EVA*.

- Documentos elaborados: guía didáctica de la materia y módulos didácticos.

A manera de ejemplo, se muestra una de las clases elaboradas como parte de este proceso de sistematización.

Clase 1: Los grafos … más allá de un conjunto de puntos y aristas

Introducción

La presente clase está destinada a **estudiar** los **conceptos principales** relacionados con la teoría de grafos **¡Los grafos son más que simples puntos y aristas en el plano!** Si bien es cierto, su representación se fundamenta en este tipo de diagramas **bidimensionales** o **tridimensionales**, las aplicaciones de los grafos reflejan su **diversidad** geométrica derivando en **propiedades matemáticas** interesantes de estudiar.

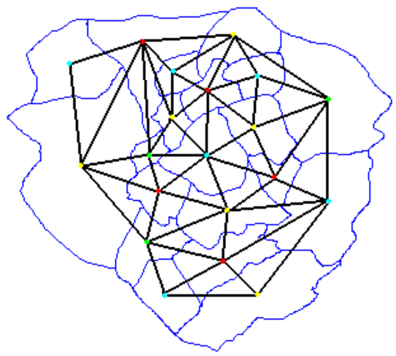


Figura 1. Mapa con un grafo.

Por ejemplo, la imagen anterior, muestra un grafo sobre un **mapa de regiones** indicando cómo se relacionan entre sí, al asumir los **lados** del grafo como una **carrera** que las une. ¿Será posible pasar una única vez por cada **ciudad**, pasar una única vez por cada **carretera**, conocer **cuántas** trayectorias distintas unen un par de regiones específicas o si pensáramos en añadir a las aristas la distancia entre las ciudades, habrá trayectorias que nos **beneficien más** como viajeros para recorrer menos kilómetros? Preguntas como éstas son las que aborda la teoría de grafos. Les comparto el siguiente **video introductorio** donde de una manera muy amena, el matemático español *Eduardo Sáenz de Cabezón* de la Universidad de La Rioja, nos muestra a la luz de esta teoría: ¿qué tienen en común *Andrés Iniesta*, *Tyrion Lannister* y los amigos en una red social como *Facebook*? Video: https://youtu.be/lp-1rvtRYQg

Entonces, ¿podemos **jugar** con los grafos? El profesor *Sáenz de Cabezón* ha dejado explícito el mensaje: ¡desde luego que **sí**! Observando las figuras presentadas a continuación, ¿será posible dibujar cada una **sin levantar el lápiz del papel**?:

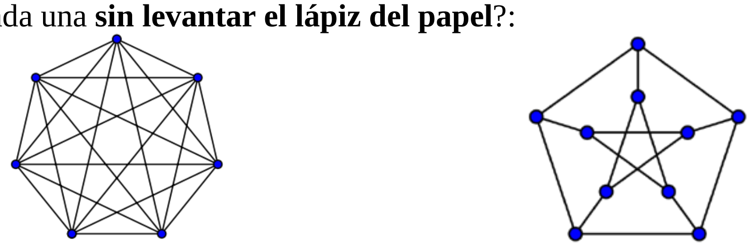


Figura 2. Ejemplos de grafos.

La teoría de grafos, **justifica** que el primer grafo de la figura 2 **sí** es posible **trazarlo** sin levantar el lápiz del papel, pero, por el contrario, el segundo grafo es **imposible**.

Aunque la teoría de grafos permite resolver **problemas muy divertidos**, conforma un insumo teórico con **aplicaciones muy importantes** para estudiar diversas situaciones de naturaleza científica en muchas áreas con cierto rango de **complejidad** y una de ellas son las **ciencias computacionales**. Lo anterior demanda en primera instancia, estudiar los **conceptos principales** de esta teoría, aspecto en el cual se **centrará** los distintos recorridos de aprendizaje de la presente clase. El **viaje comienza** … con la invitación de sumergirse de manera **proactiva** en las actividades de la semana dentro del contexto del *Taller 5 de resolución de problemas* del presente curso.

Actividades: *Taller 5 de resolución de problemas*

Se iniciarán las labores académicas de la semana dando **lectura reflexiva y minuciosa** a la *Unidad Didáctica* del tema que nos ocupa, abarcado desde la página 1 hasta la página 39 de dicho documento (Vílchez, 2018). La lectura es de **naturaleza obligatoria**. Existen otros recursos complementarios en esta aula virtual que se sugiere revisar: el libro del profesor *Juan Félix Ávila Herrera* (Ávila, 2005) y el texto diseñado por el docente *Eithel Trigueros Rodríguez* (Trigueros, 2015).

El grupo se ha dividido de manera **aleatoria** en una serie de **subgrupos de cuatro personas como máximo** (ver la lista de los subgrupos **adjunta** a la clase). Cada subgrupo tendrá la tarea de investigar **teóricamente** y de forma **práctica** los conceptos de: grafo, adyacencia, incidencia, tipos de grafos, valencias, ruta, circuito, circuito y camino de *Euler*, circuito y camino de *Hamilton* y, grafo conexo. Los subgrupos trabajarán de manera **colaborativa** en una *wiki* (ya **habilitada** en el espacio del aula virtual del tema de grafos), la **construcción** de un documento con **dos páginas** de extensión máxima, que **resuma** las definiciones y aplicaciones de los términos anteriormente citados, además de incorporar **explicaciones** sobre el uso del software *Wolfram Mathematica* en la **creación** de grafos y **resolución** de circuitos, circuitos y rutas de *Euler*, circuitos y rutas de *Hamilton* y cálculo de valencias. El plazo para la realización de esta tarea es de **cinco días** y se entregará formalmente el documento a más tardar el **día viernes** por un miembro del subgrupo (el **coordinador**) mediante un **enlace** destinado para ello. El **nombre** del archivo enviado será: *Número de subgrupo_Conceptos*.

El día sábado se ¡gestará un **encuentro** en el metaverso ***Second Life***!, con la intención de dotar un espacio de **realidad virtual** donde cada subgrupo exponga las ideas principales del documento diseñado de forma colaborativa. El punto de reunión será: http://maps.secondlife.com/secondlife/Exploratorium/170/181/26, correspondiente a ***Exploratorium***, un recurso para **explorar conceptos matemáticos** y de la **ciencia** en general. Se **debatirá** en tiempo real las ideas de cada uno de los subgrupos, el profesor tomará un rol de **moderador** dando la palabra, ordenando las secuencias y brindado al final, un **resumen** con todo el contenido expuesto. Se invitará a los estudiantes que así lo deseen, acompañar al docente a la galería ***Imaginary*** ubicada en ***Exploratorium***, que consiste en una **réplica** de una galería con ese mismo nombre, desarrollada por el *Instituto Matemático de Oberwolfach*, ubicado en Alemania.

Finalmente, se ha **habilitado un foro** donde se pretende compartir **aplicaciones** de la teoría de grafos sobre la ingeniería en sistemas de información o ciencias computacionales, además, de otras áreas de carácter científico. Es fundamental participar en el foro desde el **primer día** de la semana (lunes) con el objetivo de garantizar una **reciprocidad** oportuna y apropiada en las interacciones. Hay que responder de manera **puntual** a lo solicitado y **revisar** la redacción de las ideas y la ortografía antes de una publicación. **No es válido** incluir una participación mediante un archivo adjunto.

Foro

Este espacio tiene como propósito **analizar** las **aplicaciones** de la teoría de grafos en la ingeniería en sistemas de información o ciencias computacionales, además, de otras áreas de carácter científico. Investigue dichas aplicaciones y comparta sus conclusiones **mostrando al menos un ejemplo particular**. No es válido **repetir** aplicaciones ya planteadas por otros compañeros ¡Los espero con sus **valiosos aportes** hasta **finalizar** la semana en marcha!

En adición al ejemplo anterior se crearon dos clases más dentro del *EVA* diseñado para el curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* bajo un enfoque bimodal. Se presentan a continuación las conclusiones de este trabajo.

Conclusiones

En la Universidad Nacional de Costa Rica existen pocas propuestas pedagógicas a nivel de grado, relacionadas con cursos con un formato bimodal. El presente proyecto ha aportado a sufragar estas falencias, a través de una formulación pionera en el campo de la matemática discreta.

Los docentes de la cátedra del curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* poseen a nivel general, poca experiencia con respecto a la implementación de estrategias de enseñanza apoyadas en entornos virtuales de aprendizaje. La presente propuesta ha contribuido con un enfoque innovador, homogéneo y sistemático que permitirá en futuras versiones de la materia incorporar a todos los participantes de la cátedra, con la intención de promover e impulsar experiencias educativas basadas en un enfoque bimodal.

La Escuela de Informática de la Universidad Nacional de Costa Rica, reconoce en una visión de futuro la necesidad de transformar sus prácticas de enseñanza y aprendizaje, dando cabida al uso de ecosistemas digitales como mecanismos de flujo para preparar a futuros ingenieros en sistemas de información, no solamente en conocimientos de naturaleza científica, sino también, en el aprendizaje de habilidades y destrezas relacionadas con competencias de la era digital, tales como: la validación de fuentes, la generación de inferencias, la transformación, uso y aplicabilidad del conocimiento, la autonomía y el aprender a aprender.

El entorno de aprendizaje virtual desarrollado como producto principal de este proyecto reconoce:

- La importancia de un proceso de planificación serio hacia la consolidación de nuevos formatos educativos, que sirvan de complemento a la presencialidad.
- La integración del uso de las tecnologías digitales como recursos que pueden favorecer positivamente el aprendizaje de conocimientos matemáticos, cuando han sido plasmados en el marco de acción de una propuesta pedagógica clara y responsable.
- La necesaria transformación didáctica en las instituciones de enseñanza superior a través de estrategias metodológicas centradas en el alumno y en las conexiones que ellos conforman dentro los procesos de aprendizaje.
- La importancia de la adquisición de conocimientos tácitos en la población estudiantil como recursos para el tratamiento de la incertidumbre característica de los mercados laborales actuales, que demandan personas capaces de aprender a lo largo de la vida y en compañía de otros.

El curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* bajo un enfoque bimodal constituye una iniciativa pedagógica en un campo de conocimiento árido y de naturaleza fáctica, pretendiendo incentivar una permutación en los roles asumidos típicamente por profesores y alumnos en cursos de matemática a nivel universitario. El proyecto hace la invitación expresa de favorecer escenarios educativos donde prevalezca la observación, el análisis, la resolución de problemas, la creatividad, el descubrimiento y la puesta en ejecución de formas de razonamiento personales nutridas por la riqueza que provee el trabajo colaborativo y su consecuente búsqueda de conceso.

La propuesta de diseño y desarrollo del entorno de aprendizaje virtual para la materia *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* representa un modelo que otras cátedras de los cursos de la carrera de *Ingeniería en Sistemas de Información* de la UNA, pueden adoptar a futuro, hacia la conformación de un nuevo plan de estudios que favorezca formalmente otros enfoques bimodales.

Referencias y bibliografía

Ávila, J. (2005). Estructuras de matemática discreta para computación. Costa Rica: UNA.

Becerra, M., Bavio, E. y otros (s.a.). Comisión asesora de educación a distancia. Informe final. Argentina: Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología.

Delauro, M. (2011). Nuevos escenarios, nuevos roles docentes, nuevas competencias. Instituto Latinoamericano de Desarrollo Profesional Docente: Aprende Virtual.

Escuela de Informática (2018). Misión y visión. Recuperado de: http://www.escinf.una.ac.cr

Espiro, S. (2008a). Aprendizaje. Especialización en Entornos Virtuales de Aprendizaje. Virtual educa.

Espiro, S. (2008b). Aprendizaje adulto. Especialización en Entornos Virtuales de Aprendizaje. Virtual educa.

Prieto, D. (2008). Planificar para construir futuro. Especialización en Entornos Virtuales de Aprendizaje. Virtual educa.

Prieto, D. y Van de Pol, P. (2006). *E-learning comunicación y educación. El diálogo continúa en el ciberespacio*. Costa Rica: Radio Nederland Training Centre.

Siemens, G. (2004). Conectivismo: Una teoría de aprendizaje para la era digital. Recuperado de: http://clasicas.filos.unam.mx/files/2014/03/Conectivismo.pdf

Trigueros, E. (2015). Material segunda parte: teoría y práctica. Costa Rica: UNA.

Ulate, G. y Vílchez, E. (2010). Una retrospección y visión de futuro sobre el uso e implementación de las tecnologías de la información y la comunicación, para el aprendizaje virtual en el contexto de la División de Educología de la Universidad Nacional de Costa Rica. *Revista Electrónica Educare*, *14*(1), 19-36. Recuperado a partir de http://revistas.una.ac.cr/index.php/EDUCARE/article/view/1506

Vílchez, E. y González, E. (setiembre-febrero, 2014). Percepción estudiantil sobre una metodología asistida por computadora en las áreas cognitivas del álgebra lineal y la matemática discreta. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, *14*(1), 1-16. doi: http://dx.doi.org/10.18845/rdmei.v14i1.1565

Vílchez, E. (mayo-agosto, 2014). Estrategias de enseñanza para el curso *EIF-203 Estructuras discretas para informática* a través del uso de las redes sociales *Facebook* y *Twitter*. *Revista Electrónica Educare*, *18*(2), 39-70. doi: http://dx.doi.org/10.15359/ree.18-2.3

Vílchez, E. (2018). Guía didáctica: teoría de grafos. Costa Rica: UNA.

Universidad Nacional de Costa Rica. (2007). Modelo pedagógico. Recuperado de: http://www.una.ac.cr/index.php/acerda-de/estrategia-institucional/2012-10-02-15-21-57

Teorema Fundamental do Cálculo: aplicações para o cálculo de área utilizando o GeoGebra

Natália Oliveira do **Nascimento**
Universidade Federal de Uberlândia, Campus Pontal
Brasil
natalia-non@hotmail.com
Rogerio Fernando **Pires**
Universidade Federal de Uberlândia, Campus Pontal
Brasil
rfpires25@hotmail.com

Resumo

Este trabalho teve por objetivo apresentar recursos para um ensino que vislumbra o estudo de métodos que podem auxiliar o processo de ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo. A pesquisa de caráter qualitativa foi fundamentada nas ideias de modelagem matemática e modelação defendidas por Bassanezi e por Biebemgut e Hein. No processo de modelação do problema proposto (o cálculo da medida da área de dois lagos), foi utilizado o GeoGebra que possibilitou calcular a medida das áreas a partir das imagens dos lagos. Os resultados mostraram que a modelagem e a modelação podem ser estratégias bastante interessantes no ensino e na aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo.

Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo, Modelagem, Modelação, GeoGebra.

Introdução

É indiscutível o fato de que há uma constante evolução nos mais variados setores da sociedade e, paralelamente, a educação, que exerce papel fundamental, também está avançando. A educação não atua somente no desenvolvimento de um país, mas na formação de cada cidadão, ajudando na prosperidade social, econômica e cultural, seja no momento de ensinar operações básicas, conhecimento histórico, linguagens de comunicação e até mesmo ao instigar o pensamento crítico. Assim, mais pesquisas vêm sendo desenvolvidas na área com intuito de aperfeiçoar as técnicas usadas em sala de aula como forma de promover o interesse e colaborar para a aprendizagem dos conteúdos apresentados aos alunos no Ensino Fundamental, Médio e Superior.

A Matemática é uma disciplina com alto índice de rejeição. Para Tatto e Scapin (2004), no convívio com os alunos percebe-se, empiricamente, a aversão que ocorre quando se deparam com a matéria. E isso se dá em todos os níveis de ensino; desde o aluno que ingressa nos anos iniciais até o ensino superior, identificamos tal rejeição na afirmação de que a Matemática é difícil. Consequentemente, estudantes escolhem profissões que, necessariamente, não envolvem o raciocínio matemático. Essa rejeição não surge por acaso; o ser humano tende a repelir aquilo que não provoca prazer ou instiga a curiosidade, problema proveniente da forma tradicional e às vezes arcaica de como os conteúdos matemáticos são apresentados em sala de aula. Por conseguinte, isso reflete na formação de alguns profissionais já capacitados em outras áreas, como engenheiros, químicos, biólogos, pedagogos e outros, que levam essa aversão para a vida profissional e involuntariamente propagam o negativismo com relação à Matemática.

No entanto, existem elementos que provocam o interesse dos alunos, como uma aula motivadora, conteúdos práticos, apoio familiar, incentivo, entre outros. Outro aspecto importante que contribui é o aluno reconhecer a aplicabilidade do conteúdo no seu cotidiano, seja para calcular a área de um terreno, olhar os juros de um cartão de crédito ou calcular uma distância percorrida. Em esferas superiores, por exemplo, essa aplicação pode ser mostrada para um graduando em biologia com um gráfico do crescimento de uma célula, para os futuros químicos no cálculo do gradiente de concentração, na cartografia e escala de mapas para os geógrafos e outros. Todos esses exemplos estão relacionados com conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

Partindo dessa alegação, o presente trabalho apresenta recursos para um ensino que vislumbra o estudo de métodos que podem auxiliar o processo de ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Portanto, é possível destacar que a modelação matemática, uma dessas ferramentas, se apresenta para ajudar no processo de ensino e aprendizagem.

Aporte Teórico

É notória a importância da modelagem matemática como metodologia de ensino em todos os níveis, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior, pois ela estimula o senso crítico, a curiosidade e o espírito investigativo do aprendiz ao abordar situações que envolvem fenômenos realísticos. Nessa direção, Bassanezi (2006) afirma que o interesse pela Matemática, inicialmente, provém de estímulos externos a ela, vindos do "mundo real". Para ele, a Matemática Aplicada é o caminho. Os conteúdos matemáticos apresentados, por si sós, não são suficientemente interessantes para a maioria dos alunos de Ensino Fundamental, Médio e Superior. Conforme Bassanezi (2006, p. 16), os professores devem valorizar o que ensinam, e completa: "[...] que o conhecimento seja ao mesmo tempo interessante, por ser útil, e estimulante, por ser fonte de prazer".

Com o intuito de trazer esse pensamento para os estudantes e possibilitar o desenvolvimento na disciplina, surge o uso da modelagem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. A modelagem matemática é o processo de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e obter resoluções que possam ser aplicadas ao mundo real. Biembengut e Hein (2007) abordam a importância da reestruturação nos métodos de ensino que forneçam elementos que desenvolvem o pensamento crítico e independente. A partir disso, a

Matemática atua como meio de emergir a criatividade, a facilidade na resolução de problemas e a capacidade de modelar.

A modelagem produz efeito na interdisciplinaridade, é visível a sua influência no processo de pesquisas em outras ciências. Um profissional que desfruta do conhecimento matemático consegue transitar com facilidade entres os campos de aplicabilidade das mais diversas ciências, por exemplo, a Física e a Química, de forma mais imediata. Na educação, o método possibilita aos alunos o vislumbre de aspectos lúdicos e aplicações dos conteúdos, aliando teoria e prática. A Matemática pode ser usada como uma ferramenta que consegue sintetizar e generalizar ideias, inicialmente visualizadas de forma empírica, em teorias sólidas. Cada vez mais, teorias matemáticas são desenvolvidas, mas nem sempre têm uma aplicação imediata. Segundo Biembengut e Hein (2007), a Matemática e a realidade são conjuntos distintos e a modelagem surge como uma ponte entre elas.

Biembengut e Hein (2007) apresentam uma divisão clara de três etapas do processo: a primeira é a interação, em seguida a matematização e por último o modelo matemático. A primeira etapa consiste no reconhecimento da situação-problema, estudo do assunto a ser trabalhado, análise das variáveis e outras situações de conhecimento profundo do material a ser modelado. Depois de compreendida a situação, a segunda etapa, a matematização, trabalha a formulação do problema encontrado e sua resolução em termos do modelo. Para concluir, no modelo matemático, são realizadas a interpretação da solução e a avaliação da confiabilidade do modelo. A partir dessa divisão, espera-se que a modelagem seja capaz de incentivar a pesquisa, promover a habilidade em formular e resolver problemas, aplicar o conteúdo matemático e desenvolver a criatividade.

Os conteúdos e teorias matemáticas são apresentados como acabados e completos, o que leva a um ensino desvinculado da realidade e do processo histórico de construção. Bassanezi (2006, p. 36) esquematiza a forma como um teorema é ensinado, na seguinte ordem: “enunciado – demonstração – aplicação”. De acordo com o autor, o processo deveria ser o inverso, semelhante ao que originou o teorema, ou seja, primeiro a motivação (externa ou não à Matemática), formulação e validação das hipóteses acompanhadas de questionamentos e, por fim, seu enunciado. Uma forma de sanar essa deficiência presente no ensino seria a aplicação da modelagem matemática de maneira efetiva e prevista no processo. Apesar de seus inúmeros benefícios, a modelagem depara-se com diversos obstáculos no ambiente escolar.

Tais obstáculos são variados e partem desde processos burocráticos até mais especificamente a resistência dos estudantes. Os cursos regulares possuem orientações e cronogramas de conteúdos que devem ser trabalhados em sala de aula, tornando a aplicação da modelagem inviável por requerer um tempo maior e nem sempre seguir o programa. Outro problema identificado é o possível desinteresse dos alunos ao se defrontarem com um novo método com o qual não tiveram contato anterior. Além disso, muitos professores não se sentem capacitados para desenvolver a modelagem, em razão de não terem tido contato com ela na sua formação ou até mesmo em virtude do receio de prejudicar o seguimento do curso. Existe também a possibilidade de o aluno encontrar como solução conteúdos que ainda não possuem base matemática suficiente que viabilizem novos conhecimentos em temas mais específicos.

Para alguns educadores matemáticos, por exemplo, D’Ambrosio (1996), Grande (2013), Pires e Silva (2014), a Matemática torna-se mais atrativa e efetiva na sociedade quando se tem uma aplicabilidade de seu conteúdo. Nesse sentido, é indispensável proporcionar aos alunos momentos que possibilitam a interdisciplinaridade. Posto isso, surge a modelação como solução. Biembengut e Hein (2007) consideram a modelação matemática uma estratégia que abrange o conteúdo programático e consegue adaptá-lo a uma determinada situação. Inicialmente, é preciso que o professor tenha conhecimentos prévios de seus alunos, desde o domínio matemático até mesmo o contexto socioeconômico em que eles estão inseridos. Os objetivos gerais são semelhantes à modelagem matemática, como despertar o interesse pela Matemática e desenvolver habilidade para resolver problemas, estimular a criatividade e realizar pesquisas. Entretanto, ela se diferencia da modelagem, por exemplo, quando se trabalha com ela no seu sentido literal, em princípio, no momento da escolha do tema, não se sabe qual o ferramental matemático necessário para a obtenção do modelo. Quando isso ocorre em cursos regulares em que se tem uma grade de conteúdos a ser cumprida, pode ser prejudicial, pois o conhecimento matemático exigido no processo pode não estar contemplado nessa grade.

Em contrapartida, na modelação, no momento da escolha do tema, o professor já sabe qual é o modelo que os alunos devem criar e os conhecimentos matemáticos utilizados estão todos previstos na grade de conteúdos do curso, ou seja, aos alunos cabe uma recriação de modelos já existentes. No entanto, a modelação não deixa de comtemplar a espinha dorsal do processo de modelagem, que é a investigação por meio da Matemática.

Com base nos referenciais citados, estudo do conteúdo e observações, esta pesquisa envolveu a modelagem científica e a modelação no ensino-aprendizagem A disciplina-base para o desenvolvimento é o Cálculo Diferencial e Integral, mais especificamente o Teorema Fundamental do Cálculo que será aplicado no cálculo de áreas. Aliado a isso, será usado o *software* GeoGebra com o intuito de auxiliar a modelação de imagens via satélite, verificar a veracidade dos cálculos realizados e empregá-lo como uma ferramenta para o desenvolvimento de atividades de ensino voltadas para o Teorema Fundamental do Cálculo.

Desenvolvimento

Com o intuito de fazer uma modelação utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, o primeiro passo foi o reconhecimento do tema e as suas possíveis aplicações. Lima (1999) traz o seguinte enunciado:

- Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no intervalo I. As seguintes afirmações a respeito de uma função $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ são equivalentes:

(1) F é uma integral indefinida de *f*, isto é, existe $a \in I$ tal que:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt, \forall\, x \in I.$$

(2) F é uma primitiva de *f*, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

A aplicação mais direta da integração pela diferenciação é o cálculo de áreas e volumes. Com o objetivo de vislumbrar uma aplicação acessível e que aproximasse o aluno da realidade no processo de ensino e aprendizagem no Ensino Superior, escolheu-se para ser calculada a medida da área de dois lagos presentes em um parque municipal situado em Ituiutaba, interior de Minas Gerais. Nesse momento, fica visível a etapa da interação com a situação a ser modelada, conforme apontam Biembengut e Hein (2007).

O Parque Municipal do Goiabal foi adotado por intermédio das Unidades de Conservação (UC), criadas a partir do Sistema Nacional de Unidades de Conservação da Natureza

(SNUC) (Lei n.º 9.985, de 18 de julho de 2000). O parque foi inaugurado em 1986, no município de Ituiutaba-MG, com o objetivo de preservar o ecossistema natural, proporcionar um momento de lazer e turismo, a fim de valorizar o meio ambiente e suas particularidades, além de possibilitar a realização de pesquisas científicas. Apesar da sua importância histórica e ambiental, o parque não é reconhecido de forma consciente pela comunidade e assim não alcança seus objetivos iniciais. Faz-se necessário um plano de gestão, no qual são levantadas as suas funções, feitas adaptações, reestruturações e, por fim, uma divulgação adequada do espaço, além da valorização do espaço por parte da população.

Para a realização desse estudo que visou a modelação usando o TFC, foram usados recursos tecnológicos que deram dinamismo à construção do modelo e confiabilidade aos resultados, análise de informação e visualização do processo. Portanto, foram usados recursos de imagens via satélite, disponibilizadas pelo Google, e os cálculos via GeoGebra. O GeoGebra é um *software* de Matemática gratuito e de fácil acesso, utilizado como ferramenta nos mais diferentes níveis de ensino, que trabalha aspectos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo, combinados em uma única aplicação.

O aplicativo permite adicionar imagens e a partir delas desenvolver equações que representam funções por meio de pontos colocados estrategicamente, como na imagem a seguir:

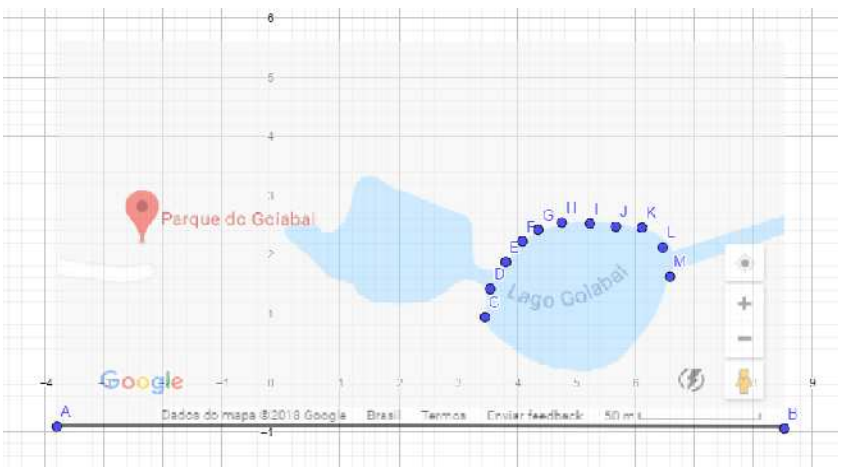


Figura 1. Primeiro passo após imagem inserida no GeoGebra

Na Figura 1, foram dispostos com o auxílio do GeoGebra pontos sobre uma parte da margem de um dos lagos e, depois de realizado um ajuste de curva, foi possível obter a equação que descreve algebricamente a curva que contém os pontos dispostos inicialmente. A Figura 2, a seguir, mostra a curva ajustada sobre os pontos.

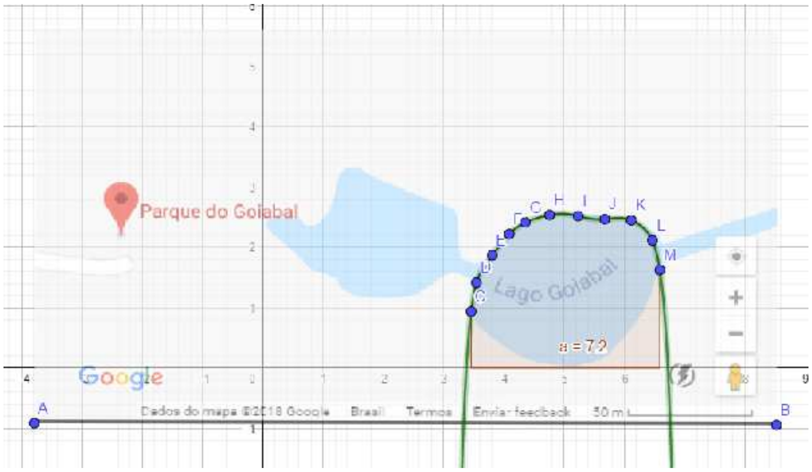


Figura 2. Curva ajustada pelos pontos

A figura anterior mostra a curva ajustada sobre os pontos, cuja equação que a representa algebricamente é $f(x) = -0{,}15x^{10} + 7{,}51x^9 - 169{,}85x^8 + 2266{,}84x^7 - 19756{,}2x^6 + 117481{,}99x^5 - 482724{,}84x^4 + 1353250x^3 - 2476971{,}29x^2 + 2673057{,}34x - 1291500{,}63$. Essa equação é o modelo matemático que possibilitou a resolução do problema proposto inicialmente (calcular a área dos lagos do Parque do Goiabal). No aplicativo, na barra de entrada, seleciona-se a opção Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, < Valor de x Final>), em que em foram completados respectivamente com a f(x), o valor 3,46 que corresponde ao limite inferior de integração e 6,59 que corresponde ao limite superior de integração, obtendo assim o valor da área da região sob a curva, que é de 7,2.

No entanto, como é possível observar na Figura 2, existem duas regiões cujas áreas foram incluídas no cálculo, porém não fazem parte do lago. Logo, as áreas dessas regiões devem ser descontadas do valor da área da região considerada e, para tanto, foram aplicados os mesmos procedimentos para calcular a medida das áreas das regiões que não pertencem ao lago. Depois, esses valores foram subtraídos do valor encontrado inicialmente. Esses procedimentos foram sintetizados na forma de imagem, que podem ser observados na Figura 3.

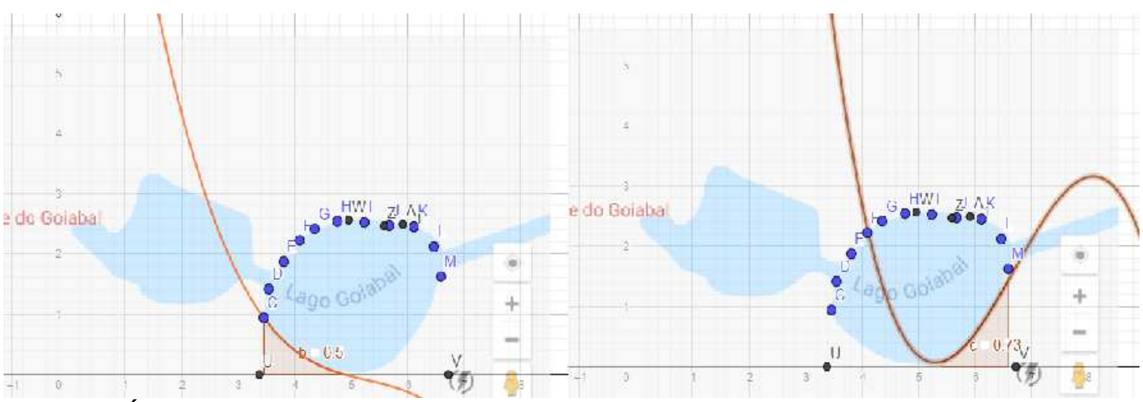


Figura 3. Área das laterais que não pertencem ao lago

Observando a Figura 3, nota-se que as áreas das regiões que não pertencem ao lago são respectivamente 0,5 e 0,73. Então, a área do lago é determinada por A = 7,2-(0,5 + 0,73) = 5,97.

Nesse procedimento, fica claro o uso da matematização, etapa da modelação proposta por Biembengut e Hein (2007), por meio da formulação e da resolução do problema proposto.

Encontrada a medida da área do lago, o último passo é a interpretação da solução do modelo, parte essencial para a compreensão e finalização do processo a partir dos resultados obtidos. Assim, é necessário, nesse caso, fazer uma conversão e adequar os cálculos e os valores obtidos com a escala equivalente a medida real. Ao ser capturada via satélite, a imagem apresentava uma escala de medida 2 cm que representava 50 m na realidade, e com os ajustes feitos no GeoGebra a escala passou a representar 2 unidades no *software* que expressa 50 m na realidade. Dessa forma, correspondendo a 25 m cada unidade na escala, a área real do lago passa a ser $H = A * (25)^2 = 3731{,}25\ m^2$. As mesmas etapas foram realizadas em um segundo lago, também presente nas figuras, e a área obtida foi de $2656{,}25\ m^2$.

Apesar da confiabilidade do cálculo realizado pelo GeoGebra e da resolução e segurança dos dados obtidos pela imagem via satélite, as áreas encontradas são valores aproximados, podendo variar para mais ou para menos. Ao usar a ferramenta do ajuste de pontos para traçar a curva e chegar à equação que representa algebricamente a função, foi possível perceber que, quanto mais precisos e mais próximos os pontos estão, maior será a aproximação final das medidas reais das áreas dos lagos. Esse processo possibilitou comparações no decorrer da realização das etapas e permitiu visualizar as estratégias usadas pelo *software* no ajuste de imagem e, consequentemente, na lei de formação da função a partir da curva para o cálculo de áreas por imagem no GeoGebra.

Em suma, o desenvolvimento dessa tarefa propiciou evidenciar no processo de modelação cada uma das etapas propostas por Biembengut e Hein (2007): a interação, a matematização e o modelo matemático.

Considerações Finais

O Teorema Fundamental do Cálculo é um conteúdo debatido largamente nas pesquisas em Educação Matemática, quando o foco é o Ensino Superior, e um dos conceitos que mais causam dificuldades na sua compreensão por parte dos estudantes. Pesquisas como a de Anacleto (2007) e Grande (2013) mostram que grande parte das dificuldades envolvidas na compreensão do TFC está ligada à maneira abstrata pela qual ele é apresentado, com a seguinte ordem: enunciado do teorema – demonstração – aplicações, cujo processo poderia ser realizado seguindo uma ordem inversa.

Nesse sentido, Bassanezi (2006) argumenta que o ensino da Matemática passa a ser mais interessante a partir do momento em que se procura iniciar o processo de construção do conhecimento partindo de uma motivação inicial (interna ou externa a própria Matemática). Ele ainda enfatiza que um caminho para que o ensino desperte o interesse do estudante e parta de situações reais é a modelagem matemática.

De posse das ideias defendidas por Bassanezi (2006) e Biembengut e Hein (2007) e com o objetivo de realizar um processo de modelação que, relacionado ao TFC, a pesquisa aqui descrita buscou apresentar, o processo de modelagem pode ser reproduzido em sala de aula ao se abordar o teorema em questão. Entre os principais resultados encontrados ao desenvolver este estudo, está o de perceber a motivação, da primeira autora do trabalho, em aprofundar seus conhecimentos sobre TFC. Ela é aluna do curso de Licenciatura em Matemática e acabou de cursar a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Além disso, em cada passagem do desenvolvimento do estudo foi possível observar e compreender cada uma das etapas da modelação descritas por Biembengut e Hein (2007).

Por fim, atendo-se aos limites da investigação aqui descrita, foi constatado que a modelagem/modelação desperta o espírito investigativo, a curiosidade e a autonomia do estudante, uma vez que o estudo do conteúdo partiu de um problema real vivenciado pela primeira autora.

Referências e bibliografia

Tatto, F., & Scapin, I.J. (2004). Rejeição à Matemática: causas e alternativas de intervenção. *Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões-URI*: Porto Alegre.

Biembengut, M.S., & Hein, N. (2007). Modelagem Matemática no Ensino. (4a ed). São Paulo: Contexto.

Bassanezi, R.C. (2006). Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto.

D'Ambrosio, U. (1996). Educação Matemática: da teoria à prática. Campinas: Papirus.

Grande, A.L. (2013). Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino. *Pontifícia Universidade Católica de São Paulo*: São Paulo.

Pires, R.F. (2014). Função: Concepções de professores e estudantes dos Ensinos Médio e Superior. *Pontifícia Universidade Católica de São Paulo*: São Paulo.

Pires, R.F., & Silva, B.A. (2014). Função: Concepções daquele que ensina e daquele que aprende. *Revista de Educação Matemática e Tecnologia, v.5, n.3, 1-25*.

Lima, E.L. (1999). Análise Real.(4ª ed). *Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)*: Rio de Janeiro.

Conhecimentos docentes em ação no Modelo Didático da Matemática em Contexto (MoDiMaCo)

Barbara Lutaif **Bianchini**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
barbara@pucsp.br
Gabriel Loureiro de **Lima**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
gllima@pucsp.br
Eloiza **Gomes**
Instituto Mauá de Tecnologia
Brasil
eloiza@maua.br

Resumo

O objetivo deste artigo, de caráter teórico-bibliográfico, é o de evidenciar os conhecimentos docentes necessários para a execução das tarefas demandadas do professor que deseja atuar em conformidade ao Modelo Didático da Matemática em Contexto (MoDiMaCo), que faz parte da teoria Matemática no Contexto das Ciências, referencial que fundamenta este estudo. A análise realizada nos permite concluir que, apenas conhecimentos de conteúdo e do MoDiMaCo não são suficientes ao docente. A maior parte das tarefas requer a mobilização de conhecimentos de conteúdo, didáticos, pedagógicos e tecnológicos, sempre de maneira simultânea e articulada. Diante deste cenário, é fundamental planejar e executar uma formação para aqueles que atuam em cursos de Engenharia, de forma a contemplar a diversidade necessária de conhecimentos que esses profissionais devem ter disponíveis para, quando for o caso, mobilizá-los.

Palavras-chave: educação matemática, engenharia, formação de professores, conhecimentos docentes, Matemática no Contexto das Ciências, MoDiMaCo.

Introdução

No *Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA)* e também naquele intitulado *A Matemática na Formação Profissional*, sediados na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e congregando pesquisadores desta universidade e também do Instituto Mauá de Tecnologia, temos desenvolvido, tomando por base a teoria *A Matemática no Contexto das Ciências* (MCC), investigações em duas direções: (i) pesquisas de caráter teórico-bibliográfico e (ii) estudos visando compreender quais conceitos da Matemática são mobilizados nas diferentes Engenharias, de que forma se dá tal mobilização e como construir, a partir disso, *eventos contextualizados* para o ensino de Matemática nestes cursos.

Nas pesquisas de caráter teórico-bibliográfico, uma das temáticas com a qual temos trabalhado diz respeito às competências a serem desenvolvidas pelos futuros engenheiros ao longo do curso. Temos refletido também sobre as competências que os docentes que ministram aulas de Matemática nas Engenharias precisam desenvolver para atuar em consonância ao *Modelo Didático da Matemática em Contexto* (MoDiMaCo) intrínseco à MCC.

Em Bianchini, Lima, Gomes e Nomura (2017), apresentamos considerações a respeito da ideia de educação baseada em competências e discutimos o desenvolvimento de competências matemáticas pelo futuro engenheiro, adotando duas diferentes perspectivas: a do *Mathematics Working Group* da *Société Européenne pour La Formation des Ingénieurs* (SEFI) e a da teoria MCC.

Em Gomes, Bianchini, Lima e Nomura (2017), assumimos a concepção de Camarena (2011) de que, possibilitar ao graduando em Engenharia que ele desenvolva competências, significa permitir que ele, como futuro profissional, construa alicerces "para enfrentar uma situação-problema fazendo uso da integração de toda sua bagagem de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores que são mobilizados em suas estruturas cognitivas" (Camarena, 2011 como citado em Bianchini et al., 2017, p. 69). Tomando esta ideia como premissa, postulamos que para atuar em consonância ao MoDiMaCo, ministrando aulas de Matemática contextualizadas, "de forma a estabelecer inter-relações entre aquele conteúdo que está sendo trabalhado e os demais já estudados ou a serem desenvolvidos nas disciplinas não matemáticas que dele requerem, e também com a futura prática profissional do graduando" (Gomes et al., 2017, p. 338), o docente deve, em circunstâncias distintas e a partir de diferentes ações, construir "conhecimentos, habilidades, atitudes e valores que lhe possibilitem exercer sua prática de forma a efetivamente permitir ao estudante de determinada modalidade de Engenharia que este construa os alicerces para seu exercício profissional futuro" (Gomes et al., 2017, p. 338).

Entra em jogo, portanto, a necessidade de reflexões acerca da formação do professor que ensina Matemática aos futuros engenheiros. No Brasil, especificamente, essa temática vem ganhando destaque e, dentre as ações que ratificam essa afirmação, podemos citar a criação de um Grupo de Trabalho, no âmbito da Associação Brasileira de Educação em Engenharia (ABENGE), visando refletir a respeito da formação inicial e continuada de docentes que atuam em cursos de Engenharia. Com o objetivo de contribuir com essas discussões, em Gomes et al. (2017), nos detivemos à uma das componentes das competências docentes: os *conhecimentos*. Com base no trabalho de Silva e Lima (2015) que, fundamentados em Shulman (1987), Mishra e Koehler (2006) e Ball, Thames e Phelps (2008), apresentam definições para quatro categorias de conhecimentos docentes: de *conteúdo* (CC), *didático* (CD), *pedagógico* (CP) e *tecnológico* (CT), propusemos, quando necessária, uma ampliação de tal categorização, tendo como foco refletir a respeito da construção – e das circunstâncias em que esta ocorre – de conhecimentos por parte daqueles que lecionam Matemática em cursos de Engenharia segundo a MCC e o MoDiMaCo.

Dando continuidade a essa investigação, em Lima, Bianchini e Gomes (2018), ampliamos nossas reflexões a respeito das categorias de conhecimentos docentes. Postulamos que, para desempenhar cada uma das tarefas inerentes ao MoDiMaCo, os professores precisam mobilizar, muitas vezes de maneira simultânea, conhecimentos pertencentes às diferentes categorias anteriormente explicitadas. Salientamos então a necessidade de, em pesquisas futuras, evidenciar as categorias de conhecimento efetivamente demandadas em cada uma dessas tarefas para que, a partir disso, seja possível "planejar formações docentes institucionais ou estratégias de autoformação para que os professores que lecionam Matemática em cursos de Engenharia possam efetivamente construir tais conhecimentos de maneira sistematizada" (Lima et al., 2018, p. 133).

Adotando como procedimento metodológico a análise, à luz das categorias de conhecimentos docentes explicitadas em Gomes et al. (2017), das tarefas apresentadas em Lima et al. (2018) e que necessariamente deverão ser cumpridas pelo professor que desejar atuar em concordância com o MoDiMaCo, o objetivo do presente artigo, de caráter teórico-bibliográfico, é aclarar as diferentes categorias de conhecimentos docentes requeridas em cada uma dessas tarefas. Para isso, inicialmente apresentamos algumas considerações a respeito da MCC, do MoDiMaCo e das diferentes categorias de conhecimentos docentes.

A MCC e o MoDiMaCo

Na teoria Matemática no Contexto das Ciências (MCC), desenvolvida pela pesquisadora mexicana Patrícia Camarena, o processo educativo é concebido como um sistema complexo no qual interatuam questões curriculares, epistemológicas, didáticas, cognitivas e docentes. Esta teoria foi idealizada especialmente para embasar reflexões sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática em cursos universitários nos quais essa ciência está presente na forma de disciplinas de serviço. O pressuposto filosófico educacional da MCC, segundo Camarena (2008) é que, ao final destes cursos, os estudantes possam realizar a 'transferência dos conhecimentos' da Matemática para as áreas que os requerem, permitindo o desenvolvimento de competências profissionais e laborais. Como ressaltam Bianchini et al. (2017) a ideia central é proporcionar aos estudantes um ensino de Matemática contextualizado, levando-se em consideração as particularidades do curso de graduação no qual as aulas estão sendo ministradas e a futura atuação profissional de seus egressos.

A MCC contempla um modelo didático denominado MoDiMaCo – Modelo Didático da Matemática em Contexto –, no qual as principais ferramentas para o ensino da Matemática são os *eventos contextualizados*, que, de acordo com Camarena (2013), são problemas ou projetos que desempenham papel de entes integradores entre disciplinas matemáticas e não matemáticas, convertendo-se em ferramentas para o trabalho interdisciplinar no ambiente de aprendizagem.

Para atuar em consonância ao MoDiMaco, o docente precisa desempenhar algumas tarefas, conforme apresentado em Camarena (2017) e Lima et al. (2018). Em conformidade com o que apresentamos na introdução deste artigo, nosso objetivo é explicitar quais conhecimentos o professor deve mobilizar para realizar tais tarefas. Consideramos quatro categorias de conhecimentos docentes e todas as suas possíveis interseções. Desta forma contamos com 15 possibilidades de categorização destes conhecimentos, a respeito dos quais passamos a tratar.

Categorias de conhecimentos docentes

Tomando por base os estudos de Shulman (1986, 1987), Mishra e Koehler (2006) e Ball, Thames e Phelps (2008), Silva e Lima (2015) categorizam os conhecimentos docentes em: de *conteúdo* (CC), *didático* (CD), *pedagógico* (CP) e *tecnológico* (CT). Além disso, exibem outras onze categorias obtidas a partir de intersecções dois a dois (6), três a três (4) e das quatro originais (1): *conhecimento didático do conteúdo* (CDC), *conhecimento pedagógico do conteúdo* (CPC), *conhecimento tecnológico do conteúdo* (CTC), *conhecimento didático tecnológico* (CDT), *conhecimento pedagógico tecnológico* (CPT), *conhecimento didático pedagógico* (CDP), *conhecimento didático pedagógico do conteúdo* (CDPC), *conhecimento didático tecnológico do conteúdo* (CDTC), *conhecimento didático pedagógico tecnológico* (CDPT), *conhecimento pedagógico tecnológico do conteúdo* (CPTC) e *conhecimento didático pedagógico tecnológico do conteúdo* (CDPTC). Na sequência, retomaremos as definições de CC, CP, CD e CT apresentadas em Lima et al. (2018) por estas serem as bases para a compreensão das interseções de tais conhecimentos. Para maiores detalhes a respeito dessas interseções sugerimos consultar Lima et al. (2018).

Os *conhecimentos de conteúdo* (CC), no caso do docente que leciona Matemática nas Engenharias, referem-se a conhecimentos a respeito de Geometria Analítica, Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Numérico, Probabilidade e Estatística, etc.

No caso dos *conhecimentos pedagógicos* (CP), estes se referem àqueles relacionados a aspectos globais dos processos de ensino e de aprendizagem, como gestão de sala de aula, à importância de se valorizar os conhecimentos prévios dos estudantes, questões relacionadas à cognição, diferentes métodos para avaliação da aprendizagem, dentre outros.

Em relação aos *conhecimentos didáticos*, no contexto específico da Engenharia e da MCC, estes são concebidos como os relacionados às teorias da Didática da Matemática, aos processos de ensino e de aprendizagem específicos dos conceitos matemáticos e, simultaneamente, a como ensinar Matemática, a partir da *Didática do Contexto* (que dá suporte ao MoDiMaCo), em determinada modalidade específica de Engenharia.

Finalmente, os *conhecimentos tecnológicos* estão ligados à adaptação do docente às tecnologias e às habilidades em empregá-las nos processos de ensino e de aprendizagem. Convém salientar que estamos considerando especificamente as tecnologias digitais de informação e comunicação. Passamos então, a seguir, a evidenciar os conhecimentos docentes que, em nossa visão, os professores que optam por conduzir suas aulas em acordo com o MoDiMaCo devem mobilizar na realização de cada uma das tarefas inerentes a tal Modelo.

Tarefas intrínsecas ao MoDiMaCo e conhecimentos docentes nelas requeridos

Atuar segundo o MoDiMaCo requer do professor a execução de uma série de tarefas, distribuídas em três momentos distintos: (i) a construção do evento contextualizado, (ii) o trabalho em sala de aula com o evento construído e (iii) o trabalho após a aplicação do evento. Para a realização dessas tarefas, como será evidenciado por meio dos Quadros 1, 2 e 3, não basta o docente conhecer apenas o conteúdo. Uma vez que está sendo pressuposta a atuação conforme um modelo didático específico, a mobilização de conhecimentos didáticos também é assumida como premissa.

Em relação ao momento de construção de um evento contextualizado, conforme pode ser observado por meio do Quadro 1, a maioria das tarefas requer a mobilização simultânea e articulada de diferentes categorias de conhecimentos docentes. Ao menos duas se fazem presentes: conhecimentos de conteúdo e didáticos. Das oito tarefas apresentadas neste quadro, quatro requerem a articulação de todas as categorias de conhecimentos anteriormente explicitadas. Uma (a tarefa VIII) pressupõe a mobilização de três categorias, mas pode também contemplar a quarta, uma vez que, a nosso ver, o professor deve, na medida do possível, levar em conta, no planejamento da avaliação, as potencialidades dos recursos tecnológicos para avaliar, de diferentes maneiras, aquilo que o estudante possa ter aprendido por meio do evento contextualizado trabalhado.

Quadro 1

Tarefas relacionadas à construção do evento contextualizado

Tarefa	**Conhecimento Requerido**
I. Identificar situações da Engenharia a partir das quais os eventos contextualizados possam ser construídos.	CDC
II. Analisar as situações identificadas para: verificar se nelas estão presentes os conteúdos matemáticos com os quais se deseja trabalhar; identificar se os estudantes possuem os conhecimentos prévios necessários para trabalhar com o evento a ser proposto e se tal situação realmente tem potencial para possibilitar que os graduandos estabeleçam uma vinculação entre os conhecimentos prévios e os emergentes.	CDPC
III. Estabelecer o papel do evento contextualizado que está sendo construído (diagnóstico, motivação, construção de conhecimentos, reforço de conhecimentos, avaliação, superação de obstáculos, etc.).	CDPC
IV. Iniciar a elaboração da *história do evento contextualizado* (descrição do evento, seu papel, conhecimentos matemáticos e do contexto presentes, conhecimentos prévios requeridos, possíveis maneiras de resolução do evento, obstáculos que os alunos poderão enfrentar, possíveis questões a serem colocadas pelos estudantes e as respostas, em forma de perguntas, que poderão ser dadas a eles).	CDPTC
V. Planejar instrumentos (que podem ser outros eventos com esse papel) para diagnosticar, reforçar e, se for o caso, construir, conhecimentos prévios em relação ao tema a ser trabalhado ou para identificar e então superar possíveis obstáculos que podem ser enfrentados pelos estudantes.	CDPTC
VI. Planejar possíveis atividades de aprendizagem a serem trabalhadas, se for o caso com o auxílio de ferramentas tecnológicas, caso o docente perceba que, durante a resolução do evento, os estudantes apresentam dúvidas e não conseguem mais avançar sem sua intervenção.	CDPTC
VII. Planejar as atividades de aprendizagem visando à descontextualização do conteúdo trabalhado (considerando que elas devem: (a) possibilitar aos estudantes transitarem entre representações em diferentes registros do conceito a ser construído; (b) considerar os distintos enfoques dos temas e conceitos matemáticos; (c) estabelecer analogias com conhecimentos que o estudante já possui e vinculações com conhecimentos prévios necessários para a construção do conceito que está sendo estudado; (d) auxiliar o estudante a superar obstáculos que porventura possui; (e) utilizar tecnologias digitais para reforçar ou mediar a aprendizagem).	CDPTC
VIII. Planejar como fará a avaliação das aprendizagens e construir as atividades ou instrumentos a serem utilizados com essa finalidade.	CDP(T)C

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de Camarena (2017) e Lima et al. (2018)

Em relação às tarefas a serem cumpridas pelo docente, durante o trabalho em sala de aula com um evento contextualizado, os conhecimentos demandados são explicitados no Quadro 2. Assim como na preparação dos eventos, requer-se do professor muito mais do que conhecimentos de conteúdo e didáticos (inerentes ao profissional que atua conforme o MoDiMaCo). Os conhecimentos pedagógicos atrelados aos didáticos se tornam fundamentais especialmente nas tarefas IX e X que exigem, respectivamente, a constituição de grupos de trabalho colaborativos a partir de critérios específicos e a clareza a respeito do que significa trabalhar de forma colaborativa. Das seis tarefas mencionadas no Quadro 2, três (XII, XIII e XIV) pressupõem a mobilização simultânea de pelos menos três diferentes categorias de conhecimento e em duas delas (XII e XIII) – aquelas referentes ao fechamento do trabalho com o evento – conhecimentos didáticos, pedagógicos, tecnológicos e de conteúdo devem ser articulados.

Quadro 2

Tarefas relacionadas ao trabalho, em sala de aula, com o evento planejado

Tarefa	**Conhecimento Requerido**
IX. Identificar, dentre os estudantes, os líderes emocionais, os intelectuais e os operativos para, em seguida, constituir as equipes colaborativas para o trabalho com o evento, compostas por três estudantes (um líder emocional, um intelectual e um operativo).	CDP
X. Explicar às equipes o que é esperado de cada uma delas e o que significa trabalhar de maneira colaborativa.	CDP
XI. Caso seja a primeira vez que os alunos estejam trabalhando eventos contextualizado, o docente deverá guiá-los a partir das etapas de resolução dos eventos (vide Camarena 2017). Por outro lado, se os estudantes já estão habituados aos eventos contextualizados, o professor deverá permitir aos estudantes que trabalhem de maneira mais autônoma ou, se for o caso, os auxiliar naquelas etapas em que já sabe que eles apresentam mais dificuldades.	CDC
XII. Analisar quando, se necessário, propor atividades complementares ao evento e de que maneira a utilização de tecnologias de informação e comunicação (TIC) pode auxiliar nesse processo e quais são as mais adequadas para esse fim.	CDPTC
XIII. Caso os estudantes não consigam concluir a resolução do evento conforme um cronograma preestabelecido pelo docente, este deverá avaliar se as equipes darão ou não continuidade a essa resolução nas próximas aulas ou em um fórum virtual de discussão.	CDPTC
XIV. Por sua vez, quando os estudantes concluem a resolução do evento, a tarefa do docente é, por meio de questionamentos, levá-los a refletir sobre suas aprendizagens, as formas como construíram suas resoluções, os erros cometidos, como estes foram superados e o que foi possível aprender com eles.	CDPC

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de Camarena (2017) e Lima et al. (2018)

Considerando o trabalho a ser realizado pelo professor após a aplicação do evento contextualizado, todas as tarefas a ele relacionadas exigem a mobilização simultânea e de forma articulada de pelo menos três categorias de conhecimentos, conforme evidencia o Quadro 3. Em algumas das tarefas apresentadas neste quadro (XVI e XVII), utilizamos a notação (T) para indicar que, embora não seja indispensável para sua realização, os conhecimentos tecnológicos podem também ser mobilizados. Convém salientar inclusive que, em nossa visão, levar em conta, sempre que possível, as potencialidades dos recursos tecnológicos para cada uma de suas ações no processo de ensino e de avaliação da aprendizagem deve ser uma preocupação do professor, em especial daqueles que lecionam em cursos de Engenharia.

Quadro 3

Tarefas relacionadas ao trabalho a ser realizado após a aplicação do evento contextualizado

Tarefa	**Conhecimento Requerido**
XV. Trabalhar com as atividades de aprendizagem, explicitadas em VII, visando à descontextualização do conteúdo matemático que está sendo abordado.	CDPC
XVI. Para a avaliação da aprendizagem, o professor deve construir um diário de bordo para cada uma das equipes e cada um dos estudantes. Não serão consideradas apenas as aprendizagens em termos de conteúdos matemáticos, mas também o desenvolvimento de habilidades e atitudes.	CDP(T)C
XVII. Retomar, complementar e, se necessário, alterar a história do evento, elencando outras formas de resolução porventura apresentadas pelos estudantes; os tempos efetivamente despendidos para resolvê-lo; os obstáculos enfrentados; os questionamentos mais frequentes por parte dos estudantes; as respostas, em forma de perguntas, que o docente deve apresentar frente às dúvidas dos alunos; e, se de fato, o evento cumpriu com seu papel, em que aspectos deve ser reformulado ou se, em função de seus resultados em sala de aula, deve ser descartado.	CDP(T)C

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de Camarena (2017) e Lima et al. (2018)

Considerações Finais

Nas pesquisas de caráter teórico-bibliográfico que estamos desenvolvendo, uma das vertentes exploradas é a que diz respeito à formação de professores e aos conhecimentos requeridos pelos docentes que ministram aulas de Matemática nas Engenharias em consonância ao MoDiMaCo ligado à MCC. Neste artigo nos propusemos a evidenciar aqueles conhecimentos necessários a esses professores na execução de tarefas relacionadas à construção de um evento contextualizado, ao trabalho com tal evento em sala de aula e ainda ao trabalho após a aplicação do evento e que, consequentemente, devem ser desenvolvidos durante as formações desses docentes.

A análise realizada nos permite concluir que, apenas conhecimento de conteúdo não basta. Além de conhecimentos relativos aos conceitos matemáticos que irão ensinar em sala de aula, as formações devem inicialmente oportunizar aos professores o desenvolvimento de um dos aspectos dos conhecimentos didáticos, a saber, aquele referente ao MoDiMaCo. Afinal, um profissional que atuará a partir dos preceitos de determinado modelo didático, em primeiro lugar, precisa conhecer profundamente tal modelo.

Mas, novamente, associações de conhecimentos acerca do conteúdo e do MoDiMaCo não são suficientes aos docentes que desejam conduzir suas aulas segundo este modelo. A maior parte das tarefas anteriormente mencionadas requer a mobilização desses conhecimentos, e também daqueles relativos a outros aspectos didáticos, pedagógicos e tecnológicos, sempre de maneira simultânea e articulada.

Concebemos que a formação docente em relação ao MoDiMaCo, de forma a contemplar também questões didáticas, pedagógicas e tecnológicas, pode ser realizada a partir de diferentes estratégias, como, por exemplo, a aprendizagem colaborativa. Devem ser valorizadas reflexões a respeito da importância de considerar os conhecimentos prévios dos estudantes, das diferentes teorias, tanto as mais gerais de aprendizagem quanto às da didática da Matemática, das potencialidades das ferramentas tecnológicas para o ensino e para a aprendizagem de conceitos matemáticos, das diferentes estratégias e modalidades de avaliação, de avaliações que levam em consideração não somente aprendizagem de conteúdos, mas também o desenvolvimento de habilidades e de atitudes. Em suma, assumindo que os conhecimentos de conteúdo já deveriam ter sido construídos pelos docentes em suas formações iniciais, devemos planejar formações continuadas que deem conta da construção simultânea e articulada de conhecimentos didáticos, pedagógicos e tecnológicos.

Consideramos relevante um apontamento específico em relação à utilização de tecnologias digitais nos processos de ensino e de aprendizagem. Além de concebermos que elas podem ser utilizadas também nos momentos de avaliação, em nossa visão, é importante empregar os recursos tecnológicos não somente para ilustrar aspectos relativos aos objetos matemáticos que estão sendo estudados, e nem muito menos para reproduzir, por exemplo, com a utilização de apresentações multimídias, o que tradicionalmente é feito com lousa e giz. Devemos, por meio das tecnologias, explorar os aspectos principais das noções que estão sendo trabalhadas, estabelecer conjecturas, pensar sobre a Matemática, construir conhecimentos com o auxílio desses recursos e dar condições para que os estudantes aprendam a incorporá-los em seu cotidiano na universidade e fora dela, especialmente no ambiente de trabalho.

Referências e bibliografia

Bianchini, B. L., Lima, G. L., Gomes, E. & Nomura, J. I. (2017). Competências matemáticas: perspectivas da SEFI e da MCC. *Educação Matemática Pesquisa*, 19 (1), 49-79. doi: 10.23925/1983-3156.2017v19i1p49-79

Camarena, P. G. (2008, novembro). Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias. *Actas del Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas*. Lima, Peru, III.

Camarena, P. G. (2013). A treita anõs de la teoria educativa “Matemática en el Contexto de las Ciencias”. *Inovación Educativa*, 13(62), 17-44. Recuperado em 20 setembro, 2018, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-26732013000200003

Camarena, P. G. (2017). Didáctica de la matemática en contexto. Educação Matemática Pesquisa, 19(2), 1-26. doi: 3156.2017v19i2p1-26

Gomes, E., Bianchini, B. L., Lima, G. L., & Nomura. J. I. (2017, julho). Competências a serem desenvolvidas pelos professores de Matemática dos cursos de Engenharia: primeiras reflexões. Anais do Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática (CIBEM). Madrid, Espanha, VIII.

Lima, G. L., Bianchini, B. L., & Gomes, E. (2018). Conhecimentos docentes e o Modelo Didático da Matemática em Contexto: reflexões iniciais. *Educação Matemática e Debate*, 2(4), 116-135. doi: https://doi.org/10.24116/emd25266136v2n42018a06

Silva, M. J. F.; & Lima, G. L. (2015). Conhecimentos desenvolvidos em um curso de licenciatura em Matemática na modalidade a distância. In P. R. Scott & Ángel Ruíz (Eds.). *Educación Matemática en las Amérias* (Vol. 2, 113-124). República Dominicana: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Habilidade de visualização: um comparativo por meio da resolução de tarefas, com foco na rotação

Raquel Polizeli **Corradi**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Brasil
raquelpolizeli@utfpr.edu.br
Valdeni Soliani **Franco**
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Brasil
vsfranco@uem.br
Vinícius Murilo **Fratucci**
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Brasil
murilofratucci@hotmail.com
Yesica Milena **Garzón** Pacheco
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Brasil
yesicamilenagarzonpacheco@gmail.com

Resumo

Nesse artigo busca-se identificar, por meio da resolução de tarefa, a mobilização da habilidade de visualização rotação mental, observando se há diferenças entre as unidades de análise estudadas. É um trabalho de cunho qualitativo, pautado no paradigma interpretativo, que segue a modalidade estudo de casos múltiplos, cujas unidades de análise são um grupo formado por acadêmicos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade do norte do Paraná e outro com integrantes que já cursaram as disciplinas de geometria do curso. A análise dos dados segue os pressupostos da Análise de Conteúdo. Concluiu-se haver uma diferença significativa entre os grupos. Aqueles que já cursaram as disciplinas de Geometria tiveram um melhor desempenho se comparado aos ingressantes. Isso leva-nos a inferir, nesse caso, que cursar as disciplinas de Geometria pode ter contribuído para compreensão de conceitos de Geometria envolvidos na tarefa e o desenvolvimento da habilidade de visualização pesquisada.

Palavras chave: educação matemática, ensino de geometria, habilidades de visualização, raciocínio espacial, superfície de rotação.

Habilidades de Visualização: uma introdução

Essa pesquisa é parte dos estudos desenvolvidos no grupo de pesquisa Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG, em que um dos assuntos de interesse no momento é a visualização em Geometria. Pesquisas ligadas à educação matemática têm enfatizado a importância da visualização e do raciocínio visual para o ensino e a aprendizagem matemática, em particular da Geometria, como é retratado pelos autores Flores et al (2012, p. 33). Também para Santos (2014) a visualização pode dar concretude na aquisição do conhecimento matemático por meio da analogia, pois o pensamento é capaz de construir por meio dela diferentes interpretações de um conceito matemático.

A leitura, inicialmente de Presmeg (1986, 2006) e Godino (2011) aguçaram a curiosidade sobre o assunto no grupo, que vem estudando outros autores como Gutiérrez (1992, 1992 b,1996), Fernández (2011,2014), Kawamoto (2016), entre outros.

Gutiérrez (1996) redefine e amplia o conceito de visualização em matemática, considera-a como um tipo de atividade do raciocínio, capaz de integrar quatro elementos principais que são as imagens mentais, as representações externas, os processos de visualização e as habilidades de visualização. Ele considera imagens visuais (físicas ou mentais) como objetos que são criados, usados e transformados na atividade de visualização espacial. Afirma que dependendo das características do problema de matemática a ser resolvido e das imagens criadas, os alunos devem poder escolher entre várias habilidades visuais (HV). As principais habilidades listadas pelo autor são:

- "Percepção figura-fundo" ou Percepção de figura e contexto (PFC): a capacidade de identificar uma figura específica isolando-o de um fundo complexo.
- "Constância perceptiva" (CP): a capacidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou em uma imagem mental) são independentes de tamanho, cor, textura ou posição, e permanecer inconfundível quando um objeto ou imagem é percebido em diferentes orientações.
- "Rotação mental" (RM): capacidade de produzir imagens mentais dinâmicas e de visualizar uma configuração em movimento.
- "Percepção de posições espaciais" (PPE): A capacidade de relacionar um objeto, imagem ou imagem mental para si mesmo.
- "Percepção de relações espaciais" (PRE): a capacidade de relacionar vários objetos, imagens, e/ou imagens mentais para o outro, ou simultaneamente para si mesmo.
- "Discriminação visual" (DV): a capacidade de comparar vários objetos, imagens, e/ou imagens mentais para identificar semelhanças e diferenças entre eles.

Fernández (2011, 2014), pauta-se também nos estudos de Gutiérrez e centra-se no estudo da visualização e no raciocínio espacial em futuros professores, graduandos em licenciatura da Universidade de Santiago de Compostela (Espanha). Já Kawamoto (2016), em seu estudo, teve por objetivo verificar se alunos de 3ª série do Ensino Médio mostram ter desenvolvido habilidades de visualização em Geometria Espacial e se, quando questionados ou não, preocupam-se em justificar o raciocínio feito. Por não encontrar outras pesquisas realizadas com foco no ensino superior no Brasil, essas leituras levaram aos questionamentos: Como estão os alunos, ingressantes e egressos do curso de Matemática, em relação às habilidades de visualização em Geometria? Há indícios de diferenças na mobilização de habilidades de visualização na resolução de tarefas de geometria, entre os ingressantes em um curso de formação inicial em Matemática e aqueles que já fizeram as disciplinas de geometria desse curso?

Desta forma o objetivo deste artigo é, por meio da resolução de uma tarefa, identificar a mobilização de habilidades de visualização, em particular a rotação, na resolução da tarefa proposta, observando a existência ou não de diferenças entre os dois casos que serão estudados, em que os participantes estão ou estiveram ligados a uma determinada universidade ao norte do estado do Paraná.

Desenvolvimento da pesquisa

Esta é uma pesquisa qualitativa, que segue o paradigma interpretativo, realizada na modalidade estudo de casos múltiplos. Como procedimento de coleta de informações aplicou-se uma tarefa baseada em questões presentes nos trabalhos de Kawamoto (2016) e Fernández (2011).

Uma das unidades de análise deste estudo de casos é constituído por 27 acadêmicos de uma das três turmas do curso de Matemática de uma Universidade ao norte do Paraná, que ingressaram no ano de 2018 (estes participantes estão denotados por I1, I2, ..., I27) e a outra é constituída por 15 acadêmicos que estão nos anos finais do curso e que já terminaram as disciplinas de Geometrias, bem como egressos que terminaram o curso de Matemática, referido acima, no ano de 2017 (estes participantes estão denotados por J1, J2, ..., J15).

O uso do estudo de casos justifica-se por, como Yin (2005, p. 32), entendermos que "o estudo de caso é uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real". E que o propósito de um estudo de caso é reunir informações detalhadas e sistemáticas sobre um fenômeno (PATTON, 2002). Seguindo as especificações de Yin (2005) viu-se pelo objetivo dessa pesquisa que essa se encaixa nos preceitos do estudo de casos múltiplos, visto que nossa motivação é identificar as habilidades visuais dos acadêmicos ingressantes e daqueles que já cursaram as disciplinas de geometria da grade de Matemática, como eles as utilizam nas justificativas das resoluções das tarefas, comparando os dois grupos.

Os dados foram obtidos por meio da aplicação de uma tarefa e categorizados segundo a Análise de Conteúdos, por entendermos do mesmo modo como Câmara (2013), que segundo a perspectiva de Bardin, essa é uma técnica metodológica aplicável em discursos diversos e a todas as formas de comunicação, seja qual for à natureza do seu suporte. Nele o analista precisa entender o sentido da comunicação, como se fosse o receptor normal, porém, e principalmente, precisa desviar o olhar, buscando outra significação, outra mensagem, passível de se enxergar por meio ou ao lado da primeira. Essa metodologia, segundo Bardin (2011), é composta por três fases básicas a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados. Sendo a primeira fase a etapa de organização, a segunda é marcada pela escolha das unidades de codificação, adotando-se os procedimentos de codificação, classificação e categorização, por fim, a terceira fase do processo, é a fase analítica, envolve o tratamento dos resultados, englobando a inferência e interpretação.

E que há muitas variações na maneira de conduzir as três fases da análise propostas por Bardin e que a forma de tratar as unidades também se diferencia, alguns procuram desenvolver a análise da estrutura lógica do texto ou de suas partes, e outros, ainda, centram sua atenção em temáticas determinadas.

A seguir apresentaremos a tarefa considerada para obtenção dos dados, seguida das análises e resultados obtidos.

Resultados

A seguinte tarefa foi aplicada nessa investigação:

Desenhe, aproximadamente, quais corpos obteremos girando as seguintes figuras em relação aos eixos indicados.

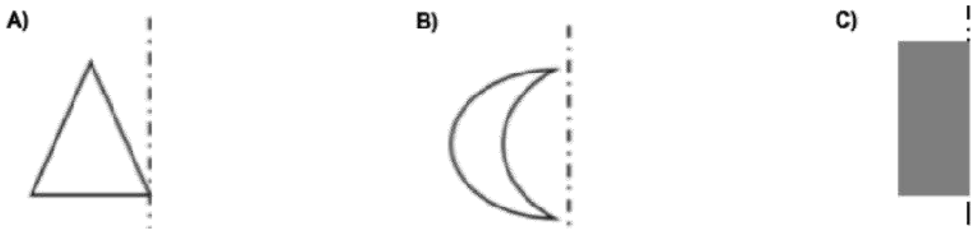


Figura 01: Imagens da tarefa aplicada.
Fonte: Os autores.

A seguir estão os objetivos estabelecidos visando nortear a categorização para análise.

Objetivos:

1. Categorizar as resoluções nas possíveis configurações cognitivas:
a. Compreendeu que era uma superfície e acertou:
i. as três superfícies, ou
ii. duas, ou apenas
iii. uma superfície;
b. Não compreendeu que era uma superfície e fez:
i. reflexão (considerando o eixo de rotação como eixo de simetria), ou
ii. rotação no plano (desconsiderando o eixo de rotação dado), ou
iii. não fez nem rotação nem reflexão.
2. Verificar se os participantes mobilizam habilidades de visualização (HV), em especial a rotação mental (RM): se por meio da representação figural ou descrição em língua natural, dá indícios que produz imagens mentais dinâmicas e se é capaz de visualizar uma configuração em movimento.

Nas tabelas 1 e 2 a seguir, apresenta-se uma categorização pautada nos objetivos 1 e 2 (O1 e O2) em que estão sinalizados com X os itens os quais concluiu-se terem sido alcançados pelos participantes. Entende-se também que marcado X no objetivo O-a-iii, o participante mobiliza a HV de RM, ou seja, alcançou o O2. No caso de terem sido marcados O-a-i ou O-a-ii entende-se que há indícios de mobilização da RM. Sendo a Turma J, o grupo composto pelos participantes que já cursaram as disciplinas de geometria e a Turma I os alunos ingressantes.

Tabela 1

Dados da análise da Tarefa – Turma J

	O1-a			O1-b			
Sujeitos	a-i	a-ii	a-iii	b-i	b-ii	b-iii	OBS

J1			X		Faz o desenho fora da reta suporte no item B. Apresenta RM.
J2				X	
J3				X	
J4			X		Apresenta RM.
J5		X			Faz o desenho fora da reta suporte no item B. Erra o desenho no item A. Há indícios de RM.
J6		X			Faz o desenho fora da reta suporte no item B. Escreve para especificar detalhes da superfície. Há indícios de RM.
J7			X		Faz o desenho fora da reta suporte no item B. Apresenta RM.
J8	X				Erra o desenho nos itens A e B. Há indícios de RM.
J9			X		Faz o desenho fora da reta suporte no item B. Erra o desenho nos itens A e B. Apresenta RM
J10		X			Não faz a superfície B corretamente, falta a circunferência que daria o efeito tridimensional, mas em A e C há indícios de RM.
J11			X		Apresenta RM. Será mostrado a seguir como pensou J11.
J12			X		Faz o desenho fora da reta suporte no item B. Escreve para especificar detalhes da superfície. Apresenta RM.
J13			X		Apresenta RM.
J14		X			Faz o desenho fora da reta suporte no item B. Erra o desenho no item A. Há indícios de RM.
J15			X		Faz o desenho fora da reta suporte no item B. Apresenta RM.

Fonte: os autores. 2018.

Pode-se observar na tabela 1 que aproximadamente 87% dos participantes da turma J conseguiram visualizar a superfície de revolução em pelo menos um dos 3 itens da tarefa, ou seja mobilizaram a RM. Desses 53% responderam o esperado na tarefa e apenas 13%, aproximadamente, não identificaram a resposta como superfície e entenderam o eixo de rotação como um eixo de simetria, apresentando como resposta uma figura plana simétrica à inicial.

Um exemplo de solução desta turma, está na figura a seguir.

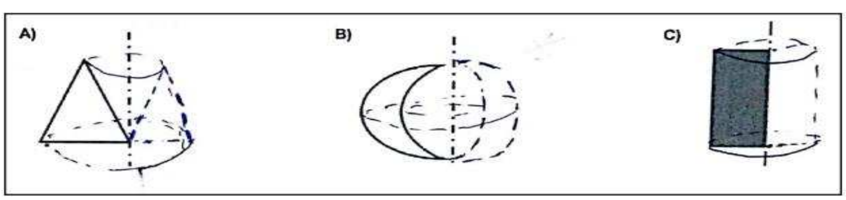


Figura 02: Exemplo de resposta do participante J11, da turma J, que apresenta RM.
Fonte: autores. 2018.

Tabela 2

Dados da análise da Tarefa – Turma I

Sujeito	O1-a			O1-b			OBS
	a-i	a-ii	a-iii	b-i	b-ii	b-iii	
I1	X						Porém desenha e apaga as figuras simétricas nos itens A e B. Há indícios de RM
I2				X			
I3		X					Porém não desenha, mas descreve verbalmente a superfície. Há indícios de RM
I4				X			
I5					X		Faz rotação similar a simetria central, em relação ao ponto “sul” da figura em relação ao eixo de rotação e translada as figuras.
I6				X			
I7					X		Aplica giro de 180º em torno do eixo, e um giro de 90º no plano.
I8				X			
I9				X			
I10				X			
I11						X	Será descrito a construção de I11 na sequência.
I12			X				Porém não desenha, mas descreve verbalmente a superfície. Apresenta RM.
I13				X			
I14				X			
I15				X			
I16					X		Aplica um giro de 90º no plano, com centro de rotação bem definido.
I17				X			Faz reflexão nos 3 itens, porém no item A faz como uma representação plana frontal.
I18						X	
I19					X		Faz rotação de 180º, com centro de rotação bem definido.
I20					X		Em B e C, faz rotação de 90º, com centro de rotação bem definido. Em A faz uma rotação de 180º e uma translação.
I21				X			
I22				X			
I23				X			
I24				X			Considera o simétrico nos itens B e C. Em A temos b-iii.
I25			X				Não desenha, mas descreve verbalmente a superfície. No item A, desenha a vista superior. Apresenta RM.
I26				X			
I27			X				Apresenta RM

Fonte: os autores. 2018.

Na tabela 2, pode-se observar que aproximadamente 81% dos participantes da turma I não identificaram a resposta como superfície, desses aproximadamente 55% entenderam o eixo de rotação como um eixo de simetria, 18% fizeram uma rotação no plano e cerca de 7% não fez rotação ou reflexão. Apenas cerca de 11% responderam o esperado, 4% conseguiram apresentar a superfície em 2 itens e outros 4% apresentaram a superfície em um dos itens. Vale destacar que I11, utilizando uma descrição por meio da língua natural, mostra que entende o que significa rotação em torno de um eixo, mas não vê a construção de uma superfície tridimensional, mas sim visualiza o movimento da superfície plana com um único ponto de vista, descrevendo cada momento o que acontece, por exemplo, dizendo que "quanto mais próximo de 90º, a figura se aproxima de uma 'reta'". Fica claro que este participante quer dizer que quando a figura plana faz uma rotação de 90º, parecerá para ele (como um observador em um ponto de vista fixo) um segmento de reta, descrevendo assim, o que ele verá em cada momento. Isto indica que ele mobiliza a RM, porém não compreende o que significa a superfície. Desse modo, considerando I11, há indícios de que cerca de 23% dos integrantes da turma I mobilizaram a RM.

A figura a seguir destaca a resposta de I11.

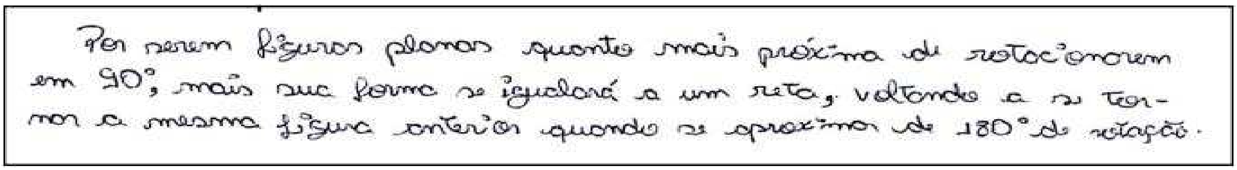

Por serem figuras planas quanto mais próxima de rotacionarem em 90°, mais sua forma se igualará a um reta, voltando a se tor-nar a mesma figura anterior quando se aproximar de 180° de rotação.

Figura 03: Exemplo de resposta de um participante da turma I.
Nota: Apesar da resposta não ser a desejada, este participante mostra RM. Fonte: autores.2018.

Discussões

Pela análise realizada infere-se que a maior parte dos integrantes da turma J mobiliza a habilidade de visualização de rotação mental, sendo apenas cerca de 13% aqueles que não apresentam indícios de mobilização desta. Nota-se que esses participantes apresentam uma boa compreensão dos conceitos de Geometria envolvidos na tarefa. No caso dos participantes da turma I, pode-se inferir que 81% não demonstram a mobilização da RM, e apenas 23% aproximadamente aparentam fazer a mobilização. Acredita-se que podem haver falhas na compreensão dos conceitos de Geometria envolvidos na tarefa. Conclui-se, considerando a turma I de ingressantes e a turma J daqueles que já terminaram as disciplinas de Geometrias, que nesse caso há uma diferença significativa entre ambos. Os integrantes da turma J tiveram um melhor desempenho se comparado ao da turma I, o que leva a inferir que o fato de já haver cursado as disciplinas de Geometria do curso de Matemática contribuiu para uma melhor compreensão de conceitos de Geometria e também, pode ter contribuído para o desenvolvimento da habilidade de visualização de rotação mental.

Considerações Finais

Infere-se com esse estudo, que para as unidades de análise investigadas aqui, há uma diferença significativa entre o grupo dos ingressantes e o daqueles que já cursaram as disciplinas de Geometria do curso de Matemática. Os que já cursaram as disciplinas de Geometria, nesse estudo, tiveram um melhor desempenho se comparado ao grupo dos ingressantes, o que leva a crer que o fato de já haverem cursado as disciplinas de Geometria pode ter contribuído para uma melhor compreensão de conceitos de Geometria envolvidos na tarefa e para o desenvolvimento da habilidade de visualização de rotação mental.

A análise do desempenho da turma I nos leva também a refletir se a falta de conhecimento teórico de Geometria requerido na tarefa prejudica nas resoluções, e até mesmo na mobilização e no desenvolvimento das habilidades de visualização.

Pretende-se dar continuidade a essa pesquisa buscando aprimorar os instrumentos de coleta de dados e de análise, com um grupo menor de colaboradores. Pretende-se elaborar mais tarefas direcionadas a analisar a mobilização de outras habilidades de visualização, não só a rotação mental, visando uma maior precisão na verificação de quais habilidades são mobilizadas pelos ingressantes e pelos pesquisados que já cursaram as disciplinas de Geometria do curso de Matemática.

Referências e bibliografia

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo.* São Paulo: Edições 70.

Câmara, R. H. (2013). Análise de conteúdo: da teoria à prática em pesquisas sociais aplicadas às organizações. *Gerais: Revista Interinstitucional de Psicologia*, 179-191.

Fernández, M. T. (2011). Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial. 465 f. Santiago de Compostela, Espanha: Universidad de Santiago de Compostela.

Fernández, M. T. (2014). Atendiendo habilidades de visualización en la Enseñanza de la geometría. *IX Festival Internacional de Matemática* (pp. 21-33). Quepos, Punteranas, Costa Rica: Universidad de Santiago de Compostela. Acesso em 13 de 03 de 2018, disponível em http://revistas.tec.ac.cr/index.php/memorias/article/view/2505/2293

Flores, C. R., Wagner, D. R., & Burato, I. C. (2012). Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. *Educ. Matem. Pesq, 14*, 31-45.

Godino, J. D., Gonzato, M., & Blanco, M. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77,* 99-117.

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A., & yFernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 2,* 109-130.

Grande, J. D. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 14-20.

Gutiérres, A., Guillén, G., Cárceres, M., & Jaime, A. (1992). *La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B.* Valencia, Espanha: Institución Valenciana de Estudios e Investigación “Alfonso el Magnánimo”.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-19). Valencia: Universidad de Valencia.

Kawamoto, M. (2016). Habilidades de visualização em Geometria espacial: um diagnóstico com alunos de 3º ano do Ensino Médio. 180. São Paulo.

Patton, M. G. (2002). *Qualitative Research and Evaluation Methods* (3 ed.). CA: Sage: Thousand Oaks.

Presmeg, N. C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics 6*, 42-46.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. *Emergency from psychology*.

Santos, A. H. (2014). Um Estudo Epistemológico da Visualização Matemática: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização. 97 f. Curitiba, Paraná, Brasil:

Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática) Universidade Federal do Paraná.

Yin, R. K. (2005). *Estudo de caso: planejamento e métodos* (3 ed.). Porto Alegre: Bookman.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

A experiência do Cálculo no universo das histórias em quadrinhos

Tatiane da Silva Evangelista
Universidade de Brasília
Brasil
tatilista@gmail.com

Resumo

O presente trabalho apresenta histórias em quadrinhos (ou tirinhas) cujo enredo abordam contéudos de Cálculo. Essas tirinhas foram idealizadas com o objetivo de melhorar o aprendizado de graduandos na disciplina de Cálculo de várias variáveis, de identificar e de analisar as ações dos estudantes no seu uso. A fim de fomentar a confecção das tirinhas, serão apresentados aspectos das histórias em quadrinhos e da aprendizagem significativa. Por fim, um questionário foi realizado, com os alunos, a fim de coletar informações quanto à metodologia implementada e podendo-se concluir que, o universo das tirinhas, no ensino de Cálculo, tornou o estudo mais significativo, descontraído e eficaz.

Palavras chaves: educação superior, Cálculo, HQ, ensino e aprendizagem.

Introdução

O elevado índice de reprovação, nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, constitui uma dura realidade que incomoda os docentes e os discentes dos cursos de exatas das principais universidades. Estudos que procuram as causas deste problema foram realizados, destacando-se o trabalho de Mello (2001), o qual aponta os seguintes motivos: a crença dos alunos e professores de que a reprovação e fracasso são normais nessa disciplina, a escassez dos conhecimentos prévios que deveriam ter sido adquiridos pelos estudantes nos níveis de ensino anteriores, a falta de interesse e motivação por parte dos alunos, a falta de uma boa formação dos profesores, a grande quantidade de novos conceitos trazidos pela disciplina e a escassez de metodologias de ensino alternativas.

Diante da situação estabelecida, faz-se necessário uma reflexão a respeito dessas dificuldades notadas e um redirecionamento do trabalho para que se possa dar um suporte maior aos estudantes e tentar sanar essa problemática. Nesse bojo, as universidades têm adotado algumas iniciativas, sendo as principais: implantação de disciplinas preparatórias (por exemplo, Pré-Cálculo) e implantação de monitorias.

Atualmente, a utilização de atividades lúdicas vem conquistando espaço no ensino superior. Assim, o objetivo desse artigo é relatar uma experiência lúdica que usa das histórias em quadrinhos (HQ),como recurso didático para o ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de várias variáveis para os cursos de Engenharias da Universidade de Brasília (UnB), campus Gama (FGA- Faculdade do Gama).

Inicialmente, faremos um breve referencial teórico do conceito de HQ e aprendizagem significativa. Em seguida, relatamos as características dos alunos envolvidos no curso de Engenharia, em que o trabalho foi desenvolvido, e o relato da experiência. Por fim, mostraremos os resultados obtidos e as conclusões.

Referencial teórico: histórias em quadrinhos e aprendizagem significativa

Nesta seção, apresenta-se duas linhas de pesquisa que fornecem sustentabilidade teórica ao trabalho: as histórias em quadrinhos e a aprendizagem significativa.

Sob um ponto de vista mais geral, uma HQ ou quadrinhos ou tirinhas são narrativas feitas com desenhos sequenciais, em geral no sentido horizontal, com textos curtos de diálogo (balões) e algumas descrições da situação. Os aspectos essenciais de uma HQ são: balões, onomatópeia, diagramação, recordatórios e calha ou sarjeta.

O uso das HQ no ensino já é reconhecido pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) (BRASIL, 1996) e pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 2002). Segundo Vergueiro (2004) existem vários motivos para que as HQ's possam auxiliar no ensino, tais como: as palavras e as imagens, juntas, ensinam de forma mais eficiente; os quadrinhos auxiliam no desenvolvimento do hábito de leitura; a linguagem quadrinhística obriga o leitor a pensar e imaginar; os quadrinhos podem ser utilizados em qualquer nível escolar e com qualquer tema, etc. Na literatura encontra-se vários trabalhos usando as HQ no ensino fundamental e médio, mas a nível universitário são poucos.

Nesse sentido, destacamos os trabalhos de Oliveira (2010) e Felix (2016) que relatam experiências em sala de aula para acadêmicos. Ambos propõem a produção de HQ pelos alunos. Destaca-se que no trabalho de Felix (2016), além de propor a confecção de HQ, usando as habilidades de desenho dos alunos, também eram apresentados alguns recursos tecnológicos que facilitam a criação, oportunizando fazer associações com conteúdos matemáticos e com a resolução de problemas. O objetivo principal era a produção de HQ para a resolução de problemas matemáticos relacionados com situações cotidianas dos estudantes.

Nessa perspectiva, as HQ's desse artigo, que serão apresentadas nas próximas seções, trata-se de tirinhas (HQ menores com três quadrinhos) humorísticas que propuseram aos estudantes a identificar, a analisar e a usar o conteúdo matemática no enredo da tirinha para em seguida, usar para a resolução de problemas matemáticos, fato este que reforça o esboço de considerações sobre aprendizagem significativa.

Dentre as diversas definições de aprendizagem significativa, destaca-se aquela apresentada por Ausubel (2002), o qual afirma que a aprendizagem significativa é o processo que se caracteriza pela associação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, e que essa interação é não-literal e não-arbitrária. Nesse procedimento, os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva.

Caso essa junção não seja efetivada, ocorrerá uma aprendizagem mecânica, apoiada em tarefas constituídas de associações puramente arbitrárias, que exigem do aluno a reprodução do conceito que lhe foi "transmitido", sem que este faça associações a conhecimentos previamente adquiridos. Novamente segundo Ausubel (2002), as condições para que haja a aprendizagem significativa são: o material e aprendizagem devem apresentar significado lógico e disponibilidade de conteúdo de significado psicológico. Nessa perspectiva, as tirinhas podem, assim, favorecer a passagem do lógico ao psicológico, tornando-se uma das justificativas da elaboração de nossa proposta. Entendemos, dessa forma, que as HQ's em sala de aula devem dar ênfase a situações problemáticas que favoreçam a apreensão de novos conceitos, acentuando a lógica dos conteúdos, identificando também suas relações com outras disciplinas e com outras noções matemáticas que estejam relacionadas de alguma forma aos assuntos em estudos. A interpretação e a compreensão de ideias matemáticas, a nosso ver, podem ser facilitadas quando ao invés de as apresentarmos como verdade perfeita e acabada, destacarmos as ideias que possam levar os discentes a construírem relações necessárias à apreensão dos conceitos em estudo. Sendo assim, acreditamos que o envolvimento dos alunos em atividades estruturadas como aquelas baseadas nas tirinhas possibilitem a exploração e a descoberta em um processo de investigação que contribua para que os estudantes façam conexões entre informações novas e antigas. Tendo em vista a estruturação teórica organizada até este ponto, na próxima seção será relatado a experiência do uso das tirinhas na disciplina de Cálculo.

Característica dos discentes da disciplina de Cálculo da FGA

A experiência foi desenvolvida na Faculdade do Gama (FGA), que é uma extensão da Universidade de Brasília (UnB) na região administrativa do Gama da capital federal. Abriga cinco cursos da área de engenharia: aeroespacial, automotiva, eletrônica, energia e software.

A FGA faz parte do projeto de expansão das universidades federais, o Reuni. Entrou em funcionamento no segundo semestre de 2008. O ingresso dos alunos se dá por três formas:

a) Vestibular: Normalmente o edital de abertura inscrição é lançado em abril e a prova é em junho. Para quem passa no vestibular, as aulas iniciam-se no 2º semestre do ano. São 280 vagas.

b) PAS (Programa de Avaliação Seriada): O PAS ocorre em três etapas, sendo que a primeira prova é feita durante o primeiro ano do ensino médio, a segunda avaliação durante o segundo ano do ensino médio e a terceira prova durante o terceiro ano do ensino médio. Quem passa começa as aulas no 1º semestre do ano. São 140 vagas.

c) SiSU (Sistema de Seleção Unificado): Através da nota do ENEM, o candidato concorre a 140 vagas para os cursos da FGA e quem passa na prova começa as aulas no 1º semestre do ano.

Em geral, todo semestre ingressam-se 280 alunos. Cada turma de Cálculo da FGA é composta em média por 120 alunos. Esses alunos ingressam no primeiro ano do curso com muita dificuldade em conceitos básicos da Matemática Elementar.

Vale a pena destacar, que o uso dessa metodologia foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Faculdade de Saúde da UnB, sob o protocolo CAEE 72644517.7.0000.0030.

Relato da experiência

A ideia das HQ's surgiu a partir da insatisfação da autora do desempenho dos estudantes na disciplina de Cálculo 3, quando lecionava no segundo semestre 2016, cujo conteúdo aborda conceitos de Cálculo Diferencial e Integral para várias variávies. Na tabela abaixo, consta o desempenho de aprovação, reprovação e trancamento na disciplina no ano mencionado. O índice de trancamento de 30% foi um alerta à professora, pois ficou bem claro que os alunos estavam desestimulados com a disciplina ministrada de forma tradicional – professor no quadro com aulas expositivas, de exercícios e avaliações presenciais.

Tabela 1

Estatística do desempenho dos alunos da FGA na disciplina Cálculo 3 – 2 º/2016- antes do uso HQ

Alunos	Aprovação	Reprovação	Trancamento
119	58%	12%	30%

Fonte: arquivo da autora. 2016.

No primeiro semestre de 2017, iniciou-se o uso de HQ's na disciplina de Cálculo 3 lecionado pela autora. A abordagem das HQ's foi organizada em quatro etapas.

Na primeira etapa, oferecemos a grupo de quatro a cinco graduandos tirinhas confeccionadas pela própria docente, em média eram quatro tirinhas. Essas tirinhas abordavam um único tema do conteúdo de Cálculo abordadas de maneiras distintas (algumas com contextos teóricos e outras com aplicações práticas). Para cada uma das HQ's, os graduandos resolviam as questões em grupos. Nesse momento inicial, procuramos situar essa ferramenta didática como complemento às aulas na resolução de exercícios e fixação da teoria. Depois de feita as atividades, a docente discutia com a turma todas as tirinhas.

Na segunda etapa, que ocorreu de forma não presencial, foi proposto aos alunos a construção de HQ's de próprio punho. Nessa atividade não presencial, os graduandos escolhiam o tema para a elaboração das tirinhas e fizeram essa atividade em grupo de quatro a cinco estudantes. Foi agendado um dia para que os alunos entregassem essa atividade por escrito.

Na terceira etapa, em sala de aula, foram analisadas as tirinhas feitas pelos alunos. Em grupos, os discentes exploravam as tirinhas de cada grupo da turma. Nessa etapa, foram exploradas tirinhas abordando conteúdos distintos. No final, a docente discutia todas as HQ's com a turma.

Na quarta etapa, foi aplicado um questionário, composto de quatro questões para avaliar a percepção dos alunos na utilização das HQ's na disciplina de Cálculo, nos cursos de engenharia da FGA. Esta pesquisa apresentou questões onde os alunos responderam o quanto concordavam com as afirmativas, através de uma escala Likert (Rensis Likert, psicólogo americano que concebeu em 1932 uma metodologia para mensurar a atitude dos seus pacientes e hoje isto é utilizado em metodologias científicas pesquisa).

Participaram dessas atividades 341 alunos dentre os semetres 1º/2017, 2º/2017 e 1º/2018. Enfatiza-se que o objetivo essencial deste trabalho é a apresentação dos relatos das experiências didáticas utilizando as HQ's no processo ensino e aprendizagem de Cálculo. Sendo assim, outro estudo sobre uma análise estatística, tanto descritiva como inferencial, ficará como perspectiva.

A seguir, apresentamos duas tirinhas desenvolvidas nesse trabalho com temas distintos.

Tema 1: Teorema da Mudança de Variável em coordenadas polares

Figura 1. Tirinha: o triângulo amoroso.

Tema 2: Derivadas parciais de 1ª ordem

Figura 2. Tirinha: o quadrado.

Os discentes se divertiram muito com as tirinhas apresentadas acima. A primeira tirinha, aborda o uso do Teorema da Mudança de Variável em coordenadas polares para o cálculo de integral dupla. A maioria dos alunos concluiram que o pivô da triangulação amorosa (o jacobiano) é fundamental para a resolução de exercícios que usa esse teorema como suporte teórico. Foi uma atividade relevante, pois os alunos sempre esqueciam de determinar o jacobiano na solução de problema e depois, dessa tirinha nunca mais esqueceram. A segunda tirinha, reforça a definição de derivadas parciais de 1ª ordem. É interessante relatar, que nessa tirinha o teor humorística motivou aos discentes a clareza da formalidade desse conceito tão importante no cálculo de derivadas de varias variáveis.

Em ambas tirinhas, os estudantes conseguiram identificar, analisar e usar os conteúdos matemáticos abordados de maneira clara, divertida, eficiente e significativa.

Resultados da pesquisa

Com a finalidade de coletar informações quanto ao uso do universo das tirinhas no ensino de Cálculo os estudantes que participaram dessa atividade, por semestre 100 alunos, responderam um breve questionário (voluntariamente) que abordava as seguintes questões:

a) Questão 1: O uso de HQ é adequada para o desenvolvimento do conteúdo da disciplina.

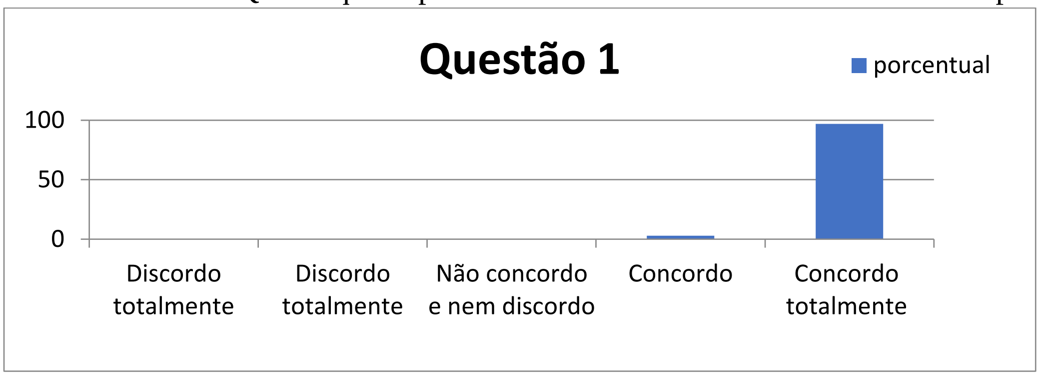


Figura 3. Demonstrativo gráfico das respostas da questão 1.

b) Questão 2: A metodologia aplicada na disciplina de Cálculo 3 contribui de forma significativa para sua formação acadêmica geral.

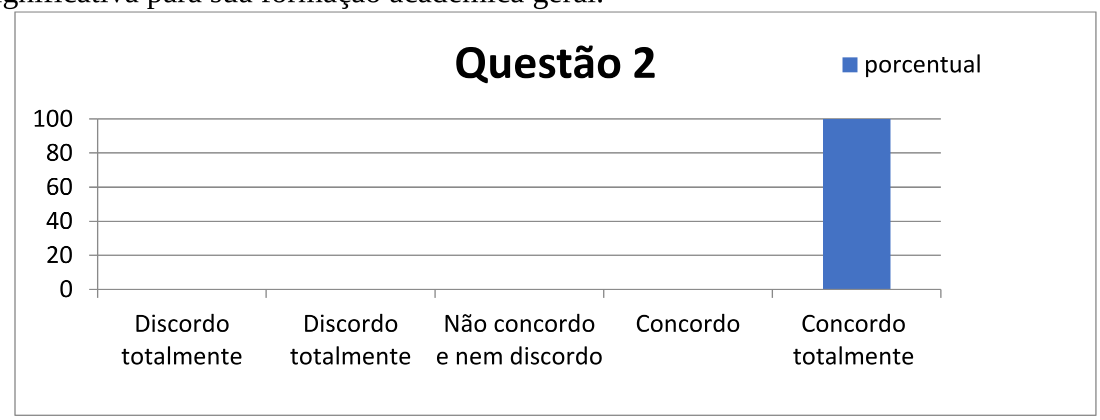


Figura 4. Demonstrativo gráfico das respostas da questão 2.

c) Questão 3: A utilização dessa metodologia estimulou o comprometimento com a disciplina como assiduidade e atenção às dúvidas.

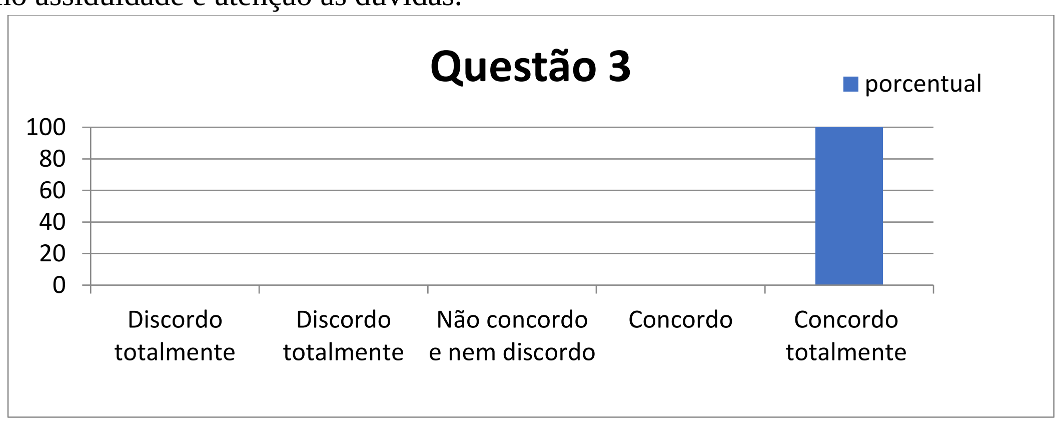


Figura 5. Demonstrativo gráfico das respostas da questão 3.

d) Questão 4: O uso de HQ deveria ser usada em outras disciplinas.

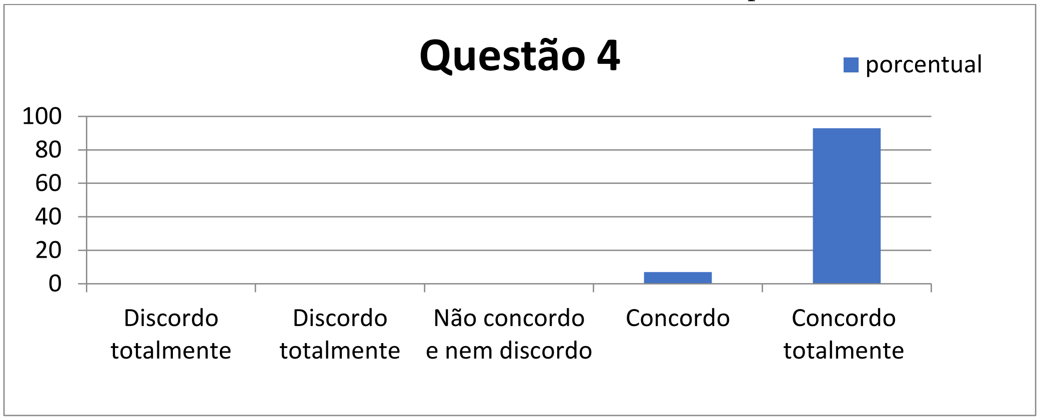


Figura 5. Demonstrativo gráfico das respostas da questão 4.

A análise dos dados consolidados da pesquisa nos permite concluir que com relação ao objeto principal da pesquisa, o uso de HQ's na disciplina de Cálculo, melhorou o índice de aprovação dos alunos e também, a frequência dos alunos aumentou em sala de aula, o que nos possibilita concluir que houve um interesse maior na participação destes, o que possivelmente refletiu uma melhoria nos resultados obtidos em termos de aprovação na disciplina, após a implantação do uso das HQ's, como pode-se ver na Tabela 2 comparada com a Tabela 1.

Tabela 2

Estatística do desempenho dos alunos da FGA na disciplina Cálculo 3 – após o uso das HQ's

Semestre	Alunos	Aprovação	Reprovação	Trancamento
1º/2017	128	61%	34%	5%
2º/2017	123	70%	27%	3%
1º/2018	90	83%	14%	3%

Fonte: arquivo da autora. 2017 e 2018.

Quanto à avaliação da percepção dos alunos, na aplicação dessa metodologia, os resultados da pesquisa mostram que o uso das HQ's, obteve uma avaliação muito positiva. Os resultados demostraram que além da questão objetiva de melhoria nas aprovações, em ambas as disciplinas, a motivação para as aulas e a aceitação à metodologia ficaram refletidas nas respostas de "Concordo Totalmente".

Um destaque importante na pesquisa é em relação as médias finais na disciplina e a assiduidade/interesse dos alunos, em sala de aula, o que reforça a ideia de que na percepção deles, a quebra do paradigma da aula tradicional funcionou positivamente.

Conclusão

Com os resultados obtidos no presente trabalho, foi possível observar que, tanto por parte dos alunos, quanto pela docente, o uso de HQ, no processo ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo, proporciou momentos de descontração, despertando o interesse dos alunos, o que possibilitou um melhor aprendizado dessa matéria. A abordagem apresentada tornou mais fácil ao estudante criar associações e generalizações dessas atividades com os conteúdos algébricos relacionados. Podemos afirmar que o uso das tirinhas possui um grande potencial para trabalhar com a resolução de problemas e revisão de conteúdos matemáticos, por meio das situações ilustradas, permitindo ao aluno desenvolver o senso crítico, diante da temática apresentada, desenvolver o raciocínio lógico, ao diagnosticar as mensagens dos quadrinhos, estimulando a investigação e associações com outras disciplinas.

Assim sendo, acredita-se que a utilização das HQ's, inseridas nas aulas de matemática possibilitam despertar nos estudantes maior interesse e motivação em aprendê-la, através da forma descontraída que aborda diferentes conceitos, contribuindo para a melhora no ensino e aprendizagem de matemática. A observação do comportamento dos alunos frente aos problemas propostos, e também do comprometimento por eles demonstrado na procura por solução, corrobora os dizeres de Dewey (1959), em relação ao fato da aprendizagem ocorrer efetivamente somente nos casos em que há um problema real para se resolver. No ensino de matemática, as práticas reais propiciam um ambiente no qual o conteúdo deixa de possuir um caráter estritamente abstrato e passa a ser visto como algo rotineiro, aplicável no dia a dia e de fácil acesso.

Referências

Ausubel, D. P.(2002) Adquisición y retención del conocimento: Una perspectiva cognitiva. Barcelona ed. Paidós.

Brasil.(1996) Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei n 9.394, de 20 de dezembro de 1996.

Brasil. (2002)Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. p. 59 – 86.

Dewey, J. (1959). Democracia e educação: introdução à filosofia da educação. 3a. ed. São Paulo: *Nacional.* Tradução de Godofredo Rangel e Anísio Teixeira.

Felix, G. (2016) produção de histórias em quadrinhos para a resolução de problemas matemáticos: o relato de uma experiência na iniciação à docência. *Anais do congresso Encontro Nacional de Educação Matemática*.

Mello, J.; Mello, M. & Fernandes, A.(2001). Mudanças no ensino de Cálculo I: Histórico e Perspectivas. Niterói: *Cobenge*, .

Oliveira, L; (2010) História em quadrinhos e matemática, essa conexão é possível? *Anais congresso Encontro Nacional de Educação Matemática*.

Vergueiro, W.; Rama, A. (2004) Como usar as histórias em quadrinhos na sala de aula. São Paulo: *Contexto*.

Objetos matemáticos no ensino e na aprendizagem da Matemática: dos modelos concretos à realidade virtual

André Lúcio Grande
Faculdade de Tecnologia de Mauá – Fatec-Mauá
Brasil
andreluciogrande@gmail.com

Resumo

Este trabalho objetiva apresentar um breve panorama do uso de alguns modelos físicos e recursos computacionais voltados ao ensino e a aprendizagem da Matemática em suas diversas áreas, particularmente no Cálculo Diferencial e Integral (CDI), procurando destacar suas potencialidades e contribuições na construção do conhecimento. Diversas pesquisas em educação matemática evidenciam a importância da utilização de tais modelos e recursos no sentido de auxiliar a visualização e a compreensão dos conceitos tanto geométricos quanto algébricos dos objetos matemáticos. Como referencial teórico foram utilizadas as ideias ligadas ao papel da visualização relacionadas ao ensino do CDI defendidas por David Tall. Esta pesquisa apresenta uma abordagem qualitativa, tendo como procedimentos metodológicos a pesquisa documental acerca do tema em questão além do uso do software GeoGebra. Como resultados, destacamos que a utilização por parte profesores e estudantes de tais objetos matemáticos apresenta contribuições significativas na construção do conhecimento matemático.

Palavras-chave: Modelos Matemáticos, Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica, Visualização, GeoGebra.

Introdução

Os conceitos geométricos bem como algébricos dos objetos matemáticos abordados nos diversos cursos ministrados pelos profesores nas diferentes modalidades de ensino exigem por parte dos estudantes a visualização e a abstração cada vez maiores desses objetos de estudo, com o intuito de concretizar os temas envolvidos buscando assim uma melhor compreensão dos mesmos.

Para que essa visualização se torne possível, muitos professores passaram ao longo do tempo a elaborar e utilizar em suas aulas objetos matemáticos no sentido de explorar muitas propriedades tanto geométricas quanto algébricas desses objetos. Esse fato pode ser constatado, por exemplo, nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica, Descritiva, Diferencial ou Algébrica e na Topologia.

O uso de materiais manipulativos, quer sejam concretos ou virtuais, favorece em grande medida a visualização dessas propriedades, auxiliando na construção do conhecimento matemático. No caso dos modelos físicos, esses são fabricados com materiais simples como madeira, plástico,gesso ou fios, e podem representar objetos matemáticos como por exemplo curvas ou superficies. Por seu turno, os objetos virtuais podem ser obtidos utilizando-se de recursos computacionais, que representam determinados modelos concretos.

De um modo geral, deve-se considerar que a questão da visualização foi responsável pela elaboração de muitas ideias por grandes descobertas, assim como levou os matemáticos a alguns resultados enganadores.

A visualização, em linhas gerais, no ensino e aprendizagem do CDI ou na Geometria Analítica permite interpretar informações por meio da construção das representações visuais, de *softwares,* entre outros recursos didáticos.

Pesquisas em educação matemática ressaltam a importância do uso de objetos matemáticos no que tange à importância e ao papel da visualização no proceso de ensino e a aprendizagem da Matemática.

Tall (1991; 2002) discute em seus trabalhos o papel da visualização do contexto do ensino do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) nos últimos anos e suas possíveis contribuições procurando relacioná-lo com as noções de intuição e rigor.

Por visualização, o autor entende como uma ação de transformar conceitos abstratos em imagens mentamente visíveis. Essa ação constitui-se em dois momentos: constrói-se algo mentalmente e posteriormente representa-se o que pensou. Tall (2002) considera a visualização não só relevante à Matemática como à Educação Matemática.

Para isso, o autor ressalta o uso do computador como uma interface visual e atuante em que é possível criar modelos de uma situação proposta destinados a explorações sensoriais por meio de percepções, visualização e intuições, se constituindo um “organizador genérico” de algumas ideias e conceitos, sendo um ambiente em que os estudantes podem manipular exemplos e contraexemplos desses conceitos.

Sendo assim, essa pesquisa tem por objetivo apresentar um breve panorama do uso de alguns modelos físicos e recursos computacionais voltados ao ensino e a aprendizagem do CDI e da Geometria Analítica, procurando destacar suas potencialidades bem como contribuições para a construção do conhecimento matemático. Posteriormente, será apresentado um exemplo do estudo da representação de um objeto matemático construido no software GeoGebra destinado ao ensino das superficies regradas, particularmente o caso do hiperboloide de uma folha.

Modelos matemáticos concretos: breve contexto histórico

A utilização dos professores e pesquisadores de modelos matemáticos concretos no ensino e aprendizagem é uma prática recorrente nos últimos séculos em diversas universidades em todo o mundo, fruto do desenvolvimento cada vez maior da Matemática em suas áreas afins, particularmente nos diversos ramos da Geometria como a Descritiva, Analítica, Diferencial e Algébrica.

Na Europa o uso de modelos concretos e instrumentos diversos iniciou-se no século XVII e XVIII. Podemos destacar alguns exemplos tais como os modelos de Théodore Olivier (1793-1853), que estudou na Escola Politécnica de Paris e tornou-se em 1829 um dos fundadores da Escola Central de Artes e Manufacturas. Como professor de Geometria Descritiva da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra atuou na elaboração de modelos de matemática que criou para o auxiliar no ensino da geometria. Alguns destes modelos são de superfícies regradas, tendo partes amovíveis de modo a ilustrar aos estudantes como essas superfícies são geradas.

Figura 1. Modelo do hiperboloide de uma folha (Théodore Olivier)

Olivier ressaltava a utilidade dos seus modelos no ensino da Geometria Descritiva, permitindo aos alunos melhor compreender as propriedades geométricas das superfícies que estudavam. Segundo o autor:

> "É assim que começamos a compreender que, quando queremos falar aos alunos das propriedades de uma superfície, a primeira coisa a fazer é colocar sob os seus olhos o relevo dessa superfície, para que eles vejam distintamente aquilo de que queremos falar-lhes". (Tenreiro, 2015)

Nessa afirmação do autor podemos ressaltar a importância da construção do modelo concreto, no caso representando uma superficie, buscando evidenciar algumas propriedades geométricas do objeto matemático.

Assim como Olivier, o matemático alemão Felix Klein (1849 – 1925) ao lecionar na universidade de Göttingen, na Alemanha em 1886, desenvolveu modelos geométricos e outros objetos ilustrativos tendo sua utilizadade para fins didáticos, contribuindo para a popularização dos mesmos. Um de seus modelos mais conhecidos diz respeito à superfície diagonal de modelo do Clebsch, definida pelas equações:

$$\begin{cases} {x_1}^3 + {x_2}^3 + {x_3}^3 + {x_4}^3 + {x_5}^3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Essa superfície cúbica apresenta 27 retas contidas na mesma, representada pelo modelo a seguir:

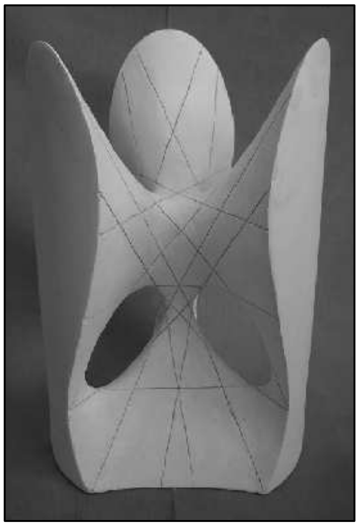


Figura 2. Modelo da superfície diagonal de Clebsch

No Instituto Henri Poincaré, inaugurado em 1928 em Paris, foram adquiridos junto ao Laboratório Superior de Geometria da Faculdade de Ciências da Universidade de Paris alguns modelos matemáticos construídos por Martin Shilling em Leipzig e por Joseph Caron (1849 – 1924) professor de geometria descritiva da universidade para fins educacionais voltados ao ensino prático.

Esses modelos físicos foram confeccionados utilizando dentre outros materiais como madeira, fios, papel e gesso e destinavam-se ao estudo de alguns tópicos como curvas e superfícies, abordadas nos cursos de geometria descritiva, auxiliando na visualização das propriedades geométricas dos mesmos.

Figura 3. Modelos Matemáticos – Instituto Henri Poincaré

Além dos materiais concretos exemplificados anteriormente, nas últimas décadas com o advento cada vez maior dos recursos computacionais no ensino da Matemática, os modelos matemáticos passaram a ser desenvolvidos de maneira virtual, com o uso de computadores, laptopos, tablets, celulares e aplicativos. A seguir mostraremos a utilização do software GeoGebra no estudo das superficies regradas e suas possíveis representações.

Um estudo das superfícies regradas utilizando recursos computacionais

Um exemplo da utilização de modelos matemáticos pode ser dado no estudo das superfícies regradas. Quando desejamos definir ou descrever uma superfície quase que inevitavelmente caímos da redundância da utilização do próprio termo ou evocamos uma superfície plana como exemplo. Podemos definir uma superfície como um conjunto de pontos do espaço euclidiano, sendo bidimensional e que qualquer ponto da mesma pode ser descrito localmente por duas coordenadas. Intuitivamente, podemos obter por exemplo outras superfícies pela deformação ou rompimento de uma folha de papel ou a colagem de alguns pedaços de papel.

As superfícies podem ser classificadas de várias maneiras, tais como superfícies de revolução, paralelas, mínimas ou regradas. Podemos considerar que a palavra regrada possui o significado de "sujeita a regras". Uma superfície regrada é aquela é ser formada por retas, o que lhe confere uma "regra" própria para ser gerada. Elas podem ser completamente determinadas pelo movimento de uma reta no espaço.

Como exemplo de superfícies regradas, temos: cilindro, cone, paraboloide hiperbolico, hiperboloide de uma folha, helicoide ou conoide.

Segundo Struik (1988), o primeiro estudo das superfícies regradas foi efetuado por Gaspar Monge (na obra aplicações da Análise à Geometria), que estabeleceu as equações diferenciais parciais que satisfazem todas as superfícies regradas (de terceira ordem).

Matematicamente, podemos considerar uma superfície regrada como sendo um subconjunto S do espaço euclidiano que para cada $k \epsilon \mathbb{R}$ existe uma reta

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{R}} r_k$$

Para demonstrarmos algebricamente que uma superfície regrada é formada por uma família de retas, vamos considerar por exemplo o hiperboloide de uma folha, cuja equação na forma canônica ao longo do eixo Oz é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Sem perda de generalidade, tomando os valores $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$, temos a seguinte equação:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

Reorganizando nos dois membros da equação e fatorando os termos algébricos, temos:

$$x^2 - z^2 = 1 - y^2$$

$$(x+z)(x-z)=(1+y)(1-y)$$
$$\frac{(x-z)}{(1-y)}=\frac{(1+y)}{(x+z)}=k$$

Sendo k uma constante real não-nula, teremos as seguintes situações:

$i)\ \dfrac{(x-z)}{(1-y)}=k \Rightarrow (x-z)=k(1-y) \Rightarrow x+ky-z=k \qquad (\pi_1)$

$ii)\ \dfrac{(1+y)}{(x+z)}=k \Rightarrow (1+y)=k(x+z) \Rightarrow kx-y+kz=1 \quad (\pi_2)$

As equações obtidas em i e ii representam dois planos π_1 e π_2 cujos vetores normais são, respectivamente, $n_1=(1,k,-1)$ e $n_2=(k,-1,k)$. Como esses vetores não são proporcionais, os planos π_1 e π_2 são transversais e, portanto, a cada valor de k, obtemos a intersecção entre ambos dada por uma reta r_k obtida da seguinte maneira:

$$r_k:\begin{cases} x+ky-z=k \\ kx-y+kz=1 \end{cases}$$

Essa demonstração algébrica pode ser considerada, em grande medida, trabalhosa. O uso de recursos computacionais pode facilitar a visualização e a compreensão das propriedades geométricas desse objeto de estudo.

Tall (2002) afirma que o uso do computador constitui uma interface visual e atuante em que é possível criar modelos de uma situação proposta destinados às explorações sensoriais por meio de percepções, visualizações e intuições. Para o autor, o computador se torna um "organizador genérico" de algumas ideias e conceitos, sendo um ambiente (ou micromundo) em que os alunos podem manipular exemplos e contraexemplos desses conceitos. Por meio de um software, portanto, os alunos entram em contato com o objeto matemático.

Com isso, para representarmos geometricamente a situação descrita anteriormente, podemos utilizar o *software* GeoGebra no intuito de auxiliar a visualização e a compreensão do fato das superfícies regradas, tal como o hiperboloide de uma folha, serem formadas por uma união de retas, bem como obter as secções da superficies por meio de planos paralelos aos planos xy, yz e xz, para visualizar que a intersecção dessa superficie com esses planos podem geram curvas como a elipse e a hipérbole.

Além disso, o GeoGebra permite de maneira dinámica a interação com o objeto de estudo, pois ao variarmos os parámetros a, b e c da equação do hiperboloide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ podemos visualizar as alterações geométricas que ocorrem na superficie em questão, conforme a figura a seguir:

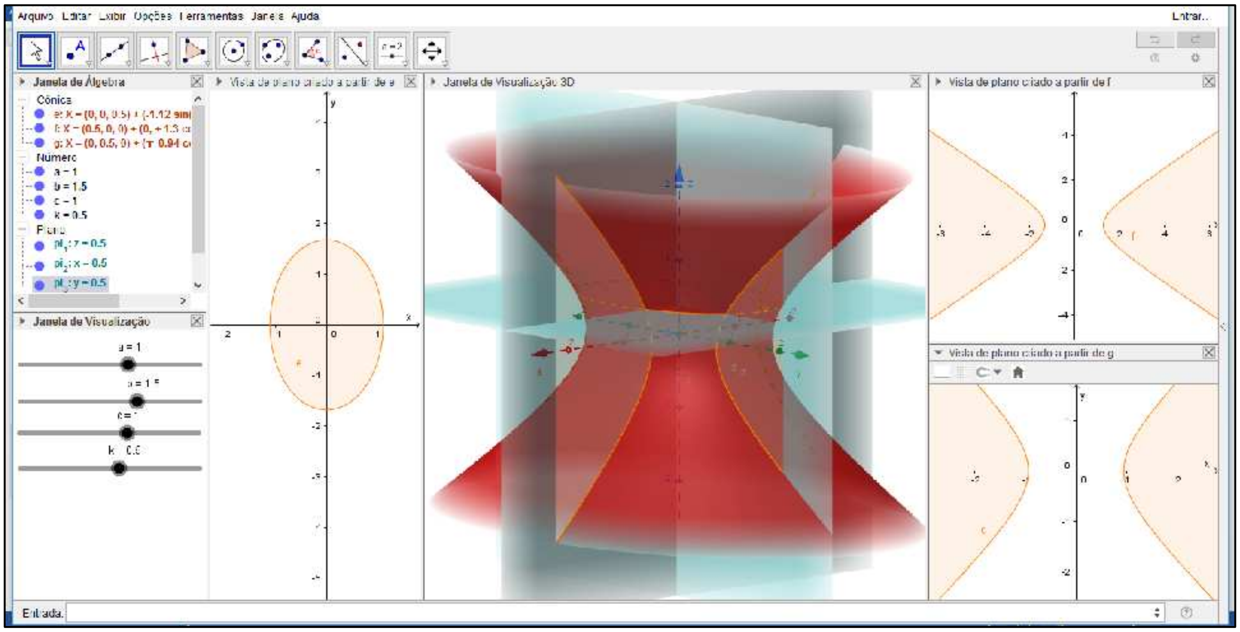


Figura 4. Hiperboloide de uma folha representado no GeoGebra

Considerações Finais

Esta pesquisa apresentou, utilizando-se de exemplos do contexto histórico, da gama de possibilidades de utilização de modelos matemáticos, quer sejam concretos ou virtuais, no sentido auxiliar na visualização e compreensão dos conceitos geométricos e analíticos abordados nos diversos cursos no ensino superior e em suas diversas modalidades, como no Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica, Descritiva ou Diferencial, por exemplo.

Devemos ressaltar que os modelos matemáticos podem não trazer o rigor matemático exigido em provas e demonstrações, mas possibilita em grande medida desenvolver intuições, gerar conjecturas e testar hipóteses, elementos essenciais para a construção do conhecimento matemático.

A construção de objetos físicos que representam algumas superfícies regradas se revelou um elemento responsável por “concretizar” o objeto de estudo em questão além de permitir elaborar intuitivamente algumas conjecturas e hipóteses sobre as propriedades geométricas de tais superfícies. Já a utilização do GeoGebra auxiliou simular a obtenção das superfícies regradas como o hiperboloide de uma folha, por exemplo, mostrando sua característica de ser formada por retas, assim como contribuiu na formalização das hipóteses e conjecturas intuídas anteriormente.

Destacamos que o ensino e a aprendizagem da Matemática sedimentados em princípios e ideias ligadas ao uso da intuição e do pensamento visual permitem aos estudantes, em grande medida, uma maior participação na construção do conhecimento científico.

Referências e bibliografia

Creswell, J. W. (2010). Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução de Magda França Lopes. 3ª. ed. Porto Alegre: Artmed.

Carmo, M. P. (2010) Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM.

Grande, A. L. (2013). Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo

Struik, D. J. (1988). Lectures on Classical Differential Geometry. 2nd ed. New York: Dover Publications.

Tall, D. O. (Ed) (2002). Advanced Mathematical Thinking. Londres, Dordrecht, Kluwer.

Tall, D.O. (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. In: *Visualizations on Mathematics* (ed. Zimmermann e Cunninghan), M.A.A. Notes No. 19, 105-119.

Tenreiro, C. (2015). Os "Modelos de Olivier" do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. *Gazeta da Matemática. 176, 32-38.*

Una mirada cognitiva a la construcción de los conceptos de Eigenvectores y Eigenvalores a partir de las transformaciones lineales

Alexander **Betancur** Sánchez
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander
Colombia
alexanderbetancursanchez@gmail.com
Solange **Roa** Fuentes
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander Grupo EDUMAT - UIS
Colombia
sroa@matematicas.uis.edu.co

Resumen

Se presenta una propuesta de investigación que estudia la construcción de los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor a partir de la transformación lineal. Para esto se toma una mirada cognitiva orientada por los resultados de investigación reportados sobre el concepto involucrados, se estudia cuáles son las estructuras y mecanismos mentales que permiten la construcción de los conceptos de Eigenvalor y Eigenvector en estudiantes universitarios de primer año cuando resuelven actividades en el contexto de la teoría de Modelos y Modelación; actividades diseñadas desde la Teoría APOE. Se propone completar el ciclo de investigación de la teoría APOE, hacer sugerencias didácticas y actividades que incluyan problemas en contexto según la teoría de Modelos y Modelación.

Palabras clave: eigenvector, eigenvalor, transformación lineal, teoría APOE, teoría de Modelos y Modelación.

Introducción

El aprendizaje y la enseñanza de los conceptos del álgebra lineal es el interés de investigadores desde diferentes miradas teóricas. En este documento se presenta una mirada cognitiva de los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor a la luz de las investigaciones reportadas, se identifica un camino para la construcción sobre la transformación lineal. Después se describe la problemática de la investigación, los elementos teóricos tomados de la teoría APOE, Modelos y Modelación y la metodología de la investigación con el propósito de completar el ciclo propuesto por la teoría APOE.

Acercamientos sobre la transformación lineal

Investigadores que han estudiado los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor han desarrollado acercamientos mediante el concepto de transformacional lineal como estructura base para su aprendizaje. Por ejemplo, Klasa, J. y Klasa, S. (2002) reportan una investigación que estudia la articulación de los modos de pensamiento, geométrico, computacional y algebraico del álgebra lineal. Los conceptos de transformación lineal, Eigenvectores y Eigenvalores se introducen mediante el uso de los softwares *Cabri* y *Maple*. En el entorno de *Cabri* los estudiantes exploraron a profundidad las construcciones mostradas en *Maple*, para transformaciones lineales T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, además el vector resultante bajo la transformación lineal dada. Igualmente Klasa, J. y Klasa, S. (2002) muestran el trabajo realizado por los estudiantes sobre el siguiente problema: "Dada una circunferencia unitaria con centro en el origen , explorar el lugar geométrico que generan los vectores unitarios del plano al aplicar la transformación T" (ver figura 1). La actividad propuesta orientaba a los estudiantes a identificar cuándo los dos vectores w y $T(w)$ son colineales, la condición sobre la matriz asociada a la transformación lineal para que los ejes de simetría sean las líneas de Eigenvectores y el estudio de la convergencia de la órbita de una matriz estocástica para un vector estocástico (Klasa y Klasa, 2002).

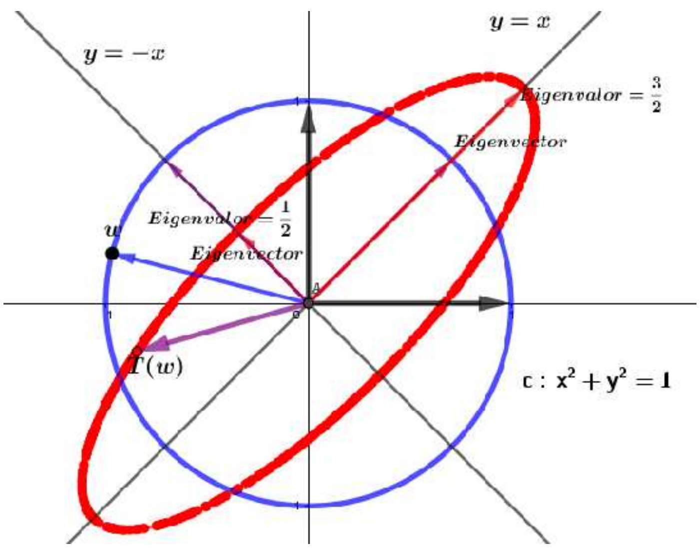


Figura 1. Exploración en Cabri de las líneas de simetría mediante Eigenvectores (Klasa & Klasa, 2002, p.7)

En esta vía Klasa (2010) estudia el diseño de una estrategia de enseñanza sobre los conceptos de transformación lineal, Eigenvectores y Eigenvalores, cónicas, formas cuadráticas y cambio de base, utilizando nuevamente los softwares *Maple* y *Cabri*. La investigadora reporta resultados del diseño de actividades. En este escrito solo se hace referencia a transformaciones lineales, Eigenvectores y Eigenvalores, con el objetivo de identificar cómo emergen los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor a partir de transformaciones lineales. Klasa (2010) usa *Maple* y *Cabri* para estudiar las propiedades de linealidad y relacionarlas con las propiedades del álgebra de matrices. La definición y relación se expresan de la siguiente manera:

Definición. Sea V y W dos espacios vectoriales sobre el campo K, $T: V \longrightarrow W$ es una transformación lineal si cumple las siguientes condiciones:

(i) $T(kv) = kT(v)$ para cualquier escalar k y vector v
(ii) $T(v + v') = T(v) + T(v')$

Estas propiedades pueden ser comparadas con propiedades del algebra de matrices:

(i) $A \bullet (kv) = k(A \bullet v)$ donde $\bullet$ es producto de matrices
(ii) $A \bullet (v + v') = A \bullet v + A \bullet v'$

En la exploración de propiedades para la transformación lineal en *Cabri*, la investigadora busca que los estudiantes determinen a partir de la animación, cuándo los vectores v y $T(v)$ son colineales. Para hallar el Eigenvalor los alumnos calculan la longitud de v y $T(v)$ con *Cabri* y realizan el cociente $\frac{||T(v)||}{||v||}$. De esta manera, la definición que resulta de Eigenvectores y Eigenvalores a partir de la transformaciones lineales es: “Un vector v no nulo es un *Eigenvector* de una transformación lineal $T: V \to V$ si tenemos la igualdad $T(v) = cT(v)$ para algún escalar c, llamado entonces el *Eigenvalor* asociado” (Klasa, 2010, p. 2104).

Otros estudios han centrado su perspectiva en las características que deben cumplir los cursos de álgebra lineal en programas de ciencias e ingeniería. En particular Soto y García (2002) analizan en la Universidad de Sonora (México) los conceptos de Eigenvalor y Eigenvector. Los autores consideran un esquema (ver figura 2) para el estudio de dichos conceptos a partir de la transformación lineal. Usando el ambiente dinámico de *Cabri Geometry* II Soto y García (2000) examinan la conversión entre la representación por una transformación lineal, la matriz asociada y el polinomio característico de Eigenvalores y Eigenvectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. De la exploración en el ambiente dinámico se encuentra que los estudiantes no identifican inicialmente los Eigenvectores como vectores sobre la misma línea asociada; esto causando dificultades con reconocer Eigenvalores negativos.

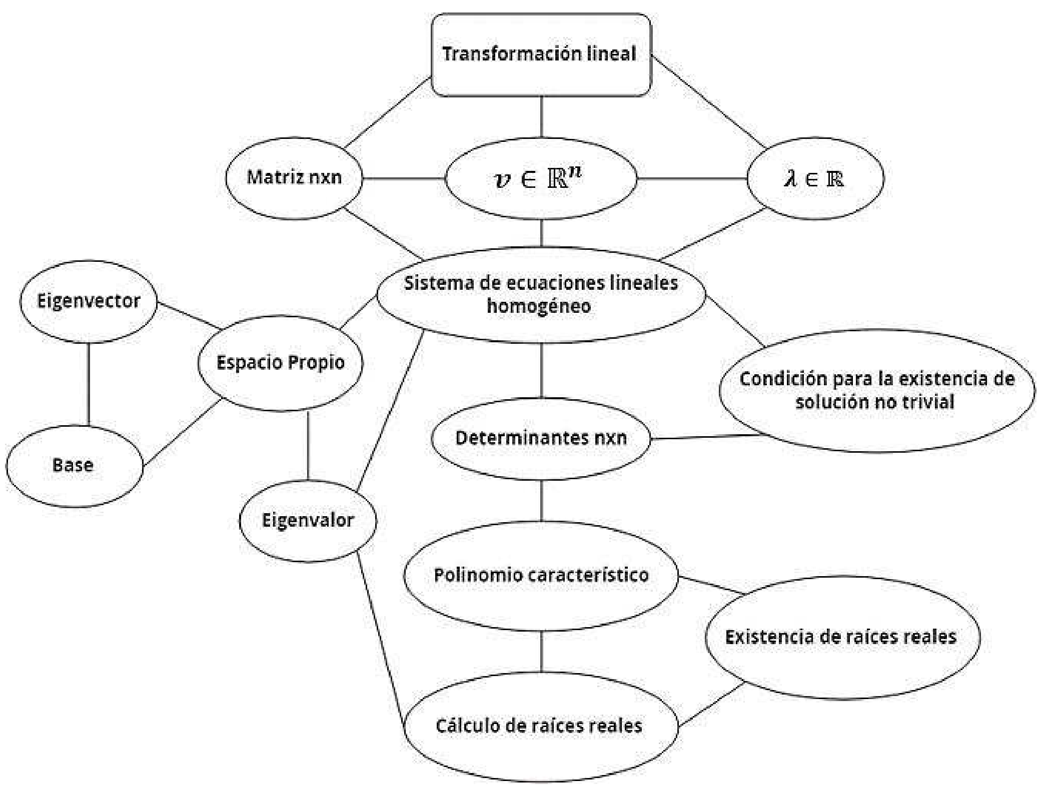


Figura 2. Esquema para los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor (Soto y García, 2002, p.3)

Un acercamiento más reciente se presenta en Camacho y Oktaç (2016), las autoras presentan avances de una investigación doctoral donde se analizan las estructuras mentales necesarias para un profesor resolver problemas sobre Eigenvalores y Eigenvectores en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. En la investigación las autoras definen de manera explícita subespacios invariantes pues surge de manera natural el concepto de Eigenvector y Eigenvalor. La definición considerada es la siguiente:

> Si $T: V \longrightarrow V$ es una transformación lineal, un subespacio $\mathcal{W}$ de V es T invariante si $T(x) \in \mathcal{W}\ \forall x \in \mathcal{W}$ es decir, $\boldsymbol{T(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}}$. En $\mathbb{R}^2$ los subespacios invariantes no triviales son de dimensión 1. Rastrear estos subespacios es encontrar $\boldsymbol{\mathcal{W}} = \{\lambda w | w \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}\}$. (Camacho & Oktaç, 2016, p. 255)

Con base en el panorama expuesto, se da paso al problema de investigación que se propone estudiar en esta investigación.

Planteamiento del problema

La preocupación por estudiar cómo se enseñan y aprenden los conceptos del álgebra lineal ha ocupado los intereses de diversos investigadores (Dorier, 2000). Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) manifiestan las críticas de los estudiantes al enfrentar cursos de álgebra lineal cuando ingresan a la universidad; estas se refieren al "uso del formalismo, la abrumadora cantidad de nuevas definiciones y la falta de conexión con lo que ya saben en matemáticas" (p. 86). Los conceptos de Eigenvalor y Eigenvector hacen parte del componente básico de un curso de algebra lineal (Harel, 2000), entre los acercamientos de investigación sobre cómo se aprenden y enseñan los conceptos de Eigenvalor y Eigenvector Soto y García (2002), Klasa (2010) y Camacho y Oktaç (2016) lo hacen sobre transformaciones lineales utilizando un contexto de tecnologías computacionales para diseñar y desarrollar actividades de aprendizaje. Desde otro acercamiento Larson, Zandieh y Rasmussen (2008) y Salgado y Trigueros (2014, 2015) diseñan y desarrollan actividades de aprendizaje en un contexto de modelación según la teoría de Modelos y Modelación, en su acercamiento prevalece la construcción de Eigenvectores y Eigenvalores sobre las matrices. El uso de la teoría de Modelos y Modelación ha incluido otros conceptos del álgebra lineal como sistemas de ecuaciones lineales (Possani, Trigueros, Preciado & Lozano, 2010), combinación lineal, conjunto generador y espacio generado (Salgado, 2015). Estos investigadores han utilizado de forma complementaria la teoría APOE y la teoría de Modelos y Modelación para estudiar la construcción de conceptos en el álgebra lineal.

En el contexto de la universidad Industrial de Santander (UIS) se han desarrollado investigaciones usando la teoría APOE con el propósito de estudiar la construcción de conceptos del álgebra lineal en estudiantes de primer año de ciencias e Ingeniería. Roa-Fuentes y Parraguez (2017) investigan las estructuras y mecanismos mentales para que los estudiantes construyan un teorema que relaciona las transformaciones lineales y las matrices, González-Rojas y Roa-Fuentes (2017) proponen un esquema de transformación lineal a partir de interiorización de acciones concretas. En busca de continuar con el estudio de conceptos en álgebra lineal se revisaron algunos libros de texto para identificar cómo desarrollaban los conceptos de Eigenvectores y Eigenvalores, de esta revisión y la reportada en la literatura se plantea la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales que permiten la construcción de los conceptos de Eigenvalor y Eigenvector en estudiantes universitarios de primer año cuando resuelven actividades en el contexto de la teoría de Modelos y Modelación?

En este reporte se presentan avances de la fase inicial de la investigación que busca dar una mirada cognitiva a los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor con el propósito de proponer un camino hipotético de construcción de los conceptos, llamado en la teoría APOE una Descomposición Genética (DG).

A continuación, se presentan elementos teóricos desde la teoría APOE y la teoría de Modelos y Modelación que guían los intereses de este estudio.

Teoría APOE y Modelos y Modelación

En las ideas de Piaget sobre el desarrollo de las estructuras lógico matemáticas de un individuo Dubinksy (Arnon et al., 2014) identificó la *abstracción reflexiva* como mecanismo principal para la construcción de conceptos en matemáticas. En la teoría APOE se distinguen los mecanismos interiorización, coordinación, encapsulación y reversión, los cuales permiten a partir objetos previos en el estudiante realizar la construcción de las estructuras Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE) para generar nuevos objetos (Arnon et al., 2014).

La comprensión de un concepto matemático se describe por los avances en cada etapa propuesta por APOE. En general, para un concepto matemático C un estudiante tiene una concepción Acción de C si depende de indicaciones externas para realizar transformaciones a los Objetos y/o construcciones previas que posee; en esta etapa los pasos y las transformaciones no se pueden imaginar ni modificar. Si el estudiante reflexiona sobre las acciones que realiza, hace modificaciones y ajustes a sus acciones permitiéndole realizar transformaciones en su mente sin necesidad de realizarlas paso a paso, se dice que el estudiante ha interiorizado la Acción y tiene una concepción Proceso de C. Cuando el estudiante reflexiona sobre el Proceso que ha construido capturando una totalidad de este, se dice que ha encapsulado el proceso en un Objeto, y por tanto tiene una concepción Objeto del concepto C. Con respecto a ese concepto C el conjunto de acciones, procesos, objetos y otras construcciones realizadas se relacionadas coherentemente conformando una estructura. Al modelo que describe estas construcciones se denomina descomposición genética (DG), en esta se precisan los mecanismos y estructuras previas necesarias para avanzar en las etapas de comprensión del concepto (Arnon et al., 2014). Las actividades de enseñanza propuestas a partir de la DG se desarrollan según el ciclo de instrucción ACE (Actividades, Discusión en Clase, Ejercicios), el cual inicia con un trabajo en grupo por los estudiantes, se discute entre estudiantes y estudiantes - profesor los resultados encontrados, finalmente se proporciona ejercicios y actividades que los estudiantes realizan como tarea (Salgado & Trigueros, 2014).

En la teoría APOE no se hace mención explícita al contexto de aprendizaje de conceptos matemáticos, sin embargo, no se rechaza el uso de estos. Salgado y Trigueros (2015) consideran viable el uso complementario de la teoría APOE con la teoría de Modelos y Modelación (Lesh &Doerr, 2003), la cual plantea el diseño y uso de actividades que generan modelos para construir conceptos matemáticos. Investigadores y docentes que han trabajado con esta teoría han consolidado unos principios que caracterizan las actividades que producen modelos, estos se han denominado principio de realidad, construcción de modelos, autoevaluación, documentación, simplicidad y generalización (Lesh & Doerr, 2003).

Esta investigación en curso utiliza de forma complementaria la teoría de Modelos y Modelación y APOE, la primera para el diseño de problemas en contexto y la segunda para diseñar actividades con base en la DG. Esto con el fin de buscar que los estudiantes potencien las construcciones en gestación a partir del trabajo con el modelo y permitan analizar como los estudiantes logran hacer las construcciones necesarias para llegar a comprender el concepto.

Metodología

En esta investigación se sigue el ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE (Arnon et al., 2014) que consiste en un análisis teórico, diseño e implementación de la enseñanza y recolección y análisis de datos. Los tres elementos del ciclo de investigación se relacionan como se muestra en la *figura 3*. Para esta investigación sobre Eigenvectores y Eigenvalores se plantea realizar el ciclo completo con el propósito de analizar las estructuras y mecanismos en la construcción de estos conceptos en estudiantes universitario de primer año.

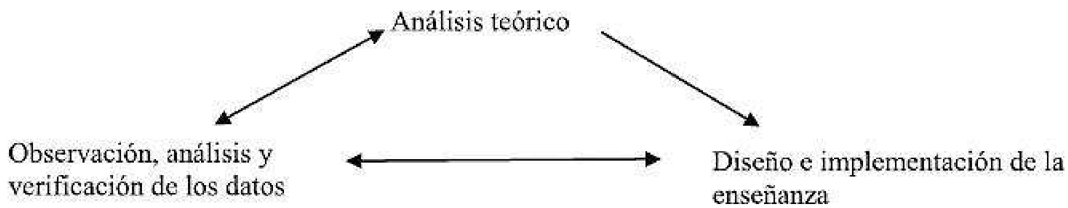


Figura 3. Ciclo de investigación (Arnon et al., 2014)

El análisis teórico como primer componente del ciclo de investigación estudia en profundidad el concepto de interés tomando como referentes libros de texto, reportes de investigación, la experiencia como docente y revisión histórico- epistemológica del concepto para proponer una DG como un modelo cognitivo que describe las estructuras y mecanismos involucrados en la construcción. En el de caso esta investigación el análisis de libros de texto se concentra sobre los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor y su construcción sobre la transformación lineal. En los reportes de investigación se considera en particular los estudios de Salgado y Trigueros (2014, 2015) sobre el diseño y validación de una DG para valores, vectores y espacios propios de una matriz. Estos y otros aspectos se agrupan para diseñar un camino hipotético en el aprendizaje de Eigenvectores y Eigenvalores sobre las transformaciones lineales.

Construida la DG en el análisis teórico se diseñan problemas en contexto con la teoría de Modelos y Modelación. Como se ha mencionado en la descripción de los elementos teóricos, el diseño de los instrumentos y actividades restantes con base en las construcciones prevista por la DG preliminar. Dado que el interés de la investigación es realizar el ciclo completo, la implementación de la instrucción seguirá el ciclo ACE propuesto por la teoría APOE (Arnon et al., 2014). En la investigación se hace seguimiento a un grupo de aproximadamente 30 estudiantes que cursan álgebra lineal II en la Universidad Industrial de Santander (Colombia). En pequeños grupos se analiza una situación en contexto diseñada según la teoría de Modelos y Modelación, del análisis realizado por los alumnos se hacen discusiones orientadas por el docente, posteriormente se desarrollan las actividades diseñadas según la DG para potenciar las construcciones en gestación que surgen del problema en contexto. Con los ejercicios entregados como tarea, los estudiantes continúan reflexionando sobre el concepto y se enfrentan a nuevos problemas en contexto, este ciclo de instrucción continua hasta que se desarrollen todas las actividades diseñadas para el concepto (Salgado & Trigueros, 2014).

Obtenidos los datos mediante videograbaciones de las secciones de instrucción, hojas de trabajo de los estudiantes, cuestionario y entrevistas, se analizan las construcciones realizadas por los estudiantes según la DG preliminar. En busca de responder cómo aprendieron los estudiantes lo conceptos se valida o refina la DG. El propósito es describir mejor las estructuras y mecanismos mentales para la construcción de los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor. La realización del ciclo completo permite plantear sugerencias didácticas para el desarrollo de cursos de álgebra lineal y las conexiones necesarias para la comprensión de los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor.

Reflexiones finales

A partir de las investigaciones realizadas en álgebra lineal con respecto al concepto de Eigenvector y Eigenvalor se identifica una estrategia y camino posible su construcción sobre las transformaciones lineales. Desde la teoría APOE se considera que no existe un único camino cognitivo (DG) para la construcción de conceptos en matemáticas, por eso en esta investigación estudiamos un camino alterno al reportado por Salgado y Trigueros (2014, 2015).

El desarrollo del ciclo completo propuesto por la teoría APOE nos permitirá proponer un modelo cognitivo que describa las estructuras y mecanismos mentales para la construcción de Eigenvalores y Eigenvectores sobre las transformaciones lineales , diseñar actividades que favorezcan las construcciones previstas en la DG tomando también situaciones en el contexto de la teoría de Modelos y Modelación y validar o refinar la DG preliminar con el propósito que sea más acorde con las construcciones que realizan los estudiantes para comprender los conceptos. Del análisis a las construcciones realizadas por los estudiantes se proponen sugerencias para el desarrollo de la instrucción en los cursos de álgebra lineal y actividades de aprendizaje que pueden ser implementadas por otros docentes que enseñan en cursos de álgebra lineal.

Referencias y Bibliografía

Arnon, L., Cottill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education*. New York: Springer Netherlands. DOI: 10.1007/978-1-4614-7966-6.

Camacho., G & Oktaç, A. (2016). Exploración de una transformación lineal de R2 en R2. El uso de geometría dinámica para ampliar o adecuar construcciones mentales. En *Actas Quinto Simposio Internacional ETM* (pp. 253-266). Florina, Grecia

Dorier, J. L. (Ed.). (2000). *On the teaching of linear algebra* (Vol. 23). Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 85-124). Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers.

González-Rojas, D. E., & Roa-Fuentes, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las ciencias*, 35(2), 0089-107. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2150

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 177-189). Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers.

Klasa, J., & Klasa, S. (2002). Linear transformations and eigenvectors with Cabri II via Maple V. *The* 2^{nd} *International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level).* Recuperado de http://server.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap256.pdf.

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear algebra and its applications*, 432(8), 2100-2111. doi:10.1016/j.laa.2009.08.039

Larson, C., Zandieh, M., & Rasmussen, C. (2008). A trip through eigen land: Where most roads lead to the direction associated with the largest eigenvalue. *Proceedings of the* 11^{th}*Annual Conference for Research in Undergraduate Mathematics Education.* SIGMA ON RUME. Recuperado de http://sigmaa.maa.org/rume/crume2008/Proceedings/Larson%20SHORT.pdf

Lesh, R. y Doerr, H. (2003). *Beyond Constructivist: A Models & Modelling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving*. New Hampshire: Lawrence Erlbaum Associates

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2125-2140. doi:10.1016/j.laa.2009.05.004

Roa-Fuentes, S., & Parraguez, M. (2017). Estructuras mentales que modelan el aprendizaje de un teorema del álgebra lineal: Un estudio de casos en el contexto universitario. *Formación universitaria*, 10(4), 15-32. doi: 10.4067/S0718-50062017000400003

Salgado, H., & Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Educación Matemática*, 26(3), 75-107.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 100-120. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.005

Soto, J. L., & García, M. (2002). A graphical exploration of the concepts of eigenvalue and eigenvectors in $R^2$and R^3. *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*. Recuperado De http://mat.uson.mx/depto/publicaciones/reportes/pdf/reporte10.pdf

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Construcción y deducción de la fórmula del plano tangente a una superficie apoyado en GeoGebra 3D

Reiman **Acuña** Chacón
Instituto Tecnológico de Costa Rica y Universidad de Costa Rica
Costa Rica
reiacuna@itcr.ac.cr,
Bolívar **Ramírez** Santamaría
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
bolivar.ramirez@ucr.ac.cr

Resumen

La obra aquí consignada detalla la elaboración de un taller en el que se utiliza el software GeoGebra 3D para la construcción y deducción de planos tangentes a superficies dadas (no parametrizadas). La propuesta del trabajo se desarrolla por medio de una guía impresa o digital a dos columnas, en la cual los participantes postularán paso a paso el diseño de diferentes ejercicios junto con la ayuda de los facilitadores. Se concluye haciendo un análisis constructivo del trabajo realizado y la ponderación de limitaciones o recomendaciones por parte del público participante.

Palabras clave: GeoGebra 3D, planos tangentes, tecnología, recurso didáctico, superficies.

Introducción

En el ámbito de la Educación Matemática es bien conocido el paquete computacional GeoGebra que, desde su lanzamiento, ha tenido un enorme auge como un recurso didáctico al combinar elementos de Aritmética, Geometría, Álgebra, Análisis, Cálculo, Probabilidad y Estadística. Más recientemente, este software ha ofrecido una vista geométrica en tres dimensiones, la cual puede estar sujeta a experiencias pedagógicas provechosas y de gran valor en la enseñanza y aprendizaje.

En este sentido, Madrid (2015) indica que las diversas ventajas de GeoGebra "… han motivado su utilización durante los últimos años en numerosas experiencias en el aula en distintos niveles educativos para favorecer la comprensión de distintos contenidos…" (p. 32). Aunado a ello, los profesores concuerdan que el software desde su interfaz en 3D facilita el aprendizaje sobre objetos tridimensionales, permitiendo un mayor éxito en el proceso de generar nuevas estructuras cognitivas en los educandos (Baltaci y Yildiz, 2015).

En fin, este software de geometría dinámica permite manipular de forma virtual superficies en tres dimensiones, lo que favorece el razonamiento matemático por medio de los modelos visuales, beneficiando el aprendizaje significativo.

En concordancia con lo expuesto anteriormente, si se revisan textos y cursos universitarios que estudian temas relacionados al cálculo diferencial en varias variables, es casi una constante que se toquen contenidos a fines a planos tangentes a superficies, pero desde una perspectiva algebraica y simbólica, dejando de lado la parte visual.

Por lo anterior, este taller tiene como objetivo la construcción y deducción de planos tangentes a superficies dadas (no parametrizadas) apoyado en la visualizacion por medio del sofware GeoGebra en tres dimensiones.

Aspectos Teóricos

Una adecuada práctica visual en el proceso de enseñanza y aprendizaje para ciertos contenidos de Matemática puede contribuir a mejorar la comprensión de estos, además que permite indagar y profundizar más lo estudiado (Rojas y Esteban, 2012). Bajo esta premisa, no simplemente se trata de ver, sino que la persona quien aprende, sea capaz de representar, modelar, transformar, razonar, documentar y comunicar la información visual en su pensamiento y lenguaje.

De hecho, desde hace más de 20 años existen especialistas en Educación Matemática que han insistido en una buena visualización en aquellos contenidos que lo ameriten. Así lo menciona Hitt (1998), al escribir que "Es importante promover el uso de varios sistemas de representación, y el uso reflexivo de nuevas tecnologías que permitan dar significado concreto a las nociones matemáticas" (p. 42).

Abonado a ello, el uso correcto de la visualización por medio de algún paquete computacional, además de estimular el razonamiento matemático, posee un carácter motivador, ya que promueve el interés hacia los temas estudiados y es un mecanismo efectivo para salir del aprendizaje memorístico y repetitivo (Rojas y Esteban, 2012).

Dado lo anterior, es necesario facilitar la comprensión de un concepto matemático con ayuda de una imagen visual, que puede ser aportada por alguna herramienta informática, y que a su vez permita hacer relaciones y conversiones entre la parte gráfica y la parte algebraica, insistiendo que "El uso reflexivo y creativo de las nuevas tecnologías permite dar un significado concreto a las nociones matemáticas" (Gatica y Ares, 2012, p. 105).

Dado lo anterior es imperativo buscar "… herramientas que ayuden a la visualización de los conceptos, como es el caso del uso de la computadora para aprovechar el dinamismo que ofrece y favorece actvidades de manipulación" (Gatica y Ares, 2012, p. 93), siendo el uso de GeoGebra 3D un excelente insumo para este fin, ya que brinda a los educandos una visualización más clara y por ende permite una mejor comprensión (Mora, 2018).

De la página oficial de GeoGebra[1], se lee explícitamemte

[1] Consultar en https://www.geogebra.org/about

> GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa fácil de usar. GeoGebra es también una comunidad en rápida expansión, con millones de usuarios en casi todos los países. GeoGebra se ha convertido en el proveedor líder de software de matemática dinámica, apoyando la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM: Science Technology Engineering & Mathematics) y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje en todo el mundo.

En este punto, y como se escribió brevemente en la introducción, el uso adecuado de GeoGebra es sumamente beneficionso en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, principalmente en los procesos de visualización, por lo que enfatizar más en ello es reiterativo. Lo novedoso es su interfaz en tres dimensiones, la cual es un instruento que se puede explotar pedagógicamente aún más.

Por otro lado, y por la naturaleza de este taller y para efectos del mismo, es un menester tener claro las definiciones de los conceptos matemáticos que se van a manipular:

- Las cuádricas son superficies cuadráticas, de las cuales se usarán las más elementales y con ecuaciones sin términos mixtos, es decir, que representan superficies no rotadas. Entre ellas: el elipsoide, el paraboloide hiperbólico, el hiperboloide de una hoja, el hiperboloide de dos hojas y el cono.
- Se llama plano tangente a una superficie S en un punto P de la misma, al plano que contiene todas las tangentes a las curvas trazadas sobre la superficie por el punto P.
- Al punto $P \in S$, definido anteriormente, se le llama punto de tangencia.

Metodología del taller

Para el abordaje de este taller es necesario que el participante tenga los siguientes conocimientos previos:

- Nociones de cálculo diferencial e integral en varias variables, específicamente, que pueda calcular el gradiente para una superficie dada.
- Nociones de álgebra lineal, específicamente, geometría vectorial, donde pueda calcular la norma de un vector, el producto punto y sepa definir un plano vectorialmente.

Para efectos del taller, las nociones anteriores se pueden consultar en Pita (1995) y Mora (2017). Por otro lado, es importante advertir que la naturaleza del taller consistirá en generar un conocimiento didáctico a docentes como a estudiantes en el área de la Educación Matemática, por medio de la herramienta tecnológica descrita, con el fin de realizar clases amenas y comprensibles. De igual forma, cualquier interesado en el área puede proveerse de ideas para esta actividad.

Con esto, el modelo de esta taller es pedagógico. De acuerdo con Alfaro y Badilla (2009), el taller pedagógico se considera como una modalidad didáctica que permite compartir diferentes experiencias académicas, intercambiar criterios, conocimientos e ideas entre los participantes. Dentro de éste se permite realizar diversos ejercicios y actividades, que permitan un proceso de enseñanza y aprendizaje, y que deben ser previamente planificadas, de tal forma que los partícipes "aprendan haciendo" y construyan sus propios significados, lo cual conlleva a la validación de sus procesos cognitivos.

Así, el taller estará caracterizado por momentos (o etapas) que permitan abordar la importancia del tema. De esta manera, se desarrollarán tres momentos en el mismo.

El primero consiste en hacer una breve explicación del GeoGebra 3D; esto es, el uso de las herramientas básicas y la construcción de algunas superficies y planos, como se muestra en la Figura 1.

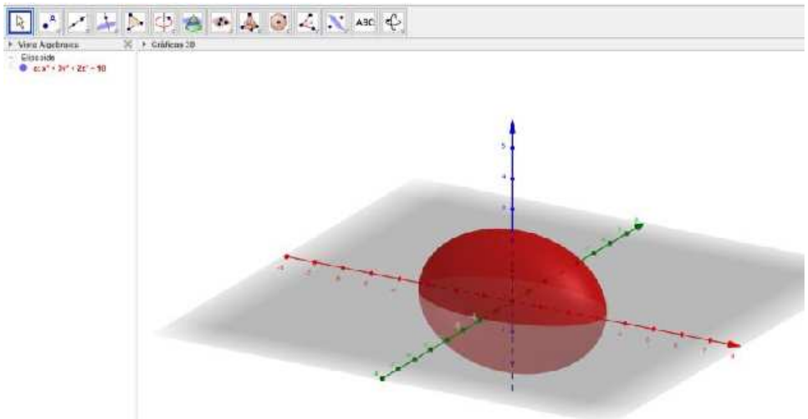
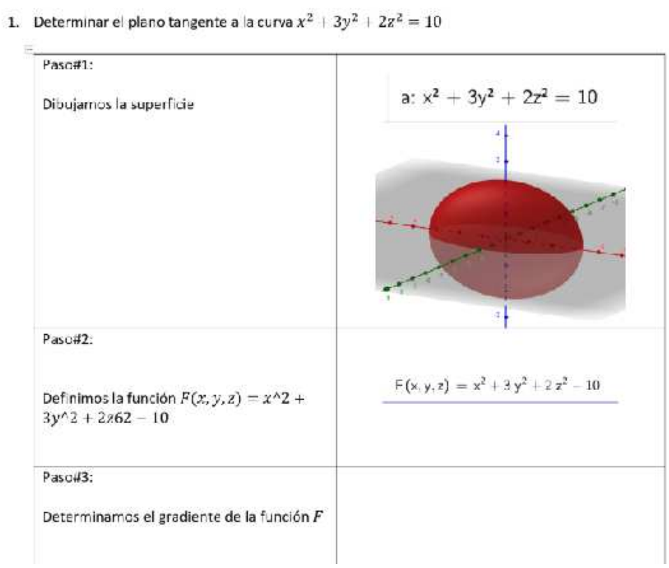


Figura 1. Vista de una superficie en GeoGebra 3D.

El segundo momento de este taller consiste en el uso de una guía. Esta guía contiene una serie de ejercicios en los cuales, para cada uno, existen dos columnas. La primera columna debe llenarse con las instrucciones algebraicas para la deducción del plano tangente y la segunda columna se llena con imágenes recortadas del GeoGebra 3D de su visualización. Ver Figura 2.



1. Determinar el plano tangente a la curva $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 10$

Paso#1: Dibujamos la superficie	a: $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 10$
Paso#2: Definimos la función $F(x, y, z) = x\char`^2 + 3y\char`^2 + 2z62 - 10$	$F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 10$
Paso#3: Determinamos el gradiente de la función F	

Figura 2. Vista de una superficie en GeoGebra 3D.

En tal caso, habrán tantos recortes como pasos necesarios para lograr la deducción. Realizado esto, se usará el GeoGebra 3D para animar mediante un botón la aparición del texto y, simultáneamente, la aparición del plano tangente a la superficie dada. La Figura 3 muestra la idea final de lo que se desea hacer.

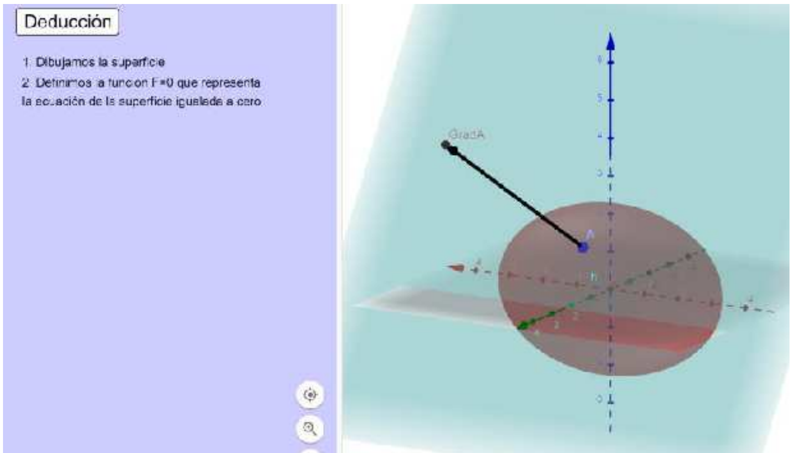


Figura 3. Deducción del plano tantente en GeoGebra 3D. Paso a paso.

Para el tercer momento de este taller los participantes junto a los facilitadores realizarán un análisis del trabajo documentado mediante un cuestionario, el cual será brindado por los autores del taller. Con esto, se da término a la actividad en el tiempo dispuesto para dicha sesión.

Es importante considerar que “ la implementación de tecnologías que permitan a los estudiantes ser diseñadores activos mediante el uso de programas, aplicaciones y demás, facilita que desarrollen mejor las habilidades de comprensión en todos los campos del conocimiento al que se expongan” (Caro, 2015, p. 739) por lo que la vinculación de la tecnología al taller pedagógico exhorta un control y flexibilidad sobre los tiempos en relación al alcance de las deducciones que se produzcan.

Conclusiones

El desarrollo de este taller permite reflexionar a los partícipes sobre la implementación de actvidades didácticas, donde se utiliza GeoGebra en tres dimensiones, y sus bondades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos donde la visualización es un componente pedagógico significativo.

Asimismo, la experiencia de abordar el taller es una forma de exhortar a la comunidad docente en Matemática para buscar nuevos tratamientos metodológicos en temas que así lo requieran, donde se haga un uso reflexivo y adecuado de las tecnologías de información y comunicación, como es en este caso, GeoGebra 3D.

Referencias y bibliografía

Alfaro, A. & Badilla, M. (2009). *El taller pedagógico, una herramienta didáctica para abordar temas alusivos a la Educación Ciudadana*. Proyecto de investigación: Conceptualización y percepción de la Educación Cívica por parte de los docentes de Estudios Sociales y los y las estudiantes de décimo y undécimo años de la Enseñanza Media. San José, Vicerrectoría de Investigación, Universidad de Costa Rica.

Baltaci, S. & Yildiz, A. (2015). GeoGebra 3D from the perspectives of elementary pre-service mathematics teachers who are familiar with a number of software programs. *Cypriot Journal of Educational Sciences*, *10*(1), 12-17.

Caro, A. (2015). Introducción a la Geometría 3D con GeoGebra 5.0. *Revista Colombiana de Matemática Educativa, 1*(1), *738-742.*

Gatica, S. & Ares, O. (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. *Revista de Educación Matemática y TIC*, *1*(2), 88-107.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Revista Educación Matemática, 10*(02), 23-45 .

Madrid, M. (2015). Enseñando geometría: GeoGebra en 3D en la formación de maestros. *Épsilon-Revista de Educación Matemática, 32*(2), 31-38.

Mora, L. (2018). Parametrizaciones de curvas y superficies: Construcción de sólidos con GeoGebra 3D. *Revista digital Matemática, Educación e Internet, 19*(1), 1-18. doi: https://doi.org/10.18845/rdmei.v19i1.3852

Mora, W. (2017). *Cálculo en varias variables. Visualización interactiva*. (1er. Ed.). Revista digital Matemática, Educación e Internet. Recuperado de https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/LibrosCDF/CalculoEnVariasVariables/CDF2017-Internet-WMora-ITCR-CalculoVariasVariables.pdf

Pita, C. (1995). *Cálculo Vectorial*. (1er. Ed.). Juárez: Prentice Hall Hispanoamérica S.A.

Rojas, L. & Esteban, V. (2012). Geogebra y Applets Aplicados a la enseñanza y aprendizaje del cálculo. Simposio Ibero americano de aplicaciones y tecnologías de la información y comunicación.

O conhecimento matemático para o ensino: um olhar a partir dos professores em formação continuada

Eleni **Bisognin**
Universidade Franciscana
Brasil
eleni@ufn.edu.br

Luis Sebastião **Barbosa** Bemme
Universidade Franciscana
Brasil
luisbarbosab@yahoo.com

Vanilde **Bisognin**
Universidade Franciscana
Brasil
vanildebisognin@gmail.com

Silvia Maria de Aguiar Isaia
Universidade Franciscana
Brasil
silviamariaisaia@gmail.com

Resumo

Neste artigo são apresentados resultados parciais de uma pesquisa realizada com professores em formação continuada sobre o conhecimento matemático para o ensino. Foram apresentadas quatro questões aos professores participantes de um curso de pós-graduação em Ensino de Matemática, envolvendo padrões e regularidades, com o propósito de analisar seus conhecimentos comuns e especializados conforme Ball e colaboradores, sobre esse conteúdo. Para análise das respostas foram elencadas algumas categorias relativas ao conhecimento matemático. Os resultados mostram que a pesquisa realizada identificou saberes importantes e fundamentais que compõem o conhecimento matemático específico do professor, mas, apesar de as ideias desenvolvidas por (Shulman, 1986) Ball e colaboradores, serem discutidas em programas de formação de professores quanto ao aspecto teórico, ainda são necessárias investigações sobre a prática, principalmente quanto ao conhecimento matemático para o ensino.

Palavras chave: Conhecimento matemático para o ensino, Formação continuada de professores, Padrões e regularidades.

Introdução

Muitas pesquisas, com diferentes referenciais teóricos estão sendo desenvolvidas atualmente sobre a formação de professores e o conhecimento matemático que um professor deve ter para ensinar matemática. (Sánchez, 2011) coloca que a pergunta central dessa área de pesquisa é: "que tipo de conhecimentos e habilidades uma pessoa precisa para ser um bom professor de Matemática"? O autor coloca ainda que há um reconhecimento de que possuir um conhecimento matemático é uma condição necessária para ser um bom professor de Matemática, mas só essa condição não é suficiente. Muitos outros conhecimentos são necessários tais como o conhecimento matemático para o ensino, o conhecimento pedagógico para o ensino, entre outros.

O conhecimento matemático dos professores sobre os tópicos que irão ensinar é um dos aspectos importantes para promover a aprendizagem dos alunos e irá influenciar de modo significativo o modo de planejar as tarefas que serão trabalhadas em sala de aula.

(Shulman, 1986), diferencia três categorias de conhecimentos que compõem a base para o ensino: o conhecimento específico do conteúdo; o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento curricular. Nesse trabalho, a partir das ideias sobre o conhecimento matemático para o ensino, tendo como referencial teórico os trabalhos de (Ball; Thames; Phelps, 2008; Moreira & David, 2005) y (Shulman, 1986, 1987), solicitou-se a oito professores de Matemática, cursando mestrado ou doutorado em Ensino de Matemática, que respondessem a quatro questões referentes ao conteúdo de padrões e regularidades. Neste artigo, são discutidas as respostas dadas por esses professores, com base em alguns critérios elencados, com vistas a analisar o conhecimento matemático para o ensino do conteúdo em pauta.

Referencial teórico

Ser professor é uma tarefa complexa e sua formação não se extingue com a conclusão de uma graduação ou pós-graduação na respectiva área. Para entender as necessidades do professor em sua prática, é necessário investigar seu conhecimento dos conteúdos com os quais trabalha, bem como da metodologia de ensino de tais conteúdos e de como estes se distribuem no currículo da disciplina, nos diferentes níveis de ensino. Esse conhecimento é produzido no decorrer dos cursos de formação inicial e continuada, mas também nas práticas desenvolvidas ao longo de sua trajetória de professor.

Quanto ao conhecimento dos professores, segundo Serrazina (2012), há um consenso de que é indispensável que o professor domine os conteúdos matemáticos que irá ensinar. No entanto, além de conhecer os tópicos que irá ensinar é também necessário saber como ensiná-los.

Nas últimas décadas há muitos estudos sobre o conhecimento do professor para ensinar Matemática. Dentre eles estacamos os trabalhos de (Ball; Thames; Phelps, 2008); (Serrazina, 2012); (Trivilin, Ribeiro, 2015); (Moreira e David, 2005) y (Cury, Bisognin, 2017). Esses trabalhos têm como referencial teórico as ideias de (Shulman, 1986, 1987).

(Shulman, 1986), apresenta três categorias de conhecimento do professor: conhecimento do conteúdo da disciplina, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular, sendo que o segundo tipo de conhecimento foi definido como aquele que "que vai além do conhecimento da disciplina em si para a dimensão do conhecimento da disciplina para ensinar”. (p. 9, grifo do original). Inspirados nos trabalhos de (Shulman, 1986), os autores (Ball,Tames e Phelps, 2008), estabelecem o que chamam de “conhecimento matemático para o ensino”, definido como “o conhecimento matemático necessário para levar adiante o trabalho de ensinar Matemática”. (p. 395). Os mesmos autores levantam a hipótese de que o conhecimento do conteúdo, mencionado por Shulman, possa ser subdividido em duas categorias (“conhecimento comum do conteúdo” e “conhecimento especializado do conteúdo”) e que o conhecimento pedagógico do conteúdo possa ser dividido em “conhecimento do conteúdo e dos estudantes” e “conhecimento do conteúdo e do ensino”.

O conhecimento comum do conteúdo não é exclusivo do professor de Matemática. Por exemplo, um profissional de outros cursos da área de Ciências Exatas pode saber o conteúdo matemático que vai ser ensinado, reconhecer respostas erradas ou definições inadequadas apresentadas em livros-texto.

O conhecimento especializado do conteúdo compreende os conhecimentos e habilidades matemáticas exclusivos do professor. Por exemplo, distinguir entre as representações de padrões e regularidades e saber apresentá-las para os alunos de diferentes níveis de ensino. (Ball, Thames e Phelps, 2008), salientam que reconhecer uma resposta errada é conhecimento comum do conteúdo, mas prestar atenção nos seus padrões e pensar nos seus significados é conhecimento especializado do conteúdo.

Metodologia

A pesquisa relatada parcialmente neste artigo, faz parte de um projeto mais amplo, envolvendo pesquisadores bem como orientandos de mestrado e doutorado do Programa de Pós-Graduação da área de Ensino, sobre o conhecimento matemático para o ensino.

Inicialmente foram apresentadas a oito professores em formação continuada, alunos de um programa de pós-graduação em Ensino de Matemática, quatro atividades sobre o conteúdo de padrões e regularidades e foi solicitado aos mesmos que apresentassem as soluções das atividades propostas.

Numa segunda etapa, com base nos pressupostos teóricos descritos, analisou-se as respostas dos professores e como os professores mobilizaram os conhecimentos matemáticos para resolução das questões. Essa análise foi feita seguindo alguns critérios adaptados (Flores-Medrano et al, 2016), referentes ao conhecimento comum do conteúdo e o conhecimento especializado do conteúdo. Quanto ao conhecimento matemático do professor de Matemática, (Flores-Medrano et al, 2016), subdividem em três itens: conhecimento dos temas matemáticos, isto é, um conhecimento profundo do conteúdo; conhecimento da estrutura matemática; conhecimento da prática Matemática, isto é, como se procede e como se produz em Matemática. Quanto ao conhecimento comum do conteúdo, baseado nos autores citados, selecionou-se os seguintes critérios de análise: *a) resolvem corretamente os problemas matemáticos, isto é, se os procedimentos matemáticos empregados estão corretos; b) a linguagem e as representações matemáticas utilizadas são corretas e claramente descritas; c) não atendem aos critérios anteriormente definidos.*

Do mesmo modo quanto ao conhecimento especializado do conteúdo foram selecionados os seguintes critérios de análise: *a) apresentam ideias matemáticas; b) caracterizam um conceito incluindo imagens associadas e apresentam conhecimento sobre os distintos registros de representação; c) apresentam conhecimento sobre as propriedades do conteúdo matemático* *abordado e suas aplicações; d) ilustram com exemplos destacando aspectos matemáticos; e) expõem com clareza o raciocínio matemático utilizado; f) estabelecem conexões entre os tópicos que estão estudando com tópicos matemáticos já estudados; g) fazem generalizações; h) estabelecem relações entre os conceitos fazendo conexões entre os conteúdos analisados desde um ponto de vista avançado e um ponto de vista mais elementar; i) não atendem aos critérios anteriormente definidos.*

O desenvolvimento do conhecimento comum e do conhecimento especializado do conteúdo auxilia na construção do conhecimento do conteúdo para o ensino.

As respostas das questões propostas são analisadas com base nos pressupostos teóricos aqui apresentados.

Apresentação e Análise dos Resultados

Nessa sessão do texto apresentaremos as análises e discussões a partir dos dados levantados. São analisadas apenas duas atividades devido ao espaço. A seguir, segue a questão 01.

Questão 01. Uma corda de um circo estava enfeitada com esferas e cilindros como mostrada abaixo:

a) Qual é o grupo de figuras que se repete?
b) Se forem utilizadas 30 esferas, quantos cilindros existirão? E quantos grupos?
c) Analise o quadro abaixo. Explique o raciocínio usado para completá-lo.

Número de grupos	*Número de esferas*	*Números de cilindros*	*Número total de objetos*
1	*3*	*2*	*5*
		4	
	9		
4			

d) Estabeleça uma lei em que possa ser encontrado o número de esferas e de cilindros. Faça o mesmo com o número total de objetos. Explique seu raciocínio.

O objetivo dessa questão era verificar se os alunos-professores conseguiam operar matematicamente com conceitos ligados ao conteúdo de sequência numérica, termo geral de uma sequência numérica e progressão aritmética. O Quadro 01 apresenta uma síntese das respostas enquadradas em cada um dos critérios de análise já explicitados na metodologia, vale ressaltar que uma mesma resposta, em alguns casos, foi classificada em mais de um critério.

Quadro 1
Síntese do número de resposta da questão 01 correspondente a cada critério.

Tipo de conhecimento	**Critérios de análise**	**Questão 01**				
		a)	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**

Conhecimento comum do conteúdo	a) Resolvem corretamente os problemas matemáticos	6	5	6	3	2
	b) A linguagem e as representações matemáticas utilizadas são corretas e claramente descritas	0	0	1	5	4
	c) Não atende aos critérios anteriormente definidos	2	3	1	0	2
Conhecimento especializado do conteúdo	a) Apresentam ideias matemáticas	6	5	7	6	6
	b) Caracterizam um conceito incluindo imagens associadas e apresentam conhecimento sobre os distintos registros de representação	0	0	1	0	0
	c) Apresentam conhecimento sobre as propriedades do conteúdo matemático abordado e suas aplicações	0	0	1	0	1
	d) Ilustram com exemplos destacando aspectos matemáticos	0	0	0	0	0
	e) Expõem com clareza o raciocínio matemático utilizado	6	5	1	5	4
	f) Estabelecem conexões entre os tópicos que estão estudando com tópicos matemáticos já estudados	0	0	0	0	0
	g) Fazem generalizações	0	0	0	0	0
	h) Estabelecem relações entre os conceitos fazendo conexões entre os conteúdos analisados desde um ponto de vista avançado e um ponto de vista mais elementar	0	0	0	0	0
	i) Não atende aos critérios definidos	2	3	1	0	2

Fonte: Dados da pesquisa.

No que tange ao conhecimento comum do conteúdo obervamos que a maioria das respostas, nas cinco alternativas, foram consideradas corretas no entanto, o ponto central dessa análise diz respeito ao fato de que os professores-alunos nem sempre conseguirem utilizar uma linguagem e uma representação matemática adequada para expressar seu modo de resolução.

Sobre essa questão pontuamos que os conhecimentos que o professor possui impacta no modo como organiza seu ensino e como orienta esses processos. Isso corrobora com que (Fiorentini, 2008) sublinha ao dizer que,

> A formação matemática, de outra parte, visa proporcionar ao futuro professor o domínio do campo conceitual da matemática historicamente produzida. Essa formação, muitas vezes, limita-se ao domínio técnico-formal e, na melhor das hipóteses, enciclopédico da matemática (p. 51).

Outro aspecto preocupante que apareceu, nas alternativas dessa questão, foram as resoluções apresentadas de modo incorreto, ou seja, os professores-alunos não conseguiram compreender o que a questão solicitava, ou ainda, não possuíam conhecimento necessário para resolvê-la.

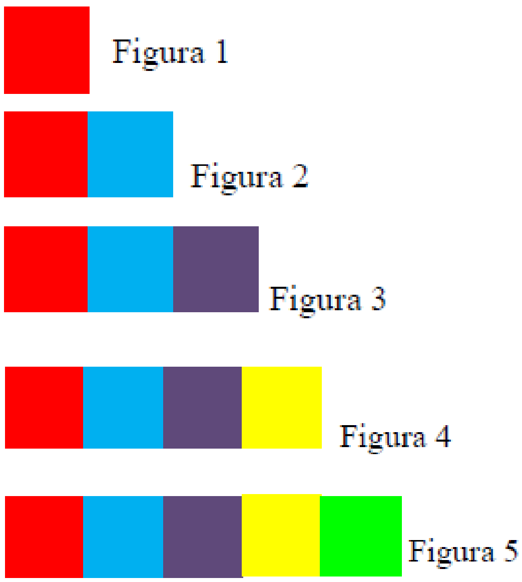
No que tange aos conhecimentos especializados do conteúdo, as respostas centram-se no fato de quase todas as resoluções, apresentaram ideias matemática e as resoluções apresentadas estavam expostas com clareza e permitia identificar o raciocínio desenvolvido.

O destaque dessa questão está no fato de que somente um professor-aluno utilizou as propriedades e suas aplicações para resolver a questão proposta, esse mesmo sujeito, em outra alternativa dessa questão, apresenta distintos registros de representação ao propor a solução pedida. Ou seja, observamos que o conhecimento matemático desse sujeito é mais elaborado e suas respostas são mais representativas para a área.

(Shulman, 1987), pontua que o professor tem que ter a capacidade de transformar o conhecimento do conteúdo que ele possui em modos pedagogicamente poderosos para os estudantes, considerando suas experiências. No entanto, acreditamos que isso só será possível se o professor tiver um sólido conhecimento da área na qual ele atua.

A seguir apresentamos a questão 02.

Questão 02. As figuras abaixo são formadas por quadrados de 1cm de lado.



a) Determine o perímetro de cada figura e escreva a sequência formada por esses valores.
b) Qual é o perímetro da Figura 6? E da Figura 8?
c) Quantos blocos terá uma figura com perímetro de 20 cm? E 30 cm?
d) É possível escrever uma lei na qual se possa encontrar qualquer elemento dessa sequência?

O objetivo dessa questão foi identificar em que medida os professores-alunos conseguiam estabelecer relação com a sequência apresentada e outros conhecimentos no campo da Matemática. O Quadro 02 apresenta uma síntese das respostas e suas classificações de acordo com os critérios definidos.

Quadro 2
Síntese do número de resposta da questão 02 correspondente a cada critério.

Tipo de conhecimento	**Critérios de análise**	**Questão 01**			
		a)	**b)**	**c)**	**d)**
Conhecimento comum do conteúdo	a) Resolvem corretamente os problemas matemáticos	5	5	6	5
	b) A linguagem e as representações matemáticas utilizadas são corretas e claramente descritas	2	2	1	2
	c) Não atende aos critérios definidos	1	1	1	1

Conhecimento especializado do conteúdo	a) Apresentam ideias matemáticas	7	7	7	6
	b) Caracterizam um conceito incluindo imagens associadas e apresentam conhecimento sobre os distintos registros de representação	0	0	0	1
	c) Apresentam conhecimento sobre as propriedades do conteúdo matemático abordado e suas aplicações	0	0	0	2
	d) Ilustram com exemplos destacando aspectos matemáticos	0	0	0	0
	e) Expõem com clareza o raciocínio matemático utilizado	4	4	3	4
	f) Estabelecem conexões entre os tópicos que estão estudando com tópicos matemáticos já estudados	0	0	1	2
	g) Fazem generalizações	0	0	0	1
	h) Estabelecem relações entre os conceitos fazendo conexões entre os conteúdos analisados desde um ponto de vista avançado e um ponto de vista mais elementar	0	0	0	0
	i) Não atende aos critérios definidos	1	1	1	1

Fonte: Dados da pesquisa.

Assim como a primeira questão, o conhecimento comum do conteúdo teve maior frequência de respostas no primeiro critério. De modo geral, nesse item os resultados apresentados foram melhores, pois, somente um professor-aluno apresentou respostas equivocadas para a questão.

No que diz respeito ao conhecimento especializado do conteúdo, os resultados também não diferem muito da questão 01. O destaque dessa questão está no fato de que um professor-aluno conseguiu estabelecer generalizações em uma das alternativas, e em três momentos distintos foi possível identificar conexões entre os tópicos abordados na questão com outros pertencentes ao campo da Matemática.

Esses resultados indicam que os conhecimentos matemáticos desses sujeitos são mais refinados e, portanto, suas propostas de atividades de ensino podem favorecer os processos de aprendizagem. Sobre essa questão (Marcelo Garcia, 1999) pontua que, “Quando o professor não possui conhecimentos adequados sobre a estrutura da disciplina que está a ensinar, o seu ensino pode apresentar erradamente o conteúdo aos alunos. O conhecimento que os professores possuem do conteúdo a ensinar também influencia o que e como ensinam” (p. 87).

A seguir tecemos algumas considerações sobre os dados discutidos nesse trabalho.

Considerações finais

Nesse artigo buscamos discutir os conhecimentos – comum e especializado do conteúdo – que professores-alunos em um Programa de Pós-Graduação da área de ensino possuem sobre os conceitos de padrões e regularidades.

A organização dos dados a partir dos critérios de análise nos permitiu levantar dois pontos centrais sobre o assunto. O primeiro dele diz respeito ao fato de que os conhecimentos específicos do campo da Matemática dos professores-alunos, ainda se mostram fragilizados, o que certamente impacta no modo como esse professor irá elaborar e propor atividades de ensino.

O segundo ponto diz respeito à necessidade de ações, em programas de pós-graduação, que permitam ao professor-aluno (re)construir conceitos da Matemática da Educação Básica. Ou seja, os programas de pós-graduação também precisam considerar a possibilidade de incluir em suas ações formativas disciplinas que permitam ao professor, em processo de formação, discutir, revisitar e se apropriar de conceitos ligados ao campo específico da área em que atuam.

Referências Bibliográficas

Ball, D. L.; Thames, M. H.; Phelps, G.(2008). Content knowledge for teaching: what makes it special*?* *Journal of Teacher Education,* 59, 5, 389-407.

Cury,H.N.; Bisognin,E.; (2017). Conhecimento matemático para o ensino: um estudo com profesores em formação inicial e continuada. *Revista Thema*.14,3, 241-249.

Fiorentini, D. A. (2008). Pesquisa e as Práticas de Formação de Professores de Matemática em face das Políticas Públicas no Brasil. *Revista Bolema*, 21, 43-70.

Flores-Medrano, E., Montes, M. A. (2006). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Professor em las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Revista Bolema*, 30, 204-221.

Marcelo Garcia, C. (1999). *Formação de professores: para uma mudança educativa.* Trad. Isabel Narciso, Porto Editora.

Moreira, P. C; David, M. M. M. S.(2005). *A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar*. Belo Horizonte: Autêntica.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, 5, 129-145.

Serrazina,M.L.M.;(2012).Conhecimento matemático para ensinar: papel da planificação e da reflexão na formação de professores. *Revista Eletrônica de Educação*, São Carlos, SP, 6,1, 266-283.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15,2, 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review,* 57,1, 1-22.

Trivilin, L. R., Ribeiro, A. J. (2015). Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. *Revista Bolema*, 29, 38-59.

Conhecimentos didático-matemáticos mobilizados por licenciandos sobre números racionais

Eleni **Bisognin**
Universidade Franciscana
Brasil
eleni@ufn.edu.br

Patricia **Pujol** Goulart Carpes
Universidade Franciscana
Brasil
patriciacarpes@unipampa.edu.br

Resumo

Neste trabalho são apresentados resultados parciais de uma pesquisa que visa identificar e discutir os conhecimentos didático-matemáticos sobre números racionais mobilizados por licenciandos de Matemática. Foram propostas questões aos participantes de uma oficina a fim de mobilizar conhecimentos do professor para ensinar números racionais. Os dados foram obtidos por meio dos registros escritos das soluções das atividades e foram analisados considerando-se a dimensão didática com ênfase na faceta epistêmica do modelo de Conhecimentos Didático-Matemáticos (CDM) definido por Godino, pela qual é possível a identificação e análise de níveis de conhecimento do professor. Os resultados apontam que os licenciandos, em sua grande maioria, apresentam concepções errôneas e/ou não reconhecem as diferentes representações do número racional. Embora os alunos tenham apresentado dificuldades na resolução das atividades propostas durante a oficina, eles tiveram a oportunidade de (re)conhecer e refletir sobre os conhecimentos necessários ao professor para ensinar esse tópico.

Palavras chave: Números racionais, dimensão epistêmcia, formação inicial de professores.

Introdução

O presente trabalho tem como propósito apresentar resultados parciais de uma investigação que visa identificar e analisar os conhecimentos didático-matemáticos sobre números racionais mobilizados por licenciandos em Matemática, durante uma formação realizada, tendo por base a perspectiva dos Conhecimentos Didático-Matemáticos, (CDM), desenvolvido por (Godino e colaboradores, 2009).

Em se tratando de um conteúdo específico, o conjunto dos números racionais, consideram-se pertinentes os conhecimentos do professor voltados diretamente ao tema. Segundo (Romanatto, 1997), a compreensão efetiva desse conjunto numérico deve perpassar por uma teia de relações nele incidentes ou emergentes. Desse modo, os números racionais devem ser compreendidos pelos seus diferentes significados, assim como, pelas suas possíveis representações – fração, decimal, porcentagem, pictórica, tendo em vista sempre a limitação de notação que cada representação de número racional pode apresentar

Pelas várias contextualizações que os números racionais permeiam, seus significados são distintos. (Kieren, 1980) aponta que a compreensão completa dos números racionais requer não só a compreensão de cada um dos significados separados, mas como eles se relacionam. Os construtos (ou significados) dos números racionais apontados pelo autor são parte/todo, quociente, medida, operador e razão.

A formação proposta aos licenciandos em Matemática na forma de uma oficina, intentou vislumbrar possibilidades de contextualizações dos números racionais para que os mesmos pudessem ter uma compreensão melhor deste conjunto, bem como estimular os conhecimentos pertinentes ao professor ao ensinar os números racionais, tais como: possíveis questionamentos aos alunos de suas concepções errôneas, emprego de diferentes tipos de registros - o que pode facilitar a compreensão, pois um registro pode ser mais familiar ao aluno do que outro e conhecimentos matemáticos específicos – o todo dividido em partes iguais, a soma de todas as partes recompõe o todo ou calcular partes de um todo (operar sobre uma quantidade).

As pesquisas voltadas para a formação inicial de professores têm crescido nos últimos anos e tem apontado para os diferentes e complexos conhecimentos que o professor dever ter para ensinar de forma idônea um tópico específico e, assim, facilitar a aprendizagem de seus alunos. Neste sentido, nesse trabalho, toma-se o modelo denominado Conhecimentos Didático-Matemáticos do professor, apresentado por (Godino, 2009), para analisar os conhecimentos didático-matemáticos mobilizados pelos licenciandos em Matemática sobre os números racionais, pois esse modelo considera distintas dimensões no processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo específico de Matemática.

Referencial teórico

O ensino de um conteúdo específico de Matemática requer do professor uma apropriação de uma teia de conhecimentos, por muitas vezes complexa, que envolvem conhecimentos didáticos e matemáticos. Entretanto, quais seriam os conhecimentos necessários para um processo de ensino idôneo? Diante desta complexidade, (Pino-Fan e Godino, 2015), elaboraram um sistema de catogorias para analisar os conhecimentos do professor de matemática, denominado Conhecimentos Didático-Matemáticos (CDM). As categorias elaboradas estão relacionadas com os tipos de ferramentas teóricas de análise do enfoque ontossemiótico do conhecimento e instrução matemática – EOS (Godino, 2017; Godino, Batanero & Font, 2007).

O modelo interpreta e organiza os conhecimentos do professor a partir de três dimensões: dimensão matemática, dimensão didática e a dimensão meta didático-matemática. A dimensão matemática refere-se a solidificação dos conhecimentos de tópicos específicos de matemática pelos professores. É subdividida em conhecimento comum, aquele que é suficiente para responder uma questão mais elementar, e no conhecimento ampliado, aquele que vincula um objeto de estudo com um nível mais avançado.

A dimensão didática é composta por seis facetas, sendo: a epistêmica (conhecimento especializado de matemática), a cognitiva (conhecimento de aspectos cognitivos dos alunos), a afetiva (conhecimento de aspectos emocionais, atitudes, crenças dos alunos), a interacional (conhecimento sobre as interações na sala de aula), a mediacional (conhecimento dos recursos e meios que potencializam a aprendizagem do aluno) e a ecológica (conhecimento sobre aspectos curriculares e sociais que influenciam a gestão da aprendizagem dos alunos).

A faceta epistêmica articula diferentes conhecimentos da matemática escolar com maior profundidade e amplitude, além disso, via esta faceta o professor deve ser capaz de mobilizar diversar representações de um objeto matemático, resolver a tarefa mediante distintos procedimentos, vincular o objeto matemático com outros objetos matemáticos de nível educativo que se ensina ou de níveis anteriores ou posteriores, compreender e mobilizar a diversidade de significados parciais para um mesmo objeto matemático (que integram o significado holístico para este objeto, proporcionar diversas justificativas e argumentos, e identificar os conhecimentos postos em jogo durante a resolução de uma tarefa matemática (Pino-Fan; Godino, 2015, p. 13).

A faceta meta didático-matemática é composta pelos conhecimentos sobre os critérios da idoneidade didática (avalia um processo de ensino e aprendizagem) e os conhecimentos sobre as normas e metanormas (a promoção da reflexão, da avaliação e da detecção das melhores potencialidades da prática).

Em se tratando de uma formação inicial de professores, (Godino et al, 2013), elaboraram um guia onde explicitam os componentes e indicadores da idoneidade de um programa de formação de professores. Desse modo, se o professor adquire competência em aplicar este instrumento pode ter facilitada sua tarefa de planejar, implementar e avaliar processos instrucionais idôneos. Os componentes de guia são as seis facetas (epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional, mediaciona e ecológica).

O guia apresenta indicadores para cada faceta implicada no processo de formação, a fim de precisar a faceta epistêmica, na qual será base para análise dos dados dessa pesquisa, toma-se os seus indicadores para detalhar. A faceta epistêmica é composta pelo conteúdo matemático, ecológico, afetivo, interacional, mediacional e cognitivo.

Os indicadores do conteúdo matemático num processo de formação consideram as situações-problema para a construção do conhecimento matemático, assim como, o selecionar e adaptar problemas que gere significado ao objeto de estudo (considerando as representações, argumentações e procedimentos). O conteúdo ecológico deve prever conhecimento das orientações curriculares, postura crítica e investigativa perante as inovações didáticas. (Godino et al, 2013)

O conteúdo cognitivo deve prever as etapas, as dificuldades recorrentes, obstáculos epistemológicos e conhecimentos prévios dos alunos para aquele nível de ensino do tópico específico de estudo. O conteúdo afetivo deve prever a competência em buscar situações pertinentes ao campo de interesse dos alunos e que sejam utéis na vida cotidiana dos mesmos. O conteúdo interacional deve prever a importância do diálogo e comunicação para a aprendizagem. O conteúdo mediacional deve prever reconhecer a importância dos recursos didáticos na aprendizagem de Matemática, assim como, as limitações e gestão do tempo. (Godino et al, 2013).

Nesse trabalho será utilizado o modelo denominado Conhecimentos Didático-Matemáticos para analisar os conhecimentos didático-matemáticos mobilizados pelos licenciandos em

Matemática sobre os números racionais.

Metodologia

A presente pesquisa tem uma abordagem qualitativa, isto é, ao pesquisador qualitativo os dados numéricos são interpretados de forma crítica, não os toma apenas pelo seu valor facial (Bogdan; Bilklen, 1994). Os dados apontados são próprios dos sujeitos da pesquisa e do contexto sociocultural de que participam e que, via uma análise qualitativa, oportuniza sua compreensão e discussão. Nesta ótica, o pesquisador é passível de apontar limitações e potencialidades na sua análise, assim como não possui um roteiro pré-determinado, rígido, a ser seguido.

Para tal análise foi desenvolvido um encontro de formação durante a Semana Acadêmica do curso de Matemática – Licenciatura de uma Instituição de Ensino Superior (IES) pública do Estado do Rio Grande do Sul, Brasil. A proposta constitui-se de uma oficina, de quatro horas, que visava mobilizar os conhecimentos didático-matemáticos sobre os números racionais dos participantes, futuros professores de Matemática.

Nesta oficina participaram 26 licenciandos e foi organizada em dois momentos. O primeiro tratando de como os participantes entendem/definem um número racional e como empregam esse conhecimento em uma situação-problema. Cada participante elaborou a sua resposta e, após, foi socializado com o grande grupo.

No segundo momento, os licenciandos se organizaram em trios e receberam duas situações-problema. Como havia 8 trios e 1 dupla, a cada 3 grupos receberiam os mesmos problemas. O passo seguinte foi unir os grupos com os mesmos problemas para que esses novos grupos elaborassem uma solução, ou seja, que fossem rediscutidos os procedimentos e estratégias de solução. E, por fim, foi compartilhado entre todos, as soluções e encaminhamentos elaborados e concomitantemente os formadores foram indicando e discutindo as possiblidades e definição do significado que o número racional assumiu nas situações-problema.

A seguir são apresentados os resultados dessa oficina. Os dados foram levantados por meio dos registros das atividades supracitadas dos licenciandos.

Resultados e discussões

A formação de professores de Matemática, em específico, tem avançado nas úlitmas décadas e apontando os conhecimentos que os professores devem possuir para um processo de ensino. Por meio do modelo CDM, toma-se, neste estudo, para análise dos dados a faceta epistêmica, pois engobla os conhecimentos comum, ampliado e especializado do professor em um tópico específico de matemática.

Via a faceta epistêmica é possível a identificação e análise de níveis de conhecimento do professor: o nível de aplicação e o nível de identificação. O primeiro no qual o licenciando deve fazer uso de diversas representações, conceitos, proposições, procedimentos e argumentos, empregar diversos significados parciais do objeto matemático para resolver atividades, neste caso com os números racionais. O segundo nível se refere a competência dos professores/licenciandos para identificar conhecimentos (linguísticos, conceitos, propriedades, procedimentos, argumentos) que emergem da resolução de uma atividade, neste caso de números racionais (Pino-Fan, Font; Godino, 2014).

Deste modo, para a análise dos dois níveis de conhecimentos supracitados, toma-se o primeiro momento da oficina no intuito de melhor descrever, discutir e compreender os dados, isto é, a mobilização (ou não) dos conhecimentos didáticos-matemáticos envolvendo os números racionais.

A primeira atividade tem o caráter de identificar/compreender o entendimento de número racional pelo licenciando, isto é, toma-se o primeiro nível de aplicação do conhecimento necessário ao professor de matemática do tópico específico, número racional. Ressalta-se que todas as atividades da oficina foram planejadas para o nível de Ensino Fundamental. Logo, toma-se o conhecimento do professor para esse nível de ensino.

As representações e conceitos apresentados pelos licenciandos, nesta oficina, muitas vezes se demonstraram inconsistentes, pois apenas uma parte, 27% dos participantes, apresentaram conceitos/argumentos coerentes para definirem o conjunto numérico dos números racionais. As falas dos alunos comprovam esse dado.

> São números que seguem um padrão entendido pela razão. São formados em uma representação fracionária de $\frac{a}{b}$ sendo a $a \in Z, b \in Z^*$. (Aluno A).
>
> São os decimais exatos e as dízimas periódicas. São os números na forma fracionária $\frac{a}{b}$, onde $a \in Z, b \in Z^*$. (Aluno B).

Todas as representações adotadas para identificar um número racional foram na forma de fração. Um aluno apenas citou os números decimais como representação do número racional (Aluno B). Não foi sugerida a representação de porcentagem do número racional ou considerando, ainda, no campo de definição/argumentação não foi explorado a ideia de classes de equivalência.

O restante dos participantes, que estão em semestres distintos (início ou fim da graduação) não identificam/compreendem os números racionais ou, ainda, apresentam algumas concepções erronêas sobre os mesmos. Eles os identificam como números fracionários, mas não como dízimas periódicas; identificam que pode ser um número decimal, com número de casas finito, mas não pode ser inteiro ou, ainda, que está contido no conjunto dos números irracionais.

> Números que são usados para representar resultados "quebrados", partes de algo. Usados em ocasiões onde se usa no lugar de nº inteiros. (Aluno C)
> Podemos reconhecer por números racionais aqueles que podem ser expressos pela forma de fração de modo que estejam divididos entre numerador e denominador. (Aluno D).

O Aluno D apresentou um conceito importante sobre os números racionais, de divisão (numerador e denominador). Entretanto, não mencionou quais números podem assumir o dividendo e divisor.

A segunda atividade visava mobilizar o segundo nível de conhecimento, de identificação. O quadro 1 ilustra uma situação-problema e possíveis encaminhamentos do professor.

Quadro 1

Atividade proposta aos licenciandos

Ana deu um meio de suas balas para sua irmã e Jorge deu também a sua irmã um quarto de suas balas. Quem deu mais balas? *A aluna 1* apresentou como resposta a essa situação que Jorge deu mais balas, pois deu o dobro de balas que Ana. *A aluna 2* apresentou como resposta que Ana tinha dado mais balas, pois deu a metade de suas balas e Jorge deu menos da metade de suas balas.
a) No seu entendimento, qual erro a Aluna 1 cometeu? Escreva como tu explicarias à aluna o erro cometido e quais encaminhamentos daria para a solução correta. b) A resposta da Aluna 2 poderia estar correta, porém sua justificativa não é suficiente para garantir que a resposta esteja correta. O que tu questionarias à aluna para garantir que sua resposta esteja correta? c) Quando tu ensinas os números racionais, quais são as dificuldades de aprendizagem mais recorrentes dos alunos?

Fonte: da pesquisa.

Todos os participantes identificaram o erro da Aluna 1, consideraram apenas os denominadores das frações para realizar a comparação da quantidade de balas dada. Os encaminhamentos propostos pelos licenciandos vão desde considerar que a fração ½ > ¼ seja pela divisão ou pela representação pictórica (retângulo dividido em partes iguais). Assim como, em questionar qual o todo (a quantidade de balas de cada pessoa) para daí, sim, saber quem deu mais balas. Sete alunos não apresentaram encaminhamentos para que a Aluna 1 pudesse compreeender corretamente a situação.

> Para explicar a ela a forma de encontrar a solução correta, diria para imaginar uma laranja, cortá-la em tantas vezes quanto é o denominador, pegar um só pedaço e ver qual é o maior. (Aluno E).
>
> Pegaria um pacote de balas e dividiria em 2 partes, de modo que o aluno perceba a quantidade dessa divisão. Em seguida usando o mesmo pacote dividiria em 4 partes iguais, e de mesmo modo perceber a quantidade de balas. (Aluno F).
>
> Explicaria a aluna que nesse caso ½ é maior que ¼, pois ao fazer a divisão entre numerador e denominador desses números certifica-se disso. (Aluno F).

Nos encaminhamentos para a resposta da Aluna 2, cerca de 46% dos licenciandos, apresentaram entendimentos pertinentes para elucidar a situação, isto é, apenas citaram que a Aluna 2 deveria perceber que não está definido a quantidade de balas. Apenas dois licenciandos apresentaram o questionamento ao aluno. A seguir, apresenta-se as duas questões propostas.

> Não é suficiente, pois não há a informação do total de balas que Ana tinha e nem do total de balas que Jorge tinha. Questionaria: “ E se o nº de

> balas de Ana for diferente do nº de balas de Jorge? (Aluno G).
>
> E se Jorge tivesse mais balas que Ana? Mas para a resposta estar correta: se eles realmente tivessem o mesmo número de balas, demonstre com desenho e frações a quantidade de balas dadas. (Aluno H).

Os outros 64% dos participantes apresentaram respostas inconsistentes ou errôneas, tais como: “a quantidade de balas de Ana teria quer ser maior que as de Jorge”, “que a aluna demonstrasse como ela chegou a este resultado”, “eu pediria para ela fazer uma representação” e “ pediria para a aluna responder os valores das divisões de ½ e ¼ para que assim visse que 0,5 é maior que 0,25”. Nota-se que no último caso o licenciando não considera qual é o todo de balas.

Para o item c) da atividade, dificuldades de ensino e aprendizagem envolvendo os números racionais, cinco participantes não apresentaram resposta. Quatro participantes não citaram o âmbito da dificuldade, mas consideram como dificuldades reconhecer e resolver frações, as operações, a comparação de frações com denominadores distintos. Dez participantes se referem às suas próprias dificuldades de aprendizagem, sendo elas: nomenclatura, soma e subração de frações, ordenação dos números racionais e conversão de fração para decimal. Seis participantes citaram dificuldades de ensino, sendo operações com frações, comparar e reconhecer uma fração como divisão. Percebe-se que o licenciando fala em dificuldade em aprendizagem (a sua própria) ou em ensino – dificuldade dos alunos (para quem já teve essa experiência em estágios por exemplo). Não mencionam ambos: ensino e aprendizagem. E quando falam em ensino, apontam as dificuldades dos alunos e, não as suas no ato de ensinar (pode ser pelo fato que não haja dificuldade ou por não refletirem sobre suas práticas de ensino).

Considerações finais

O presente trabalho teve como propósito apresentar e discutir os conhecimentos didático-matemáticos mobilizados por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática participantes de uma oficina sobre números racionais. Por meio das atividades propostas durante a oficina, sua resolução e discussão percebe-se que os licenciandos têm a perspectiva da consolidação dos conhecimentos matemáticos para atuação na docência. Entretanto, na perspectiva didática há um sombreamento. Dúvidas no que exatamente esses conhecimentos se referem ou como são “adquiridos”.

A discussão de quais são os conhecimentos que o professor deve ter para ensinar um tópico específico de matemática, para uma prática idônea, não é adquirido apenas numa oficina. Há distintos e/ou complementares estudos sobre quais e como esses conhecimentos se mobilizam na formação inicial ou continuada de professores.

Baseado na faceta epistêmica do CDM e dos dados dessa formação, verificou-se que os licenciandos tem uma preocupação maior em expor o conhecimento matemático, isto é, apresentar uma solução (normalmente cálculo como argumentação). E quando questionados sobre os encaminhamentos do professor para elucidar uma questão ou outra estratégia de solução ou registro, percebeu-se a limitação dos mesmos.

O denominado conhecimento especializado do professor, presente na faceta epistêmica, é um dos conhecimentos que diferencia o professor de Matemática. A situação elaborada para a distribuição de balas entre os irmãos emprega um conhecimento comum, a quantidade de balas para cada um. Entretanto, cabe ao professor, elaborar a questão ao nível de conhecimento dos alunos, assim como, quais serão os conhecimentos emergentes da situação e os diferentes registros de representação. Neste sentido, é cabível ao professor, questionar as diversas estratégias dos alunos buscando uma formalização dos conceitos/temas abordados.

Por fim, ressalta-se que durante a oficina foi possível (re)conhecer os conhecimentos necessários ao professor para ensinar: os matemáticos e os didáticos. No tema específico dos números racionais, os licenciandos tiveram a oportunidade de ter um olhar não apenas de aluno, mas, também, de professor.

Referências e Bibliografia

Bogdan, R.C.; Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação Matemática*: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora.

Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educacion Matemática*. Nº 20.

Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V. (2007) The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education,* 39, 1-2.

Godino, J. D. (2017) Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teoricas para la educacion matematica. 2017. In CONTRERAS et al (Eds.). *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>. Acesso em 20 jun 2018.

Godino, J.D. et al. (2013). Componentes e indicadores de idoneidade de programas de formação de professores em educação matemática. *REVEMAT*. Florianópolis, 8, 1, 46-74.

Kieren, T. (1980). Personal Knowledge of rational numbers: its intutive and formal development .In: Hiebert, J and Behr, M. (eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 162-180.

Pino-Fan, L.R; Font, V.; Godino, J. D. (2014). *El conocimiento didático-matemático de los professores*: pautas y critérios para su evaluacion y desarrollo. Disponível em < http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2014/09/Pino-Fan-et-al.-2014_Extracto-sin-portada.pdf> Acesso em 18 mai 2018.

Pino-Fan, L.R.; Godino, J.D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del professor. *Paradigma*, XXXVI, 1, 87-109.

Romanatto, M.C. (1997). *Número racional*: relações necessárias a sua compreensão. 169f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Investigando estratégias para aprimorar o desempenho em Cálculo I

Lilian **Nasser**
Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
lnasser.mat@gmail.com

Angela **Biazutti**
Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
biazuttiac@gmail.com

Marcelo **Torraca**
SEEDUC-RJ, Colégio Santa Mônica- RJ
ProjetoFundão, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
torraca@gmail.com

Jeanne **Barros**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
ProjetoFundão, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
jeanne@ime.uerj.br

Resumo

Tem-se observado nos últimos anos um alto índice de reprovaçãona disciplina Cálculo I, ministrada para calouros de cursos na área de Ciências Exatas, tanto em universidades públicas como particulares. O presente trabalho relata os caminhos para desenhar um roteiro a ser usado nessa disciplina, na fase inicial de aulas, que possa auxiliar os alunos que apresentam lacunas de aprendizagem, oriundas da Escola Básica. Pretende-se ainda utilizar este material para produzir um guia destinado a professores de Matemática deste nível, sugerindo abordagens para os conteúdos de modo a preparar melhor os futuros alunos de cursos de graduação na área de Ciências Exatas. Foi elaborado um teste diagnóstico para investigar a natureza das dificuldades, aplicado a 237 alunos de duas universidades do estado do Rio de Janeiro.

Palavras-chave: evasão e reprovação em Cálculo I; teste diagnóstico; atividades virtuais.

Introdução

Nos cursos de nível superior da área de Ciências Exatas, como Ciência da Computação, Matemática, Engenharias, dentre outras, nas universidades brasileiras, a disciplina inicial que aborda os fundamentos do cálculo diferencial e integral tem apresentado historicamente índices de aprovação insatisfatórios. A situação parece estar se agravando, visto que, no último semestre, foi observado um índice superior a 50% de reprovação em turmas de duas universidades públicas do Rio de Janeiro, sendo uma federal e outra estadual. É necessário, portanto, procurar as causas para estes resultados e sugerir soluções que possam ser utilizadas, tanto na sala de aula quanto fora dela, para reverter esta situação que pode, também, implicar em aumento dos índices de evasão.

Professores em outras universidades, que já se depararam com este problema, concluíram que a causa principal é um déficit na aprendizagem dos conteúdos da Escola Básica, conteúdos estes necessários para a compreensão dos tópicos estudados na disciplina Cálculo I. Para resolver o problema, incluíram na grade curricular uma disciplina denominada Pré-Cálculo, assim denominada pois contém as ferramentas básicas, em nível do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, para os alunos que iniciam os estudos de cálculo diferencial e integral. Foi verificado, entretanto, que o problema simplesmente mudou de lugar (Diefenthäler, 2017). Os altos índices de reprovação passaram a ocorrer nesta disciplina básica. A explicação parece ser que os alunos ficam desmotivados para estudar um conteúdo que já conhecem, segundo a opinião deles.

Em sua pesquisa, Gonçalves (2007) procurou evitar uma disciplina extra de pré-Cálculo, e propôs uma estratégia para a disciplina de Cálculo I, em que os professores fizeram alterações em suas disciplinas, implantaram mais trabalhos e provas em períodos mais curtos, para que os alunos pudessem assimilar melhor os conteúdos. “Tal iniciativa tem indicado resultados mais satisfatórios, pois as notas das primeiras avaliações melhoraram, apesar de a evasão manter-se semelhante à de outros semestres”. (p. 49)

De modo semelhante, este trabalho sugere uma forma para tentar suavizar a transição dos alunos entre o Ensino Médio e o Superior, a partir de uma abordagem inicial da disciplina de Cálculo I, usando aplicações para motivar os alunos e cobrir lacunas de aprendizagem. O nosso objetivo é elaborar um roteiro contendo problemas a serem abordados em sala e material a ser disponibilizado em plataforma digital, complementando cada aula. Os problemas estudados envolvem, em geral, máximos e mínimos ou taxas de variação média de funções, contextualizados e contemplando interdisciplinaridade, exigindo modelagem matemática das situações-problema. A princípio podem ser resolvidos utilizando somenteconteúdosda Escola Básica. O material complementar, disponível on-line, tem*links* para diversas atividades envolvendo tópicos de Matemática desse nível.Desta forma, os alunos que tiverem dificuldades com conteúdos anteriores, poderão cobrir estas lacunas, com auxílio dos monitores da disciplina de Cálculo I.

Para obter informações mais claras sobre as dificuldades principais dos alunos,foi elaborado um teste-diagnóstico, contemplando exemplos de problemas a serem propostos no roteiro e seguindo as ideias do referencial teórico adotado neste trabalho. Este teste foi aplicado a 237 alunos, de turmas de vários cursos na área de Exatas (Engenharia, Computação, Física, Meteorologia, Matemática, Estatística, Atuária), na primeira semana de aula da disciplina inicial de Cálculo I. A análise dos resultados dos testes é apresentada e comentada, e são indicados os próximos passos do estudo para atingir o objetivo final.

Referencial Teórico

O alto índice de evasão e repetência na primeira disciplina de Cálculo não é recente, e tem sido investigado por diversos pesquisadores como Even (1990), Robert e Schwarzenberger(1991), Rezende (2003), Gonçalves (2007), Nasser (2009) e Nasser, Sousa e Torraca (2012). Esses trabalhos investigam as principais causas para as dificuldades na transição do Ensino Médio para o Superior, que se refletem nas dificuldades na disciplina de Cálculo I. Mais recentemente, Masola e Allevato (2016) apresentaram um trabalho que "retratao que algumaspesquisas discutem com relação às dificuldades de aprendizagem de alunos ingressantes no Ensino Superior." Esses pesquisadores apontam alguns caminhos para minimizar essas dificuldades: "a avaliação diagnóstica, o trabalho com grupos colaborativos, a análise de erros, o trabalho com Matemática articulada ao cotidiano profissional, e as contribuições dos recursos tecnológicos e dos livros textos". (Masola e Allevato, 2016, p. 64)

A pesquisa deNasser, Sousa e Torraca (2012), desenvolvida num ambiente de grupo colaborativo, recomenda que "as dificuldades na transição para o Ensino Superior, em especial na disciplina de Cálculo, podem ser amenizadas por abordagens adequadas de tópicos do Ensino Médio, tais como Funções e Geometria" (p. 1).

Observa-se que a maioria dos problemas do Cálculo depende de uma representação visual adequada, como os problemas típicos de "máximos e mínimos", "taxas relacionadas" e de "área entre curvas". Em geral, a dificuldade dos alunos nesses problemas não é na aplicação do conceito de derivada ou de integral, mas na sua representação geométrica e na identificação de relações entre os elementos da figura.

De acordo com Duval, uma das causas das dificuldades em Cálculo é a falta depercepção da relação entre os objetos matemáticos e as diversas formas de registro de suarepresentação. Duval (2009) afirma que

> não pode haver compreensão matemática sem se distinguir um objeto de sua representação, pois jamais deve-se confundir objetos matemáticos (números, funções, retas) com suas representações (escritas decimais ou fracionárias, símbolos, gráficos, desenhos de figuras) que parecem apenas ser o meio, de que o indivíduo dispõe, para exteriorizar suas representações mentais, ou seja, para se tornarem visíveis ou acessíveis a outros, pois, em matemática, as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática. (p. 15)

Duval (2009) distingue dois tipos de transformação nas representações semióticas: o tratamento e a conversão. O tratamento é definido como uma transformação da representação no próprio registro onde ela foi formada, ou seja, é uma transformação interna. Por outro lado, a conversão envolve uma transformação de uma representação em outro tipo de registro. De acordo com Duval (2003),"há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato" (p. 31).

No caso da aprendizagem de funções, a teoria de Duval (2009) aponta a necessidade de levar os alunos a dominar as representações verbal, gráfica, tabular e analítica, e a articular a transição entre esses registros. Uma das causas das dificuldades deve-se à passagem da expressão analítica da função para a sua representação gráfica com a construção ponto a ponto, o que acarreta problemas na passagem inversa. A prática sistemática dessa abordagem não favorece a interpretação global, que é, em geral,deixada de lado,uma vez que depende de análise semiótica visual e algébrica. Isso ajuda a compreender porque a maioria dos alunos apresenta dificuldades na utilização correta das representações gráficas, mesmo no Ensino Superior.

Por outro lado, Sierpinska (1992) afirma que há 16 obstáculos a se transpor para a aquisição do conceito de função. Um desses obstáculos é a concepção ingênua de que "*o gráfico de uma função não precisa ser exato*". Essa concepção explica alguns dos problemas observados nas tentativas de alunos de Cálculo I de traçar gráficos de funções simples. Outro obstáculo, apontado também por Sierpinska, é a concepção de que "*apenas relações representáveis por fórmulas analíticas são dignas de serem chamadas funções"*. De fato, muitos alunos só reconhecem como funções as relações que são representadas por uma expressão algébrica, e apresentam dificuldades, por exemplo, ao lidar com funções definidas por várias sentenças, tão úteis na representação de problemas reais.

As teorias de Duval e Sierpinska nortearam nossa pesquisa, sendo decisivas, inclusive, na escolha das questões do teste diagnóstico.

Metodologia

O teste diagnóstico, composto de três questões, foi aplicado a 237 alunos de vários cursos de graduação, em duas universidades públicas do Rio de Janeiro, com o objetivo de detectar as principais dificuldades dos alunos ingressantes ao lidar com funções na resolução de problemas, e fornecer subsídios aos pesquisadores para o desenvolvimento do roteiro para as primeiras aulas do curso. O teste foi aplicado no início das aulas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1, com aproximadamente 1h30m de duração.

Análise das respostas à 1ª questão

A primeira das questões (Figura 1), a mais simples, de resolução imediata, foi escolhida com o objetivo de verificar se o aluno consegue identificarseu domínio e imagem, além devalores e zeros de uma função. Optamos por fornecer a representação gráfica da função.

Questão 1: Considere o gráfico da função f da figura abaixo e responda:

a) O valor de f (-1) é: .

b) O valor de f (3) é: _________________.

c) Os valores de x tais que f (x) 2 são: _____ e ______.

d) Marque na figura os valores de x tais que f (x) = 0.

e) O domínio da função f é___________ e a imagem da função f é _______________.

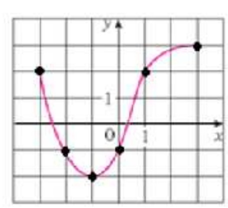


*Figura 1.*Primeira questão: Análise da representação gráfica.

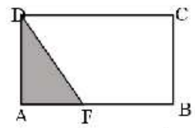
Constatamos uma alta porcentagem de acertos nos itens (a), (b) e (c), ultrapassando os 70%. Houve dificuldade em mostrar no gráfico os zeros da função (item d), com apenas 54% de acertos.Em alguns casos, houve troca da ordenada pela abscissa, ou seja, os alunos marcaram o valor de $f(0)$ em vez de assinalar os valores de x tais que $f(x) = 0$. Vários alunos consideraram o domínio e imagem como conjuntos discretos. Menos da metade da amostra acertou o item (e), em que se registrou 46% de respostas corretas para o domínio e 42% para a imagem da função exibida no gráfico.Essa dificuldade pode estar associada ao fato de que, na Escola Básica, os alunos trabalham quase que exclusivamente com funções polinomiais ou trigonométricas, considerando como domínio o conjunto dos números reais. Ou então trabalham com funções definidas num domínio discreto, associando cada ponto à sua imagem.

Análise das respostas à 2ª questão

As questões 2 e 3 foram selecionadas/escolhidas para verificar se os estudantes seriam capazes de articular a transição entre as representações verbal, analítica e gráfica. O quesito da linguagem se mostrou um bloqueio para realizar essa transição, visto que o item dessas questões que alcançou o melhor resultado foi o item (a) da 2ª questão, com 51% de acertos, talvez porque apresentava uma figura representando a situação (veja a figura 2). Um dos alunos, inclusive, afirmou que não conseguiu ver a diferença entre os itens (a), (b) e (c) da Questão 2.

Questão 2: Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD, com vértices A, B, C, D, no sentido anti-horário, sendo A o vértice inferior esquerdo. Ela parte do ponto A, ao andar 20 cm chega ao vértice B, depois se andar mais 10 cm, chega ao vértice C e finaliza seu trajeto andando mais 20 cm e chegando em D. A partir de A, se ela andar x cm, a formiga estará em um ponto F do contorno.

a) Supondo que a formiga esteja em algum ponto do lado AB, Como mostra a figura ao lado, determine a função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF.



b) Supondo que a formiga esteja em algum ponto do lado BC, determine a função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF.

c) Supondo que a formiga esteja em algum ponto do lado CD, determine a função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF.

d) Determine a expressão algébrica da área do triângulo ADF, em função de x, se a formiga estiver em qualquer ponto do contorno.

e) Esboce o gráfico da função obtida no item d.

*Figura 2.*Segunda questão: adaptada da OBMEP 2014 (2ª fase, questão 2, nível 3).

No item (b), a maioria dos alunos não percebeu que a área não dependia de *x*, gerando uma função constante. O índice de acertos nesse item foi de apenas 21%, sendo que 30% deixaram em branco. O índice de acertos do item (c) foi ainda menor, de apenas 11%. Mas o item que apresentou o menor número de acertos foi o (d): apenas 8% conseguiram escrever a expressão da função área, que era uma função de várias sentenças. Esse resultado comprova o obstáculo prescrito por *Sierpinska*, de que os estudantes têm a crença de que uma função deve ser definida por uma única expressão analítica. O item (e), que pedia o gráfico da função da variável *x* que dava a área do triângulo, teve o maior índice de respostas em branco (54%) e apenas 14% de acertos. Entretanto, nota-se uma curiosa discrepância nos resultados: apesar de 14% dos alunos acertarem o gráfico,apenas 8% conseguiram escrever corretamente a expressão analítica da função definida por várias sentenças, como a resposta mostrada na figura 3.

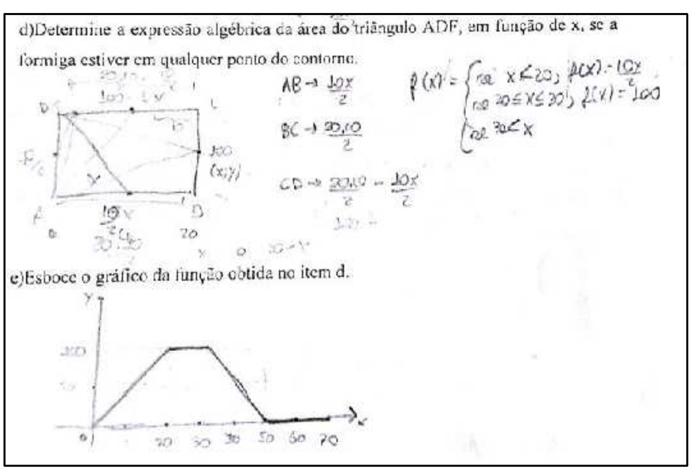


Figura 3. Tentativa incorreta de exprimir a função, e seu gráfico.

Análise das respostas à 3ª questão

A terceira questão apresentava um problema muito explorado nadisciplinade Cálculo I, com a diferença de que o papelão tem forma quadrada. Para resolvê-la, os alunos deveriam interpretar o enunciado e fazer uma figura que permitisse visualizar a situação, para então determinar a expressão algébrica da função (item (a)) do volume da caixa em função do lado dos quadrados recortados dos cantos do papelão e depois identificar seu gráfico no item (b).Assim, era preciso fazer a conversão do registro verbal para o analítico, usando uma figura para compreender a variação do parâmetro e encontrar a expressão analítica da função.

Questão 3: Com um retângulo de papelão de 8cm de comprimento por 5cm de largura, deseja-se construir uma caixa retangular sem tampa. Para isto de cada ponta do papelão é cortado um quadrado de x cm de lado, com um dos vértices de cada quadrado sendo um dos vértices do retângulo de papelão.

a) Determine a expressão algébrica da função que fornece o volume da caixa, em função do lado x do quadrado.

Figura 4. Enunciado da questão 3 com o item (a).

O item (a) da terceira questão alcançou 43% de acertos, o que indica que possivelmente alguns alunos já tivessem tido contato com esse problema anteriormente, ainda que no caso do papelão de forma quadrada, o que dá origem a uma caixa com base quadrada. Neste problema, a exploração dos valores possíveis para x e os formatos correspondentes da caixa obtida, na atividade virtual, ajuda muito na compreensão do enunciado, e na transição da representação verbal para a analítica, que corresponde à identificação da função que expressa o volume da caixa em termos de *x*. A figura 5 mostra as alternativas dadas no item (b) para o gráfico da função volume do item (a).

b) Dentre os gráficos abaixo escolha o que melhor representa geometricamente o gráfico da função obtida no item a. Justifique o porquê de sua escolha.

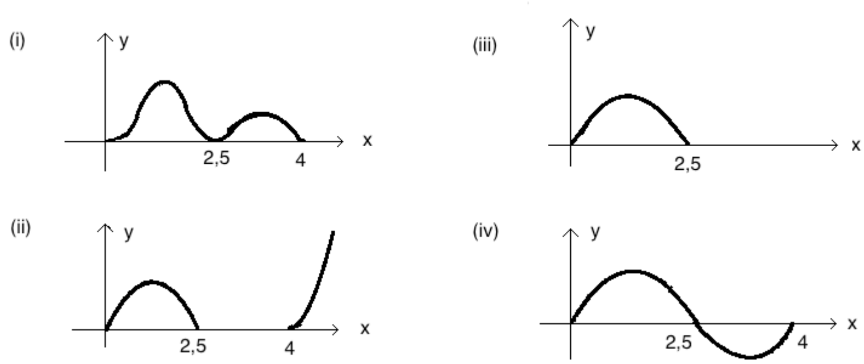


Figura 5. Item (b) da terceira questão: transição do registro analítico para o gráfico.

Apesar de o índice de acertos da expressão algébrica ter alcançado 43%,somente 26% dos alunos escolheram o gráfico correto (iii) no item (b), mostrado na figura 5, o que indica uma dificuldade maior na conversão do registro analítico para o registro gráfico. Uma razão possível para este resultado remete à análise das respostas da questão 1, que mostra a dificuldade dos alunos no que se refere à compreensão dos conceitosde domínio e imagem. Cerca de 20% dos alunos escolheu o gráfico (iv), não observando que os valores de *x* deveriam ser menores que 2,5. Esse foi o comportamento do aluno cuja resposta está reproduzida na figura 6.

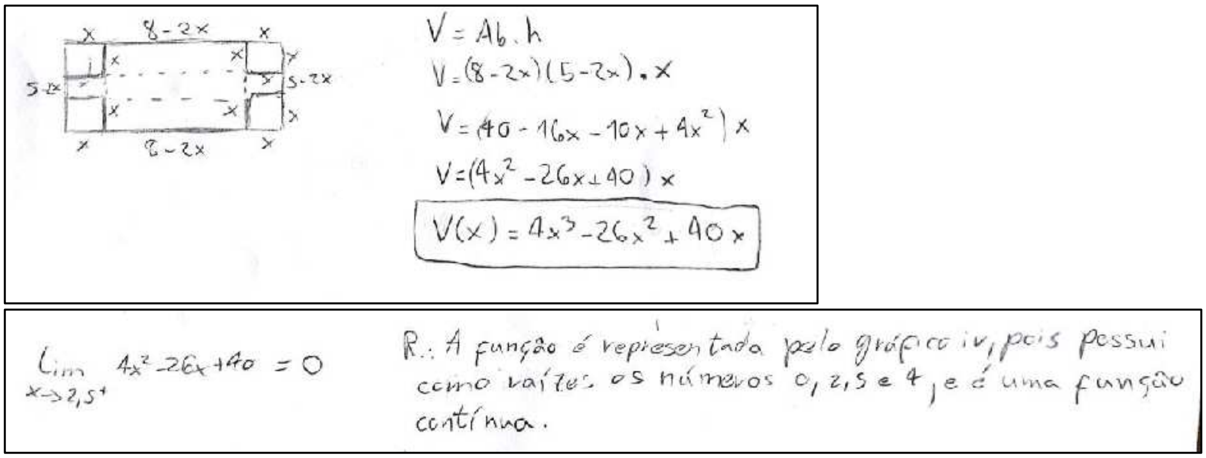


*Figura 6.*Resposta dada à terceira questão: registro analítico correto, mas escolhaincorreta do gráfico.

Ainda na terceira questão, um aluno apenas esboçou a figura do retângulo com os quadradinhos marcados nos cantos e escreveu: “Tenho muita dificuldade em questões com funções, não tive esta matéria de forma aprofundada no ensino médio, logo, não saberia responder corretamente as questões. Estou estudando todas as matérias do ensino médio em casa, para conseguir uma base para estudar Cálculo I”. Esse depoimento indica a necessidade de rever as estratégias usadas no Ensino Médio, corroborando osobjetivos da nossa pesquisa.

Próximos passos

Analisando os resultados do teste diagnóstico à luz dos referenciais teóricos de Duval e Sierpinska, é possível identificar as dificuldades dos alunos ingressantes em Cálculo I, no conteúdo de funções e suas representações. As principais dificuldades observadas foram a leitura e interpretação de enunciados de problemas, e a modelagem desses problemas, envolvendo a conversão da representação verbal para a analítica, em termos de funções afim, polinomiais e de várias sentenças. Em alguns casos foi observada também a dificuldade com o trato algébrico, que foi causa de erros nessa transição.

A partir dessas observações, é possível identificar diretrizes para um roteiro que será desenvolvido para orientar os docentes, utilizando algumas atividades virtuais criadas pela professora Ângela Rocha, e já disponibilizadas na página do Instituto de Matemática da UFRJ (IM/UFRJ).Por exemplo, é preciso conscientizar professores do Ensino Médio de que o conteúdo de funções deve ser explorado de forma mais abrangente, como sugerido por Duval (2003, 2009). Outro ponto a observar é que os exemplos trabalhados na disciplina de Cálculo devem refletir situações reais, em que as funções nem sempre são bem-comportadas como as funções polinomiais. Essa estratégia possibilita a exploração de situações do cotidiano, como a variação dos valores cobrados de Imposto de Renda, em função do salário mensal recebido. Recomendamos propor situações representadas por funções definidas por mais de uma sentença, funções descontínuas, e explorar seus gráficos. Também é preciso reforçar as noções de domínio e imagem de uma função, ultrapassando obstáculos, como os sugeridos por Sierpinska (1992).

Portanto, os próximos passos deste trabalho são o exame das atividades virtuais disponibilizadas na página do IM/UFRJ e a coleta de problemas contextualizados que levem à superação das dificuldades apontadas por Duval e Sierpinska. Este roteiro, com certeza, será muito útil, tanto para professores do Ensino Médio quanto para docentes de Cálculo I.

Referências

Diefenthäler, A. T. (2017. DisciplinaPré-Cálculo: umolhar a partir do desempenho dos acadêmicos.Disponível em: http://bibliodigital.unijui.edu.br:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/4238/Andressa%20Tais%20Diefenthäler.pdf?sequence=1

Duval, R.(2003). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, Silvia D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Papirus, p.11-33.

Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Gonçalves, C. F. (2007). Dificuldades em matemática ao ingressar no Ensino Superior. Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática no Centro Universitário La Salle, Canoas, RS.

Masola, W. J &Allevato, N. S. G (2016). Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na Educação Superior. Revista Brasileira de Ensino Superior, 2(1): 64-74.

Nasser, L.(2009). Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: Frota, M.C.R. &Nasser, L (org.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*, SBEM, p. 43-58.

Nasser, L., Souza, G. &Torraca, M.A. (2012). Transição do EnsinoMédio para o Superior: como minimizar as dificuldades em Cálculo?Atas do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação *Matemática* (em CD). SBEM: Petrópolis, RJ, Brasil.

Rocha, A., Material para ensino de Pré-Cálculo, página: http://www.im.ufrj.br/precalculo, acessada em 24/09/2018

Sierpinska, A. (1992).*On understanding the notion of function*. In: Dubinsky, E; Harel, G (Ed.) *The Concept of Function: aspects of epistemology and Pedagogy*. MAA Notes, p.25-58.

O grupo de estudos de Cálculo como alternativa de apoio a estudantes do ensino superior

Paulo Eduardo Monteiro **Sulczinscki**
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília.
Brasil
paulo_pems@hotmail.com
Paulo Victor Ximenes de **Oliveira**
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília.
Brasil
paulovictorximenes@gmail.com
Raquel Carneiro **Dörr**
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília.
Brasil
raqueldoerr@gmail.com

Resumo

Esta comunicação científica traz o relato de uma investigação realizada com estudantes de um curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral em uma universidade pública brasileira. Ela está inserida em um projeto mais amplo que tem como objetivo geral conhecer e descrever as alternativas educacionais dadas a estudantes iniciantes dessa instituição a fim de que possam superar suas dificuldades, sanar lacunas de conhecimento em conteúdos matemáticos básicos e, com isso, alcancem sucesso em suas aprendizagens. O intuito deste trabalho é reforçar entre professores e educadores matemáticos do ensino superior, a necessidade do desenvolvimento de estratégias de acolhimento a estudantes iniciantes que têm os cursos de Matemática como componentes de seus currículos.

Palavras-chave: ensino superior, aprendizagem, cálculo, matemática básica, conhecimento matemático.

Contexto, justificativa e objetivos da pesquisa

Esta comunicação científica traz um relato de uma investigação realizada com estudantes de um curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral em uma universidade pública brasileira. Ela faz parte de um projeto mais amplo de pesquisa que tem como objetivo geral conhecer e descrever as alternativas educacionais dadas a estudantes iniciantes dessa instituição a fim de que possam superar suas dificuldades, sanar lacunas de conhecimento em conteúdos matemáticos básicos e, com isso, alcancem sucesso nas aprendizagens do Cálculo[1].

Diferentes pesquisadores têm observado o fato de que, em geral, se os estudantes que ingressam na vida universitária já possuem uma preparação adequada em determinados temas matemáticos básicos, certamente poderão ter mais chances de sucesso (Dörr, 2017; Dreyfus & Eisenberg, 1990; Tall, 1993).

O Cálculo é uma continuação do estudo das Funções. A introdução desse conteúdo é iniciada nos anos finais do Ensino Fundamental. Portanto, se esse tópico, juntamente com outros tantos como Geometria Analítica, Trigonometria e alguns da Álgebra (por exemplo, resolução de equações e inequações), além das habilidades em manipulações algébricas, estiverem bem consolidados nas aprendizagens anteriores, os estudantes poderão conseguir um melhor desempenho no curso em termos das aprendizagens adquiridas e de aprovações.

Na mesma medida em que o Cálculo é conhecido por suas importantes e múltiplas aplicações em variadas áreas do conhecimento (Stewart, 2011; Thomas, Weir & Hass, 2009), ele também é reputado como sendo difícil e com uma alta taxa de reprovação (Alvarenga, Dörr & Vieira, 2017). Em particular, na universidade em que está sendo realizada a pesquisa, foi verificado que, nos dois semestres de 2014, as taxas médias de aprovação nas dezenove turmas foram de 50.05% e 47.7%, respectivamente. No segundo semestre de 2015 essa taxa foi de 53.7%.

Do ponto de vista pessoal, o insucesso leva à frustração e ao desencorajamento para continuar os estudos. Além desses aspectos, os altos níveis de reprovação e evasão trazem um custo adicional às universidades, pois, no semestre seguinte, novas turmas devem ser criadas para atender àqueles que reprovaram (Dörr, 2017).

Portanto, esta pesquisa vem de encontro a um cenário local de altos índices de reprovação. Tendo em vista o objetivo geral do projeto de pesquisa, este trabalho apresenta uma experiência realizada com estudantes de Cálculo, participantes de uma atividade de extensão universitária ocorrida no primeiro semestre de 2018. Nela foram trabalhados, concomitantemente, assuntos da Matemática do ensino básico, associados aos temas do Cálculo que estavam sendo introduzidos no curso regular.

Como consequência, o relato tem o intuito de reforçar entre professores e educadores matemáticos do ensino superior, a necessidade do desenvolvimento de estratégias de acolhimento a estudantes iniciantes que têm cursos de Matemática como componentes de seus currículos de graduação. Em especial, pode-se considerar como sujeitos desta pesquisa, aqueles que apresentam deficiências em conteúdos matemáticos básicos.

Entende-se que a implementação de atividades de apoio poderá contribuir para que os participantes avancem em suas aprendizagens, não somente no Cálculo, mas também em disciplinas de Física, Geometria ou Álgebra, pois todas elas têm em comum com a primeira o fato de terem como pré-requisito muitos conteúdos matemáticos que fundamentam a construção

[1] Cálculo: A palavra Cálculo em todo este trabalho refere-se a um curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral.

dos seus novos conhecimentos no ensino superior.

Referencial teórico

Muitas são as pesquisas que têm apontado distintos fatores que justificam o fracasso de estudantes de Cálculo. Entre eles, destaca-se a falta de embasamento em conteúdos matemáticos relacionados ao ensino básico (Dörr, 2017; Dörr; Muniz & Neves, 2016).

Devido à complexidade relacionada ao entendimento das causas que influenciam o sucesso ou insucesso de discentes de Cálculo, a busca por caminhos que contribuam para a discussão e propostas de soluções que sejam aplicáveis ao grande número de estudantes envolvidos em diferentes países e, ainda, que levem em conta os recursos e culturas distintas, têm sido alvo de interesse de pesquisa entre a comunidade de educação matemática internacional (Bressoud, Ghedamsi, Martinez-Luaces & Törner, 2016; Rasmussen; Marrongelle & Borba, 2014; Törner, Potari, & Zachariades, 2014).

No Brasil, destacam-se os estudos apresentados no âmbito do Grupo de Educação Matemática do Ensino Superior (GT4), durante os Seminários Internacionais de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM's). Particularmente, nas edições realizadas nos anos de 2012 e 2015 pode ser observado o aumento do número de pesquisas e de pesquisadores que buscam compreender a não aprendizagem de um curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral. Assim, temos como exemplos, estudos que analisam as dificuldades da compreensão das noções de função, limite e derivada (Igliori &Almeida, 2013), no domínio do Teorema Fundamental do Cálculo (Vianna, 1998); a rotina e a forma que os estudantes estudam (Frota, 2010); a falta de experiências prévias, tanto com raciocínio lógico quanto com o traçado e análise de gráficos (Nasser, 2006, 2012).

O curso de Cálculo envolve a introdução e o estudo de vários conceitos inéditos e que ainda não haviam sido considerados na educação básica. Por exemplo, nele é a primeira vez que os estudantes têm contato com a ideia limite de uma função e, muitas vezes, nos procedimentos de cálculos com limites, surgem situações que não podem ser resolvidas por meros processos algébricos. Distintas, variadas e novas noções e situações cercam o seu estudo e aprendizado e tudo se torna "cheio de mistério", conforme expressão de Tall (1993, p. 2). Logo, se o aluno não compreendeu bem os conceitos de função, domínio, contradomínio e imagem, dificilmente conseguirá acompanhar o ritmo das aulas e compreender esse conteúdo fundamental para o Cálculo.

Tall (1993) sugere que seja incentivada a reconstrução do conhecimento em um nível mais sofisticado. Com isso, entende-se que esse autor está indicando a necessidade de uma melhor compreensão dos conceitos estudados. Ou seja, o aluno não deve apenas gravar uma definição, mas sim assimilar todas as noções adjacentes. Desse modo, ele recomenda, por exemplo, o uso da computação gráfica para reforçar a representação visual de certos conceitos. Isso reforça a ideia de Nasser, Sousa e Torraca (2012), de que, muitas vezes, as dificuldades dos alunos em certas questões de Cálculo não estão somente na aplicação do conceito de derivada ou integral, mas também relacionadas às concepções geométricas associadas e às relações entre os elementos visuais.

O livro de Cálculo de Stewart (2011) em seu primeiro volume começa com um teste de verificação acerca de tópicos de Álgebra, Geometria Analítica, Funções e Trigonometria. Antes de propor os itens do teste, no primeiro parágrafo, encontramos a frase "O sucesso no cálculo depende em grande parte do conhecimento da matemática que precede o cálculo: álgebra, geometria analítica, funções e trigonometria" (p. XVII).

Um estudo feito recentemente por Feijó (2018) teve como sujeitos de pesquisa alunos do 2º ano do ensino médio de escolas públicas e estudantes de Cálculo de uma instituição universitária também pública. Nele foram apontados erros e dificuldades relacionados a assuntos da trigonometria e os consequentes obstáculos epistemológicos associados. Entre outros resultados, foi identificado que estudantes tanto do ensino médio, quanto do superior, apontam lacunas conceituais e procedimentais similares em relação aos fundamentos da trigonometria.

Lacunas nesses tópicos não serão sanadas simplesmente pela entrada dos estudantes na universidade (Lopes, 1999), nem por cursarem o Cálculo. Entretanto, os professores universitários consideram que os ingressantes já têm domínio desses assuntos ou que poderão superar suas dificuldades sozinhos.

Levando em conta que na prática, a sala de aula de Cálculo é formada por grande parte de estudantes que trazem lacunas em diferentes níveis em seus aprendizados anteriores, no tópico a seguir, será apresentada uma experiência de atividade que vem de encontro às necessidades desses sujeitos. Trata-se de um curso de extensão que foi denominado Grupo de estudos de Cálculo (GEC), em que foram abordados temas de pré-cálculo paralelamente a um curso regular de Cálculo.

Descrição do Grupo de Estudos de Cálculo

Como mencionado anteriormente, na universidade brasileira em que está sendo realizada a pesquisa, ainda há no Cálculo índices médios de reprovação em torno de 50%. Assim, com vistas a entender o porquê de indicadores tão altos e de possibilitar a sugestão e implementação de estratégias que possam contribuir para a melhora do desempenho dos estudantes, foi criado o Grupo de Estudos de Cálculo (GEC).

A equipe de trabalho do projeto de extensão GEC foi composta por uma professora coordenadora e quatro tutores, todos eles alunos de graduação em Licenciatura ou Bacharelado em Matemática, em fase de conclusão do curso.

Dentre os participantes do GEC houve calouros de diversos cursos, dos quais muitos eram repetentes da disciplina de Cálculo. No grupo haviam representantes da maioria dos cursos que têm o Cálculo como elemento curricular obrigatório. Dentre eles temos os seguintes: Administração, Ciência da Computação, Economia, Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica, Física, Geologia, Geofísica, Matemática, Química, entre outros.

O foco das atividades do GEC não foi apenas fortalecer a base matemática dos estudantes iniciantes, mas também dar a oportunidade de estudo aos discentes que, eventualmente, não tinham estudado alguns dos tópicos abordados anteriormente. Além disso, é importante destacar que o projeto não visou somente a aprovação, mas também buscou promover entre os participantes o desenvolvimento de métodos de estudos individuais ou em grupos.

Inicialmente, foram destinadas 60 vagas aos participantes. Entretanto, no primeiro encontro, foram registradas mais de 140 assinaturas na lista de presença. O planejamento para este dia consistia em esclarecer as dúvidas dos alunos em relação ao desenvolvimento do projeto e dar início às atividades propostas, a partir da aplicação de uma lista de exercícios.

Porém, devido à alta demanda e interesse pela proposta, foi aplicado um teste de nivelamento, a fim de selecionar os alunos com maior dificuldade para integrar o projeto, e dar prosseguimento ao objetivo estipulado anteriormente. O teste era formado por 10 questões básicas de matemáticas, em que se solicitava aos participantes a resolução por escrito de problemas diretos em conteúdos de funções, resolução de equações, fatoração, trigonometria, valor absoluto, equação de retas, gráficos, entre outros. Além disso, continha perguntas de identificação pessoal do estudante, como a instituição em que estudou no ensino médio e quantidade de vezes que já havia cursado a disciplina de Cálculo.

Dentre o total de alunos participantes do primeiro encontro, apenas 110 realizaram a sondagem, e 70 foram selecionados, levando em consideração, além do menor desempenho, os aspectos de identificação citados anteriormente. O resultado foi divulgado aos participantes via e-mail. Assim, na semana seguinte iniciaram-se as atividades previstas que ocorreram durante todo o semestre em dois encontros semanais com duração de 90 minutos cada.

Ressalta-se que os alunos não selecionados, foram aqueles que obtiveram bom aproveitamento no pré-teste, e, portanto, aparentemente, não possuíam grande necessidade de realizar o curso. Mesmo assim, foram dados direcionamentos acerca de como prosseguir com os estudos de Cálculo, indicando a monitoria realizada no mesmo departamento, para sanar dúvidas pontuais.

A cada semana um tema diferente do ensino médio era abordado. Dentre eles, destacam-se: fatoração de polinômios, funções e relações trigonométricas no triângulo retângulo. As aulas eram iniciadas com uma breve explicação acerca do conteúdo. Em seguida, foram usadas listas de exercícios para resolução de situações-problema relacionadas ao tema da semana. As resoluções eram feitas em grupos de três a quatro estudantes e contavam com a mediação da equipe de trabalho.

Com a finalidade de avaliar o impacto do GEC no desempenho dos alunos, foi aplicado um pós-teste ao final do curso, comparando-o com o que foi realizado no segundo encontro. Além disso, todos os participantes que obtiveram pelo menos 70% de frequência receberam o certificado de conclusão do curso de extensão.

Portanto, foram feitas duas avaliações durante o projeto realizado no decorrer do primeiro semestre letivo de 2018. A primeira foi uma sondagem inicial, utilizada para a seleção dos participantes e a segunda foi feita ao final do curso, na qual foram repetidas algumas das questões da sondagem inicial que revelaram as maiores dificuldades dos alunos.

Por fim, a equipe sempre procurou apresentar aos estudantes as relações existentes entre os assuntos básicos que estavam sendo tratados com os do Cálculo, com o propósito de cooperar para melhor compreensão dos conteúdos.

Discussão e projetos futuros

Buscar entender e avaliar as dificuldades encontradas pelos estudantes torna-se uma tarefa complexa e desafiadora para os docentes. Não se pode afirmar que a culpa é somente da metodologia utilizada pelo professor, da instituição, dos alunos ou de qualquer outro fator. É claro que, estes são agentes influenciadores, mas a constatação que se observa pela pesquisa é o fato deste fenômeno fazer parte do cotidiano do professor de Matemática, seja qual for o nível educacional em que ele esteja inserido. Em particular, ele é evidenciado fortemente no ensino superior, uma vez que é esperado dos estudantes ingressantes a já superação de certas dificuldades em conteúdos matemáticos do ensino básico (Silva, 2009).

Outro aspecto observado pelo grupo de pesquisa no trabalho com GEC foi o bloqueio manifestado por muitos estudantes ao realizarem certos cálculos considerados “simples” para o ensino superior, como por exemplo, no cálculo do módulo de um número, ou na obtenção da equação de uma reta.

As atividades do GEC tiveram como ponto central as aprendizagens dos educandos. Por esse motivo, não houve interação direta entre os pesquisadores e os professores de Cálculo dos estudantes participantes. Entretanto, os pesquisadores conheciam e acompanharam todo o planejamento e andamento do curso no semestre em que ocorreu a atividade prática.

Com relação ao desempenho dos estudantes no Cálculo, foi possível identificar uma evolução na compreensão de certos conteúdos, dado que durante as aulas foi criado para um espaço aberto para sanarem suas dúvidas do curso regular.

Em geral, considerando que parte do grupo era formado por repetentes, verificou-se uma melhora significativa no desempenho dos alunos participantes ao decorrer do curso. O resultado disso foi o sucesso dos estudantes na disciplina de Cálculo, corroborado pelo índice médio geral de aprovação de 58% dos participantes do GEC.

Portanto, a prática revelou uma necessidade, demonstrada inicialmente pelos próprios estudantes, em aprimorarem seu conhecimento de Matemática elementar e a importância do encorajamento às iniciativas como a proposta apresentada e experimentada pelo GEC.

Com respeito aos projetos futuros do GEC, pretende-se organizar e realizar uma análise qualitativa dos pré e pós-testes, verificando o desenvolvimento de cada participante. A análise minuciosa desse material poderá revelar elementos importantes das dificuldades dos estudantes. Para complementá-la, serão entrevistados alguns dos participantes e eventualmente, alguns dos professores de Cálculo da instituição.

Finalmente, planeja-se realizar uma pesquisa acerca do que tem sido feito na universidade em outras unidades acadêmicas com relação a atividades semelhantes à aqui descrita, a fim de que sejam feitas sugestões à comunidade acadêmica para o incentivo na implementação de projetos dessa natureza.

Referências e bibliografia

Alvarenga, K. B., Dörr, R. C., & Vieira, V. D. (2017). O ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: características e interseções no centro-oeste brasileiro. *Revista Brasileira de Ensino Superior*, *2*(4), 46-57.

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). Teaching and learning of Calculus. In *Teaching and Learning of Calculus* (pp. 1-37). Springer, Cham.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1990). Conceptual Calculus: Fact or Fiction?. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *9*(2), 63-67.

Dörr, R. C. (2017). Análises de aprendizagens em cálculo diferencial e integral: um estudo de caso de desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos em uma universidade pública brasileira

(Doctoral dissertation). Retirado de: http://repositorio.unb.br/handle/10482/25283.

Dörr, R. C., Muniz, C. A.; Neves, R. S. P. (2016). Operações Álgébricas e Funções como Obstáculos à Aprendizagem no Cálculo, *Anais do 1º Ladima*, Bonito, MS.

Feijó, R. S. A. A. (2018). Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. (Dissertação de Mestrado). Universidade de Brasília, Brasília, Brasil.

Frota, M. C. R. (2010). A Diversidade de Estilos de Aprendizagem Matemática na Sala de Aula no Ensino Superior. *X Encontro Nacional de Educação Matemática*, Salvador, BA, Brasil, s.n. Recuperado de http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/artigos/MR/MR7_Frota.pdf.

Igliori, S. B. C., & de Almeida, M. V. (2013). Educação Matemática no Ensino Superior e abordagens de Tall sobre o ensino/aprendizagem do Cálculo. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *15*(3), 718-734.

Lopes, A. (1999). Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS. *Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro*, (26/27), 123-146.

Nasser, L. (2006). Aprimorando o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. Atas do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Disponível em www. desenho. ufpr. br/IIISIPEM/GT4, SBEM.

Nasser, L., Sousa, G. D., & Torraca, M. A. (2012). Transição do ensino médio para o superior: como minimizar as dificuldades em cálculo. *V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (em CD). Petrópolis, RJ*.

Rasmussen, C., Marrongelle, K., & Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go?. *ZDM*, *46*(4), 507-515.

Silva, B. (2009). Componentes do Processo de Ensino e Aprendizagem do Cálculo: saber, aluno e professor. In IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4. 2009. *Brasília, Sociedade Brasileira de Educação Matemática*.

Stewart, J. (2011). *Cálculo, vol. 1*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. In *Proceedings of working group* (Vol. 3, pp. 13-28). ICME 1992. Québec, Canada.

Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2009). *Cálculo, vol.1.*São Paulo: Pearson.

Törner, G., Potari, D., & Zachariades, T. (2014). Calculus in European classrooms: curriculum and teaching in different educational and cultural contexts. *ZDM*, *46*(4), 549-560.

Vianna, C. C. S. (1998). Students' Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus: An exploration of definitions, theorems and visual imagery. *Unpublished doctoral dissertation). Institute of Education, University of London.*

The Challenge of Proof in Abstract Algebra: Undergraduate Mathematics Students' Perceptions

Marios **Ioannou**
Department of Education, Alexander College
Cyprus
mioannou@alexander.ac.cy

Summary

This study aims to investigate undergraduate Mathematics students' difficulties with mathematical proof in their first encounter with Abstract Algebra. Abstract Algebra, and Group Theory in particular, is one of the most demanding mathematical fields for novice students, due to its abstract nature. This difficulty appears to have an unfavorable consequence on the proof production. For the purposes of this qualitative study, there has been used the Theory of Commognition. Analysis suggests that proof is considered a difficult task mainly due to students' incomplete grasp of the newly introduced algebraic notions, and due to problematic application of the various proving strategies. This difficulty has often a negative impact on students' engagement with pure Mathematics in general, resulting novice undergraduate students' tendency to avoid the study of other Pure Mathematics modules.

Key Words: Proof, Abstract Algebra, commognition, university Mathematics Education

Introduction

Abstract Algebra is considered by the majority of undergraduate Mathematics students as one of the most demanding modules in their curriculum, in which they face both cognitive and metacognitive challenges (Ioannou, 2012). Often, after their first encounter with Abstract Algebra, students tend to avoid further modules in this area of Mathematics. Nardi (2000) attributes student difficulty with Abstract Algebra to its multi-level abstraction and the less-than-obvious, to novice students, raison d'être of concepts such as cosets, quotient groups etc. Dubinsky et al (1994, p268) have concluded that students after their first encounter with it, they avoid any further study, since it is "the first course in which students must go beyond 'imitative behavior patterns' for mimicking the solution of a large number of variations on a small number of themes."

In addition, Abstract Algebra requires "deeper levels of insight and sophistication" (Barbeau, 1995, p139). This challenge is also due to the fact that instructors, more often than not, do not give adequate time to students to reflect on the new material (Clark et al, 1997). Weber (2001, 2008) and Ioannou and Nardi (2010) suggest that cognitive difficulties are related to metacognitive issues concerning students' coping strategies in the learning process, for example proof production and consequently affective issues. Additionally, the students' introduction to the novel ideas of groups takes place in the unfamiliar academic context of large-scale lectures. This unfamiliarity is likely to exacerbate their difficulty with the topic (Mason, 2001). Also, as it is often suggested by research, lecturing to large student audiences has an arguable effect on student engagement.

Research on how Mathematics undergraduates cope with the complexity of university studies suggests that in proof production, an essential part of their studies in Mathematics and "the only means of assessing students' performance" (Weber, 2001, p101), students face difficulties of two categories: firstly, "they do not have an accurate conception of what constitutes a mathematical proof", and in addition they "may lack an understanding of a theorem or a concept and systematically misapply." (Weber, 2001, p102)

This study examines the difficulty students have with mathematical proof in the context of their first encounter with Abstract Algebra. Moreover, this study adopts a participationist perspective on learning, for the purposes of which there will be used the Commognitive Theoretical Framework (CTF) by Anna Sfard (2008). Presmeg (2016, p. 423) suggests, it is a theoretical framework of unrealised potential, designed to consider not only issues of teaching and learning of Mathematics per se, but to investigate "the entire fabric of human development and what it means to be human." It proves to be an astute tool for the comprehension of diverse aspects of mathematical learning, which although grounded on discrete foundational assumptions, can be integrated to give more holistic view of the students' learning experience (Sfard 2012).

Theoretical Framework

CTF is a coherent and rigorous theory for thinking about thinking, grounded on classical Discourse Analysis. It involves a number of different constructs such as metaphor, thinking, communication, and commognition, as a result of the link between interpersonal communication and cognitive processes (Sfard, 2008). In mathematical discourse, objects are discursive constructs and form part of the discourse. Mathematics is an *autopoietic system of discourse,* namely "a system that contains the objects of talk along with the talk itself and that grows incessantly 'from inside' when new objects are added one after another" (Sfard, 2008, p129). Moreover, CTF defines discursive characteristics of Mathematics as the *word use*, *visual mediators*, *narratives*, and *routines* with their associated metarules, namely the *how* and the *when* of the routine. In addition, it involves the various objects of mathematical discourse such as the *signifiers*, *realisation trees*, *realisations*, *primary objects* and *discursive objects*. It also involves the constructs of *object-level* and *metadiscursive level* (or metalevel) *rules*. Thinking "is an individualized version of (interpersonal) communicating" (Sfard, 2008, p81). Contrary to the acquisitionist approaches, participationists' ontological tenets propose to consider thinking as an act (not necessarily interpersonal) of communication, rather than a step primary to communication (Nardi et al. 2014).

Mathematical discourse involves certain objects of different categories and characteristics. *Primary object* (p-object) is defined as "any perceptually accessible entity existing independently of human discourses, and this includes the things we can see and touch (material objects, pictures) as well as those that can only be heard (sounds)" (Sfard, 2008, p169). *Simple discursive objects* (simple d-objects) "arise in the process of proper naming (baptizing): assigning a noun or other noun-like symbolic artefact to a specific primary object. In this process, a pair <noun or pronoun, specific primary object> is created. The first element of the pair, the signifier, can now be used in communication about the other object in the pair, which counts as the signifier's only realization. *Compound discursive objects* (d-objects) arise by "according a noun or pronoun to extant objects, either discursive or primary." In the context of this study, groups are an example of compound d-objects.

Sfard (2008) describes two distinct categories of learning, namely the *object-level* and the *metalevel learning*. "Object-level learning […] expresses itself in the expansion of the existing discourse attained through extending a vocabulary, constructing new routines, and producing new endorsed narratives; this learning, therefore results in endogenous expansion of the discourse" (Sfard, 2008, p253). In addition, "metalevel learning, which involves changes in metarules of the discourse […] is usually related to exogenous change in discourse. This change means that some familiar tasks, such as, say, defining a word or identifying geometric figures, will now be done in a different, unfamiliar way and that certain familiar words will change their uses" (Sfard, 2008, p254).

Literature Review

A distinctive characteristic of advanced Mathematics in the university is the production of rigorous and consistent proofs. The often arduous, for the majority of students (Moore, 1994; Segal, 2000), task of successfully producing and communicating their proofs is a significant obstacle in the smooth transition from secondary to university Mathematics. Proof production is far from a straightforward task to analyse and identify the difficulties students face. From a pedagogical perspective, a possible contributing factor to the students' difficulty with proof is the teaching they receive both in high schools and in universities, since "most students have not been enculturated into the practice of proving, or even justifying the mathematical processes they use" (Dreyfus, 1999, p94). In addition, from a communicational perspective, there is a chasm between the professional mathematicians and students regarding their views about issues like conviction or validity of proof (Segal, 2000; Harel and Sowder, 1998), the adequacy of an explanation or justification (Sierpinska, 1994), or the ability to distinguish between different forms of reasoning (Dreyfus, 1999). Teachers often do not aim to give their students the means to learn how to construct proofs and judge their validity. This is a task left to students (Dreyfus, 1999).

Difficulties with proof production have been extensively investigated for various levels of student expertise (from novice undergraduates to experienced doctoral students). Moore (1994) classifies novice students' difficulties with proving in three wide categories referring to: the mathematical language and notation as such; the concept understanding; and, getting started with the proof. This categorisation is in conformity with the CTF where one is able to examine the students' use of words, visual mediators, understanding of the definitions of the related notions and the related theorems and lemmas, as well as the routines with their applicability and closure conditions. Weber (2001) categorises student difficulties with proofs into two classes: the first is related to the students' difficulty to have an accurate and clear conception of what comprises a mathematical proof, and the second is related to students' difficulty to understand a mathematical proposition or a concept and therefore systematically misuse it. In his study, an examination of the performance of undergraduate (novice) and doctoral (expert) students in proof-production, Weber (2001) indicated three types of strategic knowledge that the latter applied and the former lacked, in particular, referring to the knowledge of domain's proof techniques, the knowledge of which theorems are important and when they will be useful and the knowledge of when and when not to use 'syntactic' strategies.

Particularly difficult becomes the process of proof in the context of Group Theory, which is often considered one of the most difficult subjects for novice undergraduate Mathematics students (Ioannou, 2012, 2018). Several research studies within the last three decades have focused on the learning of Group Theory and on various aspects of students' learning experience, adopting various theoretical perspectives. For instance studies such as Dubinsky et al. (1994), Brown et al (1997) and Asiala et al (1996, 1997), which follow a constructivist approach, and within the Piagetian tradition of studying the cognitive processes, have examined students' cognitive development and analysed the emerging difficulties in the process of learning certain group-theoretic notions. Novice students are required to successfully cope with its abstract and rigorous nature and invent new learning approaches.

The abstract nature of Group Theory is, more often than not, an impediment for novice students. In order to successfully cope with learning Group Theory, students often tend to adopt techniques that would reduce the level of abstraction, which according to Hazzan (1999, p73) is an "effective mental strategy, which enables students to mentally cope with the new, abstract kind of mathematical objects". A significant number of students seem to have the tendency to work on a lower level of abstraction than the one in which concepts are introduced. By reducing the level of abstraction, students are enabled to "base their understanding on their current knowledge, and proceed towards mental construction of mathematical concepts conceived on higher level of abstraction" (Hazzan, 1999, p84). This is particularly obvious, when their first course in Group Theory progresses beyond the definition of the basic notions of group and subgroup (Ioannou, 2012).

Methodology

This study is a ramification of a larger study that focused on Year 2 Mathematics students' conceptual difficulties and the emerging learning and communicational aspects in their first encounter with Group Theory. The module was taught in a research-intensive Mathematics department in the United Kingdom.

The Abstract Algebra (Group Theory and Ring Theory) module was mandatory for Year 2 Mathematics undergraduate students, and a total of 78 students attended it. The module was spread over 10 weeks, with 20 one-hour lectures and three cycles of seminars in weeks 3, 6 and 10 of the semester. The role of the seminars was mainly to support the students with their coursework. There were 4 seminar groups, and the sessions were each facilitated by a seminar leader, a full-time faculty member of the school, and a seminar assistant, who was a PhD student in the Mathematics department. All members of the teaching team were pure mathematicians.

The lectures consisted largely of exposition by the lecturer, a very experienced pure mathematician, and there was not much interaction between the lecturer and the students. During the lecture, the lecturer wrote self-contained notes on the blackboard, while commenting orally at the same time. Usually, he wrote on the blackboard without looking at his handwritten notes.

In the seminars, the students were supposed to work on problem sheets, which were usually distributed to the students a week before the seminars. The students had the opportunity to ask the seminar leaders and assistants about anything they had a problem with and to receive help. The module assessment was predominantly exam-based (80%). In addition, the students had to hand in a threefold piece of coursework (20%) by the end of Week 12.

The data gathered includes the following: Lecture observation field notes, lecture notes (notes of the lecturer as given on the blackboard), audio-recordings of the 20 lectures, audio-recordings of the 21 seminars, 39 student interviews (13 volunteers who gave 3 interviews each), 15 members of staff's interviews (5 members of staff, namely the lecturer, two seminar leaders and two seminar assistants, who gave 3 interviews each), student coursework, markers' comments on student coursework, and student examination scripts. For the purposes of this study, there have been used data from the interviews.

Moreover, there have been used qualitative methods of data analysis, since this approach is a dynamic, intuitive and creative process of inductive thinking, reasoning and theorising. Data analysis allowed the researcher to comprehend the context of data and refine the interpretations. The core objective of this process was to determine the codes, categories, relationships and assumptions related to the topic under study (Cohen et al. 2007). Below it follows a detailed factual description of how the data was analysed.

Lecture observation notes and Lecture notes: Lecture observation notes were handwritten during the data collection process alongside the lecture note taking. Both of these data categories were summarised in 'Lecture Summaries'. In these summaries, the researcher organised the content and systematized the presentation of lecture observation notes and included a brief index of content for each lecture. At the end of each lecture summary, there followed a commentary on issues of content, presentation, general ambiance and other incidents of interest, and were connected with the prospective focus of this study, such as communication or any form of interaction between the lecturer and the students

Interviews: Both student and staff interviews were fully transcribed. Also they were illustrated with comments regarding the mood, voice tone, emotions and attitudes, or incidents of laughter, long pauses etc. The final interview documents were called Annotated Interview Transcriptions, since they were an annotated version of the interview transcription. In these annotated versions of interview transcriptions, the researcher highlighted certain phrases or even parts of the dialogues that were related to a particular theme.

Coursework and Examination Scripts: In the data analysis process, both the coursework solutions and the exam scripts were analysed last. Coursework student solutions were analysed in detail, mostly focusing on issues such as the use of certain concepts, the use of mathematical vocabulary and symbolisation, the use of language and the style of language used, the proof production process and the use of visual imagery and external objects. Concerning the examination scripts, the same approach was followed. In parallel, the comments of the markers were also analysed. Moreover, students' solutions were scrutinised, identifying related incidences and therefore, scanning the bits that were of interest. In doing so, the researcher produced data analysis documents, by scanning all the excerpts relevant to the purposes of this study, and analysing them using CTF.

Finally, all emerging ethical issues during the data collection and analysis, namely, issues of power, equal opportunities for participation, right to withdraw, procedures of complain, confidentiality, anonymity, participant consent, and sensitive issues in interviews, have been addressed accordingly.

Data Analysis

An often-reported difficulty that seven out of the thirteen (7/13) students faced was how to start a proof, i.e. the initial step. For many students, getting help on how to start a proof is a main incentive for attending the seminars, as the following excerpt suggests.

> […] *Most of the time I can't do them, and I need a little... sort of, starting point, so I – I – but I'm – I have a good kind of understanding about what the question's asking me to do, um, before I go, so I can ask the right questions... cos it's a lot more abstract, like you don't have anything to compare it to… I mean there's a lot of imaginary stuff in it…It's like nothing you've ever experienced before* […] *I mean I've done groups before, so I know kind of – the basics of it umm, just to get a greater understanding really.* Dorabella

The above suggests that normativeness of metarules is not automatically established among all members of the mathematical community. Normativeness of metarules in a certain discursive context is objective, since it requires experience. Well-established metarules that would allow experienced mathematicians to successfully solve a mathematical task would not automatically be obvious to the majority of novice students.

Moreover, difficulty with starting a proof is possibly an indication of incomplete metalevel learning regarding the how of a routine as well as its applicability conditions. Application of metalevel rules governs the formulation and substantiation of the object-level rules. Incomplete object level learning may hinder the successful application of the involved metarules and the construction of the required proof, although this is not always the case.

As the above excerpt suggests, Dorabella, similarly to other students, seems to have neither fully developed a thorough metalevel learning of the related metarules nor does she have a clear perspective of what she wants to prove and how she is going to prove it. This is not an unexpected or rare event among novice students in university Mathematics in general (Moore, 1994), and in Group Theory in particular, since students need to achieve a transition towards a higher level of abstraction, even between different university Mathematics modules.

Moreover, the starting point of a proof is a particularly difficult step, especially when students have seen nothing similar to the proof under discussion. The following excerpt of Leonora highlights the importance of previous experience for the development of metalevel learning.

> *I don't know, I mean I think once I've done it, and been told – like – having – so I've got like an example basically, of how to do it, then – it will be in my mind, so it'll be hopefully, something I can keep repeating, but just initially starting it off and – it's – I find quite hard, I found that quite hard with like a lot of things, it's just initially start…*
> Leonora

The above excerpt possibly highlights the need of some students to be guided in the first steps of the learning of a new mathematical discourse of guidance and examples. For these students, examples possibly have a twofold role, first to improve their object-level learning regarding the involved d-objects, and second to enrich their experience of how metarules should be applied.

The primary importance of the starting point in proof is also in agreement with Norma's perception about proofs, considering it, as the major obstacle to be overcome. After overcoming this threshold, it is much easier both to gain perspective and to move on.

> *I do try and do something, but it – it may not be like a specific question, cos sometimes, err, I just need help in getting started, and then once I've started I'm ok, it's just – finding like the thing to do first…* Norma

This is again an example of problematic encounter with the applicability conditions in the process of proving, as possibly a result of lack of experience for the majority of novice students. Deciding about the how and the when of a particular routine, namely what course of action to follow and how to initiate and finish a proof, is an essential part of metalevel learning of a particular mathematical discourse.

Discussions with students have revealed their perception about their general approach to required object-level and metalevel learning. It was apparent in the case of five of the thirteen (5/13) students that instead of trying to grasp the related d-objects and the amenable metarules in proof production process, these students, at least at the initial stage of their learning, would excessively depend on similar examples, Internet and book use or other exogenous factors, and mechanically imitate them. This approach to proving, and learning in general is clearly expressed in the following excerpt.

> *I googled for one of the proofs, to see if it was on there, but it wasn't, but there was something similar, that then I worked out like – that you're just meant to go through and then times it by the inverses and stuff, but um – I think, some of our algebra nowadays is so... specific, that like there aren't proofs and stuff out there that's – that's easy to find now.* Amelia

Overdependence on exogenous sources for understanding instead of focusing on the endogenous change of discourse is obvious in the above excerpt. Apparently, some students need to see similar routines to the ones they have to produce in the context of an exercise. Studying similar routines possibly helps them to grasp the metarules that need to be applied in certain situations and to be able, at the first stages of their learning, to imitate. In addition, Amelia seems to realise the level of specificity and rigour that proofs in Abstract Algebra require through her effort to find similar proofs. Nevertheless she uses the 'similar' proof to her benefit in order to learn the metarules related to notions such as inverses (see Ioannou, 2012).

Regarding the issue of self-evaluation of students' produced proofs, many students, based on their experience so far, show an awareness of the quality of their proof as well as whether their proofs are correct or not, even when they closely follow a routine similar to the one they are supposed to produce. In the excerpt below, Francesca discusses the importance of a logical order of steps of a proof, without missing any.

> *You should follow the correct order though… because I remember once I was jumping steps in a proof and I was considering some steps as granted… I shouldn't though… I had to prove every step and then go to the next step… That's why I lose so many points… because I arrive at the correct result but I was missing some things…* Francesca

She seems to be aware of the normative nature of metarules and that she is expected to meet the required characteristics of explicitness and rigour. She realises that proof production is in a way a very particular activity within a certain discourse, which has well-established metarules. Even though she is willing to apply a routine that will lead her to an endorsable and valid mathematical narrative, she does not yet possess the required capability to apply the involved metarules that will allow her to achieve this, in this specific mathematical discourse.

This claim is in accordance with the analysis in Ioannou (2012), where in many occasions, students' reported intention of action is in disagreement with the action taken, even if they are aware of the inappropriateness of their actions.

Students' own evaluation of their proofs is an interesting issue from the secondary-tertiary level Mathematics transition. According to Gueudet (2008), novice students do not have the experience that will allow them to decide whether a proof is valid or not. Nevertheless the above excerpt and the ones that follow shows that students, although they may not have the capability to precisely evaluate their proofs, can say however, whether it is problematic or inadequate, based on their previous experience.

A representative example of contradiction between the reported intention of proof strategy and the applied action can be seen in the following excerpt. Manrico, although he eventually does so in practice, is nevertheless aware that a proof, which is over-dependent on visual mediators, is neither rigorous enough nor acceptable in the context of Group Theory, and consequently not in accordance with the metalevel norms.

> *Hmm. see, there – this thing – I mean – the – statement, makes sense... I drew a little picture and like – I was just like – I mean – course that's going to be in it, but – how you prove that by actual kind of – prove that mathematically rather than just drawing a picture and just saying, it is true, it's just the actual showing that...* Manrico

Even though the use of visual mediators is an important aspect of mathematical discourse and often an indication of good object-level learning, extensive use is not an adequate approach for proving a mathematical narrative, especially in the context of Group Theory, at least as it is taught in the specific Mathematics department. Excessive use of illustrations and lack of algebraic reasoning in the proofs often indicates incomplete metalevel learning.

Proof production also depends on the thorough learning of d-objects and their realization trees, as well as the good interaction between the object-level and metalevel rules. The excerpt below reveals the negative consequences on the interaction between the different realisation trees as these have been developed possibly in different modules.

> *I cannot understand many things that… for example… one of the things I cannot accept is… I am given an exercise in which I have to prove something and in the notes we are not given something that will help us or guide us to solve the exercise… or the fact that something that we see now it is related to something that we have seen several months ago…* Musetta

The above suggests that Musetta's learning lacks connectivity between the different modules in her degree. Although she is aware of this lack, her approach towards overcoming this issue is rather passive, and as her written data suggests (see Ioannou, 2012), she has not effectively achieved it. Moreover, if the d-objects and the corresponding realization trees involved in a particular discourse or other related ones have not been encapsulated, then discursive expansion has yet to be achieved. If the student is not able to construct usable and accessible realization trees, then proof production is very difficult, if not impossible to be achieved. As Ioannou (2012) suggests, mathematical learning in Group Theory requires realization trees that involve compound d-objects emerging by reification, namely regarding the shift of the focus from processes on the group-theoretic objects towards discussions of the group-theoretic objects as such and their relations.

Conclusion

This study has focused on novice undergraduate Mathematics students' difficulties with proof production in the context of Abstract Algebra. For the majority of these students, proof is an arduous task. In an abstract mathematical discourse such as Abstract Algebra, students are invited to produce proofs for several mathematical problems, both in the coursework and in the examination. As the literature (Moore, 1994; Harel and Sowder, 1998; Weber, 2001) and the discussion above suggests, proof production, especially in Group Theory, represents a particular challenge, because students have to develop several indispensable skills, such as their ability to cope with the abstract nature of this module and a certain flexibility in the application of metarules. It cannot be assumed that the majority of the students can develop these skills instantly or easily.

In addition, proof production is a new element in the students' learning experience, requiring successful application of both object-level and metalevel rules, and therefore a challenge in the secondary-tertiary transition that needs to be confronted. As the discussion above suggests, many novice students often have difficulty with the 'how' and 'when' of the required routines. Successful proof production depends on the thorough object-level learning of involved d-objects and their realization trees, as well as the successful and precise application of the governing metalevel rules, in the particular context. Evidently, students face various difficulties with the three steps of the procedure for developing a certain routine, namely, the applicability conditions, the course of action and the closure conditions. In particular, some students often face difficulties initiating a proof. It is a difficulty that frequently occurred in the context of this study and was also identified by Moore (1994). In addition, some students often have difficulty in recognising the signs that would signal the end of the proof, leaving them with a feeling of doubt. A future study will investigate students' perceptions about mathematical proof, as a way of mathematical communication.

References and Bibliography

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Mathews, D, & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2(4), 1-32.

Asiala, M., Dubinsky,E., Matthews, D.M., Morics, S., & Oktac, A. (1997). Development of students' understanding of cosets, normality, and quotient groups. *Journal for Mathematical Behavior*, 16, 241-309.

Barbeau, E. (1995). Algebra at tertiary level. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 139-142.

Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., & Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups, and subgroups. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(3), 187-239.

Clarke, J. M., DeVries, D. J., Hemenway, C., St. John, D., Tolias, G, & Roozbeh, V. (1997). An investigation of students' understanding of abstract algebra (binary operation, groups and subgroups) and the use of abstract structures to build other structures (through cosets, normality and quotient groups). *Journal of Mathematical Behavior*, 16, 181-185.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. London, New York, Routledge.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 85-109.

Dubinsky, E., Dautermann J., Leron U., & Zazkis R. (1994). On learning the fundamental concepts of Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 267-305.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 237-254.

Harel, G. and L. Sowder (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. *CBMS Issues in Mathematics Education*. A. H. Schoenfeld, J. Kaput and E. Dubinsky (Eds), 7, 234-283.

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(1), 71-90.

Ioannou, M. (2012). *Conceptual and learning issues in mathematics undergraduates' first encounter with group theory: A commognitive analysis* (Unpublished doctoral dissertation). University of East Anglia, UK.

Ioannou, M. (2018a). Commognitive analysis of undergraduate mathematics students' first encounter with the subgroup test. *Mathematics Education Research Journal*, 30(2), 117-142.

Ioannou, M. & Nardi, E. (2010). Mathematics undergraduates' experience of visualisation in abstract algebra: The metacognitive need for an explicit demonstration of its significance. *In the Proceedings of 13th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education.* North Carolina, USA.

Mason, J. (2001). Mathematical teaching practices at tertiary level. *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. D. Holton (Ed). Kluwer Academic Publishers, 71-86.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.

Nardi, E. (2000). Mathematics undergraduates' responses to semantic abbreviations, 'geometric' images and multi-level abstractions in Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 43, 169-189.

Nardi, E., Biza, I., Gonzalez-Martin, A.S., Gueudet, G. & Winslow, C. (2014). Institutional, sociocultural and discursive approaches to research in university mathematics education. *Research in Mathematics Education*, 16 (2), 91-94.

Presmeg, N. (2016). Commognition as a lens for research. *Educational Studies in Mathematics*, 91, 423-430.

Segal, J. (2000). Learning about mathematical proof: Conviction and validity. *Journal of Mathematical Behavior*, 18, 191-210.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: developing mathematical discourse - some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, 51-52, 1-9.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London, UK, Falmer Press.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101-119.

Weber, K. (2008). The role of affect in learning Real Analysis: a case study. *Research in Mathematics Education*, 10, 71-85.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Uma introdução ao estudo das superfícies parametrizadas regulares utilizando o GeoGebra

André Lúcio Grande
Faculdade de Tecnologia de Mauá – Fatec-Mauá
Brasil
andreluciogrande@gmail.com

Resumo

Este minicurso objetiva realizar um estudo das superfícies parametrizadas regulares utilizando como recurso auxiliar o software GeoGebra, com o intuito de explorar e caracterizar suas propriedades geométricas, algébricas e topológicas. Pesquisas em Educação Matemática sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral evidenciam as potencialidades e as possíveis contribuições do uso de softwares de geometria dinâmica no sentido de auxiliar na visualização e na compreensão dos conceitos tanto geométricos quanto algébricos dos objetos matemáticos. Como referencial teórico foram utilizadas as ideias ligadas ao papel da visualização relacionadas ao ensino do Cálculo defendidas por David Tall. Este trabalho apresenta uma abordagem qualitativa, tendo como procedimentos metodológicos a utilização do GeoGebra na construção de maneira dinâmica das superfícies tais como: regulares, regradas, de revolução e mínimas. Como resultados, ressaltamos que o estudo das superfícies com o auxílio do GeoGebra apresenta contribuições significativas na construção do conhecimento matemático.

Palavras-chave: Superfícies, Cálculo Diferencial e Integral, GeoGebra, Visualização, Geometria Dinâmica.

Introdução

Em nossa prática docente nos diversos níveis de ensino da Matemática nos deparamos com situações que envolvem o conceito de superfície, quer seja nas aulas de Geometria Euclidiana, Diferencial, Analítica, Topologia ou Cálculo, dada a sua diversidade de abordagens e aplicações.

Em muitas dessas situações em grande medida ao procurarmos caracterizar ou definir as superfícies utilizamos como exemplo as superfícies planas ou empregamos o próprio termo para sua conceptualização. Utilizando-se intuitivamente de analogias físicas, podemos obter uma superfície por exemplo pela deformação ou rompimento de uma folha de papel ou a colagem de alguns pedaços de papel.

Quanto às aplicações, destacamos sua utilização em diversas áreas, como a arquitetura, por exemplo, na construção de estruturas que se utilizam de suas propriedades geométricas.

Uma superfície pode ser definida como um conjunto de pontos do espaço euclidiano, sendo bidimensional e que qualquer ponto da mesma pode ser descrito localmente por duas coordenadas.

Dentre as várias classificações das superfícies, segundo Do Carmo (2012) são de interesse ao estudo aquelas não apresentam pontos singulares ou auto intersecções. Tais superfícies são denominadas superfícies regulares e admitem uma parametrização, sendo que as coordenadas de cada ponto dessa superfície podem ser descritas por funções de duas variáveis.

De uma maneira mais formal, utilizando-se dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, definimos uma superfície regular S da seguinte maneira:

> Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superficie regular se, para cada ponto $p \in S$, existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^3$e uma transformação $x: U \rightarrow V \cap S$ de um conjunto aberto de $U \subset \mathbb{R}^2$ em $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:
>
> 1) x é diferenciável. Isso significa escrever que se nós escrevermos $x(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in U$.
>
> 2) x é um homeomorfismo. Se x contínua pela condição 1, isto significa que x tem uma inversa $x^{-1}: V \cap S \rightarrow U$ que é contínua, isto é, x é uma restrição da aplicação contínua $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida em um aberto W contendo $V \cap S$.
>
> 3) (Condição de regularidade). Para cada $q \in U$, a diferencial $dx_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um a um. (Do Carmo, 2012, p. 52).

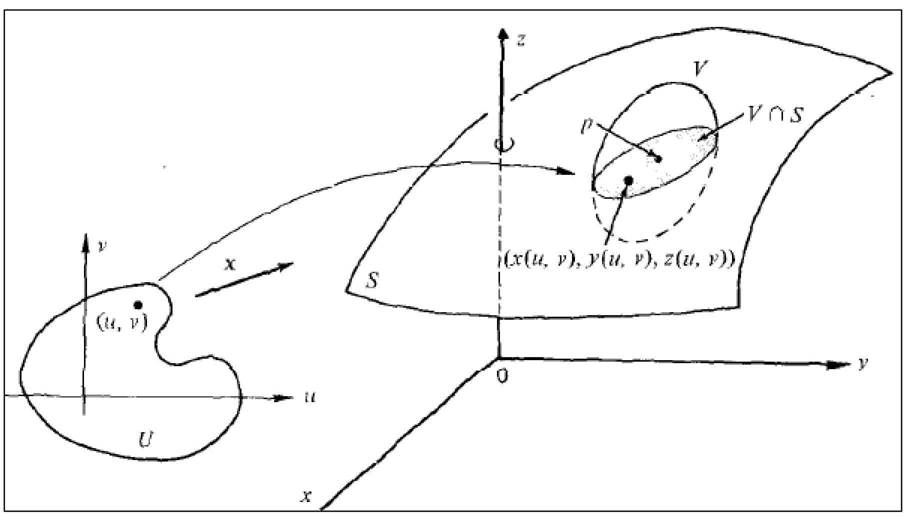


Figura 1. Superfícies Regulares

Em outras palavras, as superfícies regulares são aquelas que em cada ponto da mesma está definido um plano tangente e que consequentemente é possível se utilizar dos conceitos do

Cálculo Diferencial e Integral para se efetuar medições nessa superfície, como por exemplo distâncias, ângulos e áreas.

Uma superfície também pode ser definida do ponto de vista topológico, de uma maneira mais abstrata, como uma variedade. Uma variedade é um espaço que pode ser descrito localmente através de coordenadas, sendo o número de coordenadas ou o número de direções independentes necessárias para representar todos os pontos próximos de um ponto dado num objeto chamado de dimensão da variedade. Esse número de direções pode ser compreendido intuitivamente como o número observado por alguém que "viva" sobre a variedade, e não o número de dimensões necessárias para conter o objeto. No caso das superfícies, sua dimensão é igual a dois.

Para que as superfícies possam ser representadas, visualizadas e exploradas suas propriedades geométricas, algébricas e topológicas, faz-se necessário o uso de um recurso computacional auxiliar, que no caso desse minicurso, será utilizado o software GeoGebra, conforme será descrito a seguir.

A importância da visualização no ensino do Cálculo

O papel da visualização no ensino e na aprendizagem em Matemática é um tema que vem sendo discutido por um número cada vez maior de educadores e pesquisadores. A visualização, em linhas gerais, no ensino e aprendizagem do Cálculo permite interpretar informações por meio da construção de representações visuais, de *softwares*, entre outros recursos didáticos.

David Tall (2002) considera a visualização não só relevante à Matemática como à Educação Matemática. Por visualização o autor entende como uma ação de transformar conceitos abstratos em imagens mentalmente visíveis. Essa ação constitui-se em dois momentos: constrói-se algo mentalmente e posteriormente representa-se o que se pensou. Sobre a visualização o autor afirma que:

> Ao introduzir as visualizações adequadamente complexas de ideias matemáticas, é possível fornecer uma visão muito mais geral dos modos possíveis de aprender os conceitos, fornecendo intuições muito mais poderosas do que através de uma linguagem tradicional (TALL, 2002, p.20 – tradução nossa).

O autor afirma ainda que o uso do computador constitui uma interface visual e atuante em que é possível criar modelos de uma situação proposta destinados às explorações sensoriais por meio de percepções, visualizações e intuições. Para o autor, o computador se torna um "organizador genérico" de algumas ideias e conceitos, sendo um ambiente (ou micromundo) em que os alunos podem manipular exemplos e contraexemplos desses conceitos. Por meio de um software, portanto, os alunos entram em contato com o objeto matemático.

Sendo assim, selecionou-se o software GeoGebra para a exploração das propriedades algébricas e geométricas das superfícies, visando trabalhar com os alunos conceitos intuitivos de maneira dinâmica das mesmas, o que pode contribuir para o aluno formular conjecturas e testar hipóteses sobre alguns resultados.

Por Geometria Dinâmica pode-se entender como a geometria assistida por computador, em que os objetos matemáticos, como retas, ângulos e triângulos, podem ser movidos e manipulados, ao contrário da geometria em que os objetos são construídos com instrumentos euclidianos, como régua não graduada e compasso.

O GeoGebra é um *software* gratuito de Geometria Dinâmica, escrito na linguagem JAVA e disponível em português, que apresenta uma interface entre Geometria e Álgebra. Ele possui a vantagem de dispor, ao mesmo tempo, de duas representações diferentes de um mesmo objeto matemático: a geométrica e a algébrica, por exemplo, e essas representações podem ser simultaneamente manipuladas.

O estudo das superfícies parametrizadas regulares no GeoGebra

As superfícies parametrizadas regulares podem ser classificadas de várias maneiras, tais como por exemplo superfícies de revolução, mínimas ou regradas.

As denominadas superfícies de revolução são obtidas a partir uma curva plana e conexa regular em torno de um eixo no plano que não encontra a curva. Temos, por exemplo, o plano *xz* como o plano da curva e o eixo *Oz* como o eixo de rotação.

Para obtermos, por exemplo, a superfície de revolução denominada paraboloide utilizando o GeoGebra devemos iniciar representar algebricamente uma curva, no caso a parábola, no plano xz utilizando o parâmetro $u \in [0, 5]$ com as seguinte equações paramétricas: $\alpha(u) = (u, 0, u^2)$.

No GeoGebra, esta curva será representada geometricamente utilizando-se o seguinte comando:

Curva(<Expressão>, <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>)

No nosso caso, teremos a seguinte expressão:

c = Curva(u, 0, u^(2), u, 0, 5)

O paraboloide de revolução será gerado pela rotação da curva α em torno do eixo *Oz* utilizando no GeoGebra o seguinte comando:

Superfície(<Curva>, <Ângulo>, <Reta>)

Para o paraboloide, considerando-se o ângulo de rotação α tal que $0 < \alpha < 2\pi$, temos que:

S = Superfície(c, α, EixoZ)

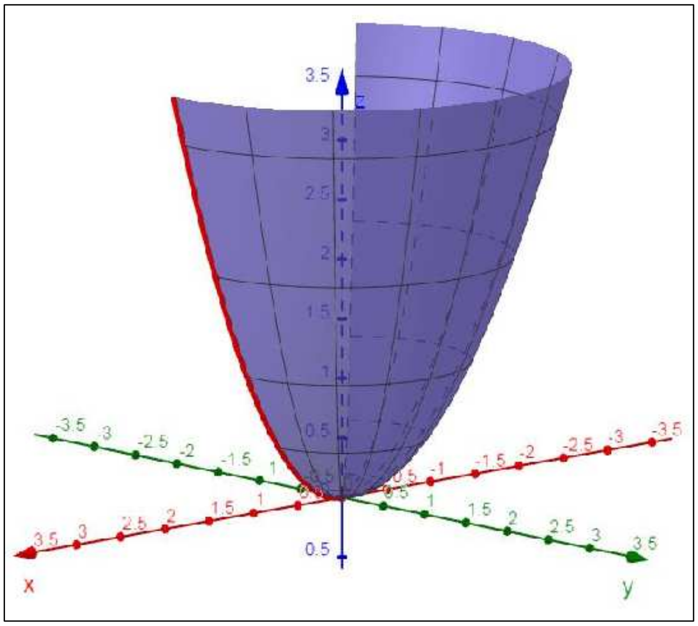


Figura 2. Superfície de Rotação no GeoGebra: Paraboloide de Revolução

Por meio dessa representação é possível estudar as possíveis interseções dessa superfície com planos paralelos, por exemplo, ao plano *xy.* Além disso, podem ser efetuadas medições, como comprimento de arcos, áreas e volume do sólido gerado pela superfície.

Outro objeto de estudo de igual interesse são as chamadas superfícies parametrizadas mínimas, que são aquela cuja curvatura média é identicamente nula. Temos como exemplos o plano, a catenoide, a helicoide, as superfícies de Enneper e superfícies Costa

A helicoide, por exemplo, é formada por semirretas que passam por um ponto P dessa superfície e são perpendiculares ao eixo z, conforme a figura a seguir.

Pode–se considerar que essa superfície pode ser gerada traçando-se uma reta paralela ao plano *xy* e que intersecta o eixo *Oz.* A helicoide possui as seguintes equações paramétricas:

$$x(u,v) = (v\cos u, v\,sen\, u, au), \qquad 0 < u < 2\pi \quad -\infty < v < \infty$$

Intuitivamente, podemos considerar que x aplica uma faixa aberta de largura 2π do plano uv sobre a parte do helicoide que corresponde a uma rotação de 2π ao longo da hélice.

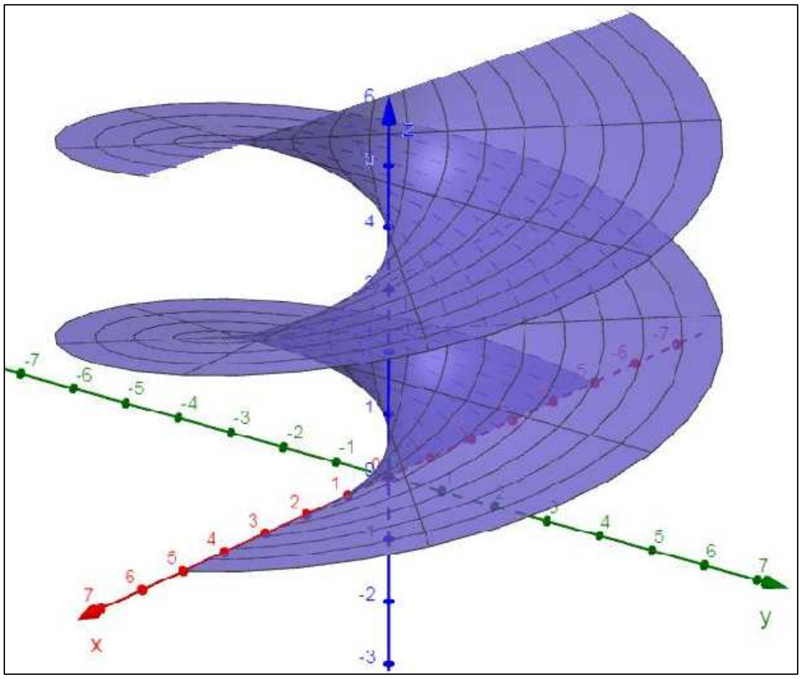


Figura 3. Superfície de Rotação no GeoGebra: Helicoide

Denominam-se superfícies regradas àquelas que se constituem um caso particular de superfícies desenvolvíveis. Podemos considerar que a palavra regrada possui o significado de “sujeita a regras”. Uma superfície regrada é aquela é ser formada por retas, o que lhe confere uma “regra” própria para ser gerada. Elas podem ser completamente determinadas pelo movimento de uma reta no espaço.

Como exemplo de superfícies regradas, temos: cilindro, cone, paraboloide hiperbolico, hiperboloide de uma folha, helicoide ou conoide.

Segundo Struik (1988), o primeiro estudo das superfícies regradas foi efetuado por Gaspar Monge (na obra aplicações da Análise à Geometria), que estabeleceu as equações diferenciais parciais que satisfazem todas as superfícies regradas (de terceira ordem).

Matematicamente, podemos considerar uma superfície regrada como sendo um subconjunto S do espaço euclidiano que para cada $k \epsilon \mathbb{R}$ existe uma reta

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{R}} r_k$$

Em outras palavras, as superfícies regradas são aquelas que em cada ponto dessa superfície passa, ao menos, uma reta contida na superfície. Ao menos localmente as superfícies regradas são o espaço constituído pelo movimento rígido de pelo menos uma reta (reta geratriz), sendo que o traço desse movimento será a superfície.

Com isso, para representarmos geometricamente uma superfície podemos utilizar o GeoGebra no intuito de auxiliar a visualização e a compreensão do fato por exemplo das superfícies regradas, tal como o hiperboloide de uma folha, serem formadas por uma união de retas, bem como obter as secções das superfícies por meio de planos paralelos aos planos xy, yz e xz, para visualizar que as intersecções dessa superfície com esses planos podem geram curvas como a elipse e a hipérbole.

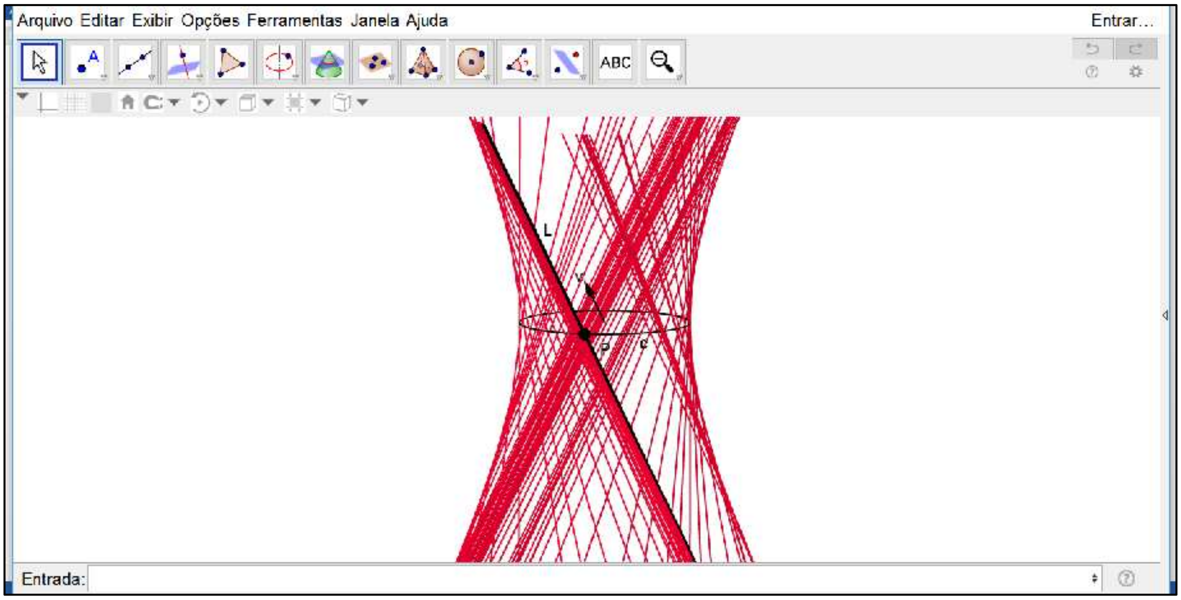


Figura 4. Superfície regrada no GeoGebra

Além disso, o software GeoGebra permite de maneira dinâmica a interação com o objeto de estudo, pois ao variarmos os parâmetros a, b e c da equação do hiperboloide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ podemos visualizar as alterações geométricas que ocorrem na superfície em questão.

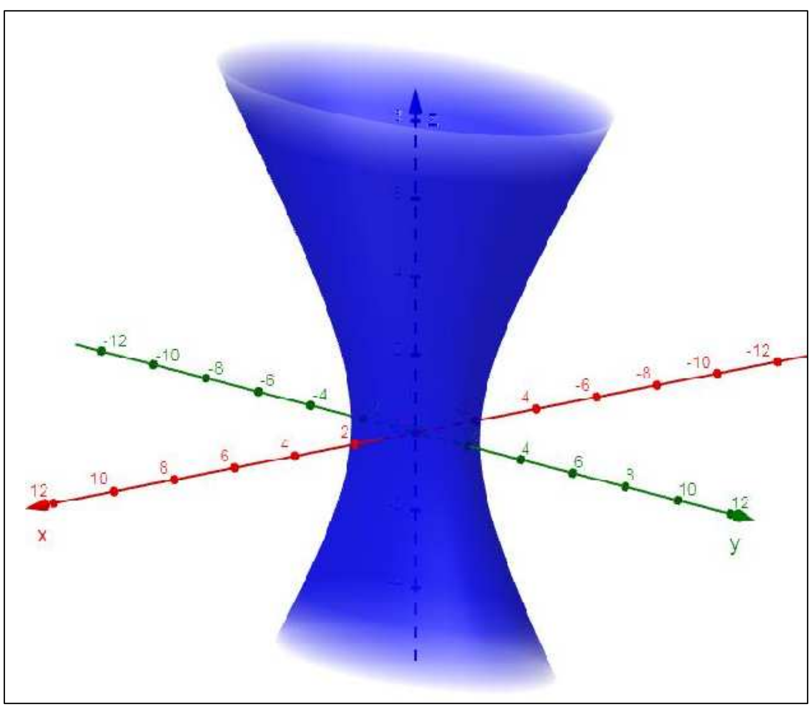


Figura 5. Superfícies regradas no GeoGebra: Hiperboloide de uma folha

Considerações Finais

Sobre o estudo das propriedades geométricas, algébricas e topológicas das superfícies utilizando o software GeoGebra, podemos considerar que o uso de tal recurso computacional auxiliar se constitui um elemento essencial responsável por "concretizar" o objeto de estudo em questão, no caso as superfícies parametrizadas regulares, além de permitir elaborar intuitivamente algumas conjecturas e hipóteses sobre as propriedades geométricas de tais superfícies. Já a utilização do GeoGebra auxiliou simular a obtenção das superfícies regradas como o hiperboloide de uma folha, por exemplo, mostrando sua característica de ser formada por retas, assim como contribuiu na formalização das hipóteses e conjecturas intuídas anteriormente.

Devemos ressaltar que o uso de um recurso computacional auxiliar – no caso do GeoGebra - pode não trazer o rigor matemático exigido em provas e demonstrações, mas possibilita em grande medida desenvolver intuições, gerar conjecturas e testar hipóteses, elementos essenciais para a construção do conhecimento matemático.

Destacamos que o ensino e a aprendizagem da Matemática sedimentados em princípios e ideias ligadas ao uso da intuição e do pensamento visual permitem aos estudantes, em grande medida, uma maior participação na construção do conhecimento científico. No caso do estudo das superfícies regulares, o GeoGebra apresenta contribuições significativas na construção do conhecimento matemático.

Referências e bibliografia

Camargo, I. Boulos, P. (2005). *Geometria Analítica – um tratamento vetorial.*3º ed. rev. e ampl. – São Paulo: Prentice Hall.

Creswell, J. W. (2010). Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução de Magda França Lopes. 3ª. ed. Porto Alegre: Artmed.

Do Carmo, M. P. (2010) Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM.

Grande, A. L. (2013). Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo

Grande, A. L. (2016). "Geometria Gaudiana": Um estudo das superfícies regradas nas obras de Antoni Gaudi utilizando o GeoGebra. In : Congresso Iberoamericano de Educación Matemática. Madrid – Espanha.

Struik, D. J. (1988). Lectures on Classical Differential Geometry. 2nd ed. New York: Dover Publications.

Tall, D. (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. In: *Visualizations on Mathematics* (ed. Zimmermann e Cunninghan), M.A.A. Notes No. 19, 105-119.

Tall, D. (2002). *Using Technology to Suport and Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics.* In: Primeiro Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro – Brasil.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Reflexiones sobre el Aprendizaje Activo en la Educación Superior: el caso de cambio de rutinas en las clases de Matemáticas

Jesennia Chavarría Vásquez
Escuela de Matemática, Universidad Nacional
Costa Rica
jessenia.chavarria.vasquez@una.ac.cr
María Elena Gavarrette Villaverde
Escuela de Matemática, Universidad Nacional
Costa Rica
maria.gavarrette.villaverde@una.ac.cr

Resumen

El propósito de esta comunicación es compartir las reflexiones sobre la práctica docente, que surgieron a partir de implementar actividades innovadoras de aprendizaje activo. El trabajo es un estudio de caso único, realizado en un grupo de la Cátedra del curso de Matemática General que se impartió en el 2018 en la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica. Se realizó un proceso colaborativo de investigación sobre la propia práctica docente, a partir de la implementación de cambios en las rutinas de clase, tales como: incorporación de Apps como Socrative y Kahoot; motivación para que los estudiantes realizaran trabajo de campo; y, la implementación de Laboratorios de Enseñanza. Una de las autoras impartió el curso y la otra autora fue mediadora para documentar, tanto las evidencias de implementación de actividades de aprendizaje activo, como las reflexiones sobre la práctica docente, emanadas a partir de las innovaciones implementadas.

Palabras clave: educación matemática, aprendizaje activo, reflexión sobre la práctica docente.

Contexto de la Investigación

El foco de atención de este trabajo es la reflexión sobre la práctica, suscitada a partir de cambios en las rutinas de clase en la educación superior, que da a lugar una investigación que surge en el marco de la participación de las autoras en el Programa STEM-LASPAU para Costa Rica, cuyo propósito principal fue "crear la capacidad de los individuos y las instituciones para que puedan implementar cambios efectivos para mejorar el acceso, la calidad y la relevancia de la educación superior" (conferencia de inauguración, Programa STEM-LASPAU-Costa Rica, 26 de octubre de 2017), así como visualizar la mediación pedagógica en el aula como un acto público de total transparencia y objeto de reflexión a través de la creación de comunidades docentes para la mejora de los proceso de enseñanza.

Los módulos del proceso formativo comprendieron metodologías y temáticas tales como: Flipped Classroom, Instrucción entre pares, Design Thinking, Aprendizaje basado en Proyectos y Aprendizaje basado en equipos, entre otros.

El proceso formativo desarrollado en el STEM-Costa Rica, motivó estrategias innovadoras para la enseñanza y el aprendizaje estudiantil en las carreras de STEM, el desarrollo de buenas prácticas basadas en investigación y también, enriqueció la creación de comunidades de práctica entre las instituciones participantes del proceso, que se extendió desde el mes de octubre del 2017, hasta el mes de septiembre del 2018.

Dentro de las tareas de formación continua implementadas por las autoras, en el marco del proceso descrito anteriormente, se desarrolló un *estudio de caso único* para evaluar las estrategias de innovación implementadas y reseñar las reflexiones acontecidas a partir de la práctica profesional de la docente que desarrolló los cambios en las rutinas.

El Curso de Matemática General es un curso que se trabaja bajo el sistema de cátedra, y exige una dinámica de coordinación absoluta de los docentes, en cuanto al estricto cumplimiento de un cronograma previamente establecido para el abordaje de los distintos contenidos, y la aplicación de una evaluación uniforme y rígida para todos los grupos que componen la cátedra. Los resultados históricamente en las notas obtenidas por los estudiantes han sido bajos, con porcentajes de aprobación que oscilan entre un 20% y 30%.

Las autoras decidieron desarrollar el estudio justamente en el curso mencionado, dada las condiciones desafiantes que han sido descritas de severidad y control, donde existe un cronograma de avance semana a semana y aunque corresponde a un curso teórico-práctico donde la mayor parte de la clase el docente la dedica al abordaje de contenidos. La parte práctica se realiza de manera muy tradicional, en donde la mayoría de sesiones se trabajan en la clarificación de dudas o revisión de ejercicios específicos por parte del docente.

Fundamentos Teóricos y Metodológicos

John Dewey (1916, citado en Navarro, 2006) define el *aprendizaje activo* como algo que hace la persona cuando estudia. De acuerdo con Navarro (2006), a partir de esta definición original, se han ido incorporando distintas concepciones sobre el término, que abarcan diversos aspectos vinculados a tipos de interacción, que finalmente se decanta en “la realización de distintas actividades por parte de los estudiantes acompañada de la reflexión sobre las acciones que están llevando a cabo” (p. 174)

El aprendizaje activo como enfoque, se preocupa por la manera en la cual los estudiantes aprenden y por las acciones que como docentes realizamos para provocar aprendizaje en los estudiantes. No obstante, estas acciones por parte del docente, lograrán un aprendizaje en el estudiante, en la medida en que éste se implique en su proceso de aprendizaje, se empodere, o bien, se haga responsable de dicho proceso; sea capaz de resolver problemas, al sentirse desafiado por una situación particular que se le presenta, buscando soluciones que sean “viables, pertinentes y consistentes” (Jerez, Aranca, Castro, Cosmelli, Chiple, Mancilla y Valdés, 2015). Otro de los principios de este aprendizaje es lograr una implicación o participación cognitiva por parte del estudiante, es decir, que éste movilice habilidades superiores de pensamiento, en una interacción sana y positiva con otros, que provoque en él, el interés por aprender. Finalmente, el aprendizaje activo promueve el aprender haciendo, este último es el que típicamente define este tipo de aprendizaje, sin embargo, tal y cómo se evidencia no es el único aspecto a considerar.

Para sustentar *las reflexiones sobre la práctica profesional* que acontecieron en el marco del estudio, se consideraron las ideas de Ponte (2012), quien valora los procesos formativos que sitúan en un lugar central la colaboración (debido al rol de las autoras), así como también el papel de la práctica y el de la investigación sobre la práctica profesional, destacando que los docentes aprenden a partir de su actividad y de la reflexión en torno a ella.

Por otra parte, con el afán de *comprender la práctica profesional del profesor de matemáticas* en el aula y dar una visión objetiva de la misma, se consideraron las ideas de Llinares (2000), quien advierte que es preciso identificar características de la gestión desarrollada del proceso de enseñanza-aprendizaje que puedan ser relevantes por su capacidad explicativa o su potencial para la reflexión sobre la práctica profesional.

En este caso particular, el cambio de rutinas de clase, a partir de metodologías de aprendizaje activo, permitió documentar los cambios percibidos, así como la utilización de The Classroom Observation Protocol for Undergraduate STEM (COPUS): a New Instrument to Characterize University STEM Classroom Practice (Smith MK, Jones FHM, Gilbert SL & Wieman CE, 2013).

Lo anterior por cuanto, innovar a partir de rutinas establece como pasos para su implementación, la identificación de una rutina que impacte positivamente, realizar una búsqueda documental que permita conocer e indagar respecto a experiencias de otros docentes sobre dicha rutina, o bien, consultarles a los estudiantes cómo se puede mejorar la misma; mejorar la rutina, aplicarla, comprender los ajustes que son requeridos y buscar los mecanismos para mantener dicha rutina, adaptarla a condiciones distintas y fortalecerla.

En relación con The Classroom Observation Protocol for Undergraduate STEM, consiste en un protocolo de observación de aula que permite a profesores de STEM, caracterizar de una forma confiable la manera en la cual los profesores y los estudiantes disponen del tiempo en el aula, es necesario indicar que este protocolo ha sido implementado y validado (Smith et. al, 2013).

Con respecto al sustento metodológico implementado para recopilar la información, se demarcó a través del proceso de estudios de casos, que tienen como característica básica que abordan de forma intensiva una unidad, ésta puede referirse a una persona, una familia, un grupo, una organización o una institución (Martínez, 2011), sin embargo, por las características expuestas en el apartado anterior, se delimitó el estudio a un *estudio de caso único*, destacando que la muestra es intencional y que se realiza en función de los intereses y propósitos que determinan la potencialidad del mismo, tal como lo establece Wainer (2012).

El hallazgo que se considera de mayor relevancia en este estudio fue poder innovar en la clase por medio de rutinas, es decir, con pequeños cambios acompañados de un plan que permitió evaluar el éxito o no de dicha rutina, basada en estrategias de aprendizaje activo.

De esta forma, uno de las innovaciones fue cambiar la estructura habitual de la clase, implementando un breve diagnóstico que permitiera retomar lo aprendido en sesiones previas y cerrar la clase con pequeñas asignaciones que complementen el trabajo realizado. Dicho cambio en la estructura fue complementado con el uso de aplicaciones tecnológicas como Socrative y Kahoot y en algunas sesiones se trabajó con la modalidad de Laboratorio de Enseñanza, dando lugar a una dinámica grupal más interactiva.

Los criterios contemplados para el análisis de la información recopilados a partir del estudio de caso se organizaron a través de dos indicadores: el primero de ellos está relacionado con la medición del impacto del cambio de rutinas implementado, a partir de los resultados obtenidos del trabajo en clase; y, el segundo de ellos radica en la recopilación de información por parte de la docente observadora, a partir de las reflexiones sobre la práctica profesional emitidas por la docente que llevó a cabo la implementación de las innovaciones, así como también a partir del protocolo de observación. Para efectuar el estudio, el rol de las investigadoras se estableció a priori, puesto que una de ellas impartió el curso y realizó los cambios de rutina y la otra autora fue mediadora para documentar, tanto las evidencias de implementación de actividades de aprendizaje activo, como las reflexiones sobre la práctica docente, emanadas a partir de las innovaciones implementadas.

Primer indicador: evidencias del impacto al innovar con cambios de rutinas a partir de aprendizaje activo

Durante el curso se implementó como estrategia pedagógica el laboratorio de enseñanza, la cual se realizó de dos formas. En primer lugar, se les solicitó a los estudiantes que estudiaran previamente métodos de factorización y, en la clase, se efectuó una actividad en equipo y colaborativa utilizando la aplicación Kahoot. Por otra parte, se realizó un cambio en la estructura o planeamiento de la clase, la cual iniciaba con una reflexión y cuestionamientos respecto a los conocimientos y habilidades adquiridas en sesiones anteriores y cada sesión cerraba con una asignación para la siguiente clase.

En la figura 1 se muestran evidencias fotográficas de tareas desarrolladas por los estudiantes a partir de las innovaciones propuestas. Por ejemplo, cuando se trabajó el tema de análisis de gráfica de funciones, se solicitó a los estudiantes traer la gráfica de una función que describiera el comportamiento de alguna situación atinente o relacionada a su carrera o ámbito profesional, tal como se observa en la imagen de la izquierda. Otro ejemplo, fue cuando se trabajó con el tema de ángulos de elevación y de depresión, donde se construyó un clinómetro en el aula y se asignó como actividad extraclase la construcción de un problema de trigonometría utilizando este instrumento, para el cual se solicitó, además, que los estudiantes se tomaran fotografías con la situación-problema planteada, de modo que la imagen de la derecha representa a una estudiante utilizando el clinómetro en la medición de la altura de una canasta de baloncesto, cabe destacar que el problema planteado fue construido por la estudiante y fue resuelto en clase por otros compañeros.

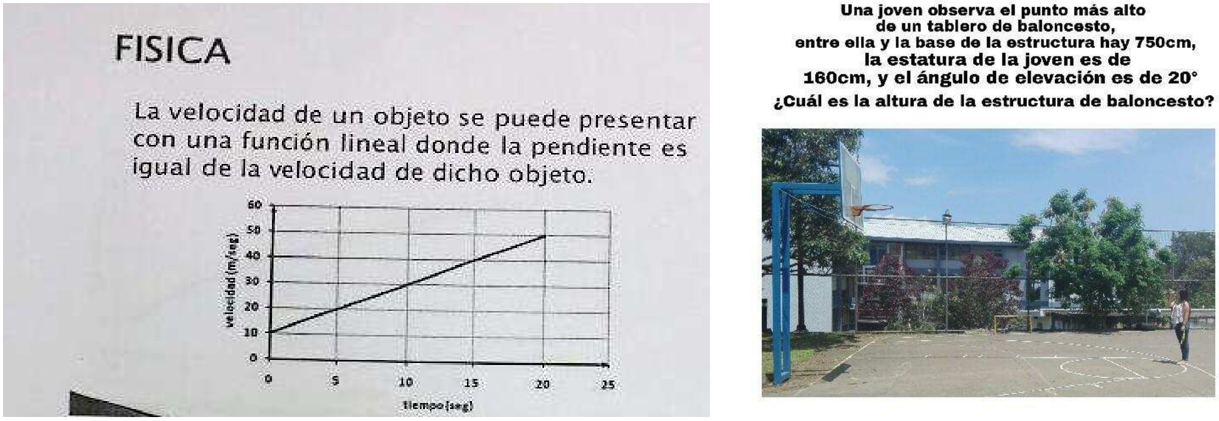


Figura 1. Evidencia fotográfica de las tareas desarrolladas por los estudiantes

Con respecto a los resultados obtenidos a partir de la implementación de actividades de aprendizaje activo, puede afirmarse que se constató como ventaja que el estudiante se haga responsable de su propio proceso de aprendizaje, se implique y participe cognitivamente logrando movilizar habilidades superiores de pensamiento, en una interacción sana y positiva con sus pares.

Además, a partir de la ejecución de dichas estrategias didácticas, se alcanzó un efecto positivo sobre los estudiantes, reflejado en una puntual asistencia y una alta responsabilidad en la entrega de las asignaciones. En actividades como la del clinómetro, por ejemplo, se reportó un 100% de entrega en dicha asignación, además, de evidenciar una alta motivación de los estudiantes materializada en los múltiples escenarios que fueron objeto de estudio por parte de ellos al plantear los problemas trigonométricos. Es importante indicar que estas asignaciones eran formativas, es decir, no tenían un porcentaje asignado de manera sumativa.

La dinámica e interacciones entre estudiantes y la docente también se vieron favorecidas, logrando un ambiente de aprendizaje adecuado, con intervenciones y participaciones de forma continua de los estudiantes, en donde existía un interés auténtico por mostrar el trabajo realizado a sus pares y que éstos realizaran los problemas que cada uno había planteado. Por otra parte, se alcanzó una mayor motivación y confianza de los estudiantes al enfrentarse a problemas, incluso en la forma de redactar los mismos.

Una de las fuentes de información que permitió constatar los efectos positivos en los estudiantes del curso corresponde al informe de resultados de la evaluación del desempeño docente, la cual es realizada por el Programa de Evaluación Académica y Desarrollo Profesional de la Universidad Nacional, a través de un cuestionario. Cabe destacar que, en una escala de excelente a deficiente, en el curso para el cual se aplicaron las estrategias de innovación, la docente obtuvo un excelente en la categorización del desempeño (que corresponde a un rango de 96 a 100). En este caso, los resultados obtenidos por la docente fueron superior a los que históricamente habían sido reportados, por ejemplo, los rubros en los cuales se obtuvo una mejora significativo fueron: en el uso de recursos educativos para el desarrollo del curso, se propicia la participación del estudiantado en la clase, se favorece la comunicación con el estudiantado ya sea de manera personal y/o virtual y la docente da seguimiento al trabajo realizado por el estudiantado.

Por otra parte, en cuanto a las opiniones de los estudiantes respecto a las fortalezas del docente en el curso. Textualmente algunos estudiantes manifestaron comentarios como:

- ✓ *Innova la forma en que se da el curso*
- ✓ *Incentiva el trabajo en equipo en una materia que muchas veces puede ser muy individual*
- ✓ *Trata de hacer las clases dinámicas para un mejor entendimiento*

Segundo indicador: Reflexiones sobre la práctica docente a partir de la implementación de aprendizaje activo

Se mencionó con anterioridad que la innovación a partir de rutinas, potencia la reflexión de la práctica docente, en cuanto una vez identificada una rutina de efectos positivos, es necesario realizar un proceso de mejora que atienda los comentarios que los mismos estudiantes indiquen y que permita mejorarla a partir de teorías o investigaciones que se hayan efectuado en relación con la rutina identificada.

Se describen a continuación, de manera precisa los cambios percibidos en la actitud, concepción docente y de la práctica profesional cotidiana, externados por la docente que aplicó las estrategias de aprendizaje activo, puntualmente la innovación a partir de rutinas:

> *Unos de los factores de mayor arraigo al impartir cursos como Matemática General, es la preocupación por el tiempo en función de cubrir el total de contenidos que establece el programa, y que usualmente ha sido utilizado como excusa para evitar realizar cambios tanto en términos del programa como de metodología o evaluación. A partir de la implementación de rutinas, mi idea respecto a la innovación y al cambio en la docencia se han visto afectadas de manera positiva.*
>
> *En primer lugar, porque existe un cambio importante en mi idea de innovación, pasando de una concepción más general a una práctica sistemática acompañada de una adecuada evaluación del impacto. Esto me ha permitido pensar en la implementación de estrategias de aprendizaje activo como un proceso paulatino, tratando de evaluar al final su impacto.*
>
> *Por otra parte, con las actividades realizadas en el curso de Matemática General me di cuenta del cambio que he tenido desde la práctica profesional cotidiana, ya que he podido implementar en el aula diferentes actividades de aprendizaje activo, que no han restado tiempo al desarrollo de contenidos y por el contrario han potenciado habilidades en los estudiantes que hacen que me sienta satisfecha con el trabajo realizado.*
>
> *Los cambios implementados y la percepción y recepción a estas prácticas por parte de los estudiantes, me han hecho reflexionar sobre lo que constituía mi foco central en la práctica docente, preocupándome por la manera en la cual planifico cada sesión de forma que los estudiantes alcancen habilidades matemáticas y un aprendizaje significativo, y no solamente un conocimiento enfocado en contenidos.*
>
> *El uso de distintas estrategias para el aprendizaje debe enfocarse en facilitar a los estudiantes los medios para la construcción de su conocimiento, de forma tal que este se sienta, con respecto a su aprendizaje, implicado, responsable y capaz; donde, a la*

> *vez, pueda pensar por sí mismo, interactuar con otros, sentir deseos por aprender y aprender haciendo.*

Esta reflexión evidencia convicción por parte de la docente, respecto a los efectos positivos que se obtienen en la aplicación de estrategias de aprendizaje activo en el aula.

Por otra parte, con la aplicación de The Classroom Observation Protocol for Undergraduate STEM, se evidenció que la docente a partir de la implementación de estrategias de aprendizaje activo logró una buena interacción en el aula, entre todos los participantes del proceso educativo. Asimismo, se constata que el uso de aplicaciones tales como Socrative, le permiten al docente, en tiempo real, revisar la apropiación o no de conceptos y procedimientos matemáticos por parte de los estudiantes, y realizar observaciones o explicaciones a partir de dichos resultados.

La aplicación del protocolo de observación permitió constatar que la rutina de asignación de tareas fue exitosa, en el caso de la construcción de ejemplos concretos de sus diferentes carreras universitarias para el análisis de funciones; dando lugar a que la docente decidiera continuar con el ciclo que establece la implementación de rutinas, así como también establecer metas en la práctica docente para futuro.

Reflexiones Finales

La implementación de estrategias de aprendizaje activo, aunado a un proceso de reflexión de la práctica docente, permiten generar cambios paulatinos de impacto positivo, en el proceso de enseñanza y aprendizaje a nivel superior universitario. El romper un paradigma de enseñanza en la educación superior es complejo, pero el cambio por rutinas hace que el docente muestre menos resistencia y autorregule su propia práctica.

La reflexión sobre la propia mediación pedagógica, tanto del docente de manera individual, como de un grupo de docentes que apoyen y acompañen dicha reflexión, permite identificar buenas prácticas que pueden ser replicadas y mejoradas continuamente.

El proceso de innovación implica una buena actitud del docente acompañado de creatividad, y de apertura, sobre todo para visualizar el espacio de aula como un sitio de transparencia y de escrutinio público, con el objetivo de mejorar y aprender de las buenas o malas prácticas que en él se efectúen.

Al principio surge el temor de implementar actividades diferentes por parte del docente, pues puede acontecer que dichas actividades no sean exitosas, o bien, no se logre una adecuada reacción de los estudiantes, o incluso existe la tensión de ser "juzgado" por los mismos colegas. La aplicación de innovaciones, por lo tanto, requiere de un cambio de mentalidad para que sea exitoso. El proceso se caracteriza por requerir de confianza y de una inmersión en la ejecución de este, aunque en algún momento sea confuso; se debe permitir que una idea pase por prueba y error y que esto conlleve a un aprendizaje.

Las pequeñas innovaciones realizadas aportan confianza para atreverse a realizar cosas nuevas, hacer uso de distintas herramientas, investigar experiencias didácticas exitosas y el surgimiento de ideas para implementar en cursos a futuro.

Un aspecto que facilitó la reflexión de la práctica fue que se compartieran ideas y reflexiones entre las investigadoras de estudio, pues se recibió retroalimentación constante por parte de la investigadora observadora.

Referencias y bibliografía

Aránguiz, M. B; Molina, M. B; Riquelme, A. C; y Contreras, C. M. (2018). Propuesta de modelo tecnológico para Flipped Classroom (T-FliC) en educación superior. *Revista Electrónica Educare, 22*(2), 3.

Bishop, J. L., & Verleger, M. A. (2013, June). *The flipped classroom: A survey of the research.* In ASEE national conference proceedings, Atlanta, GA (Vol. 30, No. 9, pp. 1-18).

Jerez, O; Aranca, C; Castro, C; Cosmelli, J; Chiple, R; Mancilla, R; y Valdés, A. (2015). Aprendizaje activo, diversidad e inclusión. *Santiago: Universidad de Chile*.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas.En J. P. da Ponte & L. Serrazina (coord.), *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia*. (pp. 109-132). Secçao de Educaçao Matematica da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educaçao: Lisboa, Portugal. Recuperado de: https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/857/1/Llinares-%20comprendiendo%20la%20practica%20del%20profesor.pdf

Martínez, P. C. (2011). El método de estudio de caso Estrategia metodológica de la investigación científica. *Revista científica Pensamiento y Gestión, 20,* 165-193.

Muñoz Venegas, M., Cea Echeverría, P., Martínez Araneda, C., & Cárdenas Oviedo, C. (2017). *Innovando en Educación Superior: Experiencias clave en Latinoamérica y el Caribe 2016-2017*. Universidad de Chile, Facultad de Economía y Negocios. Recuperado de: http://repositoriodigital.ucsc.cl/handle/25022009/1262

Navarro, L. P. (2006). Aprendizaje activo en el aula universitaria: el caso del aprendizaje basado en problemas. Miscelánea Comillas. *Revista de Ciencias Humanas y Sociales, 64*(124), 173-196. Recuperado de: http://revistas.upcomillas.es/index.php/miscelaneacomillas/article/view/6558/6367

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y prática de la educación matemática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.

Universidad Nacional. (2018). *Programa del Curso Matemática General*. Escuela de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Recuperado de: http://www.matematica.una.ac.cr/

Wainer, A. (2012). Estudios de caso único en el campo de la investigación actual en psicología clínica. *Subjetividad y procesos cognitivos, 16* (2), 214-222.

Smith, MK; Jones, FHM; Gilbert, SL; & Wieman, CE. 2013. The Classroom Observation Protocol for Undergraduate STEM (COPUS): a New Instrument to Characterize University STEM Classroom Practices. CBE-Life Sciences Education, Vol 12(4), pp. 618-627; www.cwsei.ubc.ca/resources/COPUS.htm

Construcciones mentales para la comprensión del concepto de Ortogonalidad

Brandon Andrey **Moreno** Solares
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander
Colombia
brandonmss@hotmail.com

Solange **Roa** Fuentes
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander; Grupo EDUMAT – UIS
Colombia
roafuentes@gmail.com

Resumen

El interés de esta investigación está en el concepto de ortogonalidad, el cual hace parte de los cursos de álgebra lineal del primer año universitario en los programas de ingenierías y ciencias exactas. Éste ha sido poco estudiado desde la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal. Se presentan algunos trabajos previamente desarrollados que involucran el estudio del concepto y se toma como fundamento teórico la teoría APOE, la cual permitirá estudiar con profundidad la ortogonalidad desde lo cognitivo con el fin de identificar las construcciones previas que un estudiante debe poseer para comprensión del objeto matemático deseado y, de esta manera, contribuir a la didáctica del álgebra lineal. Finalmente, se describen algunas conclusiones, reflexiones y alcances de la investigación en curso.

Palabras clave: Teoría APOE, Ortogonalidad, didáctica del álgebra, pensamiento matemático avanzado.

Introducción

El álgebra lineal es una de las principales asignaturas del ciclo básico universitario de los programas de ingeniería y ciencias exactas. Recientemente, investigar acerca de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal ha adquirido un mayor interés y, en la actualidad, se encuentra una gran variedad de trabajos que muestran su importancia, dificultades asociadas a su enseñanza y aprendizaje y, estudios para la comprensión de conceptos específicos. A continuación, se mencionan algunos de los trabajos desarrollados tanto en la didáctica del álgebra como aquellos relacionados al objeto de interés en la presente investigación.

Aspectos generales

El álgebra lineal es considerada como una asignatura de gran dificultad, Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) mencionan que los estudiantes se sienten en otro planeta en el cual no pueden encontrar su rumbo. Un estudio realizado en 1987 por Robert y Robinet propuso un cuestionario con el fin de identificar los conocimientos e ideas de los estudiantes en torno al álgebra lineal, donde dos de las preguntas pedían a los alumnos realizar una descripción del curso y sus dificultades. En ellas se encontró que la dificultad en la comprensión de un objeto particular (Espacio vectorial), la multitud de teoremas, propiedades y definiciones, el requerimiento de pruebas, rigor, precisión, lógica y cuantificadores y, la ausencia de conexiones entre los conocimientos previos y los nuevos son los principales obstáculos en la comprensión del álgebra lineal, denominado obstáculo del formalismo.

Harel (2000) señala tres principios para el aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal: el principio de lo concreto, el principio de la necesidad y el principio de la generalización. El primer principio tiene que ver con la comprensión por parte de los estudiantes de los conceptos matemáticos partiendo de contextos concretos para ellos. El principio de la necesidad hace referencia a que el conocimiento se desarrolla a partir de necesidades, intelectualmente hablando; es decir, un estudiante aprenderá un concepto matemático cuando sienta la necesidad de usarlo como una solución a una situación problema de su contexto. Finalmente, el principio de generalización tiene como objetivo permitir y fomentar en los estudiantes la generalización de los conceptos a partir de otros conceptos aprendidos en un modelo específico.

Posteriormente, Dorier y Sierpinska (2001) hicieron una compilación de investigaciones alrededor del álgebra lineal. Allí, se identifican dos tipos de dificultades: (i) dificultades conceptuales, las cuales corresponden a las dificultes asociadas a la naturaleza del álgebra lineal en sí misma, lo denominado por Hillel como "the nature of the beast"; y, (ii) dificultades cognitivas, las cuales hacen referencia al tipo de pensamiento que se necesita para la comprensión del álgebra lineal.

Para ampliar un poco más sobre los trabajos realizados en torno al aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal y las dificultades asociadas a su comprensión se recomienda leer las investigaciones de Sierpinska (2000), Hillel (2000), Sierpinska et al (2002), Dorier (1997), Dorier et al (2000), Rober y Robinet (1987), Alves Dias & Artigue (1995).

Por otra parte, se han realizado diferentes investigaciones estudiando la construcción y comprensión de algunos objetos matemáticos específicos del álgebra lineal, dentro de ellos se encuentran los conceptos de espacio vectorial (Trigueros y Oktac, 2005; Oktac et al, 2006; Parraguez y Oktac, 2010); sistemas de ecuaciones lineales (Trigueros et al, 2007); base (Kú et al, 2008); transformación lineal (Roa-Fuentes y Oktac, 2010; Roa-Fuentes y Oktac, 2012); y, valores y vectores propios (Salgado y Trigueros, 2015). Como se puede observar, en los trabajos realizados con la teoría APOE en torno a los conceptos del álgebra lineal no se ha estudiado el concepto de ortogonalidad, lo cual es el interés de la presente investigación. Además, hay pocos trabajos realizados desde otras teorías que involucran el estudio de la comprensión y la construcción de dicho concepto. A continuación, se describen algunos de esos trabajos.

Acerca de la Ortogonalidad

Gueudet-Chartier (2004) presenta un estudio de libros textos referente a los conceptos de ortogonalidad y producto punto, con el fin de observar el potencial y las limitaciones del uso de la geometría en la enseñanza del álgebra lineal. En dicho apartado, el autor destaca la carencia del aprendizaje de conceptos del álgebra lineal a partir de nociones intuitivas, por ejemplo, el caso de la definición de ortogonalidad en espacios con producto interno que no tiene una noción intuitiva asociada que le permita a los estudiantes establecer un vínculo entre el álgebra lineal y la geometría. En esta investigación se invita a considerar las otras áreas de la matemática con el fin de mejorar la enseñanza del álgebra lineal y más aún la geometría, así conceptos como el de espacios con producto interno u ortogonalidad se podrían estudiar bien a través de este enfoque.

Adicionalmente, el grupo de educadores matemáticos llamado “Linear Algebra Curriculum Study Group” (LACSG), cuyo objetivo era estudiar las problemáticas asociadas a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal, generó un conjunto de recomendaciones para un primer curso de álgebra lineal, para las cuales se tuvo en cuenta aspectos pedagógicos y epistemológicos acerca del aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal; la experiencia de los docentes y algunas recomendaciones por personas pertenecientes a otros campos. Referente a las recomendaciones del LACSG y el concepto de ortogonalidad en un primer curso de álgebra lineal se encuentra que se debe abordar los conceptos de producto interno, incluyendo la ortogonalidad, conjuntos bases y matrices ortogonales, proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, entre otros Harel (2000).

Posteriormente, Bagley y Rabin (2013) realizaron un trabajo de investigación en torno a tres formas de pensamiento en un curso de álgebra lineal las cuales ellos denominaron como pensamiento abstracto, pensamiento computacional y pensamiento geométrico. Los investigadores buscaban identificar las estrategias que los estudiantes implementaban para resolver un problema, y la coordinación de las formas de pensamiento; por lo cual su investigación giró alrededor de una tarea llamada el “Problema de Michelle”, la cual consiste en encontrar una base para $\mathbb{R}^4$ a partir de dos vectores dados u y v. La investigación mostró que los estudiantes poseen dificultades en torno al concepto de ortogonalidad, se evidenció que ellos operaban de manera circular cuando intentaban resolver un sistema de ecuaciones lineales en la búsqueda de vectores ortogonales. También se identificó que ellos pensaban que la única forma de producir vectores ortogonales era por el medio del proceso de Gram-Schmidt. Otro resultado interesante es que ningún estudiante intentó solucionar el problema a través de la ortogonalidad de manera natural, solamente lo hicieron cuando el entrevistador lo sugirió.

Dreyfus y Hillel (1998, 2005) realizaron una investigación basada en la construcción de significados relacionados con los conceptos de proyección y aproximación. Esta investigación estudia la noción de “producto interno”, la cual es una generalización del producto punto en R^n. De esta manera, por medio de Espacios con Producto Interno se define en términos más generales otros conceptos como proyección ortogonal, ortogonalidad, norma, distancia, entre otros, donde una aplicación interesante tiene que ver con la aproximación de una función f mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, dicha aplicación es poco usual en un curso de Álgebra Lineal.

Asimismo, Caglayan (2018) aborda el concepto de espacios con producto interno donde se incluye la condición de ortogonalidad desde la aproximación de funciones. Este autor se interesó por estudiar la comprensión de los estudiantes de los polinomios ortogonales de Hermite e identificar las formas creativas e innovadoras donde se coordinan enfoques visuales y analíticos a través de un software de geometría dinámica. Mediante la exploración en el software de geometría dinámica, los estudiantes obtuvieron una parte de la secuencia de los polinomios de

Hermite y posteriormente se abordaron algunas propiedades y conceptos en términos de los polinomios de Hermite tales como ortogonalidad, desigualdad de Cauchy-Schwarz, desigualdad del triángulo, teorema de Pitágoras, ortonormalidad, entre otros.

Los trabajos anteriormente descritos realizan diferentes aportes al concepto de ortogonalidad, en ellos, se identifican algunas dificultades relacionadas con el concepto y se proporciona un tratamiento diferente al usual en un curso de álgebra lineal mediante la aproximación de funciones; de esta manera, también se evidencian las conexiones existentes entre la ortogonalidad y otros conceptos de la misma área. Por tanto, la pregunta que guía esta investigación es ¿Qué estructuras y mecanismos mentales necesita construir un estudiante para la compresión del concepto de ortogonalidad? A la cual se le dará respuesta mediante el objetivo, describir las estructuras y mecanismos mentales que desarrollan estudiantes universitarios de primer año sobre el concepto de Ortogonalidad, a través del diseño y desarrollo del Ciclo de Investigación propuesto por la teoría APOE.

Marco Teórico

Teoría APOE

La Teoría APOE[1] (Arnon et al, 2014) busca describir cómo un individuo construye su comprensión de un objeto matemático específico mediante *estructuras mentales* que permiten reflexionar sobre las construcciones que va a hacer o que necesita hacer para lograr la comprensión de un objeto o un concepto matemático, de esta manera, se puede realizar un acercamiento de forma más reflexiva, proporcionando así, un enriquecimiento en la concepción que un individuo tiene sobre los objetos matemáticos.

La siguiente figura es un esquema que muestra cómo se relacionan las estructuras y mecanismos mentales para la comprensión de un objeto matemático. Para la construcción de las estructuras mentales se requiere de los diferentes mecanismos mentales, los cuales son los puentes que permiten el tránsito entre una estructura y otra y, por tanto, conducen a la construcción del conocimiento matemático.

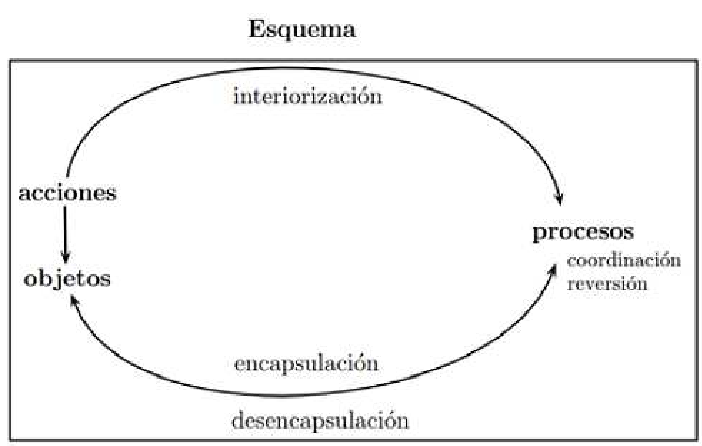


Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de un concepto matemático (Arnon et al, 2014)

[1] Acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema.

Se puede observar que el conocimiento matemático se origina con Acciones, las cuales son transformaciones sobre los objetos físicos o mentales previamente construidos por parte de un individuo; la interiorización de las Acciones conduce a una reflexión sobre ellas y, por tanto, a una apropiación interna de las mismas, de esta manera se produce una concepción Proceso sobre determinado concepto. Los mecanismos de coordinación y reversión permiten la construcción de nuevos procesos. La concepción Objeto se logra a través de la encapsulación, esto es, comprender el Proceso como una estructura estática con la cual se pueden realizar Acciones. La desencapsulación es el mecanismo por el cual el individuo regresa al Proceso que dio origen a un objeto mental. Finalmente, un Esquema es un conjunto de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que el estudiante puede usar para dar solución a una situación problema. El nivel de comprensión de un individuo dependerá de su habilidad para establecer relaciones entre las diferentes construcciones mentales (Arnon et al, 2014).

Un aspecto fundamental de esta teoría es que parte de la idea de que todo objeto o concepto matemático puede ser comprendido por un individuo si éste posee las construcciones necesarias (Arnon et al, 2014) por tanto, se requiere del diseño de un modelo cognitivo denominado descomposición genética; el cual es un camino que describe cómo un concepto matemático puede llegar a ser comprendido mentalmente por un individuo. Dicha descomposición genética es el punto de partida para el diseño de actividades que favorezcan tanto el trabajo del profesor como el de los estudiantes, tales actividades deben promover cada una de las construcciones propuestas para la comprensión del concepto y de esta manera validar el modelo establecido; en caso de que el modelo no funcione deber ser refinado y repetir este proceso hasta que dé cuenta del aprendizaje del concepto deseado.

Paradigma de Investigación

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, la teoría APOE proporciona una metodología de investigación que consta de tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de instrumentos, y recolección y análisis de datos. En la figura 2 se muestran las tres componentes y cómo estas están relacionadas entre sí.

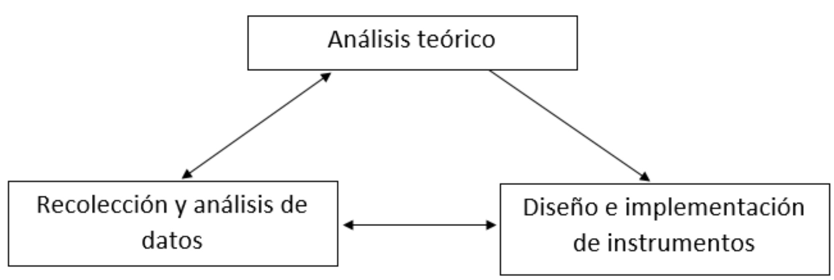


Figura 2. Ciclo de Investigación de APOE (Arnon et al, 2014)

Análisis teórico: La investigación inicia con un estudio teórico sobre el objeto matemático que se desea comprender, el cual se desarrolla teniendo en cuenta los siguientes aspectos: (i) análisis de libros de texto, (ii) experiencia de los investigadores como estudiantes y docentes y; dificultades identificadas desde otras perspectivas teóricas de la disciplina. Por lo tanto, el objetivo principal de esta fase es proporcionar un modelo cognitivo que dé cuenta de las construcciones mentales que un individuo necesita hacer para la comprensión de un concepto matemático específico (descomposición genética preliminar). La descomposición genética es el eje fundamental del ciclo de investigación; una vez se obtiene, permite avanzar a las etapas posteriores del ciclo hasta completarlo, dando como resultado una descomposición genética refinada. Cuanto más se repita este proceso se obtendrán descripciones más finas de las construcciones mentales necesarias para la comprensión de un determinado concepto. (Roa-Fuentes & Oktaç, 2012).

Diseño e implementación de instrumentos: El diseño de actividades permite validar la descomposición genética propuesta o remodelarla en caso de ser necesario. Cada una de las actividades propuestas dentro de la investigación debe estar orientada hacia el desarrollo de todas y cada una de las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética preliminar (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010).

Recolección y análisis de datos: Una vez obtenida la descomposición genética del concepto matemático deseado se debe proporcionar evidencia empírica que permita su refinamiento o validación; en caso contrario la descomposición genética permanecerá únicamente como un modelo hipotético (Arnon et al, 2014). El propósito de esta fase debe responder a dos preguntas: ¿Los estudiantes hicieron las construcciones mentales descritas en la descomposición genética? y, ¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el concepto? Existen diferentes tipos de datos que proporcionan información suficiente para responder a estas dos preguntas, en particular para esta investigación se tienen en cuenta: cuestionarios escritos previamente diseñados; entrevistas profundas enfocadas en el objeto matemático de interés y; una combinación de instrumentos escritos y entrevistas.

Aspectos Metodológicos

Esta investigación está enfocada en la descripción de las construcciones que un estudiante debe realizar para la comprensión del concepto de ortogonalidad. Se desarrolla con un grupo de estudiantes que pertenecen a un curso de álgebra lineal II en la Universidad Industrial de Santander (UIS). Se definen los aspectos teóricos y didácticos del concepto de ortogonalidad en conjunto con el profesor a cargo del curso, con el fin de preparar actividades y realizar un seguimiento continuo como observador; esto permite conocer el contenido, expectativas e intereses del curso.

Análisis teórico: Para esta primera fase del ciclo de investigación, se plantean las siguientes preguntas: (i) ¿Qué significa comprender el concepto de ortogonalidad? y, (ii) ¿Cómo se puede construir la comprensión del este concepto? Con el fin de responder estas preguntas se analizan tres libros de texto de álgebra lineal cuyo propósito principal es diseñar una descomposición genética que dé cuenta de las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante debe poseer para la comprensión del concepto de ortogonalidad. En esta etapa es necesario definir cómo se aborda el concepto matemático de ortogonalidad, de esta manera, el análisis de los libros de texto contribuye a la escogencia de dicha definición puesto que el interés es determinar qué teoremas, propiedades, definiciones y notaciones intervienen en la construcción del concepto.

Diseño e implementación de instrumentos: Partiendo de la descomposición genética se diseñan dos instrumentos: una prueba diagnóstica y una entrevista, los cuales están acompañados de un análisis a priori. Puesto que el interés de la investigación es estudiar cómo los estudiantes construyen el concepto de ortogonalidad para dar cuenta de la comprensión del mismo, se escogen los estudiantes cuyos resultados sean los mejores.

Recolección y análisis de datos: A través del análisis de los datos resultados empíricos obtenidos en la etapa anterior se pretende encontrar las construcciones propuestas en la descomposición genética que no fueron necesarias y las construcciones necesarias que no fueron consideradas con el fin de realizar los ajustes correspondientes para que la descomposición genética sea una mejor aproximación a la construcción de la ortogonalidad. A esto se le conoce como refinamiento de la descomposición genética. De esta manera, el análisis se realiza caracterizando las estructuras y mecanismos mentales que los estudiantes poseen alrededor del concepto de ortogonalidad lo cual permite la validación de la pertinencia y la viabilidad de la descomposición genética.

Reflexiones finales

El concepto de ortogonalidad ha sido poco estudiado desde la didáctica del álgebra lineal y es necesario dentro de tal asignatura. Sin embargo, en los cursos tradicionales de álgebra lineal no se alcanza a abordar dicho concepto en otros espacios vectoriales diferentes de $\mathbb{R}^n$. Es solo en aquellas universidades en donde se imparte un segundo curso de álgebra lineal en donde se trata de manera más profunda dicho concepto. Esta investigación pretende aportar al desarrollo de la línea de investigación de la didáctica del álgebra, al álgebra lineal en sí misma y a la teoría APOE. Estos son solo los primeros acercamientos al estudio del concepto de ortogonalidad, donde se espera proponer un camino para la construcción y comprensión de tal concepto. Asimismo, se espera que otras investigaciones sean desarrolladas en torno al estudio de este concepto y que esta investigación llegue a ser considerada dentro de las aulas de clase, puesto que ese es el fin último de la investigación.

Referencias y bibliografía

Alves Dias, M & Artigue, M. (1995). Articulation problems between different systems of symbolic representations in linear algebra, in The proceedings of the 19th annual meeting of the international group for the Psychology of Mathematics Education, Universidade Federal de Pemambuco, Recife, Brésil, 3 vols 2:34-41.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M, y Weller, K. (2014). APOS Theory - A framework for research and curriculum development in mathematics education, Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D, y Thomas, K. (1996). A framework for researchand curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (Eds.): Research in Collegiate Mathematics Education, CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Bagley, S., & Rabin, J. (2013). Computational Thinking in Linear Algebra. In The Proceedings of RUME 16, Volume 1, 65-75, Denver, Colorado.

Caglayan, G. (2018). Coordinating Analytic and Visual Approaches: Math Majors' Understanding of Orthogonal Hermite Polynomials in the Inner Product Space P_n (R) in a Technology-Assisted Learning Environment. The Journal of Mathematics Behavior.

Dorier J.-L., Robert A., Robinet J. & Rogalski M. (2000). On a research program about the teaching and learning of linear algebra in first year of French science university, International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology 31(1), 27-35.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall, (Ed), Advanced Mathematical Thinking, (p. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Dreyfus, T. & Hillel, J. (1998). Reconstruction of meanings for function approximation, International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3(2), 93-112.

Kú, D., Trigueros, M., y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática,* 20 (2), 65-89.

Gueudet-Chartier, G. (2004). Should we teach linear algebra through geometry? Linear Algebra and its Applications, 379, 491-501.

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. In J-L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra, pp. 177-190. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hillel, J. & Dreyfus, T. (2005). What's a best fit? Construction of Meaning in a Linear Algebra session. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero (Eds.), Meaning in Mathematics Education (pp. 181-203). Springer.

Meel, D. (2003). "Modelos y Teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE". RELIME. Año/vol. 6, núm. 003. pp. 221-278.

Oktaç, A., Trigreros, M., y Vargas, X. N. (2006). Unverstanding of vector spaces – a viewpoint from APOS theory. *Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics*, (En CD-ROM) Istanbul, Turkey.

Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications,* 432,2112-2124.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. Revista Lationoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13 (1), 89-112.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. Revista Lationoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15 (2), 199-232.

Robert, A., Robinet, J. & Tenaud, I. (1987). De la géométrie à l'algèbre linéaire, Brochure 72, IREM de Paris VII.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. Educación matemática, 26(3), 75-107.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students thinking in linear algebra. En J-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp.209-246). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A., Nnadozie, A., & Oktaç, A. (2002). A study of Relationships between theoretical thinking and high achievement in Linear Algebra. Concordia University: Montreal. Disponible en: http://www.annasierpinska.wkrib.com/pdf/Sierpinska-TT-Report.pdf

Trigeros, M., y Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algébre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 10, 157-176.

Trigueros, M., Oktaç, A., y Manzanero, L. (2007). Unverstanding of Systems of Equations in Linear Algebra, *Proceedings of the 5th CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education)*, Larnaca, Chipre, 2359-2368.

El álgebra subyacente al transformar ecuaciones paramétricas en la ecuación cartesiana correspondiente: los mediadores papel y lápiz y tecnología

José **Zambrano** Ayala
Instituto Tecnológico de Milpa Alta
México
jose.zam@itmilpaalta.edu.mx
Gonzalo **Zubieta** Badillo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México
gzubieta@cinvestav.mx
Verónica **Vargas** Alejo
Universidad de Guadalajara
México
veronica.vargas@academicos.udg.mx

Resumen

Reportamos resultados de una investigación cuyo propósito fue analizar cómo actividades diseñadas en papel y lápiz y con tecnología, en particular *applets* (e.g., GeoGebra), contribuyen al aprendizaje del álgebra en el tema de *Ecuaciones paramétricas de algunas curvas planas y su representación gráfica* de modo que estudiantes de ingeniería sobrepasen obstáculos algebraicos derivados al transformar ecuaciones paramétricas a la ecuación cartesiana correspondiente. En el estudio participaron un grupo de estudiantes de cálculo vectorial cuya edad oscilaba entre 19 y 25 años. Los datos fueron analizados en dos teorías: *Cambio de atención* de Mason (2008) y *Representaciones* de Duval (1999, 2003, 2006)[1]. Nuestros resultados indican que la mediación de la tecnología promueve la reflexión y la construcción de significados, por los estudiantes, alrededor del desarrollo de binomios, uso de identidades trigonométricas y la transformación de ecuaciones paramétricas a la ecuación cartesiana correspondiente, cuando representaciones algebraicas se asocian a representaciones gráficas.

Palabras clave: GeoGebra, representación, reflexión, atención, transformación.

Introducción

Algunas investigaciones en la década de los 70 y 80 del siglo pasado reportan dificultades de los estudiantes para la actividad transformacional del álgebra (Kieran, 2004). Éste síntoma se

[1] En Guzmán y Zambrano (2014) se describen estas dos teorías; en este documento sólo se indica cómo la usamos en el análisis de datos en la presente investigación.

ve reflejado en algunos estudiantes de nivel universitario, quienes exhiben dificultades señaladas como comunes, frecuentes y persistentes (e.g., Kirshner & Awtry, 2004; Marquis, 1988; Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar, 1987; ente otros). Si bien autores como Carry, Lewis y Bernar (1980), Kirshner y Awtry, (2004) y Payne y Squibb (1990), entre otros, explican los orígenes de errores de manipulación algebraica por estudiantes, aquí estamos interesados en que a partir de actividades diseñadas con papel y lápiz y applet, el estudiante reflexione sobre sus errores en el desarrollo de procesos simbólicos con la finalidad de que logre la aprehensión de la tarea algebraica en estudio (e.g., factorización, eliminación, racionalización, etc.).

Así como García, Benitez y López (2015) hicieron uso de tecnología por medio del simulador en *flash* para apoyar el aprendizaje de funciones vectoriales y Moncada, Ochoa, López, Espín y Gómez (2016) transformaron el aula en un laboratorio de cálculo vectorial con el uso de GeoGebra (el cual permitió evolucionar el aprendizaje de los contenidos de esta asignatura por medio de visualización dinámica), nos interesó usar la tecnología para investigar si los estudiantes podían reconocer la gráfica de ecuaciones a partir de su representación simbólica por medio de ecuaciones paramétricas cuando éstas se encuentran en forma cartesiana.

En nuestro estudio observamos si los estudiantes son capaces de identificar errores algebraicos y si ellos los corrigen a través de su reflexión de modo que logren su aprehensión; para ello, en esta investigación incluimos dos ambientes: el de papel y lápiz y el tecnológico. La pregunta que guió la investigación es: ¿De qué manera un ambiente dinámico (e.g., GeoGebra) promueve reflexión en el estudiante en torno a errores algebraicos cometidos al transformar ecuaciones paramétricas en la ecuación cartesiana correspondiente?

Marco conceptual

El análisis de los datos fue llevado a cabo con dos teorías cognitivas *Cambio de Atención* de Mason (2008) y *Representaciones* de Duval (1999, 2003, 2006). La primer teoría (Mason, 2008) se basa en tres conceptos básicos: *Atención* (observación por parte del estudiante) ésta se usa para reconocer la actividad del alumno relacionada con *sustentar, discernir, relacionar, percibir* y *razonar* los objetos matemáticos de estudio, y sin ella no es posible que el estudiante de sentido a lo que se quiere conocer; *Estar consciente de…*, consiste en verificar si el estudiante le da sentido a lo que quiere conocer, y precisa el conocimiento de lo que ya conoce, y la *Actitud* como la disposición que éste muestra de que quiere aprender. La segunda teoría (Duval, 1999, 2003, 2006) se basa en dos conceptos: *Semiosis*, como la aprehensión o producción de representaciones semióticas, proceso mediante el cual el estudiante exterioriza sus representaciones mentales (lenguaje natural, fórmulas algebraicas, figuras geométricas, entre otros), y *Noesis*, actos cognitivos que llevan al aprendizaje de un objeto.

Tabla 1

Conceptos en los que confluyen las dos teorías con las que analizamos los datos.

Conceptos con los que son analizados los datos	Cambio de atención (Mason, 2008)	*Representaciones* (Duval, 1999,2003, 2006)
i) Asociación de objetos	Razonamiento sobre un objeto de estudio en varias representaciones	Varias representaciones de un objeto
ii) Posición cognitiva	Cambio de consciencia implícita a explícita	“Visualizar el objeto”
iii) El estudiante le da sentido	Atención, Estar consciente de…,	Paso de un registro a otro

a lo que quiere conocer	y Actitud	

En nuestro estudio analizamos los datos al considerar los siguientes tres conceptos donde confluyen estas dos teorías: (i) *Asociación de objetos*, éste contempla el hecho de que el aprendizaje de conceptos matemáticos puede mostrarse por varias representaciones; (ii) *Posición cognitiva*, ocurre cuando se evidencia el cambio de conciencia de *implícita* a una *explicita* (Mason, 2008); esto es, cuando el estudiante puede "visualizar el objeto" (Duval, 2003) y manejar de forma consciente los objetos de estudio como un todo; (iii) *El estudiante le da sentido a lo que quiere conocer*, esto se evidencia en el estudiante cuando tiene dominio de los conceptos *Atención*, *Estar consciente de…* y *Actitud* (Mason, 2008), y puede probar el paso de un registro a otro (Duval, 2003) del objeto matemático de estudio. La Tabla 1 resume las dos teorías que conforman nuestro marco conceptual (segunda y tercera columna) e incluye los conceptos con los que analizamos los datos (primera columna).

Metodología

Participantes

Los estudiantes que participaron en la investigación tenían entre 19 y 25 años de edad, pertenecían a un grupo (completo) de cálculo vectorial de un instituto tecnológico de la Ciudad de México que, al momento de la toma de datos cursaban esta asignatura. Ellos fueron agrupados en equipos de dos y tres integrantes y contaban con una computadora con el software instalado, el applet con sus indicaciones para su uso, así como sus problemas en papel.

Diseño e implementación de los instrumentos usados en el acopio de datos

Los problemas y el applet fueron diseñados por uno de los investigadores que reportan el presente artículo y llevadas a cabo por él mismo. Estos ejercicios son similares a los clásicos de los libros de texto, que con frecuencia no son discutidos con profundidad en el aula. La implementación de los problemas propuestos se llevó cabo en el salón de clases el cual se improvisó como un aula de cómputo, para ello hubo cinco sesiones, una por cada problema, con duración aproximada de una hora cada una. Previo a la solución del primer problema, los estudiantes recibieron un breve entrenamiento del uso del applet y después actuaron de forma autónoma (por equipos) para resolver los problemas propuestos. Por limitaciones de espacio, en este artículo, sólo reportamos los datos provenientes de tres equipos y tres problemas.

Equipo No.	E___	Integrantes:	

Indicaciones. Abre el archivo "**Applet Ecuaciones paramétricas a cartesianas**" y lleva a cabo la indicación del punto 9 del documento "Instrucciones para el uso del applet" y resuelve el siguiente problema. Al termino de tu trabajo guarda el archivo en tu carpeta "**Funciones paramétricas a cartesiana E1**" con el nombre "**Problema 3 E1**", según sea tu número de equipo.

Problema 3. Elimine el parámetro t de $\begin{cases} x = 1 + \cos 2t \\ y = 1 - \operatorname{sen} t \end{cases}$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ y obtenga una ecuación cartesiana que posea la misma gráfica que las ecuaciones paramétricas dadas.

Oportunidad 1	Oportunidad 2

Figura 1. Diseño con papel y lápiz del Problema 3.

Diseño de los problemas en papel y lápiz. Los problemas que resolvieron los estudiantes fueron del siguiente tipo: Elimine el parámetro t de $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, con $t \in I$ y obtenga la ecuación cartesiana correspondiente (véase Figura 1). Los estudiantes debían eliminar el parámetro t y determinar una ecuación cartesiana del tipo $F(x, y) = 0$, la cual debían graficar (en el applet) para revisar si era recta, parábola, circunferencia, hipérbola, etc. Se les dio a los alumnos dos oportunidades; por ejemplo, si en la Oportunidad 1 la gráfica en el applet de ecuaciones paramétricas no era la misma en el dominio $t \in I$ que la ecuación cartesiana calculada por ellos, entonces debían identificar el (los) error(es) –algebraicos– con una marca roja en su trabajo, y con ello(s) reflexionar sobre éste(os) para que en la Oportunidad 2 volvieran a intentar su desarrollo de forma correcta.

Diseño del applet. La Figura 2 muestra las características del applet que fue proporcionado a los estudiantes para la solución de un problema que implicaba transformar las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 + \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \cos 2t \end{cases}, -\frac{\pi}{2} \leq\ t \leq \frac{\pi}{2}$ en la ecuación cartesiana $2x^2 - 4x - y + 2 = 0$.

En t_i= y t_f= (véase Figura 2) el estudiante debía capturar los valores inicial y final del parámetro t, respectivamente; después, tenían que introducir las ecuaciones paramétricas en las casillas de entrada x(t)= y y(t)=. En seguida se le solicitaba simplificar su desarrollo algebraico en papel y lápiz. En Ecuación cartesiana el estudiante debía capturar la ecuación cartesiana obtenida, así como el nombre de la gráfica en Nombre Ecuación cartesiana. El deslizador se requería para el trazo de los puntos generados por las ecuaciones paramétricas para diferentes valores de t (en este problema $-\frac{\pi}{2} \leq\ t \leq \frac{\pi}{2}$) y la casilla de control ☑ Ecuación cartesiana para activar o desactivar la gráfica de la ecuación cartesiana.

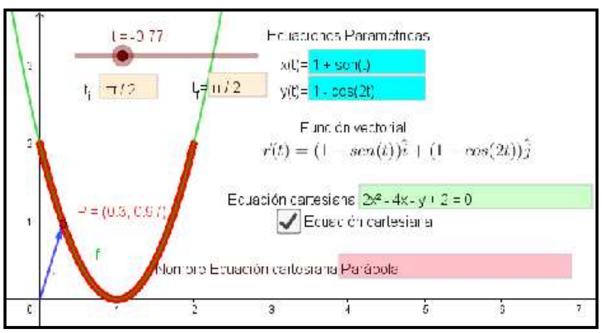


Figura 2. Diseño del applet, solución del Problema 3.

Análisis de datos y discusión de resultados

En este artículo analizamos los datos obtenidos a partir del trabajo de tres equipos de estudiantes (en adelante E1, E7 y E9) al resolver tres problemas.

Análisis y discusión de resultados del:

Problema 1. Elimine el parámetro t de $\begin{cases} x = 3t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}, -2 \leq\ t \leq 2$ y obtenga una ecuación cartesiana que posea la misma gráfica que las ecuaciones paramétricas dadas.

La Figura 3 muestra el desarrollo algebraico con papel y lápiz de la solución propuesta por E1. En ésta se observa cómo, en la Oportunidad 1, los estudiantes señalaron con tinta roja el error ($\sqrt{y+1} = y^{1/2} + 1$) producto de reflexionar (mediado por el trabajo que hicieron en el applet) que la ecuación cartesiana que ellos calcularon: $x - 3y^{1/2} + 1 = 0$, no era correcta ya que la gráfica de la curva de las ecuaciones paramétricas no resultó la misma que la gráfica de la ecuación cartesiana calculada; sin embargo, en la Oportunidad 2 llevaron a buen término la solución del trabajo (los estudiantes le dieron sentido a lo que querían conocer, Mason 2008; Duval, 1999, 2003, 2006).

En general, los estudiantes no tuvieron dificultades para encontrar una ecuación cuya gráfica coincidiera con la gráfica esperada en el dominio $-2 \leq \ t \leq 2$ como solución del problema 1. Sin embargo, algo importante que hay que enfatizar es que cambiaron su procedimiento y, por lo tanto, manejo algebraico para evitar el radical obtenido en la Oportunidad 1: $\sqrt{y+1} = y^{1/2} + 1$. Es decir, antes de despejar t a partir de la ecuación $y = t^2 - 1$, sustituyeron en esta ecuación: $t = \frac{x}{3}$ (Oportunidad 2).

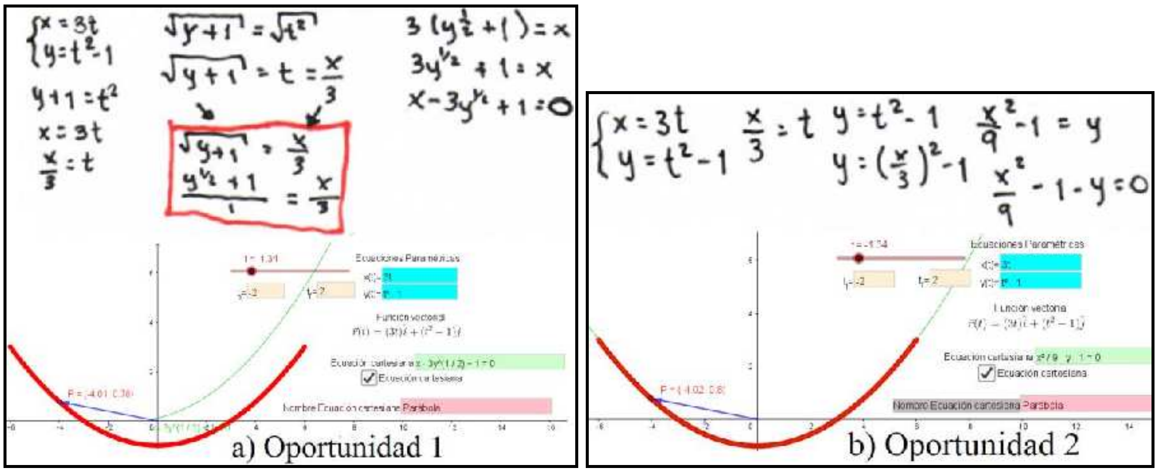


Figura 3. En a) E1 cometió errores de simplificación algebraica en el Problema 1 que corrigió en b).

Análisis y discusión de resultados del:

Problema 2. Elimine el parámetro t de $\begin{cases} x = t^3 + 2 \\ y = t^2 + 3 \end{cases}$, $0 \leq \ t \leq 2$ y obtenga una ecuación cartesiana que posea la misma gráfica que las ecuaciones paramétricas dadas.

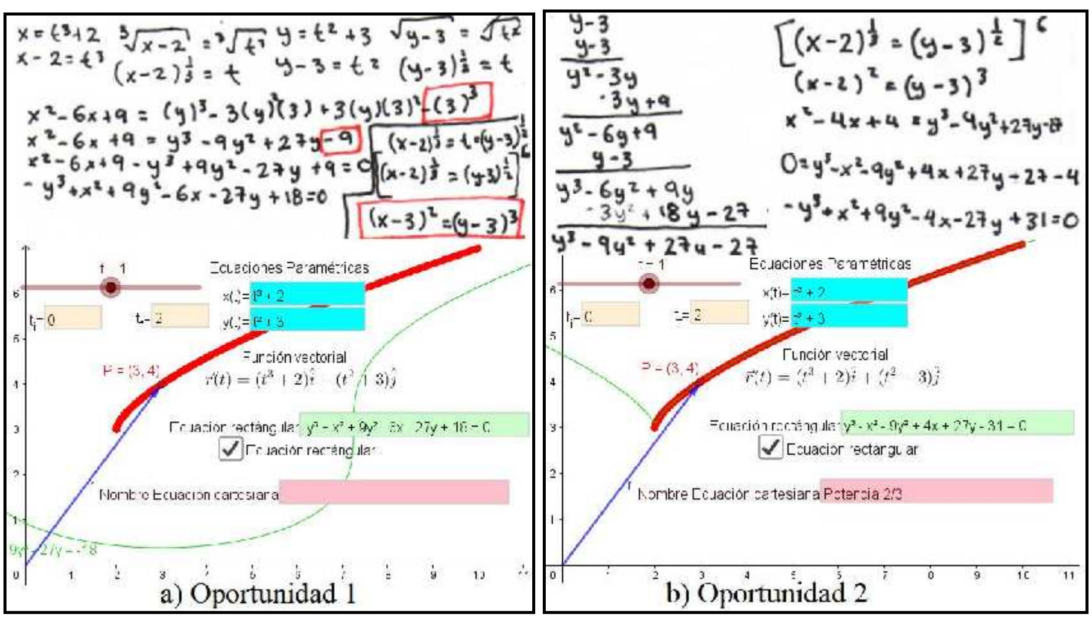


Figura 4. En a) E7 cometió errores de simplificación algebraica en el Problema 2 que corrigió en b).

Este problema puso a prueba el conocimiento de los estudiantes con respecto al desarrollo de un binomio al cuadrado y un binomio al cubo. Muy pocos equipos mostraron dificultades para desarrollar el binomio al cuadrado, no así en el binomio al cubo. La Figura 4 muestra la solución del equipo E7 de este problema. Los integrantes de este equipo desarrollaron de forma correcta la expresión $(y-3)^3$, pero una falta de atención (Mason, 2008) promovió el error al suponer $3^3 = 9$. Este error es común observarlo en el salón de clases, quizás se debe a que los estudiantes operan 3^3 como si fuera 3×3. Esto lo corrigieron en la Oportunidad 2, y desarrollaron el binomio al cubo como $(y-3)(y-3)(y-3)$ (los estudiantes le dieron sentido a lo que querían conocer, Mason 2008; Duval, 1999, 2003, 2006). Un error similar cometió E1 al fallar en el signo que acompaña al tercer término de $(y-3)^3 = y^3 - 9y^2 - 27y - 27$. E1 lo corrigió en la Oportunidad 2.

Análisis y discusión de resultados del:

Problema 3. Elimine el parámetro t de $\begin{cases} x = 1 + \cos 2t \\ y = 1 - \operatorname{sen} t \end{cases}, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ y obtenga una ecuación cartesiana que posea la misma gráfica que las ecuaciones paramétricas dadas.

El problema 3 puso a prueba el conocimiento de los estudiantes en el uso de identidades trigonométricas. La Figura 5 muestra el trabajo algebraico que desarrolló E7. En esta figura se observa cómo la mediación del applet conduce a los estudiantes a la búsqueda de errores algebraicos (véanse rectángulo en color rojo); en efecto, los integrantes del equipo E7 reflexionaron en torno a su error al suponer que $\frac{1}{2}\cos 2t = \cos t$ (véase Figura 5a)[2]. Sin embargo, en la Figura 5b) aplican de forma correcta la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$ (los estudiantes le dieron sentido a lo que querían conocer, Mason 2008; Duval, 1999, 2003, 2006).

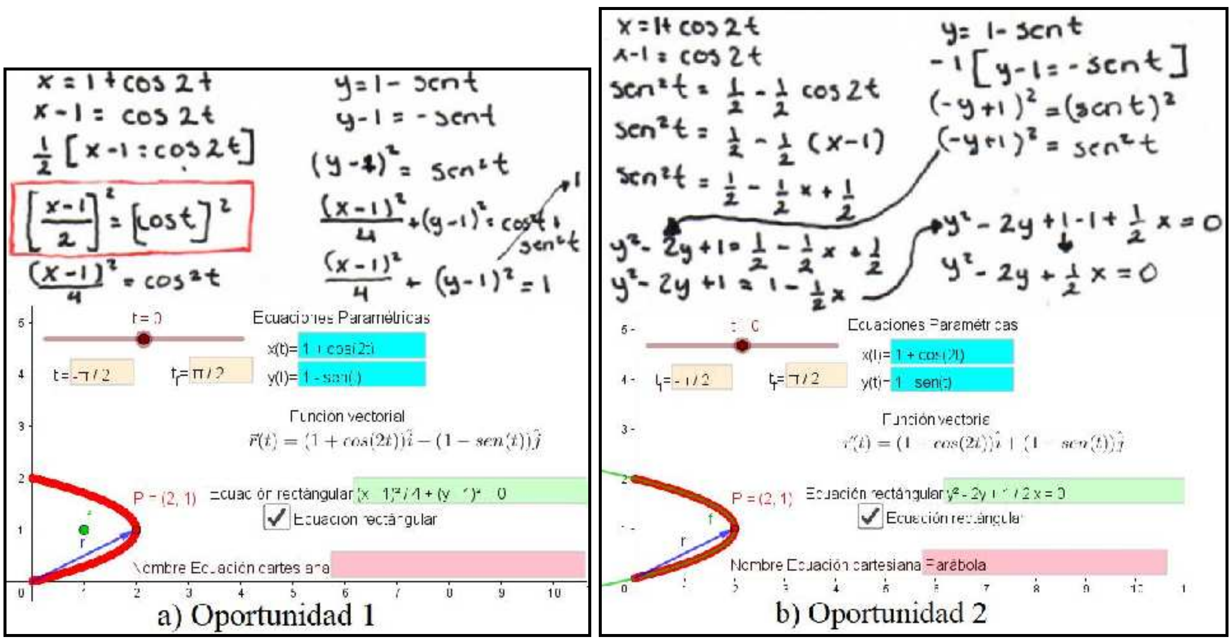


Figura 5. En a) E7 cometió errores de simplificación algebraica en el Problema 3 que corrigió en b).

Finalizamos el análisis de datos con la presentación de opiniones de los estudiantes (Tabla 2), a sendas preguntas relacionadas con la solución de los problemas aquí expuestos (con papel y lápiz) y con el applet. Utilizamos los tres conceptos donde confluyen las dos teorías utilizadas para analizar los datos (columna 3) para caracterizar las opiniones y relacionarlas con su aprendizaje de cálculo

[2] Es importante señalar que el "2" en el argumento de $\cos 2t$ también fue motivo de error en los procedimientos de otros equipos; por ejemplo, E9 obtiene $\boxed{(-2y+2)^2 = \operatorname{sen}^2 2t}$ de $y - 1 = -\operatorname{sen} t$. (falta de Posición cognitiva, Mason, 2008; Duval, 1999, 2003, 2006).

vectorial en el tema de *Ecuaciones paramétricas de algunas curvas planas y su representación gráfica*.

Tabla 2

Comentarios de los estudiantes en relación con la solución de los problemas de la investigación.

Durante la aplicación del *applet* tuviste la necesidad de contestar en la Oportunidad 2, escribe –en el espacio– ¿cuáles fueron tus errores algebraicos y cómo los corregiste?		
1	Los errores mas comunes fueron los signos, también la forma del despeje de las incognitas, fueron corregidos mediante la observación de la applet ya que esta no coincidia. En ocaciones tuvimos que volver a realizar el procedimiento.	Asociación de objetos y Posición cognitiva
7	Si tuve que utilizarlo, ya que en algunos problemas por nerviosismo colocaban números que no eran, pero me tranquilizaba y sabia mis errores (excepto en la 3, esa si me costó)	El estudiante le dio sentido a lo que quería conocer
9	Bueno lo fuimos corrigiendo como íbamos ingresando los valores a la applet. Conforme fuimos viendo nuestros errores íbamos corrigiendo.	Asociación de objetos y Posición cognitiva
¿Recomendarías el applet a otros estudiantes para simplificar ecuaciones cartesianas a partir de ecuaciones paramétricas? ¿Por qué?		
1	Claro que si, es una manera práctica de encontrar errores algebraicos e inmediatamente encontrar el error.	Posición cognitiva
7	Es una app. que te facilita el entendimiento de tus operaciones, visualizando de que se trata pues no es una ecuación nada más, sino que te muestra como se comporta la función. "Recomendada"	Posición cognitiva
9	Si porque te funciona mucho para ver cuales son tus errores al momento de ingresar los valores a la computadora.	Posición cognitiva

Conclusiones

El análisis de los datos que mostramos, nos permite dar respuesta parcial a la pregunta: ¿De qué manera un ambiente dinámico (e.g., GeoGebra) promueve reflexión en el estudiante en torno a errores algebraicos cometidos al transformar ecuaciones paramétricas en la ecuación cartesiana correspondiente? Aunque en este documento reportamos resultados de tres equipos de estudiantes en los cuales se observa que ellos reflexionaron y profundizaron en temas relacionados con álgebra básica –ello con la mediación de la tecnología (e.g., GeoGebra)–, es importante resaltar que otros equipos no lograron sobrepasar estas dificultades, quizá debido a un menor manejo sintáctico del álgebra el cual no les permitió reflexionar para resolver de forma adecuada los problemas mostrados en este documento. Es decir, con "menor manejo sintáctico del álgebra", en este artículo nos referimos a que los estudiantes, aun cuando están en el nivel universitario, parece que no han logrado tener un buen manejo del uso de exponentes y radicales (ver procedimiento de solución al Problema 1 en Figura 3a), se equivocan en las operaciones que implican símbolos *más* y *menos* (ver procedimiento en Figura 4a) y no comprenden, ni pueden utilizar las identidades trigonométricas (ver procedimiento en Figura 5a). Esto hace importante que se sugiera el impulso de más propuestas como ésta donde el uso de distintas representaciones –apoyadas con tecnología– permiten a los estudiantes dar sentido a ejercicios que en los libros de texto se orientan únicamente hacia lo simbólico.

A partir de los resultados que aquí presentamos consideramos que el uso de tecnología puede servir como mediador para que los estudiantes logren reflexionar sobre sus errores (y después corregirlos) en los procesos algebraicos para pasar de ecuaciones paramétricas a ecuaciones cartesianas; siempre que se tome en cuenta el ambiente de papel y lápiz. GeoGebra permite, además, que el profesor pueda poner a discusión aspectos que quizá en lápiz y papel no ocurrirían, como (en este caso) la discusión en torno a la construcción de una gráfica con dominio y rango diferente al mostrado.

Referencias y bibliografía

Carry, L. R., Lewis, C. & Bernard, J. E. (1980). *Psychology of equation solving: An information processing study* (ERIC No. ED186243). Austin: The University of Texas at Austin. Recuperado de http://www.eric.ed.gov el 16 de diciembre de 2009 de la base de datos Education Resources Information Center.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* [Trad. Vega, M., del francés al español]. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2003). «Voir» en mathématiques. En E. Filloy (Coord.), *Matemática Educativa: aspectos de investigación actual* (pp. 41-76). México: Fondo de Cultura Económica.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103–131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

García, R. M. L., Benitez, P. A. A. & López, B. A. (2015). Apoyando el aprendizaje de las funciones vectoriales desde múltiples representaciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-II): 373-385.

Guzmán & Zambrano (2014). Influencia de dos ambientes: el tecnológico y el de papel-y-lápiz en el aprendizaje de conceptos de álgebra lineal. *VI Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática*, Memoria del SNTCEAM, 2012, Capítulo 22 libro electrónico "Tecnología Computacional en la Enseñanza de las Matemáticas" ISNB: 978-607-27-0301-8, Monterrey, N.L.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. En K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 21-34). New York: Kluwer Academic.

Kirshner, D. & Awtry, T. (2004). Visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(4), 224-257.

Marquis, J. (1988). Common mistakes in algebra. En A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 20-34). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mason, J. (2008). Being mathematical with and in front of learners: attention, awareness and attitude as sources of differences between teacher educators, teachers and learners. En T. Wood & B. Jaworski (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education: Vol. 4. The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 31–56). Rotterdam, Holanda: Sense Publisher.

Moncada, Ochoa, López, Espín & Gómez (2016). Laboratorio de cálculo vectorial usando GeoGebra. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol IV. No. 1.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18* (1), 3-14.

Payne, S. J. & Squibb H. R. (1990). Algebra mal-rules and cognitive accounts of error. *Cognitive Science: A Multidisciplinary Journal*, *14*, 445-481.

Construcción de ecuaciones de rectas y planos en R3 en laboratorio interactivo con GeoGebra y plataforma Moodle

Antonio **Rivero** Alexanderson
Escuela de Ciencias, Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra
República Dominicana
arivero@pucmm.edu.do

Resumen

En el presente artículo mostramos que el uso del laboratorio interactivo con GeoGebra y la plataforma Moodle contribuye al aprendizaje de conceptos y ecuaciones de rectas y planos en R3. En el estudio participaron 9 estudiantes de nivel superior, del curso de álgebra lineal para ingenieros. La investigación se apoyó en la teoría de Representaciones de Duval (2006) y del uso de ambientes dinámicos de Soto y Romero (2011) para favorecer el aprendizaje. La metodología consistió en diseñar una sesión práctica interactiva que intercala el trabajo en GeoGebra con preguntas y reflexiones en la plataforma Moodle, tutorizadas por el docente. Los resultados indican que el uso de la tecnología facilita la relación entre la representación visual y la algebraica de los objetos matemáticos y que la plataforma interactiva permite registrar las actividades de los estudiantes para su valoración.

Palabras clave: álgebra lineal, GeoGebra, Moodle, laboratorio.

Introducción

La enseñanza de la matemática a nivel superior presenta sus propios retos, sobre todo en los primeros años de la formación universitaria, entre los cuales está una población estudiantil con diferentes niveles de dominio de los saberes previos, diversos estilos de pensamiento, intereses y grado de madurez, entre otros. Estas consideraciones tienen como efecto que el que el rango de logros de aprendizaje en los estudiantes de matemática de nivel universitario de los primeros años sea bastante amplio en cuanto a las competencias desarrolladas y su nivel de dominio.

En este contexto, los cursos de álgebra lineal introductoria, que suelen impartirse en el primero o segundo año de una carrera universitaria de ingeniería, presentan los retos adicionales de que muchos estudiantes no tienen experiencia con el desarrollo de conceptos abstractos, los cuales se construyen generalmente a través de definiciones y análisis de propiedades. Ejemplos de esto en álgebra lineal son los conceptos de espacio vectorial, base, función vectorial y transformación lineal, entre otros. Los estudiantes de ingeniería deben comprender y aplicar correctamente los conceptos de álgebra lineal y de cálculo para abordar exitosamente las asignaturas de las ciencias.

Para ayudar al estudiante a construir los conceptos abstractos del álgebra lineal, Duval (2006) señala que el uso de múltiples representaciones de un objeto y el cambio de una a otra favorece su comprensión. De esta manera, el uso de representaciones geométricas en el álgebra lineal permite un acercamiento más concreto e intuitivo al estudio y análisis de las propiedades de dichos objetos.

Por otra parte, una de las metas en la educación del siglo XXI es la inclusión de las tecnologías de información y comunicación en el apoyo a la educación. En la misma línea, el Consejo Nacional de Profesores de Matemática de Estados Unidos, NCTM en inglés, establece en sus Estándares (2000) que el uso de herramientas tecnológicas adecuadas favorece el análisis, el razonamiento y la resolución de problemas.

Por tanto, se observa una inclusión paulatina de las tecnologías en la educación matemática. Ante esto, surge la interrogante: ¿Cuáles aspectos debe tomarse en cuenta para que el uso de dichas tecnologías favorezca el aprendizaje de los estudiantes en el área matemática?

De acuerdo con Artigue (2011), las herramientas tecnológicas modelan no sólo los conocimientos y saberes que producen, sino los procesos de aprendizaje y sus formas. Además, la tecnología debe responder a tres funciones: una pragmática, que permite actuar sobre el mundo real; otra epistémica, que contribuye a la comprensión del objeto y otra heurística, que organiza nuestras acciones para aprender. De esta manera, el uso que se da al recurso tecnológico debe ser integral, más allá del aspecto ilustrativo.

Los investigadores Soto y Romero (2011) estudiaron el uso de ambientes dinámicos para favorecer el aprendizaje de conceptos de álgebra lineal sus resultados muestran que el software para construcciones geométricas dinámicas, como es GeoGebra, ayuda al aprendizaje de las propiedades y características de los objetos del álgebra lineal.

En la misma línea, Sánchez Rosal (2012) presenta resultados favorables de aprendizaje al incluir las tecnologías informáticas en la educación matemática. Y concluye que el estudiante debe tener la facilidad de *explorar* y *hacer conjeturas*, para desarrollar las capacidades reflexivas propias del pensamiento matemático. Comenta también que es importante la guía del profesor en la tutorización del docente para aclarar dudas, evitar errores de interpretación y guiarlo en su proceso reflexivo.

Más recientemente, Guzmán y Zambrano (2015) mencionan en su ponencia del XIV CIAEM que las representaciones geométricas dinámicas promueven reflexiones en torno al aprendizaje de los *conceptos previamente adquiridos con papel y lápiz*. Por tanto, la actividad en un software de matemática no debe sustituir las representaciones tradicionales sino complementarlas, para una mejor comprensión de los objetos matemáticos en estudio.

En este sentido, entendemos que el mayor impacto ocurre cuando la interacción con el software se realiza dentro de sesiones de laboratorio en la cual los estudiantes descubren al objeto y sus propiedades a través de la manipulación de diversas representaciones, especialmente la representación geométrica dinámica, bajo la tutela del docente.

Un reto importante en todo laboratorio de matemática es mantener un balance entre la intuición y el formalismo. La presente propuesta considera la incorporación de un laboratorio de matemática en un curso de álgebra lineal en el cual se abordan representaciones geométricas y cambio de representaciones de objetos matemáticos abstractos para favorecer la comprensión de sus propiedades.

Los elementos particulares de este laboratorio son el uso del software de geometría dinámica GeoGebra, el diseño de sesiones de laboratorio en una plataforma digital, como es Moodle, donde se agrega actividades interactivas y preguntas específicas que motivan al estudiante al aprendizaje por experimentación. Además, se propone diseñar secuencias didácticas de trabajo práctico que promuevan la experimentación y el análisis por parte del estudiante ante situaciones presentadas con ayuda de las herramientas tecnológicas.

Metodología

La presente investigación tiene un carácter exploratorio en la cual se incluyen elementos cuantitativos y cualitativos.

Se utilizó una muestra de 9 estudiantes del curso de álgebra lineal que tenían la disposición de colaborar en el estudio para formar un grupo piloto y realizar una práctica de laboratorio, respondiendo preguntas sobre lo aprendido y recogiendo sus impresiones sobre la actividad. El investigador, quien es docente de la asignatura, elaboró una sesión práctica de laboratorio para complementar el aprendizaje de los conceptos de ecuación del plano y ecuación de la recta en R3, los cuales ya se habían desarrollado en clase teórica. Para esto se diseñó una secuencia didáctica utilizando la plataforma Moodle, que permite realizar lecciones interactivas e integrar cuestionarios junto con la lección. La parte de software de geometría interactiva se realizó en la plataforma de Grupos de GeoGebra (GeoGebra Groups) que permite generar una construcción geométrica única y asignarla individualmente a un grupo de estudiantes como una tarea en la que cada estudiante interactúa y escribe sus respuestas para ser valoradas posteriormente por el profesor. De esta manera, se ha creado una plataforma integrada para prácticas de laboratorio que permite registrar las interacciones de cada estudiante y guardar sus reflexiones y conclusiones, como si fuera un formato de tareas individuales en formato digital.

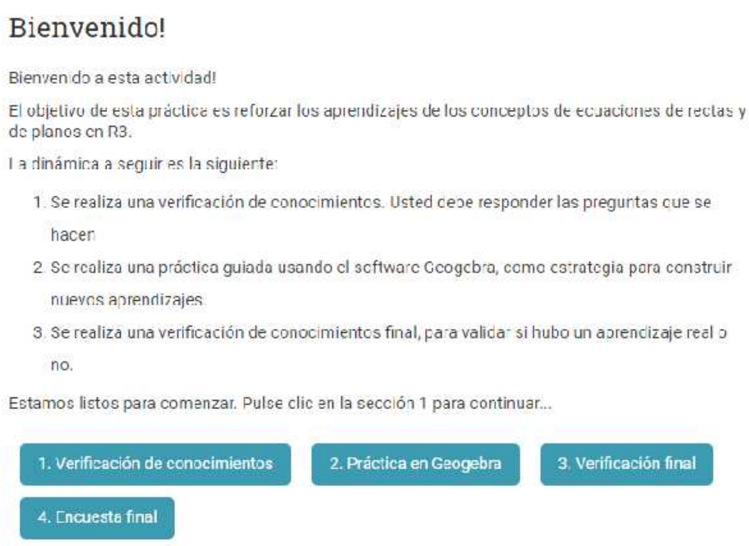


Figura 1. Pantalla de bienvenida de la sesión en la plataforma Moodle

En el diseño metodológico se consideraron cuatro momentos:

El primer momento consiste en un en una prueba diagnóstica o pre-test para ver el grado de dominio de la tarea específica a lograr, en este caso se pidió hallar ecuaciones de rectas y planos en R3 dados ciertos elementos en forma algebraica.

El segundo momento corresponde a la sesión de interacción con la plataforma GeoGebra, donde previo registro de cada participante, se presentan dos actividades desarrolladas con el software: una con una recta que es la intersección de dos planos y la otra con un plano. En este momento se presentan actividades que requieren la interacción con el software GeoGebra para responder preguntas que propician el análisis y la reflexión del estudiante. El docente ejerce un rol de tutor en esta etapa, respondiendo dudas sobre el uso de la herramienta y aclarando conceptos matemáticos. El objetivo de la interacción del docente es hacer consciente a los estudiantes de los objetos matemáticos involucrados, propiciando la relación entre la representación algebraica del objeto, que se usa en ejercicios y evaluaciones de papel y lápiz, y la representación geométrica visualizada a través del software.

El tercer momento consiste en un momento de metacognición, donde se pide al estudiante que escriba una reflexión sobre los aprendizajes que tuvo en su interacción con la plataforma GeoGebra. Posteriormente, se realiza una verificación post-test donde se le pregunta al estudiante el mismo tipo de ítems de la prueba diagnóstica para ver si hubo un aprendizaje real a partir del trabajo de laboratorio.

Finalmente, se pide una valoración cualitativa de la sesión, donde el estudiante abiertamente puede dar su opinión acerca del uso de la plataforma y la actividad realizada.

La valoración de los resultados se hizo de la siguiente manera: se hizo una tabulación de los estudiantes que lograron completar el pre-test exitosamente y se comparó con una tabulación similar de los estudiantes que lograron completar con éxito el post-test.

En la parte cualitativa, se recogieron las reflexiones de los estudiantes sobre los aprendizajes que tuvieron al usar la plataforma y se valoraron las opiniones emitidas por los estudiantes sobre la actividad. Como el estudio es de carácter exploratorio, dichos insumos servirán para diseñar sesiones prácticas posteriores en base a la retroalimentación recibida y cuya efectividad pueda medirse de manera más precisa.

Análisis de datos y discusión de resultados.

En este artículo presentaremos solamente los resultados de la primera actividad, cuyo objetivo era hallar ecuaciones de una recta en R3 a partir de una construcción geométrica. En el pre-test y post-test, se pide a cada estudiante que escriba ecuaciones simétricas de una recta que contiene dos puntos cuyas coordenadas se especifican. La Tabla 1 presenta los porcentajes de estudiantes que pudieron completar el pre-test y el post-test exitosamente. De manera general, vemos que hubo más estudiantes que respondieron correctamente a la pregunta realizada después de la sesión interactiva.

Tabla 1

Porcentajes de respuestas correctas del pre-test y post-test

	Pre-test	Post-test
Correcto	44%	67%
Incorrecto	56%	33%

Notas. Porcentajes en base a un total de nueve estudiantes.

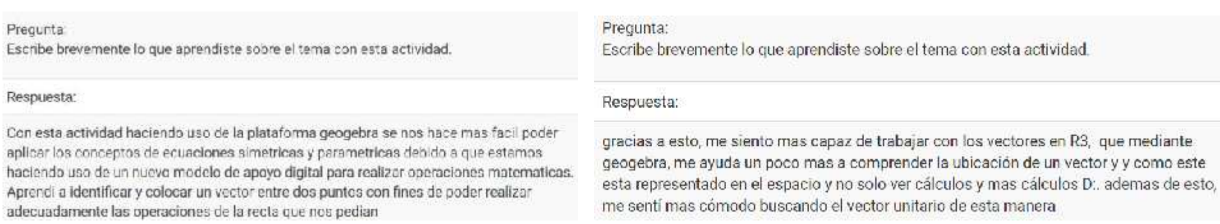
El trabajo en GeoGebra comenzó con unas preguntas definidas en la plataforma Moodle para que cada estudiante respondiera a partir de su interacción con la construcción geométrica. En el caso de la recta en R3, una actividad pedía digitar unas ecuaciones en forma simétrica dadas para identificar la representación geométrica del conjunto solución. Posteriormente, se pidió hallar y representar un vector de dirección de la recta graficada. Finalmente, se solicitó definir gráficamente dos puntos sobre la recta, distintos a los marcados inicialmente, para hallar un vector de dirección entre los puntos y escribir otras ecuaciones simétricas de la misma recta.

Al analizar los resultados con más detalle, vimos que todos los estudiantes que realizaron el pre-test exitosamente hicieron el trabajo en GeoGebra sin mayor dificultad y completaron el post-test también con éxito. Sin embargo, destacamos el trabajo realizado por dos estudiantes, quienes estaban confundidos en el pre-test y escribieron una ecuación de un plano, en lugar de ecuaciones de una recta. Durante el trabajo interactivo, pudieron darse cuenta de su error y en el post-test, estos estudiantes no tuvieron dificultad en escribir, ahora sí, ecuaciones de una recta.

En el momento del trabajo interactivo con GeoGebra, el docente leía en voz alta las preguntas propuestas en la actividad, esperaba a que los estudiantes interactuaran con el software y buscaran una respuesta, luego pedía turnos para responder. Si nadie participaba, buscaba orientar a través de otras preguntas. La interacción del docente ayudaba a reforzar los conceptos, preguntando, por ejemplo: ¿Cómo es un vector normal a un plano? Las respuestas verbales de los estudiantes a las preguntas no fueron registradas, pero sí hay una copia de la construcción geométrica hecha por cada estudiante y de sus respuestas escritas que el docente pudo verificar gracias a la plataforma GeoGebra Groups.

También pudimos observar que los estudiantes que tuvieron dificultades con el uso del software GeoGebra y no tuvieron oportunidad de responder sus dudas con el docente durante la sesión interactiva, no pudieron completar las tareas solicitadas y tuvieron dificultades en el post-test. Los resultados anteriores indican que es favorable contar con la guía del docente durante la sesión de laboratorio interactivo.

Por último, en la valoración cualitativa de los estudiantes sobre la actividad realizada, el 100% de los estudiantes encuestados respondieron que deseaban que este tipo de actividades se incluyera en las demás sesiones del curso de álgebra lineal. En la figura 2 se muestra algunas respuestas escritas de los estudiantes sobre sus aprendizajes.


Pregunta:
Escribe brevemente lo que aprendiste sobre el tema con esta actividad.

Respuesta:

Con esta actividad haciendo uso de la plataforma geogebra se nos hace mas facil poder aplicar los conceptos de ecuaciones simetricas y parametricas debido a que estamos haciendo uso de un nuevo modelo de apoyo digital para realizar operaciones matematicas. Aprendi a identificar y colocar un vector entre dos puntos con fines de poder realizar adecuadamente las operaciones de la recta que nos pedian

Pregunta:
Escribe brevemente lo que aprendiste sobre el tema con esta actividad.

Respuesta:

gracias a esto, me siento mas capaz de trabajar con los vectores en R3, que mediante geogebra, me ayuda un poco mas a comprender la ubicación de un vector y y como este esta representado en el espacio y no solo ver cálculos y mas cálculos D:. ademas de esto, me sentí mas cómodo buscando el vector unitario de esta manera

Figura 2. Respuestas de estudiantes sobre los aprendizajes que tuvieron con la actividad.

Cuando se les preguntó sobre lo que habían aprendido, las respuestas escritas a modo de ensayo libre fueron variadas, pero muchas evidenciaron la *visualización* de objetos y sus propiedades, tales como observar que un vector de dirección es paralelo a la recta; o un proceso, como el de definir un vector entre dos puntos, entre otros. De esta manera, los estudiantes valoraron la importancia de trabajar con representaciones visuales para facilitar su comprensión.

Conclusiones

En base al análisis realizado de los datos disponibles podemos ver que efectivamente el uso de diferentes representaciones de un objeto facilita su comprensión.

También, que la interacción dinámica con representaciones geométricas a través del software GeoGebra ayuda a que los estudiantes comprendan cuáles son los objetos involucrados y puedan relacionarlos más fácilmente con las representaciones algebraicas de los mismos.

Finalmente, hemos visto que la integración de recursos tecnológicos para la educación matemática en formato de laboratorio permite mayor interacción y propicia el aprendizaje. El uso de las plataformas Moodle y GeoGebra Groups permite dejar registro escrito de la actividad de cada estudiante para una posterior valoración cualitativa o cuantitativa. La interacción con el docente para responder dudas sobre el uso de la herramienta tecnológica o aclarando conceptos matemáticos favoreció el logro de los aprendizajes esperados.

En base a estos resultados, recomendamos incluir sesiones prácticas de laboratorio en las asignaturas de matemática que lo requieran y en base a la retroalimentación de los estudiantes y el efecto en sus aprendizajes, seguir diseñando mejores sesiones de laboratorio que contribuyan a su aprendizaje.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Año 6. Número 8. (pp 13-33). Costa Rica: Universidad de Costa Rica. ISSN Impreso: 1659-2573

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103–131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

Guzmán, J., Zambrano, J. (2015). Base de un espacio vectorial de R^n y tecnología. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Recuperado de: http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/884

Kolman, B., Hill, D. (2006). Álgebra lineal. México: Pearson Educación. ISBN: 970-26-0696-9

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Sánchez, A. (2012). Incorporación de las TIC en el aprendizaje de la matemática en el sector universitario. *Revista de Educación Matemática, 27(3)*. (pp 23-38). Argentina: Universidad Nacional de Córdoba. ISSN: 0326-8780

Soto, J. L. & Romero, F. C. (2011). El concepto de transformación lineal: una aproximación basada en la conversión gráfico-algebraica, con apoyo de GeoGebra. En F. Hitt & C. Cortés (Eds.), *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (pp. 38-49). Canadá: Loze-Dion. ISBN: 978-2-9235- 6554-5

Estrategias en el aula de matemáticas según los estilos de aprendizaje

Luis Moctezuma **Cervantes** Espinoza
Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional
México
luigim2002@gmail.com
Jazmín Adriana **Juárez** Ramírez
Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional
México
jjuarezr@ipn.mx
Ricardo **Ceballos** Sebastián
Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional
México
ceballos1@hotmail.com

Introducción

Algunas investigaciones confirmaron los efectos de los estilos de aprendizaje sobre el rendimiento académico (Balakrishnan & Gan, 2016; Felder & Henriques, 1995). El concepto de estilo de aprendizaje se originó a partir de los estilos cognitivos, que identificó la diversidad de las características cognitivas individuales; mientras que, los académicos han atribuido las diferencias individuales en la educación superior a los estilos de aprendizaje (González, Mendoza-González, Rodríguez-Martínez y Rodríguez-Díaz, 2016). Para lograr una mayor eficacia en el aprendizaje, los profesores no deben asumir que todos los estudiantes tienen una forma idéntica de aprender, sino que deben preparar una instrucción que se adapte a las diferentes preferencias o demandas de sus estudiantes (Hawk & Shah, 2007).

En ese sentido, el bajo rendimiento de los estudiantes en matemáticas no se debe atribuir solamente al carácter abstracto de las matemáticas, sino también a las prácticas de empleadas en el aula (Santaolalla, 2009). El éxito de las estrategias didácticas estará garantizado si se respeta la diversidad en los modos de aprender de sus estudiantes (Aguilera & Ortiz, 2010). Estudiar los estilos de aprendizaje para proponer actividades en el aula de matemáticas, permitiría desarrollar aquellos estilos en los que se tenga cierto grado de dificultad o carencia, y así proporcionar una guía práctica básica que facilite el camino de los profesores (Gallego & Nevot, 2008).

Analizar la manera en que los alumnos aprenden es fundamental para poder tomar decisiones, planificar actividades, recursos y evaluar, entre estas la acción tutorial que tiene indudables efectos en el logro institucional de elevar la calidad y eficiencia terminal de los estudiantes del nivel superior. Este trabajo tuvo como objetivo analizar los estilos de aprendizaje de los estudiantes del primer año de ingeniería en Sistemas Computacionales, con el fin de diseñar estrategias efectivas en el curso de ecuaciones diferenciales que atiendan a las necesidades de los alumnos. El estilo de aprendizaje de tipo *Divergente*, es el que predominó en la población estudiada, con menor porcentaje se encontró que la muestra posee el estilo de aprendizaje *Adaptador*. Una vez reconocidas las características de aprendizaje de la población, se pueden sugerir estrategias de enseñanza-aprendizaje en los cursos de matemáticas, que permitan potencializar el desarrollo de los estudiantes.

Desarrollo de la experiencia

La experiencia se realizó en el desarrollo del semestre escolar 2016/2017-2, en la Escuela Superior de Cómputo (ESCOM-IPN). En este estudio, participaron 103 estudiantes inscritos en el segundo semestre de la carrera en Ingeniería en Sistemas Computacionales (16 mujeres, 15%, y 87 hombres, 85%). La edad promedio de los participantes fue de 19.4 años, y el promedio de calificaciones en las asignaturas cursadas fue de 8.1.

En este caso se seleccionó como instrumento para recolectar la información, el test de estilos de aprendizaje de Kolb (García, Santizo, & Alonso, 2009). Se pidió a los estudiantes que proporcionaran su edad, promedio de calificaciones y género. Las respuestas se transcribieron, se organizaron y se analizaron con el software Microsoft Excel. Se aplicó estadística descriptiva para determinar los porcentajes de cada estilo de aprendizaje presente en la muestra de estudio.

Resultados

Se observó que más de la tercera parte de los estudiantes de la muestra de estudio (36%) presentaron el estilo de aprendizaje *Adaptador*. Se desempeñan mejor en la experiencia concreta (EC) y la experimentación activa (EA). Hay que resaltar que solamente 3 estudiantes (3%), mostraron en sus respuestas tener un estilo de aprendizaje *Convergente***.** Su punto más fuerte reside en la aplicación práctica de las ideas. Sin embargo de acuerdo a los resultados, el estilo de aprendizaje que predomina es el *Divergente* (52%). El estilo de aprendizaje divergente se caracteriza por un buen desempeño en actividades concretas y observación reflexiva; una de las fortalezas de esta tipificación es la capacidad imaginativa

Conclusiones

Llama la atención que los estudiantes solamente presentan en su mayoría los estilos de aprendizaje *Adaptador* y *Divergente*. Esto señala una serie de preferencias que deberían reconocerse e implementarse por el profesor en su práctica docente. Estos alumnos se sienten cómodos en aquellos entornos que establecen situaciones que impliquen hechos determinados. Tanto los estudiantes con estilo *Adaptador* como los de estilo *Divergente* prefieren la experiencia concreta respecto de la conceptualización como medio para aplicar su conocimiento. Debido a que los alumnos del estilo *Divergente* tienen un mejor aprovechamiento del aprendizaje cuando pueden realizar observaciones y analizar la situación, cuando pueden pensar antes de actuar, las actividades que deben propiciarse son los diarios de clase, los cuestionarios de autoevaluación, los registros de actividades y actividades que impliquen búsqueda de información.

Referencias y bibliografía

Aguilera, P. E., & Ortiz, T. E. (2010). La caracterización de perfiles de estilos de aprendizaje en la educación superior, una visión integradora. *Revista Estilos de Aprendizaje, 5,* 3.

Balakrishnan, V., & Gan, C. L. (2016). Students' learning styles and their effects on the use of social media technology for learning. *Telematics and Informatics, 33*(3), 808-821.

Felder, R. M., & Henriques, E. R. (1995). Learning and teaching styles in foreign and second language education. *Foreign Language Annals*, *28*(1), 21-31.

Gallego, D., & Nevot, A. (2008). Los estilos de aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista Complutense de Educación*, *19*(1), 95-112.

García, J., Santizo, J., & Alonso C. (2009). Instrumentos de medición de estilos de aprendizaje. *Revista Estilos de Aprendizaje*, *4*(4), 1-23.

González, S. J., Mendoza-González, R., Rodríguez-Martínez, L. C., & Rodríguez-Díaz, M. (2016). MOOCs and multiple learning styles. *User-Centered Design Strategies for Massive Open Online Courses* (MOOCs), 30.

Hawk, T. F., & Shah, A. J. (2007). Using learning style instruments to enhance Student learning. *Decision Sciences Journal of Innovative Education*, *5*(1), 1-19.

Santaolalla, E. (2009). Matemáticas y estilos de aprendizaje. *Revista Estilos de Aprendizaje*, *4*(4), 1-17.

Propuesta didáctica para un curso de matemáticas discretas

Jazmín **Juárez** Ramírez
Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional
México
jjuarezr@ipn.mx
José María **Chamoso** Sánchez
Facultad de Educación, Universidad de Salamanca
España
jchamoso@usal.es
Araceli **Queiruga** Dios
Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Salamanca
España
queirugadios@usal.es

Introducción

Una de las razones para utilizar juegos en el aula de matemáticas se debe a que son actividades atractivas y aceptadas fácilmente por los estudiantes, reconociéndolas como elementos de su realidad que les permiten desarrollar un carácter competitivo (Chamoso, Durán, García, Martín & Rodríguez, 2004). El juego como recurso didáctico puede utilizarse para una multitud de contenidos, para desarrollar estrategias de resolución de problemas y además puede incidir en la visión de los estudiantes acerca de las matemáticas (Deulofeu, 2006). El juego didáctico se puede usar en cualquier nivel o modalidad de escolaridad, sin embargo, en las aulas universitarias se utiliza escasamente debido a la falta de conocimiento de sus múltiples ventajas. Algunos investigadores han utilizado aspectos relativos a la teoría de grafos como juegos educativos en matemáticas y han concluido que su empleo aumenta considerablemente el factor motivador de la actividad facilitando la introducción y asimilación de conceptos sensiblemente mejor que con el modo habitual (Martín, Muñoz, & Oller, 2009). Sin embargo, existe limitada evidencia del uso de juegos en el aprendizaje de conceptos de matemáticas discretas. En este trabajo se propone el diseño de una estrategia didáctica en un curso de matemáticas discretas para ingenieros en la Escuela Superior de Cómputo (en la Ciudad de México), con el objetivo de aplicar la teoría de grafos a problema reales mediante la aplicación de juegos.

Propuesta

Considerando que en el desarrollo de la asignatura matemáticas discretas se propone la participación del alumno en clase en actividades individuales y por equipo, con el fin de fomentar la socialización, organización e integración al trabajo colectivo, y la realización de actividades que fomenten el aprendizaje colectivo, se diseñó una estrategia didáctica considerando los componentes necesarios de acuerdo al modelo de Feo (2010):

- Contexto: Grupo de estudiantes del primer año de ingeniería en sistemas computacionales
- Duración: 3 sesiones en el aula (4.5 hrs.).
- Objetivos y/o Competencias: Aplicar la teoría de grafos a un problema real.
- Sustentación Teórica: El juego didáctico se define como el modelo simbólico mediante el cual es posible contribuir a la formación del pensamiento teórico y práctico de los estudiantes.
- Contenidos: Definición de grafo, Elementos de un grafo, Tipos de grafos.
- Secuencia didáctica: Presentación, Desarrollo y Cierre.
- Recursos y medios: Libro de texto (Epp, 2012), proyector de imágenes, computadora portátil, tablero de madera, tachuelas o chinchetas, hilo, lápices de colores.
- Estrategias de evaluación: Instrumentos cualitativos (rúbricas, listas de cotejo) para evaluar trabajo escrito, trabajo práctico y exposición en el aula.

Reflexiones finales

Ya que la efectividad de las estrategias didácticas depende de su relación con los objetivos que se pretendan alcanzar, así como con los contenidos matemáticos a desarrollar (Diaz-Barriga & Hernández, 2010), se espera que esta propuesta pueda resultar útil para promover el aprendizaje de la teoría de grafos. Sin embargo, hay que tener en cuenta que los juegos como cualquier instrumento debe incorporarse al aula de un modo planificado que tenga en cuenta todos los factores del proceso de enseñanza- aprendizaje (Chamoso et al., 2004). Se espera que esta propuesta se aplique en el transcurso del semestre 2018-2019/1, y se pueda analizar su efectividad como estrategia para realizar las modificaciones necesarias en términos de los propósitos de la signatura y promover el interés de los estudiantes por las matemáticas.

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente subvencionado por la Universidad de Salamanca [2017/00111/001 (K118/ 463AC01)]; European Union, Project Erasmus+ [2017-1-ES01-KA203-038491], Ministerio de Economía y Competividad de España [PSI2015-66802-P], RED8-Educación Matemática y Formación de Profesores [EDU2016-81994-REDT].

Referencias y bibliografía

Chamoso, J., Durán, J., García, F., Martín, J., & Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas. *Suma*, *47*, 47-58.

Díaz-Barriga, F., & Hernández, G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. México: McGraw-Hill.

Edo, M., & Deulofeu, J. (2006). Investigación sobre juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos. *Enseñanza de las Ciencias*, *24*(2), 257-268.

Epp, S. (2012). *Matemáticas discretas con aplicaciones*. México: Cengage.

Feo, R. (2016). Orientaciones básicas para el diseño de estrategias didácticas. *Tendencias pedagógicas*, *16*, 220-236.

Martín, J., Muñoz, J., & Oller, A. (2009). Empleo didáctico de juegos que se matematizan mediante grafos. Una experiencia. *Contextos educativos*, *12*, 137-164.

Comprensión de conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial

Diego Antonio **Rolong** Molinares
Universidad de Antioquia
Colombia
Diego.rolong@udea.edu.co
René Alejandro **Londoño** Cano
Universidad de Antioquia
Colombia
renelondono@gmail.com
Carlos Mario **Jaramillo** López
Universidad de Antioquia
Colombia
Camaja59@gmail.com

Resumen

La propuesta busca divulgar divulgación de una investigación a nivel doctoral que analizará la comprensión de los conceptos de razón de cambio, derivada y anti derivada involucrados en el proceso de resolución de una ecuación diferencial en el marco de la Teoría de Pirie y Kieren; para llevar a cabo el estudio se elegirán estudiantes matriculados en un curso regular de ecuaciones diferenciales. Para la recolección de la información se emplearán los experimentos de enseñanza ubicados en el paradigma metodológico llamado investigación de diseño, así mismo, se emplearán algunas técnicas como: observaciones y entrevistas semi-estructuradas que serán parte de las actividades de complementariedad de la acción y expresión. Para el análisis cualitativo de la información recolectada, se utilizará la técnica de triangulación y el software Atlas. Ti. Se espera que sea posible describir los niveles de comprensión de los estudiantes con respecto a los conceptos matemáticos ya mencionados.

Palabras clave: Comprensión, razón de cambio, derivada, experimento de enseñanza.

Antecedentes

Aspectos de comprensión

A continuación, se presentan estudios sobre las ideas que tienen algunos investigadores en aspectos relacionados con la comprensión de conceptos matemáticos tales como: razón de cambio, derivada y antiderivada. La revisión de la literatura reporta hasta el momento investigaciones que muestran ciertas dificultades presentes en los estudiantes para comprender, interpretar, analizar y establecer relaciones entre dichos conceptos en la resolución de problemas.

Bajo la perspectiva de la comprensión, por un lado, Villa (2011) realiza una interpretación alterna de la tasa de variación, empleando para ello, representaciones geométricas, numéricas y cinemáticas simultáneamente haciendo uso de un triángulo, para tratar de elaborar una imagen del crecimiento de una variable con respecto a otra. Por otro lado, Londoño (2011) muestra que mediante la comprensión de procesos de razonamiento infinito se puede establecer la comprensión de la relación inversa entre los conceptos de área bajo una curva y pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, inherentes al teorema fundamental del cálculo.

En lo mencionado anteriormente, se observa que se pueden efectuar procesos cognitivos que permiten transitar entre los conceptos y sus significados al tratar de establecer una relación entre ellos (Sierpinska, 2000). En el contexto de las ecuaciones diferenciales, los estudiantes pocas veces establecen este tipo de relación. Más aún, exhiben un escaso dominio para realizar procesos cognitivos, en los que muestran una comprensión conceptual de objetos matemáticos, y a su vez, tratan de representar e interpretar gráficamente cada concepto en un registro de representación (Duval, 2004) de manera errónea, sin embargo, se evidencian carencias para representarlos en otros sistemas. Se puede inferir que representar un concepto en diferentes sistemas permite comprender su significado de manera paralela.

Después de lo manifestado anteriormente es posible preguntar si un estudiante exhibe comprensión de un concepto involucrado en la resolución de una ecuación diferencial. ¿Podría exhibir comprensión de su solución?; ¿es un factor que puede ser determinante o no?, además, ¿qué tanto influye la comprensión de estos conceptos en la compresión de la solución de una ecuación diferencial?; esta y otras preguntas emergen al tratar la comprensión de los objetos matemáticos que gravitan alrededor de una solución de una ecuación diferencial.

Por su parte, Sfard (2001) considera la comprensión como una elaboración de esquemas mentales en el que participan artefactos y símbolos, considerados como una herramienta que regulan una comunicación. En el contexto de las ecuaciones diferenciales se emplea un lenguaje simbólico como una herramienta para tratar de establecer una relación entre: las expresiones algebraicas de un enunciado y los conceptos involucrados en el proceso de resolución de una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ con su gráfica, de tal manera, que le permita comprender su solución. En las actividades de clase se observa que estos procesos son realizados por los estudiantes de manera mecánica, además, pocas veces logran establecer las relaciones requeridas, lo que dificulta la comprensión de los conceptos y por ende la comprensión de la solución de una ecuación diferencial.

Con la revisión de la literatura realizada, se observa que las posturas epistémicas de los autores antes mencionados, involucran procesos de elaboración, relación, construcción y abstracción que permiten reorganizar un conocimiento para comprender un concepto matemático.

Aspectos sobre ecuaciones diferenciales

A continuación, se mencionan algunas investigaciones en el campo de las matemáticas avanzadas, relacionadas con aspectos de las ecuaciones diferenciales, que permiten obtener información valiosa sobre las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de comprensión de su solución en una actividad matemática dada.

Guerrero, Camacho y Mejía (2010) afirman que los estudiantes presentan dificultades para comprender la solución de una ecuación diferencial ordinaria, al expresarse ésta en forma algebraica o gráfica; estas dificultades están relacionadas con conceptos propios de las ecuaciones diferenciales, objetos matemáticos, técnicas y métodos empleados en la resolución de la misma.

En las actividades de clase algunos estudiantes manifiestan estas dificultades al tratar de expresar de manera algebraica la gráfica del campo direccional de la solución de una ecuación diferencial o viceversa. Por ejemplo, dada la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} - e^{-x} = -2y$ cuya solución es $y = e^{-x} + ce^{2x}$ donde c es una constante arbitraria, es posible que un estudiante reconozca esta expresión algebraica, pero se le dificulte asociarla con la gráfica de su campo direccional correspondiente.

Por otra parte, las dificultades mencionadas por Rasmussen (2001) para comprender aspectos relacionados con la solución de una ecuación diferencial, son también tomadas por Guerrero, Camacho y Mejía (2010) cuando manifiestan que al ignorar una expresión algebraica vinculada a la solución de una ecuación diferencial, se afecta la comprensión de la misma, influenciada quizás, por la desconexión que exhibe un estudiante de los conceptos de razón de cambio, derivada y antiderivada, entre otros, además de las generadas al tratar de expresar dicha solución al utilizar diferentes sistemas de representación.

Con el fin de establecer mecanismos que propicien la solución de un problema real por medio de una ecuación diferencial, Rasmussen & Kwon (2007) presentan un proyecto llamado *An inquiry-oriented approach to Undergraduate mathematics (IO-ED)* que ofrece un marco que distingue dos categorías, la primera, centrada en aprender matemática a través de la buena argumentación, y la segunda, desarrolla en el estudiante la capacidad de reconstrucción de sus conceptos matemáticos como punto de partida para la investigación, en la que se desarrollan técnicas analíticas, gráficas y numéricas para examinar las soluciones de ecuaciones diferenciales.

A continuación, se manifiestan algunos aspectos en los que se relacionan las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de la solución de una ecuación diferencial y los conceptos involucrados.

Planteamiento del problema

Las ecuaciones diferenciales son expresiones algebraicas que tratan de representar o modelar problemas físicos, biológicos, químicos, entre otros, para conjeturar soluciones a corto y mediano plazo. Si bien es cierto que antes del siglo XVII existían investigaciones que contribuyeron en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales, es a partir de esta fecha que se consolidan conceptos fundamentales para formar la base de una teoría rica y abundante inherente a este campo específico de las ecuaciones diferenciales, en la que los investigadores matemáticos han podido brindar importantes soluciones a problemas propios de las ciencias, por lo tanto, ha sido un conocimiento indispensable a tener en cuenta en los currículos de los programas de ciencias e ingenierías en los que tanto estudiantes como profesores han tenido que enfrentar arduos razonamientos para interpretar y comprender una ecuación diferencial y su solución.

En este orden de ideas, las ecuaciones diferenciales han sido orientadas mediante programas revestidos de una matemática formal que emplea técnicas de solución analítica (Dullius, 2009, p.37). Los estudiantes bajo los programas reciben una formación para solucionar problemas, mediante el uso de definiciones y procedimientos matemáticos que aplican de manera mecánica. Estos procedimientos requieren procesos de conceptualización, razonamiento, análisis, abstracción y generalización, los cuales requieren de distintas formas de expresión y representación (Duval, 2004).

A pesar de que existen cambios tanto de contenido como de forma, dado los asistentes de computación matemáticos relacionados con los programas para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, las técnicas analíticas han sido un punto de apoyo en la resolución de ecuaciones diferenciales en estos cursos (Rasmussen, 2001). Más aún, los estudiantes dan muestra que se aprenden las definiciones de manera mecánica sin comprenderlas y reproducen lo visto en clases, con lo cual afectan su creatividad y raciocinio (Moreno & Azcárate, 2003). Además, estas técnicas las utilizan de manera mecánica para resolver y hallar una expresión algebraica como una solución de una ecuación diferencial (Camacho, Perdomo y Santos-Trigo, 2009) y, exhiben dificultades al relacionarlas con otros sistemas de representación. Asumiendo esta postura, podría entonces considerarse que la relación entre registros de representación puede coadyuvar al proceso de comprensión de una ecuación diferencial.

Es así, como puede observarse que en las actividades de clase, dada una solución de una ecuación diferencial en un sistema de representación que involucra conceptos de razón de cambio, derivada y antiderivada, pocas veces los estudiantes tratan de establecer relaciones entre ellos y con otros sistemas, por lo que se identifican conexiones cognitivas débiles para interpretar y comprender dicha solución (Duval 1999) de manera gráfica, algebraica, numérica y cualitativa. Esto influenciado quizás por las preferencias que tienen los profesores en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la misma en las cuales involucran aspectos conceptuales y procedimentales.

Esta investigación pretende Analizar cómo comprenden los estudiantes los conceptos de razón de cambio, derivada y antiderivada involucrados en el proceso de resolución de una ecuación diferencial al expresarlos en otros sistemas de representación.

Formulación del problema de investigación:

Teniendo en cuenta las dificultades que exhiben los estudiantes de los conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial, por cuanto están relacionados con razonamientos asociados al concepto de razón de cambio como proceso inverso al de anti-derivación, me permito plantear la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo es la comprensión de los conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial al emplear procesos analíticos, gráficos y algebraicos?

Objetivo

Analizar la comprensión que los estudiantes exhiben de los conceptos de razón de cambio, derivada y anti derivada al emplear métodos analíticos, gráficos y algebraicos en el proceso de solución de una ecuación diferencial en el marco de la teoría para la comprensión matemática de Pirie y Kieren.

Marco teórico: Teoría para el crecimiento de la comprensión matemática

El concepto de comprensión se ha empleado de manera amplia en la literatura relacionada con la Educación Matemática; durante muchos años se ha indagado por una definición que permita esclarecer su significado, dada su alta complejidad para definirla. Dadas las diversas contribuciones que se han hecho al respecto, a continuación, se presentan algunos estudios sobre la comprensión.

La teoría para el crecimiento de la comprensión matemática emerge desde un enfoque constructivista; Pirie y Kieren apoyados en la definición propuesta por Von Glasersfeld (1987) consideran la comprensión matemática como un todo dinámico, no lineal, recursivo y jerarquizado de una reorganización de las estructuras cognitivas. Esta teoría se constituye en una herramienta que actúa como una lente a través de la cual puede observarse el proceso de evolución de la compresión de un concepto matemático de un individuo o de un grupo de individuos. La teoría propone un modelo compuesto por ocho niveles que describen la evolución de la comprensión de conceptos matemáticos, los cuales son: Nivel 1. Primitive Knowing. (Conocimiento primitivo); Nivel 2. Image Making. (Construcción de la Imagen); Nivel 3. Image Having. (Comprensión de la Imagen); Nivel 4. Property Noticing. (Observación de la propiedad).

Así mismo, está dotado de unas características, de las cuales mencionaré una que es objeto de este estudio. En ella se exponen los procesos, las acciones y expresiones que realiza un estudiante en la medida que avanza en la comprensión de un concepto matemático determinado. Se hace referencia a las c*omplementariedades de la acción y la expresión.* Al respecto, Pirie & Kieren (1994) afirman que más allá del conocimiento primitivo o Primitive Knowing, cada nivel está compuesto por dos aspectos complementarios, una acción y una expresión, presentes en los demás niveles excepto el primero y el último. En ella se considera que el crecimiento de la comprensión acontece primero actuando y luego expresando, la primera incluye una comprensión previa y la segunda se articula de diferentes formas para cada nivel en particular.

En las actividades de clase, se observa que los estudiantes pocas veces relacionan los conceptos de razón de cambio, derivada y anti derivada con su gráfica, o realizan descripciones dada la gráfica de un concepto o función; de igual manera, se les dificulta comprender las características de una gráfica y formalizarlas por medio de una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ que las represente. Para comprender una solución de una ecuación diferencial se considera que estos procesos se pueden complementar. Es así que a través de las complementariedades de la acción y expresión se realizará un análisis de crecimiento de la comprensión de estudiantes de los conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial. De este modo, los conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada y de ecuaciones diferenciales en términos de la teoría de Pirie y Kieren se pueden expresar grosso modo mediante la figura 1. Las abreviaturas relacionadas en la figura se describen a continuación. RC: Razón de cambio; DR: Derivada; AD: anti derivada; ED: Ecuación diferencial.

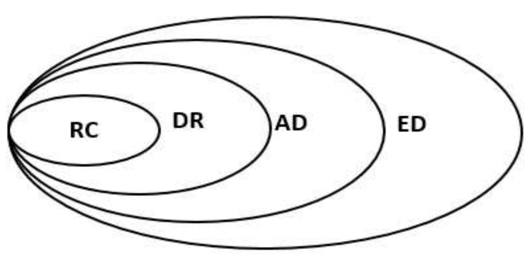


Figura 1 Representación de conceptos en términos de la teoría de Pirie y Kieren.

Metodología

Este estudio es de carácter cualitativo y para llevar a cabo esta investigación se propone como método el denominado *experimentos de enseñanza*, considerado como un tipo de estudio ubicado dentro del paradigma de investigación de diseño o investigación basada en diseño

(Confrey, J & Lachance, A., 2000). Este método tiene en cuenta las interacciones, acciones, eventos y circunstancias que rodean a un estudiante para comprender los procesos de nseñanza y aprendizaje (Creswell, 2005). El método es considerado por Molina, J. & Castro, E. (2011) como un tipo de metodología de naturaleza cualitativa desarrollada dentro de las ciencias del aprendizaje en contextos naturales con toda su complejidad para comprender y mejorar la realidad educativa.

Al respecto, Steffe & Thompson, P. W. (2000) lo consideran como una sucesión de episodios de enseñanza que constan de cuatro elementos básicos: un profesor investigador, uno o más estudiantes y un testigo de episodios de enseñanza quien aportará interpretaciones alternativas a las hechas por un cuarto que es el profesor investigador. Este tipo de estudio según Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Leher, R., & Scauble, L. (2003) busca crear conocimiento y hacer progresar teorías de aprendizaje y enseñanza en ambientes complejos, que mediante el estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, permite analizar su desarrollo en un contexto natural. El objetivo de este tipo de estudio es generar conocimiento mediante el apoyo en la información obtenida y en las decisones sobre la práctica educativa para mejorar el aprendizaje en estudiantes (Molina, M.,2006).

Una característica que se destaca en este tipo de estudios es la ruptura entre docente e investigador cuyo motivo es el propósito de los investigadores para experimentar de primera mano el aprendizaje y el razonamiento de los estudiantes (Kelly, A. E. & Lesh, R. A., 2000). Los experimentos de enseñanza se hacen con el fin de testar y generar hipótesis, durante cada uno de los episodios de enseñanza en la duración del experimento o de manera general. Estas hipótesis son reformuladas en la medida que se analiza la información recolectada, de tal manera que se pueda elaborar un modelo de aprendizaje que permita el desarrollo del conocimiento en un estudiante, siendo éste, un producto que se obtiene de la forma de operar situaciones planteadas por el profesor investigador (Molina, M, Castro, E. , Molina, J., & Castro, E, 2011).

Teniendo en cuenta lo anterior, y en el marco de los desarrollos teóricos y metodológicos de Molina, J., & CasTro, E, (2011), en la presente investigación se emplearán dos tipos de análisis de datos, por un lado, un análisis de datos continuo y preliminar, que consiste en analizar los datos después de cada episodio de enseñanza, facilitando la revisión y el desarrollo de las conclusiones de la investigación y guiando la toma de decisiones hacia futuras intervenciones. Por el otro, un análisis final, el cual consiste en examinar todos los datos recolectados y todo el proceso de investigación para la obtención y evaluación de los resultados. Este análisis permite describir la evolución de las conjeturas y el progreso del pensamiento de los estudiantes durante el desarrollo de la investigación.

De acuerdo a lo mencionado anteriormente, la información obtenida se analizará teniendo en cuenta la respectiva categorización. En esta investigación se empleará una triangulación de la información proveniente de los datos recolectados en cada episodio de enseñanza propuesto, registros escritos, verbales, de audio, de video y de las observaciones de los investigadores. Adicional a lo anterior, se empleará el software Atlas. Ti, para analizar un análisis cualitativo de la información recolectada, lo cual permitirá indagar sobre el crecimiento de la comprensión de los conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial.

La investigación se hará en tres fases de acuerdo con lo manifiestado por Cobb & Gravemeijer (2008), las cuales son: preparación del experimento, experimentación y análisis retrospectivo. En la preparación del experimento, se diseña una situación problema y se plantean hipótesis para cada diseño. En esta etapa se recolecta información y se analiza con el propósito de refinar el experimento y las hipótesis. En la etapa de experimentación, mientras que ocurren los episodios de enseñanza, se podrán refinar o modificar con justa causa según las necesidades que el investigador requiera. Finalmente, se realiza un análisis retrospectivo el cual es un análisis cuidadoso de los registros de audio y video para traer a colación aquellas interacciones en las que se manifiesta o no la comprensión de los conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial.

Los participantes en esta investigación son estudiantes de quinto semestre del programa de ingenierías, en los que el departamento de ciencias básicas ofrece la asignatura de ecuaciones diferenciales. Los estudiantes se seleccionarán por la manera en que realizan los procesos mecánicos, la forma de abordar una ecuación diferencial, las dificultades que presenten al solucionar una ecuación diferencial, entre otros.

Resultados esperados

En la presente investigación se esperan alcanzar los siguientes resultados:

- Expresar en términos de las complementariedades de la acción y la expresión, manifestaciones de los conceptos de razón de cambio, derivada y anti-derivada.

- Plantear descriptores para los niveles de comprensión de la teoría de Pirie y Kieren que permitan establecer el nivel de comprensión de los conceptos de razón de cambio, derivada y anti-derivada, involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial; tales descriptores, a su vez, facilitarán el refinamiento de la entrevista semi estructurada.

- Determinar si las complementariedades de la acción y la expresión son adecuadas para describir el nivel adquirido por los estudiantes en la comprensión de los conceptos asociados en la solución de una ecuación diferencial.

Referencias Bibliográficas

Camacho, M., Perdomo,J, & Santos Trigo, M. (2009). Revisiting university students´ knowledge that involves básic differential equation questions. PNA, 3(3), 123-1333. .

Cobb, P, Confrey, J., Disessa, A, Lehrer, R, & Schauble, L. (2003). desing experiment in Educational Research. *Educational Researcher*, 32(1), pp.9-13.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes, en Kelly, A. E Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (eds.). (L. E. Associates, Ed.) *Handbook of design research mathods in education. innovation in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, pp. 68-95.

Confrey, J, & Lachance; A. (2000). Transformative teaching experiments through conjeture-driven research design. En A. E. Kelly y R. A: Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*, 231-265. New Jersy: Lawrence Erlbaum associates.

Creswell, J. (2005). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research.* Upper Saddle River: Perarson Education.

Dullius, M. (2009). Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y análitico.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano resgistros semióticos y aprendizajes intelectuales.

Duval, R. (2004). Semiosis y Pensamiento Humano. REgistro Semiótico y Aprendizajes Intelectuales. Universidad del Valle, Colombia.

Guerrero, C., & Camacho, M. &. (2010). Dificultades de los estudiantes en interpretación de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de la ciencias*, 341-352.

Kelly, A. E., & Lesh, R. A. (2000). Handbook of research design in mathematics and science education. New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.

Londoño, R. (2011). La relación inversa entre cuadrátura y tangentes en el modelo de Pirie y Kieren. Tesis doctoral. Colombia: Departamento de Educación Matemática. Universidad de Antioquia. Disponible en tesis.udea.edu.co/bitstream/10495/6920/1/ReneLondoño_2011_teoriapirie.

Molina, M, Castro, E. , Molina, J., & CasTro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñana. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.

Molina, M. (2006). Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual (Tesis para optar por el grado de doctora en Didpactica de la Mtemática). *Departamento de Didáctica dela Matemática.*, Universidad de Granada, España.

Moreno, M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de las enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, 265-280.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in the mathematical understanding how can we characterise it and how we represent it? *Educational Students in Mathematical*, 165-190.

Rasmussen, C. (2001). New directions equations differential a framework for interpreting student´s understandings and difficulties. *Journal Mathematical Behavior, 20,* 55-87.

Rasmussen, C., & Kwon, O. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. *Journal Mathematical Behavior, 26*, 189-194.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse then meets the ears: Loking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematicac 46*, 13-57.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students´thinking in Linear Algebra En Dorier, J. L. (Eds.) The Teaching of linear Algebra in Question (pp. 209-246). Netherlands: Kluwe Academic Publishers.

Steffe, L., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267-306. Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Villa ochoa, J. (2011). La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis de la teoría de Pirie y Kieren. Tesis doctoral. Colombia Departamento de Educación Matemática. Universidad de Antioquia. Disponible en ayura.udea.edu.co:808.

Von, G. E. (1987). The cosntruction of Knowledge, Seaside. *Intersystems Publications*.

Representaciones Multimedia en matemática. Análisis de la Teoría Conectivista del Aprendizaje.

Ricardo **Valles** Pereira
Escuela Físico Matemática, Pontificia Universidad del Ecuador
Ecuador
prfricardovalles@gmail.com
Dorenis **Mota** Villegas
Escuela Físico Matemática, Pontificia Universidad del Ecuador
Ecuador
dorenismota@gmail.com

Resumen

El presente artículo es de carácter reflexivo, donde se muestran conjeturas alusivas a la importancia que actualmente tienen los recursos multimedia en la enseñanza de la matemática, si se toma en cuenta el potencial de estos recursos para hacer posible las distintas representaciones propias de los objetos matemáticos y si, además, se considera cómo el estudiante de hoy aprende, para lo cual se ha estudiado a una teoría del aprendizaje de vanguardia como lo es el conectivismo. Se espera que con el estudio y desarrollo integrado de los elementos antes mencionados (recursos multimedia, representaciones de los objetos matemáticos y teoría conectivista del aprendizaje) se puedan crear objetos de enseñanza para la matemática adaptados a las exigencias del estudiante actual.

Palabras clave: recursos, multimedia, enseñanza, matemática, conectivismo, representaciones.

1. Introducción

Antiguamente, los medios comunes de instrucción eran la voz y la gestualidad como herramienta principal para que un docente llamase la atención de sus discentes; actualmente existen innumerables formas de comunicar una información, entre ellas los medios de tipo multimedia, los cuales han tenido una gran aceptación en los diferentes sistemas educativos a nivel mundial. La instrucción multimedia se ha fundamentado en las múltiples maneras de comunicar la información a través de los diferentes canales que van surgiendo día a día en la red. En ese sentido, no se necesita tener gran experiencia en programación para tener acceso a variados formatos provenientes del mundo virtual, solo basta que se consideren adecuados para presentar información con fines educativos.

Cuando se hace uso de la multimedia para llevar a cabo la enseñanza, intervienen dos elementos fundamentales que permiten llevar a cabo el mensaje educativo: las palabras y las imágenes, éstas se conjugan con el medio que las transmiten, muchas veces de manera simultánea y dinámica, y son capaces de generar en el espectador o estudiante un aprendizaje mediante un canal dual.Sin embargo, más allá de apoyar la instrucción en estos medios disponibles, se debe estudiar "cómo la mente del individuo adquiere, codifica, recupera y utiliza la información cuando se le presenta en un formato multimodal" (Azzato y Rodríguez, 2011. p. 480).

Mayer (2007) afirma, que los discentes pasan por tres procesos cognitivos fundamentales involucrados con el aprendizaje multimedia, a saber, esto son: 1.- Aquellos involucrados con una base verbal y otra pictórica para recibir la información textual y visual que reciben respectivamente, 2.- El otro proceso referido a la organización de la información recibida; en este caso se crea un modelo para la base verbal y otro para la base visual percibida y 3.- Se integran y construyen nuevas estructuras conceptuales partiéndose de los vínculos que se crean entre ambos modelos.

Esto implica, que cuando un docente decide incorporar recursos multimedia a su proceso de instrucción, se deben considerar previamente si el aprendizaje del estudiante dependerá de la cantidad de los distintos formatos presentados (pictórico, textual, verbal,…); si añadir recursos multimodales a un mensaje textual originalmente puede, realmente, optimizar el aprendizaje y si realmente la estructura de los recursos multimodales se relaciona con la comprensión del mensaje instruccional.

En este caso, esa última consideración deja entrever la necesidad de relacionar directamente las características propias de un proceso de enseñanza (de un contenido matemático en este caso) basado en recursos multimedia, con las particularidades de las diferentes representaciones o registros con los que se pueden hacer ostensibles los objetos matemáticos (Duval, 1999).

Al respecto, Orozco y Labrador (2006) señalan que "una de las observaciones más sensibles en este tiempo es el desarrollo, expansión y extensión de un nuevo tipo de pedagogía y de didáctica matemática, la cual está soportada con la tecnología digital" (p. 85). Entonces, aparentemente la combinación instrucción-digitalización-didáctica de la matemática transformará en poco tiempo la forma decisiva la manera de enseñar, aprender, comprender, aplicar y comunicar los tópicos matemáticos en todos los niveles educativos.

Frente a ese panorama, se debe considerar, que al momento de introducir un recurso multimedia en el aula, es imprescindible poder evaluar su potencial intervención en el quehacer matemático, es decir, sus múltiples implicaciones en la comprensión de esta compleja Ciencia, en palabras de Cirilo y Labrador (op. cit.) las implicaciones de la tecnología digital fusionada con la educción matemática "auguran una metamorfosis espectacular de la educación matemática y que involucra un cambio radical en los contenidos, materiales, símbolos, lenguajes, imágenes, medios, estrategias, procedimientos y metas de enseñanza, aprendizaje y evaluación de la disciplina" (p. 88)

Por otra parte, no hay que olvidar las teorías del aprendizaje que siempre deben ir de la mano en todo proceso de enseñanza, en ese sentido, la teoría del aprendizaje actual que hace juego con los recursos multimedia de enseñanza es la conectivista (Siemens, 2004) ya que toma en cuenta precisamente las particularidades que involucran al aprendizaje con el mundo tecnológico en el que actualmente vivimos.

En base a lo que hasta ahora se ha mencionado, se tienen varios constructos de interés: en primer lugar el importante papel que están asumiendo los recursos multimedia en la enseñanza; en segundo orden están las características propias de los objetos matemáticos que incluyen sus múltiples representaciones, y en tercer lugar, se ubica a la teoría del aprendizaje que se supone podrá abarcar a los dos constructos anteriores, llamada teoría del conectivismo. Se considera pues que a partir del estudio integrado de estos elementos, es posible crear objetos para la enseñanza de la matemática que apunten a un verdadero aprendizaje por parte del estudiante de hoy, es decir, acorde a las exigencias de losnativos digitales que se encuentran en nuestras aulas de clases.

2. Referentes teóricos

2.1 Recursos multimedia

de hacer referencia a lo que son los recursos multimedia, se definirá lo que se considera como "multimedia" que, a pesar de sus múltiples acepciones, es una herramienta que engloba la capacidad de "explicar todas aquellas experiencias que involucran presentaciones gráficas, textuales, animadas y sonoras que, acopladas con la ayuda de algún medio, han sido diseñadas para transmitir un mensaje" (Azzato, op. cit p. 11).

Básicamente, es un multimedia la combinación simultánea de imágenes, palabras y sonidos con el fin de presentar algún material, esto incluye gráficos, imágenes estáticas y/o dinámicas y videos.

Entonces, entenderemos por recursos multimedia todas aquellas herramientas multimedia que pueden combinar textos, imágenes, videos y sonidos con una finalidad educativa, es decir, constituye un recurso de enseñanza y/o aprendizaje.

Según Méndez y otros (2007), existen varias definiciones para "recursos multimedia" que se distinguen entre si dependiendo del campo donde se utilice, de hecho, en algunas oportunidades, puede que los recursos multimedia no estén relacionados con las tecnologías digitales, ya que el uso de esos recursos datan de hace muchos años. De forma general, se consideran "recursos multimedia" a todo sistema que involucra más de un medio de comunicación de forma simultánea cuando transmite una información o un contenido que puede ser educativo o de otra índole, en consecuencia, los recursos multimedia tienen su origen en la comunicación humana, donde pueden intervenir diferentes formas de comunicación simultáneamente.

En 1984 se comienzan a relacionar los recursos multimedia con la computación cuando sale al mercado la computadora "Macintosh" quien por sus particularidades selló la primera posibilidad de lo que conocemos en la actualidad como recursos multimedia; no obstante, no fue sino hasta 1992 cuando, a través de los videojuegos, la tecnología multimedia se hace popular, integrando ya elementos de audio (música, sonido y voz), video, imagen, animaciones y texto paralelamente. (Méndez y otros, op. Cit.)

Pinto (2002) señala que desde ese entonces y hasta la actualidad, cuando se mencionan los recursos multimedia se asocian directamente con la informática, hasta tal punto de que se asume de manera muy exclusiva como la integración de imágenes estáticas o dinámicas, videos, textos y datos almacenados digitalmente.

En el caso que nos atañe, la multimedia será la pantalla de un computador (ampliada por un protector) capaz de presentar textos, gráficos, imágenes, sonidos, entre otros, que pueden ser combinados, por ejemplo, en una presentación realizada en PowerPoint o Prezi, o bien, puede estar contenida en un paquete (ExeLearning) que repose en una plataforma educativa (Osmosis, moodle).

Existen dos tipos de multimedia (Vaughan, 2002), aquellas que son interactivas y las que son lineales; las primeras permiten que el usuario interactúe, el cual tiene posibilidades de realizar diferentes acciones mediante la manipulación de elementos específicos, la segunda se produce en un sentido lineal (de principio a fin), sin que el usuario pueda intervenir. En algunos casos los usuarios pueden ejercer algún control sobre el recurso (pausar, adelantar, detener, reproducir, ampliar, entre otros) pero eso no significa que pueda modificar el recurso. Haciendo referencia de manera específica al ámbito educativo, se puede producir en un aula de clases cualquiera de los dos tipos de multimedia, aunque se recomienda que en las horas presenciales se haga uso de los recursos multimedia lineales (por las limitaciones del tiempo presencial en clases y el limitado número de equipos computarizados) y en las horas de práctica o fuera del contexto escolar se promuevan los recursos multimedia interactivos.

Por otra parte, para concluir esta sección, se hará mención a las fases que se debe seguir cuando en el campo educativo se decide trabajar con recursos multimedia, de acuerdo a Vaughan (op. cit.) existen cuatro fases que acompañan a un proyecto multimedia, éstas son:

- Planificación y costo: Involucra la idea inicial del proyecto, movida por la necesidad educativa existente en el contexto, el contenido y los medios que pueden emplearse (texto, imágenes, audios, videos, entre otros), el desarrollo del plan del entorno multimedia (estructura y sistema de navegación) que va a permitir al usuario navegar libremente por el recurso, se evalúa el tiempo de elaboración de los recursos y los costos de realización.
- Producción: Es la fase de creación del recurso, es decir, la realización de cada una de las tareas planificadas hasta llegar al producto final.
- Prueba: Se prueba que el o los recursos multimedia (s) creado (s) cumplan con los objetivos propuestos, además se evalúa su funcionamiento correcto. Una vez que cumplan con los estándares requeridos, se prepara para su uso masivo.
- Distribución: Se hace llegar el o los recurso (s) creados al usuario final.

2.2Representación en Matemática

En matemática la palabra *representación* tiene un significado especial, puesto, que los objetos matemáticos no tienen existencia en sí mismos, sino que pueden aparecer (al menos parcialmente) a través de alguna representación, que por cierto, muestra "parte" del objeto, pero no todo el objeto en sí. En ese sentido, se puede afirmar que el sujeto no entra en "contacto" con los objetos matemáticos, sino con alguna de sus representaciones. Por ejemplo, el objeto matemático llamado función puede representarse de forma gráfica o mediante una definición de tipo conjuntista o algebraica o mediante un ejemplo representado en diagramas de ven.

Duval (op. cit) afirma que la representación de un concepto matemático puede ser vista de tres formas diferentes y constitutivas que no deben confundirse una con otra, a saber:

- El objeto representado.
- El contenido de la representación, es decir, lo que una representación particular presenta del objeto.
- La "forma" de la representación, o sea, su modalidad o su registro.

Este mismo autor también señala que las representaciones dependen de sistemas de signos (sistemas semióticos) o sistemas basados en redes neuronales o instrumentos físicos (sistemas no semióticos), en palabras de Duval (op. cit)

> Una representación jamás puede ser considerada y analizada sin hacer referencia al sistema a través del cual fue producida. Las especificidades del sistema (físico, orgánico o semiótico) que permitieron la producción de una representación, son las que determinan la relación entre el contenido y el objeto representado. El contenido de las representaciones de un mismo objeto cambia en función del sistema por el cual fueron producidas (p.18-19).

En matemática, se vuelve una exigencia cognitiva necesaria y fundamental el hecho de usar más de un sistema de representación y sus diferentes transformaciones posibles para hacer *ostensible* un concepto matemático y garantizar así el desarrollo del pensamiento matemático en el individuo; es decir, para aprender matemática se hace imprescindible el uso, estudio y comprensión de los sistemas de representación, y esto se debe a la gran variedad de registros que contienen los objetos matemáticos que hacen posible la manera de acceder a ellos y estudiarlos y la posibilidad generada por cada sistema de representación de estudiar características particulares de los objetos que de otra forma no fuese sido posible, lo que indica que mientras más sistemas de representaciones se utilice para acceder al objeto matemático, el conocimiento que te obtendrá será más complejo y potente.

Según Duval (op. cit.) existe una clasificación de los diferentes tipos de registros que pueden existir para dar a conocer las características de los objetos matemáticos, estos pueden ser de tipo discursivos (lenguaje natural) o no discursivo (lenguaje gráfico), también pueden darse *transformaciones* dentro de un mismo tipo de registro o *conversiones* cuando se usan diferentes registros para denotar un mismo objeto.

2.3 Teoría conectivista del aprendizaje

El conectivismo es una teoría del aprendizaje de reciente data que intenta explicar y describir cómo los individuos aprenden en la era digital. Unos de sus precursores es Siemens (2004) quien define al conectivismo como una integración de los principios examinados por la teoría del caos, redes, complejidad y auto-organización, asegurando además que el aprendizaje ocurre dentro de ambientes difusos cuyos elementos centrales cambian constantemente.

Para el conectivismo, las decisiones que se toman actualmente se fundamentan en principios que rápidamente cambian ya que de forma continua se adquiere nueva información. Una de las premisas de esta teoría, es saber diferenciar la información relevante de la que no lo es, también es importante reconocer cuándo una nueva información influye en el contexto basado en decisiones tomaras anteriormente.

Así, entre sus principios están: la diversidad de opiniones influyen en el aprendizaje y el conocimiento, el aprendizaje consiste en conectar nodos o fuentes de información especializadas, el aprendizaje puede estar depositado en dispositivos no humanos, aquello que se sabe no es tan crítico como la capacidad de saber más, alimentar y mantener las conexiones se hace necesario para facilitar el aprendizaje continuo, es una habilidad esencial el poder visualizar conexiones entre áreas, ideas y conceptos; estar actualizado constantemente (conocimiento preciso y actual) es la finalidad de las actividades conectivistas de aprendizaje; por último, la toma de decisiones es, en sí misma, un proceso de aprendizaje.

En el conectivismo, el individuo es un componente esencial en el aprendizaje, el conocimiento personal está constituido por una red, la cual alimenta a instituciones y organizaciones, y estás a su vez retroalimentan a la red, generando nuevo aprendizaje para los individuos. Este ciclo permite que los sujetos que aprenden estén actualizados en algún área de interés mediante las conexiones que hayan formado.

3. Reflexiones finales

Después de estar al tanto de los elementos teóricos esenciales que componen los recursos multimedia, las representaciones en matemática y la teoría conectivista del aprendizaje, no queda más que integrar los elementos a fin de determinar si el resultado de esa fusión es conveniente para optimizar los procesos de enseñanza y, en consecuencia, de aprendizaje de la matemática.

Por una parte, los recursos multimedia tienen una importante aceptación en la enseñanza, ya que muchos investigadores afirman que la redundancia (estimular varios sentidos de manera simultánea, presentando una misma información en formatos distintos, por ejemplo, textual y gráficamente) es imprescindible para lograr el aprendizaje; además, permite codificar la información en diferentes formatos, así los profesores pueden organizar, estructurar y relacionar los signos y los modos en que serán mostrados de una forma más sencilla gracias al uso de los recursos multimedia. Estos recursos nos permiten trascender la realidad física tal y como la conocemos, ya que a través de ellos se pueden explicar, por ejemplo, fenómenos que no se ven a simple vista o que no tienen lugar fuera de la virtualidad. En otras palabras, los recursos multimedia nos abre un mundo de posibilidades que de otra forma no fuese posible, esto deja entrever el inmenso potencial que poseen y cuan útiles pueden ser en el campo educativo.

Por otra parte, hemos visto cómo las representaciones en matemática juegan un papel fundamental para su enseñanza, ya que hacen posible la "aparición" de los objetos matemáticos y permite así la posibilidad de estudiarlos a profundidad; en ese sentido, el empleo de la tecnología y específicamente de los recursos multimedia, expanden la posibilidad de representar múltiples registros de representación de un objeto matemático de forma dinámica, y este es un punto crucial desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática ya que los sistemas de representación son un eje central para que el sujeto pueda comprender los objetos matemáticos y sus características esenciales.

Por último y no menos importante, se tiene que sumar a esta enseñanza de la matemática (para lo cual tomamos en cuenta las representaciones de los objetos y el potencial tecnológico para abordar tales representaciones) la forma en cómo el estudiante de hoy aprende cuando sus sentidos están siendo bombardeados constantemente con tecnología, para lo cual se ha tomado en cuenta la teoría conectivista de aprendizaje que se fundamenta en la capacidad que tienen el individuo de aprender lo que vaya necesitando día a día en esta era digital; proponiendo como reto que el conocimiento debe activarse en el sitio donde se necesite y que el sujeto pueda conectarse con fuentes de información fiable cuando lo necesite pero no lo posea al momento, así el conocimiento crece y evoluciona constantemente y tener acceso a al conocimiento y la información que se necesita se vuelve más importante para el aprendiz que el conocimiento que ya posee.

Se trata entonces de *activar* mecanismos que induzcan al aprendiz a apoderarse de los objetos matemáticos mediante la presentación de múltiples representaciones que serán posible gracias al uso de los recursos multimedia, entendiendo los escenarios actuales en los que hace vida ese aprendiz, o sea, reconociendo el constante cambio que sufre la sociedad de hoy donde el aprendizaje ha dejado de ser una actividad interna e individual. Sin duda alguna, lo que se propone es un reto al docente de matemática que aprendió y se formó bajo mecanismos totalmente distintos de enseñanza; pero que ya se vuelve ineludible ante la cultura digital que nos arropa y no da señales de terminar pronto.

Referencias

Azzato, M. y Rodríguez, J. (2011). Relación entre la estructuración multimedia de los mensajes instructivos y la comprensión de libros electrónicos. [en línea] disponible en http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/32138/02.AZZATO_ANEXOS.pdf

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Universidad del Valle. Grupo de Educación Matemática. (pp. 199 – 314)

Méndez, O. y otros (2007). *Recursos digitales y multimedia*. Tecnología de la información. México: UNAM. [en línea] disponible en http://ru.ffyl.unam.mx:8080/jspui/bitstream/10391/955/1/Ver%C3%B3nica%20M%C3%A9ndez%20-%20Lizet%20Ruiz%20-%20Hugo%20Figueroa%20-%20Recursos%20digitales%20y%20multimedia.pdf

Orozco, C. y Labrador, M. (2006). *La tecnología digital en Educación: Implicaciones en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.* Revista THEORIA: Ciencia, arte y humanidades. [en línea] disponible en http://redalyc.uaemex.mx/pdf/299/29915209.pdf

Pinto, M. (2002). *Indización y resumen de documentos digitales y multimedia: técnicas y procedimientos*. Gijón, Asturias: Trea.

Siemens, G (2004) Connectivism: A learning theory for a digital age. [en línea] de http://www.elearnspace.org/Articles/connectivism.htm

Vaughan,T. (2002). Multimedia: manual de referencia. México: Osborne McGraw-Hill.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Modelo didáctico para la enseñanza de la demostración de proposiciones matemáticas

Carlos **Díez** Fonnegra
Programa de Matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz
Colombia
carlos.diez@konradlorenz.edu.co
Alejandro **Fandiño** Benavides
Programa de Matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz
Colombia
alejandro.fandinob@konradlorenz.edu.co
Fabio Alejandro **Jiménez** Chacón
Programa de Matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz
Colombia
fabioa.jimenezc@konradlorenz.edu.co

Resumen

Demostrar proposiciones es una de las competencias más importantes en la formación de un matemático, aun así, en muchos casos los profesores no utilizan de manera deliberada modelos didácticos para su enseñanza, aunque usen algunas prácticas pedagógicas aisladas de manera consciente o inconsciente. El presente trabajo propone un modelo didáctico para la enseñanza de la demostración, estructurado a partir de tres tensores curriculares: el nivel de autonomía de los estudiantes, el nivel de desarrollo del pensamiento relacionado con la demostración y las etapas para la demostración matemática. Para la formulación del modelo se llevó a cabo una investigación descriptiva de las prácticas pedagógicas que utilizan algunos profesores para la enseñanza de la demostración, dichas prácticas y otras prácticas propuestas se articularon en un sistema que orienta la enseñanza de esta competencia.

Palabras clave: demostración matemática, didáctica de la demostración, prácticas pedagógicas, tensores curriculares, pensamiento matemático avanzado.

Introducción

Los procesos de enseñanza-aprendizaje en el Programa de Matemáticas de la Fundación

Universitaria Konrad Lorenz están basados en un modelo didáctico orientado al desarrollo de competencias. En este sentido, este modelo clasifica las competencias en transversales y específicas, así:

Competencias transversales:

- Lectura
- Escritura
- Exposición verbal de ideas
- Trabajo en equipo e interdisciplinar

Competencias específicas:

- Demostración de proposiciones matemáticas
- Modelado matemático
- Simulación matemática
- Programación en lenguajes computacionales

Para el desarrollo de estas competencias, las asignaturas que constituyen el Programa de Matemáticas se han clasificado de la siguiente forma:

- Asignaturas básicas
- Asignaturas profesionales demostrativas
- Asignaturas profesionales aplicativas
- Asignaturas profesionales teóricas

En cada uno de estos tipos de asignaturas se privilegia el desarrollo de ciertas competencias. En particular, en las asignaturas profesionales demostrativas la competencia central es la demostración de proposiciones matemáticas.

La demostración de proposiciones es una competencia esencial en el quehacer del matemático (Grabiner, 2009), inclusive en la formación escolar, como lo propone el documento Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (NCTM, 2000). Sin embargo, se han detectado dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la demostración, como las relatadas en D'Andrea & Vázquez (2014), Fiallo, Camargo & Gutiérrez (2013) y Martínez Recio (1999), entre otros.

Debido a lo anterior, se desarrolló una investigación que tiene por objetivo proponer, implementar y evaluar un modelo didáctico para la enseñanza de la demostración, que sea parte integral del modelo pedagógico del Programa de Matemáticas.

De esta investigación, se han realizado dos fases: una primera fase fue la realización de un estudio exploratorio sobre las prácticas en la enseñanza de la demostración que los profesores del Programa manifiestan consciente o inconscientemente en sus clases. La metodología para este estudio fue la observación de clases de las asignaturas profesionales demostrativas, con el fin de identificar dichas prácticas de enseñanza y clasificarlas en tres categorías conceptuales relacionadas con la enseñanza de la demostración. Estas categorías se definen a continuación en el marco teórico. Una segunda fase fue la proposición, con base en la teoría, de otro conjunto de prácticas pedagógicas y su articulación de acuerdo con los tres tensores propuestos: nivel de autonomía de los estudiantes en las prácticas pedagógicas, nivel de desarrollo de su pensamiento relacionado con la demostración y las etapas del proceso de demostración. Queda por realizar una implementación piloto de este modelo para hacer su validación y ajuste.

Marco teórico

Las tres categorías en las que se clasificaron las prácticas pedagógicas son:

- Didáctica

Para Bravo y Arrieta (2012), la enseñanza de la demostración matemática se debe realizar por medio de estrategias y herramientas didácticas que permitan obtener un mejor proceso de aprendizaje. Además, según Ortiz y Jiménez (2006), "la demostración como elemento en la didáctica de la matemática está estrechamente ligada al desarrollo de habilidades mentales y de pensamientos imprescindibles en la formación integral de los estudiantes", para esto:

Los docentes deben escoger las demostraciones a realizar en clase de manera que los estudiantes puedan ver sus resultados directos, la importancia en la práctica matemática y de las otras disciplinas, para que, el estudiante esté en un proceso activo de enseñanza en la demostración matemática, por esto, el docente debe aplicar didácticas convenientes basadas en su experiencia e investigaciones existentes sobre el tema (Ortiz & Jiménez, 2006, p.184).

- Epistemología

Según Fiallo (2013), la epistemología en la enseñanza de la demostración matemática se encarga de descubrir la naturaleza de la demostración y su dificultad relacionada con el conocimiento matemático, de modo que los estudiantes creen conciencia de que la demostración ha sido expuesta desde diferentes puntos de vista por varios matemáticos, de acuerdo a la escuela de pensamiento, las comunidades académicas, las diferentes culturas y épocas históricas, por lo tanto, el punto de vista de la epistemología en demostración matemática busca responder a interrogantes como:

¿Qué es la demostración y cuáles son sus funciones?, ¿cómo son construidas, verificadas y aceptadas las demostraciones en las comunidades de matemáticos?, ¿cuáles son algunas de las fases críticas en el desarrollo de la demostración en la historia de las matemáticas? (Fiallo, Camargo, & Gutiérrez, 2013), entre otras relacionadas.

- Semántica y semiótica

En la formación del matemático esta como competencias principales: la demostración matemática y la resolución de problemas, ya que son inherentes en su preparación, sin embargo, también debe ir ligado en su aprendizaje la escritura, puesto que es necesario para la transmisión de sus ideas, por lo tanto, según Sanabria (s.f) en la actividad matemática:

> se distinguen dos componentes principales: la escritura y los procesos para realizarla. El primer componente se debe caracterizar por su rigurosidad y formalidad. El otro componente requiere educar la intuición y el ordenamiento de ideas. Estos dos

componentes son llamados: sintáctico y semántico. (p.40)

Durante la investigación se notó que hay una relación entre las categorías conceptuales, por lo tanto, se propone un diagrama que la describe:

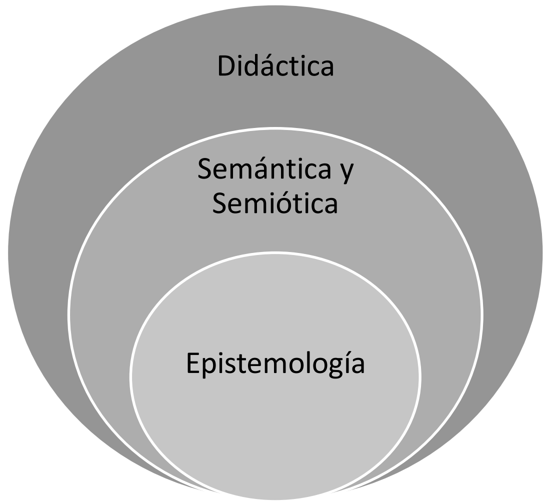


Figura 1. Relación entre las categorías conceptuales marco de las prácticas pedagógicas en demostración.

Este diagrama muestra cómo a través de la historia, el ser humano ha aprendido (separado por las diferentes culturas, lenguas, etc.) a abstraer información del lugar que lo rodea, como abunda Finol (2004): "El ser humano vive en un continuo proceso de conocimiento. Desde todos los ámbitos donde el hombre se encuentra recibe un flujo ininterrumpido de señales, que sobresaturan sus capacidades perceptivas".

En el texto anterior, se menciona el concepto *señales* como base para los signos semióticos, lo que describe el hecho de que el hombre ha mantenido un registro de sus conocimientos a través de símbolos o palabras, que además son base para la dotación de sentido, es decir, para la semántica de las ideas.

Luego, así como la epistemología es importante, su relación con la semiótica y semántica también toma un papel fundamental para la didáctica, como asegura García (2012): "la didáctica y la semiótica se atenazan cuando se vincula el concepto de didáctica al de educación".

Aparte de las anteriores categorías conceptuales, se concluyó que las prácticas pedagógicas se pueden clasificar según los niveles de autonomía del estudiante, así:

Nivel de comprensión: momento en que el estudiante está aprendiendo los objetos matemáticos, su significado, procedencia y estructura. En este nivel, el profesor dirige las prácticas que los estudiantes desarrollan.

Nivel de conexión: en este el estudiante interactúa con el profesor en las prácticas pedagógicas. En este nivel, los estudiantes son más activos en su aprendizaje, participando en clase de diferentes maneras.

Nivel de aplicación: acá el estudiante es fundamentalmente autónomo en el desarrollo de ejercicios.

Otro tensor fundamental del Modelo Didáctico para la Enseñanza de la Demostración de Proposiciones Matemáticas (MDPED) son los niveles de desarrollo del pensamiento orientado a la demostración. Para definir estas etapas, se tomaron en cuenta las propuestas de Balacheff y Boero.

Balacheff propone estos niveles desde el punto de vista de las prácticas que tienen los estudiantes en matemáticas, apartándose de la perspectiva lógica, debido a que considera que hay demostraciones pragmáticas y conceptuales (Balacheff, 1988, p. 217), y a partir de lo anterior, considera cuatro niveles que son: el empirismo ingenuo, el experimento crucial, el ejemplo genérico y el experimento de pensamiento.

Por otro lado, Boero propone dos actividades en el aprendizaje de la demostración: el desarrollo de conjeturas y las pruebas formales matemáticas, y propone desarrollarlas por medio de seis etapas: producción de una conjetura, formulación de la proposición, exploración del contenido, selección de argumentos teóricos coherentes, organización de los argumentos, acercamiento a una prueba formal

De las propuestas anteriormente mencionadas, se sintetizaron cuatro etapas para realizar una demostración de una proposición matemática:

1. Producción de una conjetura: consiste en afirmar la verdad de un resultado después de verificar varios casos. Este medio de prueba, muy rudimentario, es una de las primeras formas del proceso de generalización (Boero,1999)
2. Exploración del contenido: implica identificar los argumentos apropiados para la validación, relacionados con la teoría de referencia, y establecer posibles vínculos entre ellos (Boero, 1999).
3. Elaboración de argumentos teóricos de la prueba: consiste en explicitar las razones de la verdad de una afirmación mediante operaciones o transformaciones sobre un objeto que no existe por derecho propio, sino como una característica representativa de su clase (Balacheff, 1988)
4. Formalización de la prueba: en esta etapa se organizan los argumentos encadenados en una prueba aceptable según los estándares matemáticos actuales (Boero, 1999).

Una vez definidos los tres tensores: categorías conceptuales (didáctica, semántica y semiótica y epistemología), niveles de autonomía del estudiante (comprensión, conexión y aplicación) y las etapas de demostración (producción de una conjetura, exploración del contenido, argumentos teóricos en la prueba y formalización de la prueba), se ubicaron las prácticas pedagógicas en el marco conformado por estos, de la siguiente manera:

Tabla 1

Sistema de prácticas pedagógicas del modelo

Etapas de	**Niveles de autonomía del estudiante**

demostración	Comprensión	Conexión	Aplicación
Producción de una conjetura.	SS1, SS2, E1, D1, D2.		
Exploración del contenido.	SS3, SS4, SS5, E2, E3, D3, D4.	SS7, E8, D10.	
Argumentos teóricos en la prueba.	E4, E5, E6, D5, D6, D7.	SS8, SS9, SS10, D11, E9, E10, D12, D13, D14, D15.	D17, D18, D19, D20, D21, D22, D23, D24, D25.
Formalización de la prueba.	SS6, E7, D8, D9.	SS11, SS12, D16.	E11, D26, D27, D28, D29, D30, D31, D32.

Fuente: Elaboración teórica.

Nota: los códigos que figuran en la tabla corresponden a las prácticas pedagógicas recolectadas en la investigación descriptiva, pero por espacio en este documento no se pueden incluir.

Conclusiones

Al registrar cada una de las prácticas pedagógicas observadas en las clases, se notó que una misma práctica podría pertenecer a varias categorías de análisis, lo que demuestra la relación profunda entre dichas categorías.

La categoría 'epistemología' concreta la necesidad de basarse en la historia y en responder interrogantes en la forma como se desarrolló el conocimiento matemático desde los diferentes puntos de vista. La categoría 'semántica y semiótica' se genera por la necesidad de reconocer las diferentes formas de escribir un objeto matemático y también las diferentes formas de concebirlo, con el fin de desarrollar la capacidad de visualizar y dar sentido a dichos objetos, mejorando la comprensión y escritura de las proposiciones. La última categoría, la 'didáctica', atiende las características de los objetos matemáticos y su articulación en las prácticas pedagógicas.

Durante la observación de clases se notó que los profesores son inconscientes de algunas prácticas que emplean. Esto puede ocurrir por diferentes factores, entre ellos que no poseen un manual de prácticas de enseñanza, no se basan en un programa pedagógico de enseñanza de la demostración matemática o que durante su formación como estudiantes mecanizaron prácticas de enseñanza de sus profesores, de manera involuntaria, entre otros.

Después de realizar la ubicación de las prácticas pedagógicas en el modelo didáctico, se puede notar que:

- En el nivel de comprensión, las prácticas más utilizadas son aquellas que pertenecen a las categorías conceptuales de semántica y epistemología, debido a que los estudiantes están empezando a reconocer los objetos matemáticos. Además, se puede observar que este nivel está relacionado con las cuatro etapas de demostración.
- En los niveles de comprensión y conexión se tienen prácticas de todas las categorías conceptuales, aun así, para el nivel de conexión los estudiantes ya superaron la producción de una conjetura y tienen clara la estructura de los objetos matemáticos.

- Para el nivel de aplicación, las prácticas pedagógicas a emplear son únicamente de la categoría conceptual de la didáctica, también se encontró que en este nivel se desarrollan la tercera y cuarta etapas de la demostración.
- Al finalizar la ubicación de las prácticas se evidencia organización diagonal en la tabla, que indica que a medida que el profesor avanza en los niveles de enseñanza, el estudiante adquiere una autonomía en el desarrollo de las prácticas.

Referencias y bibliografía

Ávila Godoy, J., Parra Bermúdez , F., & Ávila Godoy, R. (2012). Epistemología y didáctica de la matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 775-783.

Balacheff, N. (1988): Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. Þn Pimm, D. (ed.), Mathematics, teachers and children (Hodder & Stoughton: Londres), p.16-235.

Blažková, R. (2013). *Didactics of mathematics.* Brno.

Boero,P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof. Volume 8.

Bravo, L., & Arrieta, J. J. (2003). Una estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas: Resultados de su implementación. *Investigación en educación matemática : séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 153-160.

Calle Palomeque, C. E. (Septiembre de 2013). *Influencia de la Semántica en el Aprendizaje de las Matemáticas en el Segundo Curso de Bachillerato del Colegio Beningo Malo.* Cuenca: Universidad de Cuenca Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación.

Campos, A. (2005). Acerca de la epistemología de la matemática. *XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética* (págs. 93-95). Bogotá: Carlos Julio.

D'Andrea, R. E., & Sastre Vázquez, P. (2014). ¿Cómo generar habilidad para demostrar? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 471-479.

Fiallo, J., Camargo, L., & Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integración*, 181-205.

Finol, J. E. (2004). Semiotica y epistemologia-diferencia, significación y conocimiento. *Revista venezonala de información, Tecnologia y Conocimiento*, 22-32.

García de Molero, Í. (2012). Semiótica y didáctica. Relaciones pensamiento/semiosis/mundo en la construcción de aprendizajes significativos en el aula Preescolar . *Omnia* , 11-24.

Garzon Carreño, M. (2015). Desarrollo y comprensión de la semiótica matemática a partir de la semiótica linguística y el lenguaje común. Bogotá: Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas.

Grabiner, J. V. (2009). Why proof? some lessons from the history of mathematics. *Proof and proving in mathematics education* (pág. 302). Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Komensky, J. A. (1947). *Didaktika analytická.* Praha.

Marcano, Noraida, & Reyes, W. (3 de Diciembre de 2007). Categorías epistemológicas para el estudio de los modelos de formación docente. *Multiciencias, 7*(3), 293-307.

Martínez Recio, Á. (Junio de 1999). Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática. España: Universodad de Granada.

MEN. (2006). *Estandares Basicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Revolución Educativa Colombia Aprende.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA, EE.UU.

Ortíz, H., & Jimenez, F. (2006). La demostración elemento vivo en la didáctica de la matemática. *Scientia et Technica*, 237-240.

Recio, Á. M. (2001). La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica . *Quinto Simposio de la sociedad española de investigación en educación en matemática,* (pág. 17). Almería.

Sanabria Brenes, G. (s.f). Resolución de problemas geométricos. 10.

Sastre, P. (2014). ¿Cómo generar habilidad para demostrar?

Transición del bachillerato a universidad en matemáticas desde la visión del docente

Luz Marina **Rodríguez-Cisneros**
Pontificia Universidad Católica del Ecuador – Sede Ibarra
Ecuador
lmrodriguez1@pucesi.edu.ec
Josefa **Perdomo-Díaz**
Universidad de La Laguna
España
jperdomd@ull.edu.es

Resumen

En este trabajo se presentan algunos resultados parciales de una investigación acerca de la transición entre bachillerato (educación secundaria) y universidad (educación terciaria). Se trata de un estudio exploratorio, con carácter de diagnóstico, cuyo objetivo es analizar qué elementos asocian los docentes universitarios al éxito o al fracaso en asignaturas del área de matemáticas en la transición del colegio a la universidad. Esta investigación se realizó en la Pontificia Universidad Católica del Ecuador – Sede Ibarra (PUCE-SI). Los datos se recogieron a partir de la grabación en video de un grupo focal en el que participaron seis docentes del área de matemáticas. Se realizó un análisis de contenido en el que se identificaron tres tipos de factores: actitudinales, aptitudinales y curriculares.

Palabras clave: transición, matemática, educación secundaria, bachillerato, educación terciaria, universidad.

Introducción

Diversos estudios indican que la transición de bachillerato (educación secundaria) a universidad (educación terciaria) puede ser problemática para los estudiantes, llegando en muchos casos a provocar la deserción durante el primer año de universidad (Bardelle y Di Martino, 2012; Di Martino y Gregorio, 2018; Gueudet, 2008). En la mayoría de países de Latinoamérica, la tasa de deserción en estudios universitarios está sobre el 50% (Rubio Gómez, Tocaín Garzón, y Mantilla Guerra, 2012). En el caso de Ecuador, entre un 12% y un 30% de los alumnos y alumnas abandona en los tres primeros semestres de estudio en la universidad

(Fernández Orrantia y Silva, 2014).

De acuerdo a González (2005), algunos de los factores que están relacionados con la deserción en la universidad son los conocimientos iniciales deficientes, el rendimiento académico insuficiente y la carencia previa en estrategias de aprendizaje en matemáticas.

El acceso a las universidades públicas en Ecuador depende del puntaje obtenido en un examen que aplica el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEVAL) a los estudiantes de último año de bachillerato, denominado Ser Bachiller. La nota obtenida en este examen representa el 30% del promedio general para titulación, además de permitir la postulación a las universidades públicas. El examen Ser Bachiller evalúa aptitudes y destrezas en cuatro dominios: matemático, lingüístico, científico y social. En cuanto al dominio matemático, se evalúa la organización y análisis de información, la resolución de problemas estructurados, el uso de relaciones y patrones, razones y proporciones y relaciones entre variables y sus representaciones. Las universidades privadas cuentan con sistemas de admisión con exámenes de ingreso con criterios similares a los establecidos por el INEVAL.

Los resultados de estas evaluaciones en el ciclo 2016-2017 a nivel nacional, muestran un nivel de 7,33 sobre 10, en el área de matemáticas, lo que según la escala establecida por el INEVAL, correspondería a un nivel elemental. El estudio muestra porcentajes de éxito inferiores al 50% en grupos temáticos como: resolución de problemas estructurados (46%), relaciones entre variables y sus representaciones (41%), organización y análisis de información (40%) y razones y proporciones (37%), lo que indicaría niveles insuficientes en el desarrollo de ciertas destrezas matemáticas en los estudiantes que completan el bachillerato (INEVAL, 2017).

Además de los conocimientos disciplinares, la transición entre el último año de secundaria y el primer semestre de universidad, puede resultar compleja por muchos otros factores ya que los estudiantes sienten la “incertidumbre” de dejar el entorno conocido de secundaria y enfrentarse al entorno universitario, que es desconocido en cuanto al sistema de enseñanza, recuperación académica y evaluación, entre otros (Gueudet, 2008).

Para identificar los factores que los docentes de las asignaturas de matemáticas de primer año de universidad relacionan con el éxito o el fracaso en la transición de bachillerato a universidad se realizó un estudio exploratorio en la Pontificia Universidad Católica del Ecuador – Sede Ibarra (PUCE-SI), en donde se desarrolló un grupo focal con seis docentes del área de matemáticas.

Marco conceptual

Tal y como hemos señalado, el proceso de transición de bachillero a universidad está asociado a factores de tipo cognitivo y afectivo. El dominio cognitivo incluye las componentes de la competencia matemática que integran la comprensión conceptual con la fluidez procedimental, la competencia estratégica, el razonamiento adaptable y la disposición productiva hacia la disciplina (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001).

Diversas investigaciones señalan que uno de los elementos que influye en la transición entre bachillerato y universidad es la caracterización que se hace de los temas matemáticos; mientras a nivel superior se hace énfasis en aspectos formales como la demostración, en el nivel secundario se prioriza los cálculos operativos (Liebendörfer y Schukajlow, 2017; Rach y Heinze, 2017). Para el estudiante, el cambio de una matemática basada en procesos de cálculo, a un enfoque en el desarrollo de la comprensión y actividad matemática puede ser complejo, por lo que se requiere de estrategias que permitan modificar la forma en que los estudiantes se enfrentan a la disciplina. En este cambio de perspectiva entran en juego elementos de tipo cognitivo y también afectivo, relacionados con las creencias, actitudes y emociones de los estudiantes frente a la disciplina (Gil, Blanco, y Guerrero, 2005; Gómez-Chacón, 2009; McLeod, 1992; Schukajlow et al., 2012).

En cuanto al domino afectivo, éste se considera estructurado en torno a tres dimensiones fuertemente interrelacionadas y relacionadas a su vez con el dominio cognitivo: emociones, actitudes y creencias (McLeod, 1992). En el ámbito de las emociones, puede distinguirse entre emociones globales, hacia la disciplina matemática, y locales, hacia actividades concretas de la matemática relacionadas con alguna parte específica de la disciplina (álgebra, geometría, etc.) o con algún tipo concreto de actividad como la resolución de problemas o la argumentación, etc (Goldin, 2002).

En cuanto a las creencias, Eynde, Corte y Verschaffel (2006) distinguen entre creencias sobre el objeto (en este caso las Matemáticas), el contexto y el propio individuo. Las creencias sobre el propio individuo incluyen la visión de los estudiantes de sí mismos como aprendices de Matemáticas, dimensión en la que Roesken, Hannula y Pehkonen (2011) han identificado siete dimensiones: sus motivaciones hacia las Matemáticas, sus sentimientos mientras estudian la materia, sus creencias sobre las Matemáticas como disciplina, su autopercepción sobre su eficacia como aprendices, su contexto académico y su apoyo familiar.

Otro elemento que diferencia las dos etapas educativas consideradas en esta investigación es la formación de los docentes. En Ecuador, la mayoría de profesores de bachillerato tienen formación en Ciencias de la Educación, a nivel de licenciatura o maestría, y disponen de un currículo con base didáctica (con énfasis en procesos de enseñanza-aprendizaje) para la asignatura de matemática; mientras que en la universidad los docentes tienen titulación en áreas especializadas de la disciplina y trabajan con currículos con una fuerte base epistemológica, que pone el énfasis en la estructura de la disciplina científica.

Metodología

Se trata de un estudio exploratorio, de tipo cualitativo, centrado en el análisis del caso de la Pontificia Universidad Católica del Ecuador, universidad privada más antigua del país, datos históricos muestran porcentajes de deserción entre 13% y 33% en su Sede Ibarra (Rubio Gómez, Tocaín Garzón, y Mantilla Guerra, 2012). En los semestres iniciales de las carreras de la Sede Ibarra (PUCE-SI), según los informes de notas finales de entre los años 2012 y 2017 que constan en Secretaría General, las asignaturas del área de matemáticas (matemática, lógica matemática, geometría) muestran índices de pérdida entre un 27% y hasta un 76%.. Rubio Gómez et al. (2012) señalan que estos datos de deserción y reprobación en asignaturas de matemáticas en primeros niveles, estarían relacionados con la transición del bachillerato a universidad.

Los datos se recogieron a partir de un grupo focal con los docentes de matemática de la PUCE-SI realizado en mayo del 2018. Se realizó una invitación a los diez docentes del área de matemáticas que pertenecen a la Escuela de Ingeniería, de los cuáles aceptaron seis docentes. Los participantes tienen entre tres y diez años de experiencia como docentes universitarios de asignaturas del área de matemáticas; dos de ellos fueron además docentes en educación secundaria.

La sesión del grupo focal tuvo noventa minutos de duración y fue grabada en video. Para su ejecución se diseñó previamente un protocolo en el que se establecieron guías para su desarrollo. El grupo focal comienza con la explicación a los participantes de la finalidad de la actividad. A continuación se planteó como pregunta abierta: ¿*Qué factores consideran relevantes en la transición de la matemática del bachillerato a la matemática universitaria*? y se permitió a los participantes que respondan desde su propia experiencia con la finalidad que la información emergiera de ellos mimos. Posteriormente a los participantes se les preguntó sobre el nivel de relevancia en una escala de alto, medio o bajo, en función de su experiencia docente sobre los factores relacionados con las características individuales relacionadas al dominio afectivo identificado por McLeod (1992), aspectos sobre la caracterización de la matemática en secundaria y universidad mencionados por Liebendörfer y Schukajlow (2017) así como por Rach y Heinze (2017) y elementos del dominio cognitivo mencionados por Kilpatrick, Swafford y Findell (2001). Con esta técnica se obtuvo información para contrastar los factores de investigaciones previas con aspectos que corresponden al contexto de los estudiantes de la PUCE-SI.

A partir de la información del grupo focal se realizó un análisis de contenido donde se mencionaron tres tipos principales de factores: la actitud, la aptitud y el currículo. El primer factor (actitud) está relacionado con una de las dimensiones del dominio afectivo mencionadas por McLeod (1992), el segundo factor (aptitud) está en relación con el dominio cognitivo que menciona Kilpatrick, Swafford & Findell (2001) mientras que el último factor (currículo) corresponde a la organización de la matemática mencionada por Liebendörfer y Schukajlow (2017). Esta relación se estableció dado que los participantes no consideraron todos los aspectos de las dimensiones afectiva y cognitiva como relevantes para la transición y enfatizaron en aspectos puntuales mientras que el factor de organización de la matemática la asociaron con el currículo de la asignatura.

Análisis de datos

Para el análisis de contenido se organizó los aportes de los participantes en los factores que fueron identificando y se incluyó referencias textuales de sus participaciones. Todos los docentes son identificados con seudónimos.

Factor actitudinal

En cuanto a las características individuales del dominio afectivo, en la tabla 1 se muestran los aspectos que los participantes señalaron que tienen alta relevancia como son el interés, los hábitos de estudio y los valores, elementos que se identificaron como factores actitudinales

Tabla 1

Factores actitudinales identificados

Factor del estudiante	Relevancia asociada por el docente					
	Germania	Pietro	Carlos	Felipe	Rubén	César
Interés por aprender	x	x	x	x	x	
Hábitos de estudio		x	x	x		
Vivencia de valores			x	x	x	

Fuente: Grupo focal PUCE-SI. 2018.

Los docentes participantes coinciden en que los aspectos actitudinales podrían ser más relevantes incluso que aspectos cognitivos, siendo especialmente mencionado el interés, considerado dentro del dominio afectivo (McLeod, 1992). Por ejemplo, Germania señala que "cuando se tiene deficiencias (conocimientos) se puede superar con aspectos actitudinales (interés)" mientras que Felipe señala que "los docentes fallamos al no utilizar la tecnología para despertar el interés en el estudiante". Adicionalmente, Pietro menciona que "la falta de organización de tiempo no permite desarrollar capacidades analíticas", lo que estaría relacionado con la necesidad de contar con hábitos de estudio. Por otro lado, Carlos menciona que el "modelo aplicado en educación secundaria es demasiado paternalista" y provoca "pérdida de valores". En su reflexión, indica que "la educación es integral, tanto valores como conocimientos" por lo que el modelo de secundaria estaría "provocando actitudes negativas incluso en hábitos de estudio", afirmación con la que concuerda Rubén.

Factor aptitudinal del estudiante

Como factor aptitudinal, en la tabla 2 se enlistan aspectos que los participantes identifican como relevantes en cuanto al dominio cognitivo del estudiante.

Tabla 2

Factores aptitudinales asociados a los estudiantes

Factor del estudiante	Relevancia asociada por el docente					
	Germania	Pietro	Carlos	Felipe	Rubén	César
Lectura comprensiva	x					
Conocimientos previos		x	x	x	x	
Competencia estratégica		x	x	x		
Resolución de problemas	x		x	x	x	

Fuente: Grupo focal PUCE-SI. 2018.

En cuanto a este factor, Germania menciona que "los estudiantes no saben leer", aspecto necesario para "traducir el lenguaje natural a lenguaje simbólico" y resolver problemas. En este sentido, Pietro hace referencia al uso de estrategias y al hecho que en la universidad "se profundiza en áreas específicas de la matemática". Por otro lado, Carlos menciona que "en bachillerato ya se trabaja en resolución de problemas más allá de procesos memorísticos" pero que "no se está haciendo lo suficiente [en secundaria] para que los estudiantes estén en igualdad de condiciones para la universidad". En este aspecto Rubén concuerda indicando que "los estudiantes suelen ser memorísticos" y que se les dificulta la aplicación en resolución de problemas, siendo estos aspectos parte del dominio cognitivo mencionado por Kilpatrick, Swafford y Findell (2001).

Factor aptitudinal del docente

En la tabla 3 se indican elementos como el dominio científico y la formación didáctica como destacados en cuanto al dominio cognitivo por parte del docente.

Tabla 3

Factores aptitudinales relacionados con el docente

Factor del docente	Relevancia asociada por el docente					
	Germania	Pietro	Carlos	Felipe	Rubén	César
Dominio científico	x	x	x	x		x
Formación didáctica	x	x	x			x

Fuente: Grupo focal PUCE-SI. 2018.

Los participantes también hicieron referencia al rol del docente. Germania, por ejemplo, indica que además de la formación especializada, se requiere una formación en didáctica, pues afirma “se puede saber mucho de una asignatura, pero si no se sabe cómo enseñarla, de nada vale”, con lo concuerda Pietro. Desde otro punto de vista, Carlos menciona en los últimos años a nivel de bachillerato “ya no se exige la titulación en docencia y esto ha afectado la calidad de la educación”, mientras que, en la universidad si bien se requiere el “dominio del conocimiento científico, también se requiere formación especialmente en didáctica” por lo que considera que este aspecto es sumamente importante en la transición. En contraposición, Felipe afirma que no sólo se requiere la formación en educación, sino más bien “el gusto por enseñar” mientras que César indica que aunque “mi perfil como ingeniero me da esa habilidad en matemáticas” para enfrentar la responsabilidad como docente universitario, al estudiante le puede afectar el cambio ya que “no se tiene la formación como docente”.

Factor curricular

En el factor curricular que se detalla en la tabla 4 se ha incluido aspectos que han mencionado los participantes como el modelo educativo, contenido, evaluación y estrategias.

Tabla 4

Factores curriculares identificados

Factor curricular	Relevancia asociada por el docente					
	Germania	Pietro	Carlos	Felipe	Rubén	César
Modelo educativo			x	x	x	x
Contenidos		x	x	x	x	x
Evaluación			x	x	x	x
Estrategias			x	x		x

Fuente: Grupo focal PUCE-SI. 2018.

En cuanto a la organización curricular, Felipe menciona que “en el bachillerato unificado enseñan de todo y no aprenden nada”, aspecto con el que concuerda César ya que indica “que los estudiantes no ahondan en los temas”. Esta reflexión la realizan ya que antes del 2011 estaba vigente el bachillerato por especialidades que permitía profundizar en áreas de conocimiento específicas y a partir de ese año entró en vigencia el bachillerato general unificado que tiene como objetivo establecer una base común de conocimientos para acceder a estudios superiores o al campo laboral. En este sentido, Rubén indica que los estudiantes “tienen diferentes niveles de conocimiento por su formación previa y que esto no ha mejorado con el bachillerato unificado".

Por otra parte, Carlos señala la necesidad de "usar estrategias digitales por parte del profesor" al igual que Felipe, con las que se refiere a estrategias que permitan el uso de tecnologías en el proceso de enseñanza. Mientras que en el resto de los elementos indicados había consenso entre los docentes participantes, en este elemento hay cierto desacuerdo. Por ejemplo, Germania indica que estos elementos no son tan relevantes ya que "el estudiante debe adaptarse cuando ingresa a universidad", por lo que considera que aspectos de madurez (actitudinales) son más significativos.

Por último, Pietro estima que el sistema de evaluación diferente influye a nivel medio en la transición, mientras que Carlos menciona que el sistema de recuperación de bachillerato es paternalista por lo que influye de forma significativa en forma negativa en la transición, afirmación con la que concuerdan Felipe y Rubén.

Resultados y discusión

La información obtenida a partir del grupo focal muestra resultados consistentes con la problemática en la transición de secundaria a universidad mencionada por Bardelle y Di Martino (2012); Di Martino y Gregorio (2018) y Gueudet (2008). En cuanto al dominio afectivo, los docentes identifican el factor actitudinal como un aspecto relevante en la transición de secundaria a universidad, incluso por sobre aspectos cognitivos. Esto hace referencia a una de las tres dimensiones que McLeod (1992) utiliza para describir este dominio; las otras dos (emociones y creencias) no fueron mencionadas de forma explícita por los participantes. De acuerdo a la información analizada, los participantes no identificaron aspectos actitudinales de parte del docente que puedan influir en la transición. Esta información se contrastará en una etapa posterior de la investigación, en la que se analizará este mismo problema desde la perspectiva de los estudiantes de primer año de universidad. Un aspecto nuevo que los docentes mencionan en relación a este factor es los valores como el respeto y la responsabilidad.

Respecto del dominio cognitivo que integra aspectos conceptuales, procedimentales, estratégicos y de razonamiento (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001), los resultados muestran elementos tanto relacionados con el docente como con el estudiante por lo que se ha presentado el factor aptitudinal en forma separada como factor aptitudinal del estudiante y factor aptitudinal del docente. Como aspectos aptitudinales del estudiante, se destacan los conocimientos previos y la habilidad de resolución de problemas mientras que en los aspectos aptitudinales del docente se menciona el dominio científico de la matemática y la formación didáctica pero no se señalan de forma explícita aspectos de competencia estratégica y resolución de problemas que deba dominar el docente.

Por otro lado, en el factor curricular que está en relación con la caracterización de la matemática como aspecto sensible en la transición de secundaria a universidad mencionada por Liebendörfer y Schukajlow (2017) así como por Rach y Heinze (2017), los participantes muestran opiniones contrapuestas pues dos de ellos consideran que tiene relevancia media y baja mientras que el resto señala que los aspectos del modelo educativo, organización de contenidos y evaluación son muy relevantes en la transición. Se destaca el hecho que en este último grupo de participantes están quienes tienen experiencia como docentes en educación secundaria por lo que su aporte es importante para este estudio.

Los resultados obtenidos en esta primera fase son especialmente útiles para ubicar en el contexto de la PUCE-SI a los factores identificados en investigaciones previas. Como siguiente fase dentro de la investigación se complementará este estudio con la visión del alumnado respecto de los factores que desde su punto de vista influyen en la transición de la matemática de secundaria a universidad para establecer relaciones con los resultados de esta primera fase e identificar oportunidades de intervención que puedan ser implementadas por las autoridades académicas de la PUCE-SI y a su vez podrían ser un referente para otras instituciones de educación superior.

Referencias y bibliografía

Bardelle, C., & Di Martino, P. (2012). E-learning in secondary–tertiary transition in mathematics: For what purpose? *ZDM - Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0417-y

Di Martino, P., & Gregorio, F. (2018). The Mathematical Crisis in Secondary–Tertiary Transition. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9894-y

Eynde, P. O., Corte, E. D., & Verschaffel, L. (2006). "Accepting emotional complexity": A socio-constructivist perspective on the role of emotions in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 193–207. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9034-4

Goldin, G. A. (2002). Affect, Meta-Affect, and Mathematical Belief Structures. Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?, 59–72. https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3_4

González F, L. E. (2005). Estudio sobre la repitencia y deserción en la educación superior chilena. Instituto Internacional para la Educación Superior en América Latina y El Caribe, (July).

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary – tertiary transition, (January), 237–254. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9100-6

INEVAL. (2017). Informe de resultados Ser Bachiller ciclo 2016-2017. Retrieved from http://www.evaluacion.gob.ec/dagireportes/nacional/2016-2017.pdf

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds. . (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. *Book Reviews*, 34(6), 461. https://doi.org/10.17226/9822

Liebendörfer, M., & Schukajlow, S. (2017). Interest development during the first year at university: do mathematical beliefs predict interest in mathematics? *ZDM - Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0827-3

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education. a reconceptualization.pdf.

Rach, S., & Heinze, A. (2017). The Transition from School to University in Mathematics : Which Influence Do School-Related Variables Have ?, 1343–1363. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9744-8

Roesken, B., Hannula, M., & Pehkonen, E. (2011). *ADM Mathematics Education*, 43: 497. Retrieved from https://doi.org/10.1007/s11858-011-0315-8

Rubio Gómez, M. J., Tocaín Garzón, A. L., & Mantilla Guerra, M. L. (2012). La deserción universitaria en los primeros niveles y la inserción laboral de los graduados. *Axioma*, 1. Retrieved from http://axioma.pucesi.edu.ec/index.php/axioma/article/view/363

Schukajlow, S., Leiss, D., Pekrun, R., Blum, W., Müller, M., & Messner, R. (2012). Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment , value , interest and self-efficacy expectations, 215–237. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9341-2

Escalar un proyecto con tecnología, el caso de las evaluaciones en línea en matemáticas

Jorge **Gaona**
Universidad Academia de Humanismo Cristiano y Universidad Paris Diderot
Chile y Francia
jgaonap@docentes.academia.cl

Resumen

En esta contribución se estudia el proceso de escalamiento de un sistema de evaluación en línea para matemáticas en 8 sedes de una institución de educación superior chilena que tiene 26 sedes en todo el país. Se dan muestras de algunos elementos que dan cuenta que el escalamiento es sostenible en el tiempo, a partir de los conceptos de cobertura, profundidad, sustentabilidad y cambio en la propiedad del proyecto a escala global y se discuten los factores a escala local que favorecen la integración de la tecnología en la práctica docente y que tributan a este proceso de escalamiento: valor pragmático y epistémico, flexibilidad y cercanía de los recursos con el curriculum efectivo, participación, costos y apoyo institucional.

Palabras clave: evaluación online, escalamiento, tecnología, educación superior.

Introducción

La integración de la tecnología, particularmente de recursos digitales, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es un proceso complejo tanto para el profesor como para los estudiantes (Trouche, 2004) y donde el profesor es clave (Abboud-Blanchard, 2014; Bozkurt & Ruthven, 2017; Trigueros, Lozano, & Sandoval, 2014) . Si además, se agrega una intención institucional (de un país, región, o institución educacional de gran tamaño) de escalar un proyecto con tecnología se suma una dificultad adicional (Clark-Wilson, 2017). Esto se da porque se espera que la integración de tecnología se produzca en muchos lugares diferentes, con contextos sociales diversos con el fin de lograr cobertura, que es la definición básica de escalamiento. Al mismo tiempo esta integración es un proceso local, entre los directivos, el o los profesores y los estudiantes de una comunidad educativa que se espera perdure en el tiempo.

En la Universidad Tecnológica de Chile INACAP, desde el 2015 se está desarrollando el proyecto SEDOL-M (Sistema de Evaluación Dinámica Online en Matemáticas) que tiene por objetivo desarrollar e implementar un sistema de evaluación en línea para fomentar el trabajo autónomo fuera de la sala de clases de estudiantes de matemática I. La institución cuenta con 26 sedes repartidas en todo Chile y hasta el momento, el proyecto se ha implementado en 8 sedes, impactando a más de 13.000 estudiantes a cargo de más de 120 profesores.

En el contexto del proyecto SEDOL-M, en esta comunicación queremos responder a las siguientes preguntas de investigación: ¿Cuáles son los indicios del proyecto que dan cuenta de un escalamiento sostenible? ¿Cómo se han desarrollado los factores que favorecen o dificultan la integración de la tecnología?

Proyecto SEDOL-M

Como se mencionó anteriormente esta investigación se enmarca dentro del proyecto del SEDOL-M para la asignatura de matemática I (nivelación de matemáticas) en INACAP (Gaona, Reguant, Valdivia, Vásquez, & Sancho-Vinuesa, 2018). Este proyecto es impulsado por el Centro de Innovación en Educación (CIEDU) de INACAP a partir de un pequeño proyecto desarrollado por un grupo de profesores de uno de las sedes de INACAP que el mismo CIEDU financió mediante un concurso interno en el año 2013.

En esta primera experiencia, se hizo una implementación con cerca de 200 estudiantes y mediante pruebas estadísticas se concluyó que había una correlación positiva entre el uso de la plataforma y los resultados de los estudiantes en una evaluación en formato lápiz papel, externa a la intervención, es decir, se observó una mejora en los resultados de los estudiantes (Gaona & Hardy, 2014), resultados que son coherentes con otras intervenciones de este tipo en contextos similares.

A partir de los buenos resultados citados anteriormente se decidió escalar el proyecto a toda la institución. Tomando en cuenta la envergadura de la institución, el volumen de estudiantes de esta materia, y el hecho de que los resultados positivos a pequeña escala y en entornos controlados son difíciles de replicar con profesores ordinarios (Artigue, 2011), el proyecto se diseñó de tal forma de ser escalado paulatinamente.

La estrategia de diseño e implementación se ha basado principalmente en la formación de equipos de diseño en cada sede (entre 3 y 6 profesores en cada sede de un total de entre 10 y 30 profesores por sede), quienes han programado cada una de las más de 500 familias de preguntas que componen el sistema, cubriendo diversos tópicos, como álgebra, funciones, trigonometría, números complejos, entre otros. Con los profesores, además se han discutido decisiones con respecto a las reglas de implementación tanto para el profesorado como para los estudiantes. El proyecto recomenzó en agosto del 2015 con una fase de diseño, el primer piloto se implementó entre marzo y agosto del 2016 con 1.200 alumnos de cuatro sedes. Entre marzo y agosto del 2017 se extendió al 100% de estos cuatro sedes y se integró una quinta sede llegando a 8.500 estudiantes distribuidos en 339 cursos a cargo de 96 profesores. En el período marzo-agosto del 2018 alcanzó los 13.000 estudiantes a cargo de más de 120 profesores en 8 sedes de INACAP.

Desde el punto de vista tecnológico, el sistema de evaluación se desarrolla en una plataforma Moodle (www.moodle.org), que integra la calculadora Wiris (www.wiris.com) para crear preguntas que contengan elementos aleatorios (números, símbolos y gráficos) en el enunciado.

Un ejemplo de una pregunta con las características descritas anteriormente se muestra en la figura 1, que fue diseñada por profesores del equipo SEDOL Santiago Sur. En esta pregunta, los elementos aleatorios son: el ángulo y la magnitud del número complejo y las frases: “el conjugado”, “la parte real” y “la parte imaginaria” que modifica el elemento de los números complejos sobre los que se focaliza la pregunta.

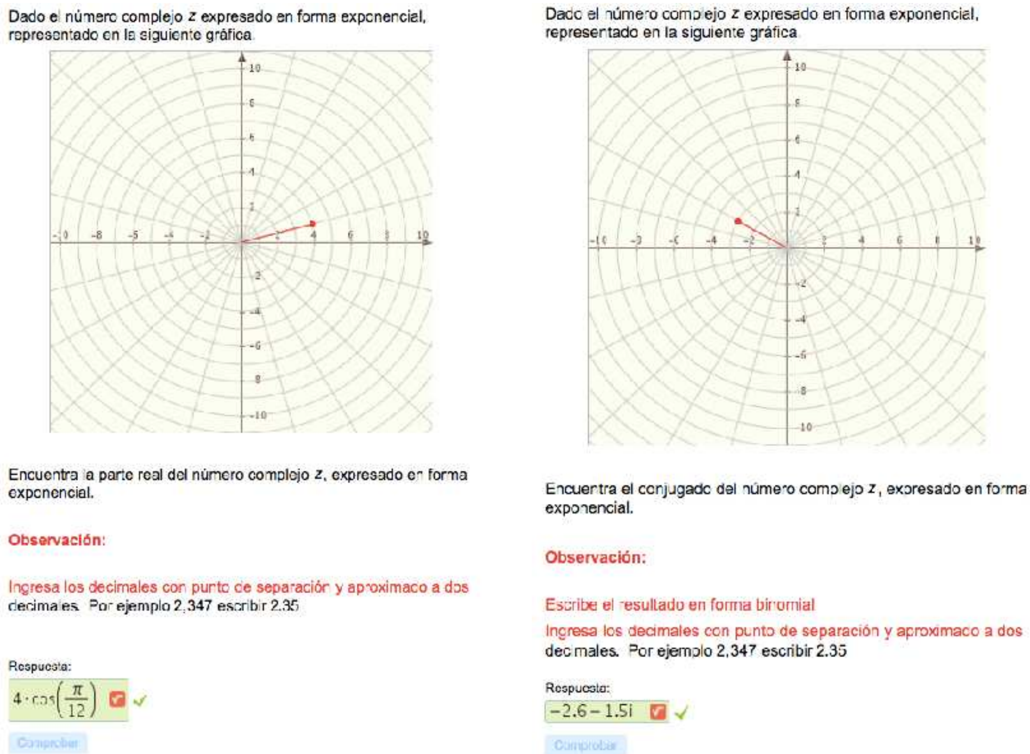


*Figura 1***.** Ejemplo de pregunta de números complejos con parámetros aleatorio

Para ingresar estas respuestas, los estudiantes pueden utilizar un editor de ecuaciones o un sistema de reconocimiento de escritura a mano alzada (ver figura 2), el cual aparece de forma automática dependiendo si se conecta mediante un computador o un dispositivo móvil respectivamente.

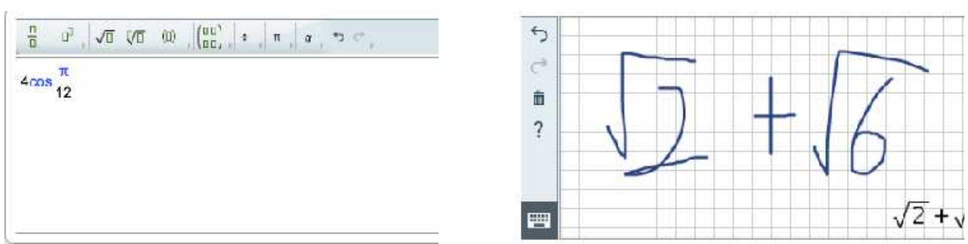


*Figura 2***.** Sistema para escribir símbolos matemáticos en las respuestas de los estudiantes.

Una vez que el estudiante responde la pregunta, el sistema no solamente le indica inmediatamente si su respuesta es correcta o no, además, le proporciona una estrategia de solución de la tarea planteada de acuerdo con los parámetros aleatorios, la cual también fue programada por los profesores. Por ejemplo, en la pregunta de la figura 1, una vez que el estudiante ha respondido, el sistema le entrega la retroalimentación paso a paso que se muestra en la figura 3.

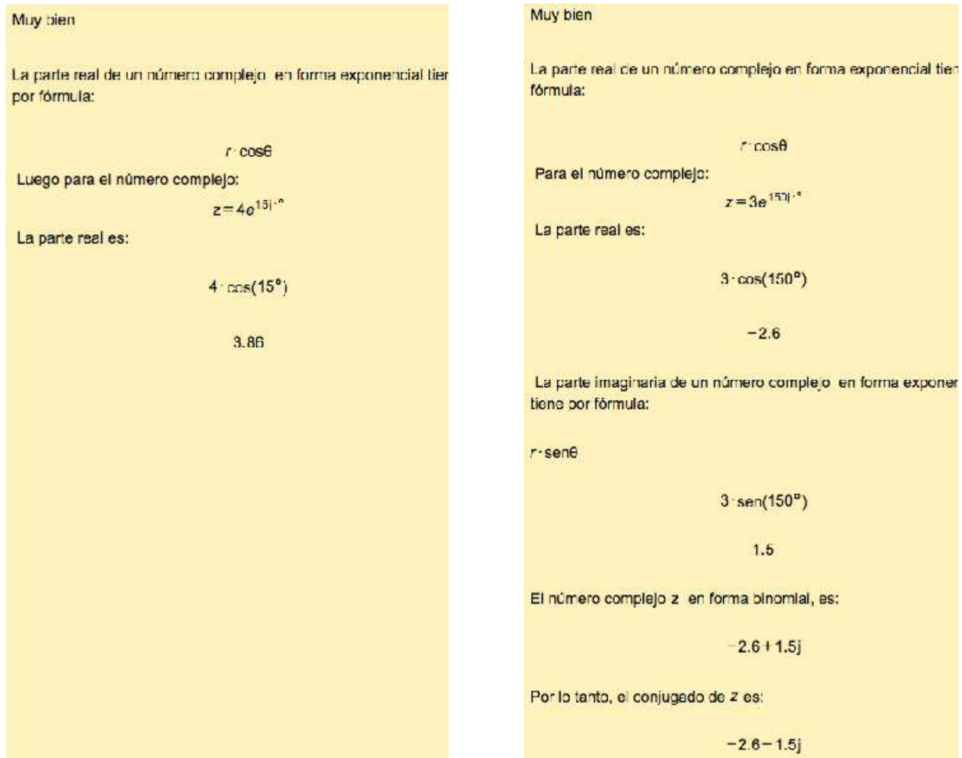


*Figura 3***.** Retroalimentación paso a paso en función de los parámetros aleatorio

Como todo sistema informático, además de las potencialidades descritas anteriormente, hay una serie de limitaciones que tiene el sistema. Por ejemplo, los gráficos son imágenes fijas con las cuales el estudiante no puede interactuar. También, al igual que en otros sistemas de este tipo, sólo puede evaluar la respuesta final y no el proceso de trabajo de los estudiantes y por último, la retroalimentación, aunque es información valiosa, puede generar dificultades en los estudiantes.

Marco Teórico

Coburn (2003) establece que para que el escalamiento perdure en el tiempo, además de la cobertura, un proyecto debe dar muestras de profundidad: relacionada con los cambios dentro de las prácticas de aula; sustentabilidad: relacionadas con los apoyos locales y globales para que el proyecto se mantenga y cambios en la propiedad del mismo.

Todos estos elementos deben darse a escala global y al mismo tiempo son procesos que se desarrollan, a escala local. Al enfocarse en la escala local, en la literatura se han reportado una serie de factores que pueden favorecer o dificultar la integración de la tecnología como son el valor pragmático: relacionados con aquello que puedo hacer con la tecnología que sin ella es imposible o que puede hacer de forma más eficiente; el valor epistémico de las tareas mediadas por la tecnología: relacionado con el aporte al aprendizaje (Artigue, 2002), la flexibilidad y la cercanía con los recursos con el curriculum efectivo (Ruthven, 2007), la participación de los profesores en los procesos de selección, validación y/o creación de los recursos (Jones & Pepin, 2016), los costos materiales, temporales e instrumentales (Abboud-Blanchard, 2014) y el apoyo institucional de tal forma que no sólo sean los “militantes tecnológicos” quienes la adopten. Todos estos factores se resumen en la figura 4.

En la figura 4, cada uno de los segmentos que une el centro del hexágono con los vértices puede ser visto como una escala cualitativa donde los valores óptimos están en los extremos. De los seis factores que se proponen, cuatro tienen un signo “+” que indica que ese factor es creciente. Es decir, se espera que el valor pragmático, epistémico, la participación y la flexibilidad de los recursos vaya creciendo y a medida que crece se alcanza el óptimo. En cambio, los costos y la distancia con el currículum se espera que vayan decreciendo y a medida que decrecen se alcanza su óptimo.

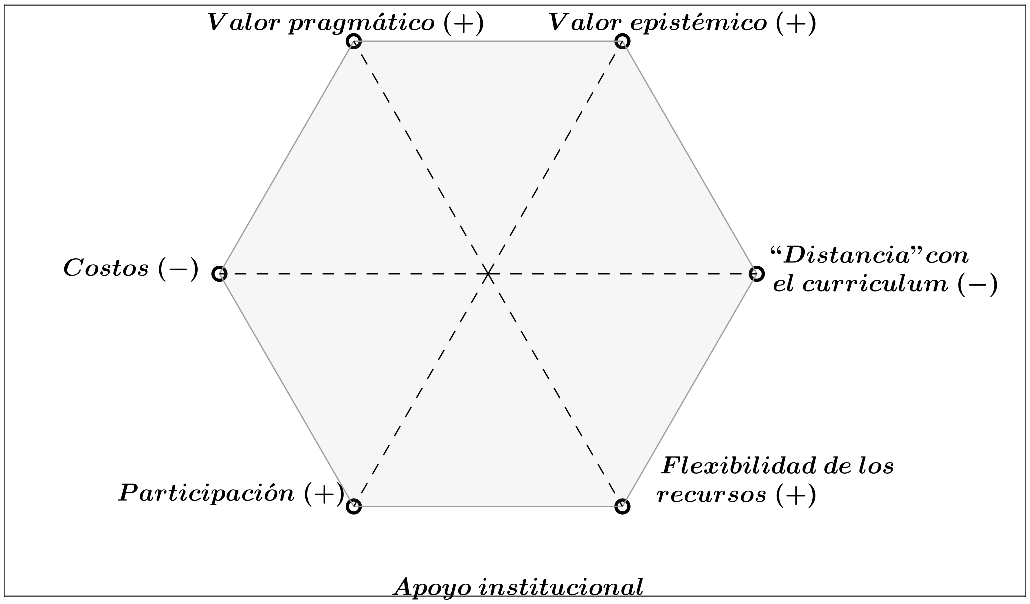


Figura 4. Factores que influyen en la integración de tecnología, extraído de Gaona (2018)

Este esquema además de ser un resumen de los factores, tiene por objetivo explicitar la interrelación y tensión que puede existir entre ellos, puesto que cualquiera de los factores donde nos centremos, está relacionado con uno o más de uno de los restantes.

Por ejemplo, en un estado ideal, el valor epistémico es alto y la distancia con el currículum es pequeña, pero también podría suceder a la inversa, es decir, un aumento del valor epistémico podría implicar un aumento en la distancia con el currículum y tener como consecuencia el rechazo por parte de los de los recursos o hacer exactamente lo que el profesor realiza en clases en un ambiente tecnológico podría implicar que estas tareas tengan un bajo valor epistémico.

Metodología

Debido a la naturaleza de las preguntas de investigación, la metodología elegida es mixta. Por una parte se utilizarán datos cuantitativos para estudiar la cobertura de la participación de los estudiantes que cursaron las versiones más masivas de Matemática I en SEDOL-M, estos datos son proporcionados por la plataforma. Mediante datos de informes y entrevistas se establecieron los indicios de que se cumplen con las condiciones que establece Coburn (2003) para demostrar que un proyecto puede perdurar en el tiempo. Además, se estudiaron mediante el análisis de las preguntas que conforman la plataforma, registros de clases y entrevistas los factores que favorecen o dificultan la integración de tecnología.

Resultados

Hasta la fecha, se han reportado los datos de la intervención del 2017 y están en proceso de análisis los resultados del 2018. Un primer indicio es la cobertura, que es precisamente la definición básica de escalamiento. En Gaona et al., (2018, p. 1000) se reportó un promedio 68,67% de participación en cada evaluación de los estudiantes durante el primer semestre del 2017 en 4 sedes y en dos de las versiones de matemática I más masivas en el proyecto en todas las evaluaciones. Para la implementación del primer semestre del 2018. Además, se reportó un promedio 3,61 intentos por estudiante en cada evaluación y 126,31 minutos de trabajo en cada evaluación, existiendo una gran variabilidad entre los diferentes tópicos, lo que evidencia una auto-regulación del trabajo por parte de los estudiantes. Los datos del 2018 se están procesando, pero cálculos preliminares muestran resultados similares.

Lo anterior muestra que los alumnos lo estén usando, sin embargo, ¿cómo se puede evidenciar que exista profundidad, desarrollo sostenible y cambio en la propiedad del proyecto? Puesto que hay un sinnúmero de proyectos que a pesar de tener buena cobertura no se logran mantener en el tiempo.

Hay cuatro elementos que pueden dar cuenta de que la sustentabilidad del proyecto es posible:

Certificación de los profesores: durante las distintas etapas del proyecto, 18 profesores repartidos en las 8 sedes participantes se han certificado como programadores nivel medio y avanzado en Wiris. Esto les permite frente a la institución evidenciar parte de las competencias aprendidas, lo que a su vez, les permite optar a asumir roles de instructores de pares para nuevas sedes que se incorporen.

Financiamiento de las sedes: como se mencionó en la descripción del proyecto, el financiamiento inicial lo realizó el CIEDU, sin embargo, de forma paulatina, las sedes han asumido los costos del proyecto: licencias y pago de horas de trabajo de los profesores, lo que da muestra de un apoyo de las autoridades locales al proyecto y que es una de las condiciones para darle sustentabilidad al proyecto.

Diversificación del proyecto: durante estos tres años, en varias de las sedes participantes han aparecido una serie de iniciativas de parte de los equipos SEDOL que han expandido en términos disciplinares el proyecto. La sede Calama presentó el proyecto SEDOL-E. El equipo SEDOL La Serena, está desarrollando las nivelación de matemáticas utilizando lo desarrollado en el proyecto y complementándolo con preguntas nuevas. El equipo SEDOL Renca está desarrollando SEDOL-F. El equipo SEDOL Rancagua está desarrollando SEDOL-C. El equipo Santiago Sur ha estado desarrollando variaciones semióticas de algunas preguntas para levantar investigación. Las letras E, F y C corresponden Economía, Física y Cálculo respectivamente y en cada uno de estos proyectos los profesores están diseñando tareas específicas a esas disciplinas, donde se han aliado con otros profesores de especialidad para desarrollar el proyecto. Todas estas iniciativas muestran que se ha producido un verdadero cambio en la propiedad del proyecto, puesto que cada equipo ha buscado fuentes de financiamiento para desarrollarlos.

Superación de crisis: durante la implementación masiva del 2018, hubo un problema técnico importante que hizo que a muchos estudiantes les apareciera un error cuando trabajaban en las evaluaciones. Estos errores comenzaron a ser reportados a la administración de la plataforma y dada la envergadura del proyecto, a la semana se tenían más de 700 reportes y el número iba creciendo. Como no se encontraba solución al problema se les propuso a los equipos de cada sede suspender el proyecto hasta dar con la solución y todos los equipos respondieron, de forma unánime que preferían "aguantar" a los estudiantes mientras se solucionaba el problema. Esta fue una muestra significativa de apropiación del proyecto, puesto que fue en una crisis donde los profesores diseñadores siguieron apostando por él.

A la luz de los procesos anteriormente descritos, nos preguntamos por la forma en que se han desarrollado los factores reportados por la literatura como facilitadores u obstaculizadores de la integración con la tecnología: valor pragmático y epistémico, flexibilidad y cercanía con el currículum, participación, costos y apoyo institucional. Por una parte hay una serie de características que se describieron en el proyecto que dan cuenta del valor pragmático de la plataforma, sin embargo para establecer el valor epistémico, es necesario analizar las tareas utilizando un marco teórico adecuado que permita caracterizarlos. En Gaona (2018a) se reporta la relación entre la participación de los profesores en el diseño, el valor epistémico y la cercanía con las tareas habituales. En este estudio se utiliza como marco teórico los Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, Tanguay, & Elia, 2016) y se concluye que las tareas trabajan principalmente la dimensión semiótica e instrumental, dejándose de lado la dimensión discursiva. Además, se reporta que las tareas son cercanas a las tareas habituales de los profesores. La participación de parte de los profesores de cada sede en el proceso de diseño explica en gran medida la cercanía con las tareas habituales, además los profesores diseñadores han realizado un acompañamiento a sus colegas usuarios, lo que ha dado validez entre pares al sistema. Todo esto se ha logrado, además, porque la institución ha asumido el costo, invirtiendo una gran cantidad de recursos en horas para que sus profesores trabajen en el diseño y a su vez, mediante concursos internos ha financiado otras iniciativas para física, economía o cálculo.

Conclusiones

Con los datos recogidos y analizados hasta el momento, podemos concluir que la participación de los profesores en el proceso de diseño y de acompañamiento ha sido fundamental para la integración local del proyecto en cada sede y que la suma de esto ha dado pie a un escalamiento que da luces de poder ser sustentable en el tiempo. Esta participación ha ayudado a la cobertura, pero también a que el proyecto se perciba como local en cada una de las sedes, le de validez frente a los profesores usuarios y que no lo perciban como una imposición externa. A pesar de que el escalamiento se mide a escala global, es un proceso que depende de una condiciones locales de cada sede, donde los factores descritos han sido tomando en cuenta explícitamente para permitir favorecer la integración. Los resultados muestran que elementos como la percepción en la propiedad del proyecto, la profundidad y la sustentabilidad no necesariamente son replicables, puesto que se van dando de acuerdo a las condiciones institucionales, por ejemplo, la aparición de proyectos en física, cálculo o economía responden a necesidades que tienen los profesores, que sin embargo, sin la existencia de concursos internos para levantar fondos sería mucho más difícil que se desarrollasen. Además de los elementos técnicos en un proyecto con tecnología, es importante tomar en cuenta elementos epistemológicos, puesto que estos proyectos están enmarcados en la enseñanza y aprendizaje de una disciplina y sin se pasan por alto, el trabajo estará centrado sólo en el valor pragmático que aporta lo digital, lo que a la larga podría impedir su duración en el tiempo.

Referencias y bibliografía

Abboud-Blanchard, M. (2014). Teachers and Technologies : Shared Constraints, Common

Responses. En A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (pp. 297–317). Dordrecht: Springer Netherlands.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–274.

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas : desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental II . De la programación a los recursos en línea : trayectoria de una investigadora. *Cuadernos de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 1–15.

Bozkurt, G., & Ruthven, K. (2017). Classroom-based professional expertise: a mathematics teacher's practice with technology. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(3), 309–328.

Clark-Wilson, A. (2017). The Complex Process of Scaling the Integration of Technology Enhanced Learning in Mainstream Classrooms. En G. Costagliola, J. Uhomoibhi, S. Zvacek, & B. M. McLaren (Eds.), *International Conference on Computer Supported Education* (pp. 3–13). Cham: Springer.

Coburn, C. (2003). Rethinking Scale: Moving Beyond Numbers to Deep and Lasting Change. *Educational Researcher*, *32*(6), 3–12.

Gaona, J. (2018a). Instructors' decision making when designing resources: the case of online assessments. En V. Giritana, T. Miyakawa, M. Rafalska, & S. Soury-Lavergne (Eds.), *Re(s)sources 2018 International Conference* (pp. 279–282). Lyon: École Normale Supérieure de Lyon.

Gaona, J. (2018b). Integrar tecnología en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, factores claves. *Revista de Gestión de la Innovación en Educación Superior*, *3*.

Gaona, J., & Hardy, C. (2014). La evaluación dinámica como motor de aprendizaje incorporando Wiris en Moodle. Un ejemplo de nivelación en matemáticas. En M. Asenjo, O. Macía, & J. Toscano (Eds.), *Congreso Iberoamericano de ciencia, innovación y educación* (pp. 1–15). Buenos Aires: OEI.

Gaona, J., Reguant, M., Valdivia, I., Vásquez, M., & Sancho-Vinuesa, T. (2018). Feedback by automatic assessment systems used in mathematics homework in the engineering field. *Computer Applications in Engineering Education*, *26*(4), 994–1007.

Jones, K., & Pepin, B. (2016). Research on mathematics teachers as partners in task design. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(2–3), 105–121.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM - Mathematics Education*, *48*(6), 721–737.

Ruthven, K. (2007). Teachers, technologies and the structures of schooling. En D. Pitta-Pantazi & C. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 52–67). Larnaca: Department of Education - University of Cyprus.

Trigueros, M., Lozano, M., & Sandoval, I. (2014). Integrating Technology in the Primary School Mathematics Classroom: The Role of the Teacher. En A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), (Vol. 2, pp. 111–138). Dordrecht: Springer. http://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1

Trouche, L. (2004). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments : The Case of Calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*, 281–307.

Matematización del Teorema Fundamental del Cálculo en el Nivel Situacional con el uso de tecnologías digitales

Ingrid Janeth **Jácome** Anaya
Universidad Industrial de Santander
Colombia
jacomeaij@hotmail.com
Jorge Enrique **Fiallo** Leal
Universidad Industrial de Santander
Colombia
jfiallo@uis.edu.co

Resumen

En este documento se presentan avances de una investigación en desarrollo que pretende caracterizar los niveles de matematización que alcanzan los estudiantes de un curso de Cálculo Integral en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), mediante el uso de tecnologías digitales, a través del diseño, implementación y evaluación de una secuencia de situaciones. Para lo anterior usamos la Educación Matemática Realista (EMR) y a continuación, mostramos la caracterización a priori del Nivel Situacional y la descripción de una secuencia de tareas planteadas en dos situaciones problemáticas realistas en el fenómeno Llenado de Recipientes, el cual está dado a partir de los primeros resultados de un análisis fenomenológico didáctico en construcción.

Palabras clave: Teorema Fundamental del Cálculo, tecnologías digitales, Matematización, Educación Matemática Realista.

Introducción

La comprensión de los objetos matemáticos asociados a las ideas de variación y acumulación son complejos, y lo es más la articulación entre éstos, la cual se establece a través del TFC (Robles, Tellechea y Font, 2014). En cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de dichos objetos, Muñoz (2000) menciona que una de las problemáticas principales es la separación entre lo algorítmico y lo conceptual. Para propiciar un enlace, este autor identifica una condición necesaria que se refiere a la existencia de situaciones problema. Freudenthal (1991) las define como contextos y situaciones problemáticas realistas, en el sentido de representables, razonables e imaginables para los estudiantes. Asimismo, estas situaciones son las generadoras de su actividad matematizadora., que se concibe como el proceso que conlleva a la organización de la realidad con medios matemáticos, incluida la matemática misma. Además, de ser un proceso discontinuo que pasa por distintos niveles: *Situacional, Referencial, General* y *Formal.*

Teniendo en cuenta que las representaciones estáticas y limitadas de los libros de texto, utilizados tradicionalmente en la enseñanza del cálculo, restringen la naturaleza dinámica de los objetos y la limitan a ejemplos, que conducen a desarrollar una imagen restringida del concepto en cuestión (Tall y Sheath, 1983), se hace relevante la introducción de las tecnologías digitales en la educación matemática. Éstas permiten la visualización dinámica de conceptos matemáticos que no se logra fácilmente en el papel. Por tal razón, elaboramos una secuencia de tareas, planteadas en dos situaciones problemáticas realistas, con el uso de tecnologías digitales.

A continuación, describimos la secuencia de tareas y la caracterización *a priori* del Nivel Situacional, propiciando los principios de interacción y reinvención guiada.

Educación Matemática Realista

En este enfoque, los estudiantes deben aprender matemáticas desarrollando y aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria que tengan sentido para ellos, estas son, situaciones realistas. "El término "realista" se refiere más a la intención de ofrecer a los estudiantes situaciones problema que ellos puedan imaginar que a la realidad o autenticidad de estos" (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003, p.10). El desarrollo del proceso de aprendizaje se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado *reinvención guiada*, proceso en el cual los estudiantes reinventan las matemáticas a partir de la organización o estructuración de situaciones problemas en *interacción* con sus pares y bajo la guía del docente, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva.

Freudenthal (1971) concibe la idea de las matemáticas como una actividad humana. Para él, las matemáticas son la actividad de plantear y resolver problemas, más explícitamente, la actividad de organizar la matemática desde la realidad. Freudenthal explica: "No hay matemáticas sin matematización" (Freudenthal, 1973, p. 134). Según su punto de vista, la mejor forma de aprender matemáticas es haciendo y la matematización es el sentido central de la educación matemática: "Lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible, el de matematizar las matemáticas" (Freudenthal, 1968, p.7).

Treffers (1987) formuló la idea de dos formas de matematización; i). La *matematización horizontal*. Proceso en el cual los estudiantes presentan herramientas que pueden ayudar a organizar y resolver un problema del mundo real; esto es, traducir al mundo matemático una situación del "mundo real", comprendiendo así las relaciones entre el lenguaje cotidiano y el matemático, ii). La *matematización vertical.* Proceso de reorganización dentro del propio sistema matemático, esto es, encontrar atajos, probar regularidades, descubrir conexiones y estrategias para luego usar dichos descubrimientos, acciones que llevan a procesos tales como argumentación y generalización. En términos de Freudenthal (1991) moverse dentro del mundo de los símbolos.

Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower (2016), con base en las ideas de la EMR, proponen los niveles de matematización: *Situacional, Referencial, General y Formal*. Estos niveles representan el pasaje de conocimiento informal al formal y están caracterizados por el tipo de modelos que surgen cuando los estudiantes se enfrentan a una situación problemática realista. Acá, no se refieren a modelos preconstruidos e impuestos desde la matemática formal sino a modelos emergentes.

En el *Nivel Situacional*, los estudiantes se enfocan en el conocimiento de la situación. Está asociado al uso de estrategias ligadas totalmente al contexto de la situación misma. Las estrategias que utilizan, para dar respuesta a los problemas y/o descubrir la matemática existente en el contexto, son apoyadas en los conocimientos formales previos, en los conocimientos informales, en el sentido común y en la experiencia. A este proceso se le denomina *matematización horizontal*.

Los otros niveles están enmarcados dentro de la *matematización vertical*, por lo que se caracterizan por la búsqueda de fórmulas, prueba de regularidades, formulación de un concepto nuevo, generalización, evolución y ajuste de modelos, entre otros.

En el *Nivel Referencial* aparecen las representaciones o modelos gráficos, materiales o notacionales, las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, siempre referidos a la situación particular, los cuales describen y esquematizan los conocimientos y procedimientos de la situación problema. De allí que los modelos se consideren como "modelos de".

El *Nivel General* se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior. Da lugar al surgimiento de aspectos generalizables de los mismos que son utilizables en un conjunto de problemas. Las estrategias, ahí encontradas, superan la referencia al contexto, por lo que surgen los modelos para la resolución de los mismos; esto es, modelos generales y descontextualizados, los cuales sirven para organizar matemáticamente otras situaciones.

El *Nivel Formal* comprende los conceptos, procedimientos, utilización de conceptos, y notaciones convencionales propias de la rama de la matemática que hacen parte de la matemática vinculada al contexto que se venía trabajando.

Según Drijvers, Boon, Doorman, Bokhove, y Tacoma (2013) el desafío está en encontrar situaciones que pidan el desarrollo de modelos emergentes y permitan un proceso de abstracción progresiva. Para encontrarlas, Freudenthal propone la realización de un Análisis Fenomenológico Didáctico, el cual inicia con la identificación de los contextos donde tienen sentido los objetos matemáticos, los fenómenos donde surgen o son organizadores y las situaciones donde tienen uso.

Proceso metodológico

Para la identificación de los contextos, fenómenos y situaciones matemáticas donde el TFC tiene sentido, surge y tiene uso, es importante analizar y responder los cuestionamientos ¿para qué se usa el TFC?, ¿a qué problemas da respuesta el TFC? Para ello, estamos realizando una revisión epistemológica, general, de los objetos matemáticos inmersos en el TFC, derivada e integral, y un análisis del contenido matemático escolar teniendo como referencia algunos libros utilizados usualmente en la enseñanza del Cálculo Integral.

A través de dicho análisis hemos logrado identificar el fenómeno de Llenado de Recipientes. Resaltamos las situaciones de, teniendo en cuenta al video del llenado de una copa en forma de cono circular recto, hallar el área de la sección transversal en función del nivel del líquido a partir del volumen de este y hallar el volumen del líquido en función del nivel del líquido a partir del área de la sección transversal, donde las tareas enmarcadas en dichas situaciones se diseñaron con el fin de caracterizar los tres primeros niveles de matematización del TFC.

La secuencia de tareas planteadas en las dos situaciones anteriores está dirigido a estudiantes de Cálculo Integral que no han visto el TFC. Dichas tareas conducen a la construcción de modelos y la abstracción de estos. Para el desarrollo de la secuencia los estudiantes usarán el software Tracker, el cual les permitirá estudiar un fenómeno a través del seguimiento manual y automatizado de objetos, obteniendo de forma inmediata información tabular y gráfica acerca de área de la sección transversal del líquido y el volumen de este, así como la exploración de ideas de variación y acumulación.

Teniendo en cuenta las situaciones, las tareas diseñadas para cada situación y las acciones descriptoras planteadas por Henao y Vanegas (2012) y Gonzales (2015), elaboramos el análisis a priori para el *Nivel Situacional* del TFC. En este caso, se espera que los estudiantes identifiquen y reconozcan el comportamiento de las magnitudes variables involucradas y planteen supuestos acerca de la relación de las magnitudes, área de la sección transversal y volumen del líquido, a partir de las ideas de variación y acumulación (Tabla 1).

Tabla 1

Descriptores Nivel Situacional del Teorema Fundamental del Cálculo

Descriptores generales	Descriptores a priori (TFC)
Identificar los elementos matemáticos pertinentes al problema situado en la realidad. Esquematizar, formular y visualizar un problema de varias maneras. Representar el problema de acuerdo con los conceptos matemáticos pertinentes y plantear supuestos, donde dichas representaciones están ligadas al contexto.	Identificar y conocer el comportamiento del área de la sección transversal y el volumen del líquido en un recipiente en forma de cono circular recto con la información suministrada en el video y el uso de estrategias intuitivas y/o conocimientos previos. Interpretar información tabular y predecir el comportamiento de las magnitudes variables (área, volumen) implicados en la situación problema. Plantear supuestos acerca de la relación de las magnitudes variables (área, volumen) con las ideas de pendiente de la recta tangente a una curva y acumulación del cambio.

Para el fenómeno, Llenado de Recipientes, se diseñaron dos situaciones matemáticas realistas que consisten en:

A partir del volumen del líquido que se vierte en una copa, hallar la expresión algebraica que representa el área de la sección transversal en función del nivel del líquido (y).

A partir del área de la sección transversal del líquido, hallar la expresión algebraica que representa el volumen en función del nivel del líquido (y).

Con algunas de las tareas planteadas para estas dos situaciones se espera que el estudiante, en primera instancia, identifique la razón de cambio instantánea del volumen con respecto al nivel del líquido (y) como la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquier punto. Y con la ayuda del software, hallando la pendiente de la recta tangente al volumen para niveles del líquido específicos (slope) y el área de la sección transversal formada para los mismos niveles (Figura 1), logre conjeturar que la derivada del volumen del líquido corresponde al área de la sección transversal en función del nivel.

Posteriormente, se espera que el estudiante, a partir del cálculo del área desde el inicio del llenado hasta niveles específicos del líquido bajo la curva Área de la sección transversal y el cálculo del volumen del líquido en los mismos niveles, logre conjeturar que la integral del Área de la sección transversal corresponde al volumen del líquido y con ello representen, validen y cuestionen la relación entre derivada e integral.

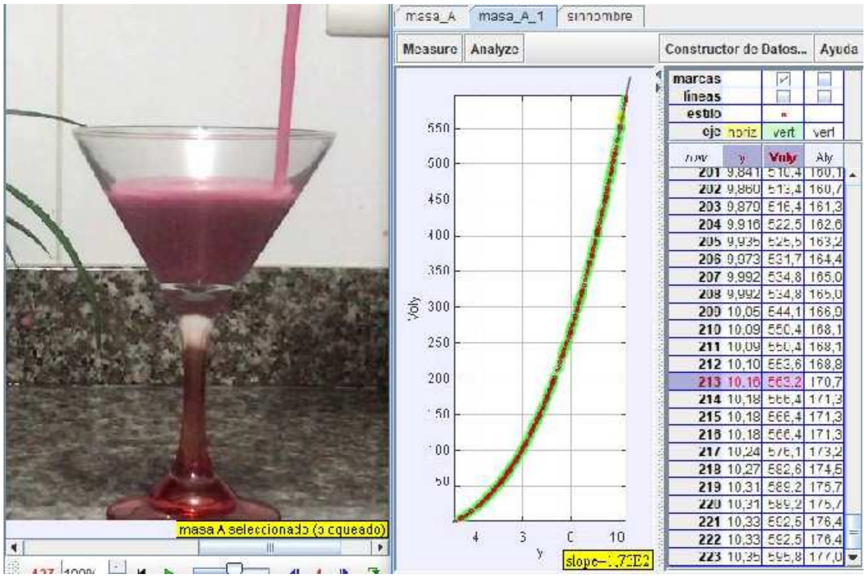


Figura 1. Simulación del llenado de una copa en Tracker.

Primeras reflexiones

Se espera que los estudiantes lleguen al Nivel General del TFC, esto es, que logren conjeturar que los objetos matemáticos, derivada e integral, están relacionados, modelen dicha relación y cuestionen la validez de este. Para que esto se logre es fundamental tener en cuenta, en el diseño de la secuencia de tareas enmarcadas en cada situación matemática realista, el uso de la tecnología digital y los principios de interacción y reinvención guiada puesto que dichos principios promueven la matematización progresiva, y el uso de la tecnología facilita la actividad matemática promoviendo la creación de modelos y la abstracción de los mismos a partir de la observación dinámica de los objetos matemáticos.

Referencias bibliográficas

Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista. Bases Teóricas.* GPDM, Agentina.

Drijvers, P., Boon, P., Doorman, M., Bokhove, C. y Tacoma, S. (2013). Digital design: RME principles for designing online tasks. En Margolinas, C. (Ed). *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22 (1)*, (pp. 56-62). Oxford, Inglaterra.

Freudenthal, H (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics 1*, 3 - 8.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics 3*, 413 – 435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht, Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Gonzales, O. (2015). *Caracterización de la actividad argumentativa de estudiantes de educación media cuando trabajan en procesos de matematización de situaciones* (Tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Henao, S. y Vanegas, J. (2012) *La modelación Matemática en la Educación Matemática Realista: un ejemplo a través de la producción de modelos cuadráticos* (Tesis de Pregrado). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3 (2), 131-170.

Robles, M., Tellechea, E. y Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática*, 26 (2), 69-109.

Tall, D. y Sheath, G. (1983). Visualizing Higher Level Mathematical Concepts Using Computer Graphics. En *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 357–362.

Treffers, A. (1987) *Three Dimensions. A model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction.* Netherlands, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics 54*, 9-35.

Razonamiento covariacional y habilidades cognitivas en el diseño de tareas para la comprensión de la derivada

César Augusto **Rodríguez** Plata
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
rodces121@gmail.com
Jorge Enrique **Fiallo** Leal
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
jfiallo@uis.edu.co

Resumen

En el análisis de una situación que involucre cambio y variación, es esencial relacionar y cuantificar los atributos en él. Por lo tanto, el uso de la derivada como razón de cambio se hace necesario. En este documento se presenta la descripción de un diseño de talleres apoyados con un software matemático interactivo (GeoGebra), con la intención de promover la compresión de la derivada en un punto. Con base en la perspectiva del Razonamiento Covariacional y las Entrevistas Basadas en Tareas, se estructura el diseño, la implementación y el análisis de los talleres. Tras la implementación y su posterior análisis, se pretende caracterizar las habilidades cognitivas que un estudiante deberá tener para sustentar su comprensión de la derivada.

Palabras clave: derivada, razonamiento covariacional, habilidades cognitivas, procesos matemáticos, entrevistas basadas en tareas.

Fenómeno de estudio

Diferentes investigaciones han manifestado que las dificultades en la compresión del concepto derivada son debido a la falta de conceptualizaciones y procesos subyacentes en su definición. Conceptos como función, límite, razón, cociente y proporcionalidad; y procesos como representar y razonar están presentes en el proceso de aprendizaje de la derivada. Debido a la complejidad de estos conceptos y procesos, se producen diversas dificultades a nivel cognitivo cuando se construye este concepto desde sus diferentes representaciones; la pendiente de la recta tangente, el límite del cociente incremental y como razón de cambio (Villa-Ochoa, 2011; Robles, Del Castillo y Font, 2012; Thompson y Carlson, 2017). Además, la ausencia de las ideas de cambio y variación, en esta definición, no permite dotar de importancia a la derivada en la resolución de problemas elementales del cálculo diferencial (Dolores, 2007).

Sin embargo, en la educación actual se han priorizado los procesos de construcción y validación de procedimientos y algoritmos derivados del álgebra y la geometría analítica (Cantoral, 2000), los cuales llevan a desconocer la importancia y el uso de la derivada por el estudiante. Si se quiere analizar y describir una situación que implique variación será necesario relacionar y cuantificar los atributos en él. De acuerdo con Font y Godino (2011), la Didáctica de las Matemáticas solicita tanto la descripción y explicación de los procesos de enseñanza y aprendizaje como también su respectiva de evaluación y progreso.

Bajo esa mirada y con ánimos de aportar a la problemática expuesta, en la investigación que estamos desarrollando, se busca caracterizar las habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos, para la compresión de la derivada en un punto. En esta comunicación se plantea la descripción y explicitación de un diseño de talleres para promover la compresión de la derivada en un punto. A continuación, se muestran los elementos teóricos y metodológicos que sustentan la estructura del diseño y una mirada preliminar al análisis de los talleres. Estos son los instrumentos de recolección de datos para observar y analizar el trabajo de los estudiantes en un curso de cálculo diferencial.

Marco conceptual

Tanto el diseño de los talleres como la investigación en curso están articulados con un marco el conceptual de Razonamiento Covariacional (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2003) y con los Procesos Matemáticos del Cambio y la Variación (Fiallo y Parada, 2018). Juntos direccionan la construcción de la derivada en un punto. Asimismo, las Entrevistas estructuradas y basadas en tareas e ideas metodológicas de un curso de precálculo (Fiallo y Parada, 2018) estructuran las fases de los talleres.

La articulación entre el Razonamiento Covariacional y los Procesos Matemáticos es posible debido a lo cognitivo que denotan sus constructos teóricos, más precisamente de las operaciones mentales que estructura una persona para la solución a un problema (ver figura 1).

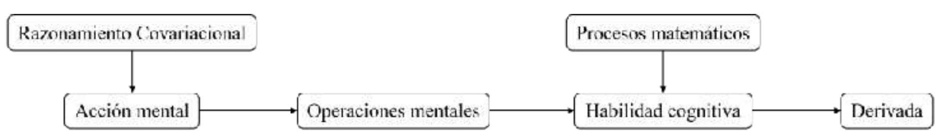


Figura1. Marco conceptual.

Razonamiento covariacional.

El “problema de la escalera”

A partir de una posición vertical contra una pared, desde su parte inferior, una escalera se separa de la pared a una razón constante. Describa la velocidad de la parte superior de la escalera a medida que ésta se desliza hacia abajo sobre la pared. Justifique su afirmación. (Carlson et al., 2003, p. 145).

El “problema de la escalera” es una situación que implica variación. El estudiante tendrá que imaginar el deslizamiento de la escalera y notar que a medida que el tiempo avanza la distancia vertical cambia. Para describir la velocidad del fenómeno, tendrá que cuantificar y relacionar los cambios de la distancia vertical con los cambio en el tiempo a medida que se desliza la escalera a razón constante.

Para apreciar los cambios, el estudiante necesita coordinar el comportamiento de las variables en juego, en este caso el tiempo y la posición vertical que describe el movimiento de la escalera, es decir necesita el razonamiento covariacional. El razonamiento covariacional es definido por Carlson et al. (2003) como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (p. 124). Por tal razón, los autores proponen un marco conceptual para analizar el razonamiento covariacional de una persona, fundamentado principalmente por las acciones mentales que éste realiza.

Las acciones mentales son evocadas por querer coordinar dos variables, así que estas son determinadas por la construcción de imágenes de covariación. La noción de imagen está basada en la perspectiva de Thompson que la establece como "dinámica, que se origina en acciones corporales y movimientos de la atención, y como la fuente y el vehículo de operaciones mentales." (citado en Carlson et al, 2003, p. 124). Por tanto, a medida que la imagen de covariación se desarrolla en la persona, sustenta un razonamiento covariacional más sofisticado.

Carlson y colaboradores consideran estas acciones mentales como evolutivas, y conjeturan y muestran en sus estudios que se desarrollan (Carlson et al., 2003). Debido a este hecho, estructuran los niveles de razonamiento covariacional y las acciones mentales que sustentan cada de uno de los niveles.

Nivel de coordinación (N1): sustentada por la acción mental 1, descrita como la coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.

Nivel de dirección (N2): sustentada por la acción mental 2, descrita como la coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.

Nivel de coordinación cuantitativa (N3): sustentada por la acción mental 3, descrita como la coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.

Nivel de razón promedio (N4): sustentada por la acción mental 4, descrita como la coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.

Nivel de razón instantánea (N5): sustentada por la acción mental 5, descrita como la coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.

Ya que el N5 alude a la derivada como la razón instantánea, el diseño de la estructura de los talleres tiene en cuenta estos niveles y se explicará en la sección de Método.

Habilidades cognitivas.

Fiallo y Parada (2018) presentan las reflexiones teóricas y metodológicas que se han incorporado al diseño de un curso laboratorio de precálculo, basados en las configuraciones actuales de los procesos de aprendizaje y enseñanza y a la incorporación de la tecnología en el aula. Se establece que, desde un enfoque de resolución de problemas, el desarrollo de procesos matemáticos como el de la comunicación, la representación, el elaborar, comparar y ejercitar procedimientos y el razonamiento, son necesarios para la comprensión del concepto de función, límite y derivada, agrupados desde los núcleos conceptuales del cambio, la aproximación y la tendencia. Como lo mencionan los autores, los procesos presentados por secciones, no deben interpretarse de manera independiente, sino que todos los procesos son dependientes y complementarios entre sí.

El desarrollo de estos procesos es posible a través de las habilidades asociados a estos, los cuales ayudarán a los estudiantes a comprender y resolver un problema. Según Rueda (2016) la habilidad cognitiva: "consiste en las operaciones mentales que resultan de la coordinación de acciones tendientes a la consecución de un objetivo ligado a una rama de conocimiento institucionalizado." (p. 57)

Como resultado de la implementación y el análisis del curso de precálculo, en Fiallo y Parada (2018) se han caracterizado diversas habilidades asociados a los procesos matemáticos (ver Tabla 1):

Tabla 1

Habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos

Procesos	Comunicar ideas sobre variación	Representar la variación	Elaborar, comparar y ejercitar procedimientos para analizar la variación	Razonar sobre fenómenos de variación
Habilidades	Interpretar enunciados.	Reconocer representaciones.	Reconocer los números reales, establecer relaciones entre ellos y operar con ellos.	Explicar una afirmación matemática.
	Explicar ideas.	Interpretar representaciones.	Medir, comparar y calcular magnitudes.	Justificar una afirmación matemática.
	Justificar ideas.	Construir representaciones.	Elaborar procedimientos con apoyo de la geometría.	Argumentar racionalmente.
	Argumentar ideas.	Transformar representaciones (tratamiento y conversión).	Razonar y estructurar procedimientos analíticos.	Convencerse y convencer a los demás.
		Coordinar representaciones.		Validar con reglas y procedimientos teóricos.

Fuente: Fiallo y Parada (2018, p. 228)

Como ya se mencionó en la sección del fenómeno de estudio el diseño de los talleres busca determinar qué habilidades cognitivas dan sustento a la compresión de la derivada.

Método

El estudio se enmarca en un enfoque de investigación de tipo descriptivo e interpretativo, y es diseñado para realizar un análisis en contexto real del fenómeno de estudio. Como lo menciona Rojas (2012), la fiabilidad del proceso investigativo se mejora proporcionando la mayor información posible tanto de la situación en que se desarrolla la experiencia y de la selección de la población o muestra, como de los métodos de recolección de datos y el análisis posterior, permitiendo la posibilidad de una revisión o réplica del trabajo por otros investigadores. Por lo tanto, hacer explícito el diseño del taller es necesario.

Se optó metodológicamente por las entrevistas estructuradas y basadas en tareas (Goldin, 2000) en la que es posible realizar entrevistas grupales. De esta manera se ofrece un ambiente menos artificial para cada uno de los entrevistados y pueden interactuar entre sí, con la posibilidad de poner en discusión sus afirmaciones y argumentos con los demás; además, tienen la posibilidad de conocer, analizar y contar con ideas adicionales en relación con las tareas propuestas y con los argumentos considerados inicialmente.

La entrevista basada en tareas es un entorno diseñado cuidadosamente, siendo éste un componente clave de esta metodología (Goldin, 2000). Su objetivo es obtener de los entrevistados las estimaciones y la evolución de su conocimiento, también, sus representaciones de ideas particulares, estructurales y formas de razonamiento, en este caso para la derivada como razón de cambio.

Algunas entrevistas están estructuradas, con protocolos detallados que determinan de manera preliminar, la interacción y las preguntas del entrevistador. Otros protocolos son semiestructurados, lo que permite modificaciones en función del criterio del investigador, como la de este diseño en la que una exploración a la entrevista prevista proporcionará una base para el diseño de un protocolo más detallado.

A continuación, se expone el taller 1 (entrevista 1) en el que, a través del problema del lanzamiento vertical, los niveles del razonamiento covariacional, los procesos matemáticos, aspectos metodológicos del curso de precálculo y el apoyo de la tecnología, los estudiantes de cálculo diferencial darán paso a resolver.

El taller de lanzamiento vertical está estructurado por 4 actividades en las que cada una tiene una serie de preguntas (tareas) que organizan la solución del problema a lo largo de los niveles del razonamiento covariacional. Cada actividad será acompañada por dos archivos específicos en GeoGebra. El papel de la tecnología, en los talleres y en el curso de precálculo, es brindar la posibilidad de que los estudiantes interactúan con representaciones del objeto matemático en cuestión, es decir la derivada. Asimismo, el uso de artefactos computacionales permite crear y conectar esas representaciones (Fiallo y Parada, 2018). Para el desarrollo de cada actividad se tienen 2 fases. En la fase inicial se le presenta el enunciado y las tareas a desarrollar. El trabajo es llevado a cabo de manera individual por los estudiantes. Posteriormente se dará paso a la fase denominada comunicando y compartiendo en la que lo estudiantes expondrán sus soluciones y podrán trabajar de manera grupal para responder a las tareas propuestas; además, el profesor (entrevistador-investigador) podrá realizar preguntas heurísticas y retrospectivas para obtener la información sobre cómo los estudiantes abordan cada tarea.

Hay que explicitar que existe una diferencia entre la actividad 1 y las demás. El trabajo de las tareas es orientado por archivos diferentes. En la actividad 1 (ver Tabla 2), se presenta el problema a resolver junto con un archivo en GeoGebra que muestra la simulación del problema y las representaciones de los objetos matemáticos implicados, como la algebraica, la tabular y la gráfica (ver figura 2). En las demás actividades se proponen tareas direccionadas por los niveles del Razonamiento Covariacional (ver Tabla 3) y otro archivo en GeoGebra, adicionando al anterior, una configuración en forma de botones con los que el estudiante puede interactuar y observar en la pantalla comportamientos de manera dinámica en torno a los incrementos de las variables, las razones de cambio promedio y las rectas secantes (ver Figura 3).

Tabla 2

Primera parte del taller de lanzamiento vertical.

<table>
<tr><th>Fases del taller</th><th>Actividad 1</th></tr>
<tr><td>1. Trabajo individual</td><td>
Una maquina lanza un objeto verticalmente hacia arriba. Se han colocado tres sensores en posiciones distintas con el fin de determinar la velocidad del objeto en diferentes instantes de tiempo. Los registros de los sensores se muestran en la siguiente tabla:
<table>
<tr><th>Sensor</th><th>Tiempo s</th><th>Posición m</th><th>Velocidad $\frac{m}{s}$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0.25</td><td>2.65</td><td>7.25</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\mathbf{0.8}$</td><td>$\mathbf{5.1}$</td><td>$\mathbf{1.75}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\frac{8}{5}$</td><td>$\frac{33}{10}$</td><td>$-\frac{25}{4}$</td></tr>
</table>
Abra el archivo Problemalanzamiento.ggb y muestre matemáticamente que el registro de la velocidad por cada sensor es verdadero.
</td></tr>
<tr><td>2.Trabajo grupal</td><td>Comunicando y compartiendo</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

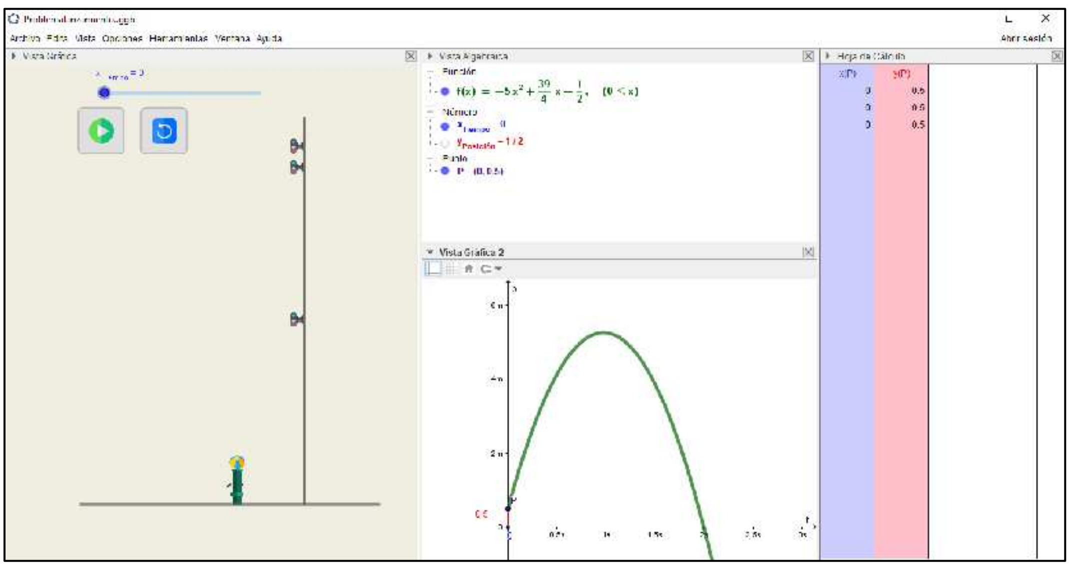


Figura 2. Archivo primera parte del taller lanzamiento vertical.

Tabla 3

Segunda parte del taller lanzamiento vertical.

Fases del taller	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4
1. Trabajo individual	Tareas para los niveles: N1. ¿Cuáles son las magnitudes variables del problema? ¿Existe una relación de interdependencia entre las magnitudes variables? ¿Por qué? N2. ¿Cómo se comportan los valores de la posición respecto al tiempo? Explique su respuesta. N3. ¿Cuál es el comportamiento de la cantidad del incremento en los valores de la posición respecto al tiempo? Justifique su respuesta.	Tarea para el nivel: N4. ¿Aproximadamente con que velocidad se mueve el objeto alrededor de $x = 0.8\ s$? Justifique su respuesta.	Tarea para el nivel: N5. ¿Qué sucede cuando $\Delta x \to 0$? Escribe una expresión que represente la razón de cambio instantánea para $x = 0.8\ s$. Justifique su respuesta.
2. Trabajo grupal	Comunicando y compartiendo		

Fuente: elaboración propia.

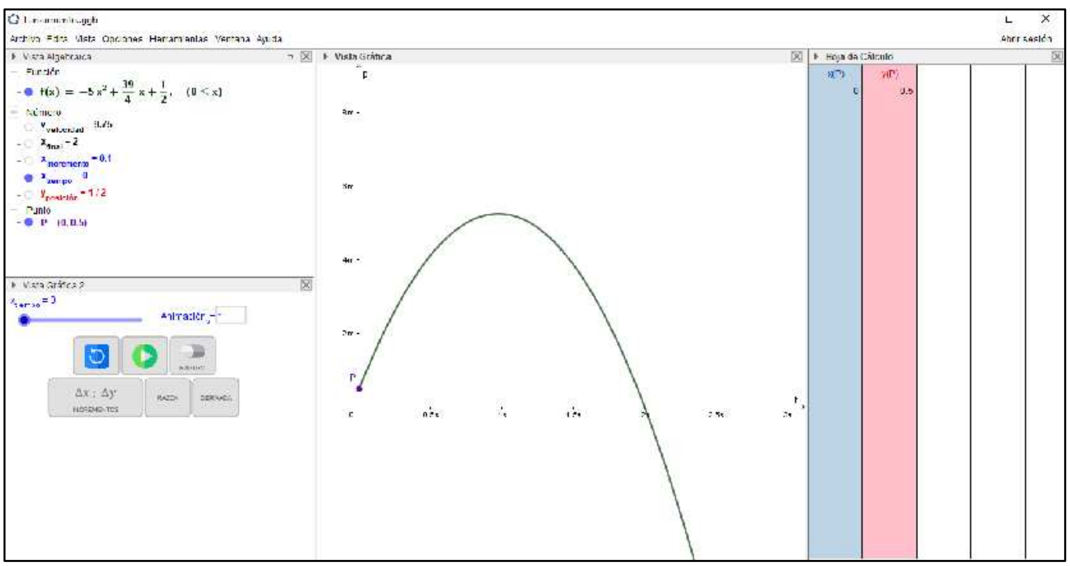


Figura 3. Archivo segunda parte del taller lanzamiento vertical.

Reflexiones

En la implementación del diseño esperamos que los estudiantes tras la solución de cada tarea vayan conceptualizando la derivada en un punto, dotándola de características y propiedades basados en las ideas de cambio y variación.

Cuestionar en los tres primeros niveles sobre qué, cómo y cuánto varían las magnitudes implicadas en el problema, calcular razones promedio para el cuarto nivel y proponer el uso de límite como aproximación y tendencia para determinar la razón instantánea en el quinto nivel, permitirán que los estudiantes puedan definir la derivada en un punto al finalizar los demás talleres.

Referencias y bibliografía

Cantoral, R. (2000). Pensamiento matemático avanzado: Una revisión de los enfoques a la investigación sobre Didáctica del Análisis. En R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanís, R. Rodríguez y A. Garza (Eds.). *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 205-218). México: Editorial Trillas.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *EMA*, *8*(2), 121-156.

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México D.F.: Ediciones Días de Santos – Universidad Autónoma de Guerrero.

Fiallo, J. y Parada, S. (2018). *Estudio dinámico de la variación y el cambio*. Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Font, V. y Godino, J. (2011). Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato. n J. M. Goñi (Ed.). *Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas.* Barcelona, España, Graó, pp. 9-55.

Goldin, G. (2000). A scientific perspectives on structured, task-based interviews in mathematics education research. In Kelly, A. & Lesh, R. (Eds.) *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). New Jersey-London: LEA.

Robles Arredondo, M. G., Del Castillo Bojórquez, A. G., y Font Moll, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada. *Educación matemática, 24*(1), 35-71.

Rojas, P. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos* (Tesis de doctorado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá.

Rueda, N. (2016). *Habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación* (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga.

Thompson, P. y Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compedium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Villa-Ochoa, J. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación del concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren* (Tesis doctoral). Universidad de Antioquia. Medellín.

XV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Las prácticas pedagógicas en la enseñanza del cálculo diferencial

Luisa Fernanda **Martínez** Rojas
Escuela de Ciencias Básicas, Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano
Colombia
lfmartinezr@poligran.edu.co

Dora Solange **Roa** Fuentes
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
doraroaf@uis.edu.co

Resumen

El contexto global actual, exige que los profesionales estén capacitados para hacer frente a los diferentes retos que plantea la sociedad; de esta manera, las Instituciones de Educación Superior (IES) cobran un papel trascendental en el cumplimiento de este objetivo, puesto que deben formar y capacitar a las próximas generaciones de profesionales para responder a los retos sociales. En el presente documento se muestra la necesidad de indagar sobre la formación del estudiante de ingeniería y de si esta responde a las necesidades del mundo laboral, con el fin de re significar los aspectos que dificultan la eficacia de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por lo tanto, este artículo resalta la necesidad de reflexionar sobre las prácticas pedagógicas de los docentes de matemáticas a nivel universitario como motor del proceso de enseñanza y aprendizaje, de tal manera que contribuyan a la mejora de la calidad de la educación y a la formación de los ingenieros que la sociedad necesita.

Palabras clave: pedagogía, práctica pedagógica, saber pedagógico, cálculo diferencial, ingeniero, enseñanza, educación superior.

Introducción

La integración tecnológica en las ingenierías, ha orientado a la Unión Europea (EU por sus siglas en inglés) a formular la cuarta revolución industrial también denominada "Industry 4.0", la cual busca la aplicación de las nuevas tecnologías a los procesos de producción y la sostenibilidad

(Carvajal, 2017). Esta iniciativa propende impactar sobre los sistemas productivos, modos de producción y finalmente en la educación superior en los programas de ingeniería.

De esta manera, los estudiantes demandan cada vez más una formación afín a los avances del siglo XXI, por cuanto las instituciones educativas y en particular las de educación superior, tienen el desafió de responder a esa demanda, mediante la aplicación de pedagogías novedosas orientadas al aprovechamiento de las tecnologías que hacen parte del entorno de vida de los estudiantes (Mariño, 2013, p. 47).

Una mirada a las prácticas pedagógicas en las matemáticas

A continuación, se expone un panorama sobre las prácticas pedagógicas actuales en la enseñanza de las matemáticas en la educación superior a nivel internacional y nacional en una ventana de tiempo del año 2003 al 2017; con el fin de presentar las diferentes problemáticas encontradas y que contribuyan a la reflexión sobre el rol docente y la importancia del diseño de prácticas pedagógicas innovadoras que motiven el interés y aprendizaje del estudiante hacia el cálculo diferencial en la ingeniería.

A nivel internacional, en España, Moreno y Azcarate (2003) indaga acerca de las concepciones y creencias de los profesores de cálculo diferencial a nivel universitario y su efecto sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, donde muestran la práctica pedagógica como un componente subjetivo, que parte de la reflexión, percepción y creencias de los docentes. Así mismo, Irazoqui (2015) define la problemática de la enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial, entorno a la carencia de conocimientos de los estudiantes y la aplicación de prácticas pedagógicas rutinarias y deficientes por parte de los docentes, señalando factores como: la formación inicial de maestros y la baja capacitación de los profesores.

En Estados Unidos, Kim (2007) establece un paralelo entre las prácticas pedagógicas llevadas a cabo por docentes de pre-cálculo internacionales y locales , destacando diferencias en cuanto enfoques y factores como: la enseñanza de nuevos conceptos, definiciones y resolución de problemas para la comprensión conceptual de los estudiantes y la interacción con los mismos, evidenciando que factores como la cultura, la percepción acerca del cálculo y el rol docente influyen en la forma en la que el docente decide llevar a cabo su práctica pedagógica, sin embargo a pesar de tales diferencias este estudio permite observar que las prácticas de estos docentes tienen en común un enfoque tradicional centrado en la transmisión de conceptos, repetición de procedimientos, trabajos extra clase, el uso de libro de textos y preparar al estudiante para aprobar y pasar al siguiente curso.

A nivel Nacional, Jiménez (2015) a través de la observación participante, describe importancia de planear, organizar, preparar y desarrollar las clases con el fin de llevar a cabo la práctica docente.

Por otra parte, en cuanto a los avances registrados en la innovación de prácticas pedagógicas se destaca el estudio de caso de Vajravelu y Muhs (2016), el cual describe la aplicación de un método innovador integrado en la práctica de los docentes donde se incorpora el uso de nuevas tecnologías en el aula, evidenciado así, la participación de los estudiantes, la interacción docente-estudiante y el desarrollo de habilidades.

En esta revisión se encontraron problemas relacionados con: tendencias didácticas, aplicación de conceptos, procedimientos matemáticos, tiempo para el análisis de contenidos, actitud de los estudiantes, el currículo y la tecnología. Resaltando la falta de tiempo para el análisis y estudio de contenidos, centrándose así en métodos algorítmicos; la enseñanza del cálculo no se da en relación con la ingeniería, por tanto, es notable la descontextualización de los conceptos y su falta de conexión con su aplicación interdisciplinar; existe una brecha notable "entre la integración de la tecnología y las prácticas pedagógicas y finalmente, existe una dicotomía entre los contenidos establecidos en el currículo y los conocimientos específicos que los estudiantes requieren para su formación profesional.

Las matemáticas en la formación del ingeniero

Las matemáticas, particularmente el cálculo diferencial en el nivel superior, constituye una herramienta de apoyo en la formación de ingenieros (Camarena, 2013), dado que durante este proceso como en su vida profesional han de resolver problemas en donde de forma recurrente es común que apliquen las matemáticas en este nivel se conciben como una herramienta fundamental en la resolución de problemas científicos (Remanth, 2010) (como se citó en Trejo, Camarena, y Trejo, 2013).

En este sentido, en el International Commission on Mathematical Instruction ICMI 3, editado por Howson, Kahane, Laugine y Turckheim, (como se citó en Romo-Vazquez, 2014) se presenta el paradigma de las matemáticas como disciplina de servicio. Se reconoce que la formación profesional, que no forma futuros matemáticos, no puede basar la enseñanza de las matemáticas en el rigor y la estructura propia de las matemáticas sino en su potencialidad como herramienta para resolver, de manera eficaz problemas prácticos.

Sin embargo, actualmente existe una enorme brecha entre las habilidades matemáticas que requiere un ingeniero y las habilidades que fomentan los cursos matemáticos en las Instituciones de Educación Superior, puesto que:

> Los estudiantes pasan por la ciencia, enseñada de forma fragmentada, sin lógica, donde lo más importante es la memoria y los procedimientos mecanizados que no permiten entender el porqué de las cosas, quedan con fobia a las ciencias presentadas de esta manera. (Ulloa, 2008, p. 3)

Por tanto, toma mayor valor una enseñanza que permita a los estudiantes percibir la ingeniería como una profesión cuyo fin es mejorar la calidad de vida de las personas, solucionar problemas, promover el desarrollo, y así poder posicionar a Colombia entre los países que lideren en estos campos; al respecto Ulloa afirma: “Si los ingenieros son la clave del desarrollo económico, necesitamos innovar, reformar la educación en ingeniería, para responder mejor a los desafíos globales. (Ulloa, 2008, p. 4) y alcanzar así un perfil profesional pertinente.

Práctica pedagógica y saber pedagógico

Para abordar los conceptos de prácticas pedagógicas y saber pedagógico se hace necesario aclarar que la pedagogía según Zuluaga “se entiende como la disciplina que conceptualiza, aplica y experimenta los conocimientos referentes a la enseñanza de los saberes específicos en las diferentes culturas” (1999, p. 11) la cual integra cuatro características:

1. Es una herramienta critica, cuya intención es criticar la apropiación que reduce la Pedagogía a una concepción instrumental del método de enseñanza.
2. Busca responder, inicialmente, a las acertadas demandas que la historia de las ciencias le hace hoy a la Pedagogía para plantear pluralidad de métodos de enseñanza de acuerdo con las particularidades históricas de formación de cada saber. Está impregnada de un deber ser más que una realidad actual.
3. Se ha formulado con base en la historicidad de la Pedagogía: en la permanente presencia práctica o conceptual de la enseñanza en las diferentes opciones de Pedagogía o de Educación.
4. Reconoce la adecuación social de los saberes en las diferentes culturas.

Además, Zuluaga afirma que:

> El maestro como sujeto de saber, se relaciona con el conocimiento a través de la práctica pedagógica. La pedagogía es historiada como un discurso acerca de la enseñanza y a la vez, como una práctica cuyo campo de aplicación es el discurso (2005, p. 22).

En consecuencia, la pedagogía se considera como saber y como práctica; así mismo otro concepto que se aborda en esta investigación es el de práctica pedagógica, o práctica educativa, la cual algunos autores también llaman práctica docente. En esta investigación se toma como referente el concepto ofrecido por Zuluaga, quien describe la práctica pedagógica como una noción que designa:

1. Los modelos pedagógicos, tanto teóricos como prácticos, utilizados en los diferentes niveles de enseñanza.

2. Una pluralidad de conceptos pertenecientes a campos heterogéneos de conocimiento, retomados y aplicados por la pedagogía.
3. Las formas de funcionamiento de los discursos en las instituciones educativas donde se realizan prácticas pedagógicas.
4. Las características sociales adquiridas por la práctica pedagógica en las instituciones educativas de una sociedad dada que asigna unas funciones a los sujetos (maestro y alumno) de esa práctica.
5. Las prácticas de enseñanza en diferentes espacios sociales mediante elementos del saber pedagógico. (1987, p. 196)

Segura (1999) afirma que la práctica pedagógica consiste en "desarrollar un ejercicio de reflexión sobre la práctica, acompañado necesariamente de una construcción de referentes conceptuales de orden pedagógico, disciplinar, epistemológico, axiológico y sociológico, se constituye en un proceso de cualificación de maestros" (1999, p. 8). También es importante destacar los aportes de Carr, quien plantea acerca de la práctica educativa:

- Se trata de una actividad intencional, desarrollada de forma consciente, que sólo puede hacerse inteligible en relación con los esquemas de pensamiento, a menudo tácitos, que dan sentido a las experiencias profesionales.
- Los profesionales sólo pueden llevar a cabo prácticas educativas en virtud de su capacidad para caracterizar su propia práctica y para hacerse ideas de las prácticas de otros partiendo de la base, de un conjunto de creencias relativas a lo que hacen, de la situación en que actúan y de lo que tratan de conseguir.
- Realizar una práctica educativa presupone siempre un esquema teórico que, al mismo tiempo, es constitutivo de esa práctica y el medio para comprender las prácticas educativas de otros.
- La práctica educativa es también práctica social, en consecuencia, el esquema teórico de un profesional de la educación no se adquiere de forma aislada. Se trata de una forma de pensar que se aprende de otros y se comparte con ellos, que se conserva a través de las tradiciones de pensamiento educativo y de las prácticas educativas en cuyo marco se ha desarrollado y evoluciona. (1996, p. 64)

Ahora bien, en cuanto al saber pedagógico Zuluaga afirma que es: "el conjunto de conocimientos con estatuto teórico o práctico que conforman un dominio de saber institucionalizado en el cual figura la práctica de la enseñanza y la adecuación de la educación en una sociedad. Circula por los más variados registros del poder y del saber" (1987, p. 41). Según tal saber se definen los sujetos de la práctica pedagógica como los que soportan un método distintivo de su oficio y de su relación con el saber, y quienes enseñan por su relación con un saber, no por su relación con el método.

En consecuencia, la práctica pedagógica y el saber pedagógico reconocen al maestro como sujeto de saber y hacen énfasis en el proceso reflexivo de este en torno a su práctica pedagógica. En este sentido, Martínez piensa al maestro "como un intelectual, como un trabajador de la cultura, que tiene un saber que le es propio, el saber pedagógico" (2002, p. 65).

Prácticas pedagógicas actuales e innovadoras en la enseñanza de las matemáticas

En este apartado se pretende relacionar las prácticas pedagógicas y la enseñanza del cálculo a nivel universitario; puesto que la enseñanza del cálculo representa un desafío para los docentes, ya que en su mayoría se enfocan en la enseñanza mecánica de procedimientos y problemas estándar, o bien, en realizar algunas derivadas o integrales, acciones que se alejan de la verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento que busca las matemáticas (Moreno, 2005). Esta forma de enseñanza limita al estudiante a resolver ejercicios y problemas rutinarios, pero no le capacita para enfrentarse a contextos y situaciones que exigen mayor nivel cognitivo y conceptual.

Respecto a esto, se destacan los siguientes enfoques que abordan la didáctica sobre la enseñanza y aprendizaje de las nociones del cálculo a nivel universitario:

El primer enfoque hace referencia al "Proyecto de cálculo en Contexto" (1987); de este enfoque hay varios representantes, entre estos Camarena en México (2013). La idea principal es que el cálculo es un lenguaje (el lenguaje de la ciencia), una red de conceptos y un conjunto de técnicas útiles. El objetivo es que los estudiantes construyan las matemáticas a través de sus aplicaciones y comprendan las relaciones entre todos los elementos que configuran el cálculo.

Otro enfoque se está dando es la enseñanza por "Proyecto de Debate Científico" (Legrand, 1992) (citado en Moreno, 2005, p. 84). Su objetivo principal es conseguir que los estudiantes trabajen como si fueran matemáticos mediante la introducción de diferentes conceptos del cálculo en el contexto de problemas científicos. Los estudiantes formulan preguntas, proponen conjeturas, dibujan sus propias conclusiones de acuerdo a la relevancia y validez de las conjeturas, y discuten y argumentan sus puntos de vista con los compañeros de clase. El mayor obstáculo didáctico de este proyecto fue el conflicto existente entre el enfoque científico y los hábitos de aprendizaje establecido por las instituciones educativas.

El tercer enfoque, hace referencia al modelo teórico y de enseñanza llamado "ingeniería didáctica", donde uno de los representantes es Artigue (1995); este enfoque plantea una investigación en tres fases: análisis e interpretación de la enseñanza; análisis de las restricciones en la enseñanza y diseño de una ingeniería didáctica. Las experiencias realizadas con este enfoque han mostrado su viabilidad "teórica" de tal tipo de enseñanza, al igual que genera interés en los estudiantes pese al aumento de dificultad.

Como se puede apreciar en las investigaciones mencionadas anteriormente, la enseñanza de las matemáticas en los primeros cursos de educación superior, están dejando de lado el formalismo y rigor de la enseñanza tradicional e invita a adquirir ideas y conceptos de forma más significativa y profunda; sin embargo, existen docentes y estudiantes a favor y en contra de las nuevas metodologías de enseñanza; pero es relevante conocer la experiencia de los docentes que hacen estos cambios; puesto que se debe enseñar cálculo a una población que no serán matemáticos sino que tendrán que aplicar las matemáticas en su profesión.

Conclusiones

En consecuencia, la práctica pedagógica que predomina es la clase tradicional que tiende a realizarse con un alto nivel de descontextualización y desarticulación con respecto a los otros cursos de las carreras, donde generalmente se usa como recurso didáctico el tablero y la técnica expositiva por parte del docente, donde el estudiante es un receptor pasivo de conocimiento acabado.

Por lo tanto, se hace necesario que los docentes reflexionen sobre sus prácticas pedagógicas, así como de los factores que inciden sobre ellas, con el fin problematizar y reorientar el proceso de enseñanza-aprendizaje hacia el desarrollo de competencias, que permita integrar sus conocimientos para la aplicación del cálculo en el mundo real.

Referencias y bibliografía

Camarena, P. (2011). La Matemática en el Contexto de las Ciencias y la modelación. *XIII CIAEM*.

Camarena, P. (2013). Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias. *Acta del III Coloquio Internacional sobre Enseñaza de las Matemáticas*.

Carr, W. (1996). Una teoría para la educación. Hacia una investigación educativa crítica. Ediciones Morata.

Carvajal, J. (2017). La Cuarta Revolución Industrial o Industria 4.0 y su Impacto en la Educación Superior en Ingeniería en Latinoamérica y el Caribe. *15 th LACCEI International Multi-Conference for Engineering, Education and Tecnology "Global Partne".* Boca Raton Fl.

Hong, D., Choi, K., Hwang, J., y Runnalls, C. (2017). Integral Students' Experiences: Measuring Instructional Quality and Instructors' Challenges in Calculus 1 Lessons. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), DOI: 10.21890/ijres.327901*, *3*(2), 424-437.

Irazoqui B.,(2015). *El aprendizaje del cálculo diferencial; una propuesta basada en la Modularización.* Universidad Nacional a Distancia (UNED). Tesis para optar al título de doctor. España.

Jiménez, A., Limas, L. Y Alarcón J. (2015). Prácticas pedagógicas matematicas de profesorado de una institución educativa de enseñanza basica y media. *Praxisysaberes*,127-151.

Khakbaz, A. (2014). Conceptualization of pedagogical content knowledge (pck) for teaching mathematics in University level. *The Eurasia Proceedings of Educational y Social Sciences* , 100 (1), 523-527.

Kim, M. (2007). A Comparison of Pedagogical Practices and Beliefs in International and Domestic Mathematics. *journal of international students*, 4(1),74-78.

Mariño, O. (2013). Fortalecimiento de la enseñanza de la ingeniería con las tecnologías de información y comunicaciones. *Revista de Ingeniería*(39), 46-49.

Martínez, A., Unda, M. y Mejía, M. (2002). El itinerario del maestro: de portador a productor de saber pedagógico Realidades. En Suárez, Hernán (compilador). Veinte años del Movimiento Pedagógico 1982-2002. Entre Mitos. Bogotá. Editorial Magisterio.

Martínez, A. (2004). *De la escuela expansiva a la escuela competitiva: Dos modos de modernización en América Latina.* Bogotá: Anthropos.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 81-96.

Moreno, M., y Azcaráte, C. (2003). Conceptos y creeencias de los profesores universitarios de matematicas acerca de la enseñanaza de las escuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias*, 21(2), 265-280.

Romo-Vazquez, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Educación Matemática*, 314-338.

Segura, Dino. (1999). La construcción de la confianza. Una experiencia en proyectos de aula. Bogotá D.C. – Colombia: Corporación Escuela Pedagógica Experimental.

Trejo, E., Camarena, P. , y Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formacion de un ingeniero: una propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria, 11*, 397-424.

Ulloa, G. (2008). ¿Qué pasa con la ingeniería en Colombia? *Eduteka*.

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). (1990). Declaración mundial sobre educación para todos y marco de acción para satisfacer las necesidades básicas de aprendizaje. *Declaración mundial sobre educación para todos y marco de acción para satisfacer las necesidades básicas de aprendizaje.* Jomtien.

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). (1998). Conferencia Mundial sobre la Educación Superior. º*La educación superior en el siglo XXI. Visión y acción.* París.

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). (2009). Conferencia Mundial sobre la Educación Superior -2009: La nueva dinámica de la educación superior y la investigación para el cambio social y el desarrollo. París.

Vajravelu, K., y Muhs, T. (2016). Integration of Digital Technology and Innovative Strategies for Learning and Teaching Large Classes: A Calculus Case Study. *International Journal of Research In Education and Science (IJRES)*, 2(2), 379-395.

Zuluaga, O. (1987). *Pedagogía e Historia.* Bogotá D.C., Foro Nacional por Colombia.

Zuluaga, O. (1999). *pedagogía e historia.* Medellín, Colombia: Antrhropos Editorial.

Zuluaga, O., Quiceno, H., Saldarriaga, O., Martinez, A., Caruso, M., Saez, J. M., y Caruso, M. (2005). Foucautl: una lectura desde la práctica pedagógica. En *Foucault, la pedagogía y la educación. Pensar de otro modo.* Bogotá: Magisterio.

Un acercamiento dinámico a la comprensión del concepto de límite de una función en un punto

Sergio Alexander **Guarin** Amorocho
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
sergio_che93@hotmail.com
Sandra Evely **Parada** Rico
Universidad Industrial de Santander
Colombia
sanevepa@uis.edu.co

Resumen

Se presentan avances de una investigación en curso la cual tiene como objetivo caracterizar los niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de Cálculo Diferencial. Para ello se ha tenido en cuenta la Teoría para la Comprensión Matemática de Pirie y Kieren. Para lograr el objetivo se ha diseñado una secuencia de actividades y se han planteado las complementariedades de la acción y la expresión para los niveles de comprensión, las cuales se utilizan para el análisis de resultados luego de implementar las actividades. Aquí, se presentan resultados de una de las actividades y las complementariedades que se han construido a la luz del marco conceptual para el análisis.

Palabras clave: cálculo, límite de una función, comprensión, acciones y expresiones

Introducción

La Didáctica de la Matemática ha considerado cada vez más la problemática del aprendizaje en términos de procesos cognitivos y ya no como adquisición de competencias, lo cual ha evidenciado que las matemáticas de la educación superior se han centrado en el estudio del "Pensamiento Matemático Avanzado" propio de los currículos de los últimos años de bachillerato y primeros cursos universitarios, donde se estudian los conceptos fundamentales del Cálculo.

En ese sentido algunos investigadores como Tall (1991), Sierpinska (1987), entre otros, se han interesado en profundizar en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral.

En particular, la enseñanza del Cálculo Diferencial se ha constituido uno de los mayores desafíos de la educación matemática actual, entre los cuales Blázquez y Ortega (2000) reportan que para los estudiantes el concepto de límite "es árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que olvidan totalmente con demasiada facilidad y, en suma, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender" (p.331). Por otra parte Cornu (1991) afirma que una de las grandes dificultades al aprender el concepto de límite no emana solo de su complejidad o de su riqueza, sino en entender que todos los aspectos cognitivos no se pueden aprender a partir de su definición matemática.

Es así que nos planteamos como objetivo de investigación caracterizar los niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de Cálculo Diferencial en el que se exploran las nociones de aproximación y tendencia.

Aspectos Teóricos y Conceptuales

Con el fin de analizar la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, se ha utilizado la Teoría para la Comprensión Matemática de Pirie y Kieren (1989). La teoría nos ha permitido elaborar de manera a priori las complementariedades de la acción y la expresión para los niveles de comprensión matemática, que desarrollan los estudiantes en un curso de Cálculo Diferencial. Para el desarrollo de la investigación se han considerado los primeros 5 niveles de comprensión matemática asociados al concepto de límite de una función en un punto. A continuación, se describe cada uno de los niveles de comprensión matemática.

• Nivel 1. Conocimiento primitivo: Se refiere al punto inicial de la comprensión donde el estudiante atrae información básica a la situación de aprendizaje.

• Nivel 2. Creación de la imagen: En este nivel el estudiante es capaz de realizar distinciones con base a capacidades y conocimientos anteriores; como resultado, las acciones que se realizan en este nivel involucran el desarrollo de las concesiones entre los referentes y los símbolos. Estas imágenes no solo son pictóricas sino que transmiten el significado de cualquier tipo de imagen mental.

• Nivel 3. Comprensión de la imagen: Las imágenes asociadas con una sola actividad se reemplazan por una imagen mental. El desarrollo de estas imágenes mentales, o más precisamente, imágenes orientadas por un proceso mental libera las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares (Pirie y Kieren, 1992). El estudiante puede usar estas imágenes para reconocer las propiedades globales de los objetos matemáticos.

• Nivel 4. Observación de la propiedad: El estudiante puede examinar una imagen mental y determinar distintos atributos asociados con dicha imagen. Además de observar las propiedades internas de una imagen específica, el estudiante es capaz de observar las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales. De acuerdo con Pirie y Kieren, la diferencia entre el nivel 3 y nivel 4 es la habilidad para resaltar una conexión entre imágenes y explicar el método para verificar la conexión.

• Nivel 5. Formalización: El estudiante es capaz de conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes. En este nivel el estudiante tiene objetos mentales de clases similares construidos a partir de propiedades observadas, la extracción de las cualidades comunes y el abandono de los orígenes de la acción mental de la persona (Pirie y Kieren, 1989). La descripción de estos objetos mentales de clases similares tiene como resultado la producción de definiciones matemáticas completas.

Además, se tiene en cuenta el primer acercamiento que tienen los estudiantes con el concepto de límite de una función, que es a través de la noción de aproximación y mediante la concepción dinámica del límite planteada por Blázquez y Ortega (2002) de la siguiente manera:

"Sea "f" una función y "a" un número real, el número "L" es el límite de la función "f" en el punto "a", y se escribe $\lim_{x \to a} f(x)$, si cuando "x" se tiende al número "a", siendo distinto de "a", sus imágenes "$f(x)$" tienden a "L"" (p. 14).

Estos elementos teóricos y conceptuales nos permitieron diseñar y rediseñar las actividades de la secuencia, en la que se pretende favorecer la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de Cálculo diferencial de la UIS.

Aspectos Metodológicos

La investigación que se reporta sigue una metodología cualitativa que se estructura en las fases de diseño, implementación y análisis de resultados a la luz de los elementos teóricos y conceptuales antes descritos. El punto de partida de la investigación fue el diseño didáctico para el estudio del concepto de límite de una función en estudiantes de bachillerato o de primer semestre universitario, realizada por Betancur, Guarin, Parada y Fiallo (2015).

Para el diseño de la secuencia de actividades, se tienen en cuenta algunos acercamientos epistemológicos y didácticos en la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, como es el caso de Pons (2014), para el autor ese acercamiento necesita usar las nociones de aproximación, tendencia, la concepción dinámica del límite, la concepción optima del límite, la concepción métrica del límite y el uso de las diferentes formas de representar una función (tabular, grafica, algebraica). Para el diseño se tienen en cuenta los aspectos metodológicos propuestos por Fiallo y Parada (2018), quienes plantean que la interacción con un Software Matemático Interactivo debe favorecer la actividad matemática por parte de los estudiantes. La secuencia didáctica del curso engrana la manipulación de medios computacionales con el trabajo con papel y lápiz, y el debate en el aula, la secuencia presenta una estructura intencional que responde a las siguientes fases: exploración libre, socialización de los resultados obtenidos, exploración dirigida, explicación y por último una tarea retadora.

A continuación se describen resultados de las actividades del Taller 2 que tiene como objetivo ilustrar las nociones de aproximación y tendencia que permitirán crear una noción intuitiva del concepto de límite de una función en un punto de manera dinámica con el uso de GeoGebra.

Acercamiento a la comprensión del concepto de límite de una función en un punto

Para realizar el análisis de las actividades del Taller 2, se tienen en cuenta las complementariedades de la acción y expresión planteadas a partir de los elementos teóricos y conceptuales, que permiten describir la comprensión del concepto de límite de una función un punto. Con este taller se pretende ilustrar de manera dinámica las nociones de aproximación y tendencia, inicialmente se presentan las nociones de manera unidimensional (recta numérica), luego se propone una actividad en un contexto geométrico pero de manera bidimensional para analizar las dos nociones y por último la relación de aproximación y tendencia pero ya de tipo funcional, todas estas actividades se proponen haciendo uso de GeoGebra.

En la actividad 1, se tiene como objetivo identificar la comprensión del estudiante sobre la noción de aproximación, y se espera que el estudiante pueda identificar dos sucesiones numéricas, una a izquierda que está dada por la variable “b” y otra a derecha que está dada por la variable “a”; pero ambas se aproximan a un mismo valor en este caso a 5.

Para este caso podemos observar (ver Figura 1) que el estudiante utiliza la representación gráfica (reta real) y la representación numérica (notación decimal) para ubicar los valores de ambas sucesiones una por izquierda y la otra a derecha de 5 en la recta real (acciones). En ese sentido se evidencia que el estudiante logra interpretar y explicar la existencia de la aproximación representada por las dos flechas direccionadas a 5 (expresión).

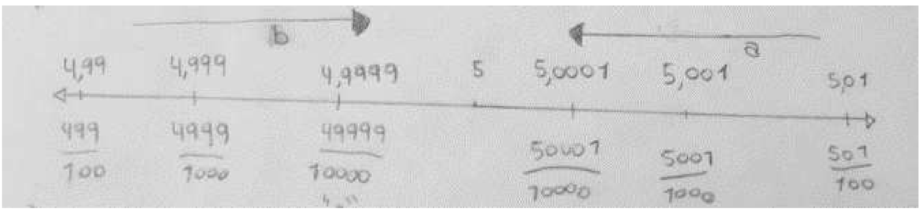


Figura 1. Interpretación de Aproximación

En la segunda actividad (ver Figura 2), se ilustran las nociones de aproximación y tendencia de manera dinámica con GeoGebra. Allí el estudiante reconoce que numéricamente es posible aproximarse a un número real tanto como se quiera (por izquierda y por derecha). Además que el estudiante identificó que es posible acercarse a un punto a partir de la disminución de la distancia, haciendo referencia en que cada vez que se acerca al punto rojo la distancia se hace más pequeña respecto a la anterior, es decir el estudiante está comparando magnitudes. En esta actividad el estudiante con ayuda del zoom (utiliza el deslizador “m”) puede reconocer la existencia de otros puntos. De manera que logre identificar que existe una sucesión de valores que se aproximan a 8, posición donde se encuentra ubicado el punto rojo.

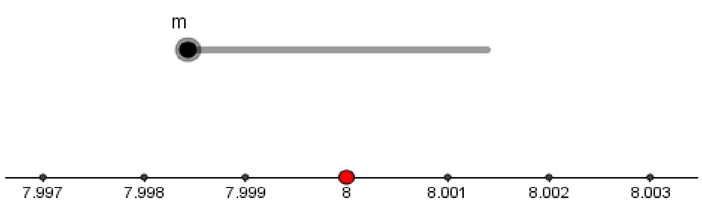


Figura 2. Simulación de la noción de Tendencia

En este caso el estudiante explica (ver Figura 3) que se pueden construir infinitos puntos más cerca al punto rojo. Es decir, la aproximación puede ser cada vez mejorada, el estudiante para explicar esta interpretación da el ejemplo de 8.0001 comparándolo con el último valor que genera el archivo propuesto. Estas respuestas planteadas por el estudiante permiten inferir que está interpretando la diferencia entre aproximación y tendencia como *“una aproximación que mejora cualquier otra*”.

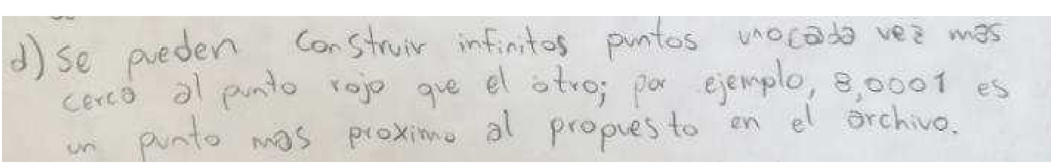


Figura 3. Interpretación de la noción de Tendencia

En la actividad 4, el estudiante establece aproximaciones a "$x = 3$" en el dominio de la función, relacionándolas con las tendencias de $f(x)$, con el fin de analizar el límite de la función en ese punto. Para obtener información de cómo el estudiante interpreta las aproximaciones, se le solicitó elegir valores próximos a $x = 3$, los cuales utilizó para analizar que sucede con la tendencia de la función. En este caso el estudiante decide realizar una tabla de valores relacionando valores en el dominio de la función que a medida que se aproxima a $x = 3$, $f(x)$ tiende a 8, y ese valor sería el límite de la función en ese punto.

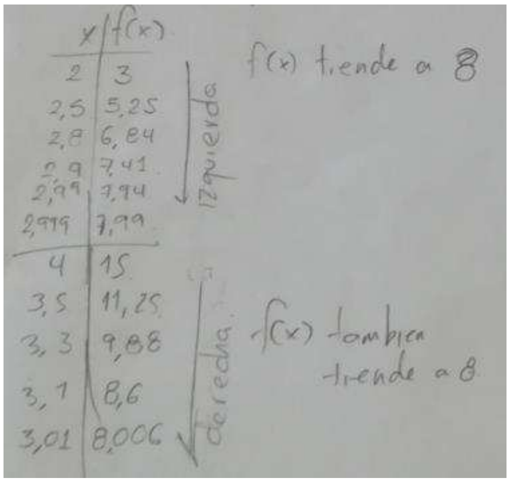


Figura 4. Interpretación del límite de una función en un punto

Esas aproximaciones son acciones que realizó el estudiante, que le permiten expresar que a medida que *"se aproxima a $x = 3$, $f(x)$ tiende a 8 por izquierda y por derecha"* (realizando dos flechas que indican tendencia en la Figura 4), y ese valor sería el límite de la función en ese punto

Reflexiones

Un acercamiento al concepto de límite mediante la aproximación y la tendencia posibilita que el estudiante logre entender el límite de una función como lo que sucede cerca del punto y no en el punto.

El primer momento en la comprensión de un concepto matemático según Thom y Pirie (2006) surge cuando se realizan acciones (físicas o mentales) con el fin de crear una idea del nuevo tema o concepto. En este caso se evidencia que el estudiante inicia a crear la imagen del límite de una función en un punto, a través del uso de la representación tabular, el uso de la hoja de cálculo de GeoGebra. Además, el estudiante logra establecer aproximaciones en el dominio y en el rango de la función a través del registro numérico.

Una contribución importante que lleva las nociones de aproximación y tendencia es, precisar las ideas que se tienen de aproximación por medio de distancias y tomar estas para entender la tendencia a través de la disminución de las mismas.

Referencias y bibliografía

Betancur, A., Guarin, S., Parada, S., y Fiallo J. (2015). La noción de aproximación óptima en la comprensión del concepto de límite. IX Simposio Nororiental de matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. Colombia.

Blázquez, S., y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En El futuro del cálculo infinitesimal. Grupo Editorial Iberoamérica. México. 331-354.

Blázquez, S., y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 8(30), 67-82.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall, (Ed). Advanced Mathematical Thinking. (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Fiallo, J., y Parada, S. (2018). Estudio dinámico del cambio y la variación. Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Pirie, S., y Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. For the learning of mathematics, 9(3), 7-11.

Pirie, S., y Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. Educational Studies in Mathematics, 23(5), 505-528.

Pons, J. (2014). Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto. (Tesis Doctoral). Universidad de Alicante. España.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students y epistemological obstacles related the limitis. Educational Studies in Mathematics. 18(4), 371-397.

Tall, D. (1991). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (Ed). Advanced mathematical thinking. (pp. 3-24). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Thom, J. S., & Pirie, S. E. (2006). Looking at the complexity of two young children's understanding of number. Jounal of mathematical Behavior, 25, 185-195.

Descriptores preliminares para la comprensión del concepto de Infinito y su relación con las funciones de variable real, en el contexto del Modelo de van Hiele

Alba Soraida **Gutiérrez** Sierra
Doctorando en Educación, Universidad Metropolitana de Educación Ciencia y Tecnología
Panamá
albasoraidagutierrez@gmail.com
René Alejandro **Londoño** Cano
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
renelondo@gmail.com

Resumen

Esta comunicación pretende mostrar resultados parciales de la investigación en curso, “Descripción de la comprensión del concepto de infinito y su relación con las funciones de variable real, en estudiantes de Educación Media y primeros semestres de Educación Superior, a través del Modelo de van Hiele”. La investigación está basada en un enfoque cualitativo y usa el método estudio de casos, lo cual admite la transformación de la realidad en un contexto educativo particular con miras a producir conocimiento práctico que pueda ser generalizado. El instrumento de indagación es la entrevista semiestructurada de carácter socrático, lo que hace posible confirmar descriptores hipotéticos que se resignifican a través de la implementación, modificación y refinamiento de la misma, posibilitando reconocer el nivel de compresión del concepto en cuestión.

Palabras clave: infinito, matemática, comprensión, razonamiento, van Hiele.

Introducción

Una de las tareas en educación es resignificar la cultura matemática, como un trabajo creador en el que maestros y estudiantes reorganizan el saber para utilizarlo en solución de problemas de la vida real. El pensamiento matemático “se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas” (Cantoral y otros, 2005, p.19). La problemática abordada desde el contexto de la investigación muestra que cuando los estudiantes se acercan al concepto de infinito, solamente lo hacen desde una noción intuitiva y relacionada con cantidad o tamaño, generando una serie de contradicciones conceptuales frente al hecho de que no pueden establecer con suficiencia y claridad la conexión directa que tiene el infinito con otros conceptos matemáticos. Respecto al tema, "se evidencia que el bajo rendimiento de los estudiantes en cursos de cálculo diferencial e integral, se encuentra asociado a la construcción del concepto de función; una de las razones más relevantes ante esta premisa, es la deficiente e incompleta comprensión del papel que juega el infinito en la teoría de los conjuntos" (Attorps, Björk y Radic, 2016, p.sf.). La presente comunicación pretende mostrar las dificultades que se generan en la concepción y definición del infinito y su relación con funciones de variable real, por parte de estudiantes de último año de educación media y primer año de Universidad. Para abordar esta problemática se utiliza modelo de van Hiele, el cual permite describir y explorar el nivel de razonamiento del concepto en cuestión.

Por su parte, Cantor (1932) señala que "existía una correspondencia biunívoca entre un conjunto y un subconjunto de sí mismo, lo que significó el establecimiento de una relación de orden para definir el infinito" (p.34). El avance del concepto de infinito, ha sido habitualmente una polémica, lo que ha provocado una permanente confusión en los estudiantes sobre los conceptos relacionados con él, dificultando la comprensión del concepto mismo asociado a las funciones de variable real. "Al no tener clara la relación de estos dos conceptos en el cálculo, surgen consecuencias frente a la modelación de situaciones y fenómenos científicos que fundamentan su análisis y explicación a través del comportamiento de las funciones" (Dolores, 2004, p.17). Por otro lado, en lo que respecta al concepto de función, algunos autores han demostrado la evolución de este y sus implicaciones, "manifestando que está íntimamente ligado al concepto primitivo de conjunto, y a su vez, induce al desarrollo de cantidad y de número evidenciando la relación con el infinito" (Gutiérrez y Jaime, 1989)

Soportes teóricos

El modelo de van Hiele es el soporte teórico que fundamenta la presente investigación, dado que permite describir cómo comprenden los estudiantes el concepto de infinito y su relación con el concepto de función, posibilitando diseñar descriptores hipotéticos para cada uno de los niveles de razonamiento correspondientes. Como herramienta importante para detectar el nivel de razonamiento de los estudiantes, se utiliza la entrevista socrática, la cual permite a través de preguntas intencionadas que no sugieren de manera directa una enseñanza, que el estudiante reflexione y comprenda el concepto en cuestión.

En cuanto al concepto de función, Gutiérrez y Jaime (1990) demostraron la evolución del concepto y sus implicaciones, poniendo de manifiesto que el concepto de función está íntimamente ligado al concepto primitivo de conjunto y, a su vez, induciendo al desarrollo de los conceptos de cantidad y de número, evidenciando la relación con el concepto de infinito.

El infinito y su enseñanza en las matemáticas

En las matemáticas el infinito aparece de diversas formas; para Jato (2012):

> Desde el comienzo de la formación escolar se empieza a conocer y convivir con el infinito, concretamente con el infinito potencial que paulatinamente va adquiriendo reflejo en nuestras estructuras mentales ya sea asociado a procesos cíclicos – alternancia entre el día y la noche- a procesos de conteo – números naturales- o a través del infinito geométrico (…) en cuanto al infinito actual este aparece en la escena matemática con el cálculo infinitesimal y se prolonga en la enseñanza de grados universitarios del ámbito técnico científico (p. 14).

La enseñanza del infinito inicia desde edades tempranas en el ámbito escolar, se sitúa hacia la representación de la numerosidad de un conjunto hasta la finalización del bachillerato, con la idea más o menos formal de la noción de límite, con la imagen exclusiva de un símbolo al cual se le atribuye el sinónimo de muy grande o muy pequeño. Esta singular representación ha dejado a un lado el papel que desempeña el infinito en innumerables tópicos de aprendizaje de la matemática en educación media y universitaria, relacionados con conceptos, como: Número real, sucesión, derivada, tangente u otros conceptos asociados. En la enseñanza de las matemáticas, la incorporación del infinito, permite dar una mirada de la literatura científica de diversos estudios para tratar de comprender el papel que desempeña en la construcción de objetos matemáticos; a partir de esto: Belmonte y Sierra (2009) consideran que el concepto de infinito es esencial para comprender nociones matemáticas como límite, continuidad, derivada, integral, sucesiones, funciones y series, entre otras.

El modelo de van Hiele y el concepto de infinito

El origen del modelo de van Hiele surge de las dificultades del aprendizaje en la geometría, fue abordado por los esposos Pierre M. van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, quienes en 1957 lo presentan como resultado en sus disertaciones doctorales en la Universidad de Utrecht (Holanda); la experiencia que los esposos poseían producto de su trabajo como docentes, los llevaron a estudiar de fondo las dificultades que mostraban sus estudiantes para solucionar problemas en la geometría, al plantear situaciones cotidianas de la misma índole en diferentes contextos, los estudiantes carecían de ideas y comprensión para alcanzar a resolverlos desde su propia perspectiva, es decir que cuando ellos aprendían los conceptos de memoria no era suficiente para plantear, resolver y hallar una solución válida; en consecuencia el fracaso los llevaba a pensar que la matemática era difícil y en particular la geometría.

El modelo de van Hiele ha sido implementado en diferentes investigaciones para describir la comprensión de algunos objetos matemáticos por parte de estudiantes; este modelo es una propuesta adecuada -entre muchas otras- que describe de manera integral y con suficiente rigor, cómo se desarrolla la evolución de la comprensión del concepto de infinito y sus implicaciones en otros campos de la matemática y demás áreas del conocimiento.

Cuando se reflexiona sobre la descripción y el proceso de comprensión de un concepto matemático específico, se asocia en relación a identificar diferentes formas de razonamiento y se puede valorar su progreso (Hoffer, 1893). A nivel de la instrucción, marca pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en el nivel de razonamiento geométrico en el que se encuentran. En consecuencia y como producto de las disertaciones, Pierre van Hiele diseñó un sistema de niveles de pensamiento en geometría y Dina Van Hiele enfocó sus estudios en el progreso de los niveles de pensamiento de los estudiantes

De esta forma concibieron que el proceso de aprendizaje bajo estos dos aspectos básicos permita explicar cómo el razonamiento geométrico de los estudiantes acontece a través de una serie de niveles. El aprendizaje, para los van Hiele, citados por Shaughnessy y Burger (1985), es una diferenciación y reestructuración progresiva de campos que producen estructuras mentales nuevas y más complejas. Los niveles altos son alcanzados si las reglas que rigen a las estructuras más bajas se han hecho explícitas y han sido interiorizados, llevando esto al desarrollo de estructuras mentales mucho más complejas.

Metodología

La investigación está orientada en un enfoque cualitativo, de tipo estudio de casos, cuyo propósito es alcanzar una comprensión en profundidad del caso en sí mismo; según Stake (1999) “solo se estudia un caso, o unos pocos casos, pero se estudian en profundidad” (p. 19). Por lo tanto, el estudio de casos se considera el más pertinente, por cuanto permite obtener información detallada de la manera como razonan los estudiantes entrevistados, en relación al concepto objeto de estudio (Londoño, 2011, p. 182). Para la recolección de la información se utilizó como herramienta fundamental la entrevista socrática; mediante el guion de entrevista se verifican los descriptores hipotéticos correspondientes a cada nivel de razonamiento y se describe la comprensión de los estudiantes en relación con el concepto de infinito, a través del concepto de función de variable real.

La Entrevista Socrática

El método socrático, nace de los diálogos que sostenía Sócrates para llevar al individuo a encontrar la verdad sobre el conocimiento. Por tal razón, se considera una estrategia para promover el pensamiento crítico, y de este modo, el estudiante sea quien descubra el conocimiento, utilizando una serie de preguntas y el análisis de sus propias respuestas, es decir; se construye conocimiento a partir de la reflexión crítica de una situación motivada. En este sentido, la elaboración de la entrevista socrática, debió ser cuidadosamente estructurada por varios aspectos: el primero es el lenguaje, factor fundamental para determinar si el estudiante ha comprendido los conocimientos matemáticos; entre otros, están el vocabulario y las relaciones significativas entre los conceptos, los cuales fueron factores de análisis en el desarrollo de la investigación. En estas razones, se resalta la descripción que realiza De la Torre (2003) sobre el método socrático y el modelo de van Hiele, trayendo algunos apartes de su artículo “El método socrático y el modelo de van Hiele”

> El método empleado por Sócrates consta de dos partes: destructiva una, creativa la otra. En la primera etapa, Sócrates toma como punto de partida la concepción del interlocutor acerca del asunto en cuestión, permitiéndole descubrir las contradicciones y las faltas de tal concepción. En la segunda etapa, llamada mayéutica, Sócrates se ve a sí mismo como una partera que ayuda a su interlocutor a dar a luz, a descubrir, a develar la verdad que lleva en sí mismo, a quitarle a esta verdad el velo que la cubre. Es esencial al método el empleo sistemático de la ironía socrática, que consiste en simular ignorancia sobre la materia de que se trata, con el fin de hacer aparecer la verdad, a través del diálogo entre el maestro y el aprendiz; la inducción en Sócrates no es un método de demostración o prueba, sino un procedimiento encaminado a sugerir el significado de una definición universal, que se presenta a la mente con fuerza y claridad. La definición, por su parte, se justifica en la medida en que las consecuencias derivadas de su adopción sean satisfactorias. En el modelo van Hiele se insiste en el cuidado que debe tenerse con las premisas siguientes: El maestro tiene que asegurarse del interés de los alumnos en el problema y debe captar su atención desde el comienzo. El método socrático sólo es efectivo en la medida en que se pueda garantizar que cada uno de los alumnos alcanza la solución mediante su trabajo personal. El profesor no podrá llenarse de impaciencia ni darles la solución prematuramente. El trabajo es individual y las conversaciones colectivas en el aula deberán ser guiadas por el maestro, de modo que se le permita avanzar también a aquellos que se muevan a paso lento. El maestro debe reconocer acertadamente la dificultad del problema, para que todos los estudiantes conserven el interés hasta el fin, sin que ninguno de ellos olvide el corazón del asunto. (p.101).

En este proceso, el diálogo simple pero complejo a la vez, evidencia como la metodología de Sócrates aporta al modelo, en el fondo induce la manera en que se puede enseñar al estudiante un concepto desde su propia experiencia, modificando de cierta forma lo aprendido y volviendo a analizar, reflexionar e inferir otra perspectiva del objeto matemático, entendido como la estimulación para orientar el razonamiento.

Resultados parciales

El modelo de "van Hiele es utilizado como una propuesta que permite describir las concepciones de razonamiento en un objeto matemático específico, desarrollando la indagación y cuestionamiento permanente para adquirir un conocimiento propio sin necesidad de enseñar" (Londoño y otros, 2017, p.124). Al describir cómo comprenden los estudiantes el concepto de infinito a través del concepto de función de variable real, se utilizaron descriptores hipotéticos de acuerdo a cada nivel establecido en el mismo modelo. A continuación, se especifican cada uno de los niveles que postula el modelo de van Hiele, las características enmarcadas en él y uno de los descriptores, a modo de ejemplo, que deben cumplir los estudiantes para estar clasificados de acuerdo al nivel de razonamiento en que se encuentra.

En este estudio se seguirá la nomenclatura por J. Llorens (1997):
Nivel 0, **Predescriptivo**
Nivel I, **de Reconocimiento Visual**
Nivel II, **de Análisis**
Nivel III, **de Clasificación, de Relación.**

Nivel 0. (Predescriptivo)

En este nivel, los estudiantes reconocen los elementos básicos aritméticos y geométricos para percibir y describir las figuras, formas o conceptos como un todo, enfatizándose en lo físico y concreto.

- Identifica que una recta y un segmento de recta están conformados por infinitos puntos

Nivel I. (Visual)

Para que un estudiante se encuentre clasificado en el Nivel I, de reconocimiento visual, debe: reconocer las figuras y formas por su apariencia global, y percibirlas como objetos individuales.

- Reconoce que hay infinitos números en un intervalo cerrado de la recta real.

Nivel II (De análisis).

En este nivel los estudiantes analizan las partes o elementos que componen una figura geométrica y sus propiedades, a partir de este análisis puede deducir otras propiedades de las figuras, generalizándolas a las figuras de una determinada clase, de otro lado, no relacionan las distintas propiedades de las figura geométricas, por lo que no pueden hacer clasificaciones de esas figuras basándose en sus propiedades.

- Analiza procesos que permiten construir biyecciónes entre un conjunto infinito y un subconjunto infinito propio de él, infiriendo que podrían tener la misma cantidad de elementos.

Nivel III (De clasificación o relación)

Los estudiantes relacionan las figuras y sus propiedades. Reconocen que unas propiedades se deducen de otras y son capaces de desarrollar secuencias de proposiciones para conjeturar que una propiedad se deriva de otra. Sin embargo; no reconocen la necesidad del rigor, ni la relación entre lo que han aprendido con otros sistemas deductivos que pueden ser semejantes; pueden seguir una demostración formal, pero generalmente no son capaces de reproducirla. Sin embargo, pueden clasificar lógicamente y aprender relaciones entre distintas clases de figuras, pero no comprenden la necesidad de la formalización (demostraciones generales) ni las estructuras axiomáticas.

- Reconoce de manera analítica la densidad de los reales en un intervalo definido.

Reflexiones o conclusiones.

En estudios como los de Londoño & Jurado (2005), Esteban (2003) Jaramillo C. (2001), entre otros, evidencian que el diseño de la entrevista socrática para la comprensión de diversos objetos matemáticos, permitió de manera efectiva conseguir el objetivo de describir la comprensión. A partir de los anteriores resultados y de el obtenido en la presente investigación, se puede conjeturar que la implementación de un dispositivo elemental pero bien estructurado, permite acceder fácilmente a la comprensión del concepto de infinito, sin duda necesario en el diseño de una entrevista socrática, pues contribuye a que el desarrollo del trabajo de campo se lleve a cabo con más naturalidad y efectividad en el proceso de comprensión.

Esta investigación evidencia que los procesos de descripción y razonamiento para la comprensión que tienen los estudiantes frente a la percepción no cuantificable sobre el concepto de infinito, puede contribuir de manera efectiva a establecer su relación con el concepto de función de variable real.

Referencias Bibliográficas

Belmonte, y Sierra J. (2009). Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito (tesis doctoral). Universidad de Salamanca, Salamanca, España.

Burger, W. y Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in MathematicsEducation,* 17(1), 31– 48.

Cantoral, R. & otros. (2005) "Desarrollo del Pensamiento Matemático" Editorial Trillas, Mexico.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2005) "Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis" Editorial Trillas, Mexico.

De la Torre, A. (2003) "El Método Socrático y el modelo Van Hiele". Universidad de Antioquía, Lecturas Matemáticas, volumen 24.

Dolores, C., Valero, M. (2004). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en la situación escolar. Epsilon, THALES, 58, 20(1), 45T73.

Esteban, P. (2003) "Estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de van Hiele". Tesis doctoral. Publicada. Editorial Universidad Politécnica de Valencia.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1989) "Bibliografía sobre el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele". Rev. de Enseñanza de las Ciencias nº 7, p. 89-95.

Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de van Hiele. En L. y. Sánchez, Teoría y práctica en Educación Matemática. Sevilla: Alfar.

Hoffer, A. (1893). *Van Hiele - basedresearch. R. Lesh & M. Landau, eds. Acquisition of mathematical concepts and processes.* New York.

Jato, S. (2012) "El infinito en las matemáticas de la enseñanza secundaria"

Jaramillo, L, & Pérez, P. (2001) "La noción de convergencia de una serie desde la óptica de los niveles de van Hiele". En: Educación Matemática. Vol., 13. No. 1.Grupo editorial Iberoamérica. México. p. 68 – 80.

Jaramillo, C y Campillo, L. (2001). Propuesta teórica de entrevista socrática a la luz del modelo de van Hiele. *Divulgaciones matemáticas,* 9 (1), 65-84.

Jurado, F., & Londoño, R. (2005). Diseño de una entrevista socrática para la noción de suma de una serie de términos positivos vía área de figuras planas. Antioquia: Universidad.

Londoño, R. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.* Tesis doctoral. Colombia: Universidad de Antioquia.

Londoño, R & otros. (2017) "Estudio comparativo entre el modelo de van-Hiele y la teoría de Pirie y Kieren. Dos alternativas para la comprensión de conceptos matemáticos. Revista Logos, Ciencia y Tecnologia, Policia Nacional, volumen 9, numero 2.

Llorens, J., & Pérez, P. (1997). An Extension of van-Hiele's model to the Study of Local Approximation. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology , 28 (5), 713-726.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Editorial Morata.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight. A theory of Mathematics Education*. London: Academic Press.

La Génesis Instrumental: El caso de la derivada direccional, un estudio del proceso de enseñanza y de aprendizaje mediado por objetos dinámicos en estudiantes de ingeniería

Pedro Vicente Esteban Duarte
Universidad EAFIT
Colombia
pesteban@eafit.edu.co

Hugo Rogelio Mejía Velasco
CINVESTAV
México
hmejia@cinvestav.mx

Luis Carlos Rojas Flórez
luis.rojas@cinvestav.mx
CINVESTAV
México

Resumen

El cálculo diferencial de funciones de dos variables es una de las áreas de las matemáticas de mayor importancia en el estudio de la ingeniería, los conceptos que se estudian en esta asignatura forman la base de otros conceptos que los estudiantes deben abordar en sus otras áreas de estudio. Sin embargo, y a diferencia del cálculo diferencial para funciones de una variable, el número de trabajos publicados en educación es escaso. Este escrito muestra avances de una tesis doctoral, cuyo principal objetivo es desarrollar comprensión conceptual de la derivada direccional en estudiantes de ingeniería. Para ello, se dispuso a crear una secuencia instruccional de enseñanza y de aprendizaje articuladas con objetos dinámicos en dos y tres dimensiones creados con el software GeoGebra. Para el análisis de la información recolectada se tomó como marco de referencia la aproximación instrumental, junto a la visualización como elemento articulador durante todo el proceso.

Palabras claves: Derivada Direccional, Objetos Dinámicos, Aproximación instrumental, Visualización, Conceptualización.

Introducción

El cálculo diferencial de funciones de varias variables es una asignatura de vital importancia en el estudio de las matemáticas e ingeniería a nivel universitario. Dentro de su contenido temático se estudian diferentes nociones que proveen de herramientas conceptuales al estudiante, que posteriormente debe utilizar en problemas, situaciones o construcciones de nuevos conceptos y conocimientos que se presentan en sus otras áreas de estudio. En esta asignatura, la visualización[1] forma parte fundamental en su comprensión, sus tópicos que giran alrededor de la interpretación geométrica de imágenes en dos y tres dimensiones, pueden tornarse abstractos y de dificultosa comprensión si no se cuentan con herramientas que permitan abordarlos de una manera clara. Por ello, desde el punto de vista de su enseñanza y de su aprendizaje, resulta fundamental considerar instrumentos que permitan al docente transmitir sus conocimientos de una manera accesible, y a los estudiantes escenarios que les faciliten la comprensión de los conceptos inmersos en esta asignatura de manera clara.

Dada la importancia del cálculo diferencial y en particular de la noción de la derivada direccional, en la comprensión conceptual y aplicativa de distintas nociones que deben desarrollar los estudiantes a través su carrera de ingeniería, se esperaría que hubiese gran cantidad de trabajos o investigaciones que abordaran la problemática de su enseñanza y de su aprendizaje; sin embargo, haciendo un barrido bibliográfico, se encuentra un reducido conjunto de trabajos publicados en esta rama. Algunos de ellos, hacen referencia principalmente a las funciones de dos variables (e.g. Trigueros y Martínez, 2012; Weber y Thompson, 2014), y a diferencia del cálculo diferencial en una variable donde abunda trabajos e investigaciones que se ocupan de esta problemática, son muy pocas las publicaciones sobre este cálculo para funciones en dos variables, y en particular de la derivada direccional, como lo hace ver Trigueros & Martínez, (2015).

> "Hay muy pocas publicaciones sobre el cálculo diferencial de tales funciones. La única publicación a la que nos referiremos, Weber (2012), incluye una discusión de la tasa de cambio de funciones de dos variables centradas en el uso del pensamiento covariacional para ayudar a los estudiantes a construir una noción de tasa de cambio en el espacio" (pág.1).

Algunos autores afirman que la enseñanza del cálculo diferencial se enfoca en el uso y aplicación de fórmulas algebraicas, lo que causa en los estudiantes dificultades en la comprensión conceptual (Artigue, (1995); Moreno, (2005)). Lo anterior no significa que este enfoque no contribuya de manera significativa en el proceso de aprendizaje, el problema radica cuando se deja a un lado la relación entre conceptos, sus fórmulas algebraicas e interpretaciones geométricas. Cuando esto ocurre, se corre el riesgo que los estudiantes perciban cada tópico como un tema aislado.

Por otro lado, en la mayor parte de los textos utilizados en la enseñanza del cálculo diferencial en una variable (Edwards & Penney, 2008; Larson & Edwards, 2013; Stewart, 2006),

---

[1] En el sentido de (Zimmermann and Cunningham, 1991, p. 12). "La visualización matemática es la capacidad del alumno para dibujar un diagrama apropiado (con lápiz y papel, o en algunos casos, con una computadora) para representar un concepto o problema matemático y usar el diagrama para lograr comprensión y como una ayuda en la resolución de problemas. En matemáticas, la visualización no es un fin en sí mismo sino un medio hacia un fin, que es la comprensión."

mucho antes de introducir el concepto de la derivada, se presentan registros asociados del concepto de pendiente, y utilizan estos posteriormente para introducir esta noción. Sin embargo, para funciones de dos variables en (3D) el espacio, no se presenta de manera explícita el concepto de pendiente, por el contrario, la primera discusión de este concepto se da con la introducción de las derivadas parciales. Una de las posibles razones que podría indicar lo anterior, es que los autores de estos libros asumen que el lector extenderá naturalmente el concepto de pendiente de dos a tres dimensiones, lo que en la realidad no ocurre.

De acuerdo con el planteamiento realizado, nuestra investigación plantea una propuesta que integra actividades de aprendizaje articuladas con objetos dinámicos en dos y tres dimensiones creados con el software GeoGebra, dirigidas y estructuradas a la comprensión de la derivada direccional. Nuestro principal objetivo fue el de diseñar una secuencia instruccional didáctica, que incorporara objetos dinámicos, para estudiar la comprensión de la derivada direccional en estudiantes de ingeniería. Así mismo, y en vista del componente tecnológico utilizado, para la investigación resultó necesario contar con un enfoque teórico, que tuviera en cuenta el carácter no trivial del uso de la tecnología como instrumento de aprendizaje. Por estas razones, seleccionamos como marco de referencia para el análisis de los datos derivados de la aplicación metodológica la Aproximación Instrumental. Sumado a lo anterior, y teniendo en cuenta que este trabajo se centra en el aprendizaje de un concepto que gira en torno al análisis geométrico de gráficos en dos y tres dimensiones, la visualización jugó un rol fundamental como elemento mediador en la comprensión de la derivada direccional.

Aproximación Instrumental

La humanidad a través de su historia se ha caracterizado por la construcción de herramientas o artefactos como solución a diferentes desafíos que se le han presentado en los distintos campos a través del tiempo. El ámbito de la educación matemática no ajeno a esta realidad, todas las herramientas que se han diseñado por más elementales que sean, han surgido como respuesta al incremento exponencial en la complejidad memorística, gráfica, algebraica, aplicativa e interpretativa de los conceptos que se estudian en las diferentes ramas a través del tiempo.

En el campo de la educación matemática, su desarrollo y evolución en gran parte ha estado ligado al uso de artefactos materiales físicos o simbólicos. Artigue (2002) menciona que, “El desarrollo de las matemáticas siempre ha dependido de las herramientas materiales y simbólicas disponibles para los cálculos matemáticos" (p.245). Por ejemplo, hoy por hoy podemos afirmar que es innegable el papel fundamental que juegan las herramientas o artefactos computacionales en el ámbito de la educación matemática, pues actualmente existen software que permiten explorar conceptos a través del cálculo simbólico (CAS), numéricos y gráficos, que ayudan a ampliar y facilitar el abordaje de nociones que hace unos años eran casi inexplorables por su complejidad.

Por otro lado, diseñar artefactos computacionales como objetos dinámicos, y aplicarlos dentro de un proceso de enseñanza y de aprendizaje en las matemáticas, no se debe limitar únicamente al uso aritmético del mismo. Estos deben ser diseñados con un objetivo de aprendizaje concreto, visible por los estudiantes a través de la interacción con estos, o en ocasiones con la ayuda de una persona externa. Los estudiantes deben vislumbrar la intencionalidad para el cual el artefacto fue construido, percibir su propósito y finalidad; cuando esto no ocurre, el artefacto pierde toda utilidad. Este proceso de interacción requiere que el estudiante desarrolle esquemas mentales en el sentido de Vergnaud (2009), que involucran habilidades en el uso del artefacto y conocimiento del contexto (en nuestro caso matemático) en las que el artefacto es útil. Es precisamente aquí donde el artefacto se convierte en un instrumento valioso y funcional, que media la actividad para el cual fue diseñado. Por consiguiente, convertir un artefacto en un instrumento en manos de un estudiante está lejos de ser trivial, requiere tiempo y esfuerzo por parte de él y del docente, e implica un descubrimiento progresivo de las propiedades y características del artefacto, todo este proceso es lo que se denomina dentro del marco de la Aproximación Instrumental, la génesis instrumental.

Así pues, transformar un artefacto en un instrumento implica dos sentidos: por un lado, está el proceso que está ligado a las características del artefacto, sus limitaciones y potencialidades que conforman las técnicas, formas de uso y comprensión conceptual del sujeto, a este se le llama la instrumentación. Y por otro, están las concepciones y preferencias del sujeto, éste puede cambiar la manera en que utiliza el artefacto, e incluso puede llegar modificarlo o personalizarlo a fin de adaptarlo a sus necesidades, a este proceso se le llama instrumentalización.

Propuesta metodológica

Para la aplicación metodológica, se crearon una serie de actividades de aprendizaje apoyadas en objetos dinámicos desarrollados con el software GeoGebra. Las actividades abarcan conceptos como funciones de dos variables, trazas, curvas de nivel, planos, rectas en el espacio, límites y continuidad, entre otros conceptos subyacentes necesarios para la construcción conceptual de derivada direccional. La selección del grupo experimental se realizó de manera voluntaria, de 31 estudiantes que recién iniciaban la asignatura de cálculo vectorial, ocho de ellos aceptaron participar en la investigación.

La ejecución de la propuesta se enmarcó en dos componentes que se articularon entre sí durante todo el proceso de ejecución. Por un lado, estaba el componente tecnológico y didáctico que consistió en elaborar una secuencia instruccional basada en objetos dinámicos creados con el software GeoGebra para la enseñanza y el de aprendizaje de la derivada direccional; y por otro, el componente de análisis, que comprendía la implementación de descriptores de evaluación (test de conocimientos, entrevistas semiestructuradas y videos de cada una de las prácticas) que permitieran analizar bajo el marco de la aproximación instrumental, la comprensión de la derivada direccional y conceptos asociados en los estudiantes.

Para la secuencia instruccional se diseñaron tres tipos de objetos, unos para operar y comparar, otros para afianzar conceptos, y otros más para validar definiciones o teoremas. Con cada una de las actividades, se pretendía que el estudiante a partir de la manipulación y de la visualización provista por los objetos, interpretara geométricamente el concepto o conceptos inmersos en cada uno de ellos. Así mismo, que articulara los conocimientos adquiridos a medida que iba avanzando en la secuencia, y consiguiese traducir dichas interpretaciones a un lenguaje numérico, algebraico y simbólico, que lo guiara a conceptualizar la derivada direccional a partir de su definición como un límite de una función de una variable, y también como el teorema que lo define.

En total se realizaron 15 objetos dinámicos que incorporaban vistas en dos y tres dimensiones, presentaban componentes dinámicos gráficos, numéricos, textuales, casillas de entrada de funciones, datos, expresiones algebraicas, y otros; que posibilitaba al estudiante explorar con múltiples ejemplos cada uno de los conceptos necesarios para la conceptualización de la derivada direccional. Seguidamente se muestran dos de los objetos dinámicos más representativos.

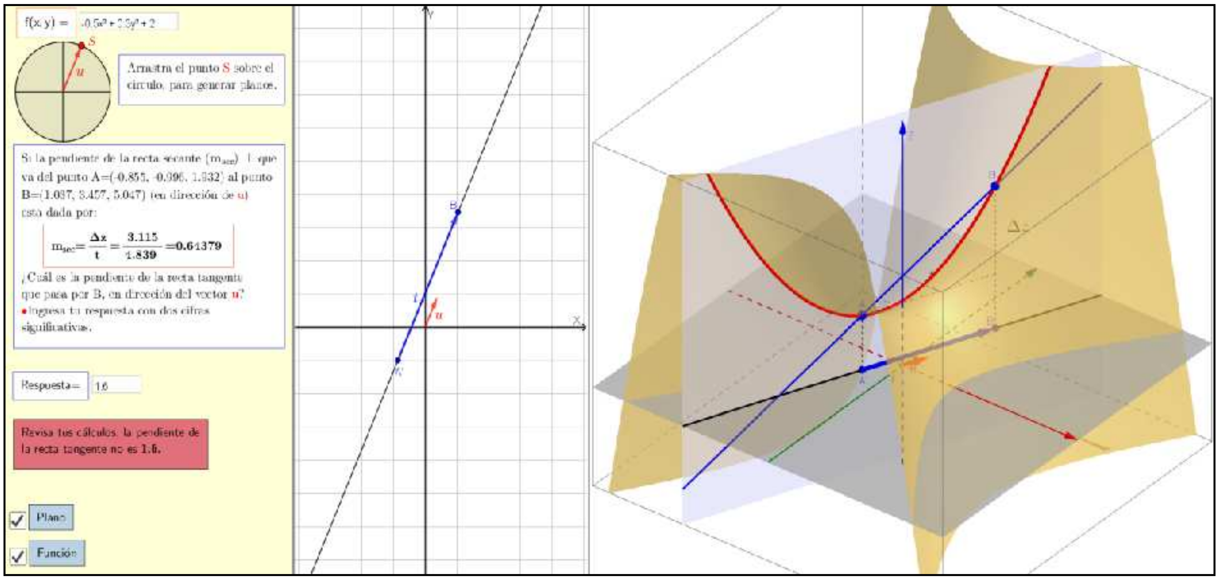


Figura 1. Aproximación de la pendiente de una recta tangente a una función $z = f(x, y)$.

La Figura 1 muestra el objeto con cual se introdujo la definición de la derivada direccional como el límite de una función en una variable. Con esta práctica se buscaba que el estudiante a partir de las comprensiones adquiridas en las prácticas anteriores, junto a la manipulación, visualización y componentes numéricos y textuales presentes en el objeto, aproximara el valor de la pendiente de una recta tangente a la gráfica de una función $z = f(x, y)$ en un punto B en dirección de un vector unitario u, a través del valor de las pendientes de una sucesión de rectas secantes que pasaban por el punto B y por otro punto cercano A, ambos dentro de una curva o traza dada por la intersección de la superficie y un plano vertical paralelo a un vector u, y posteriormente a partir de una serie de preguntas propuestas por el docente, guiar al estudiante a la formalización del concepto como la definición del límite de una función de una variable.

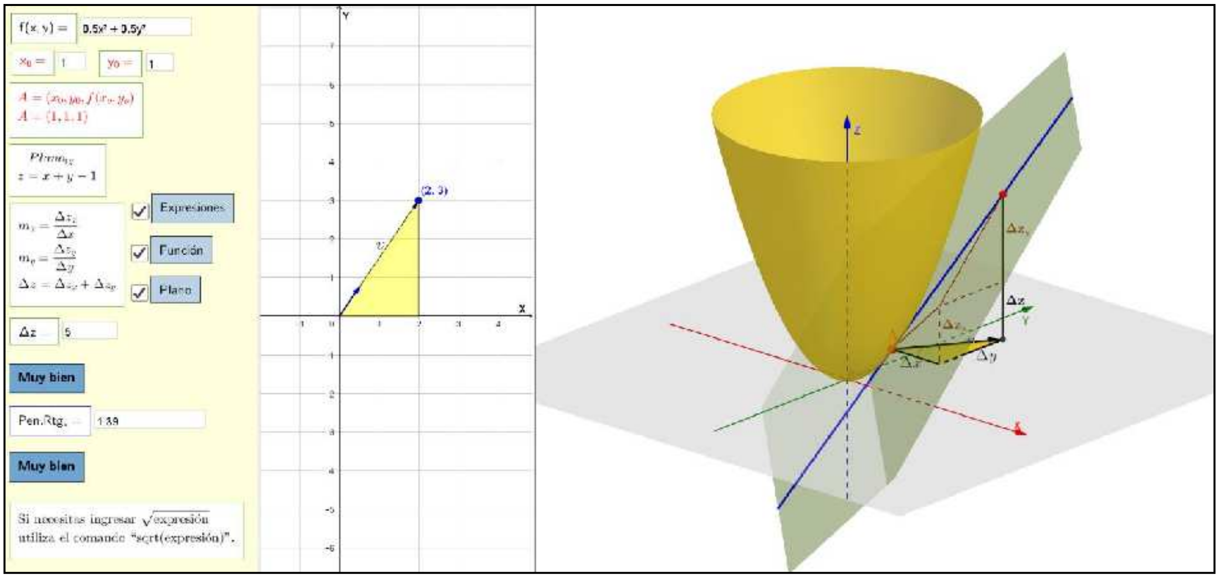


Figura 2. Recta tangente contenida en un plano tangente a una función $z = f(x, y)$.

La Figura 2, muestra el objeto que refiere a la construcción del teorema de la derivada direccional como el producto punto entre el operador gradiente $\nabla f(x, y)$ y un vector unitario u, es decir $D_u f(x, y) = \nabla f(x, y). u$. Cabe la pena señalar que en este punto de la secuencia instruccional los estudiantes ya han realizado con éxito otras actividades que incluyen conceptos como vectores, pendiente de una recta en el espacio, pendiente sobre planos y otros, necesarios para conceptualizar la derivada direccional a través de este teorema. El propósito de esta actividad era articular todos y cada uno de los conceptos desarrollados prácticas anteriores; con base en ello y junto a la exploración visual y algebraica del objeto, se buscaba que el estudiante en principio a partir de una expresión numérica determinara la pendiente de la recta tangente a la función $z = f(x, y)$ que estaba contenida en el plano en dirección de un vector $v = \langle \Delta x, \Delta y \rangle$ como muestra la figura 2, y posteriormente a partir de una serie de preguntas propuestas por el docente, guiar al estudiante a la formalización del concepto como el teorema que define la derivada direccional.

Conclusiones

A partir de la información recolectada, se puedo dar cuenta de los progresos que iban adquiriendo los estudiantes en cuanto al manejo y apropiación de todos y cada uno de los objetos. Por un lado, se evidenció el proceso de instrumentalización a partir del desarrollo de esquemas de uso, que lograron los estudiantes, en vista de la manera competente que utilizaron los elementos de cada uno de los objetos. y por otro, el proceso de instrumentación y desarrollo de esquemas de acción instrumentada, en cuanto a los elementos técnicos, conceptuales y colaborativos; este último en relación con las estrategias grupales que utilizaron en la solución de cada una de las actividades.

Por otro lado, los elementos gráficos, dinámicos, numéricos y textuales utilizados en las actividades permitieron a los estudiantes interactuar y explorar cada uno de los objetos de manera activa, encontrando una retroalimentación instantánea de los elementos antes mencionados, que propició en ellos la extrapolación del conocimiento adquirido a medida que avanzaban en cada una de las prácticas. En otras palabras, se pudo dar cuenta del proceso de génesis instrumental logrado por los estudiantes tanto en los temas subyacentes a la derivada direccional como de éste mismo.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática (pp. 97–140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Edwards, H., and Penney, D. (2008). Calculus: Early Transcendentals 6th Edition, Prentice Hall

Larson, R., & Edwards, B. H. (2013). Calculus of a single variable. Cengage Learning.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez & M. Torralba (Eds.), IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 81–96). Córdoba, España: Universidad de Córdoba.

Stewart, J. (2006). Calculus: early transcendentals (6th ed.). Boston: Thomson-Brooks/Cole. Strauss, M., Bradley, G. & Smith, K. (2002). Calculus (3rd ed.). Upper Saddle River: Prentice Hall.

Trigueros, M. & Martínez, P (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. Educational Studies in Mathematics, 81(3), 365-384.

Trigueros, M. & Martínez, P. (2015). Student understanding of directional derivatives of functions of two variables. In Proceedings of the 37th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. East Lansing, MI: Michigan State University.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual _elds. Human development, 52(2):83{94}.

Weber E. (2012). Students' Ways of Thinking about Two-Variable Functions and Rate of Change in Space. Ph.D. Dissertation. Arizona State University.

Weber, E., & Thompson, P. W. (2014). Students' images of two-variable functions and their graphs. Educational Studies in Mathematics, 87(1), 67-85.

Zimmermann, W. and Cunningham, S. (1991). Visualization in teaching and learning mathematics. Mathematical Association of America.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Análisis teórico de los operadores lineales diagonalizables con base en la teoría APOE

Esteban **Mendoza** Sandoval
Universidad Autónoma de Guerrero
México
emendoza@uagro.mx
Flor Monserrat Rodríguez Vázquez
Universidad Autónoma de Guerrero
México
flor.rodriguez@uagro.mx
Jesús **Romero** Valencia
Universidad Autónoma de Guerrero
México
jromv@yahoo.com
Ademir **Basso**
CEPACS-PR
Brasil
ademir_basso@yahoo.com.br

Resumen

Debido a la abstracción de algunos conceptos del álgebra lineal y la formalidad con la que se suele tratarse a esta asignatura, el aprendizaje por parte de los estudiantes sigue siendo endeble. Respecto a los operadores lineales que son diagonalizables como foco de investigación se encuentran estudios o acercamientos a conceptos relacionados, así como estrategias con el uso de tecnología para mejorar el aprendizaje sobre la diagonalización de matrices. Por ende, se realiza un estudio sobre la comprensión de los operadores lineales diagonalizables en estudiantes de una licenciatura en matemáticas o una carrera a fin de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México con base en la teoría APOE. Concretamente se presenta el resultado de la primera componente del ciclo de investigación que propone dicha teoría, una descomposición genética hipotética de los operadores lineales diagonalizables.

Palabras clave: álgebra lineal, teoría APOE, análisis teórico.

Introducción

En la mayoría de las universidades en los cursos de álgebra lineal no se alcanza el nivel de aprendizaje esperado (Trigueros et al, 2015). Profesores y estudiantes consideran los temas de álgebra lineal difíciles (Possani, Trigueros, Preciado, y Lozano, 2010; Salgado y Trigueros, 2015). Según Parraguez, Lezama y Jimenez (2016) es difícil alcanzar los objetivos de enseñanza y aprendizaje propuestos para los cursos de álgebra lineal.

En los cursos de álgebra lineal se aborda el estudio de matrices, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales, productos internos, ortogonalidad y la teoría de la diagonalización. Respecto a la diagonalización Yildiz (2013) realiza un proyecto de enseñanza del álgebra lineal con el uso de tecnología, con dos objetivos 1) investigar cómo incorporar las TIC dentro de los cursos de nivel superior; 2) desarrollar una serie de nuevos materiales de instrucción sobre varios temas dentro de nivel pregrado en matemáticas, en dicho trabajo se pretende evaluar el uso efectivo de calculadoras avanzadas como herramienta de asistencia para promover la comprensión conceptual de la diagonalización. Asimismo presenta su forma de enseñar como una combinación de experimentación teórica y un en foque algorítmico y reporta que las calculadoras avanzadas con tareas cuidadosamente diseñadas pueden proporcionar la adquisición de conocimiento y facilita la percepción del concepto. Para el caso de la diagonalización, considera que las calculadoras avanzadas son una herramienta valiosa para enseñar dicho concepto debido que estas ofrecen asistencia a los estudiantes para los cálculos conservando su atención en los cálculos de la matriz.

Por otra parte, Salgado y Trigueros (2015) realizan un estudio de la enseñanza de valores y vectores propios con base en la teoría APOE. Muestran evidencia de tres estudiantes que logran una construcción objeto a partir de sus tareas diseñadas bajo este enfoque. Además de validar su descomposición genética, sugieren que dicho enfoque teórico es alentador para el tratamiento de estos conceptos que están relacionados con los operadores lineales diagonalizables. Referente al tema operador lineal diagonalizable, desde la perspectiva de APOE y desde otras perspectivas se ha encontrado poca investigación durante la revisión bibliográfica y no se ha encontrado al momento investigaciones que atiendan la compresión de los operadores lineales diagonalizables, se tiene antecedentes de conceptos relacionados al tema, además de estrategias pedagógicas por medio de software para facilitar los cálculos y se logre diagonalizar matrices.

La importancia de diagonalizar a los operadores lineales, cuando es posible, es porque reduce significativamente los cálculos al tener una representación matricial sencilla y esto produce un mejor entendimiento de cómo actúa un operador lineal sobre el espacio vectorial en el cual se ha definido.

Nuestro interés es investigar lo que refiere a los operadores lineales diagonalizables (OLD). Estos objetos son un objetivo de enseñanza particular del álgebra lineal y se requiere de relacionar conceptos específicos para lograrlo, por ejemplo: determinante, matriz asociada a una transformación lineal, matriz diagonal, base ordenada, polinomio característico, valores y vectores propios etc., por mencionar algunos. La pregunta directriz de esta investigación es: ¿Qué estructuras y mecanismos mentales están asociados a los operadores lineales diagonzalizables en estudiantes de nivel superior de una licenciatura en matemáticas? Para responder esta pregunta de investigación se tiene el siguiente objetivo de investigación: Describir y caracterizar los mecanismos y estructuras mentales asociados a los operadores lineales diagonalizables en estudiantes de nivel superior de una licenciatura en matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro) por medio de una descomposición genética que es "un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar construir con el fin de aprender un concepto matemático específico" (Arnon et al., 2014, p. 27). En este escrito concretamente se presenta el resultado de la primera componente del ciclo de investigación que propone la teoría APOE.

Marco teórico y metodológico

La investigación se sustenta sobre la base de la teoría APOE la cual tiene fundamentos en la abstracción reflexiva (Piaget, 1985), y es entendida como un mecanismo mental que consta de dos partes: (1) conocimiento sobre un objeto matemático y las operaciones que actúan sobre dicho objeto, desde un nivel de cognición inferior a uno superior de operaciones (de acciones a procesos y de procesos a objetos) y, (2) reorganización y reconstrucción del objeto y de las operaciones que actúan en él, en una etapa superior que da como resultado el contenido al cual se le pueden aplicar nuevas operaciones (Arnon et al., 2014; Badillo, Trigueros y Font 2015).

Esta postura teórica enfatiza sobre el conocimiento matemático y la habilidad para reorganizar conocimiento y con ello construir o reconstruir estructuras mediante la abstracción reflexiva. Las construcciones que propone la teoría son Acción, Proceso, Objeto y Esquema, para esta parte de la investigación se consideraron las siguientes:

Acción. Según Piaget y adoptado por la teoría APOE, un concepto es concebido primero como una acción, es decir, como una transformación dirigida externamente de un objeto, u objetos previamente concebida. Una acción es externa en el sentido de que cada paso de la transformación debe realizarse de forma explícita y guiada por instrucciones externas; adicionalmente, cada paso debe introducir al siguiente, es decir, los pasos de la acción no pueden todavía ser imaginados y ninguno se puede saltar. (Arnon et al., 2014, p. 19)

Proceso. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada en un proceso mental. Un proceso es una estructura mental que lleva a cabo la misma operación acción que se interioriza, pero totalmente en la mente del individuo, permitiendo así al individuo imaginar la realización de la transformación sin tener que ejecutar cada paso de forma explícita. (Arnon et al., 2014, p.339).

Objeto. Si uno se da cuenta del proceso en su totalidad, se da cuenta de que las transformaciones pueden actuar en esa totalidad, y realmente puede construir tales transformaciones (explícita o en la imaginación de uno), entonces se dice que el individuo ha encapsulado el proceso en un objeto cognitivo. Por ejemplo, para el concepto de función, la encapsulación permite aplicar transformaciones de funciones tales como la formación de un conjunto de funciones, definir las operaciones aritméticas sobre dicho conjunto, dotándola de una topología, etc. (Dubinsky, Weller, McDonald, y Brown, 2005, p.339)

Dichas construcciones: acciones, procesos, objetos y esquemas se reestructuran y se adaptan para dar solución a problemas matemáticos. Dubinsky considera cinco tipos de mecanismos mentales (tipos de abstracción reflexiva), tomando cuatro de las ideas de Piaget y anexando uno a la teoría, estos son: interiorización, encapsulación, coordinación, reversión, des-encapsulación, tematización y generalización (Dubinsky, 1991). Estos tipos de abstracción reflexiva tienen la función de relacionar en un momento preciso las estructuras y transitar de una estructura a otra o revertir si el individuo lo considera conveniente.

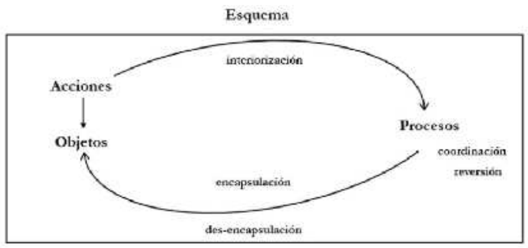


Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de conocimiento matemático

En la figura 1, tomada de Arnon et al., (2014, p. 18) se muestran las conexiones entre las construcciones mentales que están dadas por los mecanismos mentales; según los autores ejemplifica cómo un individuo construye estructuras matemáticas, el diagrama sugiere quizá que la construcción de conocimiento matemático es lineal, advierten que no necesariamente.

Para llevar a cabo la investigación se recurrió al paradigma de investigación que propone la teoría APOE. El paradigma de investigación que propone la teoría APOE considera tres componentes: Análisis Teórico; Diseño e implementación de actividades; Recolección y Análisis (figura 2) tomada de Arnon et al., (2014, p. 94).

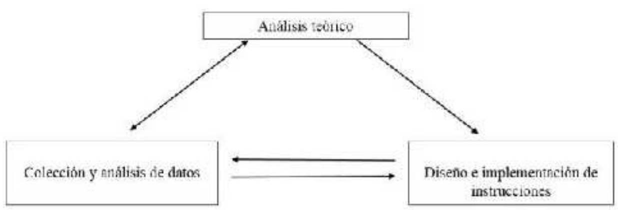


Figura 2. Ciclo de investigación de la teoría APOE

Una investigación bajo el foco de este paradigma, se inicia con un análisis del concepto a estudiar, esto arroja una descomposición genética hipotética, en el sentido que aún no se prueba experimentalmente con el trabajo de los estudiantes. Respecto a la segunda componente, la implementación se lleva a cabo normalmente usando el Ciclo de Enseñanza ACE, se considera la importancia del aprendizaje colaborativo y básicamente consiste en instrucciones las cuales deben apoyar las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética preliminar formando grupos pequeños de discusión. Por otro lado, la tercera componente del paradigma de investigación que propone la teoría APOE la recopilación y análisis de los datos, es una componente muy importante puesto que, sin evidencia empírica, una descomposición genética sigue siendo una mera hipótesis (Arnon et al., 2014).

Diseño metodológico

Se consideró la definición matemática del OLD que se presentan los libros de texto que se sugieren en el plan y programa de estudio de la licenciatura en matemáticas que se oferta en la UAGro, se centra la atención en cómo este se presenta en los libros y la relación con otros conceptos con el fin de analizar e identificar que conceptos involucra la definición directamente para sugerirlos como conceptos previos. Se describió el tipo de concepción de los conceptos previos y los que resultaron estar relacionados con los OLD por medio de las descomposiciones genéticas reportadas en la literatura especializada en el área; se consideró las sugerencias de expertos en álgebra lineal respecto a los OLD. Con base en lo anterior se propone una descomposición genética hipotética de los operadores lineales diagonalizables (DGHOLD), es decir, un modelo cognitivo asociado al OLD que describe la construcción que podría hacer un estudiante a la hora de aprender dicho concepto.

Resultado: análisis teórico de los operadores lineales diagonalizables

Se considera la definición matemática del operador lineal diagonalizable en diferentes libros de texto de álgebra lineal y la relación con algunos conceptos de álgebra lineal. Se centra la atención en el concepto de OLD y cómo este se presenta en los libros ¿Pero qué es un operador lineal? Algunos libros consideran una transformación lineal de V sobre si mismo como: operador lineal o endomorfismo, Tabla 1.

Tabla 1

Operador lineal en los libros de texto

Autor	Definición
Hoffman y Kunze (1973, p. 76)	Si V es un espacio vectorial sobre el campo F, un operador lineal V es una transformación lineal de V sobre V.
Grossman, (2008, p. 460)	Las transformaciones lineales con frecuencia se denominan operadores lineales.
Anton (1994, p. 250)	Si, $T: V \to V$ es una transformación lineal de un espacio vectorial V en sí mismo, entonces T es un operador lineal sobre V.

Los operadores lineales se pueden considerar como trasformaciones lineales definidas entre un mismo espacio vectorial, mientras que una trasformación lineal puede definirse entre diferentes espacios vectoriales. En esta investigación consideramos al operador lineal en el sentido de Hoffman y Kunze (1973) y se consideran los operadores lineales definidos en un espacio vectorial dimensionalmente finito. Respecto a los operadores lineales diagonalizables, se analizaron las definiciones que presentan diferentes libros de texto que usualmente son usados para los cursos de álgebra lineal de la UAGro, Tabla 2.

Tabla 2

Definición de operador lineal diagonalizable

Autor	Definición
Hoffman y Kunze (1973, p. 183)	Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita V. Se dice que T es diagonalizable si existe una base de V tal que cada vector suyo sea vector propio de T.
Poole (2011, p. 527)	Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T: V \to V$ una transformación lineal. Entonces T se llama diagonalizable si existe una base C para V tal que la matriz $[T]_C$ sea una matriz diagonal.
Godement (1974, p. 529)	Sea u un endomorfismo de un espacio vectorial E de dimensión finita *n* sobre un cuerpo conmutativo K. Se dice que u es diagonizable si existe una base de E

	formada por vectores propios de u; dicho de otra forma, respecto a la cual la matriz de u sea diagonal.
Friedberg, Insel, y Spence (1982, p. 233)	Se dice que un operador lineal T sobre un espacio vectorial dimensionalmente finito V es diagonalizable si existe una base β para V tal que $[T]_\beta$ sea una matriz diagonal. Una matriz cuadrada A es diagonalizable si A es similar a una matriz diagonal.

De las anteriores definiciones en libros que se sugieren como bibliografía en los cursos de álgebra lineal, se resalta que el estudio de la diagonalización puede ser tratado desde un punto de vista matricial, esto es, “Una matriz A de $n\ x\ n$ es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D.” (Grossman, 2008, p. 557). Pero también, se puede hacer desde el punto de vista funcional (tabla 2). Dado que las definiciones de Hoffman y Friedberg son equivalentes se deduce que la diagonalización de los operadores lineales, se puede analizar desde un punto de vista funcional y matricial. Dicho análisis conlleva a relacionar diferentes conceptos desde ambos puntos de vista; en su forma funcional, determinando la existencia de una base donde cada vector suyo sea un vector propio del operador lineal dado; desde el punto de vista matricial, encontrando una matriz diagonal similar a la matriz dada (Figura 4).

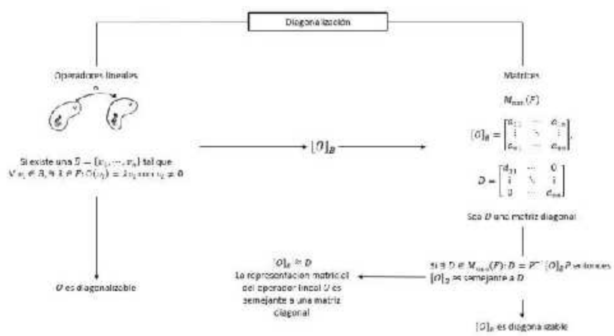


Figura 3. Diagonalización en álgebra lineal

Análisis de descomposiciones genéticas de conceptos relacionados al OLD

Para este análisis consideramos las estructuras que se proponen en las diferentes descomposiciones genéticas de conceptos relacionados con los OLD y de manera hipotética se proponen para los casos que no se cuente con una descripción de la estructura del concepto. Los conceptos que se analizaron son: transformación lineal, base ordenada, matriz asociada a una transformación lineal (MAT), determinante, matriz semejante, valores y vectores propios.

Con una concepción proceso de transformación lineal un estudiante es capaz de considerar a la transformación lineal como una función que conserva combinaciones lineales, es decir, que conserva la adición vectorial y el producto escalar definido en su dominio y codominio (Roa y Octack, 2010). A partir de la descomposición genética de Kú (2007) y lo expuesto en Mendoza-Sandoval, Rodríguez-Vásquez y Roa-Fuentes (2015) de base y base ordenada respectivamente, en una concepción proceso de base ordenada, un individuo puede reflexionar sobre el posible orden de los elementos de la base B, decidir cuál será dicho orden, y establecer si un vector dado o un conjunto de vectores podría escribirse como combinación lineal de los elementos B con el orden establecido o dar una base para el espacio vectorial dado; en una concepción proceso de la MAT, un individuo puede determinar la representación matricial dado el operador lineal para un par de bases específicas (Montelongo, 2016); con una concepción proceso de determinante, suponemos que un individuo es capaz de calcular el determinante de una matriz sin importar su tamaño; una estructura proceso de valores y vectores propios, un individuo reconoce el paralelismo de los vectores Av y v para cualquier espacio de R^n, reconocen que un valor propio es un escalar que cambia la magnitud y posiblemente la dirección del vector v (Salgado y Trigueros, 2014; 2015); con una concepción proceso de matriz semejante, un individuo puede encontrar una matriz P tal que, dada una matriz A se satisfaga $D = P^{-1}AP$ con D la una matriz diagonal.

Conclusiones

Con sustento en el análisis teórico, la revisión de algunas descomposiciones genéticas existentes, aunado a esto, la experiencia de los investigadores y las sugerencias de expertos respecto al álgebra lineal se propone la siguiente descripción de las estructuras asociadas al OLD de manera hipotética. Las estructuras previas para iniciar la construcción de los operadores lineales diagonalizables son: concepción proceso de transformación lineal; concepción proceso de base ordenada; concepción proceso de la MAT; concepción proceso de matriz semejante; concepción proceso de vector y valor propio.

Descomposición genética hipotética del OLD: Construcción cognitiva del OLD como objeto

La construcción del OLD como un objeto cognitivo podría darse de la siguiente manera en un individuo. Dado un espacio vectorial V de dimensión finita n sobre un campo F y un operador lineal O, con una concepción proceso de base ordenada, el individuo, encuentra una base B ordenada para V. Con su concepción proceso de vector propio, determina si cada vector $v_i \in B$ es un vector propio de O, en este caso, con la información obtenida y su concepción proceso del operador lineal decide si es o no diagonalizable. Si los $v_i \in B$ no todos son vectores propios de O entonces el individuo con su concepción proceso de la matriz asociada a una transformación lineal (MAT) encuentra la representación matricial de O respecto a la base B, es decir $[O]_B$. Con su concepción proceso de matriz semejante, encuentra una matriz diagonal D, si existe, tal que $D = P^{-1}[O]_B P$ con lo que concluye que O es un operador diagonizable al cual puede aplicarle acciones específicas, Figura 5.

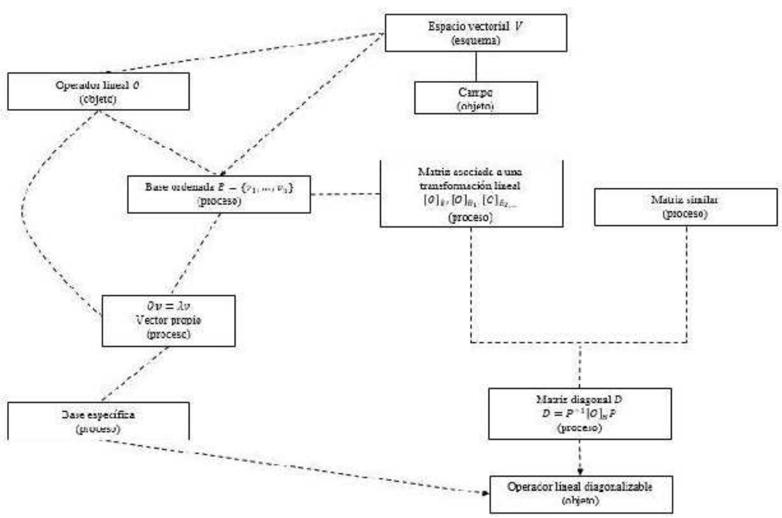


Figura 4. Construcción cognitiva como objeto de los OLD

Se propone dicha construcción cognitiva como Objeto de los operadores lineales diagonalizables hipotética, es decir, que no está validada experimentalmente. Dicho modelo cognitivo hipotético que se prepone, puede ser un punto de partida para la comunidad interesada en indagar y/o profundizar sobre las estructuras y mecanismos asociados a los operadores lineales diagonalizables desde el punto de vista de la teoría APOE.

Referencias y bibliografía

Arnon, L., Cottill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education*. New York: Springer Netherlands. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Badillo, E., Trigueros, M., y Font, V. (2015). Capítulo 2 : Dos aproximaciones teóricas en Didáctica del Análisis Matemático : APOE y EOS . En C. Azcárate, M. Camacho-machin, M. González, y M. Moreno (Eds.), *Didáctica del análisis matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 31–51).

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in avanced mathematical thinking. En T. David (Ed.), *Advanced mathematical thinking* . Dordrecht: Springer Netherlands. (pp. 95–126)

Friedberg, S., Insel, A., y Spence, L. (1982). *Algebra Líneal* (primera ed). México: Publicaciones cultura, S.A.

Godement, R. (1974). *Álgebra*. Madrid: Tecnos, S. A.

Grossman, S. (2008). *Álgebra lineal* (6a ed.). México: McGRAW-HIL.

Hoffman, K., y Kunze, R. (1973). *Álgebra lineal*. New Jersey: Prentince-Hall.

Kú, D. (2007). *Aprendizaje de la base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE (tesis de maestría inédita)*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Mendoza-Sandoval, E., Rodríguez-Vásquez, F., y Roa-Fuentes, S. (2015). Estudio del concepto matriz de cambio de base en términos de la Teoría APOE. En C. Fernández Verdú, M. Molina Gonzáles, y N. Planas Raig (Eds.). *Alicante: Investigación en educación matemática XIX*. Recuperado de http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/51542/1/2015-Actas-XIX-SEIEM_36.pdf (pp. 371–379)

Montelongo, O. (2016). *Construcción cognitiva de la matriz asociada a una transformación lineal (tesis de doctorado inédita)*. Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero.

Poole, D. (2011). *Álgebra Lineal. Una introducción moderna*. (S. R. Cervantes Gonzales, Ed.) (3ra ed.). México: Cengage Learning Editores.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eingevectors using models Apos Theory. *The journal of mathematical behavior*, *39*, 100–120. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.005

Yildiz, A. (2013). Teaching the diagonalization concept in linear algebra with technology: A case study at galatasaray university. *Turkish online journal of educational technology*, *12*(1), 119–130.

XV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Análisis de Significados que se Confieren a la Antiderivada

Wilson **Gordillo** Thiriat
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
wgordillot@udistrital.edu.co
Luis R. **Pino-Fan**
Universidad de Los Lagos
Chile
luis.pino@ulagos.cl

Resumen

Se presenta un estudio sobre los significados de la noción antiderivada orientada por diseño de instrumentos que permiten explorar y caracterizar la comprensión sobre tópicos específicos, usando las herramientas en enfoque ontosemiótico del conocimiento se analizan los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario. Los resultados aportan nuevos conocimientos respecto a la caracterización de la comprensión de los significados de la antiderivada en estudiantes universitarios. Además, proporcionan pautas y criterios que permiten el diseño de metodologías didácticas para desarrollar y/o potenciar la comprensión sobre la antiderivada.

Palabras clave: antiderivada, significados, enfoque ontosemiótico, cuestionario, comprensión.

ANTECEDENTES

Las investigaciones sobre la comprensión de la antiderivada son escasos, el trabajo de Metaxas (2007), le da identidad al objeto antiderivada, y a través de un estudio de caso enfrenta a estudiantes con tareas que generan un conflicto cognitivo abordando la perspectiva teórica de la abstracción reflexiva y el esquema de comprensión (interiorización-condensación-reificación), propuesto por Sfard (1991). Por otra parte, Kiat (2005) explora la solución problemas de que involucran integración (definida e indefinida), clasificando errores (conceptuales, procedimentales y técnicos) al responder preguntas que involucran integración y áreas. Es Hall (2010), quien analiza significados matemáticos, que se usan en la enseñanza del cálculo, en particular con la integral indefinida. Concluye que respuestas como: la integral definida es más precisa que la integral indefinida, la integral indefinida es un termino vago, antiderivada es la inversa de la derivada. Son respuestas que indican mala comprensión del concepto matemático, y a su vez evidencian un conflicto entre el conocimiento de términos matemáticos.

NOCIONES TEÓRICAS Y METODOLÓGICAS

Existen diversas posturas para entender la comprensión (Sfard 1991, Pirie & Kieren 1994), de acuerdo con Font (2001) y Godino, Batanero y Font (2007), hay dos maneras básicas de entenderla: como proceso mental o como competencia. estos autores, toman dos puntos de vista que responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la Didáctica de las Matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como proceso mental. Los posicionamientos pragmatistas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento (EOS), en cambio, llevan a entender, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental. Es decir, se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas.

Esta manera pragmática de entender la comprensión, implica concebirla también como conocimiento y aplicación de las normas que regulan una práctica. Se trata, pues, de un punto de vista que procura dilucidar la inteligibilidad de las acciones humanas clarificando el pensamiento que las informa y situándolo en el contexto de las normas sociales y de las formas de vida dentro de las cuales aquéllas ocurren. Es necesario aclarar que, dentro del EOS, enfoque teórico al que nos apegamos en este estudio, el término conocimiento se utiliza en el sentido de constructo epistémico–cognitivo general que incluye comprensión, competencia y disposición (Pino-Fan, Godino & Font, 2010, p. 209). La disposición, o capacidad, se relaciona con la noción de objeto matemático y didáctico personal, es decir, aquello que posibilita la práctica. La competencia se relaciona con las prácticas matemáticas de los sujetos y a la activación, en dichas prácticas, de la configuración ontosemiótica cognitiva adecuada, la cual debería estar idóneamente acoplada a la configuración ontosemiótica epistémica de referencia (Pino-Fan, Godino & Font, 2011) y al contexto en el que se desarrolla la práctica. La comprensión como lo afirma Pino-Fan (2014), tiene que ver con las relaciones –vistas desde las perspectiva de la congruencia matemática– que se deben establecer entre todos los elementos que intervienen en la configuración ontosemiótica cognitiva (o epistémica, en el caso de prácticas institucionales) que activa el sujeto para resolver determinadas situaciones/problemas. En este trabajo hemos adoptado los posicionamientos pragmatistas que nos brinda el marco teórico conocido como Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero & Font, 2007). En el EOS se ha introducido una tipología de objetos matemáticos primarios: situaciones/problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. Estos objetos matemáticos primarios están relacionados entre sí formando redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, lo que en el EOS se conoce con el nombre de configuraciones. Estas configuraciones pueden ser de tipo epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

Así, para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios, se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (e.g., plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas), vemos el uso de *lenguajes*, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de *conceptos*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones/problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en la *configuración* de la Figura 1 (Font & Godino, 2006, p. 69).

La definición de objeto como emergente de los sistemas de prácticas, y la tipología de objetos primarios, responden a la necesidad de poder describir los sistemas de prácticas, con el fin de compararlos entre sí y tomar decisiones en el diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

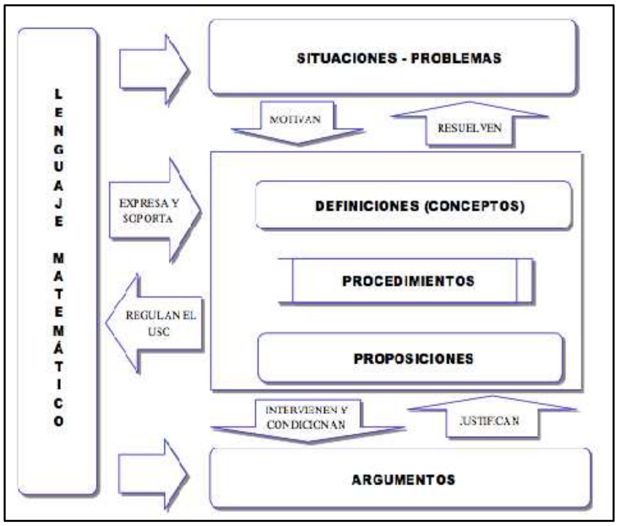


Figura 1. Configuración de Objetos Matemáticos Primarios (Font & Godino, 2006)

Estos objetos matemáticos primarios que conforman la configuración, se manifiestan de diversas maneras durante la actividad matemática: el lenguaje con el cual nos referimos a ellos, que a su vez evocan a conceptos o definiciones, los cuales se vuelven operativos mediante procedimientos y propiedades asociadas, que a su vez se manifiestan durante la solución de las tareas matemáticas. Además, cada uno de los objetos matemáticos primarios puede ser considerado desde distintas facetas o dimensiones duales (Godino, 2002): personal – institucional; ostensivo – no ostensivo; unitario – sistémico; expresión – contenido; extensivo – intensivo.

La emergencia de los objetos matemáticos primarios considerados en el modelo (ver Figura 1) llevan asociados, respectivamente, los procesos de problematización, comunicación, definición, algoritmización, enunciación y argumentación.

Las redes de objetos y procesos que hemos descrito, suelen recibir el nombre de configuración ontosemiótica (Pino-Fan, Godino & Font, 2015), y pueden ser de carácter epistémico o cognitivo, según se refiera a objetos y procesos matemáticos institucionales o personales, respectivamente.

En este sentido y apoyados por el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos como se describió anteriormente, nos planteamos las siguientes preguntas ¿Comprenden los estudiantes universitarios la noción de antiderivada? ¿Qué aspectos o criterios, se deben contemplar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la antiderivada, para lograr que los estudiantes comprendan esta noción matemática?

Para dar respuesta a preguntas, nos propusimos en este trabajo: *Evaluar y caracterizar el conocimiento matemático (el cual vincula comprensión, competencia y disposición) de* *estudiantes universitarios sobre la noción antiderivada.*

RECONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO EPISTÉMICO GLOBAL DE LA ANTIDERIVADA

Para poder explorar el conocimiento matemático sobre la antiderivada, Gordillo y Pino-Fan (2016), proponen un estudio histórico-epistemológico que permite, a partir de la identificación de las configuraciones epistémicas activadas en los sistemas de prácticas que dieron paso al surgimiento de la antiderivada, los significados parciales que constituyen el significado global u holístico. Adicionalmente, las configuraciones epistémicas primarias podrían orientar el diseño de acciones formativas que permitan construir o lograr comprensión sobre el objeto antiderivada hasta llegar a su formalización.

La identificación, caracterización y análisis de los sistemas de prácticas que se abordaron y desarrollaron en la diversas etapas históricas, han resultado en una propuesta de reconstrucción del *significado global* (Pino-Fan, Godino & Font, 2011) de la antiderivada. Cada sistema de práctica tiene vinculada una configuración epistémica que esta compuesta de objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, y argumentos). La herramienta que nos proporciona el EOS, conocida como configuración epistémica nos ha ayudado a identificar y describir estos elementos.

Cada una de estas configuraciones epistémicas lleva asociado un significado parcial para la antiderivada. como lo describe Gordillo y Pino-Fan (2016), para el caso de la antiderivada son cuatro: 1) *Tangentes-Cuadraturas* (CE 1); 2) *Fluxiones-Fluentes* (CE 2); 3) *Sumatorias-Diferencias* (CE 3); 4) *Funciones Elementales* (CE 4).

CRITERIOS PARA ACTIVAR CADA SIGNIFICADO PARCIAL EN LA ACTUALIDAD.

Actualmente no se puede hacer uso de todos los elementos primarios identificados en cada significado parcial, sin embargo, adaptando algunas situaciones/problema, planteadas en cada uno de los significados, pueden ser llevados al aula en forma de tareas, y activar en los estudiantes un significado parcial específico. La descripción del cómo se puede identificar la activación de un significado parcial esta dada por :

a) *Tangentes-Cuadraturas*: Utiliza definiciones matemáticas de dominio de una función, simetría, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, concavidad, convexidad y puntos de inflexión. Argumenta a través de los criterios matemáticos la construcción de una curva (gráfica). Para encontrar la antiderivada de una función, dada la curva (gráfica) de una función.
b) *Fluxiones–Fluentes*: El estudiante, utiliza lenguaje, definiciones propias de la física para argumentar el cambio entre magnitudes físicas (aceleración, velocidad, posición), para resolver situaciones que impliquen fenómenos físicos de variación o rapidez.
c) *Sumatorias-Diferencias*: Utiliza, lenguaje propio de las matemáticas y definiciones que refieren al uso de alguna "regla de integración" o "método de integración" para resolver situaciones matemáticas simbólicas (algebraico).
d) *Funciones elementales*: Utiliza, lenguaje propio de la matemáticas y definiciones que refieren a un análisis detallado de funciones transcendentes, o uso de algún 'método

numérico' para expresar funciones como series y así resolver situaciones matemáticas simbólicas (algebraico).

DISEÑO DEL CUESTIONARIO

Una vez identificados y caracterizados los significados de referencia de la antiderivada, un aspecto relevante fue determinar qué es lo que conocen los estudiantes universitarios sobre dichos significados. Así, nuestra tercera pregunta para la investigación es: *¿Cuál es el conocimiento sobre la antiderivada, que efectivamente tienen los estudiantes universitarios de carreras de matemáticas y afines?* Para responder esta pregunta se diseño un cuestionario representativo de la complejidad del significado holístico de la antiderivada.

A partir del banco de tareas elaborado, se eligieron aquellas tareas que cumplieran, básicamente con tres aspectos clave: Uso de diversos significados del objeto antiderivada; Uso de diversidad de representaciones para la antiderivada y relaciones matemáticas entre la antiderivada y otros objetos matemáticos. En este sentido, el cuestionario diseñado se compone de once tareas. Como el propuesto por Gordillo, Pino-Fan, Font y Ponce-Campuzano (2018), en la tabla 1. se muestra un resumen de las características y fines que se persiguen con cada una de las tareas.

Tabla 1.

Resumen de tareas del cuestionario

Tarea	Objetivo	Representación que activa	Significado Parcial Activado
Tarea 1: Significados de la antiderivada	Explorar significados personales, acepciones conferidas a la antiderivada	verbal/ escrita	Global
Tarea 2: Modelo sinóptico estructurado	Relación de la antiderivada con otros objetos matemáticos del cálculo.	Mapa conceptual y grafos	Global
Tarea 3: Cálculo de la función primitiva (parte A y B)	Construcción de familia de funciones a partir de una función derivada.	simbólica, gráfica y tabular	Diferencial-Sumatoria
Tarea 4: Exploración gráfica de la antiderivada	Tratamiento de la representación grafica de la antiderivada.	Gráfica	Tangentes-Cuadraturas
Tarea 5: Diferencia integral - antiderivada	Explorar si se establecen diferencias conceptuales de nociones integral y antiderivada.	Verbal/escrita y simbólica	Funciones elementales
Tarea 6: Funciones elementales	Identificación de la función derivada como función elemental.	Verbal/escrita y simbólica	Funciones elementales
Tarea 7: Reglas de Antiderivación	Identificación de la antiderivada a partir de una regla básica de derivación.	Simbólica	Tangentes - Cuadraturas
Tarea 8: Notaciones de una función derivada	Identificación de una forma de denotar una función derivada	Simbólica	Tangentes - Cuadraturas
Tarea 9: Aplicación de la antiderivada en economía	Aplicación del objeto matemático con las ciencias económicas	verbal/escrita y simbólica	Tangentes - Cuadraturas
Tarea 10: Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias	Uso de la antiderivada en la solución de ecuaciones diferenciales	verbal/escrita y simbólica,	Fluentes-Fluxiones

Tarea 11: Aplicación de la antiderivada en la física	Disposición del objeto matemático con la física	verbal/escrita y simbólica	Fluentes-Fluxiones

Fuente: Gordillo, Pino-Fan, Font y Ponce-Campuzano (2018)

FIABILIDAD Y VALIDEZ DE CONTENIDO DEL CUESTIONARIO

Para cada tarea incluida en el cuestionario se realizó de manera detallada el análisis del contenido de cada una de las tareas en dos niveles: contenido ontosemiótico, el cual se obtiene mediante un análisis epistémico exhaustivo en el cual se hace uso de la herramienta teórica configuración ontosemiótica; contenido curricular, que son los conocimientos que evalúan las tareas y que pueden ser medidos con los conocimientos pretendidos en una institución, plasmado a través del plan de estudios. Así mismo el cuestionario se sometió a revisión mediante el juicio de expertos, donde cada experto opinaban libremente, para cada una de las tareas del cuestionario, sobre el grado de relevancia de cada uno de los siguientes aspectos: Distintos significados del objeto antiderivada; representaciones activadas tanto en los enunciados como en las soluciones plausibles; contenido matemático de las tareas en relación con el objeto antiderivada; es decir, el vínculo de la antiderivada con otras nociones matemáticas relevantes para su comprensión; ausencia de algún contenido relevante; redacción y comprensión de los enunciados.

En general, el cuestionario fue aprobado y avalado por parte de los expertos con una puntuación media de 4.72/5 , otorgada al cuestionario por cada uno de los expertos. En la versión definitiva del cuestionario se incluyeron las recomendaciones de cada uno de los expertos.

IMPLEMENTACIÓN DEL CUESTIONARIO

Implementar el cuestionario diseñado, para evaluar la comprensión de la antiderivada, en muestras intencionales de estudiantes universitarios colombianos, se realizó al aplicar el cuestionario a una muestra de 137 estudiantes universitarios en Colombia. El condicionante para la aplicación de la prueba a los estudiantes que participaron, fue el haber tomado el curso de cálculo integral o cálculo II (momento curricular donde se aborda la noción). Cada cuestionario aplicado permitió profundizar en la exploración y descripción de las configuraciones cognitivas utilizadas por los estudiantes universitarios al resolver las tareas del cuestionario.

CARACTERIZACIÓN DE LOS RESULTADOS

Caracterizar, a partir de los resultados obtenidos con la implementación del cuestionario el conocimiento sobre la antiderivada, evidencio que los estudiantes presentaron ideas similares en las respuestas, y en varias ocasiones cometieron errores propuestos por Kiat (2005), así como las concepciones erradas que se tienen de la antiderivada, que son indicador –tal como lo afirma Hall (2010)– de mala comprensión de las ideas básicas del cálculo o de confusión de términos matemáticos. Estos indicadores adquirieron énfasis cuando los estudiantes se enfrentaron a tareas que requerían la movilización del significado –proceso para encontrar una familia de funciones a partir de una función que ha sido derivada–

En general, los resultados obtenidos a partir de los análisis cuantitativos y cualitativos de las soluciones que los estudiantes dieron a las tareas incluidas en el cuestionario, exhiben ciertas dificultades para resolver tareas que relacionan la antiderivada. Por ejemplo, los resultados obtenidos desvelan que los estudiantes usan la antiderivada en su acepción de "proceso inverso de la derivada", y no dan sentido a la constante C real. Esta acepción de "proceso inverso" también es observada en diferentes las tareas, esta forma equivocada, es vista más concretamente, como procedimiento que les permite obtener directamente el 'resultado de la operación inversa', tal como multiplicar y dividir. Los resultados del cuestionario apoya la necesidad de mejorar el conocimiento matemático, que les faculte de competencias para resolver tareas con características similares a las que se les planteó con el cuestionario.

RESULTADOS FINALES

En este artículo presentamos el diseño de un cuestionario que nos permite evaluar y caracterizar el conocimiento y las prácticas matemáticas sobre la antiderivada en estudiantes de los primeros cursos universitarios. La noción de conocimiento (conocimiento matemático), desde un punto de vista pragmatista como el adoptado por el EOS, incluye y vincula las actividades de comprensión, competencia y disposición, las cuales intervienen en las prácticas matemáticas que se desarrollan con la finalidad de resolver un problema. Esta forma pragmática de entender el conocimiento, ha sido considerado en el diseño de cada una de las tareas que conforman el cuestionario, toda vez que las tareas requieren para su resolución de la movilización congruente tanto de los diversos registros de representación para la antiderivada, como de la diversidad de significados parciales de dicha noción matemática (Gordillo & Pino-Fan, 2016).

El análisis ontosemiótico (contenido y curricular), y las posibles dificultades en la resolución de las tareas, realizado para cada una ellas; anterior a la aplicación del cuestionario, permite observar, describir y predecir la actividad matemática como un complejo conjunto de prácticas matemáticas realizada por estudiantes universitarios al resolver las tareas propuestas, al rededor del objeto matemático. Prácticas donde se pueden identificar, la configuración de objetos y procesos matemáticos primarios; propuestos por el marco teórico del EOS, que se ha denominado análisis ontosemiótico.

Por otro lado, añadido a lo anterior, el estudio mediante juicio de expertos ha dado evidencia que el diseño de las tareas del Cuestionario, sí evalúa la articulación de los significados institucionales y personales, respecto a la antiderivada, dando así argumentos validos para determinar que cada una de las tareas es evaluadora de *conocimiento* y *comprensión* parcial, y en su globalidad evaluadora de comprensión, competencia y disposición de la noción antiderivada.

Referencias y bibliografía

Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Duval, R. (2006b). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*(1), 143-168.

Font, V. (2001). Processos mentals versus competència. *Biaix. Revista de la Federació d'Entitats per a l'ensenyament de les matemàtiques a Catalunya, 19*(1), 33-36.

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa, 8*(1), 67-98.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Gordillo, W., & Pino-Fan, L. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 535-558. doi: 10.1590/1980-4415v30n55a12

Gordillo, W., Pino-Fan, L., Font, V., & Ponce-Campuzano, J.C.. (2018). Algunas tareas para evaluar la compresión sobre el objeto matemático antiderivada. *Academia y Virtualidad*, *11*(2). doi: 10.18359/ravi.2983

Hall, Jr., W. L. (2010). Student misconceptions of the language of calculus: definite and indefinite integrals. In *Proceedings of the 13th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 1-16). Raleigh, NC: Mathematical Association of America.

Kiat, S. E. (2005). Analysis of students' difficulties in solving integration problems. *The Mathematics Educator, 9*(1), 39-59.

Metaxas, N. (2007). Difficulties on understanding the indefinite integral. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, pp. 265-272). Seoul, Corea: PME.

Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Granada: Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). A methodology for the design of questionnaires to explore the mathematical dimension and the epistemic facet of didactic-mathematical knowledge of teachers. *CERME 9, WTG 20: Mathematics teacher knowledge, beliefs and identity*. Recuperado de http://www.cerme9.org/products/twg20/

Pino-Fan, L., Godino, J. D. & Font, V. (2010). *Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada*. Memorias XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Monterrey, (pp. 206-213). Nuevo León, México: ITESM.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.

Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 165-190. doi: 10.1007/BF01273662

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36. doi: 10.1007/BF00302715

Comprensión del concepto de independencia lineal: una perspectiva de las estructuras y mecanismos mentales de estudiantes universitarios de primer año

Silvia Juliana **Ballesteros** Gualdrón
Universidad Industrial de Santander
Colombia
julianaballesterosg@hotmail.com
Solange **Roa** Fuentes
Universidad de Industrial de Santander; Grupo de Investigación EDUMAT-UIS
Colombia
sroa@matematicas.uis.edu.co
Darly Kú Euán
Universidad Autónoma de Zacatecas
México
Ku.darly@gmail.com

Resumen

Se presenta la primera Fase de una investigación que busca diseñar una descomposición genética validada del concepto de independencia lineal que parta de la aplicación de *acciones* sobre objetos concretos (numéricos y geométricos) para la construcción de objetos abstractos (definiciones formales o esquemas) con estudiantes de primer año de universidad. La investigación se fundamenta en la teoría APOE (Arnon et al., 2014); dicha teoría explica cómo los individuos construyen los conceptos y nociones matemáticas. En este caso se toma la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos para lograr Objetos abstractos. En álgebra lineal las representaciones geométricas son interpretadas como Objetos concretos, que un individuo puede transformar de manera física o mental. Los antecedentes que se proponen en el documento muestran la importancia de potenciar la construcción de relaciones entre diferentes interpretaciones de los Objetos matemáticos (Roa-Fuentes y Parraguez, 2017), para promover la comprensión en los estudiantes.

Palabras clave: Didáctica del álgebra, Objetos concretos, Objetos abstractos, teoría APOE, Independencia lineal.

Introducción

El primer encuentro de estudiantes universitarios con matemáticas abstractas se desarrolla en el curso de Álgebra Lineal (Zazkis, Dubinsky & Dautermann, 1996); allí los objetos de trabajo son principalmente vectores, elementos de un Espacio Vectorial ($\mathbb{R}^n$, $M_{m\times n}$, polinomios, entre otros). Actualmente en la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se desarrollan 32 grupos dirigidos por 23 profesores, que acompañan un aproximado de 1032 estudiantes. Desde la Matemática Educativa se ha planteado cómo las diversas representaciones de los objetos matemáticos aportan en su comprensión. Por ejemplo, una transformación lineal admite una interpretación funcional ($f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$), una matricial ($M_{2\times 2}$) y una geométrica ($\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$) como resultado de la transformación de un vector o una región del plano. Por tanto, se propone que es fundamental analizar cómo los estudiantes de Álgebra Lineal I de la Universidad Industrial de Santander pueden transitar entre las diferentes interpretaciones de un objeto matemático para comprenderlo. Para esto se propone el diseño de un modelo cognitivo, *descomposición genética*, del concepto de independencia lineal que señale las principales estructuras, mecanismos y sus relaciones a partir de las diferentes interpretaciones que son presentadas en un curso básico de álgebra lineal. A continuación, se exponen los antecedentes de la investigación que permiten ubicar en el panorama de la didáctica de las matemáticas el problema presentado, también los principales elementos de la teoría APOE y el método que guía el desarrollo de esta investigación.

Antecedentes

Los principales hallazgos publicados en Carlson, Johnson, Lay y Porter (1993) y Zazkis et al. (1996) muestran un primer acercamiento para contribuir a una mejora en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal, donde cada uno de ellos con sus particulares posturas buscan definir los objetos concretos que un estudiante del curso de álgebra lineal puede considerar, para a partir de ello construir objetos abstractos.

Más adelante en 2017, Harel habla acerca de los objetos concretos y los objetos abstractos que se presentan en álgebra lineal. Los objetos concretos se entienden como objetos con los cuales se pueden manipular u operar; por ejemplo, operaciones entre vectores, solución de sistemas de ecuaciones lineales, entre otros. Y por objetos abstractos como combinación lineal, dependencia e independencia lineal, transformación lineal, etc. Harel (2017) menciona algunas dificultades que tienen los estudiantes con el paso de lo concreto a lo abstracto, por ejemplo, los estudiantes pueden encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales haciendo uso de un método conocido, pero no comprenden la dependencia e independencia lineal entre vectores.

De otra forma, Parraguez y Bozt (2012) analizan bajo la teoría de los modos de pensamiento, el razonamiento que muestran los estudiantes universitarios a partir de lo práctico a lo teórico al trabajar con los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y la solución de un sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$; además de las relaciones que se establecen entre dichos conceptos, esto con base a las conexiones que existen entre los objetos concretos y los objetos abstractos. En este caso la autora toma como objetos concretos todo aquello que puede operar, como es en este caso la solución del sistema de ecuaciones para transformar dicha solución en algo abstracto, como es el concepto de independencia lineal.

Por su parte Aydin (2014) analiza la comprensión que desarrollan los estudiantes sobre el concepto de independencia lineal mediante la generación de ejemplos basados en la teoría APOE[1]. Este autor plantea que un estudiante que es capaz de generar un ejemplo, acerca de cuándo un conjunto de vectores es linealmente independiente o no, es porque tiene una imagen conceptual formada de manera consistente. Esta imagen conceptual se asocia a una construcción abstracta del concepto.

De igual forma, una manera de ver los objetos concretos en álgebra lineal se puede relacionar con interpretaciones geométricas de los conceptos. En este sentido la geometría se encuentra como un componente principal, en la enseñanza de los cursos de álgebra lineal. En particular Sierpinska (2000) considera que el álgebra lineal puede ser vista como consecuencia de dos posturas: El rechazo de la entrada de los números en la geometría y desde la Intuición geométrica.

De esta forma, Oropeza y Lezama (2007) desarrollan una serie de actividades tomando como base la geometría. En un primer momento de forma exploratoria con el fin de caracterizar con los estudiantes la abstracción del álgebra y los impedimentos que tiene la geometría para su completa visualización.

Se puede encontrar en la literatura autores que hablan acerca de la percepción visual que se encuentra inmersa en la geometría. Según Piaget, la percepción visual es posible para objetos estáticos, pero no para procesos dinámicos. Para visualizar esto último, Piaget menciona que es necesario percibir un conjunto de fenómenos estáticos y razonar sobre ellos para hacer construcciones mentales de procesos dinámicos. Así mismo, Hillel (2000) menciona que los modos algebraicos, geométricos y abstractos coexisten y a veces son intercambiables, pero no son equivalentes. El modo abstracto usa el lenguaje y los conceptos de la teoría (espacio vectorial, subespacio, independencia lineal, tramo, etc.), mientras que el modo algebraico usa el lenguaje y conceptos de la teoría más específica de R^n (n-tuplas, matrices, rango, etc.). Finalmente, el modo geométrico usa el lenguaje y concepto de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (segmento de línea dirigida, puntos, planos, etc.).

Por ejemplo, un vector puede ser representado como una flecha en modo geométrico, como una fila o columna de números o símbolos en modo algebraico, y como un elemento de un espacio vectorial en el modo abstracto.

Por otro lado, autores como Konyalioglu et al., (2011) mencionan que los orígenes del álgebra

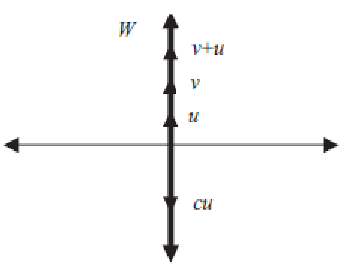
[1] Teoría APOE (acrónimo de Acción-Proceso –Objeto-Esquema)

lineal parten de la geometría, especialmente con representaciones vectoriales; por tanto, enfatiza que en la enseñanza del álgebra lineal deben estar involucradas nociones geométricas, en este sentido proponen el uso de la visualización como un enfoque de enseñanza, en el cual se sustenta que las estructuras geométricas deben estar fuertemente apoyadas por estructuras algebraicas y abstractas.

Por ejemplo, el siguiente problema "Sea W el conjunto de elementos de la forma $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que $x_1 = 0$ y $x_i \in R$. ¿Es W un subespacio del espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$?" admite en un primer momento una representación geométrica, para caracterizar el problema en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$; luego puede ser interpretado de manera algebraica para generalizar en $\mathbb{R}^n$ y por último puede ser construido de manera abstracta para utilizar el resultado en el concepto de independencia lineal como se muestra en la tabla 1, para la afirmación:

Tabla 1

Interpretación geométrica, algebraica y abstracta.

Geométrica	Algebraica	Abstracta
El subconjunto W de $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de vectores de la forma $(0, y)$ como se muestra en la siguiente figura: 	Sea $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ elementos de W y $c \in R$. Como u y v pertenecen a W se tiene que: $x_1 = 0$ y $y_1 = 0$. Entonces $cu + v = (cx_1 + y_1, cx_2 + y_2, \dots, cx_n + y_n)$ Donde: $cx_1 + y_1 = c0 + 0 = 0$ Luego, $cu + v \in W$. Así W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.	Si W es un subespacio de un espacio vectorial V, y W es un subconjunto de W'. En este caso ¿W' es linealmente dependiente? Cada subespacio de un espacio vectorial debe contener el elemento cero. Si W es un subespacio de un espacio vectorial, W contiene el elemento cero. Entonces, W' contiene el elemento cero. Si uno de los elementos en W' es el elemento cero, entonces el subconjunto W' es linealmente dependiente.

Fuente: Konyalioglu et al., (2011)

La Teoría APOE

En esta sección se revisarán las ideas principales de la teoría APOE (Arnon, et al., 2014), las cuales se utilizarán para el desarrollo de la investigación.

Esta teoría es una interpretación de la teoría constructivista que parte de las ideas de Piaget, el cual estudió acerca del desarrollo del pensamiento lógico de los niños, tomando principalmente la idea de abstracción reflexiva. Este tipo de abstracción se presenta cuando se realiza una reflexión y un razonamiento lógico respecto a un objeto, siendo más adelante formalizado por Dubinsky (1991), enfocándolo hacia un análisis cognitivo de conceptos matemáticos que se desarrollan a nivel universitario para describir las estructuras y mecanismos mentales que los estudiantes pueden desarrollar sobre una noción o concepto matemático, por medio de un ciclo metodológico que se describirá en el siguiente apartado.

En la figura 2 se puede observar que las estructuras mentales son las Acciones, Procesos, Objetos y esquemas y los mecanismos mentales son la interiorización, encapsulación, des encapsulación y coordinación, que se relacionan para la construcción de un nuevo conocimiento.

Como se mencionó anteriormente, la teoría APOE parte de la teoría constructivista, donde se menciona que un nuevo conocimiento se da a partir de conocimientos previamente construidos, de esta forma, un individuo parte de un objeto (conocimiento previamente construido) y si aplica manipulaciones a ese objeto, externas de él, se puede decir que se encuentra en una concepción Acción, si el individuo interioriza dichas manipulaciones, es decir, reflexiona acerca de las Acciones, se encuentra en una concepción Proceso.

También los Procesos se pueden generar a partir de otros Procesos, es decir, mediante la Coordinación de dos Procesos se pueden dar un nuevo Proceso y por último si se aplican Acciones a los Procesos se puede considerar que el individuo se encuentra en una concepción Objeto, de la que mediante el mecanismo de desencapsulación puede volver al Proceso que le dio origen.

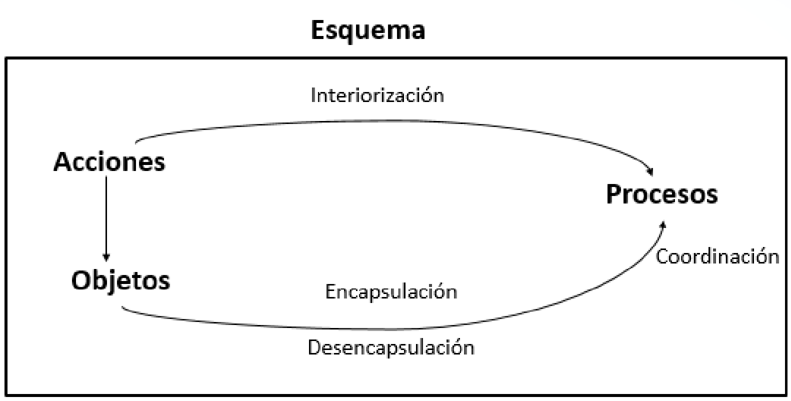


Figura 1. Arnon et. al.,2014, p. 18.

Finalmente, la Descomposición Genética (DG) es un modelo cognitivo que describe las estructuras y mecanismos mentales (descritas anteriormente) que un individuo necesita para construir una noción o un conocimiento matemático.

Método

Esta investigación se sustenta teórica y metodológicamente en la Teoría APOE (acrónimo de Acción-Proceso –Objeto-Esquema) que describe las estructuras y mecanismos mentales que los estudiantes pueden desarrollar sobre una noción o concepto matemático. Esta teoría tiene un ciclo metodológico que se basa en el diseño y desarrollo de tres componentes: 1. Análisis Teórico; 2. Diseño y desarrollo de un modelo de enseñanza; y 3. Observación, recolección y análisis de datos, como se muestra en la siguiente figura:

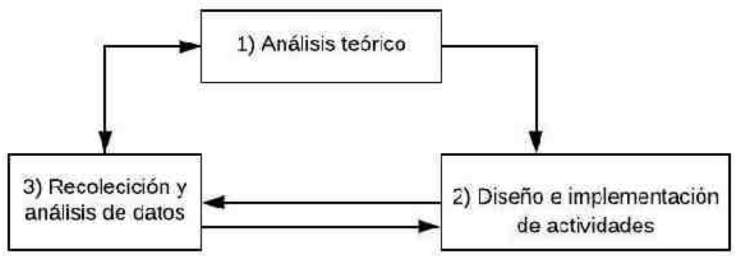


Figura 2. Adaptación (Arnon et. al.,2014, p. 94)

La dirección de las flechas indica que, después de realizar el análisis teórico que tiene como objetivo la construcción o modificación de una descomposición genética preliminar del concepto a trabajar, se realizan las actividades con base en dicha descomposición genética, seguido se empiezan a recolectar y analizar los datos. Cabe resaltar que si los datos encontrados difieren con la descomposición genética preliminar se debe volver a la fase 2 (fase 3 a fase 2) y diseñar e implementar nuevamente las actividades. Sin embargo, si después de realizar esta modificación los resultados vuelven a arrojar resultados diferentes de lo propuesto en la descomposición genética se debe volver a la fase 1 y refinar la descomposición genética propuesta (fase 3 a fase 1) porque puede que las caracterizaciones de las estructuras mentales de los estudiantes no sean acordes, por ende, es un ir y venir entre fases, para lograr la descomposición genética que pueda caracterizar en gran medida las estructuras mentales por las que un estudiante pasa para llegar a la comprensión del concepto a trabajar.

La población de estudio se ubica en la Universidad Industrial de Santander con estudiantes del curso de álgebra lineal I que ofrece la escuela de matemáticas. Esta investigación se divide en seis fases: 1.1 Análisis de exámenes finales de los estudiantes del curso en años anteriores: en base a dichos resultados se realizarán observaciones acerca de lo que los profesores están trabajando en el curso y lo que aparece en el programa de álgebra lineal I en la escuela de matemáticas; 1.2. Análisis de los libros de texto; 1.3. Análisis de descomposiciones genéticas trabajadas que aborden el concepto de independencia lineal; 2.1. Diseño de una descomposición genética con base a los resultados de la fase 1; 2.2. Diseño e implementación de las actividades con base en la descomposición genética de la fase 1; 2. 3. Recolección y análisis de datos.

Reflexiones finales

Actualmente se está realizando la descomposición genética del concepto de independencia lineal con base en los resultados de los exámenes finales anteriores, análisis de los libros de texto y análisis de descomposiciones genéticas anteriores sobre el concepto de independencia lineal.

Los resultados obtenidos en el análisis de los exámenes finales anteriores que se realizó en la fase 1 y unas encuestas realizadas a los profesores que dictan el curso de álgebra lineal, muestran que promedio los profesores dedican 3 horas para trabajar el concepto de independencia lineal y en algunos casos no se dicta el tema.

Con base a lo anterior se evidencia la necesidad de estandarizar los contenidos o modificar la estructura de los cursos entorno a las necesidades de los estudiantes de acuerdo a su carrera de pregrado y los temas centrales del álgebra lineal que se han venido discutiendo en investigaciones de didáctica del álgebra.

Referencias y bibliografía

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. DOI 10.1007/978-1-4614-7966-6. New York: Springer.

Aydin, S. (2014). Using example generation to explore students' understanding of the concepts of linear dependence/independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(6), 813-826.

Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., & Porter, A. D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, *24*(1), 41-46.

Dorier, J. L. (Ed.). (2000). *On the teaching of linear algebra* (Vol. 23). Springer Science & Business Media.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En T. David (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Harel, G. (2017). The learning and teaching of linear algebra: Observations and generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *46*, 69-95.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. En J.L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear Algebra* (pp. 191-207). Grenoble, Francia: Kluwer Acedemic Publishers.

Konyalioglu, A. C., Isik, A., Kaplan, A., Hizarci, S., & Durkaya, M. (2011). Visualization approach in teaching process of linear algebra. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *15*, 4040-4044.

Oropeza Legorreta, C., & Lezama Andalón, J. (2007). Dependencia e independencia lineal: una propuesta de actividades para el aula. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, *2*(1), 23-39.

Parraguez González, M., & Bozt Ortiz, J. (2012). Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R^2 y R^3 desde el punto de vista de los modos de pensamiento. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, *7*(1), 49-72.

Roa-Fuentes, S., & Parraguez, M. (2017). Estructuras mentales que modelan el aprendizaje de un teorema del álgebra lineal: Un estudio de casos en el contexto universitario. *Formación universitaria*, *10*(4), 15-32.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students’ thinking in linear algebra. In *On the teaching of linear algebra* (pp. 209-246). Springer, Dordrecht.

Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D 4. *Journal for research in Mathematics Education*, 435-457.

Curvas: Entre la división de lo continuo y la continuidad de lo discreto

Carlos Mario **Pulgarín** Pulgarín
Instituto de Matemáticas, Universidad de Antioquia
Colombia
carlosm.pulgarin@udea.edu.
Carlos Mario **Jaramillo** López
Instituto de Matemáticas, Universidad de Antioquia
Colombia
carlos.jaramillo1@udea.edu.co
René Alejandro **Londoño** Cano
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
rene.londono@udea.edu.co

Resumen

El presente documento exhibe algunos de los avances obtenidos como resultado de la investigación doctoral en relación con el proceso de comprensión del concepto de curva en la transición entre lo discreto y lo continuo en el marco de la teoría de Pirie y Kieren. Para ello, se inicia con un recorrido histórico del concepto de curva, situación que de forma simultanea propicia la discusión sobre la noción de continuidad e infinito en cálculo, y las dificultades que se evidencian por parte de los estudiantes al abordar dicho concepto en el estudio de la derivada y la integral. De esta forma se estructura el problema de investigación y elementos que aportarán en la metodología de la investigación.

Palabras clave: Curvas, transición, discreto, continuo, infinito, comprensión, teoría de Pirie y Kieren.

Aspectos históricos en el concepto de curva

Existen evidencias de que el primer acercamiento a una curva surgió a partir de círculos trazados a mano alzada en el siglo VII A. de C. y círculos perfectos trazados con la ayuda de cuerdas y clavos en templos construidos aproximadamente en el siglo V A. de C. A partir del siglo VI A. de C. se proponen modelos cosmológicos que involucraron de manera esencial a la esfera y al círculo. Anaximandro, Parménides, Pitágoras y sus discípulos sostuvieron modelos en los cuales la tierra es esférica y el movimiento de los astros se da en trayectorias circulares que llevaron a la elaboración de movimientos sumamente complejos a partir de epiciclos en esa ardua tarea de describir las orbitas planetarias. Siglos después, los modelos astronómicos de Tycho Brahe, Ptolomeo y Copérnico darían paso a las órbitas elípticas de Kepler. Sin embargo, el círculo seguiría siendo instrumento de estudio en las estimaciones del número π, conocidas las contribuciones de Arquímedes a la matemática a partir del método de exhaución. Dicho método lleva a pensar que, para tal época, las nociones de infinito y continuidad ya estaban dibujándose en la mente de los matemáticos. De hecho, el concepto de curva está vinculado a la dificultad de dar definiciones matemáticamente aceptables de un concepto intuitivamente claro como el de continuo.

Analizando cronológicamente la evolución del concepto de curva, se da un salto de muchos años y habría que esperar varios siglos de aislamiento y ausencia de registros sobre estudios al respecto, hasta que en 1676 Isaac Newton escribe *Tractatus de Quadratura Curvarum* (tratado de cuadratura de curvas), la cual sólo fue publicada hasta 1704. En esta obra, Newton describe la distinción entre el uso de elementos discontinuos y nuevas consideraciones cinemáticas con referencia a las fluxiones, abandonando así las cantidades infinitamente pequeñas en beneficio del concepto de fluxión. De hecho, Newton afirmó: "No voy a considerar aquí cantidades matemáticas compuestas de partes extremadamente pequeñas, sino como generadas por un movimiento o flujo continuo. Las líneas se describen, y por describirse son generadas, no por superposición de partes, sino por un flujo continuo de puntos" (Mosquera, 2013, p. 80)

Durante el siglo XVIII otros autores se ocuparon de este concepto desde una perspectiva más filosófica, al considerar que la noción de curva debía establecerse sin tener en cuenta ninguna idea ajena a ellas mismas y, por supuesto, excluyendo cualquier mención sobre la idea de movimiento. El detonante en tal momento fue básicamente la llamada curva de Peano. La noción de continuidad vinculada al concepto de curva que se tenían para entonces parecían vislumbrar los desacuerdos en una definición rigurosa y formalmente aceptada de esta última. A. G. Baumgarten, A. G. Knäster brindaron otras definiciones al respecto, sin embargo, en el año 1851, Bernhard Bolzano da a conocer su obra póstuma *Paradoxien des Unendlichen* y al igual que en otras obras de su autoría publicadas en años previos, tiene como objetivo dar una definición intrínseca y rigurosa del concepto de curva. Su esfuerzo fue notorio e implicó un constructo de definiciones cada vez más finas sobre el concepto de línea curva. En su obra *Geometrische Begriffe* formula el siguiente teorema sin demostración: Toda curva simple cerrada contenida en una superficie divide a está en dos partes, que se distinguen entre sí por el hecho de que todos los puntos de la superficie que no pertenecen a la línea están a un lado de esta o en el lado opuesto. (Freixenet 1998, p. 61)

En su actividad geométrica, Bolzano no se limitó a dar buenas definiciones en relación con el concepto de curva. Entre los años 1830 y 1834 dio un ejemplo de una función continua en todos sus puntos que no es derivable en ninguno de ellos. La función queda descrita por su gráfica y esta viene dada a través de una construcción de tipo iterativo que da lugar a una curva, obtenida como límite de líneas poligonales. Esta curva se construye como sigue:

Sea $\overline{PQ}$ un segmento rectilíneo, y considerese una dirección d, distinta de la de $\overline{PQ}$. Dividamos $\overline{PQ}$ por su punto medio M y tomemos los puntos $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ tales que $\overline{PP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3M} = \overline{MQ_1} = \overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3} = \overline{Q_3Q}$

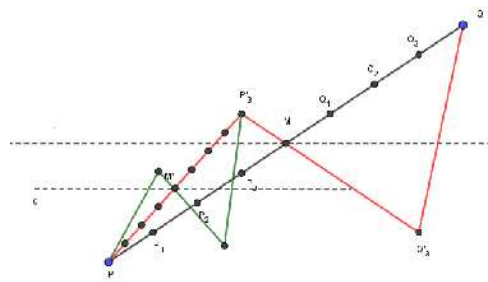


Figura 1. Función continua sin ser derivable

Si P_3' y Q_3' son los simétricos de P_3 y Q_3 respectivamente con respecto a la recta r, paralela a la dirección d por el punto M, se forma la línea poligonal $PP_3'Q_3'Q$ y se repite el proceso en cada uno de los cuatro lados de esta poligonal, y así sucesivamente. El límite de estas líneas es la curva buscada.

Una construcción que se asemeja bastante a la planteada por Bolzano se presenta en la figura 2, sin embargo; allí la discusión se centra en la continuidad geométrica y numérica. Sobre este aspecto (continuidad) Grégoire de Saint Vicent (1584-1667) a quien se le reconoce la primera resolución matemática sobre la paradoja de Zenón plantea una construcción geométrica simple pero que conlleva una reflexión profunda en la discusión sobre la noción de continuidad vista desde las series geométricas, más aún cuando se contrasta con la idea de Fermat, mientras que este último geometriza las series, Grégoire de Saint Vicent hace sus estimativos liberándolos del aspecto geométrico, aunque se parta de él. (DHombres, 1993, p. 46).

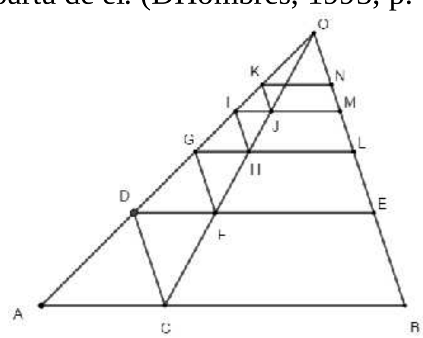


Figura 2. Interpretación del continuo geométrico a partir de series infinitas

Las construcciones de las figuras 1 y 2 evocan a la elaborada por Sundara Row (1966) en su texto *Geometric Exercises in Paper Folding*. En el caso de Row, su elaboración parte de bisecciones consecutivas a un ángulo del cuadrado y perpendiculares sobre cada bisectriz de tal forma que pasen por el vértice (Figura 3).

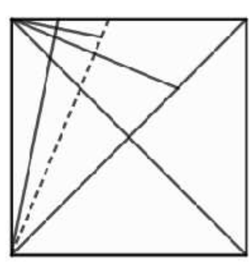


Figura 3. Construcción de Row para aproximar un arco de curva a partir de polígonos regulares

Los trabajos de Bolzano quedaron olvidados rápidamente y tuvieron que esperar largo tiempo hasta ser redescubiertos en el siglo XX. Sin embargo, a mediados del siglo XIX se propugnaba por el desarrollo de una geometría que permitiese el establecimiento de definiciones y el uso de espacios de dimensión superior a tres. En este sentido, las primeras definiciones rigurosas de tales espacios se atribuyen a Herman Grassmann y Bernhard Riemann.

"Grassmann expresa sobre el concepto de línea que: Entendemos por extensión-forma de primer orden la totalidad de elementos en el cual un elemento generador pasa a través de un cambio continuo. En la misma línea de Grassmann estaba Riemann quien plantea: El verdadero carácter de una variedad unidimensional (Curva) es que la progresión continua (movimiento) es solamente posible en dos direcciones o sentidos opuestos. Si se supone que una variedad de dimensión uno pasa a través de una serie de variedades igualmente unidimensionales en correspondencia punto a punto se obtiene una variedad de dimensión dos (superficie)" (Freixenet 1998, p. 67-68)

Estos intentos por dar una definición rigurosa del concepto de curva representan una auténtica revolución que trajo sus frutos en años posteriores. En la década de 1870 y 1880 George Cantor publica una serie de artículos sobre los conjuntos infinitos lineales de puntos, en los que fija las bases de la topología de los conjuntos del espacio euclídeo de dimensión n. Allí, Cantor define la curva plana como un continuo sin puntos interiores, la cual pasaría a recibir el nombre de línea cantoriana.

Al final de la década del 70 surge una profunda crisis acerca del concepto de curva, al probar Cantor que: los puntos de un segmento podían ponerse en correspondencia biunívoca con los de un cuadrado y en general con los de un cubo n-dimensional, lo cual obligó entre otras, a plantear la revisión de la noción de dimensión de los objetos geométricos.

En el siglo XIX destacan los trabajos de Camille Jordan, quien en el final del tercer tomo de su obra Cours d'Analyse enuncia su famoso teorema de la curva: Toda curva plana cerrada, simple y continua divide al plano en dos regiones, una exterior y otra interior, de manera que esta última no puede reducirse a cero, pues contiene un círculo de radio finito.

Esta definición de curva dada por Jordan sufrió un durísimo golpe cuando en 1890 Giuseppe Peano define una curva continua que recubre todos los puntos de un cuadrado; es decir, la imagen geométrica de la misma tiene dimensión dos. La descripción dada por Peano es analítica y no da ningún método que permita representar su curva.

Lo planteado por Peano suscito el interés de los matemáticos de la época entre ellos D. Hilbert quien en 1891 publicó un artículo en el que da un método que permite visualizar el proceso de construcción de una curva de Peano y que se obtiene como límite de líneas poligonales igual que la curva de Bolzano ya considerada.

Se hacía necesario revisar nuevamente la noción de curva. En 1920, H. Hahn estaba dando un seminario en la Universidad de Viena y propuso el problema de dar una definición adecuada del concepto de curva, de forma casual K. Menger (que contaba con 17 años de edad) asistió a aquel seminario e hizo eco de la propuesta. Una semana más tarde presentó al profesor Hahn una solución: Una curva es un conjunto de puntos tal que cada uno de ellos tiene entornos arbitrariamente pequeños cuyos bordes cortan el conjunto dado en una cantidad finita de puntos.

Más de un siglo atrás Bolzano había dicho lo mismo que Menger. El profesor Hahn se interesó en tal definición y la reestructura así: Un continuo K recibe el nombre de curva si en cada entorno U de cualquier punto p de K existe un entorno U', contenido en U, de manera que la intersección del borde de U' con K no contiene conjuntos conexos.

Para concluir esta discusión previa sobre el concepto de curva enunciaré la siguiente definición Una curva[1], por tanto; es la trayectoria generada al movernos continuamente por la recta real, puede ser cerrada o abierta, puede tener picos, pero no puede rellenar algo de dimensión dos. Otra cosa es que queramos estudiar sus características diferenciales, es decir, vectores, planos tangentes, curvaturas, etc… para lo que sí necesitaremos la condición de diferenciabilidad y en su generalización tendremos que hablar de variedades diferenciables. Nótese que en esta última un tanto más enfocada al cálculo asocia el concepto de diferenciabilidad, el cual será elemento de análisis a continuación puesto que está estrechamente ligado a continuidad e infinito.

División de lo continuo y continuidad de lo discreto

Los registros históricos provenientes de diversas culturas alrededor del mundo indican que la mayoría de civilizaciones antiguas tenían sistemas de numeración y dichos números en muchos casos estaban asociados con significados geométricos dada la actividad de medir y la medida estar asociada con magnitudes geométricas. Hasta fines del siglo XIX, en geometría, la continuidad del espacio se dio por sentada, era un concepto que no se ponía en discusión, que no se planteó como la posibilidad de que pudiera traer consigo un problema.

Hablar en matemáticas de continuidad, involucra necesariamente la idea de infinito y como antesala de este, es importante considerar la noción de discreto. De este modo se presenta la triada entre los conceptos de infinito, discreto y continuo. El concepto de transición se entenderá aquí como el paso de un estado o condición a otra, ese proceso que se presenta entre una condición inicial y final. En particular, se hará mención de tal término para indicar el paso de lo continuo a lo discreto o viceversa, dentro de un proceso de razonamiento infinito. Estos tres conceptos han tenido una evolución considerable a través del tiempo y son ineludibles dentro de cualquier discusión sobre curvas.

El problema de investigación

La comprensión y análisis de curvas es esencial en el campo de las ciencias exactas, la ingeniería, la economía y otras áreas afines en donde comúnmente se generan soluciones a problemas a partir de la construcción de formas geométricas, cónicas o funciones matemáticas que pueden ser simples o supremamente complejas. En todos los niveles educativos se aborda la enseñanza de curvas de forma directa o indirecta al tratar el desarrollo de contenidos matemáticos tal como plantean los estándares básicos de competencias en matemáticas (2006, p. 61). Por ejemplo, se trata la circunferencia y el círculo en los primeros años de formación, la representación de funciones sobre el plano cartesiano en secundaria y el problema de la recta tangente o el área bajo la curva en el nivel universitario, por tan solo citar algunos casos. Sin embargo; el concepto de curva por lo general no se define y aunque parece simple, no se habla mucho de él en los textos escolares. La formalización de cada tema relacionado con curvas pasa por la generalización casi que, de forma inmediata. Por lo general; se remiten a una representación geométrica y en muy pocos casos ofrecen una definición detallada.

Se evidencia que el estudio de la comprensión de conceptos matemáticos ha sido y es un campo de gran interés para la investigación en educación matemática, tal es el caso de Sánchez et. al (2010, p. 7) quienes en su tesis presentan el análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada. De otra parte;

[1] Extraída de: http://elquintopostulado.com/index.php/en/matematicas/56-curvas.html

Turégano (1998, p. 230) realiza una síntesis de los documentos oficiales e informes de los profesionales en los que se habla de la importancia de proponer nuevos enfoques en el aprendizaje del cálculo atendiendo a la comprensión y génesis histórica de los conceptos. De hecho, posteriormente Turégano (1998, p. 234) concluye que, en la secuenciación de contenidos, debe primar su génesis histórica al parecer más en consonancia con las ideas y el proceso de aprendizaje de los estudiantes sobre su orden lógico.

Es preciso insistir en que analizar la comprensión del concepto de curva y los elementos asociados al significado de lo que representa en distintos conceptos y contextos de la matemática, podría tener consecuencias favorables en el aprendizaje de temas tales como límites, sucesiones, series, área bajo curvas, entre otros. En su estudio, se involucran los conceptos de variación y acumulación, esenciales en el cálculo. Actualmente estos temas se analizan desde dos puntos de vista: el primero es a partir de una concepción infinitesimalista y la segunda es aquella basada en el concepto de límite. Ambos son eje de la presente investigación, ya que involucran procesos de razonamiento infinito a partir de transiciones necesarias entre lo discreto y continuo.

Al respecto, en lo concerniente al infinito, cabe destacar que “entre los profesionales de la matemática, el cálculo infinitesimal fue desechado desde mediados del siglo XIX, debido a supuestas deficiencias en sus fundamentos. En la enseñanza (del cálculo) se abandonó la presentación leibniziana[2], siendo gradualmente sustituida por la versión de Cauchy-Weierstrass, sin mayor atención al aspecto didáctico. Lo que se observó en las aulas principalmente a lo largo de la segunda mitad del siglo XX, nos deja como lección que en la enseñanza resulta conveniente una presentación de una ciencia que atienda los intereses y capacidades de (la mayoría de) los estudiantes y no las características que, en cuanto rigor lógico se refiere, ha de tener esa ciencia, según los profesionales de la misma. Actualmente, la mayor parte de los profesores de cálculo reconoce que la presentación basada en el concepto (riguroso) de límite resulta poco accesible para el común de los estudiantes”. (Cantoral et al., 2008, p. 4)

La reflexión sobre curva tiene gran relevancia, dado que las investigaciones sobre este tópico pasan por apreciaciones históricas y epistemológicas desligadas, específicamente considerando estudios sobre la noción de límite, infinito, recta tangente y, además, sobre experiencias de aula relacionadas con estos mismos conceptos. Los estudios sobre la comprensión del concepto de curva son escasos, pocos ahondan en las dificultades que pueden presentar tanto profesores como estudiantes en los niveles de educación media y universitaria al respecto. Este hecho, incentiva un profundo estudio sobre el tema y busca a través del presente escrito, propiciar en los estudiantes de educación media y primeros semestres de universidad la comprensión del concepto de curva y su estrecha relación en el paso entre discreto-continuo. Dicho de otro modo, el problema que se pretende abordar es:

Los estudiantes de cursos de cálculo diferencial e integral presentan dificultades para comprender el concepto de curva a través de transiciones entre lo discreto y continuo mediado por procesos de razonamiento infinitos.

Este problema está relacionado con:

- *La representación discreta que induce la notación de función en el plano*
- La imposibilidad de calcular la longitud exacta de una curva a partir de segmentos de recta finitos.
- Asociar una suma infinita en un intervalo finito

[2] A partir de los trabajos de Abraham Robinson, a mediados del siglo XX podemos decir que no hay ninguna razón para seguir insistiendo en una falta de fundamentación lógica para el uso de los infinitesimales y, por lo tanto, en que el cálculo infinitesimalista es rigurosamente defectuoso.

- Identificar que una curva está compuesta por infinitos trozos de recta (segmentos)
- El incremento sobre el dominio de la curva no es igual al incremento en los puntos correspondientes de la curva.
- Solo se aproxima la longitud de una curva cuando los infinitos segmentos dejan de serlo y se convierten en puntos (punto de tangencia)
- Asociar la integral definida como un simple operador o relacionarlo con una suma infinita

Estas consideraciones hacen relevante el desarrollo de la investigación, dada su incidencia con temas históricos y de suma importancia en el ámbito educativo en todos sus niveles y en los cuales está ausente un estudio detallado que dé cuenta de la comprensión del concepto de curva a través de procesos de razonamiento infinito.

Acerca de la teoría de Pirie y Kieren

Al centrarse la investigación sobre la comprensión en el concepto de curva, cabe destacar que la implementación del modelo de dicha teoría parece entrar en concordancia con el objetivo planteado. "Pirie y Kieren conceptualizan su modelo sobre la evolución de la comprensión matemática como poseedor de 8 niveles potenciales, asumieron su concepción teórica para la comprensión matemática como estable pero no lineal, como un fenómeno recursivo, y la recursividad parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación" (Meel, 2003).

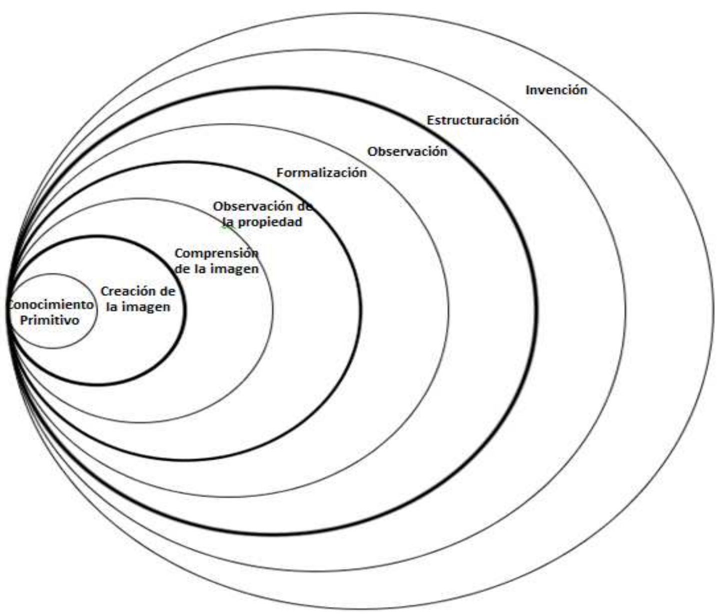


Figura 4. Estratos en el modelo de Pirie y Kieren (Meels, 2003)

Metodología

Se busca desarrollar una investigación de tipo cualitativa apoyada en un estudio de casos en la cual, con base a la implementación de algunos métodos de recolección de información en los tipos de unidades de análisis del proceso, se interpreten los resultados obtenidos, de tal forma que no solo validen o refuten la hipótesis inicial de la investigación, sino además permitan extender las interpretaciones de los resultados a estudios futuros en torno a dicho tema.

Referencias y bibliografía

Cantoral, R. et al., 2008, *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. España. Ediciones Diaz de Santos.

DHombres, J. (1993) Las progresiones infinitas: El papel del discreto y del continuio en el siglo XVII. Volumen 16. P 43-114. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/62118.pdf

Meel, D. (2003). *Models and theories of Mathematical Understanding: Comparing Pirie and Kieren's Model of the Growth of Mathematical Understanding and APOE theory.* CBMS Issues in Mthematics Education, 12, 132-181.

Mosquera, J. (2013) *Desarrollo histórico de la noción de curva: De la forma sintética a la representación analítica*. Universidad del Valle. Santiago de Cali.

Freixenet, J. (1998) *Sobre la historia del concepto topológico de curva*. Publicado en el: volumen 1, número 1 (enero-abril, 1998). Recuperado de: http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=303

Sánchez, G, et al. (2010) *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática.* Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200005

Turegano, M. (1998) *Del área a la integral, un estudio en el contexto educativo.* Recuperado de: https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21531/21365