Educación Matemática en las Américas 2019

Volumen 13: Álgebra y Funciones

CIAEM
IACME
desde - since 1961

Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO
www.ciaem-iacme.org

Educación Matemática en las Américas 2019
Volumen 1: Formación inicial de profesores
Editado por Yuri Morales-López y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN: 978-9945-09-413-8

El *Comité Interamericano de Educación Matemática* (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la *International Commission on Mathematical Instruction*. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera al CIAEM y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no fue previamente publicado en otro medio; y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Se respetaron los metadatos (nombres, apellidos, títulos, entre otros) que los autores proporcionaron cuando postularon su trabajo en la plataforma del evento.

Para citar este libro:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2020). *Educación Matemática en las Américas 2019.* Editores: Yuri Morales-López y Ángel Ruíz. República Dominicana: Autor.

ISBN: 978-9945-09-413-8
9 789945 094138

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LAS AMÉRICAS 2019

Presentación

Para el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es un placer y un honor ofrecer a la comunidad educativa este Volumen de *Educación Matemática en las Américas 2019*, en donde se pueden encontrar muy importantes insumos para comprender el momento histórico que atraviesa la Educación Matemática desde la perspectiva de las Américas.

La *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática* se realizó entre el 5 y 10 de mayo del 2019 en Medellín, Colombia. La Universidad de Medellín y la Universidad de Antioquia fueron las organizaciones académicas anfitrionas del evento. Las sesiones fueron realizadas en el campus de la Universidad de Medellín. Participaron 700 personas provenientes de 25 países de cuatro continentes: Europa, Asia, África y las Américas. Participaron centenares de docentes en servicio de la ciudad de Medellín y del Departamento de Antioquia.

Alrededor de 400 trabajos fueron presentados: conferencias plenarias y paralelas, mesas plenarias, minicursos, sesiones temáticas, comunicaciones cortas, talleres y posters. Unas 50 personalidades del mayor nivel en la comunidad internacional de Educación Matemática expusieron sobre sus investigaciones. Entre ellas Jill Adler (Suráfrica), Ferdinando Arzarello (Italia), Salvador Llinares (España), Yoshinori Shimizu (Japón), Michael Shaughnessy (EUA), Luis Rico (España), Fidel Oteiza (Chile), Carlos Vasco (Colombia), Carlos Sánchez (Cuba), Luis Carlos Arboleda (Colombia), Edwin Chaves (Costa Rica), Nelly León (Venezuela), Vilma Mesa (EUA). Aunque físicamente no pudo estar presente envió su contribución en forma de video Ubiratan D'Ambrosio (Brasil). Los trabajos dentro de la plataforma del congreso se pueden consultar en https://ciaem-redumate.org/conferencia/index.php/xvciaem/xv/schedConf/presentations

La revisión científica de todos los trabajos fue responsabilidad de un Comité Asesor Internacional, un Comité Internacional del Programa y el Comité Ejecutivo del CIAEM. Se contó con la coordinación central de Directores de tema y la Dirección de la plataforma científica realizada por el académico Yuri Morales con el apoyo de la profesora Johanna Mena (ambos de Costa Rica) y con la participación voluntaria de muchísimos revisores científicos de muchos países.

Este volumen incluye trabajos que fueron efectivamente presentados en ese congreso.

Expreso mi agradecimiento a todos los miembros de los comités científicos, directores de tema, revisores científicos, y directores de la plataforma científica. También deseo agradecer por su apoyo en el registro de este libro a Sarah González y a la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra en República Dominicana. Agradezco mucho a todos los autores que decidieron compartir su trabajo en las instancias que abrimos mediante la XV CIAEM. También a Yuri Morales quien técnica y formalmente generó este volumen para su registro.

En las diversas dimensiones del congreso, de cuya realización este libro es producto, quiero aprovechar esta ocasión para reconocer la valiosa contribución de las Universidades de Medellín y de Antioquia y al Comité Organizador Local de la XV CIAEM, y, además, agradecer al equipo humano del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* que ha sido durante muchos años un sostén crucial en la organización de todos los eventos del CIAEM y de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*; y en particular de este libro que hoy sacamos a la luz pública.

Este volumen es una parte del libro de *Memorias* completo (son 15 volúmenes que se pueden ver/descargar). Se ha respetado aquí la paginación del libro completo. Y las referencias *deben hacerse con base en el libro y su paginación*. No es necesario indicar el volumen específico donde se cita pues esta es una versión funcional al servicio de una mejor visualización o descarga de este valioso material.

Invitamos a los lectores de este libro a promoverlo en sus diversas actividades de docencia, investigación, extensión y divulgación en todos sus países.

Con afecto

Ángel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática
Presentación del 17 de julio de 2024
Costa Rica

Índice

Basado en la información suministrada durante la postulación de cada trabajo

8. Álgebra y Funciones

Estructuras y generalización de estudiantes de segundo de primaria

María Dolores **Torres** González
Universidad de Granada
España
mtorresg@ugr.es
María C. **Cañadas** Santiago
Universidad de Granada
España
mconsu@ugr.es
Antonio **Moreno** Verdejo
Universidad de Granada
España
amorenoverdejo@gmail.com
Pedro **Gómez** Guzmán
Universidad de los Andes
Colombia
argeifontes@gmail.com

Resumen

En este estudio, caracterizamos el pensamiento funcional que evidencian alumnos de 2º de Educación Primaria (7-8 años). Ponemos de manifiesto la capacidad de los alumnos para identificar estructuras y generalizar en el contexto funcional del early algebra. Para ello, planteamos una tarea contextualizada que involucra la función lineal y=x+4, en sus formas directa e inversa durante entrevistas que realizamos tras un experimento de enseñanza. Describimos las estructuras evidenciadas en ambas formas de la función y el tipo de generalización que emplean los estudiantes. Destacamos que todos los estudiantes identificaron una estructura adecuada de la forma directa de la función, mientras que, en la forma inversa, hubo más dificultades. La mayoría de las generalizaciones se producen al preguntarles explícitamente por la generalización, tanto en la forma directa como la inversa de la función.

Palabras clave: pensamiento funcional, forma directa de una función, forma inversa de una función, estructura, generalización.

Antecedentes y marco teórico

Existe un interés por el estudio del pensamiento funcional que promueve en las aulas el estudio de regularidades, relaciones y propiedades matemáticas para permitir a los alumnos de edades tempranas explorar, predecir, modelizar, discutir y argumentar (Molina, 2009). La función es el contenido matemático clave del pensamiento funcional siendo una regla que establece la relación entre dos variables que covarían (Thompson, 1994). El pensamiento funcional se centra en la relación entre dos variables, siendo fundamental el estudio de regularidades. La regularidad es lo que se repite y el reconocimiento de regularidades es esencial para generalizar ya que, a partir de una regularidad observada, se busca una regularidad que sea válida para más casos (Polya, 1966). A través de la identificación de la regularidad entre valores concretos de ambas variables, se puede llegar a generalizar. Existen investigaciones que exploran la generalización de estudiantes de Educación Primaria en contextos funcionales (e.g., Carraher y Schliemann, 2016; Pinto y Cañadas, 2017a) pero son escasos los estudios sobre cómo estudiantes de dicho nivel educativo perciben y generalizan la forma inversa de una función en edades tempranas. Ambas formas de una función tienen relación con los roles que tiene cada una de las variables implicadas en situaciones matemáticas. Una misma variable asume el rol de variable independiente para la forma directa y el de variable dependiente para la forma inversa, y viceversa. El estudio sobre como interpretan los estudiantes ambas formas de la función aporta también información sobre el desarrollo del pensamiento funcional. En este estudio proponemos una tarea que involucra la función $y= x+4$. Se trata de una función lineal, que es recomendada para trabajar con estudiantes de Educación Primaria (Carraher y Schliemann, 2016). La noción de estructura se corresponde con la forma en la que se organiza la regularidad entre valores concretos de las variables involucradas o la manera en que expresan la generalización (Pinto y Cañadas, 2017a). Las estructuras pueden ser equivalentes desde el punto de vista semántico cuando representan la misma situación, aunque se expresen de forma diferente (English y Warren, 1998). Por ejemplo, $x+4$, $x+2+2$ y $x+1+1+1+1$ son expresiones semánticamente equivalentes.

Entre los investigadores que exploran la generalización de estudiantes de Educación Primaria en contextos funcionales, Torres, Cañadas y Moreno (2018) en un estudio centrado en las estructuras de la forma directa de una función y la generalización, analizaron las respuestas de los estudiantes a varias cuestiones sobre un problema contextualizado que involucraba la función lineal $y =x+3$. Los resultados muestran una variedad de estructuras identificadas por los estudiantes durante los casos particulares, 4 tipos de estructuras diferentes. Los 6 estudiantes de 2º de Educación Primaria de nuestro estudio, generalizaron verbalmente la relación involucrada. La mayoría generalizan la estructura correcta y emplean la misma estructura para casos particulares y para el caso general; observándose coherencia en sus respuestas y evidenciando capacidades en los estudiantes de 2º curso para identificar regularidades entre variables y generalizar. Sin embargo, las estructuras que se corresponden con cada una de las formas (directa e inversa de una función) son diferentes ya que la manera de expresarlas es distinta. Pinto y Cañadas (2017a) describen cómo 24 estudiantes de quinto de Educación de Primaria (10-11 años) perciben la forma inversa al trabajar con un problema que involucra una función. Concluyen que 10 estudiantes establecieron diferentes estructuras que involucran las variables en la función inversa. Por otra parte, 5 estudiantes generalizaron esta forma de la función. Son escasos los estudios sobre cómo estudiantes de Educación Primaria perciben y generalizan las formas inversas de las funciones y cómo lo hacen en comparación con su forma directa.

Las nociones de generalización y de estructura están relacionadas y permiten caracterizar el pensamiento funcional de los estudiantes. Para generalizar, se puede identificar la estructura a partir de casos particulares. Asumimos que generalizar es pasar de lo particular a lo general y en ver lo general en lo particular (Mason, 1996). Para fomentar esta abstracción seguimos el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). Partimos de situaciones que involucran casos particulares y, observando regularidades, es decir, identificando la estructura, se pretende llegar a la generalización. Diferentes autores distinguen entre distintos tipos de generalización. Asumimos la tipología identificada por Pinto y Cañadas (2017b), quienes distinguen entre generalización espontánea cuando la generalización se produce sin preguntar explícitamente por ella y generalización inducida cuando se produce al preguntar por el caso general. El diseño de las tareas o cuestionarios esperan su presencia en un momento más tardío dándose así una generalización espontánea (Pinto y Cañadas, 2017a). Nos centramos tanto en la forma directa como en la forma inversa de una función pues se considera que genera más dificultades que la directa y nos ayuda a indagar en el desarrollo del pensamiento funcional (MacGregor y Stacey, 1995). Nuestro objetivo general de investigación es describir cómo los estudiantes de 2º de Educación Primaria perciben la forma directa e inversa de una función al trabajar con un problema que involucra una relación lineal en el contexto funcional del early algebra. Nos centramos en 2º de primaria debido a que existen estudios previos que abordan la función directa e inversa en edades cercanas pero no en este nivel de Educación Primaria. Abordamos dos objetivos específicos: (a) identificar las estructuras que evidencian los estudiantes al generalizar la forma directa e indirecta de una función y (b) describir la generalización con base en esas estructuras.

Método

Llevamos a cabo un estudio de tipo cualitativo y de carácter exploratorio y descriptivo. Dentro del panorama de la investigación de diseño desarrollamos un experimento de enseñanza con sesiones de trabajo y entrevistas individuales (Steffe y Thompson, 2000). En este trabajo nos centramos en la información proveniente de una entrevista realizada a seis estudiantes al final de las sesiones del experimento de enseñanza. Para alcanzar nuestros objetivos de investigación, describimos las diferencias observadas en cuanto a las estructuras identificadas tanto en la forma directa como inversa de la función como también las generalizaciones expresadas atendiendo a si son espontáneas o inducidas.

Participantes

Los sujetos de este estudio son seis estudiantes de segundo de Educación Primaria (7-8 años) en España a los que realizamos una entrevista individual semiestructurada. Sus conocimientos previos son: números del 0 al 399, comparación de números y operaciones de sumas y restas con llevadas. Seleccionamos a estos estudiantes de un grupo de 24 al que aplicamos un cuestionario inicial con preguntas donde se involucraba la función $y=x+3$ en una tarea de generalización contextualizada. Según las respuestas de los alumnos, seleccionamos a seis de ellos, teniendo en cuenta las recomendaciones de la profesora y según hubiera avanzado en el proceso de generalización.

Instrumento de recogida de información

Cinco sesiones de trabajo constituyeron el experimento de enseñanza y fueron videograbadas. Además hemos realizado unas entrevistas semiestructuradas individuales a los seis estudiantes al finalizar las sesiones.

Sesiones de clase

En cada sesión planteamos una tarea de generalización con contextos diferentes y funciones lineales distintas, como presentamos en la Tabla 1.

Tabla 1

Características de la sesiones de clase

Contexto	Función
Sesión 1: máquina de bolas	y = x+3
Sesión 2: parque de atracciones 1º	
Sesión 3: parque de atracciones 2º	y = 2x+1
Sesión 4: cumpleaños	y = 2x
Sesión 5: paradas de tren	

Las funciones siguen una estructura aditiva y/o multiplicativa. Iniciamos la tarea preguntando por casos particulares del problema y, pasando por nuevos casos particulares, llegábamos a preguntar por la generalización. Algunas tareas tienen contextos novedosos y otras provienen de estudios previos que incluimos en nuestros antecedentes. En todas las sesiones del experimento usamos la misma dinámica, a saber; en primer lugar exponemos la tarea en gran grupo, después aplicamos los cuestionarios específicos de cada sesión y, por último, una puesta en común. Cada cuestionario consta de preguntas sobre una tarea de generalización diferente dada por los contextos que aparecen en la Tabla 1. Los estudiantes no recibieron realimentación sobre sus respuestas. Al aula entraron tres miembros del equipo de investigación: la profesora- investigadora, una investigadora de apoyo y otro investigador que grabó con la videocámara.

Entrevistas

Analizamos la información proveniente de una entrevista semiestructurada realizada tras el trabajo de las cinco sesiones. En la entrevista planteamos tareas que involucran una función lineal de tipo aditivo, usamos como contexto la edad de dos superhéroes cuya diferencia son 4 años (función y =x+4). Un miembro del equipo de investigación fue el entrevistador, quien comenzó introduciendo el contexto de la tarea. A continuación les mostró casos particulares (no consecutivos para evitar la recursividad en las respuestas de los estudiantes) de la tarea y avanzamos inductivamente hacia la generalización. En la Figura 1 presentamos una síntesis del protocolo de actuación de la entrevista.

FORMA DIRECTA

1º Casos particulares

- Identificar relación funcional.
- Aplicar regla funcional en casos particulares diferente

1. Casos particulares dados

   Cuando Iron Man cumplió 5 años, el Capitán América cumplió 9 Cuando Iron Man cumplió 7 años, el Capitán América cumplió 11

2. Casos particulares propuestos por el estudiante.

   Dime una edad para Iron Man (_). Si cumple esos años ¿Cuántos años cumple el Capitán América?

2º Generalización

- Expresar la generalización

¿Cómo le explicarías a un amigo que ha de hacer para conocer la edad del Capitán América?

- Razonar con la generalización

Un niño de la clase dice que "Cuando Iron Man tiene XX años, el Capitán América tiene YY años

¿Estás de acuerdo con él?

FORMA INVERSA

1º Casos particulares

- Identificar relación funcional.
- Aplicar regla funcional en casos particulares diferente

1. Casos particulares dados

   Cuando el Capitán América cumplió 5 años ¿cuántos cumplió Iron Man? Cuando el Capitán América cumplió 8 años ¿cuántos cumplió Iron Man?

2. Casos particulares propuestos por el estudiante.

   Dime una edad para el Capitán América (_). Si cumple esos años ¿Cuántos años cumple Iron Man?

2º Generalización

- Expresar la generalización

¿Cómo le explicarías a un amigo que ha de hacer para conocer la edad de Iron Man?

- Razonar con la generalización

Un niño de la clase dice que "Cuando el Capitán América tiene XX años, Iron Man tiene YY años

¿Estás de acuerdo con él?

Figura 1. Protocolo de la entrevista.

Análisis de datos

Tras transcribir las entrevistas, diseñamos un sistema de categorías basado en las estructuras identificadas por los estudiantes, tanto en los casos particulares presentados como en el caso general, y para las formas directa e inversa de la función. Consideramos que un estudiante identifica una estructura cuando responde a dos o más cuestiones siguiendo la misma regularidad o cuando generaliza. Tenemos en cuenta el tipo de generalización expresada; inducida y/o espontánea.

Resultados

Presentamos los resultados sobre estructuras evidenciadas tanto en preguntas que involucran casos particulares como las que involucran el caso general a través de tablas-resumen, que complementamos con algunos ejemplos de las respuestas dadas por los estudiantes. Detallamos las estructuras evidenciadas en la forma directa e inversa de la función a tratar. Cada estudiante puede evidenciar diferentes estructuras a lo largo de entrevista; recogemos las estructuras de cada estudiante según su orden cronológico de aparición. Expresamos las estructuras identificadas por los estudiantes mediante simbolismo algebraico, aunque ellos no emplearan ese sistema de representación, como veremos en los ejemplos posteriores. En la Tabla 2 presentamos los resultados relativos a la forma directa de la función.

Tabla 2

Estructuras identificadas en la forma directa de la función

	Estructura	
Estudiante	Casos particulares	Caso general
E1	y = x + 4	y = 4x y= x + 4
E2	y = x + x y = x + 4	y =x + 4
E3	y = x + 4	y =x + 4
E4	y = x + 4 y = x + x	y= x + 4
E5	y = x + 4	y = x + 4
E6	y = x + 4	y = x + 4

Un mismo estudiante evidenció entre una y dos estructuras diferentes. Entre los casos particulares y el caso general, observamos tres tipos diferentes de estructuras: x+4, 4x y x+x. Señalamos los casos dados por E2 y E4 que ofrecieron la misma variedad de estructuras; identificaron una relación dada por el doble, en la forma x+x, para los casos particulares e identificaron la estructura correcta en el caso general.

Los estudiantes expresaron verbalmente la generalización. En sus generalizaciones (ver Tabla 2, columna 3) identificamos las estructuras 4x y x+4. Esta última evidenciada por los seis estudiantes. En el caso E1, el estudiante expresó inicialmente que hay que "multiplicar por 4 para obtener la edad del superhéroe mayor. Esto es un indicio de dificultad apreciada en diferenciar una estructura aditiva de otra multiplicativa. Destacamos ahora el caso E4 que generaliza bajo la relación x+4 expresando: "hay que sumar más 4". Los estudiantes, E2 y E3 expresaron que deben "sumar más 4". E1 generalizó cuestiones relativas tanto a casos particulares (generalización espontánea) como generales (generalización inducida). E2, E3, E4, E5 y E6 solo generalizaron de manera inducida. Por ejemplo E5 explicó en el caso general: "Iron Man tiene 4 años menos que el Capitán América y el Capitán América tiene 4 años más que Iron Man. Se llevan 4 años". E6 generaliza expresando: "Si yo sé cuántos años tiene Iron Man y me dice que el otro tiene más 4 que él pues hago una suma de 5+4 y sale 9". En el siguiente fragmento observamos la generalización espontánea de E1, observada durante preguntas sobre casos particulares.

E (Entrevistador): cuando Iron Man cumplió 5 años el Capitán América cumplió 9, cuando Iron Man cumplió 7 años el Capitán América cumplió 11 y cuando Iron Man cumplió 3 años el Capitán América cumplió 7 años. ¿Puedes decirme alguna relación entre esos números?

E1 (Estudiante1): el Capitán América siempre le gana por 4 años más

En la Tabla 3 presentamos los resultados relativos a la forma inversa de la función.

Tabla 3

Estructuras identificadas en la forma inversa de la función

	Estructura	
Estudiante	Casos particulares	Caso general
E1	x = y - 4	NR
E2	x = 2y	NP
E3	x= y - 4	x= y - 4
E4	NP	NP
E5	x = y - 4	x = y - 4
E6	x = y - 4	x = y - 4

NR: no responde; NP: no se le pregunta.

Observamos que cada estudiante evidenció una sola estructura a lo largo de la entrevista. En total, observamos dos tipos diferentes de estructura incluyendo tanto las dadas en los casos particulares como en el caso general: y-4 y 2y. Todos evidenciaron la estructura y-4 en algún momento de su trabajo tanto en los casos particulares como en el general salvo E2, quien identificó la estructura 2y y E4 al que no se le preguntó por la forma inversa por haberse encontrado cansado y disperso en ese momento de la entrevista. Lo hemos notado mediante NP. En este caso, E2 identificó 2y (estructura equivalente) en lugar de y+y para los casos particulares. En cuanto a la generalización, los estudiantes la expresaron verbalmente. Distinguimos también en el estudio de la forma inversa de la función entre generalización inducida y espontánea. E1 no respondió en esa ocasión a la pregunta del caso general por eso notamos su respuesta con NR. A E2 y E4 no se les preguntó por el caso general ya que se encontraban distraídos en esta última parte de la entrevista y era difícil llevarla a cabo. Notamos esta situación mediante NP. Las generalizaciones dadas por los estudiantes E3 y E6 son inducidas. E6 expresaba "antes sumaba y ahora resto, yo siempre estoy restando 4". Otro ejemplo de este tipo de generalización lo da E3:

E: ¿Cómo explicarías cómo calcular la edad del Capitán América conociendo la de Iron Man? E3: cuando nació Iron Man tenía el Capitán América 4 años y después vas sumando los años. Entrevistador: ¿qué has hecho tú?

E3: una resta, aquí: 9-4, 8-4, 352-4.

Por otro lado, E5, generalizó de ambas formas: espontánea e inducida. "Antes sumaba 4 ahora resto 4" (generalización espontánea). A la pregunta que le realizamos en el caso general E5 contestó: "Siempre resto 4" (generalización inducida).

Conclusiones

Tras el análisis de los datos evidenciamos capacidades en los niños de 2º de Educación Primaria de este estudio para evidenciar estructuras involucradas en tareas de generalización que involucran funciones lineales, para las formas directa e inversa de la función. Del mismo modo que ocurre en Torres, Cañadas y Moreno (2018), los 6 estudiantes entrevistados en este estudio han identificado la estructura correcta de la relación funcional en al menos una ocasión a lo largo de la entrevista durante el estudio de la forma directa de la función tanto en los casos particulares como en el general. No obstante, los resultados sobre las estructuras identificadas durante el estudio de la forma inversa de la función son menos homogéneos. De los 6 estudiantes entrevistados cuatro identifican la estructura correcta en los casos particulares y tres en el caso general. Encontramos respuestas más incoherentes e imprecisas en el estudio de la forma inversa siendo estos resultados coherentes con los de Pinto y Cañadas (2017a). Las preguntas correspondientes se hicieron al final de la entrevista pudiendo influir la motivación o cansancio de los niños. La variedad y cantidad de estructuras identificadas es mayor durante el estudio de la forma directa de la función. La estructura x+x es evidenciada por dos estudiantes en el trabajo con casos particulares de la forma directa de la función. No identificamos estructuras equivalentes para el caso x+4 con la forma directa de la función. Se puede deber al predominio de la estructura aditiva sobre la multiplicativa. Sin embargo, con la forma inversa de la función encontramos la estructura 2y, equivalente a y+y, en una ocasión, durante el trabajo con los casos particulares. En cualquier caso, la generalización más frecuente ha sido la generalización inducida en forma directa de la función (5 de 6 estudiantes). Tan solo E1 generaliza en las formas espontánea e inducida. Durante el estudio de la forma inversa son 2 de los 3 estudiantes que responden los que presentan un tipo de generalización inducida. Es E5 quien presenta generalización espontánea e inducida. Pinto y Cañadas (2017a, 2017b) indagan en las respuestas de niños mayores a los de 2º de Educación Primaria obteniendo evidencias de generalización y por ende de capacidades relacionadas con el pensamiento funcional. Nosotros concluimos con que ahora también existen capacidades en niños de nivel de 2º de Educación Primaria. Quedaría pendiente de estudio la interpretación de los estudiantes sobre las estructuras tratando con otro tipo de función en un contexto diferente para poder valorar si la dificultad añadida en la identificación de la forma inversa de la función depende de su forma aditiva.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias y bibliografía

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. (2016). Powerful ideas in elementary school mathematics. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in Mathematics Education. Third edition* (pp. 191-218). New York, NY: Routledge.

English, L. y Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher, 91*(2), 166-170.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal, 7*(1), 69-85.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017a). Generalization in fifth graders within a functional approach. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh y B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 49-56). Singapur: PME.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017b). Functional thinking and generalization in third year of primary school. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 472−479). Dublin, Irlanda: DCU Institute of Education and Erme.

Pólya, G. (1966). Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid, España: Tecnos

Steffe, L. y Thompson, P.W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: LAE.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. En E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz- Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 574-583). Gijón, España: SEIE

XV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Pensamiento funcional en estudiantes de quinto grado de primaria cuando resuelven actividades con patrones numéricos

Genny Rocío **Uicab** Ballote
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
rocio.uicab@cinvestav.mx
Montserrat **García**-Campos
Universidad Pedagógica Nacional
México
mgarciac@g.upn.mx

Resumen

Esta comunicación presenta los resultados preliminares de una investigación, que indaga sobre cómo se manifiesta el pensamiento funcional en estudiantes de entre 10 y 12 años cuando resuelven actividades con patrones numéricos que involucran funciones de dos variables. Se asume presencia de pensamiento funcional cuando los estudiantes pueden expresar una correspondencia entre las dos cantidades variables involucradas. En este documento se reportan resultados del análisis de las respuestas a 13 actividades aplicadas a 31 estudiantes de una escuela primaria pública en Tekit, Yucatán, México.

Palabras clave: pensamiento funcional, patrones numéricos, correspondencia, niños de 10-12 años.

Introducción

El interés en fomentar el pensamiento algebraico en estudiantes de edades tempranas (estudiantes de Educación Primaria) no es una idea nueva, en la última década ha habido un mayor énfasis y también aceptación para desarrollar ideas algebraicas en estas edades. Existen trabajos de investigación que reportan cómo diversos niños de educación primaria generan estrategias, argumentan y justifican ciertas tareas matemáticas que le son presentadas, evidenciando en ellos, ideas algebraicas (e.g. Kieran, 2004; Carraher, Schlieman, Brizuela y Earnest, 2006; Blanton y Kaput, 2011; Brizuela y Blanton, 2014).

De acuerdo con Tanişli (2011) uno de los componentes básicos del pensamiento algebraico es el pensamiento funcional. En edades tempranas dicho pensamiento implica centrarse en la relación entre dos cantidades variables; de este modo el pensamiento funcional puede contribuir al estudio de conceptos algebraicos como el de función (Blanton y Kaput, 2004). No se trata de introducir las funciones como se trabajan en educación secundaria, sino de aprovechar el potencial de este contenido matemático para promover el pensamiento funcional desde edades tempranas.

El presente trabajo expone cómo las respuestas de estudiantes de quinto grado de una escuela primaria en Tekit, Mérida, México, proporcionan evidencia de su pensamiento funcional, cuando resuelven actividades con patrones numéricos que involucran dos variables.

Marco de referencia

Pensamiento funcional

El concepto de pensamiento funcional fue usado por primera vez a finales del siglo XIX, principios del siglo XX por el matemático alemán Felix Klein, quien fuera líder en el movimiento de reforma de la educación matemática en Europa. Klein consideraba el pensamiento funcional como la idea central de la enseñanza matemática (Eisenmann, 2009). El foco de atención de este pensamiento son las funciones, pues la noción de función es uno de los conceptos matemáticos más importantes, siendo tema de interés para la Matemática Educativa. En la mayoría de los países este concepto aparece en el currículo a partir de la secundaria.

Existen enfoques y posturas respecto al pensamiento funcional. Para Blanton, Levi, Crites & Dougherty (2011), fomenta la capacidad para generalizar, representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas y puede caracterizarse como el proceso de construcción, descripción y razonamiento en torno a las funciones. Si bien el pensamiento funcional incluye generalizar las relaciones funcionales entre cantidades y representar y razonar con esas relaciones para comprender el comportamiento de la función (Blanton et al., 2011); Warren y Cooper (2005) hacen notar que las primeras pautas del pensamiento funcional pueden incluir ideas de cambio cualitativo ("soy más alto"), cambio cuantitativo ("soy 2 cm más alto"), relaciones entre esos cambios (si todos crecieron en la misma cantidad de cm y Juan cambió de altura de 143 a 145 cm, ¿cuánto creció Pedro?) y el uso de esas relaciones para resolver problemas (si la altura de Alison ahora es 133 cm, ¿qué altura tenía antes de que creciera?). También ayuda a desarrollar la comprensión de las relaciones entre las operaciones, particularmente la relación inversa (por ejemplo, la suma y la resta son operaciones inversas). Estos últimos autores reconocen que cuando los niños trabajan con actividades en las que pueden hacer conexiones entre las diversas operaciones, explorar el cambio con relaciones aritméticas, tienen oportunidades para conjeturar y argumentar, lo cual contribuye desde edades tempranas al pensamiento funcional en etapas posteriores.

Por lo general, en la educación primaria se da poco énfasis a las relaciones y transformaciones matemáticas como objetos de estudio. Para trabajar con relaciones y transformaciones matemáticas es necesario el concepto de función: cómo el valor de ciertas cantidades se relacionan con el valor de otras cantidades o cómo los valores son cambiados o mapeados (transformados) hacia otras cantidades (Warren y Cooper, 2005).

Para Smith (2008) el pensamiento funcional es el pensamiento representacional que se enfoca en las relaciones entre dos (o más) cantidades que varían, específicamente los tipos de pensamiento que conducen desde relaciones específicas (instancias individuales) a generalizaciones de dichas relaciones. Este autor hace una distinción entre dos tipos de pensamiento algebraico: pensamiento representacional y pensamiento simbólico. El pensamiento simbólico es considerado como la manera en que uno entiende y usa un sistema de símbolos. El pensamiento representacional es reservado para designar el proceso mental a través del cual un individuo crea un significado referencial para algún sistema representacional. En edades tempranas, el principal interés está en el pensamiento representacional, en cómo los niños crean representaciones significativas, y al hacerlo construyen y expresan generalizaciones. El pensamiento funcional ocurre cuando los niños inventan o se apropian de sistemas de representación para representar una generalización de una relación entre cantidades variables.

Entre las actividades que pueden contribuir al desarrollo del pensamiento funcional en edades tempranas están las que involucran patrones numéricos.

Patrones numéricos

Un patrón matemático se puede describir como cualquier regularidad predecible, generalmente involucrando relaciones numéricas, espaciales o lógicas. En cada patrón, los diversos elementos están organizados de manera regular. Por ejemplo, en el patrón creciente de los números cuadrados 0, 1, 4, 9,..., los números aumentan en 1, 3, 5..., respectivamente, resultando la secuencia de números impares. La estructura matemática que subyace a un patrón matemático puede expresarse en forma de generalización –relación numérica, espacial o lógica– la cual es verdadera para cierto dominio (Mulligan y Micheltmore, 2009).

Las actividades con patrones pueden conducir al desarrollo temprano del pensamiento funcional (Warren y Cooper, 2006). Sin embargo, es importante considerar patrones en los que se involucran dos o más cantidades simultáneamente, es decir, prestar atención a cómo dos o más cantidades varían simultáneamente (Blanton y Kaput, 2004). En una relación funcional pueden identificarse las relaciones entre el patrón numérico y su posición, las cuales pueden generalizarse mediante una regla que permita encontrar cualesquiera valores, por ejemplo, el de la variable dependiente dado el valor de la variable independiente.

Objetivo de investigación

Se pretende dar cuenta del pensamiento funcional que manifiestan estudiantes de 10 a 12 años cuando resuelven actividades que involucran funciones de dos variables con patrones numéricos y en situaciones en contexto.

Metodología

El estudio es de naturaleza cualitativa (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). Con el fin de obtener información de cómo se manifiesta el pensamiento funcional se analizan las producciones de los estudiantes (en su propio lenguaje) a las tareas que les fueron presentadas.

Participantes

Las actividades fueron aplicadas en diferentes fechas (durante el ciclo escolar 2017-2018), a 31 estudiantes que en ese momento tenían entre 10 y 11 años, inscritos en quinto grado de primaria en una escuela pública, ubicada en el municipio de Tekit, Yucatán, México. Las actividades fueron entregadas impresas, los estudiantes trabajaron de manera individual y no hubo intervención por parte del investigador. Se les explicó que se requería su participación para resolver unas actividades, se les solicitó leer las instrucciones cuidadosamente y exhortó resolver de acuerdo a lo que entendieran de las actividades, sin embargo también se les externó que en caso de no poder resolver alguna pregunta podían dejarlo en blanco o escribir un comentario como “no lo entendí” o “no supe qué hacer”.

Etapas para la toma de datos

Se consideran dos etapas para la toma de datos. La primera etapa, que hemos denominado diagnóstica, se conforma del diseño y aplicación de 13 actividades que involucran funciones de dos variables, de la forma $f: N \rightarrow N$. Con base en el análisis de las respuestas obtenidas en la primera etapa, algunos estudiantes serán seleccionados para llevar a cabo la segunda etapa que consistirá en una entrevista semiestructurada a través del diseño y aplicación de actividades de situaciones en contexto, que permitan indagar diversos aspectos que caractericen el pensamiento funcional que subyace en los estudiantes.

En este documento se reportan los resultados de la primera etapa cuya finalidad consistió en saber si los estudiantes pueden identificar y describir las relaciones de correspondencia entre las variables. Se centra la atención en si pueden establecer la relación entre dos conjuntos y la manera en que escriben la regla que la representa, ya sea en lenguaje natural o pre simbólico.

Diseño de las actividades de la primera etapa

Las 13 actividades se caracterizan de la siguiente forma. Cabe señalar que este tipo de actividades no forman parte del currículum oficial, fueron diseñadas para la investigación.

- De la 1 a 8 involucran a las funciones $f(x) = x$, $f(x) = 2x$, $f(x) = 2x - 1$, $f(x) = x^2$, $f(x) = 3x$, $f(x) = x + 3$, $f(x) = 4x$, $f(x) = x + 4$. Se presenta el patrón numérico mediante una figura con puntos y se especifica el número de la figura correspondiente (relación de correspondencia entre el número de puntos de la figura y el número de figura). Se promueven un razonamiento inductivo para encontrar una regla de correspondencia que no se solicita explícitamente, pero que podría evidenciarse en el inciso e) al pedir el número de puntos para una figura que se encuentra alejada de las demás (ver Figura 1). Según Polya (1965) el razonamiento inductivo conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de ejemplos particulares y sus combinaciones.
- Las actividades 9 y 10 involucran a las funciones $f(x) = 2x$, $f(x) = x + 2$. A diferencia de las primeras 8 actividades, se presenta el patrón con valores y se asocia a cada valor su posición. Nuevamente se promueve un razonamiento inductivo, pero el énfasis de estas actividades está en la generalización. La característica central de estas actividades es la solicitud explícita de una regla (ver Figura 2).
- Las actividades 11 a 13 involucran a las funciones $f(x) = 2x$, $f(x) = x + 2$, $f(x) = 4x$. La información se presenta a través de tablas horizontales y verticales. La característica principal de estas actividades son pequeñas situaciones en contexto. Se espera que los estudiantes puedan apreciar diferentes presentaciones de algunas funciones, por ejemplo: $f(x) = 2x$ y $f(x) = x + 2$ que aparecen en los tres grupos de actividades. También se pretende que los estudiantes encuentren –mediante la regla aritmética– no sólo la variable dependiente a partir de la independiente, sino también inversamente (ver Figura 3).

Análisis y Resultados

El análisis de las 13 actividades se realizó en dos direcciones:

- Se examinaron todos los incisos de cada actividad como ítems individuales –excepto los incisos a) y b) de las actividades 1 a 8 en virtud de que son preámbulo para promover la relación funcional–. Bajo esa consideración se tiene el registro de 37 respuestas por cada estudiante. En la Tabla 1 se presentan las respuestas clasificadas de cada estudiante.

- Se examinaron todas las actividades desde su primer inciso hasta el último para apreciar el proceso que guía a un estudiante a establecer o no una relación de correspondencia.

Tabla 1

Clasificación de las respuestas de los estudiantes.

E	S/R	S/C	R	RAI	RAE	Total
E1	0	12	19	5	1	37
E2	4	25	4	4	0	37
E3	0	25	8	4	0	37
E4	0	6	10	15	6	37
E5	12	19	4	2	0	37
E6	0	0	16	14	7	37
E7	0	9	9	14	5	37
E8	0	0	11	19	7	37
E9	0	1	8	16	12	37
E10	0	8	17	11	1	37
E11	2	28	5	2	0	37
E12	0	8	7	16	6	37
E13	0	11	11	9	6	37
E14	0	5	18	8	6	37

E	S/R	S/C	R	RAI	RAE	Total
E15	0	5	17	12	3	37
E16	0	0	7	16	14	37
E19	2	17	8	8	2	37
E20	2	15	10	8	2	37
E21	1	10	13	12	1	37
E22	0	6	16	10	5	37
E23	0	5	14	17	1	37
E24	0	23	5	9	0	37
E25	10	12	8	6	1	37
E26	0	17	13	7	0	37
E27	1	11	17	7	1	37
E28	0	19	14	4	0	37
E30	0	30	4	3	0	37
E31	0	29	6	2	0	37

Notas: E=Estudiante; S/R=Sin respuesta; S/C=Sin clasificar; R=Recursión; RAI=Respuesta Aritmética Implícita; RAE=Respuesta Aritmética Explícita. Los estudiantes E17, E18 y E29 contestaron en promedio 5 actividades porque solían faltar a clases, por tal motivo se consideró omitirlos.

Se identificaron tres formas de resolver las actividades:

- Recursión (R). Encontrar el valor n de la variable dependiente, apoyándose del resultado $n-1$, obtenido anteriormente.
- Regla aritmética implícita (RAI). Encontrar el valor n de la variable dependiente sin apoyarse del valor $n-1$ (recursivamente). Se interpreta el uso de una regla aritmética que relaciona a las dos variables involucradas pero, o no hay procedimientos que den cuenta de la regla o son imprecisos. Algunas respuestas suelen expresar solamente la variación de la variable dependiente (quizá esto se deba a la especificidad de las preguntas, pero se considera que implícitamente sí se relacionan a las variables).
- Regla aritmética explícita (RAE). Identificar y escribir –en lenguaje natural o pre simbólico– la relación (regla) entre las dos variables involucradas.

La referencia S/R indica que el estudiante escribió comentarios del tipo “no sé”; “éste se me complicó”; o es una pregunta que quedó sin contestar. S/C compete a una respuesta sin poder clasificar en alguna de las anteriores, por ejemplo: para la actividad cuya función es $f(x)=x+4$, (x: número de la figura, $f(x)$: número de puntos) ante la pregunta ¿cuál es el número de puntos que tiene la figura 80? un estudiante respondió “pones 2 bolitas de 80”.

A continuación, se exponen las producciones de tres estudiantes con respuestas R, RAI y RAE.

El estudiante E9 en la actividad 2 (ver Figura 1), responde correctamente los incisos a) y b), se puede decir partir de lo que respondió que hay un proceso recursivo (R). En los incisos c) y d) realiza una generalización y establece una regla aritmética implícita (RAI) que le permite encontrar el número de puntos para las figuras 10 y 25. La regla se hace explícita (RAE) en lenguaje natural al explicar cómo ha encontrado el número de puntos para la figura 100. E9 escribe: "[…] el número de figura es (debió escribir 'se')[1] multiplica en 2 y da el resultado". Lo anterior es evidencia de que E9 encuentra una relación entre el número de la figura (valor 100, que compete a la variable independiente) la cual debe multiplicarse por 2 para obtener un resultado (valor 200, que corresponde a la variable dependiente: número de puntos de la figura).

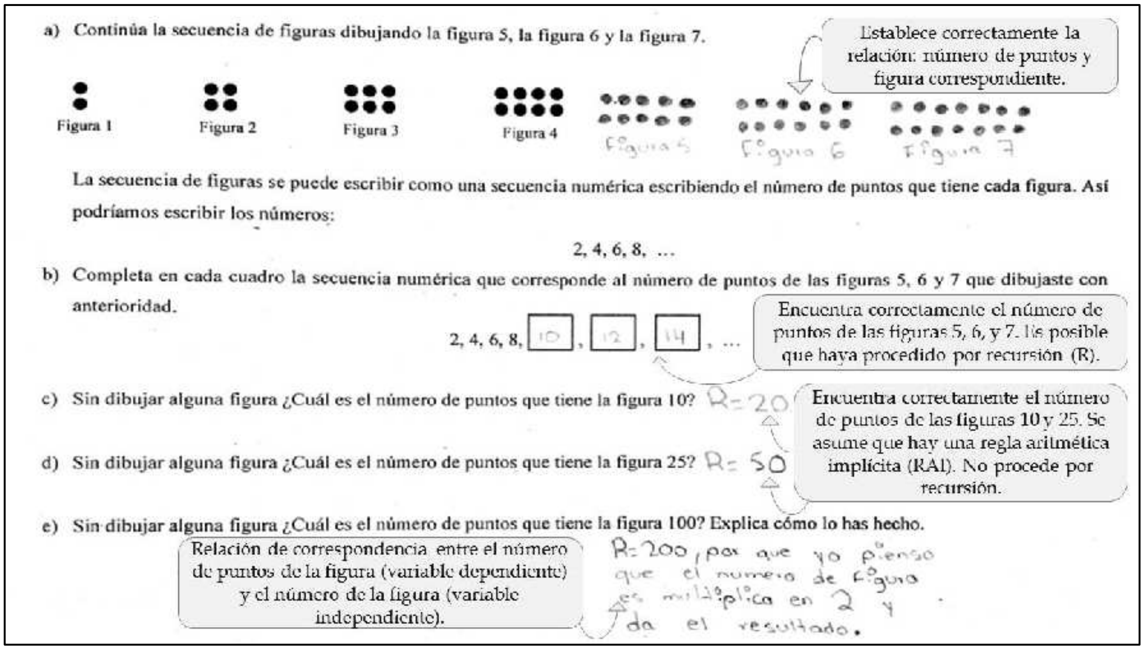


Figura 1. Respuestas de E9 en la Actividad 2. La función involucrada es $f(x) = 2x$.

El estudiante E15 en la actividad 9 empieza resolviendo el inciso a) de forma recursiva (R) explicando en el inciso b) que los números de la secuencia numérica se obtienen "sumando 2" (ver Figura 2). Cuando plantea la regla (inciso c) que permite encontrar cualquier número de la secuencia escribe en lenguaje natural: "Multiplicando por 2 el término que tiene"; esto es, puede generalizar mediante un razonamiento inductivo (en el sentido de Polya). Posteriormente en el inciso d) aplica la regla que proporcionó de forma operativa "500 x 2 = 1000", este procedimiento da evidencia de la relación que establece entre el valor que toma la variable independiente (500) con el valor resultante de la variable dependiente (1000) (RAE). Finalmente (inciso e), propone un término de la secuencia numérica y encuentra el número que le corresponde. Al hacer uso de su regla se considera, que hay evidencia de que E15 entiende que la regla expresa generalidad, es decir, con ella puede encontrar cualquier valor de la secuencia.

El estudiante E6, en la actividad 13, para encontrar la cantidad de kilos de mango que se pueden adquirir con 200 pesos resuelve mediante una proporción. La resolución de una igualdad de razones, en este caso $\frac{(200)(1)}{4} =$ Número de kilos de mango (ver Figura 3), involucra la relación entre las variables cantidad y costo (RAE). E6 también encuentra correctamente la cantidad y costos faltantes lo que manifiesta conexión entre la multiplicación y división como operaciones inversas. Asimismo, incluye los símbolos "k" y "$" para denotar kilos y costo

[1] Comentario del investigador.

respectivamente, lo que evidencia que puede expresar la relación entre las variables con lenguaje pre simbólico.

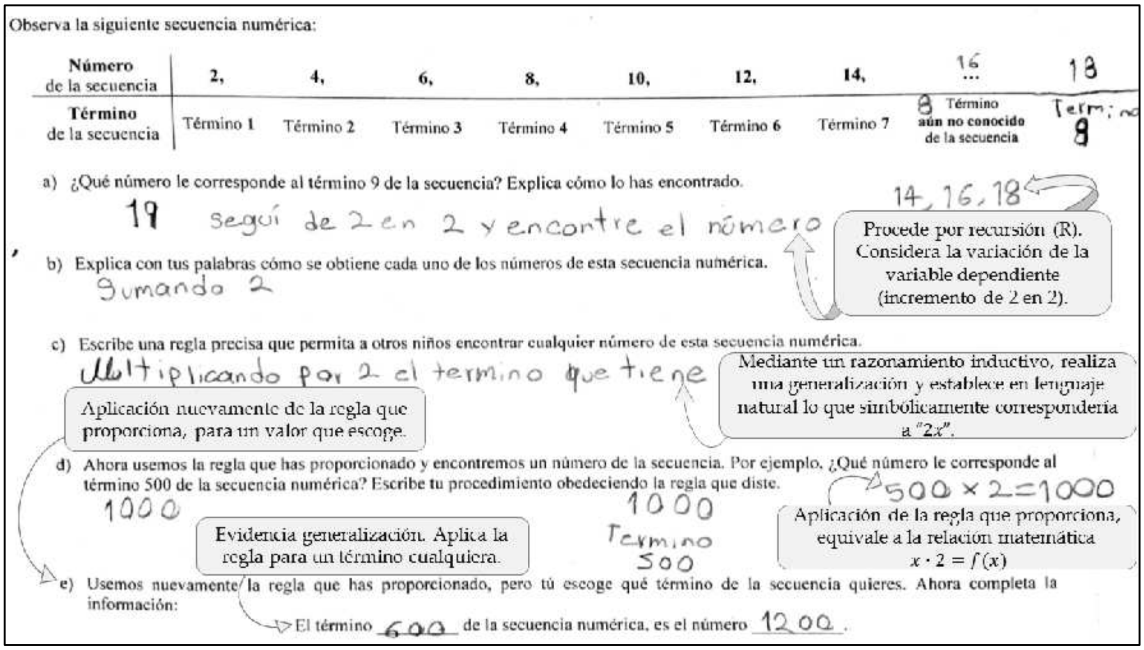


Figura 2. Respuestas de E15 en la Actividad 9. La función involucrada es $f(x) = 2x$.

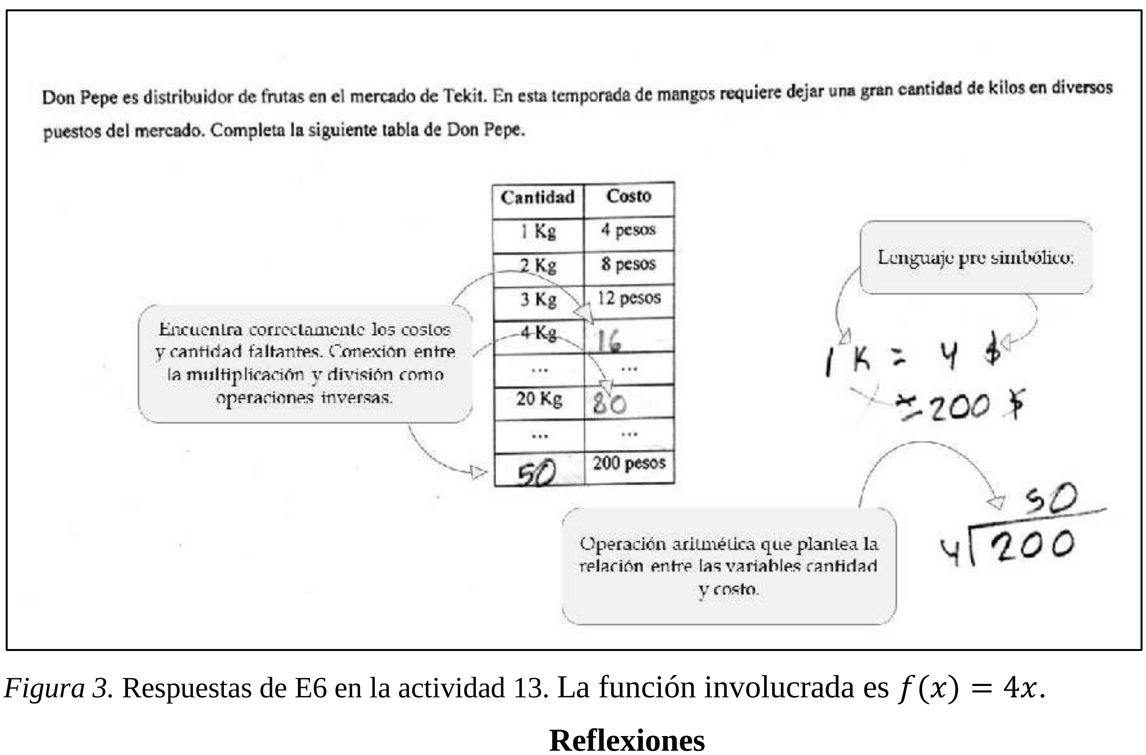


Figura 3. Respuestas de E6 en la actividad 13. La función involucrada es $f(x) = 4x$.

Reflexiones

De manera general se puede decir que los resultados del análisis de las respuestas de la etapa diagnóstica, muestran que algunos niños de quinto grado de primaria logran establecer las relaciones entre dos variables, expresándolas en lenguaje natural. Aunque inicialmente suelen proceder de forma recursiva para encontrar una a una las relaciones, algunos de ellos pueden identificar la relación general de correspondencia y establecer una regla usando lenguaje pre simbólico. Lo anterior puede considerarse evidencia de su pensamiento funcional en una etapa básica de desarrollo.

Referencias

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades student's capacity for functional thinking. In *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Norway: Bergen University College.

Blanton, M. L.; & Kaput, J. J. (2011). *Functional Thinking as a Route into Algebra in the Elementary Grades*. In Cai, J. & Knuth, (Eds.), Early Algebraization, Advances in Mathematics Education, 5-24. London: Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5*. In B. J. Dougherty & R. M. Zbiek (Eds.), Essential understandings series. National Council of Teachers of Mathematics: Reston, VA.

Brizuela, B. y Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología (UNLP)*, (14), 37-57.

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87-115.

Eisenmann, P. (2009). A contribution to the development of functional thinking of pupils and students. *The Teaching of Mathematics*, *22*(2), 73-81.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. McGraw-Hill Interamericana: México.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Mulligan J. & Micheltmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33-49. http://dx.doi.org.10.1007/BF03217544

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas (reimp. 2002).

Puig, L. (2001). *Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal*. Textos Seleccionados. México: CINVESTAV.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics. http://dx.doi.org/10.4324/9781315097435

Tanişli, D. (2011). Functional Thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*, 206-223.

Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2: a case of study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *6*(2), 150-162. https://doi.org/10.2304/ciec.2005.6.2.5

Warren, E. y Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *11*(1), 9–14.

Razonamiento Covariacional al estudiar la función por partes mediado por GeoGebra

Álvaro Javier **Saa-Vernaza**
Universidad del Cauca.
Colombia.
saa_0401@hotmail.com
Edinsson **Fernández-Mosquera**
Universidad de Nariño.
Colombia.
edinfer@udenar.edu.co

Introducción

En diferentes investigaciones centradas en la noción de función y su enseñanza (Ferrrari & Farfán, 2008; Saa & Trochez, 2013), se evidencia la limitación exclusiva a la representación algebraica y se emplea el cambio al gráfico como un paso consecutivo sin dar importancia al análisis de la correspondencia directa entre dos cantidades que varían entre sí, entonces es necesario que los docentes busquen alternativas para la enseñanza de este objeto matemático, teniendo en cuenta contextos que modelen situaciones reales y así reconocer las características específicas de cada función, como forma particular de covariación. En este poster, se presenta avances de una investigación de Maestría en Educación Matemática de la Universidad del Cauca, en Colombia, la cual pretende caracterizar los niveles de razonamiento covariacional asociadas a la función por partes cuando se resuelven situaciones mediadas por GeoGebra.

Algunas consideraciones del Razonamiento Covariacional

La covariación permite la comprensión del concepto de función cuando se trabaja a partir de *actividades cognitivas* que involucran la coordinación de dos cantidades variantes, atendiendo así la forma en cómo cambia una variable con respecto de la otra. Cabe resaltar que Thompson & Carlson (2017), describen la manera en que el razonamiento covariacional ha evolucionado como una construcción teórica en Educación Matemática a partir del trabajo individual y colectivo de muchos investigadores en las últimas dos décadas, proporcionando un marco fraccionado en dos partes, uno que describe los niveles de Razonamiento Variacional y el otro el Covariacional, asimismo, los comportamientos y la capacidad de razonar del estudiante.

Antecedentes

Investigaciones anteriores indican que la función y su relación con el razonamiento covariacional estudiado en las matemáticas escolares, evidencian una tendencia al estudio de funciones lineales, cuadráticas y exponenciales, dejando a un lado el análisis de otro tipo de funciones como las funciones definidas por partes, tal y como lo reportan Saa y Trochez (2013) que desarrollaron una propuesta para la enseñanza de este tipo de funciones mediadas por

GeoGebra con estudiantes de grado noveno. Asimismo, se recomienda que la *Modelación Matemática* debe ser trabajada desde diversas situaciones reales, además que potencien el razonamiento covariacional en los estudiantes, de manera que, relacionen la covariación como la razón de cambio de cantidades relacionadas que varían entre sí.

Un Ejemplo de Covariación en función por partes

Se presenta a los estudiantes la función por partes definida como funciones lineales y constantes, a través de la mediación del GeoGebra. Esta actividad modela una situación real como es el cobro del servicio de un taxi, y en ella se pretende analizar la coordinación simultánea entre el cambio de una cantidad con respecto a otra, es decir, la variación de las unidades que arroja el taxímetro a medida que se mueve el taxi con respecto al precio del servicio. Ver Figura 1. Asimismo, se pretende que los estudiantes comprendan la razón de cambio promedio en diferentes intervalos de la función y la razón de cambio instantánea como resultado de refinamientos cada vez más pequeños de la razón de cambio promedio.

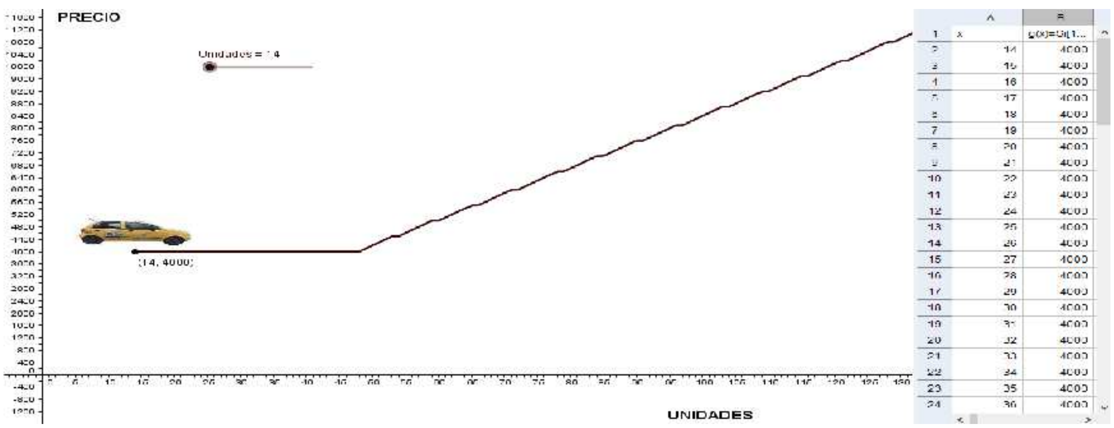


Figura 1. El cobro del servicio de un taxi.

A guisa de conclusión

Esta investigación tiene el propósito didáctico de identificar las habilidades de razonamiento covariacional en los estudiantes. Asimismo, el GeoGebra se constituye en un mediador que permite visualizar matemáticamente las características propias de la co-dependencia entre variables cuando se plantean funciones definidas por partes de una manera dinámica. Finalmente, se recomienda seguir trabajando este tipo de funciones que son poco estudiadas en la escuela, mostrando que si es posible el tratamiento didáctico desde un enfoque covariacional al modelar situaciones reales.

Referencias y bibliografía

Ferrrari, M., & Farfán, R. M. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *11*(2008), 309–354. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v11n3/v11n3a2.pdf

Saa, Á., & Trochez, Á. (2013). *Una Propuesta de Enseñanza de la Función por Tramos usando el Periódico y Geogebra.* (Trabajo de Grado). Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado de: http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/6774/1/CD-0395402.pdf

Thompson, P. W., & Carlson, M. (2017). Variation ,Covariation and Functions: Foundational Ways of Mathematical Thinking. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (p. 421–456.). Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics,. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/302581485_Variation_covariation_and_functions_Foundational_ways_of_thinking_mathematically

Comprensión del producto vectorial desde los Modos de Pensamiento: El caso de profesores en formación inicial

Marcela **Parraguez** González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
marcela.parraguez@pucv.cl

Rosario **Guerra** Martínez
Universidad Católica del Norte
Chile
r1982gm@gmail.com

Resumen

Con base en la Teoría Modos de Pensar de Sierpinska, se presentan tres modos de pensar el concepto de producto vectorial: (1) como el vector normal a otros dos vectores, (2) como una fórmula que permite calcularlo y (3) a través de dos propiedades que lo caracterizan. La finalidad de presentar estos tres modos de pensar el producto vectorial tridimensional, es mostrar evidencias con sustento teórico de la comprensión del concepto producto vectorial en profesores en formación inicial, que pertenecen a dos casos de estudio, y de cómo ellos se sitúan en estos modos, para dar respuesta a tres situaciones que se les presentan. Los resultados muestran que los profesores en formación inicial se sitúan en uno o dos modos de pensar para responder, sin mayor interacción entre los tres modos.

Palabras clave: producto vectorial, modos de pensamiento, comprensión.

Introducción

El producto vectorial nace con del descubrimiento de los Cuaterniones, que hiciera uno de los fundadores de la matemática en el año 1843 –Sir William Rowan Hamilton–. En esos años, cuando Hamilton trabajaba sobre mecánica, comenzó una búsqueda incansable sobre la forma de extender la comprensión geométrica de los números complejos en el plano, a una comprensión geométrica en tres dimensiones. Sin embargo, Hamilton, redirige su investigación en la búsqueda de una terna o número complejo tridimensional, pero, durante muchos años no logró resultados satisfactorios para la geometría tridimensional, en particular en dotar de una estructura al producto vectorial. En este proceso de búsqueda, Hamilton observa que, si bien la propiedad de conmutatividad es inherente al producto, él tuvo que aceptar que esta propiedad no se cumple siempre para el producto en un espacio tridimensional, y para avanzar en su cometido él tuvo que aceptar que $ij = -ji$ (con i, j vectores en $\mathbb{R}^3$).

Además, al intentar entender el producto de vectores en el espacio, se dio cuenta de que eran necesarias cuaternas en lugar de ternas, fue así cómo nacen los *Cuaterniones de Hamilton*, números hipercomplejos cuatro dimensionales. Números con una parte escalar y una parte vectorial. Hamilton al definir las operaciones entre ellos, en particular la multiplicación de cuaterniones, considerando solamente la parte vectorial o compleja del cuaternión, dio origen a lo que se conoce como el producto vectorial o el producto cruz.

Con base en lo anterior, la historia del producto vectorial está entrelazada con la de los cuaterniones. Según Martínez-Sierra y Benoit (2008), en la historia sobre una epistemología del producto vectorial, se distinguen tres etapas, que a continuación brevemente se sintetizan.

La *primera etapa* referida a Hamilton, el descubrimiento de los cuaterniones y el nacimiento del producto vectorial.

Una *segunda etapa* que considera que la teoría de los cuaterniones, constituye una transición entre el cálculo geométrico plano, al análisis vectorial. Esta segunda etapa, fue llamada *de los defensores y detractores de los cuaterniones de Hamilton,* porque uno de los principales defensores del estudio de este tema fue Peter Guthrie Tait, físico matemático escocés y pionero en la termodinámica. Tait en 1867, publica un libro llamado *Tratado elemental sobre cuaterniones*, donde desarrolla de forma más simple la teoría propuesta por Hamilton, específicamente en uno de sus capítulos explica los principios de la multiplicación de los cuaterniones, como la anti-conmutatividad del producto vectorial.

La *última etapa*, llamada *el nacimiento del análisis moderno*, donde se destaca Josiah Willard Gibbs, quién separa de forma definitiva la parte escalar de la parte vectorial de un cuaternión, proponiendo dos productos, el producto escalar y el producto vectorial, dando así inicio al análisis moderno.

El interés de esta comunicación es situarse en el objeto matemático producto vectorial, desde una perspectiva cognitiva desarrollada por Sierpinska (2000), llamada Teoría Modos de Pensamiento, para mostrar a la comunidad interesada diferentes formas de comprender este objeto matemático, que en muchas ocasiones es utilizado para ejemplificar que el producto de vectores no es conmutativo.

El producto vectorial en el currículo de la formación de profesores

El concepto de producto vectorial está presente en la mayoría de los programas de matemáticas para carreras como Pedagogía en Matemáticas, Ingeniería, Licenciatura en Ciencias o en Economía, y nuestra propuesta es analizarlo desde un pensar práctico y teórico que construyen sus aprendices, dispuestos estos últimos en dos estudio de casos, constituidos por profesores en formación inicial. En lo que sigue, vamos a entender que el pensamiento práctico se genera con el fin de obtener algo en concreto, en cambio el pensamiento teórico de produce en el hecho puro de pensar las relaciones sobre sistemas de conceptos.

Generalmente un programa de Geometría Vectorial, para un curso de primer año de formación de profesores, contiene un apartado que aborda el producto vectorial. Este producto vectorial no tiene una definición única, sin embargo, en muchas ocasiones se define como sigue y dicha definición se puede encontrar en textos de Geometría Vectorial, como por ejemplo en Benítez (2015), que habitualmente forma parte de las referencias de algunos de estos programas.

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Su producto vectorial $u \times v$ (en este orden) se define como el vector: $u \times v = (u_2 v_3 - v_2\, u_3,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$.

Existen numerosas investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que muestran los estudiantes para comprender el concepto vector, pero no así de geometría vectorial y menos aún si se restringe el estudio del producto vectorial tridimensional a una postura cognitiva.

El problema central, en esta materia es que el estudiante debe trabajar con conceptos abstractos, pero su tendencia es a trabajar con procedimientos mecánicos, limitando su comprensión sobre los conceptos involucrados. Esto pone en tela de juicio el conocimiento alcanzado de la enseñanza de esta materia, y hay quienes piensan que, en la mayoría de las universidades, los cursos de álgebra con vectores no son exitosos (Dubinsky, Dauterman, Leron, y Zazkis, 1994). En la mayoría de las investigaciones realizadas (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, y Thomas, 1996; Weller et al., 2002) se logra poner en evidencia que, aún los estudiantes exitosos en los cursos de álgebra con geometría, no logran la comprensión de los conceptos involucrados. Y es en beneficio de los futuros profesionales, preguntarse si ¿es posible ayudar a un mayor número de aquellos a comprender uno de los conceptos básicos y particular de la geometría vectorial, como es el producto vectorial tridimensional?

En pro de alcanzar una respuesta a la pregunta anterior, la propuesta de esta comunicación radica en mostrar interpretaciones que los profesores en formación inicial ponen en juego para comprender el concepto de producto vectorial tridimensional, reconociendo en cada interpretación componentes de origen geométrico, procedimental y estructural, entendiendo cada una de estas componentes, como diferentes aspectos de un concepto básico de la geometría vectorial.

La teoría de los Modos de Pensar de Sierpinska

Los Modos de Pensamiento es una teoría de la Didáctica de la Matemática creada por Anna Sierpinska (2000), que permite interpretar los fenómenos que se relacionan con la forma de alcanzar un nivel superior de abstracción en conceptos que se relacionan con el álgebra lineal. Según esta teoría la comprensión de objetos matemáticos de un fragmento de la matemática, requiere de un pensamiento práctico, cómo también de un pensamiento teórico. A partir de allí Sierpinska identifica tres modos de comprender el álgebra lineal (Sierpinska, 2000), que son el resultado de la superación de dos obstáculos, uno que rechaza los números dentro de la geometría, y el otro, rechaza que la intuición geométrica pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético.

Con la finalidad de hacer explícito el pensar teórico del álgebra lineal y abordar sus obstáculos, Sierpinska propone tres modos de pensamiento, que constituyen formas de pensar y entender los objetos matemáticos, y cada uno de los modos constituye una vía de acceso a los diferentes significados del objeto, permitiendo tener una aproximación articulada de diferentes facetas del objeto matemático.

Sierpinska define tres modos de pensamiento a través de los cuales se hace explícito el pasamiento teórico, el modo Sintético-Geométrico que se corresponde con el pensamiento práctico, y los modos Analítico-Aritmético y Analítico-Estructural que se corresponden con el pensamiento Teórico, estos se describen a continuación.

En modo Sintético-Geométrico (SG): Los objetos son representados mediante una representación geométrica, una figura, un conjunto de puntos.

En modo Analítico-Aritmético (AA): Los objetos matemáticos son representados a través de relaciones numéricas o simbólicas.

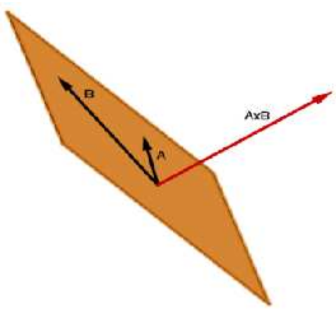
En modo Analítico-Estructural (AE): Los objetos son representados a través de las propiedades de los mismos objetos, o a su caracterización a través de axiomas, o propiedades que los determinan.

Modos de pensar el concepto de producto vectorial

El concepto de producto vectorial tridimensional (PVT), puede ser interpretado desde la matemática y con base en el estudio histórico epistemológico presentado en la introducción, a través de tres formas, como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1

Modos de pensar el producto vectorial tridimensional

Modo de pensar SG-PVT	Modo de pensar AA-PVT	Modo de pensar AE-PVT
	Sean $P = (a_1, a_2, a_3)$ y $Q = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. $P \times Q = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3$ $, a_1b_2 - a_2b_1)$.	Sean P, Q y R en $\mathbb{R}^3$ Propiedad 1: (AE-PVT-P1) $P \times Q = -(Q \times P)$ Propiedad 2: (AE-PVT-P2) $P \times Q = 0$, si y solo si, P y Q son linealmente dependientes.

El modo de pensar SG-PVT está representado por lo que primero viene a la mente de un estudiante, cuando en una situación evoca al PVT. El modo AA-PVT esta descrito por aquella fórmula que los estudiantes utilizan para poder calcular el PVT, en cambio el modo AE-PVT, esta presentado a través de dos propiedades estructurales que caracterizan al PVT como objeto único de la matemática.

Importancia de abordar el producto vectorial desde los Modos de Pensamiento

Abordar el concepto de PVT en sus tres modos de pensarlos –SG-PVT, AA-PVT y AE-PVT– reporta la presencia o ausencia de un pensamiento sistémico –que integra el pensar práctico y teórico del PVT– en los aprendices de geometría vectorial, al resolver situaciones en contextos tridimensionales y fuera de ellos. Uno de los rasgos del pensamiento sistémico es que se enfoca en el establecimiento y estudio de las relaciones entre los conceptos y su caracterización dentro de un sistema (Modos de pensar el PVT) que también contiene otros conceptos (Sierpinska, Nnadozie y Oktaç, 2002).

EL conocimiento matemático incluido en los tres Modos de pensar los PVT de geometría vectorial (Tabla 1) es primordial, ya que está muy relacionado con la construcción y las dificultades del aprendizaje de los conceptos básicos de los espacios vectoriales. Esto puede ser la causa de obstáculos en la enseñanza y aprendizaje del álgebra con geometría, que sólo la articulación –como sistema– de los tres Modos de pensarla ayudaría a remontarlos, y en consecuencia el dominio de la habilidad para articularlos se torna fundamental en el aprendizaje del álgebra con geometría tridimensional y su aplicación.

Objetivo de Investigación

La presente comunicación se sitúa en la comprensión del concepto PVT, con la intención de analizar y mostrar evidencias con sustento teórico de cómo profesores en formación inicial que han cursado la asignatura de Geometría Vectorial, se sitúan y transitan en los Modos de Pensar el PVT. El programa de asignatura de Geometría Vectorial, seguido por los estudiantes para profesor, consideró los siguientes contenidos: vectores libres, aplicaciones de los vectores libres, vectores coordenados, producto escalar, aplicaciones del producto escalar, producto vectorial, ecuaciones vectoriales y paramétricas de rectas y planos.

Método

Desde el paradigma cualitativo se ha seleccionado el estudio de casos (Stake, 2010) como método para alcanzar el objetivo propuesto, porque permite una indagación en profundidad de una realidad específica y en un contexto global.

Los criterios seguidos para la conformación de los dos casos de estudio fueron: (a) Ser estudiante de Pedagogía en Matemáticas; (b) Haber sido estudiante del curso Geometría Vectorial y (3) Accesibilidad de los investigadores. Cada caso quedó constituido tal como se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2

Participantes y casos de estudio

Casos	Participantes	Nivel	Características	Identificación
Caso I	5 estudiantes de Pedagogía en Matemáticas	Universitario	Ha aprobado la asignatura de Geometría Vectorial y eximido de dar examen.	E1, E2, E3, E4, E5
Caso II	4 estudiantes Pedagogía en Matemáticas	Universitario	Ha aprobado la asignatura de Geometría Vectorial y rindió examen.	E6, E7, E8, E9

Recogida de datos

En esta indagación se utilizó como instrumento de recogida de datos un cuestionario escrito constituido por tres actividades matemáticas, como se muestra en la Tabla 3. Cada actividad fue diseñada con la intención de situarla a lo menos en un determinado modo de pensar el PVT.

Tabla 3

Actividades del cuestionario

Actividades	Objetivos
A1) De los vectores $A = (0,2,5)$, $B = (19,0,0)$ y $C = (0,5,3)$ en $\mathbb{R}^3$, uno de ellos es perpendicular a los	Indagar cómo piensa o entiende el estudiante el modo SG-PVT. (Cómo se sitúa en el modo SG-PVT)

otros dos, ¿Cuál? Justifica.	Determinar si el estudiante privilegia el modo AA-PVT por sobre el modo SG-PVT.
A2) Sean $A = 2i - j + 2k$ y $B = 3i + 4j - k$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Determine $A \times B$.	Indagar cómo piensa o entiende el estudiante el modo AA-PVT. (Cómo se sitúa en el modo AA-PVT)
A3) Dados los vectores $A = (3,1,0)$ y $B = (5,7,0)$ Determine explícitamente un vector C perpendicular a los vectores A y B. ¿Hay más de un vector C que cumpla la condición? Justifica.	Indagar cómo piensa o entiende el estudiante la propiedad 1 o propiedad 2 del modo AE-PVT. (Cómo se sitúa en el modo AE-PVT)

Evidencias

Con la finalidad de mostrar un trabajo representativo de lo realizado por los estudiantes de los casos de estudios, es que hemos seleccionado algunos episodios de sus argumentos observables en las tres actividades, que se corresponden con el trabajo realizado por E6 y E2 para la primera actividad, por E4 y E9 para la segunda actividad y por E7 para la tercera actividad.

Primera Actividad. Cinco de los nueve profesores en formación inicial responden desde un modo AA-PVT. Tres responden desde un SG-PVT, de los cuales dos responden correctamente.

El estudiante E6 responde situándose desde un modo SG-PVT, aunque no dibuja correctamente los vectores pedidos, como se muestra en la Figura 1.

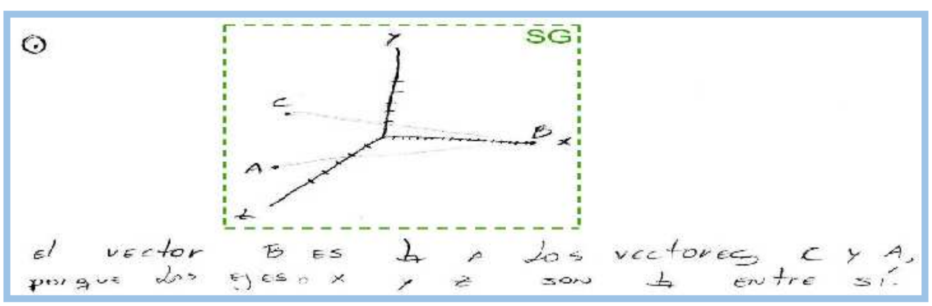


Figura 1. Respuesta del E6 a la actividad A1.

El Estudiante E2 responde incorrectamente desde un modo SG-PVT, como se muestra en la Figura 2.

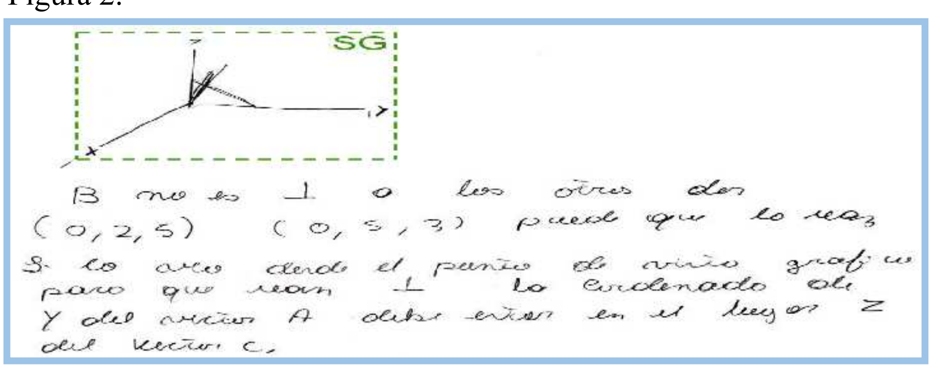


Figura 2. Respuesta del E2 a la actividad A1.

Segunda Actividad. Tres de los nueve estudiantes se sitúan desde un AA-PVT, de los cuales sólo 1 contesta correctamente.

El estudiante E4 se sitúa desde un modo AA-PVT, como se muestra en la Figura 3.

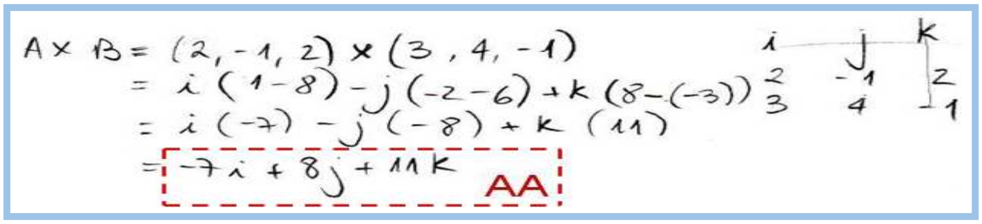


Figura 3. Respuesta del E4 a la actividad A2.

El estudiante E9 se sitúa incorrectamente desde un modo de pensar AA-PVT, ya que entrega como resultado un escalar (y no un vector), como se muestra en la Figura 4.

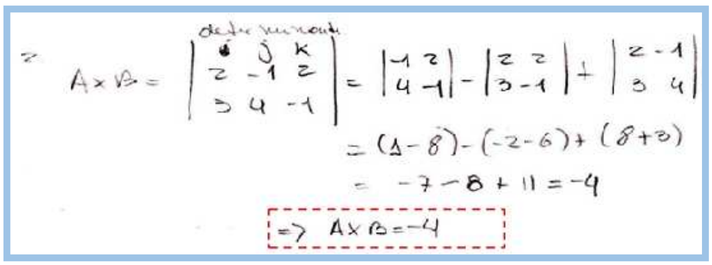


Figura 4. Respuesta del E9 a la actividad A2.

Tercera Actividad. Sólo cuatro de los nueve estudiantes responden a esta pregunta y el resto rafirman que C puede ser cualquier vector.

El estudiante E7 muestra en su respuesta una de las propiedades del modo AE-PVT-P1, al reconocer la simetría alternada (no conmutativa). Aunque no logra determinar el conjunto solución, como se muestra en la Figura 5.

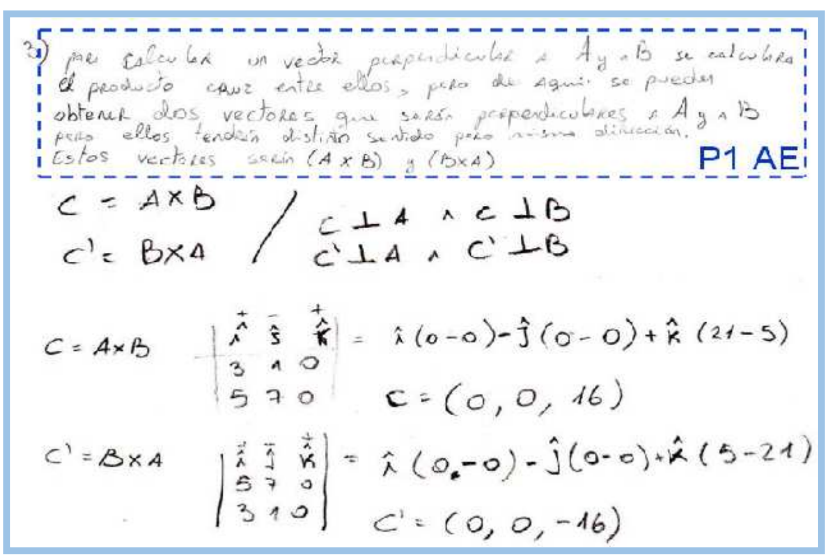


Figura 5. Respuesta del E7 a la actividad A3.

Conclusión

De las evidencias mostradas podemos concluir que en general los estudiantes para profesores privilegian el modo AA-PVT por sobre el modo de pensar SG-PVT, y además ellos presentan dificultades para entender al objeto matemático de PVT en sus distintos modos de comprenderlo: geométrico, aritmético y estructural. Con respecto a esto último, las principales dificultades identificadas en las respuestas de los profesores en formación inicial para situarse en cada uno de los modos, se muestra a través de los siguientes hechos.

En el **modo AA-PVT** los estudiantes para profesor no determinan correctamente las componentes del producto resultante (como vector) llegando a mostrar en sus respuestas (Figura 4) que el PVT no es un vector, sino un escalar.

En el **modo SG-PVT** los profesores en formación de los casos no logran coordinar las componentes de los vectores dados en el problema (Figura 1), con el sistema de ejes coordenados, así como tampoco con las componentes del vector resultante (Figura 2).

En el **modo AE-PVT**, las dificultades que presentaron los profesores en formación, se relacionan con que ellos no logran precisar un conjunto solución para A3 –que se relaciona con la Propiedad 1–, por ello responden que hay sólo un vector perpendicular o hay dos vectores (Figura 5) o cualquiera. No obstante, en los pocos argumentos mostrados por los estudiantes en A3, no se alcanzar a evidenciar una coordinación entre el modo **SG-PVT** con **AE-PVT**, pues de hecho ellos no perciben que los vectores de A3 al tener componentes reales, tiene igual dirección, pero distinto sentido. Mostrando esto último, que los profesores para profesor no comprenden el modo **AE-PVT**.

Agradecimientos

La investigación presentada ha sido financiada por el Proyecto FONDECYT Nº 1180468.

Referencias y bibliografía

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. and Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (eds.). *CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, 1-32.

Benítez, R. (2015). *Geome*tría *vectorial*. México: Trillas.

Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U., and Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of Goup Theory. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 267-273.

Martínez-Sierra, G. y Benoit, P. (2008). Una epistemología del product vectorial del cuaternión al análisis vectorial. *Latin-American Journal of Physics Education*, *2*(2), 201-208.

Sierpinska, A. (2000). "On some aspects of students' thinking in linear algebra", in J.-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, 209-246. Dortrecht: Kluwer Academic.

Sierpinska, A., Nnadozie A. and Oktaç A. (2002). A Study of relationships between theorical thinking and high achievement in linear algebra. Concordia University: Montreal.

Stake, R. E. (2010). *Investigación con estudio de casos* (5ª Ed.). Barcelona: Labor.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2002). *Learning Linear Algebra with ISETL*. Versión disponible en: http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf

Explorando la función lineal a través de la física

María Fernanda **Molina**
Institución educativa Presbítero Horacio Gómez Gallo
Colombia
fernanda310@yahoo.com
Victor Hugo **Gil** Avendaño
Universidad del Valle
Colombia
victor.gil@correounivalle.edu.co
Jairo **Carvajal**
Institución educativa Presbítero Horacio Gómez Gallo
Colombia
jacama0660@gmail.com
Edinsson **Durán** García
Institución educativa Presbítero Horacio Gómez Gallo
Colombia
edidugar@hotmail.com

Introducción

Como maestros encargados de orientar la actividad matemática en la educación básica secundaria y media buscando el desarrollo de pensamiento matemático en nuestros estudiantes, hemos experimentado que la enseñanza y aprendizaje de las funciones, concepto central de estos grados de escolaridad, nuestros estudiantes experimentan múltiples dificultades y errores, las cuales van desde la identificación de las cantidades variables y constantes junto con sus relaciones en situaciones contextualizadas, hasta representar gráficamente cualquier modelo de función lineal y analizarlo para realizar juicios sobre determinada situación.

Para enfrentar esta problemática nos propusimos diseñar una secuencia didáctica que fundamentada en referentes de orden didáctico, curricular y matemático, les proponía a los estudiantes analizar la función lineal partir del movimiento rectilíneo uniforme, a través del planteamiento de conjeturas, exploraciones prácticas, toma de datos, y análisis de la información a partir de distintas representaciones, entre otros aspectos.

Metodología

La secuencia didáctica, que fue implementada con 30 estudiantes del grado 10° de la Institución educativa Presbítero Horacio Gómez Gallo, del municipio de Jamundí, Valle del

Cauca, y cuyo propósito era favorecer el aprendizaje de algunos aspectos de la función lineal a partir del estudio del movimiento rectilíneo uniforme, esta secuencia estuvo configurada por cinco tareas, cada una con preguntas de distinta índole y con distintos propósitos, que buscaban que los estudiantes: describieran la variación lineal e identificaran las variables, expresaran dicha variación lineal mediante una expresión algebraica, luego realizaran un vínculo entre las funciones lineales y las ecuaciones lineales, con el ánimo de comparar modelos de variación lineal, para posteriormente representar los modelos en un sistema de coordenadas cartesianas acompañado del software Geogebra, y por último se validaron los modelos en diferentes sistemas de representación (verbal, analítico, tabular y gráfico).

Resultados y conclusiones

- La secuencia didáctica propició, por un lado, un escenario ideal para que los estudiantes se iniciaran de manera natural desde un contexto de las ciencias experimentales en el estudio de la función lineal: identificación de las cantidades y sus relaciones, la manera de covariación de las cantidades, algunas características de las funciones lineales, entre otros; y por otro lado, mejoró el ambiente de aula en el que los estudiantes demostraron agrado por el trabajo practico, el planteamiento de conjeturas y sus validaciones a partir del uso de las matemáticas.
- Se requiere cambiar la concepción de enseñanza de la función lineal por una en la cual se parta de los pre-saberes de los estudiantes para razonar, conjeturar, formular estrategias y resolver problemas en diversos contextos, para culminar con la formalización del concepto de función lineal y sus diversas propiedades operatorias.

Referencias y bibliografía

Álvarez Manilla, J. M., Valdés Krieg, E. & Curiel de Valdés, A. B. (2006). Inteligencia emocional y desempeño escolar. *Revista Panamericana de Pedagogía*, 9, 9-33.

Azcárate, C., & Piquet, J. D. (1990). Funciones y gráficas. *síntesis.*

Blomhøj, M. (2004). Modelización matemática-una teoría para la práctica. *Revista de Educación Matemática*, *23*(2).

Ministerio de Educación Nacional**.** (1998). *Lineamientos curriculares para el área de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia**.** (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá: Ministerio de Educación de Colombia.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, *25*, 23-58.

Enseñar en Telebachillerato el método gráfico para el sistema de ecuaciones lineales 2x2

David Alfonso **Páez**
CONACyT-Universidad Autónoma de Aguascalientes
México
dapaez@correo.uaa,mx
Teresa de Jesús **Cañedo** Ortiz
Universidad Autónoma de Aguascalientes
México
tjcanedo@correo.uaa.mx
Daniel **Eudave** Muñoz
Universidad Autónoma de Aguascalientes
México
deudave@correo.uaa.mx

Resumen

El estudio tiene como objetivo describir el conocimiento matemático que el profesor de Telebachillerato tiene para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas a través del método gráfico. Como marco referencial se tomó la discusión sobre el concepto de conocimiento matemático. Se reporta a un profesor como estudio de caso a profundidad, centrado en la enseñanza de la representación gráfica para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2x2. El docente fue videograbado en dos sesiones de clases con el propósito de generar una reflexión sobre su práctica docente. Los resultados muestran que este actor educativo posee un conocimiento básico para trabajar este tipo de métodos, el cual puede generar obstáculos conceptuales y epistemológicos en los estudiantes, tal como considerar solo los puntos $(x, 0)$ y $(0, y)$, donde $x, y \neq 0$, para trazar cualquier gráfica en el plano cartesiano o determinar si el sistema de ecuaciones tiene o no solución.

Palabras clave: conocimiento, resolución de problemas, sistema de ecuaciones, análisis y reflexión sobre la enseñanza, pensamiento matemático.

Antecedentes

Uno de los problemas que interesa a la comunidad de investigadores en educación matemática, en torno a la formación y desarrollo de los profesores, es el conocimiento requerido para enseñar matemáticas (Shulman, 1986; Ball, Thames & Phelps, 2008), por ejemplo, en álgebra. Al respecto, Doerr (2004) menciona lo siguiente:

> La investigación sobre el aprendizaje del álgebra ha tendido a enfocarse en la naturaleza algebraica de las tareas matemáticas, el desarrollo de ideas de los alumnos y, en algunos casos, en la influencia de la tecnología, pero raramente los profesores, y la naturaleza y el desarrollo de su conocimiento y práctica docente, son objetos de estudio. (p. 270)

En el presente estudio se aborda el conocimiento del profesor de Telebachillerato (TB, México) para resolver ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante el método gráfico, pues aunque su perfil en ocasiones es ajeno a las matemáticas tiene la responsabilidad de enseñar esta asignatura (INEE, 2015) y ello le exige tener conocimientos disciplinares necesarios (NCTM, 2014; SEMS, 2015).

La investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales con dos incógnitas ha sido abordada por diversos investigadores en educación matemática (Schoenfeld, Smith & Arcavi; 1993; Sierpinska, 2000, entre otros), y se ha reportado que los estudiantes de secundaria y de Educación Media Superior (EMS) tienen dificultades para comprender y resolver este tipo de sistemas. Autores como Trigueros (2012) afirman que la mayoría de las dificultades de los estudiantes son producto de memorizar procedimientos o algoritmos sin comprender su significado; por su parte, Mora (2001, citado en Arellano & Oktaç 2009) considera que los estudiantes suelen tener dificultades para representar gráficamente sistemas de ecuaciones líneas con dos incógnitas. Para Arellano y Oktaç (2009), en los cursos de álgebra de EMS se le da más importancia a los procedimientos y algoritmos de tipo algebraico para dar soluciones a sistemas de ecuaciones lineales, dejando en menor medida las representaciones gráficas como procedimientos de solución, lo cual genera que el estudiante tenga “dificultades de interpretación al enfrentarse en el contexto algebraico o que requieran de una reinterpretación de los conceptos algebraicos” (p. 357).

Las dificultades relacionadas con el método gráfico para dar soluciones a sistemas de ecuaciones lineales están relacionadas con la falta de separación entre el pensamiento sintético-geométrico y el analítico-aritmético (Sierpinska, 2000). Ante las dificultades que tiene los estudiantes en relación con el sistema de ecuaciones, se recomienda que el profesor debe propiciar espacios adecuados para que el alumno desarrolle este tipo de pensamientos de modo que pueda transitar de uno al otro, así como enseñar y generar reflexión sobre los diferentes métodos matemáticos para dar solución al sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, de modo que se le dé importancia al método gráfico.

Algunas dificultades son producto de cómo se enseñan las matemáticas. Doerr (2004) asegura que existe:

> Una ineficacia del aprendizaje del álgebra como procedimiento desconectado del significado y del propósito; la mayor parte del álgebra de la escuela todavía es enseñada con tales procedimientos desconectados. […] Uno de los principales impedimentos para el cambio en cómo el álgebra es enseñada en las escuelas parece ser la falta de un cuerpo substancial de investigación acerca del conocimiento y la práctica de los profesores en la enseñanza del álgebra. (pp. 267-268)

De acuerdo con lo anterior, el presente estudio tiene como objetivo describir el conocimiento matemático que el profesor, en contextos vulnerables, como lo es en TB, tiene para resolver este tipo de sistemas mediante representaciones gráficas.

Marco conceptual

La enseñanza de las matemáticas requiere de profesores que tengan un conocimiento matemático y didáctico cuya finalidad es desarrollar un aprendizaje en los estudiantes de acuerdo con los objetivos curriculares (Ball et al., 2008; Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; NCTM, 2014; Shulman, 1986). La noción de conocimiento matemático para la enseñanza hace referencia al "conocimiento […] que el profesor utiliza en clase para producir enseñanza y crecimiento en el alumno" (Hill, Ball & Schilling, 2008, p. 374). Diversos investigadores consideran que el conocimiento matemático está relacionado con los estándares curriculares de modo que le permita al profesor identificar errores matemáticos (procedimentales, algorítmicos o conceptuales), ya sea en los alumnos o en el libro de texto, así como para usar términos o nociones relacionadas con las matemáticas, o determinar la validez de un argumento matemático y seleccionar representaciones matemáticas adecuadas (Ball et al., 2001; Carrillo, Clements, Contreras & Muñoz, 2013). Para Shulman (1986), "éste se refiere a la cantidad y la organización del conocimiento [disciplinar] per se en la mente del profesor. […] Va más allá del conocimiento de los factores o los conceptos de un dominio. […] El profesor necesita no sólo entender que algo es así; el profesor debe entender por qué es así" (p. 99).

Además, el conocimiento matemático va más allá de los estándares curriculares. Ball et al. (2001) plantean que la enseñanza de las matemáticas demanda un conocimiento especializado de matemática en el profesor: "Las exigencias de la labor de enseñanza de las matemáticas crean la necesidad de un cuerpo de conocimiento matemático especializado para la enseñanza" (p. 11). Por su parte, en coincidencia con Ball et al., Carrillo et al. (2013) afirman que el conocimiento matemático del profesor abarca tres dominios: a) del tema, el cual hace referencia a los significados, definiciones, ejemplos que caracterizan el tema que se aborda en la clase, b) de la estructura matemáticas, definido como el sistema integrado de conexiones que le permite al profesor comprender y desarrollar conceptos matemáticos; c) y de la práctica matemática, que se refiere a las formas de conocer, crear o producir matemáticas, en otras palabras, es la comunicación, el razonamiento y la prueba.

Metodología

El estudio aquí reportado es de carácter exploratorio sobre la práctica docente en matemáticas. Se reporta la práctica de un profesor de TB como un estudio a profundidad; sin embargo, conviene mencionar que estos datos pertenecen a un proyecto de investigación más amplio y centrado en la reflexión sobre la práctica de enseñanza, en el cual participan varios docentes. Como parte de la metodología del proyecto, el profesor, a quien hemos llamado Juan (seudónimo), fue videograbado impartiendo matemáticas en dos sesiones de clases de primer semestre de TB; para ello, el profesor determinó los contenidos matemáticos a trabajar en cada sesión (Método gráfico para resolver sistema de ecuaciones con dos incógnitas y Teorema de Pitágoras), así como las fechas de observación. El propósito de las observaciones fue tener una aproximación puntual de la actividad que ocurre en el salón de clases en contextos desfavorables, como lo es el subsistema TB en México[1]. Las videograbaciones se llevaron a cabo tratando de afectar en lo más mínimo el escenario y el contexto natural donde se da el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Stake, 1999). El análisis está centrado en identificar y describir

[1] Los TB atienden a jóvenes entre los 15 y 18 años de edad, en comunidades rurales de pocos habitantes, que por lo general tienen condiciones económicas y sociales precarias. Su plantilla docente está conformada, principalmente, por profesionales que poco o nula experiencia en docencia (INEE, 2015).

el conocimiento que el profesor implementa en cada actividad desarrollada en las sesiones de clase observadas.

Análisis de datos

En primer semestre de TB se tiene el objetivo de que los alumnos recurran a la representación gráfica como un método matemático para dar solución al sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, de modo que tengan la habilidad para identificar gráficamente si el sistema tiene una, ninguna o infinitas soluciones (SEMS, 2017, 2013). Para ello, el profesor tiene el libro de texto como un recurso principal, el cual le proporciona información para mostrar cómo funciona tal método (Cfr. Garrido, Llamas & Sánchez, 2015, pp. 290-295), o por lo menos tiene que echar mano de su conocimiento matemático para "comunicar conceptos y métodos con claridad para la solución del sistema de ecuaciones […] y ofrecer ejemplos pertinentes a la vida de los estudiantes" (SEMS, 2013, p. 39). Una muestra de esto es el profesor Juan, quien se apoya en su conocimiento para enseñar este método matemático a los estudiantes de TB.

La práctica de Juan está encaminada a enseñar el método gráfico sólo para el sistema de ecuaciones lineales (2 por 2) que tiene una solución y cuyas graficas en el plano de coordenadas cartesianas XY contengan los puntos $(x, 0)$ y $(0, y)$, tal que $x, y \neq 0$. De modo que, de acuerdo con el desarrollo de la clase, el objetivo es obtener las coordenadas del punto de intersección de ambas gráficas y las cuales satisfacen al sistema de ecuaciones, lo que para Juan es encontrar los valores x, y en el cruce de las dos gráficas:

> Profesor: *Cuando tengo dos ecuaciones de primer grado, que ya las tengo graficadas, uno de los objetivos es encontrar ¿qué?*
>
> Alumnos: *El valor de cada incógnita…*
>
> Profesor: *El valor de y. Entonces esos valores de y, cuando ya están graficadas las ecuaciones, ¿es donde se cruzan o no se cruzan?*
>
> Alumnos: *Donde se cruzan…, donde se cruzan para saber qué valor es.*
>
> Profesor: *¡Muy bien! Es para saber qué valor es.*

Es importante menciona que en ningún momento de la clase Juan explícita los términos *punto de intersección* o *coordenadas del punto de intersección*, sólo hace referencia a como valores desconocidos o incógnitas, las cuales los define a partir de la intersección (cruce) de ambas gráficas; tal vez, eso se debe a que el interés principal de Juan es obtener los valores numéricos que satisfagan al sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, por ejemplo, les dice a los estudiantes: "Lo que quiero es encontrar los valores de x, y. […] ¿Y esos valores que desconozco qué me representan? Los valores de x, y son los valores donde se cruzan [ambas gráficas]".

El conocimiento matemático que muestra Juan para trabajar el método gráfico, con ecuaciones lineales, abarca dos dimensiones que interactúan entre sí: ubicar la gráfica de cada ecuación en el plano de coordenadas cartesianas y obtener las coordenadas (valores) del punto de intersección de ambas gráficas.

Representación gráfica de las ecuaciones con dos incógnitas

Juan muestra que tiene un dominio acerca de la ubicación de rectas en el plano cartesiano. De acuerdo con su conocimiento, la representación gráfica de cada ecuación lineal inmersa en el sistema a solucionar se obtiene dados dos puntos sobre el plano; sin embargo, Juan considera que tales puntos son $(x, 0)$ y $(0, y)$, donde las coordenadas 0, de modo que da por hecho que estos pertenecen y ubican, en el plano, la gráfica de cada ecuación. Para determinar las coordenadas x, y, Juan acude al procedimiento de igualar a cero cada incógnita de ambas ecuaciones con la finalidad de obtener, por separado, el valor de la otra incógnita (véase Figura 1); por ejemplo, para el sistema $2x + 3y = 8$ y 5, Juan plantea lo siguiente:

> Profesor: *Vamos a empezar con la ecuación uno [2 8], igualar a cero el valor de x. Entonces, para cuando la x vale cero, ¿cuánto vale y [señala en el pizarrón – (véase Figura 1)]?*
>
> Alumnos: *Dos enteros dos tercios.*
>
> Profesor: *Ya saque para x igual a cero. ¿Cuál me falta?*
>
> Alumnos: *Para y igual a cero [...].*
>
> Profesor: *Ahora hay que hacer lo mismo con la ecuación dos [$3x + y = 5$]...*

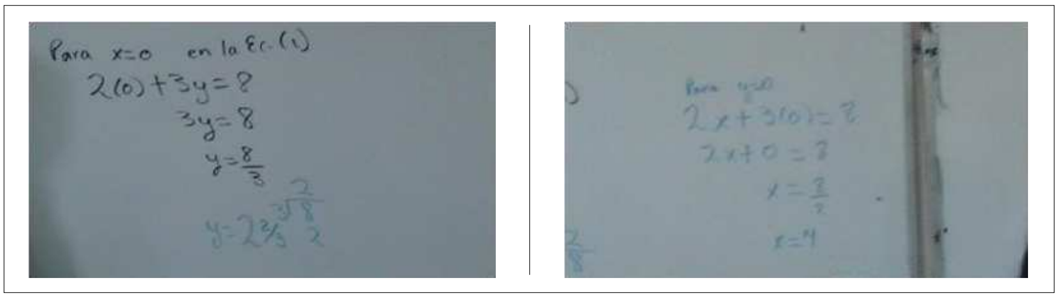


Figura 1. Proceso de igualación para obtener los puntos)que corresponden a la gráfica de la ecuación $2x + 3y = 8$.

Este tipo de conocimiento de Juan es especializado (Ball et al., 2001), pero básico para la construcción de rectas relacionadas a partir de la ecuación. Su conocimiento muestra posibles limitantes a presentarse y generar obstáculos epistemológicos, pues toda gráfica lineal se puede ubicar en el sistema de coordenadas cartesianas dados dos puntos cualesquiera [$P_1(x, y)$ y $P_2(x, y)$] (Cuevas, Mejía, Pluvinage & Zubieta, 2005); además, al trabajar sólo con gráficas que pasan por $(x, 0)$ y $(0, y)$, deja de lado la familia de gráficas lineales que intersecan en el origen del plano cartesiano [$(0,0)$] o que tienen pendiente cero o indefinida.

El tener las coordenadas de cada par de puntos y ubicar estos en el plano cartesiano le permite a Juan mostrar gráficamente a las ecuaciones del sistema y la intersección de éstas (véase Figura 2). Así, para el sistema de ecuaciones $2x + 3y = 8$ y $3x + y = 5$, desde su representación gráfica, el punto de intersección es $(1,2)$.

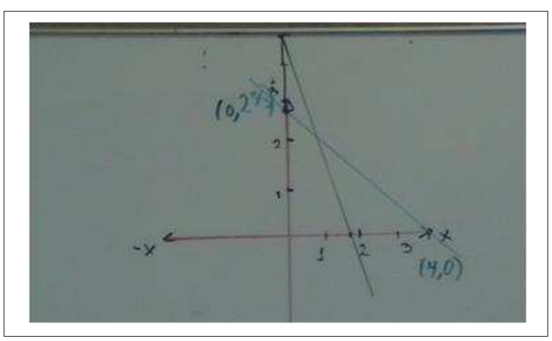


Figura 2. Representación gráfica del sistema y en el plano cartesiano.

En contraste con este procedimiento matemático de Juan, el libro de texto de TB plantea la *tabulación* como la estrategia para graficar este tipo ecuaciones en un determinado intervalo de valores en la variable *x*: "Para realizar el gráfico de cada una de las ecuaciones del sistema, es necesario: 1. Despejar a *y* de ambas ecuaciones; 2. Hacer una tabla para ambas ecuaciones con los mismo valores de *x*; 3. Graficar ambas rectas […] [en] el mismo plano" (Garrido et al., 2015, p. 290).

Coordenadas (valores) del punto de intersección de ambas gráficas

Para obtener los valores que satisfacen al sistema de ecuaciones en la representación gráfica, Juan recurre a segmentos de rectas paralelos a los ejes del plano cartesiano (véase Figura 3). Este recurso le permite visualmente obtener las coordenadas del punto de intersección de ambas gráficas, pues cada segmento de recta va del eje que le corresponde al cruce de las dos gráficas. El uso de tal recurso muestra que Juan parte del hecho de que en el eje de las abscisas y de las ordenas se encuentran las coordenadas $x = 1, y = 2$, respectivamente, y que los segmentos de recta concurren en el punto $(1,2)$, el cual hace referencia al cruce de las gráficas y, por lo tanto, los valores que satisfacen el sistema:

> Profesor: *¿Qué es lo que tenemos que hacer para encontrar la horizontal, que vienen siendo el valor de la horizontal?*
>
> Alumna: *En el valor de x o y.*
>
> Profesor: *¡Muy bien!, en el valor de x, ¿pero cuál punto voy a tomar?*
>
> Alumnos: *Donde se cruzan [las gráficas]…*
>
> Profesor: *Este punto [$(1,2)$]. ¡Muy bien! Ustedes con su regla, ¿si alcanzan a visualizar que este 1 [del eje de las abscisas] viene siendo la x? ¿Cuánto vale entonces x? […] x es igual a 1, y es igual a 2. Esos serían los valores.*

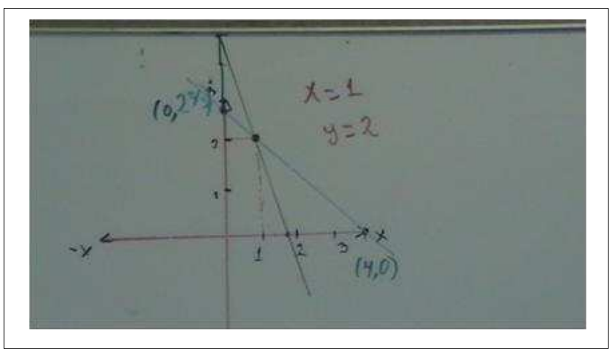


*Figura 3.*Segmento de recta como recurso para obtener los valores de las ecuaciones.

Los segmentos de recta, al ser paralelos a los ejes, le proporciona a Juan la pareja ordenada de los valores a obtener. Para ello, el argumento de usar este recurso está centrado en el diseño o trazo del plano cartesiano, donde los valores numéricos de los ejes deben estar a la misma distancia entre sí, pues como dice Juan: "¿dónde está el margen de error? En que cuando hagan la gráfica, lo hagan lo más exacto que puedan. Si están manejando la libreta de cuadritos, pues en los cuadritos que sean los números. Entre más amplio lo dejen o más grade, mejor". Sin embargo, este argumento difiere con lo que sucede en el salón de clases, pues en algunos otros sistemas de ecuaciones Juan traza al tanteo el plano cartesiano y las gráficas correspondientes.

Conclusiones

El profesor de TB, al estar frente a grupo, y al igual que cualquier otro docente en matemáticas, se le exige poseer un conocimiento disciplinar que le permita enseñar y argumentar la matemática de acuerdo con los objetivos curriculares; sin embargo, la realidad muestra que en muchas ocasiones este conocimiento es insuficiente o difiere con lo que se espera que los estudiantes deben aprender en el salón de clases. La práctica de Juan da evidencia de que este actor educativo posee un conocimiento especializado que le permite usar y mostrar la relevancia del método gráfico para encontrar los valores de las incógnitas del sistema de ecuaciones lineales; sin embargo, este conocimiento es básico en términos de cómo determinar y ubicar las gráficas en el plano de coordenadas cartesianas, lo cual puede generar obstáculos conceptuales y epistemológicos en los estudiantes, tal como considerar solo los puntos $(x, 0)$ y $(0, y)$, donde $\neq 0$, para trazar cualquier gráfica en el plano cartesiano o determinar si el sistema de ecuaciones tiene o no solución.

Aunque Juan tiene el interés de que los estudiantes vean la relevancia del método grafico como un procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones, existe una falta de conocimiento sobre la relevancia de este procedimiento gráfico, así como determinar y mostrar si el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene uno, más o ninguna solución, así como una argumentación y demostración de si $(x, 0)$ y $(0, y)$ pertenecen a las gráficas de las ecuaciones con dos incógnitas. Los resultados muestran que el profesor Juan, al igual que otros profesores de TB, requiere de una formación constante sobre el conocimiento matemático que enseñan en este subsistema de México, de modo que contribuyan a la calidad de educación.

Referencias y bibliografía

Arellano, F. & Oktaç, A. (2009). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica. En L. Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 357-365). DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: the unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). New York: Macmillan.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. & Muñoz, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Cuevas, C. A., Mejía, H. R., Pluvinage, F. C. B. & Zubieta, G. (2005). *Geometría analítica dinámica*. USA: Oxford University Press.

Doerr, H. M. (2004). Knowledge and the teaching of algebra. En S. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 267-290). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Garrido, M., Llamas, L. C. & Sánchez, I. (2015). *Matemáticas I*. DF: SEP. Disponible en https://www.dgb.sep.gob.mx/servicios-educativos/telebachillerato/LIBROS/1-semestre-2016/Matematicas-I.pdf

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. C. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge:

conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Instituto Nacional de Evaluación para la Educación (INEE). (2015). *Los docentes en México. Informe 2015.* México, DF: INEE. Disponible en publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P1/I/240/P1I240.pdf.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Estado Unidos de América: NCTM.

Schoenfeld, A., Smith, J. & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. En R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 4, pp. 55-175). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Shulman, L. S. (1986). These who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* 15/29. 4-14. doi: https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Sierpinska, A. (2000).On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.-L. Dorier. (Ed.), *On the teaching of linear algebra in Question* (Cap. 7, pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.doi: dOI: https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8

Stake, R. E. (1999). Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata.

Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS). (2013). *Matemáticas I. Serie: Programas de estudio.* Distrito Federal: SEMS.

Subsecretaría de Educación Media Superior (2015). *Documento base. Telebachillerato Comunitario*. México: SEMS.

Subsecretaría de Educación Media Superior (2017). *Matemáticas I. Programa de estudio primer semestre*. Distrito Federal: SEMS.

Trigueros, M. (2012). Sistema de ecuaciones: ¿Qué nos dice la investigación sobre su aprendizaje? En U. Malaspina (Coord*.), Resúmenes del VI Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las matemáticas* (pp. 6-7). Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú. Disponible en http://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2012/02/Resumen_coloquio_2012-1.pdf

Agradecimientos

La presente investigación se realizado dentro del Programa de Investigaciones Educativas de la Universidad Autónoma de Aguascalientes, México, PIE 17-7. Agradecemos la colaboración de la doctora Mercedes María Eugenia Ramírez Esperón, de la Coordinación de Telebachilleratos en Aguascalientes, de los profesores que participan en el proyecto, y de las asistentes Martha Cinthia García Gaytán y María Guadalupe Capetillo Plascencia.

O Ensino de Polinômios na Perspectiva da Filosofia de Wittgenstein

Gabrielle Janaina Barros de **Menezes**
Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA)
Brasil
janaina.menezes@unifesspa.edu.br

Walber Christiano Lima da **Costa**
UNIFESSPA / UFPA
Brasil
walber@unifesspa.edu.br

José Wanderson Sousa de **Carvalho**
UNIFESSPA
Brasil
josecarvalho@unifesspa.edu.br

Marisa Rosâni Abreu da **Silveira**
Universidade Federal do Pará (UFPA)
Brasil
marisabreu@ufpa.br

Resumo

O presente artigo tem como objetivo apresentar reflexões acerca do ensino de polinômios na perspectiva da filosofia de Wittgenstein. Sabemos que a matemática por apresentar uma linguagem específica necessita de tradução para a linguagem natural que faça sentido para o aluno**.** O aprendizado de polinômios apresenta muitas codificações que precisam ser compreendidas, mas esta compreensão depende do contexto em que estão inseridas. Para este estudo, embasamo-nos nos conceitos da filosofia de Wittgenstein, tais como: *jogos de linguagem* e *seguir regras*. Como resultados deste estudo, constatamos que se o aluno compreender as regras matemáticas em meio a jogos de linguagem, ele terá maiores facilidades no sucesso da aprendizagem de polinômios.

Palavras chave: polinômios, filosofia de Wittgenstein, seguir regras, ensino, aprendizagem.

Introdução

Ao longo de nossas trajetórias enquanto professores de matemática da educação básica, deparamo-nos com dificuldades na aprendizagem. Segundo Gatti (2008) a formação inicial por si só é insuficiente para formar um professor, ou seja, a construção do ser professor passa pela construção diária de seu ofício. Assim, segundo a autora é necessário ao professor ter um domínio do conteúdo, planejamento de suas práticas, reorganização de situações inesperadas, uma boa formação pedagógica para a apresentação de conteúdos e com as dificuldades que os alunos possam apresentar de aprendizagem.

Sobre a formação pedagógica, importante ressaltar o papel de um bom uso da linguagem em sala de aula. Percebemos que muitas vezes os professores no afã de tentarem aproximar o cotidiano dos alunos com o conteúdo matemático, acabam por criar barreiras comunicativas, dificultando o aprendizado. Silveira (2014) aponta que no ensino de matemática é necessário que todos os professores possam perceber as linguagens que participam em sala de aula que favorecem a aprendizagem. A autora ainda destaca que ao lembrar das linguagens, devemos entender que se faz necessária a reflexão para que haja uma boa tradução dos leitores dos textos matemáticos.

Na Educação Matemática Brasileira, o estudo de Álgebra vem sendo alvo de relevantes pesquisas, pois ao longo da história, segundo Lins e Gimenez (1997, p. 9), “a aritmética e álgebra se relacionam de forma diferente das leituras tradicionais, do tipo álgebra é a aritmética generalizada ou álgebra é a estrutura da aritmética”. No entanto ambas se complementam. Sabemos enquanto professores a dificuldade de ensinar conceitos algébricos, pois muitas vezes é difícil para o aluno compreender a linguagem matemática empregada nos conceitos algébricos e textos matemáticos, dificuldades estas que terão grande impacto no estudo de equações e funções entre outros conteúdos.

Centurión (1994) destaca que os conceitos algébricos nas series iniciais tendem a ser mais facilmente entendido pelos alunos, porém nas series finais do ensino fundamental devido à linguagem matemática ser codificado, o que dificulta a aprendizagem dos alunos. Brasil (1998) por sua vez ressalta que o aluno deve reconhecer representações algébricas, expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema, favorecer as possíveis soluções, traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa. Entendemos o que Brasil (1998) esquece de observar que o aluno sozinho não terá a possibilidade de compreender todos estes aspectos, ou seja, ele precisa da atuação do professor para que possa aprender melhor os conteúdos algébricos.

Silveira (2014) afirma que a linguagem matemática possui a característica de ser codificada e para ser traduzida necessita de uma linguagem natural, no caso do Brasil se relacionarmos com as salas de aula a tradução ocorrerá para a Língua Portuguesa. Sabemos que as dificuldades no ensino e na aprendizagem da álgebra perpassam pela utilização de incógnitas e variáveis, causando aversão de muitos alunos. No entanto, sabemos que não é tarefa fácil, pois um dos transtornos maiores no 8º ano no estudo de monômios e polinômios a dificuldade ocorre em traduzir os conceitos algébricos de uma forma que faça sentido para os alunos, e no que diz respeito ao papel do professor, é que o mesmo precisa criar estratégias que visem que os alunos aprendam as regras matemáticas.

Assim, o presente artigo tem como objetivo apresentar reflexões acerca do ensino de polinômios na perspectiva da filosofia de Wittgenstein. Para tanto, neste estudo de caráter bibliográfico, trazemos à luz alguns conceitos do filósofo como o conceito de jogos de linguagem e de seguir regras, além de alguns autores da educação matemática como Silveira (2014) e Teixeira Junior (2016).

Um pouco da filosofía da linguagem de Wittgenstein

O presente tópico objetiva apresentar um recorte da filosofia de Wittgenstein, mais precisamente dois dos conceitos presentes em uma das obras do filósofo: *Investigações Filosóficas*. *Jogo de linguagem* para Wittgenstein, em sua obra é o conjunto da linguagem e das atividades que estão entrelaçadas entre si:

> A expressão “jogo de linguagem” deve salientar aqui que falar uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida. Tenha presente a variedade de jogos de linguagem nos seguintes exemplos, e em outros:
>
> Ordenar, e agir segundo as ordens –
>
> Descrever um objeto pela aparência ou pelas suas medidas –
>
> Produzir um objeto de acordo com uma descrição (desenho) –
>
> Relatar suposições sobre o acontecimento –
>
> Levantar uma hipótese e examiná-la –
>
> Apresentar os resultados de um experimento por meio de tabelas e diagramas –
>
> Inventar uma história; e ler –
>
> Representar teatro –
>
> Cantar cantiga de roda –
>
> Adivinhar enigmas –
>
> Fazer uma anedota; contar –
>
> Resolver uma tarefa de cálculo aplicado –
>
> Traduzir de uma língua para outra
>
> Pedir, agradecer, praguejar, cumprimentar, rezar (1979, p.18-19).

Assim, para o filósofo traduzir de uma língua para outra é um jogo de linguagem. Em sala de aula é importante destacar que os alunos precisam traduzir o texto matemático exposto na sala para assim poderem ter sucesso em suas aprendizagens. A partir da leitura do texto, podemos entender que o aluno aprenderá os conteúdos algébricos como polinômios se entender o que esta sendo dito, ou seja participar dos jogos de linguagem que estão sendo tratados em sala de aula.

Wittgenstein (1979, p.187-188) ainda afirma:

> Dois empregos da palavra “ver”
>
> O primeiro: “O que você vê ali?” – “Vejo isto” (segue-se uma descrição, um desenho, uma cópia). O segundo: “Vejo uma semelhança nestes dois rostos” – aquele a quem comunico isto deve ver os rostos tão claramente como eu mesmo.

> [...] Mas podemos também ver a ilustração ora como uma, ora como outra coisa. – Portanto, nós a interpretamos e a *vemos* como a *interpretamos*.

Então imaginemos a seguinte situação: o professor está ensinando polinômios e um determinado momento no quadro ele utiliza a seguinte expressão: $3x^3y+5x^2-x$. O aluno ao se deparar com essa expressão terá várias possibilidades de leitura, porém a tradução que podemos considerar adequada versa sobre entender que é um trinômio de grau 4. Como o aluno que fez a tradução adequada chegou a essa conclusão? Entendemos que para que o mesmo chegasse a essa conclusão é porque anteriormente a este exemplo o professor ensinou em sala que o $3x^3y$ apresenta no y grau 1 que somado ao grau do x dá o resultado 4º grau. A partir de Wittgenstein (1979) vemos que para que essa tradução tenha sido correta, o aluno precisou seguir uma regra anteriormente ensinada pelo professor, do contrário, ele não teria a visualização y ter grau 1, haja vista que ele não está vendo literalmente o número 1. Assim, adentramos em outra parte conceitual da filosofia de Wittgenstein que é o *seguir regras.*

Silveira (2014) destaca que é pela linguagem do aluno que iremos entender se o mesmo aprendeu o conteúdo, ou seja, se seguiu a regra matemática que foi necessária na tradução do respectivo texto matemático. Assim, para a autora se vê como fundamental a comunicação em sala de aula para que se verifique o resultado da tradução do aluno.

Para Wittgenstein, seguir uma regra é análogo a traduzir, ou seja, quando eu sigo uma regra eu estou participando de um jogo de linguagem. Assim, entendemos que para que o aluno possa participar dos jogos de linguagem envolvendo polinômios, precisam ser ensinados as regras que devem seguir para a partir daí conseguirem sucessos em suas aprendizagens. Sabemos que na educação brasileira é um desafio discutir sobre os aspectos da linguagem, haja vista que quando pesquisamos sobre ensino e aprendizagem é comum nos depararmos com n "formulas milagrosas" que garantem sucesso dos alunos a partir do construtivismo ou da cognição. Acreditamos que apostar nos aspectos filosóficos da linguagem é um caminho que tende a discutir e apresentar resultados tanto científicos quanto em sala de aula, pois o aprendizado dos alunos se dá a partir do domínio das regras matemáticas.

O ensino de polinômios e a realidade em sala de aula

O presente tópico tem como papel e objetivo de apresentar um recorte histórico sobre o ensino de polinômios, trazendo alguns exemplos que fazem interseção com a realidade das salas de aula brasileiras na contemporaneidade. Sabemos que é um desafio destacar o país, haja vista suas dimensões continentais, porém traremos alguns exemplos que comumente vemos em algumas leituras e em nossas experiências docentes.

Inicialmente destacamos que alguns autores da educação matemática dizem que no ensino da álgebra devemos refletir que o aluno já passou pelos conceitos básicos da aritmética. Assim Rocha (2010, p. 90) destaca que "Quando o número é representado por uma letra, isso não é tão fácil para o aluno imaginar e escrever. Por exemplo: quando se pede o triplo de 4, quase que de imediato a pessoa questionada responde e responde 12, talvez a única dificuldade seja lembrar quanto é três vezes quatro. Entretanto, quando se pede o triplo de x, talvez a pessoa rebata com outra pergunta: quanto vale x?" Com isso, Rocha (2010) remete a ideia de que muitas das dificuldades dos alunos em álgebra podem estar em não ter dominado inicialmente das regras e técnicas da aritmética. Vemos com isso que vira como uma “bola de neve”, ou seja, se não aprendeu determinado conteúdo, tenderá a ter dificuldades e poderá não aprender os conteúdos posteriores da matemática.

Corrobora com este pensamento Garcia (1997) que destaca que “a passagem da aritmética à álgebra é fonte de conflitos e fracassos na matemática escolar”. Tal fenômeno tende a ocorrer nas séries iniciais quando os alunos acabam devem ter a um nível de abstração menor do que quando estavam nas séries finais do ensino fundamental. Por exemplo, no ensino de polinômios os alunos se deparam com as letras e números, entrelaçados pela linguagem matemática.

Sobre o ensino de álgebra, Klüsener (2007) aponta que no momento em que se misturam números e letras no ensino de matemática, muitos alunos apresentam índices de erros grandes do que quando apenas números e operações faziam parte de seus estudos.

Teixeira Junior (2016, p. 122) em sua tese intitulada “A terapia de Wittgenstein e o ensino de álgebra” defende que o ensino da álgebra seja visto sob a óptica da filosofia de Wittgenstein:

> A álgebra não se desenvolve a partir de problemas concretos, talvez isso estivesse mais próximo dos avanços dos logaritmos e trigonometria, mas que se utilizaram dos avanços algébricos ou de uma linguagem simbólica mais econômica. Um dos poucos usos cotidianos que colaboraram no desenvolvimento da álgebra está na matemática financeira que buscou modelos para previsões econômicas e de aplicações financeiras que envolvem juros. Mas até nesse caso há muitos exemplos de problemas formulados como desafios, e não necessariamente problemas reais.

Assim, o autor critica de forma clara as concepções construtivistas de um ensino de álgebra e que as contextualizações muitas vezes ao invés de contribuírem com a aprendizagem dos alunos, acabam por criar uma ideia de que toda a matemática pode ser contextualizada, e que se determinado assunto não apresenta fácil contextualização, não serve para ser ensinado para o aluno. Com isso, entendemos que Teixeira Junior (2016) corrobora com Silveira (2005) que o caminho da aprendizagem da matemática passa a partir da prática de exercícios da própria matemática.

Silva (2009) aponta uma grande resistência dos professores às inovações, e que essas inovações podem auxiliar, complementar o tradicionalismo, permitindo maior um dinamismo nas aulas de Matemática. Entendemos que tais inovações não dizem respeito apenas as tecnologias, por exemplo, mas sim também a estratégias diferenciadas e também uma aposta para que o uso da linguagem em sala de aula seja clara, evitando confusões e traduções equivocadas. Sabemos que o aluno pode errar uma questão, porém sabemos também que o mesmo pode chegar a esse erro devido falta de clareza por exemplo no uso da linguagem por parte do professor.

O ensino de polinômios e os desafios da linguagem

O tópico a seguir apresenta nossos resultados teóricos da pesquisa. Sabemos e como já exposto que a linguagem matemática muitas vezes é de difícil compreensão e acreditamos que a filosofia de Wittgenstein pode trazer contribuições favoráveis a aprendizagem dos alunos em sala de aula.

Sá (2009) destaca que as reflexões sobre nossas práticas e dificuldades de ensino e de aprendizagem em sala de aula favorecem para melhoria das práticas de ensino. A partir daí, inquieta-nos a respeito do estudo e ensino de monômios e polinômios para o 8º ano do Ensino Fundamental, pois compreender a linguagem matemática presente nos conceitos algébricos pode parecer simples para os professores, mais muitas vezes acaba sendo difícil para o aluno. Por exemplo, um professor coloca no quadro as seguintes expressões: "qual a diferença entre monômios e polinômios? ou, "x é igual a x^2?". O docente ao explicar que partes literais de graus diferentes não podem ser somadas nem subtraídas irá fazer sentido para o aluno se anteriormente ele entender o que é uma parte literal e o que é um coeficiente. Com isso, vemos implícita as palavras de Wittgenstein (1979), pois o aluno irá entender se fizer sentido a ele, ou seja se ele já estiver participando do jogo de linguagem em sala de aula, do contrário esse fará traduções equivocadas que farão ao insucesso na aprendizagem do conteúdo.

Silveira (2014, p.58) em sua obra fala sobre interpretação de textos matemáticos:

> A interpretação do texto matemático consiste em traduzir os símbolos para a linguagem natural e, posteriormente, conferir sentido às palavras imersas em regras gramaticais e regras matemáticas. Fidelidade na tradução dos símbolos e liberdade limitada na produção de sentidos, já que os sentidos dependem das regras matemáticas que devem ser obedecidas. No exercício matemático, traduzem-se os símbolos da linguagem matemática para a linguagem natural. Este jogo de linguagem é necessário porque a linguagem natural não dá conta de explicar os conceitos matemáticos.

Certa vez em uma sala de aula surgiu o questionamento dos alunos por não entenderem situações como $2x.\ 3y = 6xy$, a relação de x por y é complexo sem a compreensão das regras para a multiplicação de monômios com partes literais diferentes, visto que é necessário multiplicar os coeficientes e agrupar a parte literal. Acerca disso, Wittgenstein (1989, p.100) afirma que "Toda a explicação tem o seu fundamento no treino (os educadores deviam lembrar-se disto)". Com isso, vemos que os alunos treinando, exercitando a partir do exemplo conceituado pelo docente, tendem a ter acertos nas questões.

Duarte (2008, p. 80) destaca que "é, portanto, necessário que o processo de aprendizagem da matemática desenvolva essa capacidade de trabalhar com níveis cada vez maiores de abstração". Assim, entendemos que para que sejam alcançados tais níveis de abstração, faz-se necessário uma preocupação com os usos das linguagens de forma cada vez mais clara em sala de aula por parte do professor e aí cabe ao aluno participando do jogo, exercitando, poder traduzir adequadamente os textos matemáticos e consequentemente tendo sucesso na disciplina.

Considerações finais

O presente artigo teve como objetivo apresentar reflexões acerca do ensino de polinômios na perspectiva da filosofia de Wittgenstein. Compreendemos que a matemática, mais especificamente o ensino de polinômios apresenta algumas particularidades que dizem respeito à linguagem matemática empregada no conteúdo. Constatamos ainda que se o aluno aprender a regra matemática, ou seja, ser inserido ao jogo de linguagem matemático envolvendo polinômios terá maiores facilidades da aprendizagem.

Sabemos que este estudo é apenas um recorte que apresenta de forma geral sobre o ensino e a aprendizagem dos polinômios, porém acreditamos que a partir das leituras feitas e nossas contribuições, pois destacamos a filosofia de Wittgenstein como um caminho científico, que aponta que é a partir do uso de conceitos como jogos de linguagem e seguir regras, podermos perceber que o ensino e aprendizagem é possível pelo viés da linguagem.

Referências y bibliografia

Brasil. (1998). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª Séries) Matemática. Brasília, DF, 142 p.

Centurión, M. (1994). Números e Operações. São Paulo: Scipione.

Duarte, N. (2008). O ensino de matemática na educação de adultos. São Paulo: Cortez.

Garcia, F. F. (1997). Aspectos históricos del passo de la aritmética al álgebra. Revista de Didática de las Matemáticas, Graó, Barcelona, n. 14, ano IV, Outubro.

Gatti, B. A. (2008). Análise das políticas públicas para formação continuada no Brasil, na última década. Revista Brasileira de Educação, n. 37, p. 57- 69, jan./abr.

Klüsener, R. (2007). Ler e escrever: compromisso de todas as áreas. Porto Alegre: Editora da UFRGS.

Lins, R.C, Gimenez, J. (1997) Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. Campinas – SP. Ed. Papirus.

Rocha, F. de O. (2010). Aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau por alunos do 8º ano do ensino fundamental: método da substituição. 171f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação matemática. Unidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

Sá, P. F. (2009) Atividades para o ensino de Matemática no nível fundamental. Belém: EDUEPA.

Silveira, M. R. A. da. (2005). Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da matemática. 176 f. Tese (Doutorado em Educação) Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Silveira, M. R. A. da. (2014). Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.16, n.1, p.47-73.

Teixeira Júnior, V.P. (2016). A terapia de Wittgenstein e o ensino de álgebra. 357 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Unidade Federal do Pará, Belém.

Wittgenstein, L. (1989). Fichas (Zettel). Lisboa: Edições 70, 1989.

Wittgenstein, L. (1979). Investigações Filosóficas. Trad. José Carlos Bruni. 2.ed. São Paulo: Abril Cultural.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Gráficos de funções utilizando o GeoGebra em *smartphones*

Bruno Guimarães **da Silva**
PROFMAT, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
guimaraespmat@gmail.com
Augusto Cesar de Castro **Barbosa**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
accb@ime.uerj.br
Cláudia Ferreira Reis **Concordido**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
concordido@ime.uerj.br

Dentre os aparelhos eletrônicos, um dos que possui maior destaque atualmente é o s*martphone* (NUNES, 2013), não só pela sua tecnologia, como também pela demanda da população. Dessa forma, é aconselhável que professores, pais e até a escola, como um todo, prestem atenção ao uso desse dispositivo por crianças e adolescentes. Embora o aluno não deva usar nenhum aparelho eletrônico em sala de aula, "o professor vem disputando com o *smartphone* a atenção dos alunos, tal disputa vem trazendo prejuízo ao ambiente e à aprendizagem do alunado" (PIRES, 2016, p. 1). Sendo assim, pensamos ser útil lançar mão desse recurso tecnológico em sala de aula.

Por outro lado, um assunto sempre presente nos exames de admissão às universidades é o estudo das funções. Além disso, tem-se a fácil percepção da contextualização deste conteúdo no dia a dia das pessoas. Assim, o tema escolhido para este trabalho foi o estudo de gráficos de funções por meio do *software* Geogebra em *smartphones*. O Geogebra tem sido bem aceito por professores e alunos por vários motivos, dentre os quais podemos destacar a possibilidade de tornar a Matemática mais “palpável”, em aulas mais interesantes e com maior interação, potencializando assim o trabalho do professor.

Foram realizadas quatro atividades em três turmas de 9º ano do Ensino Fundamental e uma turma do 1º ano do Ensino Médio, em duas unidades de um colégio particular da zona oeste do Rio de Janeiro. Para as atividades sugeridas, foram selecionadas as funções afim e quadrática.

A atividade 1 (em torno de 25 min) consistiu em revisar o significado dos coeficientes das funções afins e relacionar as mudanças nos valores desses coeficientes através dos deslizadores do Geogebra, com as consequentes alterações nos gráficos. Esta atividade foi orientada pelo professor de modo que os coeficientes linear e angular fossem alterados separadamente, a fim de que fosse possível ao aluno concluir o que cada uma dessas alterações produziu no gráfico.

A atividade 2 (em torno de 25 min) teve como foco a revisão do significado dos coeficientes das funções quadráticas e relacionar as mudanças nos valores desses coeficientes com as consequentes alterações nos gráficos das funções. Ao construir a função, o aplicativo gera seu gráfico e automaticamente cria três “deslizadores”, um para cada coeficiente, de modo análogo ao que ocorreu com a função afim da atividade 1. Aqui também foi orientado aos alunos que permitissem a variação de cada coeficiente separadamente para examinar o impacto nos gráficos das funções.

Na atividade 3 (em torno de 30 min) estudou-se o discriminante e sua relação com os zeros da função quadrática. Para tal atividade, os alunos digitaram no aplicativo GeoGebra, nos seus celulares, a função $y = ax^2 + bx + c$, e, em seguida, digitaram $\Delta = b^2 - 4ac$. De acordo com sinal do discriminante, verificaram as posibilidades de interseção da parábola com o eixo X.

A atividade 4 envolveu a análise do vértice da parábola, assim como de seu eixo de simetria. Esta atividade requer um maior domínio das construções no GeoGebra, pois além da parábola, é preciso traçar uma reta paralela ao eixo X, que intercepte a parábola em dois pontos quaisquer, A e B, e construir a mediatriz para o segmento $\overline{AB}$. O principal objetivo dessa atividade é perceber que a intersecção da mediatriz com a parábola é o ponto de mínimo ou de máximo do gráfico (vértice V). Além disso, espera-se que o aluno perceba que a abscissa do ponto V é a média aritmética das abscissas do ponto A e B e que as ordenadas completam o conjunto de informações acerca da simetria da curva, dando sentido às fórmulas das coordenadas do vértice.

A maior dificuldade encontrada no uso do *smartphone* foi o tamanho da tela e do teclado, implicando erros na construção dos gráficos. Outro problema encontrado foi a existência de diferentes aplicativos, com interfaces e comandos distintos. Uma sugestão que minimizaria tais dificuldades seria a prévia realização de um minicurso de GeoGebra.

As atividades proporcionaram uma experiência que o aluno não poderia adquirir em uma aula expositiva, como, por exemplo, “manusear” as funções, transformando-as a seu critério. O aluno teve a oportunidade de lembrar os conhecimentos adquiridos não apenas através da memória visual do quadro, do livro ou do caderno, mas também das experiências e visualizações individuais criadas para cada função. Ele pôde comprovar na prática o que é dito pelo professor ou, nos casos dos alunos com maior gosto pela Matemática, verificar as demonstrações realizadas pelo professor em sala. Uma ótima vantagem que o uso do GeoGebra no celular pode proporcionar é a transformação da sala de aula clássica em um laboratório de matemática (ARAÚJO, 2015), o que é especialmente importante em escolas sem este tipo de infraestrutura.

Os autores agradecem à FAPERJ pelo apoio financeiro.

Referências e bibliografia

Araújo, J. R. S. (2015). *Uso de smartphones e tablets como ferramenta do ensino de matemática: o software GeoGebra*. Dissertação (Mestrado em Matemática) – UFAC – Acre.

Nunes, V. W. N. (2013). Tecnologias digitais na educação: subversão ou submissão. *Revista Appai*, 80, 2-3.

Pires, J. D. (2016). *Uma proposta de aplicativo para o ensino do conceito de funções usando Smartphones e Tablets*. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas – USEB – Bahia.

Raciocínio covariacional em aulas de Cálculo Diferencial e Integral: análise de uma tarefa

William José Gonçalves
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Londrina
Brasil
williamboatematica@gmail.com
André Luis Trevisan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Londrina
Brasil
andrelt@utfpr.edu.br
Daniel Daré Luziano da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Londrina
Brasil
dlsilvadaniel@hotmail.com
Alessandro Jacques Ribeiro
Universidade Federal do ABC, câmpus Santo André
Brasil
alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

Resumo

Assumindo que aprender Cálculo Diferencial e Integral (CDI) implica analisar de forma coordenada as variações de duas grandezas interdependentes (raciocínio covariacional – RC), apresentamos resultados de uma pesquisa cujo objetivo foi desvelar ideias do RC mobilizadas durante as discussões coletivas desencadeadas pelo trabalho com uma tarefa matemática em uma turma de CDI. Realizamos uma análise qualitativa, de cunho interpretativo, a partir de recortes da produção escrita e trechos de diálogos de um grupo de estudantes no trabalho com uma dessas tarefas. Concluimos que o grupo analisado mobilizou ideias relacionadas ao RC, como a constituição das quantidades envolvidas na situação e o processo de medição dessas quantidades, a compreensão de que as quantidades envolvidas variam continuamente e sua coordenação, reconhecendo a direação de crescimento e mudanças na taxa de crescimento. Porém, o grupo não foi capaz de esboçar corretamente um gráfico que representasse a relação envolvida em uma das situações da tarefa.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Ensino de Cálculo Diferencial e Integral, Tarefas Matemáticas, Raciocínio Covariacional.

Introdução

Durante praticamente os três anos do Ensino Médio, e ao ingressar no Ensino Superior, ao cursar a disclina de CDI, transitamos por um conceito "formal" de função que, em pouco – ou em nada - "carrega" sua essência: o aspecto covariacional das grandezas envolvidas. Oehrtman, Carlson e Thompson (2008) evidenciam que o uso da definição atual como introdução ao conceito de função no âmbito escolar é inadequada, por tratar-se de uma resposta a problemas que os estudantes sequer podem conceber, uma vez que foi motivada largamente por debates entre matemáticos na busca de respostas à questões internas da própria Matemática.

Uma função relaciona-se a um conceito matemático que descreve como duas ou mais quantidades variam uma em relação à outra. Tal relação pode ser descrita por palavras, símbolos matemáticos e representações, como gráficos ou tabelas. Para Carlson, Jacobs, Coe, Larsen e Hsu (2003, p. 124), o raciocínio covariacional (RC) contempla "as atividades cognitivas envolvidas na coordenação de duas quantidades que variam quando se presta atenção às formas como cada uma delas muda em relação à outra". Conforme destacam Thompson e Carlson (2017), ideias de variação e covariação são epistemologicamente necessárias para que se desenvolvam conceito útil e robusto de função, e servem como bases conceituais para elaboração de conceitos do CDI.

Nessa acepção, elencamos como objetivo da pesquisa a investigação das possibilidades do desenvolvimento de ideias do RC em estudantes de CDI 1, promovidas pelo trabalho com tarefas matemáticas. Procuramos aqui desvelar ideias do RC que foram mobilizadas durante as discussões coletivas desencadeadas pelo trabalho com uma tarefa, recorte do trabalho de dissertação do primeiro autor (Gonçalves, 2018).

Referencial teórico

Em uma abordagem tradicional para quantificar uma função dinâmica do mundo real, o estudante geralmente recebe uma tabela de valores de amostragem, plota pontos no plano cartesiano e, em seguida, usa o gráfico (união de pontos) para estender a tabela. Em um curso de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), o aluno é então questionado sobre a dinâmica da situação do mundo real que requer a extração de informações dinâmicas de um gráfico estático, como taxa de crescimento e decrescimento, por exemplo. Quando se trata de situações dinâmicas, a maioria dos alunos esbarram na dificuldade de visualização da situação e de como se relacionam as variáveis (Goldenberg, Lewis, & O'Keefe, 1992).

Uma abordagem possível para apoiar o pensamento dos alunos, no intuito de ajudá-los a imaginar relacionamentos entre quantidades que mudam continuamente, seria levá-los a pensar em pequenas mudanças nas quantidades como forma de promover seu raciocínio com variação contínua. Porém, para Thompson e Carlson (2017), apoiados em trabalhos de Castillo-Garsow, isso não é suficiente, uma vez que, para pensar em variação contínua envolve deve-se, necessariamente, pensar em movimento.

Assim, um conceito presente nessa discussão é o de movimento fictivo: "aquele em que o objeto, apesar de estático, pode ser mais bem compreendido pelo movimento dinâmico que sugere" (Frant, Silva, & Powell, 2013, p. 36). Por exemplo, ao dizermos que uma estrada "vai" de um extremo ao outro do país, nada realmente se move, ainda que falemos como se algo estivesse se movendo (em função do uso de um verbo de movimento: “ir”). Thompson e Carlson (2017) indicam que “Quando se desenvolve uma imagem refletida de algo se movendo fictivamente, a imagem permanece presente, mas tácita, como uma varredura de atenção que está envolvida ao pensar em todos os elementos de um conjunto (p. 431)”. As concepções de tempo implicam e se baseiam no movimento fictivo. Desse modo, concepções de “variação contínua dos alunos podem ser afetadas por sua capacidade de conceber tempo como uma quantidade e, quando eles estão pensando em medidas específicas de tempo quantificado, pelo seu conceito de número” (Thompson & Carlson, 2017, p. 431).

Nosso foco, respaldados por elementos trazidos no quadro teórico proposto pelos autores supracitados, foi pensar tarefas que oferessem aos estudantes de CDI possibilidades para o desenvolvimento de ideias do RC, com base na ideia de “movimento fictivo”. Tal forma de pensar é fundamental na compreensão de fenômenos que envolvem quantidades que se relacionam, e que servem de base para a elaboração de conceitos do CDI (como derivadas e integrais, além da resignificação do próprio conceito de função).

No que se refere ao uso de tarefas no ensino de Matemática, da forma como Ponte (2014) propõe, estamos entendendo tarefas como “elementos organizadores de quem aprende, sendo em sua maioria propostas por professores e, uma vez propostas, devem ser interpretadas pelos alunos podendo originar atividades diversas” (p. 14). Assim, tarefas são “ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática”, podendo ou não ter “potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar” (Ponte, 2014, p. 16). Acerca do papel das discussões coletivas no trabalho com tarefas matemáticas, Ponte (2017, p. 34) destaca que “tanto a investigação como a prática profissional mostram como momentos de discussão são essenciais para a compreensão matemática por parte dos alunos”.

Com base nas ideias presentes em trabalhos desenvolvidos em nosso grupo de pesquisa, como Trevisan e Mendes (2018), temos defendido a organização de ambientes de ensino e de aprendizagem pautados em episódios de resolução de tarefas. Para esses autores, o termo “ambiente de aprendizagem” refere-se ao contexto em que ao indivíduo são oferecidas oportunidades para aprender. Já os “episódios” são momentos em que os estudantes são organizados em grupos e a eles são propostas tarefas, não sejam precedidas da apresentação de definições ou exemplos similares, que contribuam para a exploração intuitiva de ideias matemáticas e possibilitem uma posterior sistematização de conceitos.

Procedimentos metodológicos

A discussão que trazemos neste artigo é parte intregrante de um estudo mais amplo (Gonçalves, 2018), o qual foi desenvolvido numa perspectiva qualitativa, de cunho interpretativo. Tal estudo, intitulado “Investigação de um ambiente educacional para o Cálculo Diferencial e Integral em condições reais de ensino”, teve por objetivo investigar os processos envolvidos na caracterização, na implementação e na avaliação de ambientes de ensino e de aprendizagem de CDI, considerando as condições reais às quais estamos sujeitos. Assim, trabalhamos com a criação de tarefas e, intrinsecamente associado a isso, investigado formas de utilizá-las em sala de aula, bem como aprendizagens por ela propiciadas (Trevisan e Mendes, 2018), que oportunizem aos estudantes reinventar o CDI (Freudenthal, 1973), que permitam a criação de conceitos e teoremas fundamentais utilizados intuitivamente antes que sejam descritos com precisão ou provadas.

Para esse estudo foram organizados cinco episódios de resolução de tarefas junto a uma turma de Engenharia de uma Universidade Federal do Paraná (Brasil), ingressantes no curso no 2º semestre de 2017 e matriculados na disciplina de CDI 1[1]. Cada episódio se consistiu a partir de um encontro composto por 3 aulas de 50 minutos, o qual foi organizado buscando-se atender pressupostos de um ambiente de ensino e de aprendizagem pautado em episódios de resolução de tarefas: aos alunos, organizados em grupos de 3 a 5 integrantes, foram propostas sequências de tarefas sem que houvesse alguma explicação prévia de conteúdos. Para a organização das tarefas, levamos em consideração um conjunto de ideias do RC que poderiam ser mobilizadas nas tarefas propostas, a constar:

- (i) Constituir quantidades envolvidas na situação (reconhecer atributos de uma situação passíveis de medição);
- (ii) Raciocinar sobre o processo de medição dessas quantidades;
- (iii) Imaginar medidas de quantidades variando continuamente;
- (iv) Coordenar duas quantidades que variam juntas:
    - (a) reconhecer que as quantidades se relacionam;
    - (b) reconhecer direção de crescimento - ambas crescem/decrescem, por exemplo;
    - (c) reconhecer a existência de taxas de variação - cresce mais rápido/mais lento, ou cresce a uma taxa crescente ou decrescente;
    - (d) identificar eventuais mudanças na taxa de crescimento.

Visto que esses estudantes já haviam tido contato com uma definição formal de função em seu Ensino Médio, nosso intuito, por meio da realização dessas tarefas, era que (re)significassem esse conceito. Em todas elas, buscou-se mobilizar a articulação entre múltiplas representações (linguagem natural, tabela, gráfico), no intuito de coordenar a variação das quantidades envolvidas, reconhecendo a existência de taxas de variação e eventuais mudanças nessas taxas.

A tarefa que foi selecionada para análise neste artigo, que compõem o último episódio (ocorrido em novembro de 2017), tem o seguinte enunciado: *Construir um gráfico que relacione o perímetro e a área de uma praça supondo que ela tenha formato: (a) Circular; (b) Quadrado.*

Para coleta de dados fizemos uso da produção escrita dos estudantes e do áudio de um dos grupos (composto por três estudantes, aqui nomeados C1, C2 e C3) enquanto trabalhavam com a tarefa, bem como das anotações feitas pelos pesquisadores em seu diário de campo. Para fins de análise, organizamos recortes que ilustrem o potencial das tarefas em termos de fomentar discussões que envolvem ideias do RC.

[1] Essa disciplina é ofertada no 1º semestre do curso, e contempla em sua ementa o estudo de funções, limites, derivadas e integrais em uma variável real.

Análise dos dados

O grupo iniciou a discussão analisando o caso da praça circular (item a), conforme transcrição a seguir:

[1] C1: O perímetro de um círculo é $2\pi r$.
[2] C2: O comprimento.
[3] C1: E a área é $2\pi r^2$
[4] C2: Não, é πr^2.
[5] C1: Só a fórmula pra gente pensar na fórmula. Se aumenta o raio, a área vai aumentar muito mais do que aumenta o perímetro, então, se a gente for construir uma relação entre a área e o perímetro; conforme o perímetro está crescendo, a área está crescendo muito mais. Porque o raio aumenta pros dois. Vamos supor, aumenta 5 pros dois. Esse aqui [área] vai ser 5 ao quadrado, 25, esse aqui [perímetro] vai ser 10, não é dobro, mas esse aqui [área] aumenta mais depressa que esse [perímetro]...faz sentido?
[6] C2: Faz. E quanto mais o raio vai aumentando mais a área vai aumentando.
[7] C1: Os dois aumentam juntos. E a área aumenta pra cima, aumenta aumentando. Aumenta crescendo.

Em seu diálogo, mostraram reconhecer que a taxa de crescimento da área em relação ao raio é maior que a do perímetro. Nesse caso, utilizaram o "raio" implicitamente para analisar como área e perímetro se relacionam. Nesse viés, mostraram perceber que existe uma covariação entre as grandezas observadas. Os gráficos apresentados pelo grupo, após discussão, tinham formas diferentes, conforme Figura 1. No lado esquerdo, podemos observar que o gráfico cresce a uma taxa crescente. No lado direito cresce também, porém a uma taxa decrescente. Embora eles tenham pensado de forma correta, os elementos discutidos parecem não ter sidos suficientes para embasar o formato do gráfico e sua relação com o modo como as grandezas envolvidas se relacionam.

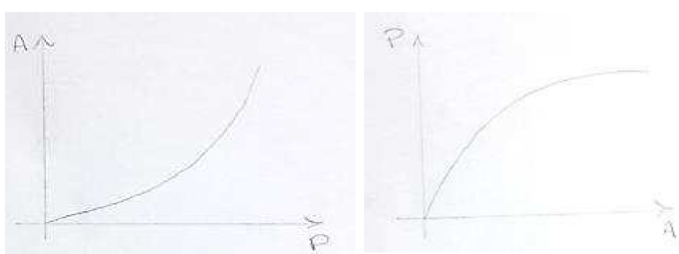


Figura 1. Gráficos apresentados pelo grupo, relacionando área e perímetro da praça circular.
Fonte: autores.

Continuando a discussão, agora do item (b):

[8] C2: E se for um quadrado?
[9] C3: Agora, nesse caso, o perímetro cresce mais que a área.
[10] C2: A área do quadrado é base vezes altura. E o perímetro é a soma de todos os lados.
[11] C3: É, porque ó! A área é lado ao quadrado e o perímetro é quatro vezes o lado.
[12] C2: Não importa o valor. Mesmo que o lado seja 20, temos que 20^2 é 400.
[13] C3: Não... Não sempre. Põe lado igual a 2, por exemplo, a área fica 4. O perímetro fica 8.... É como se no início o perímetro fosse maior do que a área e no final, mais para frente, a área fosse maior que o perímetro.
[14] C2: A gente vai encontrar esse maior? Tipo o ponto máximo?
[15] C3: Hã?
[16] C2: A gente vai encontrar esse ponto?

[17] C3: Ah, tinha que encontrar...
[18] C2: Derivar.
[19] C3: Eu acho que não precisa é só, tipo, um esboço, sabe? É só a gente imaginar assim ó.

O grupo conseguiu nesse trecho de discussão, reconhecer que o perímetro cresce mais rapidamente que a área até certo momento (trechos [9] e [13]), ainda não identificado. Chegam a transitar por ideias do CDI, como mostrado em [14] e [18] tendo lembranças que algum item do CDI encontro os pontos de máximos, chegam a mencionar derivada.

[20] C3: Então a área tipo vai... Não sei, no começo ela vai bem baixinha.
[21] C2: A gente faz tipo, esse crescimento aumentar.
[22] C3: E começa pequeno.
[23] C2: Daí quando o lado é 3, o perímetro 12, a área é 9. Quando o lado é 4, o perímetro é 16 e a área é 16.
[24] C4: Depois que ela começa...
[25] C2: No 4.
[26] C2: Daí quando é 4 as duas são iguais... E daí depois a área aumenta.

Observando as falas do grupo, aquilo que era dúvida no início da discussão parece ser resolvido agora. O grupo reconhece que perímetro e área relacionam-se a uma taxa crescente. Porém, ao pensar em separado na relação "perímetro-lado" e "área-lado", inferem, de forma equivocada, que há uma mudança na taxa de crescimento, construindo uma representação gráfica na qual aparece um ponto de inflexão (Figura 2), conforme diálogo abaixo.

[33] C1: Se a gente fizer o contrário, tem que ser por área e tempo?
[34] C2: Sim. Tem.
[35] C3: Pode ser área por perímetro.
[36] C2: É mais fácil.
[37] C1: Pode ser perímetro por área. A gente coloca, o perímetro cresce mais quando passa do quatro e o perímetro cresce quando passa do 4, fica mais bonito.
[38] C2: Tá ótimo.
[39] C1: Esse aqui se a gente quiser fazer perímetro por área, a área cresce mais que o perímetro, então o perímetro cresce menos conforme a área aumenta.

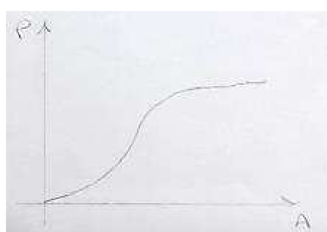


Figura 2. Gráfico apresentado pelo grupo, relacionando área e perímetro da praça quadrada. Fonte: autores.

Interpretação e discussão dos dados

Na resolução proposta, o grupo utilizou o "raio" implicitamente para analisar como área e perímetro se relacionam, no caso da praça circular, e o "lado", no caso da praça quadrada. Nesse viés, mostraram reconhecer que existe uma covariação entre as grandezas observadas, concebendo o movimento fictivo (Frant, Silva, & Powell, 2013), na qual as grandezas envolvidas (no caso, o perímetro e a área), apesar de serem estáticos, foram compreendidas pelo movimento dinâmico que a situação sugere .

Para a praça quadrada, inferimos que os alunos reconhecem a covariação entre as grandezas de forma que ambas possuem a mesma direção de crescimento, porém, inferem equivacadamente que a taxa de crescimento do perímetro em relação à área altera-se conforme aumenta o lado do quadrado (*É como se no início o perímetro fosse maior do que a área e no final, mais para frente, a área fosse maior que o perímetro*). Chegam a tratar de taxa de crescimento para ambos os casos de forma "intuitiva" e também percebem que as taxas envolvidas se alteram (Carlson et al., 2003).

Em suas discussões, os estudantes utilizam de forma superficial algumas ideias do CDI associadas a conceitos que já se havia se sistematizado durante as aulas. Se observarmos, são listados alguns termos próprios do CDI, como, por exemplo, "ponto máximo" e "derivar"; em especial, ao reconhecerem de forma implícita a existência de uma taxa de variação que está se modificando. Emboram cheguem mencionar o termo "derivar", não parece ser claro o que significa numa situação como essa o conceito de derivada, e como se relaciona com a representação gráfica, uma vez que o gráfico da Figura 2 não está correto. Na fala mencionam ser importante achar esse ponto onde o perímetro deixa de crescer mais rápido que a área (*Ah, tinha que encontrar...*), embora optem por buscá-lo por tentativa e erro.

Para o grupo, o momento chamado por eles de "4" representa a mudança da taxa de crescimento entre as grandezas, o que os leva a construir um gráfico com um suposto ponto de inflexão. Em sua discussão, cogitam a possibilidade de inverter os eixos. Tal fato é interessante e importante enquanto reconhecimento de um olhar covariacional, afinal parece que se desprendem da obrigatoriedade definir alguma grandeza que "deva" ser representada no eixo horizontal (Thompson & Carlson, 2017).

Considerações finais

De modo geral, o grupo analisado mobilizou ideias relacionadas ao RC que havíamos planejado para esta tarefa:

(i) constituindo quantidades envolvidas na situação, por exemplo: *Agora, nesse caso, o perímetro cresce mais que a área*;

(ii) raciocinando sobre o processo de medição dessas quantidades, como exposto em *A área do quadrado é base vezes altura. E o perímetro é a soma de todos os lados*;

(iii) fazendo os traços no papel, inferimos que o grupo compreende que, nessa situação, as quantidades envolvidas variam continuamente, uma vez que, ao invés de marcar pontos e uni-los, constrem uma curva contínua;

(iv) coordenando duas quantidades que variam juntas, (a) reconhecendo que as quantidades se relacionam (utilizando, implicitamente, as variáveis "lado" e "raio" para relacionar perímetro e área); (ii) reconhecem a direção de crescimento (lado e perímetro crescem "na mesma direção" - *Os dois aumentam juntos*); (iii) identificam mudanças de taxas de crescimento, conforme fragmento de fala: *É como se no início o perímetro fosse maior do que a área e no final, mais para frente, a área fosse maior que o perímetro*.

Entretanto, embora os estudantes reconheçam na discussão sobre a praça quadrada que, a partir de dado "momento" a área cresce mais rápido que o perímetro (como ocorre com a praça circular), eles não são capazes de reconhecer que o esboço do gráfico seria o mesmo para as duas situações, assumindo de forma equivocada uma mudança na taxa de crescimento (e a representação gráfica utilizando um ponto de inflexão).

Assim, embora durante a discussão, os estudantes tenham mostrado compreender elementos relacionados ao RC, eles não souberam como representar graficamente a relação entre as grandezas enredadas. Esse "faltar mão" é uma questão que emergiu de nossos dados e que permanece em aberto, demandando maior aprofundamento teórico, tanto na busca de compreendê-la, quanto para subsidiar reformulações nas tarefas propostas. Apesar disso, reconhecemos as potencialidades de tarefas como essa utilizada em nossa pesquisa, para uma ressignificação do conceito de função, visto que ampliam a abordagem usualmente presente em livros tanto do Ensino Médio quanto de CDI que tratam desse conceito.

Referências

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E.(2003) *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos*: una marco conceptual y un estudio. EMA, 121-156.

Frant, J. B., Silva, W. Q., & Powell A. B. (2013) Explorando tarefas com tecnologias digitais para o ensino de fenômenos periódicos: quando o movimento fictivo se torna factível. *Revista Educação e Cultura Contemporânea*, 10, 2, 29-49.

Freudenthal, H (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Gonçalves, W J. (2018) *Raciocínio covariacional em aulas de Cálculo Diferencial e Integral*: possibilidades de desenvolvimento a partir do uso de tarefas. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina.

Goldenberg, P., Lewis, P., & O'Keefe, J. (1992). Dynamic representation and the development of a process understanding of function. In: Dubinsky, E., & Guershon, H. (Ed.). *The concept of function*: Aspects of epistemology and pedagogy, 235-260.

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W.(2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In: Carlson, M. P., & Rasmussen, C. (Eds.). *Making the connection*: Research and practice in undergraduate mathematics Washington, DC: Mathematical Association of America, 27-42.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: Ponte, J. P.(Ed.) Práticas profissionais dos professores de Matemática. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 13-30.

Ponte, J. P. (2017). Discussões Coletivas no Ensino-Aprendizagem de Matemática. In: GTI (Ed.). A *Prática dos Professores*: planificação e discussão coletiva na sala de aula. Lisboa: APM, 33-56.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017) Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In Cai, J. (Ed.). *Compendium for research in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 421-456.

Trevisan, A. L., & Mendes, M. T. (2018) Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral pautados em episódios de resolução de tarefas: uma proposta de caracterização. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 11, 209-227.

XV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Raciocínio covariacional em aulas de Cálculo: propostas de tarefas

Daniel Daré Luziano da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Londrina
Brasil
dlsilvadaniel@hotmail.com
André Luis Trevisan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Londrina
Brasil
andrelt@utfpr.edu.br
William José Gonçalves
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Londrina
Brasil
williamboatematica@gmail.com

Muitas das dificuldades estudantes apresentam na compreensão de conceitos matemáticos é que esses são "passados" de forma expositiva e o conhecimento matemático resume-se assim a um conjunto de fórmulas e normas pré-estabelecidas, em que eles são meros repetidores de processos. Elegemos como foco de discussão matemática deste trabalho o pensamento funcional, cuja gênese envolve atentar-se às quantidades que variam e na relação entre essas quantidades. Há duas formas de abordagem de relações no conceito de função: a covariação entre quantidades (análise coordenada das variações de duas grandezas interdependentes) e a correspondência entre quantidades (Thompson & Carlson, 2017)

Em uma abordagem tradicional para quantificar uma função dinâmica do mundo real o estudante geralmente recebe uma tabela de valores de amostragem, plota pontos no plano cartesiano e, em seguida, usa o gráfico (união de pontos) para estender a tabela. Em um curso de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), o aluno é então questionado sobre a dinâmica da situação do mundo real que requer a extração de informações dinâmicas de um gráfico estático como taxa de crescimento e decrescimento, por exemplo. Quando se trata de situações dinâmicas, a maioria dos alunos esbarram na dificuldade de visualização da situação e de como se relacionam as variáveis.

Para Thompson e Carlson [2017, p. 422], "ideias de variação e covariação em valores de variáveis não se encaixam na definição matemática de função atual de hoje", pois adotam os passos de determinação de pontos, produtos cartesianos e o significado de Dirichlet de necessidade de lei de correspondência entre os valores de x e y. A partir disto, redescobrem o conceito de função a partir da óptica da lente covariacional: "uma função, covariacionalmente, é uma concepção de duas quantidades que variam simultaneamente, de modo que existe uma relação invariante entre seus valores que tem a propriedade de que, na concepção da pessoa, cada valor de uma quantidade determina exatamente um valor do outro" (Oehrtman, Carlson, & Thompson,2008; Thompson e Carlson, 2017, p. 422). Assim o conceito de função passa ser dependente de como a pessoa concebe a relação entre duas quantidades, de modo que ela tenha um atributo que possa ser medido. Vai muito além de um número atribuído. Pensar em quantidades que variam não é pensar em tabelas de números que aumentam ou diminuem grandezas, mas sim em objetos que se alteram continuamente.

Assumindo a necessidade em se "desconstruir" o ensino tradicional de CDI e a possibilidade de organização de ambientes de ensino e de aprendizagem pautados em episódios de resolução de tarefas (Trevisan e Mendes, 2018), desenvolveu-se uma pesquisa que objetivou a produção de aplicativos que pudessem subsidiar a organização de tarefas matemáticas (Ponte, 2014), a partir de uma abordagem covariacional do conceito matemático de função.

Os aplicativos desenvolvidos e as tarefas organizadas, que serão apresentadas neste pôster, ajudam a mobilizar o RC, e assim contribuem para uma ressignificação do conceito de função, necessária ao entendimento de conceitos próprios do CDI. Para sua organização, aplicou-se uma busca sistemática de aplicativos que possibitassem a exploração do RC, em sites e plataformas, como o "GeoGebra - Aplicativos Matemáticos". Em seguida, realizou-se adaptação de alguns dos recursos encontrados e desenvolvimento de novos aplicativos para cumprirem os objetivos determinados em tarefas encontradas na revisão de literatura ou desenvolvidas pelos autores.

A título de exemplo, trazemos o enunciado de uma das tarefas propostas a estudantes de CDI 1: *Investigar possibilidades de se construir uma praça em forma retangular dentro de um terreno quadrado de 80m de largura, sendo que cada vértice da praça deve estar sobre um dos lados do terreno.*. O trabalho com essa tarefa possibilitou a vários grupos de estudantes mobilizar ideias relacionadas ao RC, como a constituição das quantidades envolvidas na situação e o processo de medição dessas quantidades, a compreensão de que as quantidades envolvidas variam continuamente e sua coordenação, reconhecendo a direção de crescimento e mudanças na taxa de crescimento.

Referências

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W.(2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In: Carlson, M. P., & Rasmussen, C. (Eds.). *Making the connection*: Research and practice in undergraduate mathematics Washington, DC: Mathematical Association of America, pp. 27-42.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: Ponte, J. P.(Ed.) Práticas profissionais dos professores de Matemática. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, pp. 13-30.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017) Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In Cai, J. (Ed.). *Compendium for research in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 421-456.

Trevisan, A. L., & Mendes, M. T. (2018) Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral pautados em episódios de resolução de tarefas: uma proposta de caracterização. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 11, pp. 209-227.

Atividades investigativas com o GeoGebra: reflexões no estudo do gráfico da função quadrática

Elisama de Mendonça **Felipe**
Colégio Pedro II/SEEDUC-RJ
Brasil
lisa-rj@hotmail.com
Edite Resende **Vieira**
Colégio Pedro II/Projeto Fundão – Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
edite.resende@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta reflexões geradas por atividades que compõem uma sequência didática aplicada em uma turma do 1º ano do Ensino Médio Regular. Tais relatos compõem a pesquisa de mestrado intitulada ‘Interpretar e explorar o gráfico da função quadrática com o GeoGebra: reflexões em uma sequência didática sob a perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica’ cujo objetivo foi verificar em que medida o software GeoGebra poderia contribuir para a interpretação do gráfico da função quadrática. A tecnologia dos dispositivos móveis, fundamentada pelos estudos de Marcelo Bairral, viabilizou a realização do trabalho, possibilitando a utilização do referido aplicativo no ambiente escolar. As atividades foram elaboradas e analisadas de acordo com a prática educativa segundo Antoni Zabala e sob a perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. As atividades produziram reflexões que contribuíram para a construção do conhecimento matemático.

Palavras chave: função quadrática, interpretação gráfica, GeoGebra, sequência didática, dispositivos móveis

Introdução

Na prática diária de sala de aula, é possível observar a dificuldade apresentada por muitos alunos, do 1º ano do Ensino Médio em ler e analisar os gráficos de uma função quadrática. E quando uma dificuldade de aprendizagem é detectada pelo professor, cabe a ele refletir sobre tal circunstância, para que seja possível utilizar estratégias apropriadas e recursos educacionais adequados, que possam contribuir para amenizar tais dificuldades encontradas pelos alunos.

De acordo com Duval (2012), as transformações de representações em outras representações semióticas são atividades cruciais da atividade matemática, e a dificuldade dos alunos em compreender Matemática surge da diversidade e complexidade dessas transformações.

Atualmente, observamos o quanto os hábitos da sociedade vêm sendo modificados pelo avanço das tecnologias, em especial as digitais. E as tecnologias móveis, em especial os *smartphones*, estão presentes em toda parte, uma vez que integram o cotidiano da maioria das pessoas e são visivelmente populares entre os alunos, pois é bastante comum vê-los manuseando seus dispositivos no ambiente escolar. Sendo assim, vislumbrou-se o potencial dos dispositivos móveis como recursos pedagógicos que podem vir a contribuir com o contexto educacional e especificamente com a educação matemática.

O software GeoGebra com os recursos da visualização e da associação entre as representações algébrica e gráfica da função foi visto como um instrumento pedagógico que pode vir a contribuir com a interpretação do gráfico da função quadrática. No entanto, para orientar o processo de interpretação do gráfico da função quadrática foi elaborada uma sequência didática que culminou no produto educacional da pesquisa, que é um caderno de atividades intitulado “A interpretação do gráfico da função quadrática: apreendendo com o GeoGebra”.

Princípios Teóricos

A leitura das representações gráficas requer dos alunos consciência da correspondência entre as variações visuais do gráfico da função e de sua relação com as variações na escrita algébrica. Duval (2011b) evidencia diversos estudos que apontam a dificuldade dos alunos na leitura e interpretação dos gráficos das funções, de modo que os alunos não conseguem a partir da representação gráfica encontrar a equação de uma reta, até mesmo em casos mais simples. Segundo o pesquisador, não se deve procurar o porquê dessas dificuldades no conceito, mas “[...] na falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro da expressão algébrica” (Duval, 2011b, p. 97).

No trecho a seguir, Duval (2011b) ressalta a importância da abordagem de interpretação global como sendo a mais apropriada, pois depende de uma análise semiótica visual e também algébrica, além de destacar o porquê das dificuldades dos alunos com as representações gráficas:

> A abordagem de interpretação global atém-se ao conjunto traçado/eixos, formando uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Toda modificação da imagem leva a uma modificação na expressão algébrica. Assim, observa-se a importância de acompanhar simultaneamente tais modificações. Desse modo, conclui-se que “com esta abordagem não estamos mais na presença da associação ‘um ponto – um par de números’, unidade significativa da expressão algébrica” (Duval, 2011b, p. 99).

Duval (2011b) ressalta a importância da abordagem de interpretação global como sendo a mais apropriada, pois depende de uma análise semiótica visual e também algébrica. Tal abordagem exige que a atenção esteja centrada em um conjunto de propriedades e não sobre valores tomados um a um. Por esta razão, Duval (2011b) destaca a importância da utilização dessa abordagem para que o professor alcance o objetivo de uma utilização adequada dos gráficos cartesianos com seus alunos.

Os dispositivos móveis tornaram-se objetos indispensáveis na sociedade atual, e principalmente no cotidiano dos estudantes. Bairral, Assis e Silva (2015), afirmam que:

> As tecnologias digitais móveis vêm ganhando cada vez mais espaço na vida dos indivíduos. São celulares com *touchscreen, notebooks, tabletes e iPads* que também assam a fazer parte do cotidiano da maioria dos nossos alunos. Embora algumas dessas interfaces não sejam novas, a presença desses dispositivos móveis - principalmente com *touchscreen* – parece assumir uma posição de destaque no ambiente escolar por parte dos discentes, pelo menos, em seu uso pessoal

(Bairral; Assis; Silva, 2015, p. 21).

Diante desse cenário, temos a possibilidade de aproveitar um objeto presente no dia a dia do aluno como um recurso educacional que pode vir a contribuir com a aprendizagem, especificamente a aprendizagem matemática.

Na Educação Matemática, sua utilização faz diferença para alunos e professores. Bairral, Assis e Silva (2015) ressaltam o quanto o uso dos aplicativos para dispositivos *touchscreen* é importante nos processos de ensinar e de aprender Matemática:

> Uma maneira de colocar literalmente a matemática na ponta dos dedos é a utilização dos aplicativos em *tablets* e *iPads.* A tecnologia *touchscreen* possibilita um contato e uma apropriação diferenciada por parte dos usuários, pois são as novas configurações cognitivas e espacialidades com os movimentos – os toques – na tela (Bairral; Assis; Silva, 2015, p. 33).

Os aplicativos disponíveis para *smartphones* e *tablets*, em especial, para o estudo de geometria plana, espacial, álgebra e de funções, proporcionam novas perspectivas de aprendizagem, configurando um ambiente mais instigante e desafiador para o aluno na resolução de atividades matemáticas.

Hohenwater e Preiner (2007) alegam que o propósito fundamental do GeoGebra é proporcionar duas representações de cada objeto matemático em sua janela algébrica e gráfica. Dessa forma, mudando um objeto em uma dessas janelas, sua representação será imediatamente atualizada na outra, possuindo a relevante característica das múltiplas representações, destacada pelos autores. Sobre esse aspecto do GeoGebra, Duval (2011a) assinala que:

> Sem um trabalho específico de análise para aprender a reconhecer as variações qualitativas do contínuo visual traçado e a colocá-las em relação com as variações de alguns tempos simbólicos da escrita algébrica, as representações gráficas não permitem nem ver, nem compreender nem antecipar o que as equações exprimem. E reciprocamente para as equações (Duval, 2011a, p. 114).

A partir desse contexto, reconhecemos a importância de um estudo que priorize as múltiplas representações no conteúdo das funções e a importância do GeoGebra como um instrumento que possibilita esta prática recomendada por Duval (2011a).

Por ser um software de Geometria Dinâmica, é possível com o GeoGebra visualizar tanto a representação algébrica quanto a representação gráfica de uma função. Nesse ambiente, os alunos poderão explorar as propriedades da função quadrática, identificar os coeficientes e analisar o comportamento da função, estabelecendo relação entre as representações gráfica e algébrica.

Metodologia: princípios e percurso

Trata-se de uma pesquisa qualitativa do tipo pesquisa-ação que foi realizada com 33 alunos do 1º ano do Ensino Médio de um Colégio Estadual do Rio de Janeiro.

Segundo Alves-Mazotti e Gewandsznajder (2004), as investigações qualitativas necessitam de um planejamento cuidadoso, a fim de que o pesquisador não se perca em uma grande quantidade de dados. Por esta razão, foi realizada uma intensa pesquisa bibliográfica a fim compreender o tema e traçar estratégias adequadas para a realização da pesquisa.

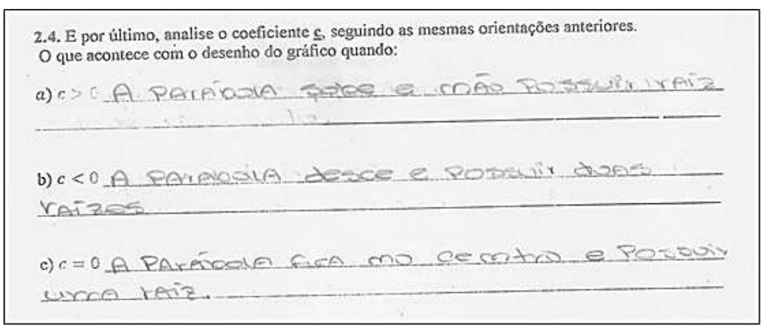
De acordo com Engel (2000), a pesquisa-ação busca agregar a pesquisa à prática, ou seja, é um modo de se fazer pesquisa a partir da prática quando se pretende melhorá-la. Logo, mostra-se apropriada ao professor regente que pretende aprimorar sua prática docente.

A sequência didática foi o recurso metodológico adotado para orientar todo o processo mediado pelo software GeoGebra. De acordo com Zabala (1998), as sequências de atividades ou sequências didáticas são recursos metodológicos que propiciam a análise da prática, pois permitem o estudo e a avaliação de maneira processual "[...] ao mesmo tempo que são instrumentos que permitem incluir as três fases de toda intervenção reflexiva: planejamento, aplicação e avaliação" (Zabala, 1998, p. 18). Segundo o autor, as sequências didáticas "[...] são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores quanto pelos alunos" (Zabala, 1998, p. 18).

A sequência de atividades foi aplicada entre os meses de agosto e setembro de 2017, que compõem o 3º bimestre letivo. Foram realizados 8 encontros no total, iniciando com uma aula de ambientação ao GeoGebra, seguindo com as 11 atividades e finalizando com a aplicação de um questionário que buscou revelar as percepções dos alunos quanto ao experimento. As Atividades foram organizadas por etapas de acordo com a característica previamente planejada e com os conceitos matemáticos que se pretendia explorar e investigar. Os dados foram coletados por meio da observação participante, de gravações de áudio e vídeo, das anotações de campo e dos registros feitos pelos alunos, e analisados à luz das teorias que fundamentam este estudo.

Análise e discussão

Nessa seção serão analisados alguns episódios referentes a aplicação de duas atividades da sequência didática, atividade 2 (figura 1) e atividade 8 (figura 3) e uma das perguntas do questionário (gráfico 1) respondido pelos alunos após a aplicação da sequência didática.


2.4. E por último, analise o coeficiente c, seguindo as mesmas orientações anteriores.
O que acontece com o desenho do gráfico quando:

a) $c > 0$ A PARÁBOLA SOBE E NÃO POSSUI RAÍZ

b) $c < 0$ A PARÁBOLA desce e POSSUI duas raízes

c) $c = 0$ A PARÁBOLA fica no centro e POSSUI uma raíz.

Figura 1. Atividade realizada pelo aluno 1B.

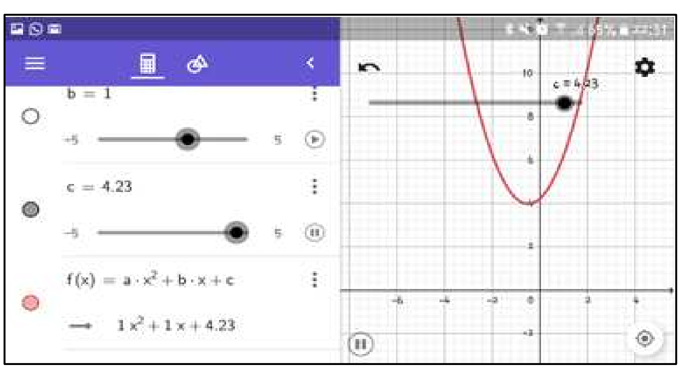


Figura 2. Atividade representada no GeoGebra.

Analisando o coeficiente ‘c’, (figuras 1 e 2) os alunos conseguiram observar que o gráfico se movimentava pelo eixo y, subindo e descendo, mas encontraram dificuldades em se expressar para relatar tanto oralmente quanto por meio da escrita.

O aluno 1B (figura 1) observou a movimentação do gráfico e ainda a variação do número de raízes de acordo com a localização do gráfico no plano cartesiano, o que grande parte dos alunos também observou. O aluno 1B, também não registrou a localização do gráfico no plano cartesiano de maneira formal, ou seja, em linguagem matemática. Para Powell e Bairral (2006), a escrita força os interlocutores a refletir sobre suas experiências matemáticas, a construir e reconstruir o sentido num processo mediado pelo professor e assim, ele passa a expressar suas ideias com mais clareza, sabendo selecionar o tipo de linguagem apropriada para descrever suas percepções.

Fica evidente a dificuldade do aluno em expressar o que foi analisado mesmo com linguagem própria e mais ainda em linguagem matemática. Os alunos foram incentivados a reescrever seus registros, sempre após uma discussão que os levassem a uma melhor compreensão do que estava sendo proposto. Foi um processo que consistiu no diálogo, na escrita e na reescrita dos registros.

Duval (2011a), evidencia que redação em Matemática exige um trabalho de tomada de consciência das operações discursivas, próprias do pensamento matemático. Ele ainda acrescenta que a falta da produção escrita em Matemática a torna desanimadora e inútil para os alunos.

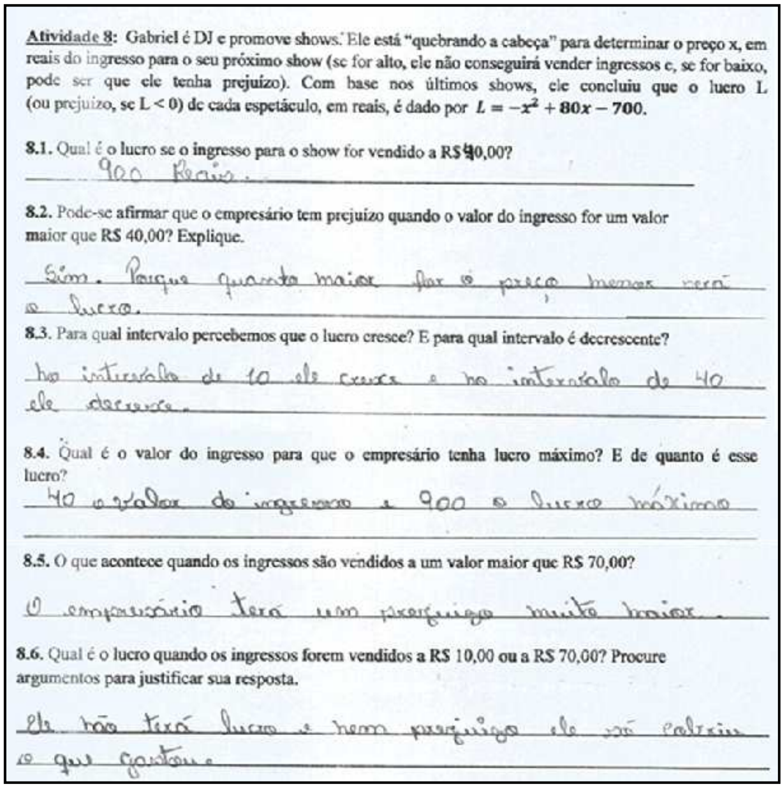
Por sua vez, Powell e Bairral (2006) alegam que a escrita auxilia os alunos a adquirirem um rico vocabulário, proporcionando oportunidades para trabalharem conceitos e termos matemáticos, além de os tornarem mais confiantes com a Matemática, incentivando-os a aprofundarem no estudo da mesma.

Na atividade 8 (figuras 3 e 4), foi necessário a professora orientar a turma diversas vezes passando pelos grupos, promovendo debates, tirando dúvidas e efetuando as devidas orientações. Essa atividade trabalhou o estudo do sinal da função quadrática de forma contextualizada, trazendo questões de lucro e prejuízo.

O significado das palavras ‘intervalo’ e ‘período’ fez parte das indagações dos discentes. A dificuldade em compreender enunciados e o significado de algumas palavras não aconteceu apenas nessas atividades, uma vez que tal problema já foi relatado em atividades anteriores.

Duval (2011a) evidencia o problema do obstáculo da linguagem no ensino da Matemática, afirmando que as dificuldades que envolvem a compreensão dos enunciados dos problemas são sistemáticas e recorrentes. Ele ainda acrescenta que as línguas naturais cumprem ao mesmo tempo duas funções: comunicação e função cognitiva. Sendo assim, o problema de compreensão de um enunciado passa pela decodificação de informações que foram codificadas no enunciado. Entretanto, o autor também afirma que “compreender não é codificar uma sequência de palavras ou frases, mas discriminar as unidades de sentido em função dos diferentes níveis de organização dos discursos e eventualmente, reformulá-los” (Duval, 2011a, p. 75).

No item 8.3 (figura3) realizada pelo aluno 3D é perceptível a dificuldade do mesmo em descrever o intervalo. Quando ele diz que “no intervalo de 10 ele cresce”, quis dizer que para valores de x maiores que 10, a função é crescente, e quando diz que “no intervalo de 40 ele decresce”, quis dizer que para valores de x maiores que 40, a função começa a decrescer.



Atividade 8: Gabriel é DJ e promove shows. Ele está “quebrando a cabeça” para determinar o preço x, em reais do ingresso para o seu próximo show (se for alto, ele não conseguirá vender ingressos e, se for baixo, pode ser que ele tenha prejuízo). Com base nos últimos shows, ele concluiu que o lucro L (ou prejuízo, se L < 0) de cada espetáculo, em reais, é dado por $L = -x^2 + 80x - 700$.

8.1. Qual é o lucro se o ingresso para o show for vendido a R$ 40,00?

900 Reais.

8.2. Pode-se afirmar que o empresário tem prejuízo quando o valor do ingresso for um valor maior que R$ 40,00? Explique.

Sim. Porque quanto maior for o preço, menor será o lucro.

8.3. Para qual intervalo percebemos que o lucro cresce? E para qual intervalo é decrescente?

no intervalo de 10 ele cresce e no intervalo de 40 ele decresce.

8.4. Qual é o valor do ingresso para que o empresário tenha lucro máximo? E de quanto é esse lucro?

40 o valor do ingresso e 900 o lucro máximo

8.5. O que acontece quando os ingressos são vendidos a um valor maior que R$ 70,00?

O empresário terá um prejuízo muito maior.

8.6. Qual é o lucro quando os ingressos forem vendidos a R$ 10,00 ou a R$ 70,00? Procure argumentos para justificar sua resposta.

Ele não terá lucro e nem prejuízo ele só cobrirá o que gastou.

Figura 3. Primeira situação da atividade 8, realizada pelo aluno 3D.

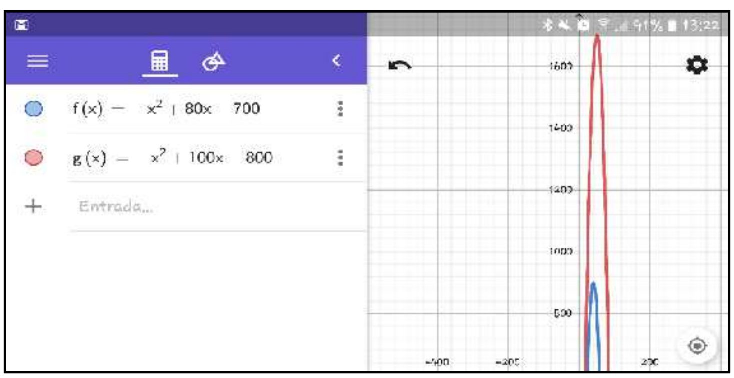


Figura 4. Primeira situação da atividade 8, em azul, no GeoGebra.

Em relação ao registro escrito realizado pelos alunos, Duval (2011a) argumenta que a passagem da expressão oral para a escrita é um salto muito grande para os alunos e a maioria deles encontra dificuldades em fazê-lo. Nesse sentido, Powell e Bairral (2006) também enfatizam que a escrita é uma importante ferramenta para desenvolver a cognição e estimular a aprendizagem matemática, e por esta razão este estudo prezou pelos registros escritos dos alunos não apenas na atividade 8, mas também nas demais atividades.

Em relação ao questionário os discentes foram indagados acerca dos conceitos relacionados à função quadrática que passaram a ser melhor compreendido por eles com o uso do GeoGebra (gráfico 1):

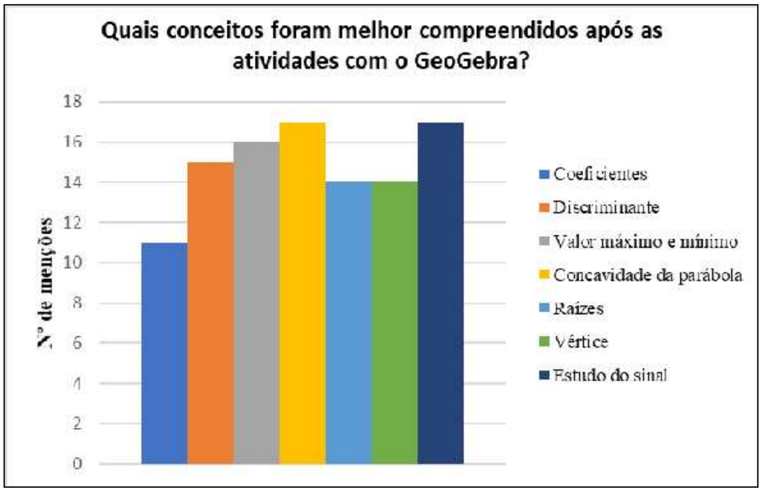


Gráfico 1. Conceitos mais citados pelos alunos

Os alunos verificaram que muitos conceitos, antes pouco compreendidos, passaram a fazer mais sentido após o experimento. Podemos observar no gráfico 1, que tais conceitos não se apresentam de modo tão discrepante em relação aos mais mencionados e nem entre si. O conceito que se encontra mais distante dos demais é o dos coeficientes, embora mais de 10 alunos disseram compreendê-los melhor após a realização das atividades.

No início da aplicação das atividades, os conceitos mais conhecidos pelos alunos eram o vértice e o discriminante, e os menos lembrados foram a concavidade e a própria parábola, gráfico da função quadrática. Já após a realização das atividades, observa-se, no gráfico 1, que os alunos disseram compreender melhor o estudo do sinal, que não havia sido citado no início do experimento e que a concavidade da parábola também foi melhor compreendida pelos alunos.

Considerações finais

As atividades organizadas em uma sequência didática orientaram todo o processo deste estudo, contribuindo para uma melhor utilização dos recursos do software e também no desenvolvimento dos conceitos e propriedades que envolvem a função quadrática.

A visualização e o dinamismo oferecidos pelo GeoGebra foram fatores determinantes na realização das atividades, pois essas características viabilizaram a interpretação do gráfico da função quadrática, o que foi constatado pela professora pesquisadora e também relatado pelos próprios alunos. A possibilidade de visualizar as representações algébrica e gráfica, simultaneamente, permitiu aos alunos relacionar cada gráfico com sua respectiva função, o que exigiu dos alunos um conhecimento de cada uma das variações visuais relacionadas a cada representação algébrica. Além disso, a possibilidade de inserção de várias funções oferecida pelo GeoGebra, ou seja, dos visores algébrico e gráfico comportarem mais de uma função ao mesmo tempo, proporcionou associar e comparar diferentes funções, criando assim um ambiente propício para o levantamento de conjeturas acerca das representações gráficas. Isso demonstra que a tecnologia digital quando utilizada com um direcionamento, visando o desenvolvimento de habilidades e competências específicas, pode vir a fazer a diferença, contribuindo para a aprendizagem discente.

Logo, por todos os aspectos analisados durante todo o processo, podemos concluir que o software GeoGebra contribuiu para interpretação do gráfico da função quadrática, entretanto, ficou evidente que o aplicativo por si só não seria capaz de promover um resultado satisfatório. A figura do professor concorreu por demais nesse contexto discussão e reflexão. Assim, ao se utilizar uma tecnologia, seja ela qual for, como recurso pedagógico, é fundamental que o professor se aproprie dessa tecnologia, desenvolva uma metodologia que oriente toda a prática educativa e busque alcançar o objetivo proposto.

Referências bibliográficas

Alves-Mazotti, A. J., Gewandsznajder, F. (2004). *O método nas ciências naturais e sociais, Pesquisa quantitativa e qualitativa*. São Paulo: Pioneira, Thompson Learning.

Bairral, M., Assis, A., Silva, B. C. (2015). *Mãos em ação em dispositivos touchscreen na educação matemática.* Seropédica: Ed. UFRRJ.

Duval, R. (2011a). *Ver e ensinar matemática de outra forma:* entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. (ORG). Tânia M. M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM.

______. (2011b). Gráficos e equações: a articulação de dois registros. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*. Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112. Acesso em fevereiro 10, 2017, em https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2011v6n2p96/21794.

______. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revista Eletrônica de Educação Matemática.* Florianópolis, v. 07, n.2, p.266-297. Acesso em outubro, 22, 2017, em https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266.

Engel, G. I. (2000). Pesquisa-ação. *Educar em revista*, Curitiba, n.16, p. 181 - 191. Editora da UFPR. Acesso em janeiro, 16, 2018, em http://www.educaremrevista.ufpr.br/arquivos_16/irineu_engel.pdf.

Hohenwarter, M., Preiner, J. (2007, mar 15). Matemática dinâmica com o GeoGebra*. O jornal de Matemática Online e suas Aplicações*, v.7. Acesso em janeiro, 12, 2018, em https://www.maa.org/press/periodicals/loci/joma/dynamic-mathematics-with-geogebra.

Powell, A., Bairral., M. (2006). *A escrita e o pensamento matemático:* interações e potencialidades. Campinas, SP: Papirus.

Zabala., A. (1998). *A prática educativa:* como ensinar. Porto Alegre: Artmed.

Uma investigação sobre o conhecimento da álgebra e a Resolução de Problemas em anais de dois eventos

Beatriz Rodrigues de **Almeida**
Universidade Estadual da Paraíba
Brasil
biarodriguesdsa@gmail.com
Roger Ruben Huaman **Huanca**
Universidade Estadual da Paraíba
Brasil
roger@uepb.edu.br

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar os resultados parciais da pesquisa "Analisando o conhecimento da álgebra e a resolução de problemas: uma pesquisa do encantamento à aprendizagem". Projeto de Iniciação Científica onde busca-se desenvolver abordagens alternativas para à aprendizagem de álgebra. Inicialmente, realizou-se um mapeamento onde foram separadas algumas propostas sobre álgebra dos eventos CONEDU e do CONAPESC em três categorias: álgebra como métodos e técnicas para resolver problemas; álgebra como relação entre grandezas; e álgebra como aritmética generalizada. No momento, estão sendo desenvolvidas abordagens para cada categoria. Partiu-se da hipótese que um aprendizado eficiente de álgebra passa pela compreensão profunda de diferentes categorias nas escolhas de estratégias para que a resolução de problemas algébricos seja feita de forma consciente e não puramente mecânica. Também pretende-se realizar intervenções em escolas públicas do Cariri Paraibano após elaboração de planejamento fundamentado no levantamento destes dados advindos dos eventos, visando a contribuição do avanço no processo de aprendizagem de álgebra.

Palavras-chave: Aprendizagem de álgebra, Resolução de Problemas, Trabalhos em anais de eventos, Álgebra, Educação Matemática.

Introdução

Este trabalho tem como objetivo apresentar os primeiros resultados do projeto "Analisando o conhecimento da álgebra e a resolução de problemas: uma pesquisa do encantamento à aprendizagem", vinculado ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Cientifica – PIBIC. Este projeto visa elaborar abordagens alternativas para a aprendizagem de álgebra na Educação Básica. Para isso, escolheu-se algumas propostas/trabalhos dos seguintes eventos: Congresso

Nacional de Educação – CONEDU e do Congresso Nacional de Pesquisa e Ensino em Ciências – CONAPESC, para poder categorizá-los no contexto da álgebra. Destacam-se estes dois eventos por duas razões: a primeira por ter sido realizado no nordeste do Brasil, localidade onde estava sendo iniciado o Curso de Licenciatura Plena em Matemática da primeira autora, encontrando nestes eventos, a oportunidade de apresentar trabalhos científicos e a segunda razão, por utilizar o mapeamento dos trabalhos como parte do Projeto de Iniciação Científica.

A tomada de consciência das propostas em relação à álgebra destes eventos trouxe reflexões significativas a respeito da aprendizagem da álgebra na Educação Básica. Desta forma, pode-se discutir abordagens que priorizem as tais manifestações, de modo que seja possível propor metodologias alternativas para a aprendizagem de álgebra propriamente dita de maneira eficaz.

Esta comunicação cientifica visa desenvolver e apresentar considerações a respeito das atividades categorizadas. Cabe ressaltar que inicialmente dá-se maior ênfase às manifestações relacionadas à interpretação das variáveis presentes na atividade algébrica, com isso, objetiva-se relacionar algumas características destas manifestações com algumas propostas algébricas discutidas na Educação Básica.

Este trabalho é uma importante contribuição para pesquisas a respeito da aprendizagem da álgebra, no sentido que, além de dar conta de relacionamentos aritméticos e geométricos, como método analítico, também poderá ser amplamente valorizado para o estudo de outras ciências. Nesse sentido, analisar as propostas relacionadas à aprendizagem da álgebra permitirá ter um suporte para entender a dinâmica das ações que os alunos desenvolvem, em relação à resolução de problemas, conforme pode ser auferido no referencial teórico adiante.

Referencial Teórico

No artigo “Reformular a álgebra da escola secundária: por que e como?” House (1994) no início, começa destacando:

> “A álgebra” escreveu um aluno precoce da sétima série, “é muito difícil e, apesar de muito instrutiva, noventa por centro das vezes também é muito frustrante. Significa horas de aulas que nem chegamos de perto a entender.” Um colega acrescentou: “Não sei grande coisa de álgebra, mas quem se importa?” (HOUSE, 1994, p. 1).

Observa-se que há muito tempo a álgebra desfruta de um lugar de destaque no currículo de Matemática, representando para muitos alunos a finalização de anos de estudo da aritmética e o início de mais anos de estudo de outras áreas da matemática. Então, o que é Álgebra? Não é tarefa fácil conceituar, porque a palavra álgebra tem sido definida e usada por matemáticos e professores de diferentes formas, dependendo da época e interesse acadêmico. Também, porque mesmo com o grau de independência que ganhou no início do século XIX, não pode ser assumida como uma matéria totalmente independente.

Sabe-se que a matemática é uma manifestação semiótica do desenvolvimento da sociedade e na qual ela é utilizada; consequentemente, a Álgebra, deve ser assumida como uma ferramenta – de organizar, manipular e tratar situações problemáticas – importantes para a sociedade, com caraterísticas próprias, que indicam uma forma particular de pensar e atuar.

Por exemplo, os matemáticos árabes, em particular AI-Khwarizmi (780-850) e Al-Khayyam (1048-1131), que propuseram o termo "*Kitab al-jabr wa al-muqabala*" (RASHED, 1994), expandido por todo ocidente simplesmente como Álgebra. E posteriormente, alguns matemáticos medievais como: François Viète, com sua arte analítica e Thomas Harriot que, independente de Galileu Galilei, aplicou a teoria da proporcionalidade e o método analítico para formular e solucionar problemas de corpos cadentes e de balística (SCHEMMEL, 2008; STEDALL, 2003). Também é importante destacar o matemático renascentista René Descartes, com seu trabalho de geometria analítica. Nesse sentido, para os árabes, a álgebra era vista como a arte de resolver problemas, ou seja, achar valores para as incógnitas em equações polinomiais, mas foram os matemáticos medievais e da modernidade que construíram a álgebra como é conhecida nos dias de hoje.

Derbyshire (2006) disse que, a álgebra é uma das formas mais antigas de pensar matematicamente, sendo hoje um dos instrumentos mais importantes para a solução de problemas em diferentes campos das ciências naturais. Além disso, nos dias de hoje, ela é uma das áreas de maior abstração e generalização da matemática, cujas raízes acham-se fundamentalmente em três elementos: no conceito de número e operações; nas formas de raciocínio proporcional; e no método analítico para a resolução de problemas e a demonstração de teoremas matemáticos.

Para Bos (2001), a álgebra refere-se às teorias e práticas matemáticas que envolvem incógnitas, empregando técnicas e operações algébricas, solução de equações e tratando com números que faz parte da aritmética ou as operações algébricas que são aplicáveis à geometria. Nesse sentido, a álgebra poderia ser assumida como um tipo de prática que trata com incógnitas, números indeterminados e quantidades em geral, ou seja, podem ser operadas como se tratasse de operações aritméticas generalizadas.

Para Usiskin (1995), as diferentes concepções da álgebra podem, de acordo com a interpretação de suas variáveis, ser classificadas em quatro grupos: aritmética generalizada; métodos e procedimentos para resolver problemas; relações entre grandezas e estudo das estruturas. Tais conceitos são demonstrados individualmente adiante.

Na concepção de álgebra como aritmética generalizada, este conceito representa o entendimento da álgebra como generalização dos conhecimentos aritméticos (USISKIN, 1995), ou seja, os objetos algébricos são compreendidos como sendo resultados da ampliação das ideias da aritmética.

A álgebra como estudo de métodos e procedimentos para resolver certos tipos de problemas, talvez seja a manifestação de álgebra mais comum durante as aulas de matemática, pois, de acordo com Usiskin (1995), esta interpretação trata de compreender quais procedimentos devem ser utilizados para resolver certos problemas relacionados à álgebra, sejam eles contextualizados ou não.

Na álgebra como estudos de relações entre grandezas o estudo das funções é, provavelmente, o maior representante desta concepção, a qual explora o estudo de como as grandezas se relacionam (USISKIN, 1995). Nesse sentido, talvez devido à sua natureza intrinsicamente algébrica, alguns educadores em matemática acham que a álgebra deveria ser introduzida através da utilização da variável.

Na álgebra como estudo das estruturas, tem-se de acordo com Usiskin (1995), uma interpretação que trata de entender quais as concepções matemáticas, tais como equivalências entre expressões, simplificações e outras atitudes matemáticas que podem ser úteis ou não para resolver um determinado problema.

No mapeamento das propostas utilizar-se-ão três dos conceitos acima mencionados, que são: álgebra como aritmética generalizada; a álgebra como estudo de métodos e procedimentos para resolver certos tipos de problemas; e a álgebra como estudos de relações entre grandezas, os quais foram propostas, foco deste trabalho. Assim, como já mencionado, acredita-se que o desenvolvimento dessas concepções para a aprendizagem de álgebra seja uma contribuição importante para uma aprendizagem cada vez mais significativa.

Procedimentos Metodológicos

Segundo Alves-Mazzotti (1998, p. 131), “a principal característica das pesquisas qualitativas é o fato de que estas seguem a tradição ‘compreensiva’ ou ‘interpretativa’”. Assim, ao utilizar a abordagem qualitativa, a primeira autora deste artigo fez a análise das propostas selecionadas, em um contexto particular em relação à aprendizagem da álgebra.

Também, Goldenberg (2003) afirma que uma pesquisa de caráter qualitativo consiste em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender o que está se querendo coletar. Nesse sentido, esta pesquisa se enquadra nos termos de uma abordagem qualitativa, já que o objetivo da pesquisa é apresentar resultados dos eventos CONEDU e CONAPESC nos últimos dez anos, de modo a contribuir para a aprendizagem de álgebra, buscando desenvolver abordagens alternativas por meio deste levantamento.

Conforme já foi dito, este trabalho apresenta os resultados iniciais do PIBIC. Sendo importante destacar que o projeto mencionado é constituído de várias etapas, mas, neste artigo está sendo apresentada apenas a primeira etapa, ou seja, a análise das propostas/trabalhos de dois eventos. Contudo, vale salientar que, ambos os eventos exibem trabalhos de diversas áreas. Inicialmente para a seleção das propostas buscou-se pelo título ou palavras-chave onde consta o termo “álgebra”, o que resultou dessa primeira busca foi uma pequena quantidade de trabalhos. Então, novamente pesquisou-se pelas seguintes palavras-chave: “resolução de problemas”, “funções” e “equações”. Já nessa segunda busca ou mapeamento, foram encontradas uma quantidade maior de propostas que continham as diferentes concepções desejadas para a investigação. Diante das 136 propostas obtidas na busca dos dois eventos, foram selecionadas 17 (dezessete) propostas. Após a leitura, apenas 4 (quatro) foram selecionadas para este artigo.

Tabela 1

Propostas selecionadas dos eventos CONEDU e CONAPESC

Propostas	**Título da Proposta e autor(es)**	**Anais do evento e local publicado**	**Ano**
P_1	**Proposta:** Ensino-Aprendizagem de álgebra através da Resolução de Problemas: uma proposta para educação de alunos surdos. **Autores:** Virgínia Eugênia da Silva; Dennefe Vicencia Bendito e Eduardo Gomes Onofre.	CONEDU João Pessoal/PB	2017

P_2	**Proposta:** A Resolução de Problemas como estratégia para desenvolver a criatividade, envolvendo um problema de conjuntos. **Autores:** Beatriz Rodrigues de Almeida e Roger Ruben Huaman Huanca.	CONEDU João Pessoal/PB	2017
P_3	**Proposta:** Aprendendo volume e aplicando no sistema de captação e armazenamento de água de chuva da escola Vidal de Negreiros: uma intervenção no 6º ano. **Autores:** Vanessa Lays Oliveira dos Santos; Fabíola da Cruz Martins; Vilmara Luiza Almeida Cabral; Emily de Vasconcelos Santos.	CONAPESC Campina Grande/PB	2017
P_4	**Proposta:** Estratégias utilizadas por licenciandos em Matemática na Resolução de Problemas de Partilha. **Autor:** Estevão Luis Paiva Da Silva.	CONAPESC Campina Grande/PB	2016

Fonte: Organizado pela primeira autora.

Resultados obtidos

Durante a coleta de dados da pesquisa, foram selecionadas para a investigação, quatro propostas tratando da aprendizagem de álgebra. A seguir, são apresentados os resultados obtidos após o levantamento das propostas.

A **P_1** foi trabalhada na concepção da álgebra como aritmética generalizada. Segundo os autores dessa proposta, geralmente, as dificuldades encontradas tendem a ser: foco da atividade algébrica e a natureza das respostas, o uso da notação e da convenção das variáveis e os tipos de relações e métodos usados em aritmética. Entretanto, nessa proposta a grande dificuldade dos alunos aprenderem álgebra, está inteiramente relacionada às dificuldades já apresentadas no estudo da aritmética. Os autores da P_1 têm como objetivo nesta proposta relatar e entender como o aluno surdo a partir de suas experiências, poderá construir seu conhecimento e assim, por sua vez, sua autonomia. Os relatos apresentados na P_1 dizem que a Resolução de Problemas juntamente com a álgebra assume um papel importante no processo de Ensino-Aprendizagem dos alunos, independente das suas particularidades. Neste caso, optou-se por interpretar as atividades levando, também, a estratégia de resolução das atividades por alguns alunos surdos.

Observa-se na **P_2** conceitos que associam as concepções da álgebra com os estudos de relações entre grandezas, pois, na linguagem da teoria dos conjuntos, x e y são consideradas variáveis mudas já que qualquer símbolo poderia ser substituído em seu lugar. A proposta P_2 teve como objetivo expor as possibilidades da Resolução de Problemas, além de ampliar a criatividade do aluno, envolvendo um problema de conjuntos. Os autores desta proposta trabalharam de maneira significativa, reflexiva e colaborativamente as potencialidades do ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas.

A **P_3** pode ser categorizada na concepção da álgebra como estudos de relações entre grandezas, pois, esta proposta está relacionada à forma prática do cálculo de áreas e volume, interpretação e resolução de problemas e construções de gráficos. Além disso, trata-se de um projeto que concorreu ao prêmio Mestres da Educação, no ano de 2015, desenvolvido para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental da escola estadual Vidal de Negreiros – Cuité/PB. A P_3 também enfatiza a relação das aplicações cotidianas da álgebra, por exemplo, na questão da falta de água, onde calcularam o volume do reservatório da escola e obtiveram como resultado, uma capacidade para 90.000 litros de água e apesar da utilização do número π (pi), não tiveram muitas dificuldades na resolução dos problemas. Comprovando-se que, nessa proposta houve a aprendizagem significativa dos alunos.

A quarta proposta tem relação à álgebra como estudo de métodos e procedimentos para resolver certos tipos de problemas. A pesquisa realizada pelo autor da $\mathbf{P}_4$ teve como objetivo investigar as estratégias utilizadas por licenciandos em matemática na resolução de problemas de partilha. Essa proposta utilizou um teste piloto "que já tinha sido aplicado no trabalho de Câmara e Oliveira (2010)", contendo sete problemas de partilha, que foram aplicados a três turmas do ensino superior no estado da Paraíba. O autor da P_4 propicia um confronto com outras propostas que dialogam sobre problemas algébricos, buscando verificar a influência das variáveis dos problemas de partilha – do número das relações, natureza das relações e do tipo encadeamento – no rendimento dos alunos, verificar a influência das variáveis dos problemas de partilha no tipo de estratégia adotada pelos licenciandos em matemática e comparar o rendimento e as estratégias utilizadas pelos alunos da graduação em matemática com os alunos do Ensino Fundamental I. Nesse sentido, o autor desta proposta trabalhou de maneira a investigar as dificuldades em resolver problemas de estrutura algébrica.

Considerações acerca dos dados coletados

Este trabalho está apenas no início, mas acredita-se que o conhecimento das diversas maneiras de abordar o encantamento como instrumento para a aprendizagem de álgebra é um trabalho de grande importância, e, neste artigo foram apresentados resultados parciais da pesquisa: "Analisando o conhecimento da álgebra e a resolução de problemas: uma pesquisa do encantamento à aprendizagem". Os PCN's colocam o estudo da álgebra como um espaço bastante significativo para que os estudantes desenvolvam e exercitem suas capacidades de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas (BRASIL, 1998).

Apesar da crescente dificuldade de aprender a álgebra, foi possível constatar que as propostas selecionadas para este artigo, buscavam entender qual seriam as dificuldades quanto à aprendizagem desta, obtendo como resultado a identificação das dificuldades associada à aprendizagem em aritmética. No entanto, outras propostas buscavam soluções satisfatórias de sanar estas dificuldades do alunado por meio de metodologias como a Resolução de Problemas. Contudo, todos os autores estão preocupados com a aprendizagem significativa do alunado com o assunto Álgebra.

Destacamos como exemplos os estudos a respeito de notação, que caracterizam um estudo de aritmética generalizada; a resolução de equações caracterizadas pelo estudo de técnicas; e a relação entre áreas e dimensões de uma figura geométrica, relações entre grandezas.

Ao finalizar este trabalho, esperamos que as futuras investigações tomem por base os resultados desta pesquisa contribuindo assim, para uma aprendizagem de álgebra cada vez mais eficiente e significativa.

Referências e Bibliografia

Almeida, B.R; Huanca, R.R.H. (2017). A Resolução de Problemas como estratégia para desenvolver a criatividade, envolvendo um problema de conjuntos. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO (CONEDU). João Pessoa. *Anais eletrônicos* João Pessoa: Realize, Disponível em:

<http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV073_MD1_SA13_ID8569_16102017105233.pdf>. Acesso em: 13 out. 2018.

Alves-Mazzotti, A. (1998). Parte II – O Método nas Ciências Sociais. In: A. J. Alves-Mazzotti, F. Gewamdsznadjder. *O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa*. São Paulo: Pioneira.

Bos, H.(2001). *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction.* New York: Springer Science+Business Media.

Brasil.(1998). Ministério da Educação e Desporto. Secretaria de Ensino Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais – terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Matemática. Brasília, DF: MEC, SEF.

Derbyshire, J. (2006). *Unknown quantity: a real and imaginary history of algebra*. USA: Penguim book Plume.

Goldenberg, M. (2003). *A arte de pesquisar*: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 7. ed. Rio de Janeiro: Editora Record.

House, P. A. Reformular a álgebra da escola média: por que e como? In: Coxford, A. F.; shulte, A. P (org.). *As ideias da álgebra*. (pp. 1-8). Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo.

Rashed, R. (1994). *The development of arabic mathematics*: between arithmetic and algebra. Tradução A. F. W. Armstrong. USA: Springer Science+Business Media Dordrecht.

SantoS, V. L. O; Martins, F.C.; Cabral, V.L.A.; Santos, E.V. (2017). Aprendendo volume e aplicando no sistema de captação e armazenamento de água de chuva da escola Vidal de Negreiros: uma intervenção no 6º ano. In: CONGRESSO NACIONAL DE PESQUISA E ENSINO EM CIÊNCIAS (CONAPESC), Campina Grande. *Anais eletrônicos.* Campina Grande: Realize, 2017. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/conapesc/trabalhos/TRABALHO_EV070_MD1_SA1_ID1037_30042017200236.pdf>**.** Acesso em: 13 out. 2018.

Schemmel, M.(2008). *The english Galileo*: Thomas Harriot's work on motion as an example of preclassical mechanics. USA: Springer Science + Business Media B.V.,v. 268. (BOSTON STUDIES IN THE PHILOSOPHY OF SCIENCE).

Silva, E.L.P. (2016). Estratégias utilizadas por licenciandos em Matemática na Resolução de Problemas de Partilha. In: CONGRESSO NACIONAL DE PESQUISA E ENSINO EM CIÊNCIAS (CONAPESC), Campina Grande. *Anais eletrônicos.* Campina Grande: Realize, 2016. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/conapesc/trabalhos/TRABALHO_EV058_MD1_SA91_ID1841_05052016133155.pdf>. Acesso em: 13 out. 2018.

Silva, V.E.; Bendito,D.V.; Onofre, E.G. (2017). Ensino-Aprendizagem de álgebra através da Resolução De Problemas: uma proposta para educação de alunos surdos. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO (CONEDU, João Pessoa. *Anais eletrônicos.* João Pessoa: Realize, 2017. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV073_MD1_SA13_ID1737_17102017131453.pdf>. Acesso em: 13 out. 2018.

Stedall, J. (2003). *The Greate Invention of Algebra*: Thomas Harriot's treatise on equations. New York: Oxford University Press.

Usiskin, Z. (1995). Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: Coxford, A. F.; shulte, A. P (org.). *As ideias da álgebra*. (pp. 9-22). Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Propuesta para la enseñanza/aprendizaje de las coordenadas polares con GeoGebra

Ronny **Vicent** Millán
Departamento de Matemática, Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Maturín
Venezuela
ronnys85@hotmail.com
Fray **Granado** Pérez
Universidad Nacional Experimental de Guayana
Venezuela
frdgp@hotmail.com
Anner **Pariche** Valdivieso
Universidad Nacional Experimental de Guayana
Venezuela
alpv2021@hotmail.com

Resumen

En matemática suele obviarse la enseñanza de sistemas de coordenadas distintos al cartesiano, particularmente el sistema de coordenadas polares. Consecuentemente, algunas aplicaciones del cálculo y en otras áreas no se desarrollan completamente. Partiendo de ello, en este trabajo presentamos la generación de una propuesta didáctica para abordar esta temática con el uso del software GeoGebra, desarrollado a partir de las ventajas de uso de las TIC y con enfoque en el autoaprendizaje. Metodológicamente es una revisión documental de trabajos previos, algunas wiki y videos tutoriales sobre el uso del software GeoGebra. En esta ponencia sólo mostraremos algunas alternativas didácticas surgidas con el uso del software. Al final se desarrolla una experiencia que se fundamente en tres momentos: 1) motivación al estudio; 2) ensayo, indagación y trabajo grupal y 3) la necesidad de incentivar una evaluación continua a través del uso del software.

Palabras clave: coordenadas polares, GeoGebra, autoaprendizaje, propuesta de clase.

Introducción

El sistema de coordenadas cartesianas goza de un lugar privilegiado en el estudio de los conceptos matemáticos (Bocco & Villarroel, 1994), de allí que no es inverosímil que en los cursos de matemática del nivel de Educación Media en Venezuela (preuniversitaria) ocurre que se trabaje casi exclusivamente con ese sistema, excluyendo otros, como el sistema de coordenadas polares (Vicent, 2016), a pesar de ello, hay que señalar que los estudiantes que transitan ese nivel sí tienen acercamientos a éste último, sobre todo en el estudio de la trigonometría en 4to año de Educación Media, pero trabajados en coordenadas cartesianas.

En consecuencia, cuando los docentes de matemática intentan movilizar lo aprendido en coordenadas cartesianas a polares, se enfrentan a que la mayoría de sus alumnos desconocen tal referencia (Vicent, 2016), por lo que éste debe buscar alternativas de enseñanza que coadyuven en la formación matemática de los aprendices. Tal tarea supone un esfuerzo en la enseñanza de este tópico necesario en la formación disciplinar, sobre todo porque el estudio de algunas curvas es más sencillo en coordenadas polares (Barrantes, 2011; Bocco & Villarroel, 1994; Vicent, 2016), además que abre el camino para el estudio de aplicaciones en otros sistemas de coordenadas, tales como las paramétricas, cilíndricas y esféricas.

Asumiendo esa tarea, el propósito de la investigación consistió en generar alternativas de enseñanza para la introducción de las coordenadas polares a través de una forma didáctica, con el uso de recursos computarizados, ya que éstos han demostrado ser medios adecuados en el estudio de la matemática (Delgado, Arrieta & Riveros 2009; García, 2011; Granado, 2016). Para tal fin, hemos recurrido al software educativo GeoGebra, ello porque diversos investigadores reportan resultados favorables de su empleo en la enseñanza/aprendizaje de ese tópico (Baptista, 2017; Barrantes, 2011; Chau & Sánchez, 2010; Pérez, 2014; Vicent, 2016).

Las TIC en la enseñanza de la matemática

El Uso de las TIC en la enseñanza de la matemática ha venido incorporándose en las instituciones educativas. Delgado, Arrieta & Riveros (2009) resaltan que las TIC son recursos esenciales para centrar la educación en el alumno, en el conocimiento, en la evaluación y en la comunidad; sugieren el aprovechamiento de los entornos virtuales en siete principios básicos con el uso de las TIC: propiciar el contacto entre estudiantes y profesores, fomentar la cooperación entre los estudiantes, propiciar el aprendizaje activo, proporcionar la retroalimentación, enfatizar el uso apropiado del tiempo, propiciar altas expectativas en el estudiante y respetar los diversos estilos de aprendizajes. Particularmente, para esta propuesta, se utilizó el software educativo GeoGebra, que ha demostrado ser versátil en el estudio de la matemática.

El logro de la propuesta dependerá de poner en marcha estrategias que fomenten el Autoaprendizaje a través del uso de las TIC. En el Informe de Seguimiento de la Educación para Todos en el Mundo de la UNESCO (2014), se hace hincapié en capacitar al alumno en pro de conseguir aprendizajes significativos y duraderos desde su propio accionar, dando origen a un paradigma pedagógico focalizado en el aprendizaje autónomo del estudiante, que precisa descubrir y desenvolver las cualidades intrínsecas de cada persona, con el fin de que desarrolle su potencial personal y profesional. La National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2015), también propone una enseñanza matemática enfocada en el aprendizaje, que promueva el libre intercambio de ideas, donde fluya la comunicación entre los actores que intervienen en los procesos educativos, luego, el aprendizaje de la matemática será más significativo cuando se derive del trabajo del estudiante, participando activamente, explorando y ensayando.

Algunos investigadores coinciden en que los medios interactivos son adecuados para el autoaprendizaje de las matemáticas (Berral & Serrano, 2004; Granados, 2016), y afirman que se requiere que los docentes inciten la experimentación, la curiosidad, la investigación, el conjeturar, verificar, entre otras actividades. Precisamente las TIC se han convertido en una clave en la transformación educativa, por ello, coincidimos con la NCTM (2015, p.78) en que el software representa una alternativa que integra a la tecnología con "las herramientas matemáticas como un recurso esencial con el objeto de auxiliar a los estudiantes a aprender, darle sentido a las ideas matemáticas, razonar matemáticamente y a comunicar su pensamiento matemático"

Camino recorrido

La propuesta que se describe -en la siguiente sección- es el resultado de la revisión documental de trabajos previos, así como también de algunas wiki y videos tutoriales sobre el uso del software GeoGebra. La información recopilada se organizó en tres fases: 1) de preparación y reconocimiento de la herramienta, 2) desarrollo de las ideas para la introducción al estudio de las coordenadas polares y 3) evaluación. En esta parte de la investigación sólo se presentan algunas alternativas didácticas surgidas con el uso del software, esto como resultado de las tres fases mencionadas y de algunos ensayos previos realizados por los investigadores con estudiantes que se inician en el nivel universitario. Para efectos de la ponencia, la experiencia se describirá como una especie de guía didáctica, para que pueda ser usada por otros docentes.

Propuesta de clase

A continuación describimos nuestra propuesta de clase. Se sugieren tres fases, llamadas 1) *fase preparativa*, de reconocimiento de la herramienta, 2) *fase de desarrollo*, que enfatiza el uso del software en la enseñanza/aprendizaje del tópico coordenadas polares y 3) *fase de cierre*, consistente en la evaluación de las competencias adquiridas:

Fase Preparativa

Antes del estudio de las coordenadas polares, posiblemente ya el alumno conoce el sistema de coordenadas cartesianas, así como también el uso del software GeoGebra, adquiriendo cierta habilidad con la herramienta y su lenguaje, en caso contrario, será necesario que en la fase preparativa presentemos los comandos y menús de entradas de la herramienta.

Actividad 0. Reconocimiento de los comandos y menús de entrada.

Una vez instalado y abierto el software (se trabajó con la versión GeoGebra 5.0), observaremos dos vistas, una Vista Algebraica y una Vista Gráfica, también un Menú de Accesos Directo, y en la parte inferior la Barra de Entrada.

Es importante que el alumno conozca estos comandos y menús de entrada para que la comunicación, en las diversas actividades, sea fluida; además, es oportuno que esta *actividad* vaya *vinculada* a la Actividad 1, esto es, hacia una motivación al estudio de la temática.

Actividad 1. Motivación al estudio del sistema de coordenadas polares.

En esta fase será importante que las estrategias que el docente exhiba permitan la *construcción de los conocimientos*, el *ensayo* o *experimentación* y el *autoaprendizaje*. Para motivar el estudio del sistema de coordenadas polares proponemos emprender un micro-proyecto. Este partirá con una tarea inicial, que consistirá en el análisis de alguna relación matemática expresada en coordenadas cartesianas, y que evidentemente su análisis sea más sencillo en polares, por ejemplo, la expresión cartesiana de la cardioide: $(x^2+y^2+2x)^2 = 4(x^2+y^2)$. Esta tarea deberá ser previamente preparada por grupos de estudiantes, donde el alumno movilice sus competencias matemáticas para reconocer dominio y rango de la relación, análisis de la gráfica, intervalos de crecimientos, entre otros; es importante que éste realice la gráfica a mano, con herramientas de graficación. En un segundo momento, la tarea la hilaremos al reconocimiento de los comandos y menús del software y a la graficación de la relación dada; para ello, introducimos la expresión cartesiana en la Barra de Entrada del software y comparamos sus características con lo ya obtenido; finalmente, el docente inducirá la importancia del nuevo sistema a estudiar a través de la *pregunta* y la *discusión*.

Fase de Desarrollo

En esta fase habrá que inducir los conceptos, definiciones, condiciones, propiedades y otros, mediados con el software; también, generar conclusiones, tomar notas para el micro-proyecto, alternar el uso del software con el cálculo manual, generar dudas, reflexiones y preguntas, forjar la evaluación continua y motivar el trabajo en equipo.

Actividad 2. Introducción al sistema de coordenadas polares.

Iniciemos con ubicar puntos en el GeoGebra, supongamos un punto cartesiano $P(3,4)$. Abrimos una nueva ventana GeoGebra, en la Barra de Accesos Directo seleccionamos Punto, ubicamos cualquier punto del plano de la herramienta, y, haciendo doble clic sobre él, modificamos al valor deseado, en propiedades podemos renombrarlo a P. Ahora, calculemos la distancia desde el Origen $O(0,0)$ al punto P, haciendo lo siguiente: ubicamos en el software el punto O (procedimiento análogo al realizado con el punto P); luego, para calcular la distancia entre dos puntos seguimos la ruta: Menú de Accesos Directos–Ángulo (desplegamos)–Distancia o Longitud–Clic en O–Clic en P y en la Vista Algebraica aparecerá la distancia. Aquí ya hemos obtenido un valor referencial (distancia OP) al punto dado, sin embargo sabemos que esa distancia no es única de ese punto, entonces habrá que considerar otra(s) referencia(s); dejamos abierta la discusión y solicitamos anotar las conclusiones a la que se llegue, sobre todo en torno a otros puntos y sus distancias, así como también sobre la unicidad de esta distancia.

Ahora bien, posiblemente otra referencia que se asomará en la discusión, o que el mismo docente inducirá, será el hecho de que cualquier punto en el plano cartesiano determina diversos ángulos, en particular el lado OP y el semieje positivo de las abscisas determina un ángulo. Éste se puede medir con el uso de la herramienta, siguiendo la siguiente ruta: primero agreguemos un punto cualquiera sobre el semieje positivo de las abscisas, digamos $A(3,0)$, y luego: Menú de Accesos Directos–Ángulo–Clic en A–Clic en O–Clic en P, y en Vista Algebraica aparece la medida del ángulo α, que podemos renombrar a θ; es importante que, si tenemos tiempo suficiente, se genere una discusión en torno al cálculo manual de la distancia anterior y del ángulo a través de las herramientas adquiridas en el estudio de la Trigonometría, alternando así el uso del software con las competencias matemáticas previas; asimismo, inducir conclusiones sobre la posibilidad de que estos dos valores que hemos obtenido sean suficientes para determinar un punto en el plano; también interrogarse sobre: ¿es este ángulo θ, único?, ¿qué otras posibilidades hay?; estas dudas darán pie a *activar competencias previas* en matemática.

Entonces, el alumno, con la guía del docente, extrapola y comprueba lo estudiado con el uso de la herramienta y su experimentación y generalización. El proceso deberá ser fundamentalmente inductivo, partiendo del ejemplo; asimismo, es necesario permitir que sea el estudiante quien deduzca los elementos conceptuales y procedimentales, esto es, él (el alumno) debe percatarse por ejemplo, que será suficiente, para el nuevo sistemas de coordenadas, el punto origen y el semieje positivo de las abscisas; para estos dos elementos el docente destacará que al punto O (origen) lo llamaremos polo y al semieje positivo "eje polar" y la distancia obtenida la designaremos con la letra r y lo llamaremos "radio vector", asimismo, θ es el ángulo polar o argumento principal del punto P. Concluimos que, la distancia r y el ángulo θ determinan un par (r,θ)que representa gráficamente un punto en un plano llamado coordenadas polares del punto P; por tanto, hay una relación entre el sistema de coordenadas cartesianas y el polar.

Actividad 3. Consideraciones, ideas, propiedades y transformación de coordenadas.

Lo ideal será que el alumno construya su propia experiencia, por ello, esta actividad se sugiere como tarea evaluativa, contentiva al micro-proyecto. El alumno recurrirá al software y a sus competencias en Trigonometría. Lo primero es comprobar con la herramienta la transformación de un punto cartesiano a polar; para ello seguimos lo siguiente: clic derecho sobre el punto y seleccionamos Coordenadas polares, y verificamos con los valores ya calculados; asimismo, podemos agregar la transformación de otros posibles puntos, como A y O o los puntos cartesianos $B(5{,}0)$, $C(-5{,}0)$, $D(0{,}5)$, $E(0,-5)$ y discutir en torno a ello, además alternar la tarea con el cálculo manual y la herramienta; asimismo, puede inducir otras ideas a través de inquietar al alumno con preguntas como: 1) ¿cuál sería la medida de cada ángulo si se mide en sentido contrario e igual a las manecillas del reloj?, ¿qué sentido usa la herramienta?, ¿qué ocurre en la herramienta si agrego un ángulo negativo como referencia; por ejemplo, al comparar los puntos polares $F(3{,}45°)$ y $G(3,-45°)$?; 2) ubique en la herramienta los puntos polares $H(5{,}60°), I(5{,}420°)$, $J(5{,}780°)$, $K(5,-315°)$ y describa ¿qué ocurre?, ¿hay allí otras posibilidades de puntos con esa(s) misma(s) característica(s)?, ¿por qué no?, o si las hay ¿cuántas posibilidades hay?, y ¿cuál expresión generaliza todos esos puntos polares?; 3) ubique en la herramienta el punto polar $L(-3{,}45°)$ y compare con el punto $F(3{,}45°)$ y responda ¿qué ocurre cuando el radio vector es negativo?, determine otras representaciones para los mismos puntos; y 4) compare el punto polar $F(3{,}45°)$ con $M(-3; 225°)$, $N(-3; 585°)$, $Q(-3; -135°)$ y responder ¿qué ocurre?, ¿hay allí otras posibilidades de puntos con esa(s) misma(s) característica(s)?, ¿por qué no?, o si las hay ¿cuántas posibilidades hay?, y ¿cuál expresión generaliza todos esos puntos polares?; al final, durante la discusión de esta tarea es importante que el docente induzca a comprender que el sistema de coordenadas polares no es biunívoco, ya que un punto cartesiano puede estar representado por infinitos pares de puntos polares.

Estas ideas posiblemente permearan en que el alumno deduzca las relaciones para transformar de cartesianas a polares y viceversa. Para esta actividad el docente se arma de estrategias que permitan canalizar y construir tales ideas; sugerimos hacer transformaciones manuales, tanto de puntos como de expresiones algebraicas, para que el alumno consiga tales habilidades, por ejemplo, transformar la ecuación de la cardioide que hemos analizado.

Actividad 4. Trazado de curvas en coordenadas polares.

Primero proponemos el trazado de alguna curva a mano, por ejemplo la cardioide ya estudiada en su forma polar, $r = 2(1 - \cos\theta)$. En caso de que no se cuente con la hoja de gráficos polares, el software permite elaborar una, así: en una nueva ventada, quitamos la Vista Algebraica y seguimos la siguiente ruta: Menú Principal–Opciones–Avanzado, en Preferencias, seleccionamos Preferencia–Vista Gráfica, y seleccionamos la opción Cuadrícula, en Tipo de cuadrícula seleccionamos Polar, marcamos cuadrícula visible y distancia; para el valor r sugerimos la unidad y el ángulo $\theta = \frac{\pi}{12}$, para visualizar líneas rectas que demarcan cada 15°, allí mismo puede cambiar el estilo y color del trazo si lo desea, así como también modificar otras opciones, obteniendo una página que podremos imprimir para graficar.

Ahora, para trazar curvas polares en GeoGebra, podemos elaborar una página para tal fin. En la construcción de la página es ideal que el alumno participe. En esta parte, las ideas que presentaremos son de Martínez-Esparza (2004); asimismo, es importante mencionar que para graficar curvas en coordenadas polares en GeoGebra se trabaja con Curvas Paramétricas.

Procederemos así: abrimos nueva ventana, activamos la Vista Algebraica, Vista Gráfica y una Vista Gráfica 2. Dejaremos la Vista Gráfica 2 totalmente en blanco, utilizando Preferencias.

Luego, definimos unos deslizadores. Los deslizadores permiten cambiar ciertos valores de acuerdo a los conocimientos ya adquiridos. Agregaremos dos deslizadores, así: Accesos Directos-Deslizador, y clic en Vista Gráfica 2, aparece una ventana para modificar los valores del Deslizador (nombre (a y b respectivamente), y valores Mín.:-100 y Máx.:100, en animación sugerimos Creciente). Ahora, crearemos Cajones de Entrada asociados a los dos deslizadores; ellos permitirán definir el intervalo de dominio de nuestra gráfica. Nuevamente, Accesos Directo-Deslizadores (desplegamos)-Casilla de Entrada, luego clic en Vista Gráfica 2 y aparecerá una nueva ventada, en Rótulo modificar por "Inferior" y lo vinculamos al objeto"a", análogamente, agregamos otra Caja de Entrada, denominada "Superior" y vinculamos a "b".

Ahora definimos las funciones. Vamos a tomar tres ecuaciones en coordenadas polares, que podrán ser modificables al final (tomaremos las consideradas por Martínez-Esparza): $f_1(\theta) = 2$; $f_2(\theta) = \frac{\theta}{3}$; $f_3(\theta) = \cos 5\theta$. Introducimos cada una en la Barra de Entrada; sus gráficas cartesianas se verán reflejadas en la Vista Gráfica 2, pero interesa que estén en la Vista Gráfica "principal", para ello seleccionamos cada función con el botón derecho del mouse y damos clic en Propiedades–Propiedades de la función–Pestaña Avanzado, allí marcamos Vista Gráfica y desmarcamos Vista Gráfica 2. Obsérvese que las gráficas están dadas en forma cartesiana, de allí que es conveniente ocultarlas (para ocultar hacemos clic derecho sobre la gráfica y desmarcamos Objeto Visible). Ahora, definimos curvas paramétricas para cada función. Recordemos que una buena parametrización es considerar la relación $r^2 = x^2 + y^2$; entonces; podemos escribir las curvas paramétricas: $\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases}$, donde r y θ son valores ya estudiados.

Es esa parametrización la que utiliza GeoGebra para gráficas en Coordenadas Polares. Se procede: en la Barra de Entrada se introduce la sentencia "$Curv$a", y seleccionamos la opción *Curva(<Expresión>, <Expresión>, <Parámetro>, <Valor inicial>, <Valor final>)*; para la función 1, se introduce el primer parámetro, esto es el valor de x , es decir $f_1(t).\cos t$, la segunda expresión es el valor de y, o sea $f_1(t).\sin t$, luego el parámetro que hemos escogido, que es t, y el valor inicial y final serán los deslizadores "a" y "b". Una vez introducidas, con el botón derecho del mouse podemos renombrar como Curva_1, Curva_2 y Curva_3, respectivamente.

Es importante entender qué función cumplen los deslizadores matemáticamente hablando. Recuerde que el dominio de curvas paramétricas está dado en valores de números reales. La idea es que el parámetro t vaya tomando valores en su dominio para que construya la gráfica. Lo importante en polares es que ubique cada punto para el ángulo θ desde 0 hasta 2π. Entonces, podemos fijar el deslizador "a" en cero y mover el deslizador "b" hasta aproximadamente $2\pi \approx 6{,}3$, el cual podemos seguir aumentando, pero que, en algunas curvas polares, no tiene sentido. Entonces, el deslizador "a" da el valor inicial para el parámetro t y el deslizador "b" es el valor final; esto sugiere que el valor del deslizador "b" no puede ser mayor que el valor del deslizador "a"; para que esto último no ocurra hacemos lo siguiente: sobre el deslizador "b" seleccionarlo con el botón derecho del mouse Propiedades, y colocamos como valor mínimo "a", esto garantiza que el valor de "b" nunca podrá ser mayor que el valor de "a".

Ahora construyamos Cajones de Entrada asociados a las funciones dadas. Esto es con la intención de ocultar algunos comando, y que el alumno interactúe con el programa. Crearemos casillas de entrada con los nombres Frunción1, Función2 y Función3, respectivamente, así: Accesos Directo-Deslizador (desplegamos)- Casilla de Entrada, hacemos clic en Vista Gráfica 2 y nos aparece una ventana denominada CajaDeEntrada, en Título colocamos, por ejemplo para la segunda función, Función_2(θ)=, y lo vinculamos a la función correspondiente. Finalmente, ocultamos la vista algebraica, y estamos listos para trabajar con nuestros estudiantes.

Las opciones de funciones son las que nos permite cambiar a nuevas funciones, los deslizadores permiten cambiar los valores del parámetro para que se observe la construcción; podemos visibilizar alguna gráfica o invisibilizarla, dependerá de lo que vayamos a trabajar. Ahora juguemos con la página ya construida, y empecemos a ver transformaciones, cambios, diferencias, intersecciones de curvas, entre otros, para luego emitir algunas observaciones; además, podemos generar una discusión sobre parametrización, valor final e inicial, entre otros.

Fase de Cierre

Para la actividad en la fase de cierre podemos retar al estudiante con ejercicios y problemas de gráficos polares y su estudio; por ejemplo, solicitar que con la ayuda del GeoGebra, construya y compare las gráficas de funciones elementales en coordenadas cartesianas y polares y generar la discusión, como: a) $f(x) = \frac{2}{x}; con\ x \neq 0$ con $f(\theta) = \frac{2}{\theta}, con\ \theta > 0$; b) $f(x) = 2.\cos 5x$ con $f(\theta) = 2.\cos 5\theta$. También, podemos estudiar algunas curvas polares elementales; por ejemplo, trazar la gráfica de la curva cuya ecuación polar es $r = 2(1 - \cos\theta)$; e inquietar sobre ¿qué ocurre si cambiamos el signo menos $(-)$ por más $(+)$?, verificar propiedades, cortes con el eje de $90°$, con el eje polar y su prolongación, simetría respecto a los ejes, intersección de esta curva con otras, determinar su expresión algebraica, definirla como lugar geométrico, etcétera. Cada una de las actividades será parte del micro-proyecto. Las tareas individuales y grupales serán fundamentales para evaluar el avance de los estudiantes, por lo que, en el cierre, la evaluación continua de cada una de las actividades deberán quedar registradas.

Consideraciones finales

El uso de las herramientas TIC en matemática, particularmente del GeoGebra, requerirá de una preparación oportuna del docente. En esta ponencia, que es parte de una investigación más amplia, se muestra las bondades de la implementación de ese software educativo en la enseñanza y el aprendizaje del estudio de las coordenadas polares; aquí resaltamos los siguientes aspectos: 1) las actividades deben ser vinculantes y permitir conocer a profundidad la herramienta y los objetos matemáticos y sus significados conceptuales y procedimentales; 2) es imperante promover, a través de las TIC, la construcción de los conocimientos a través de conjeturar propiedades; 3) el autoaprendizaje será efectivo en la medida que el docente reconozca las debilidades y fortalezas de sus alumnos, así como del seguimiento oportuno y valoración de las tareas; 4) la pregunta, la discusión, argumentación, el trabajo descriptivo, el análisis, entre otras, son herramientas que están ligadas al uso de software; 5) alternar el trabajo de cálculo manual y la comprobación con la herramienta o viceversa, será clave para que el alumno sienta confianza en sí mismo; 6) cualquier contenido de matemática debe recaer en activar las competencias previas al tema a estudiar, para ello se extrapola a través de la generalización.; 7) todo el proceso deberá ser fundamentalmente inductivo, partiendo del ejemplo; 8) el docente debe promueve estrategias formativas que permitan canalizar y construir las ideas y 9) la evaluación deberá ser continua, en cada una de las actividades.

Referencias y bibliografía

Barrantes, H. (2011). Integrales en coordenadas polares y paramétricas. Recuperado de http://repositorio.uned.ac.cr/reuned/bitstream/120809/451/1/MC0178%20C%C3%A1lculo%20Integral%20-%202011%20-%20Matem%C3%A1tica.pdf

Baptista, F. T. (2017). *O ensino de coordenadas polares através do software GeoGebra* (Tesis de maestría). Universidade Estadual de Campinas, Brasil. Recuperado de: http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/325375

Berral Yerón, M. J. & Serrano Gómez, I. (2004). Cambiando la práctica docente (ordenadores, autoaprendizaje, interactividad...) para alcanzar el fin (aprender matemáticas). *Res Novae Cordubenses: estudios de calidad e innovación de la Universidad de Córdoba*, 2, 217-236. Recuperado de: https://helvia.uco.es/xmlui/bitstream/handle/10396/4995/Resnovae2_Berral.pdf?sequence=1

Bocco, M. & Villarroel, M. (1994). Coordenadas Cartesianas: ¿La única opción? *Revista de Educación Matemática*, 9(1), 18-48.

Chau Pérez, N. J. & Sánchez Gutiérrez, R. W. (2010). Coordenadas polares: curvas maravillosas. Revista Electrónica En Blanco y Negro, 1(1), 1-27. Recuperado de: http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/enblancoynegro/article/view/2191/2122

Delgado, M., Arrieta, X. & Riveros, V. (2009). Uso de las TIC en educación, una propuesta para su optimizacióh. *Revista Omnia*, 15(3), 58-77. Recuperado de: http://www.produccioncientifica.luz.edu.ve/index.php/omnia/article/download/7291/7279

García López, M. (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula* (Tesis de doctorado). Universidad de Almería, España. Recuperado de: https://archive.geogebra.org/en/upload/files/Tesis_MariadelMarGarciaLopez.pdf

Granado Pérez, F. (2016). *Uso de las TIC en el aprendizaje autónomo de la matemática* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maturín, Venezuela.

Martínez-Esparza, C. M. (2004). Mis curvas preferidas. Representación de curvas en coordenadas polares con GeoGebra. Recuperado de: http://www.sociedadelainformacion.com/47/motos.pdf

National Council of teachers of mathematics. (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos*. México: Editando libros S.A.

Pérez Acuña, U.J. (2014). *Estrategia didáctica para introducir las coordenadas polares y sus aplicaciones en la representación y análisis de la parábola y la elipse* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Colombia. Recuperado de: http://www.bdigital.unal.edu.co/48870/1/9273626.2015.pdf

UNESCO. (2014). *Informe de seguimiento de la educación para todos en el mundo. Enseñanza y aprendizaje, lograr la calidad para todos*. Recuperado de: http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002256/225654s.pdf

Vicent Millán, R. J. (2016). *Estudio del Cálculo Integral en Coordenadas Polares: aportes desde las TIC* (Trabajo de ascenso). Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maturín, Venezuela.

Mat ou morra: uma atividade lúdica envolvendo enigmas matemáticos

Luciana Ávila **Rodrigues**[1,3]
Universidade de Brasília
Brasil
luavila83@gmail.com

Leonardo Melo **Batista**[2,3]
Universidade de Brasília
Brasil
mbleoeleo@gmail.com

José **Teixeira** Moura Júnior[3]
Universidade de Brasília
Brasil
zetexjr@gmail.com

Resumo

É frequente, em textos acadêmicos, a discussão sobre as dificuldades de aprendizagem de conteúdos matemáticos. Por outro lado, ampliam-se os estudos sobre metodologias alternativas de enfrentamento desse cenário. Esse trabalho relata resultados obtidos da execução de atividades lúdicas, desenvolvidas em oficinas, que envolveram soluções de enigmas matemáticos que permitiram exercitar e revisar conteúdos curriculares do Ensino Médio. Participaram dessas atividades estudantes do Ensino Médio de escolas públicas do Distrito Federal e ingressantes no curso de Graduação em Matemática da Universidade de Brasília (UnB). A atividade foi

[1] Professora Doutora em Matemática e Tutora do Programa de Educação Tutorial em Matemática da Universidade de Brasília (PET MAT UnB).
[2] Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET).
[3] Parcialmente financiado por FNDE/MEC/PET.

proposta e executada por integrantes do Programa de Educação Tutorial em Matemática (PET MAT) da UnB. Como suporte para as discussões e para a fundamentação teórica foram usados os trabalhos de Tamarozzi (2001) e Terada (1998). Os resultados mostram que a maioria dos estudantes conseguiram resolver os problemas propostos e se mostraram interessados e motivados. Além disso, o material elaborado serve de apoio para profesores do Ensino Médio.

Palavras-chave: educação, Matemática, lúdico, jogos, Ensino Médio.

Introdução

É frequente, em textos acadêmicos, a discussão sobre as dificuldades de aprendizagem de conteúdos matemáticos. Parte dessas dificuldades está associada ao fato de que a maioria das metodologias de ensino da Matemática se reduz a um modelo de aulas expositivas, teóricas e abstratas no qual o professor se torna o centro e o aluno tem um papel de mero expectador.

Buscando uma metodologia altenativa de ensino e aprendizagem da Matemática que permita ao aluno ser um agente ativo de seu aprendizado, propomos o presente trabalho que tem por objetivo relatar resultados obtidos da execução de atividades lúdicas, desenvolvidas em oficinas, que envolveram soluções de enigmas matemáticos e cujo material produzido poderá servir de apoio didático para profesores do Ensino Médio.

A busca pelo lúdico é, de fato, um norte a ser seguido quando se trata de melhorar a qualidade da construção do conhecimento matemático. D'Ambrosio (1996) ressalta que o papel do professor deve ser de gerenciar e facilitar o processo ensino e aprendizagem e, de uma forma natural, interagir com o aluno e contribuir com a construção do conhecimento do mesmo.

A ideia da oficina surgiu após analisar um desafio proposto em um livro do Ensino Médio onde era descrita uma situação em que uma pessoa queria passar uma informação secreta à outra e, para isso, ela a enviava duas matrizes 2x2 relacionadas em uma equação com uma incógnita. A partir daí, elaboramos uma oficina em que o conteúdo a ser abordado fizesse parte dos componentes curriculares do Ensino Médio e pudessem ser relacionados com enigmas criptografados. Os conteúdos escolhidos foram funções, funções inversas, matrizes, matrizes inversas e criptografía. Uma abordagem sobre esses conteúdos pode ser encontrada em Olgin (2011).

A criptografía é a arte ou ciência de escrever em códigos (Tamarozzi, 2001). Uma das formas de criptografar é utilizar a substituição de uma letra por um símbolo, chamado cifra. Cifrar é o ato de transformar dados em alguma forma ilegível com o objetivo de manter a informação escondida de qualquer pessoa não autorizada. Decifrar é o processo inverso, ou seja, transformar os dados criptografados na sua forma original, inteligível (Olgin, 2011).

Desde a antiguidade, os romanos já utilizavam essa técnica para transmitir códigos secretos dos seus planos de batalha. Nos dias atuais, o tema criptografía é utilizado na auditoria eletrônica, na autenticação de ordens eletrônicas de pagamentos, no código de verificação do ISBN, nos navegadores de internet, entre outras situações da vida cotidiana (Terada, 1988).

Além disso, atualmente, várias atividades envolvendo jogos de codificação são utilizadas como ferramentas de ensino. Moura (2008) defende que o jogo passa a ter o caráter de material de ensino quando considerado promotor de aprendizagem. A criança, colocada diante de situações lúdicas, aprende a estrutura lógica da brincadeira e, deste modo, aprende também a estrutura matemática presente (Moura, 2008, p.80).

A escolha do tema em estudo possibilita ao professor do Ensino Médio pesquisar e desenvolver atividades didáticas para exercitar e revisar conteúdos desenvolvidos em sala de aula através de atividades de codificação e decodificação, envolvendo conteúdos matemáticos do Ensino Médio (Olgin, 2011).

Metodologia

A atividade intitulada "Mat ou morra" surgiu a partir de um trabalho em grupo, de alunos do Programa de Educação Tutorial em Matemática da Universidade de Brasília, quando cursavam uma disciplina sobre o ensino da Álgebra. A proposta do trabalho era criar uma oficina para ser efetivamente realizada com alunos do Ensino Médio que relacionasse algum conteúdo preestabelecido no currículo de forma não tradicional e que promovesse uma aprendizagem ativa. A partir daí, a atividade foi aperfeiçoada e aprimorada e passou a fazer parte das atividades desenvolvidas pelo grupo PET MAT UnB.

A atividade foi aplicada em eventos como: a Semana Universitária da UnB, a Semana Nacional de Ciência e Tecnologia (SNCT), que em particular teve como tema "A matemática está em tudo", devido ao Biênio da Matemática (2017-2018). Nesses eventos, os participantes foram estudantes do Ensino Médio de escolas do Distrito Federal (DF) e estudantes de cursos de graduação da UnB. Além disso, a atividade foi aplicada nos Circuitos de Vivências em Educação Matemática, organizado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática do Distrito Federal (SBEM/DF), que teve como público estudantes do Ensino Médio de escolas públicas do DF.

O PET MAT realiza semestralmente a Recepção aos Calouros do curso de Matemática, uma atividade cadastrada como um projeto de extensão do Departamento de Matemática da UnB. Assim, a atividade "Mat ou morra" foi adaptada para fazer parte das apresentações da recepção aos calouros, deixando de conter apenas um enigma, para se tornar uma série de enigmas que devem ser solucionados pelos calouros durante a apresentação.

Conteúdo

Os conteúdos explorados fazem parte das componentes curriculares do Ensino Médio e permeiam entre funções, funções inversas, matrizes, matrizes inversas e conceitos de criptografía necessários para conversão de código Morse em letras do alfabeto. Observamos que as atividades propostas podem ser adaptadas com o objetivo de explorar outros componentes curriculares estudados.

A dinâmica da atividade funciona da seguinte maneira: dois estudantes formam uma dupla, são nomeados de Prisioneiro A e Prisioneiro B e ficam sentados um de frente para o outro, separados por uma mesa, cuja superfície é dividida por um muro feito de isopor, contendo escondida em sua estrutura uma tabela de conversão de código Morse em letras do alfabeto. Cada estudante possui um celular bloqueado com senha desconhecida.

Com o objetivo de desbloquear o celular do Prisioneiro B e parar um cronômetro que nele está ativo para então receber uma recompensa, os participantes deverão resolver os desafios propostos nas fichas correspondentes, cujas resoluções o guiarão a senha do celular que possuem. Um exemplo das fichas utilizadas pode ser visto na Figura 1. Nessas fichas foram explorados os conteúdos de função afim e criptografia.

Com o mesmo objetivo, de maneira alternativa, podemos propor os desafíos explorando o conceito de matrizes quadradas e criptografía. Como exemplo podemos utilizar as fichas ilustradas na Figura 2.

Figura 1. Exemplo de ficha do Prisioneiro A à esquerda, e, à direita, uma ficha do prisioneiro B, ambas adaptadas para função afim.

Prisioneiro A1

Atenção! Uma bomba relógio foi ligada. Você e seu companheiro têm 15 minutos. Siga as instruções a seguir para desarmá-la.

- Seu objetivo é desbloquear o celular a sua frente e transmitir a função-chave, que aparecerá ao destravar a tela, para seu parceiro.
- Para fazer isso, use a seguinte senha criptografada:

  -.. --.- . -.-.

- Sabendo que a função

  $$f : D \rightarrow C,$$

  definida por $f(x) = x + 2$, é uma função que manda números descriptografados do conjunto D para números criptografados do conjunto C, encontre a senha descriptografada. Use-a para desbloquear o celular, descubra a função e passe-a para sua dupla.

  OBS: FAVOR NÃO RISCAR AS FICHAS, ELAS SERÃO USADAS POR OUTROS PARTICIPANTES,OBRIGADO!

Prisioneiro B1

Atenção! Uma bomba relógio foi ligada. Você e seu companheiro têm 15 minutos. Siga as instruções a seguir para desarmá-la.

- Seu objetivo é desbloquear o celular a sua frente e para o cronômetro que nele estará rodando.
- Para fazer isso, use a seguinte senha criptografada:

  .... .--. -- .---

- Sabendo que a função

  $$g : D \rightarrow C,$$

  que o seu companheiro irá te passar, é uma função que manda números descriptografados do conjunto D para números criptografados do conjunto C. Encontre a senha descriptografada e use-a para desbloquear o celular.

  OBS: FAVOR NÃO RISCAR AS FICHAS, ELAS SERÃO USADAS POR OUTROS PARTICIPANTES,OBRIGADO!

Fonte: Relatório de pesquisa (2018).

Figura 2. Exemplo de ficha do Prisioneiro A à esquerda, e, à direita, uma ficha do prisioneiro B, ambas adaptadas para matrizes quadradas.

Prisioneiro A2

Atenção! Uma bomba relógio foi ligada. Você e seu companheiro têm 15 minutos. Siga as instruções a seguir para desarmá-la.

- Seu objetivo é desbloquear o celular a sua frente e transmitir a informação que aparecerá ao destravar a tela para seu parceiro.
- Para fazer isso, use a seguinte senha criptografada:

$$\begin{pmatrix} .... & - \\ ..-. & -. \end{pmatrix}$$

- Sejam P, D, C ∈ $M_{2x2}(R)$, onde C é matriz-chave, P a matriz criptografada e D a matriz descriptografada. Use a relação P = CD para encontrar as entradas da matriz D, organize a senha descriptografada na forma d_{11} d_{12} d_{21} d_{22} e use-a para desbloquear o celular.
- Matriz-chave:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

OBS. FAVOR NÃO RISCAR AS FICHAS, ELAS SERÃO USADAS POR OUTROS PARTICIPANTES,OBRIGADO!

Prisioneiro B2

Atenção! Uma bomba relógio foi ligada. Você e seu companheiro têm 15 minutos. Siga as instruções a seguir para desarmá-la.

- Seu objetivo é desbloquear o celular a sua frente e parar o cronômetro que nele está rodando.
- Para fazer isso, use a seguinte senha criptografada:

$$\begin{pmatrix} ... & ..- \\ -- & -. \end{pmatrix}$$

- Sejam P, D, C ∈ $M_{2x2}(R)$, onde C é matriz-chave que seu companheiro irá te passar, P a matriz criptografada e D a matriz descriptografada. Use a relação P = CD para encontrar as entradas da matriz D. Organize a senha descriptografada na forma $d_{11}-d_{12}-d_{21}-d_{22}$ e use-a para desbloquear o celular.

OBS: FAVOR NÃO RISCAR AS FICHAS, ELAS SERÃO USADAS POR OUTROS PARTICIPANTES,OBRIGADO!

Fonte: relatório de pesquisa (2018).

Análise e Discussão dos Resultados

Constatamos, a partir da experiência e dos conhecimentos produzidos no desenvolvimentos desse trabalho, que os alunos compreenderam a proposta das atividades e conseguiram resolvê-las, demonstrando interesse e entusiasmo durante a realização das mesmas.

Como primeiro desafio, foi dada uma informação a ser decodificada usando código Morse, com isso a oficina mostrou-se desafiadora para os estudantes que participaram desde o início. A complexidade proposital com que as instruções foram escritas, usando termos corriqueiros do ambiente matemático, e o pré-estabelecimento de um tempo para a conclusão da atividade causaram uma pressão e ansiedade que podem ter influenciado positivamente no desempenho dos participantes, pois grande parte deles mostrava-se bastante entusiasmada a cada obstáculo superado e aqueles que eram capazes de concluir no tempo comemoravam com euforia ao desbloquearem o último celular e ao pararem o cronômetro. Eram até mesmo capazes de explicar o que tinham aprendido aos outros colegas que participavam da atividade depois deles.

Observamos que, ao aplicar a oficina para determinados grupos de alunos do Ensino

Médio, alguns deles tiveram dificuldades em resolver as atividades, pois não dominavam os conteúdos explorados. Para ajudar nessa situação contamos com a ajuda de monitores que auxiliavam os alunos na solução das atividades. Isso permitiu que os alunos revisitassem os conteúdos estudados no Ensino Médio ampliando a compreensão daqueles já desenvolvidos.

Por fim, a adaptação da atividade para a Recepção aos Calouros do curso de Matemática da UnB teve um *feedback* bastante positivo, visto que os estudantes recém chegados à universidade, tinham maior domínio dos conteúdos do Ensino Médio. Isso permitiu que novos enigmas fossem propostos e que a atividade proposta pudesse ser ampliada. Além disso, os calouros interagiram bastante entre si durante a resolução dos enigmas, procurando resolver em equipe as atividades propostas permitindo assim um entrosamento entre os calouros que poderá facilitar as relações durante o curso de graduação.

Considerações Finais

Podemos concluir, portanto, que os objetivos inicialmente propostos pela atividade foram alcançados. As atividades didáticas propostas na oficina oportunizaram aos participantes a ampliação e revisão de conteúdos curriculares estudados no Ensino Médio. As atividades, como foram propostas, proporcionaram o trabalho em grupo e cooperativo tanto entre os estudantes participantes quanto entre os alunos do grupo PET MAT que auxiliaram na execução da oficina.

O fato de aplicar conceitos matemáticos a uma situação real e verdadeiramente vivida pelos participantes facilitou a compreensão das novas ideias e promoveu o exercício do pensamento lógico de forma natural, uma vez que isso era necessário para a conclusão das etapas da atividade.

As atividades desenvolvidas e aplicadas na oficina são exemplos de material didático que poderá ser utilizados pelos profesores do Ensino Médio, com o objetivo de aprofundar e revisar conteúdos. Além disso, fica como sugestão, a inclusão de novos temas na aplicação da oficina. A busca de temas interesantes deve ser incentivada para que os componentes curriculares a serem desenvolvidas no Ensino Médio sejam interesantes e motivadores para o aluno.

Referências

Buzatto, A. & Spada, D. (2008). *O jogo como elemento de aprendizagem matemática*. Retrieved from: http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/images/arquivos/Pster.pdf

Buchmann, J. (2002). *Introduçãp à Criptografia.* São Paulo. Berkeley.

D'Ambrosio, U. (1996). *Educação matemática: da teoria à prática*. Papirus Editora.

Iezzi, G., Dolce, O. & Pompeo, J. (2007). *Matemática: volume único*. São Paulo: Editora Atual.

Martini, R. (2001). *Criptografia e Cidadania Digital.* Rio de Janeiro. Ciência Moderna.

Moura, Manoel O. de. (2008). *Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação*. (11th ed.). São paulo: Cortez.

Olgin, C. A. (2011). *Currículo no ensino médio: uma experiência com o tema criptografia*. (Dissertação de mestrado) Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil.

Parâmetros curriculares nacionais: matemática. (1997). Retrieved from: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf

Shokranian, S., Soares, M. & Godinho, H. (1999). *Teoria dos Números.* Brasília: UnB.

Tamarozzi, A. C. (2003).*Codificando e decifrando mensagens*. In Revista do Professor de Matemática 45, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática.

Terada, R. (1988). *Criptografia e a importância das suas aplicações.* Revista do Professor de Matemática (RPM). Nº 12, 1º semestre de 1988, 1-6.

Terada, R. (2000) *Segurança de Dados: Criptografia em Redes de Computadores,* São Paulo: Edgard Blucher.

Algunas perspectivas de investigación y enseñanza en el álgebra escolar

Ligia Amparo **Torres** Rengifo
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
ligia.torres@correounivalle.edu.co
Cristian Andrés **Hurtado** Moreno
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
cristian.hurtado@correounivalle.edu.co

Resumen

En este taller se presentan tres perspectivas de investigación y enseñanza para la introducción y desarrollo del álgebra escolar, que potencian el desarrollo del pensamiento variacional, como son: la Generalización de patrones numéricos y geométricos, la Resolución de problemas y la Modelación matemática de fenómenos de distinta naturaleza. Estas perspectivas se han venido construyendo y desarrollando en las Licenciaturas y Maestría del Área de Educación Matemática y programas de extensión y proyección social, de la Universidad del Valle. Tienen su origen en resultados de investigaciones presentados por Kieran (2006), las propuestas curriculares nacionales en matemáticas como los Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencias (2006), y fundamentadas en desarrollos investigativos del campo de la Educación Matemática. En esta dirección en el taller inicialmente se presenta un panorama general de la investigación en este campo y luego se abordan con los participantes 6 propuestas de aula que abordan estas perspectivas.

Palabras clave: álgebra escolar, pensamiento variacional, generalización de patrones, resolución de problemas, modelación matemática.

Planteamiento del problema y antecedentes

La investigación en didáctica del álgebra hasta finales del siglo pasado se caracterizó por identificar y especificar las dificultades, obstáculos y errores en el tránsito del pensamiento numérico al algebraico de los estudiantes en la escuela y en los del estudio formal de esta disciplina (Gallardo y Rojano, 1988; Kieran, 1992; Ursini, 1996; Amerom, 2002; Socas, 2011; Castro, 2012; Arcavi, 2013). Es así como desde el punto de vista didáctico existe una amplia literatura que presenta gran variedad de resultados investigativos sobre este campo problémico.

Además, con relación a la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra en la escuela, sobresalen compilaciones que organizan la producción investigativa en álgebra escolar desde diferentes perspectivas, como por ejemplo, la Agenda de investigación para la Educación Matemática, de la NCTM (1989), sobre el aprendizaje y enseñanza del álgebra, editado por Sigrid Wagner y Caroly Kieran. La NCTM en esta publicación expone 15 reportes de investigación, en la segunda parte la agenda de investigación y en la última algunas consideraciones teóricas. En los reportes de investigación se enfatiza, desde la perspectiva temática, obstáculos cognitivos en el aprendizaje del álgebra, estudios cognitivos sobre el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje de esta disciplina, la incorporación de sistemas tutoriales tecnológicos y en general de las tecnologías de la información en la enseñanza del álgebra. Así mismo, las reflexiones sobre teorías acerca de los sistemas de representación matemática y las perspectivas del álgebra escolar para el año 2000. Se proponen algunos tópicos sobre la agenda de investigación, relacionados con lo cognitivo y lo curricular.

Es importante anotar que en la publicación mencionada sobresale el trabajo de Kieran, sobre las ecuaciones algebraicas y en el último apartado, se considera, el estudio del desarrollo histórico del álgebra (como sistema simbólico), para entender ciertos desarrollos u obstáculos en la escuela. Estas investigaciones y otras más sobre esta problemática fueron objeto de estudio hace algunos años en el Área de Educación Matemática, del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, para, posteriormente, y en coherencia con los desarrollos mundiales en investigación en didáctica del álgebra, centrar la atención en propuestas para un acercamiento al álgebra desde lo numérico y geométrico, y para favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico y variacional en los estudiantes en la escuela, que permitieran superar o abordar las dificultades antes caracterizadas.

En esta dirección, inicialmente en el marco de los trabajos de grado, tanto de pregrado como de maestría de esta área interesados en esta problemáticas, se abordan los estudios recopilados por Bednarz, Kieran y Lee (1996) que permiten determinar diversas perspectivas de iniciación al álgebra, en las cuales se abordan aspectos fundamentales de la problemática planteada por las investigaciones antes registradas sobre el paso de lo aritmético a lo algebraico. Se propone, en estos trabajos el ingreso en una forma más natural y constructiva al álgebra en la escuela. Perspectivas valoradas por la comunidad de educadores matemáticos: el establecimiento de actividades de generalización, el trabajo con el enfoque de funciones, el desarrollo de actividades de modelación, la resolución de problemas y el enfoque desde una perspectiva histórica. La introducción del texto, hace una síntesis importante de estas perspectivas para la iniciación del trabajo algebraico en la escuela. Aquí se presenta la manera como se perciben estos enfoques incluyendo otras investigaciones en esa misma dirección como el texto de Filloy, Puig y Rojano (2008) sobre el Algebra educativa, como una aproximación teórica y empírica en este campo. Es así que, en los trabajos de pregrado y maestría que abordan estas tipo de problemáticas, se reconoce que desde la etapa inicial del proceso de construcción de pensamiento algebraico es fundamental la movilización de elementos asociados a la variación, los cuales permiten pasar del mundo de la cantidad al mundo de las relaciones, a través de la identificación de relaciones funcionales; estableciendo que el pensamiento algebraico integra el concepto de variables con todas sus connotaciones, usos y conexiones, es decir acepta la existencia de lo desconocido o lo que varía, representarlo a través de símbolos y operar sobre ello.

Una muestra de estos trabajos se presentará en el Taller, por ejemplo, en los trabajos trabajo de grado de Rivera y Sánchez (2012) y Moreno (2015) sobre **la generalización de**

patrones numéricos, se enfatiza en la aproximación temprana al álgebra, en la educación básica primaria, desarrollando elementos fundamentales del pensamiento variacional a través de situaciones problemas contextualizadas donde el trabajo con patrones numéricos posibilitan un acercamiento a las relaciones de dependencia entre cantidades y magnitudes desde la estructura multiplicativa; en los trabajos de Calderón y Dávalos (2011) y Hurtado (2014) enfocados desde la perspectiva de **la resolución de problemas** algebraicos, se explora, de una parte, la potencialidades de algunas heurísticas utilizadas por los estudiantes de grado octavo de la Educación Básica colombiana en la resolución de problemas algebraicos, y de otra, el análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real en la resolución de problemas algebraicos, para potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes y; en los trabajos de grado de Angulo (2014) y de Grueso y González (2016) sobre la modelación matemática, en uno, se analiza la articulación de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal a través de procesos de modelación de fenómenos en el marco de estos proyectos, y el otro, se aborda la función como covariación a través de la modelación de fenómenos geométricos.

En esta perspectiva, en el taller que aquí se propone se abordarán las situaciones de estos trabajos para ser analizadas con los participantes y dilucidar las potencialidades y limitaciones de sus enfoques de investigación y enseñanza.

Marco teórico de referencia

El marco de referencia conceptual de estos trabajos tiene en común aproximaciones y desarrollo del trabajo algebraicos en la escuela, desde los enfoques de generalización de patrones o de leyes que rigen los números, la resolución de problemas específicos o clases de problemas, así como la modelación de fenómenos de distinta naturaleza.

Desde la perspectiva de generalización, se concibe el álgebra como el lenguaje para la expresión y manipulación de generalidades (Mason, Graham, Pimm & Gowar, 1999) y por lo tanto las tareas y actividades escolares para involucrar a los alumnos en el álgebra está relacionado con la generalización de patrones numéricos y geométricos y cuyo propósito es el tránsito de lo particular a lo general y viceversa. Estos trabajos, centran la atención en el proceso inductivo, como estrategia heurística para resolver problemas matemáticos. Así mismo considerar que el lenguaje numérico es una herramienta fundamental para la identificación de patrones y la forma de expresión de la generalidad se hace generalmente en forma retórica, el paso a la expresión algebraica es complejo. Es así, como el proceso de generalización comienza en cuanto se intuye un cierto esquema general subyacente, aunque todavía no se pueda expresar claramente. Este proceso lleva a hacer una conjetura sobre una gran cantidad de casos a partir de unos pocos ejemplos. El proceso de justificar la conjetura trae consigo una nueva generalización y ahora el énfasis se desplaza de intentar averiguar qué puede ser verdadero a tratar de ver por qué ha de ser verdadero. Radford (2013) también ha realizado importantes contribuciones a la perspectiva de la generalización de patrones para el desarrollo del pensamiento algebraico en edades tempranas. Para este autor la generalización de patrones, numéricos, geométricos, pictóricos, entre otros, comporta tres problemas fundamentales mutuamente relacionados. El primero de ellos es el fenomenológico, en el cual se deben considerar las determinaciones sensibles que se hacen sobre los casos particulares de la secuencia dada para tomar conciencia sobre lo que es común; el segundo es el epistemológico, sobre el cual se realizan las generalización (llamadas por él abducciones) de los aspectos comunes hallados sobre los hechos concretos, de tal modo que se produce un nuevo objeto matemático; y finalmente el tercer problema está relacionado con los medios semióticos que se disponen para objetivar y comunicar la generalización lograda. Además, caracteriza dos tipos de generalización por las cuales es posible pasar en el tratamiento de este tipo de actividades, la aritmética, que es simplemente usada para pasar de un término de la secuencia al otro, anclada eminentemente al hecho concreto, al caso particular; y la propiamente algebraica, en la cual se deduce una fórmula que es usada apodícticamente para hallar cualquier término de la figura.

Coherente con lo anterior, es posible considerar que dentro del proceso de desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes, es fundamental presentar situaciones donde se requiera establecer relaciones, identificar características comunes de los casos específicos dados y llegar a una lectura y escritura de lo general, que constituye el interés fundamental de dos de los trabajos de investigación que se compartirán en el taller.

En las investigaciones en las perspectivas de modelación, la elaboración de modelos matemáticos que den cuenta de fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas y con los que además se puedan predecir eventos futuros es considerada por autores como Freudenthal (1983). Esta actividad, al inscribirse situaciones de las matemáticas mismas, ha favorecido la construcción de teorías y el avance científico de la disciplina en cuestión. En la literatura especializada es posible encontrar diversos nombres para designar el proceso de elaboración de modelos, y aún en algunos casos, se establecen relaciones y/o diferencias entre ellos. Algunos de estos nombres son: modelación, matematización y modelaje. Este enfoque de Modelación ha cobrado en los últimos años un creciente y especial interés, más precisamente desde la Didáctica de las matemáticas, interés que ha arrojado como resultado de diversas investigaciones la identificación de diferentes perspectivas según la didáctica y los objetivos que se persigan. En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), la modelación se cataloga como un proceso presente en toda actividad matemática con el cual es posible describir las interrelaciones entre el mundo real y las matemáticas. Así, el proceso de modelación implica la identificación de una situación problemática real, la cual es puesta bajo observación con el objeto de formularla matemáticamente, es decir, encontrar los aspectos matemáticos presentes en ella; esto conducirá a la construcción del modelo, el cual será objeto de un proceso de validación a partir de su poder de predicción y descripción de los fenómenos que hacen parte de la situación problemática originaria. Para llegar a identificar las matemáticas presentes en distintas situaciones es preciso descubrir relaciones entre las variables de un problema, descubrir regularidades, transferir un problema de la vida real a un problema matemático, etc. Después de ello, el problema debe tratarse con herramientas matemáticas, para lo cual se puede representar una relación en una fórmula, utilizar distintos modelos, validarlos, entre otros aspectos. Janvier (1996) enmarca la modelación en el trabajo de construcción del lenguaje algebraico y la define como un proceso que comprende dos fases: la fase de formulación y la fase de validación. En la fase de formulación se establecen las relaciones claves entre las variables del problema, lo cual puede hacerse a partir de medidas o conjeturas; posteriormente, se ejecutan una serie de transformaciones de tipo matemático que conducen a expresar el modelo en una expresión simbólica. La fase de validación comprende la constatación de la validez del modelo a partir de la comparación con la situación que lo origina. Esta validación puede hacerse a través de mediciones, cálculos, etc, lo cual conduce a realizar ajustes en el modelo. Desde este enfoque, la fase de formulación es vital ya que en ella, desde la identificación de las relaciones claves entre las variables del problema, se deduce la regla que hace pertenecer esa relación a una familia de relaciones más general y que en últimas constituirían el modelo, en esta perspectiva se presentaran dos trabajos en el Taller.

Desde la perspectiva de resolución de problemas verbales, Bednarz y Janvier (1996) valoran el análisis de los problemas y el razonamiento usado por los estudiantes al identificar la estructura simbólica involucrada en el cálculo relacional, que permite examinar el paso de la aritmética al álgebra y estimar la dificultad de los diferentes tipos de problemas dados en álgebra. De acuerdo con estos autores la estructura de todo problema de índole algebraica propone cantidades tanto conocidas como desconocidas, relaciones entre estas cantidades y relaciones entre tipos de expresiones, muchas de las cuales son más implícitas que explicitas. La manera como estos dos investigadores aluden a la estructura general de todo enunciado de problema que requiere el uso de ecuaciones permite entonces reconocer dos actividades a las que se ven enfrentados los estudiantes al intentar resolver los problemas. De una parte, es necesario realizar una designación de las cantidades desconocidas dadas en el sistema de lenguaje natural en el nuevo sistema de representación, esto es, la elección de la, o las, incógnita(s); tal elección, a su vez, debe involucrar las relaciones posibles, tanto con los datos conocidos como desconocidos, para poner toda la información en términos de una sola variable. De otra parte, es necesario establecer una igualdad entre las relaciones existentes, es decir, nombrar de dos maneras diferentes la misma relación para obtener la ecuación. Estos investigadores llaman la atención sobre la exigencia y complejidad que se pone de manifiesto en la resolución de estos problemas, pues ello exige el análisis de las relaciones que se deben identificar en el problema, tanto en cantidad como en su naturaleza y sus vínculos, esto es, relaciones aditivas conjugadas con multiplicativas que posteriormente tendrán que operarse, mucha de las cuales son implícitas.

Metodología y propósito del taller

Este taller, como espacio de interacción entre los proponentes y los maestros, investigadores y asistentes en general, mediado por la lectura y análisis de las situaciones problemáticas para movilizar reflexiones sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela, se ha organizado en cuatro momentos. Un primer momento (15 minutos) donde se presentarán los aspectos más relevantes de los enfoques de teóricos y metodológicos desde donde se abordan las situaciones y tareas de los trabajos que se presentan; un segundo momento (40 minutos) donde se trabajará la situación 1 de cada uno de los seis trabajos de grado, en grupos de 4 o 5 personas asistentes al taller, donde cada grupo abordara una situación; un tercer momento (40 minutos) donde se trabajará la situación 2 de cada uno de los trabajos, se realizará utilizando el mismo esquema del segundo momento. Finalmente, se realizará una plenaria (15 minutos) para socializar el análisis y las reflexiones de los grupos de trabajo. Al finalizar el taller se recogerán las conclusiones y las recomendaciones para mejorar cada propuesta de trabajo en el aula.

Este taller tiene como propósito compartir algunas situaciones y tareas de las propuestas de aula de los trabajos de grado de pregrado y maestría del Área de Educación Matemática, de la Universidad del Valle, los cuales se denominan: (1) Desarrollo del pensamiento variacional en la Educación Básica Primaria: Generalización de patrones numéricos, (2) Una aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos, (3) Análisis de la articulación de proyectos productivos agroindustriales y las función lineal, (4) El concepto de función como covariación en la escuela, (5) Potencialidades de algunas heurísticas utilizadas por estudiantes de grado octavo en la resolución de problemas algebraicos y (6) Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real y su impacto en la Educación Básica. Además, interactuar con los participantes a través de sus análisis y reflexiones sobre la pertinencia de las tareas, sus contenidos matemáticos y los desempeños que movilizan.

Plan de acción del taller

Algunas de las situaciones que se trabajarán en el taller son:

Del trabajo (1) de la Situación problemática 2 y 3:

Actividad 2: En búsqueda de la clave numérica

La jaula donde se encontraba encerrado Hansel estaba asegurada con un candado enorme que debía ser abierto con una combinación de 12 números. Cerca de allí, había una secuencia de números que podían ser la clave para liberar el candado, pero algunos de ellos estaban tapados y el niño no los podía ver. La secuencia es la siguiente:

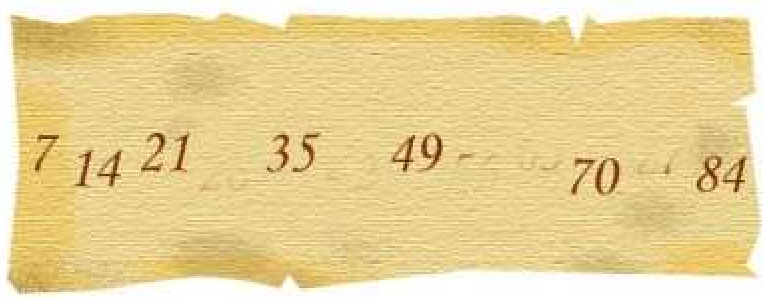


Figura 1. Secuencia numérica para completar.

1. Ayúdale a Hansel a completar la serie con los números faltantes.
2. ¿Qué tuviste en cuenta en el momento de buscar los números que faltaban para completar la que podría ser la clave del candado?
3. Hansel cree que uno de los números que completan la secuencia es el número 52, ¿estás de acuerdo con el niño? ¿Por qué?
4. Si esta serie continúa ¿Existe alguna forma de calcular cualquiera de los números que siguen? Explica tu respuesta, escribiendo la manera de hacerlo.
5. Construye una serie numérica que sea la clave para abrir una caja fuerte (no olvides que debe tener un patrón).

Situación 3: Patrones y producto con piedritas.

Actividad 1: El producto como organizador de arreglos con piedritas

Recuerda que Hansel y Gretel, cuando iban de camino a lo profundo del bosque, arrojaron un grupo de piedritas, imagina que no eran sino 500 piedritas y que riegan por el camino 240 de esas 500 piedritas en grupos a igual distancia.

1. Indica el número de piedritas que le quedaron a los niños, después de arrojar las 240 piedritas.
2. Hansel y Gretel deciden armar grupos de tres piedritas. ¿Cuántos grupos pudieron armar? ¿
3. Si no fueran grupos de tres piedritas ¿Cuántos grupos podrían formar?
4. Para hacer grupos iguales de piedritas, ¿Cuántas piedritas han de recoger a la vez?
5. Hansel y Gretel escribieron numéricamente las posibles organizaciones que podían hacer con las piedritas, pero se le borraron algunos datos. Ayúdale a completar la siguiente tabla.

Tabla 1

Organizaciones de piedritas hechas por Hansel y Gretel

Grupo de piedritas	Número de piedritas por grupo	Total
8		240
	60	240
12		240

6. Encuentra y escribe una forma de escribir el total, teniendo en cuenta que el número de grupos es a, el número de piedritas es b, y el total es c.

Los tres enfoques sobre los cuales versan las seis situaciones que se compartirán en el taller han mostrado, a través de los distintos trabajos de grado, el potencial que tienen para la introducción del álgebra en la escuela y sus procesos asociados. Este hecho, desde luego, ha nutrido la investigación que en el Área de Educación Matemática de la Universidad del Valle se ha venido gestando en torno a la preocupación que la investigación en Didáctica del Álgebra ha reportado sobre las múltiples problemáticas que maestros y estudiantes enfrentan cuando el álgebra ingresa a la escuela, lo cual ha permitido que tanto la formación de los futuros maestros en las Licenciaturas de matemáticas de la Universidad, así como de profesores que están en ejercicio se nutra a partir de la reflexión conceptual y metodológica en aras de hacerles frente a dichas problemáticas.

Bibliografía y referencias

Amerom, B. (2002). Learning and teaching of school algebra. En B. Amerom, *Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*, (pp. 3-32). Holanda: Freudenthal Institute.

Angulo, O. (2014). *Análisis de la articulación de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal* (tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Arcavi, A. (2013). Reflexiones sobre el álgebra escolar y su enseñanza. En Rico, L., Cañadas, M., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*.

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996) (Eds). *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*. Londres: Kluwer Academics Publisher.

Bednarz, N. & Janvier, C. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz et al. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 115-135). Londres: Kluwer Academics Publisher.

Calderón, N. y Dávalos, P. (2011). *Potencialidades de algunas heurísticas utilizadas por estudiantes de grado octavo en la resolución de problemas algebraicos* (tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Board.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure*. Dordrecht: Reidel.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Researchs in Didactique dec Mathématiques*, *9*, 155- 188. Granada, España: Comares.

Grueso, R. & González, G. (2016). *El concepto de función como covariación en la escuela* (tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Hurtado, C. (2014). *Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real y su impacto en la Educación Básica* (tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 225.236). Dordrecht: Kluwer Academics Publisher.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 390-419). New York:

Kieran, C. (2006). Researchs on the learning and teaching of algebra. En Angel, G. y Paolo, B. (Eds), *Handbook of researchs on the psychology of mathematics educations*. *Past, present and future* (pp. 11-50). New York: Sense Publishers.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1999). *Rutas y raíces del álgebra*. Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Traducción y Edición: Cecilia Agudelo Valderrama.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia.

Moreno, G. (2015). *Una aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos* (tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). Agenda de investigación para la Educación matem+atica. Reston, VA: NCTM.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En Rico, L., Cañadas, M., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*.

Rivera, E. y Sánchez, L. (2012). *Desarrollo del pensamiento variacional en la Educación Básica Primaria: Generalización de patrones numéricos* (tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, revista de didáctica de las matemáticas, 77*, 5-34.

Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas. Educación Matemática, 8(2), 33-40.

Un estudio sobre creencias de autoeficacia en la solución de tareas de Sucesiones en la Educación Básica Secundaria en Colombia

Katerine Edith **Tobio** Gutierrez
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Brasil
katerine.tobio-gutierrez@unesp.br
Martha **Mogollón** Rodriguez
URBE
Venezuela
marthamogollon2018@gmail.com
Nelson **Pirola**
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Brasil
nelson.pirola@unesp.br

Resumen

Las creencias de autoeficacia son consideradas como el juicio de las propias capacidades de cada individuo al momento de ejecutar acciones de una tarea en un dominio especifico. Este trabajo de enfoque cuantitativo de tipo descriptivo con diseño transversal tiene como objetivo estudiar las creencias de autoeficacia en la solución de tareas de sucesiones por estudiantes de Educación Básica Secundaria del municipio de Corozal (Colombia). Para la colecta de datos se diseñó un cuestionario de autoeficacia online de tipo escala Likert el cual contiene 10 tareas de sucesiones con soluciones en el contexto matemático y computacional. Para el análisis de los datos, se realizó un análisis estadístico descriptivo y probabilístico. Como resultado, se obtuvo que las creencias de autoeficacia están relacionadas con las variables, niveles de educación y género. Además, de que los estudiantes poseen creencias de autoeficacia negativa en la solución de tareas en el contexto computacional.

Palabras clave: creencias de autoeficacia, sucesiones, generalización de patrones, pensamiento algebraico, Educación Básica Secundaria.

Introducción

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, además de los aspectos cognitivos, los aspectos afectivos y actitudinales también son de gran importancia, puesto que influencian en el aprendizaje y la confianza de los estudiantes al resolver tareas matemáticas (Sander, 2018). Por lo que este estudio se desarrolla por la poca exploración de esta temática en el campo de la Educación Matemática. Estudiando, especialmente, las creencias de autoeficacia al resolver tareas de sucesiones, puesto que las creencias de autoeficacia son uno de los factores del proceso de aprendizaje que se ha vuelto relevante en el proceso educativo (Rodrigues, 2015).

En este estudio el cuadro teórico está integrado por dos temáticas: la creencia de autoeficacia y sucesiones matemáticas. De tal forma que las creencias de autoeficacia se encuentran fundamentada por la Teoría cognitivo social, teoría desarrollada por el psicólogo canadiense Albert Bandura (1986) quien defiende la concepción del ser humano como un sujeto activo que no vive pasivamente a merced de las fuerzas del medio ambiente que lo rodea ni por los impulsos internos (cognitivo, afectivo y eventos biológicos). Y las sucesiones matemáticas son fundamentadas por autores que investigan esta temática.

Según Bandura (1986, 1994, 1997) las creencias de autoeficacia son consideradas como el juicio de las propias competencias, habilidades, destrezas, conocimiento, etc., de cada individuo al momento de desarrollar acciones requeridas para poder lograr un cierto grado de desempeño en una determinada tarea en un dominio especifico. Asimismo, Bandura identificó cuatro fuentes principales que constituyen las creencias de autoeficacia, las cuales son: experiencias anteriores, están relacionadas con las experiencias directas en el desarrollo de una tarea dada mediante la mensuración de los efectos e interpretaciones de las acciones realizadas; experiencias vicarias, las cuales son adquiridas a partir de la observación de modelos o imitación del desarrollo de una tarea por otras personas; la persuasión social, está relacionada con los juicios verbales que otros individuos realizan; por último, las reacciones fisiológicas y afectivas, que son producto de las activaciones psicofisiológicas referentes a la organización y ejecución de una tarea, como, ansiedad, estado de humor, estrés, etc. (Moreno, 2017; Sander, 2018; Pinheiro, 2018).

En el contexto educativo, las creencias de eficacia son estudiadas en tres líneas de investigación, las cuales son: la autoeficacia docente; la autoeficacia académica, relacionada al desempeño académico y el aprendizaje de los estudiantes; y la autoeficacia vocacional (Moreno, 2017). Por tanto, este trabajo nos enfocaremos en las creencias de autoeficacia académica que permita determinar las convicciones personales que posee el estudiante en relación con sus propias capacidades para organizar y ejecutar cursos y acciones requeridos para producir ciertos logros referentes a los aspectos intelectuales y de aprendizaje al realizar una determinada tarea matemática y el grado de cualidad de la ejecución de esta (Brito y Souza, 2015; Sander, 2018; Moreno, 2017). Estas capacidades consideradas por el alumno y no necesariamente están presentes en él, consiste más bien en que este las cree tener y, además poseer la disposición en contemplar las exigencias y requisitos de una dada tarea que precisa ser desarrollada, debido a que las creencias que cada persona tiene sobre sus capacidades están íntimamente relacionadas en la forma que ellas actúan (Bzuneck, 2001; Brito y Souza, 2015).

Una revisión de la literatura muestra que las creencias de autoeficacia han sido objeto de estudio en diversos campos como la psicología, administración, salud, deportes, etc., a nivel nacional e internacional. De igual manera, ha sido estudiada en la Educación Matemática con distintos contenidos específicos matemáticos, pero todavía son muy pocas investigaciones existentes en el contexto educacional colombiano, en especial, las creencias de autoeficacias en la solución de tareas de sucesiones. Destacándose trabajos que abordan la relación del constructo autoeficacia en el contexto matemático: la validación transcultural del modelo cognitivo social de elecciones vocacionales (Moreno, 2017); las actitudes (Dobarro, 2007); los objetivos en el ámbito del aprendizaje (Patrício, 2012); el desempeño en la solución de situaciones problemas (Brito y Souza, 2015; Sander, 2018); las atribuciones de éxito y fracaso (Morais, 2016); el autoconcepto (Souza y Brito, 2008) y la enseñanza del algebra en la formación de profesores (Pinheiro, 2018). Y en el contexto computacional se tiene los estudios de López Vargas y Triana Vera (2013) y Valencia-Vallejo, López-Vargas & Sanabria-Rodríguez (2016) que abordan la relación entre autoeficacia y escenarios computacionales.

Por consiguiente, el objetivo de este trabajo es estudiar las creencias de autoeficacia en la solución de tareas de sucesiones en el contexto matemático y computacional por estudiantes de 7°, 8° y 9° grados en una Institución Educativa publica del municipio de Corozal – Sucre (Colombia). En el cual las sucesiones hacen parte de un contenido temático de estudio en el campo de la educación matemática puesto que está relacionado con el razonamiento inductivo (Cañadas, 2007; Álvarez, 2012), pensamiento lógico matemático (Morales, 2013), las estrategias de generalización de patrones y su contribución al desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de distintos niveles de educación (Zapatera, 2018).

Además, el MEN (2006) en los Estándares Básicos de Competencias en Matemática recomienda la realización de tareas de sucesiones para el análisis de los fenómenos variacionales y de generalización de patrones en niveles de Educación Básica Primaria, dado que se considera como una manera adecuada para el desarrollo de un aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos, así como su manejo simbólico antes de llegar a los grados séptimo y octavo de Educación Básica Secundaria. Conjuntamente, se entiende por tareas un segmento de la actividad de la clase, orientada para el desarrollo de un concepto matemático en particular que puede contener distintas situaciones problemas relacionadas entre sí o un trabajo amplio sobre un problema complejo (Barbosa, 2010).

Metodología

Este trabajo es de enfoque cuantitativo de tipo descriptivo con diseño transversal, debido a que se pretende describir el grado de creencias de autoeficacia que los estudiantes poseen con relación a la solución de tareas de sucesiones en el contexto matemático y computacional (Hernández Sampieri *et al*, 2014). Contiene una muestra no probabilística, debido a que los estudiantes que participaron en el estudio fueron seleccionados de una sola Institución Educativa del municipio de Corozal y no se implementaron técnicas estadísticas, puesto que no se tiene interés en la extrapolar los resultados de esta investigación (Hernández Sampieri et al., 2014). La muestra está constituida por 114 estudiantes que llevaran firmado, por los padres, el termino de consentimiento libre y esclarecido para poder participar en la investigación (54,4% son de sexo femenino y 45,6% son de sexo masculino). En el que 67 (58,7%) corresponden a 7°, 19 (16,7%) a 8° y 28 (24,6%) a 9° grado oscilando entre edades desde los 11 a los 17 años pertenecientes a la Institución Educativa Liceo Carmelo Percy Vergara sede principal del municipio de Corozal – Sucre (Colombia).

Para la colecta de datos, se diseñó un cuestionario de creencias de autoeficacia que contiene 10 tareas de sucesiones, basadas en otras escalas de autoeficacia (Dobarro, 2007; Sander, 2018) y las tareas de sucesiones (Cañadas, 2007; Zapatera, 2018; Álvarez, 2012). Este cuestionario está dividido en dos partes, la primera parte tiene 6 tareas de sucesiones con soluciones en el contexto de la matemática (Apéndice A). De manera general, estas tareas proponen encontrar elementos cercanos (Tareas 1, 4, 6A, 6B y 6F) y lejanos (Tareas 2, 3, 6C y 6G) de una sucesión dada, así como, explicar con sus propias palabras la relación directa (Tarea 6D) e inversa (6H) de las variables de la sucesión y expresar mediante una fórmula matemática la relación directa (Tarea 6E) e inversa (Tarea 6I) de las variables de la sucesión.

La segunda parte, contiene 4 enunciados (tarea 7, 8, 9 y 10) sobre la solución de las tareas de la primera parte en el contexto computacional (Apéndice A), es decir, expresar el grado de eficacia en que las tareas de sucesiones matemáticas pueden ser programada para que el computador ejecute y muestre las soluciones de la respectiva tarea, puesto que en el currículo de la Institución Educativa aborda contenidos de programación de computadores (el lenguaje Scratch). Este cuestionario presenta opciones de tipo escala Likert para expresar el grado de confianza que poseen los alumnos en el desarrollo de la solución de las tareas anunciadas, la cual varía entre 1 y 5 puntos, donde 1 hace referencia a nada confiado y 5 a totalmente confiado.

La aplicación del cuestionario fue realizada de manera digital en la sala de informática de la Institución Educativa con una duración en promedio de 20 minutos. Por ello, se realiza, primeramente, un análisis de confiabilidad del cuestionario mediante el cálculo del coeficiente Alfa de Cronbach (0,735), que es considerada aceptable este tipo de investigaciones (Hernández Sampieri et al., 2014). Posteriormente, se realizaron el análisis estadístico descriptivo y probabilísticos de los datos usando el software libre R-Studio y el paquete Rcommander.

Resultados y discusión

Para el análisis del grado de autoeficacia de los 114 estudiantes en la solución de tareas de sucesiones en contexto matemático y computacional, se realiza la suma de los puntos obtenidos por cada alumno que varía de 18 a 90 puntos, puesto que el cuestionario tiene 18 ítems (10 tareas) y la escala es de 1 a 5 puntos. Seguidamente, con los resultados de los puntos se calcula la media aritmética (62,89) y desviación estándar (8,249). Estipulándose que aquellos alumnos cuya puntuación estuviese por encima de la media, demostraban creencias de autoeficacia positiva (o favorables) en la solución de tareas de sucesiones, de lo contrario se consideran que poseen creencias negativas (o desfavorables) (Brito y Souza, 2008, 2015; Sander, 2018).

Por tanto, describiremos los resultados del grado de autoeficacia que los estudiantes consideran en cada ítem (Nº) y posteriormente de forma general. Para el análisis de cada ítem se toma que todos los estudiantes que poseen valores por encima de tres en la escala de autoeficacia presentan creencias de autoeficacia positiva (AE+) y por debajo e igual a tres, tienen creencias negativas (AE-).

Tabla 1

Distribución de frecuencias de las categorías de las creencias de autoeficacia según las seis tareas.

Nº	AE+	AE-	Nº	AE+	AE-	Nº	AE+	AE-
1	52 (45,6%)	62 (54,4%)	6A	91 (79,8%)	23 (20,2%)	6F	73 (64%)	41 (64%)
2	55 (48,2%)	59 (51,8%)	6B	85 (74,6%)	29 (25,4%)	6G	64 (56,1%)	50 (43,9%)
3	53 (47,4%)	60 (52,6%)	6C	59 (51,8%)	55 (48,2%)	6H	57 (50%)	57 (50%)
4	58 (50,9%)	56 (49,1%)	6D	57 (50%)	57 (50%)	6I	52 (45,6%)	62 (54,4%)
5	39 (34,2%)	75 (65,8%)	6E	43 (37,7%)	71 (62,3%)			

Fuente: Autoría propia.

Por ende, si analizamos las puntuaciones del grado de autoeficacia de cada tarea (Tabla 1), se observa que los estudiantes poseen una mayor creencia de autoeficacia en la realización de tareas de sucesiones, donde tiene que encontrar elementos cercanos de una relación directa (tarea 6A, 6B, 4 y 1) e inversa (6F, 6G) de las variables implicadas en la sucesión (Apéndice A). Asimismo, presentan creencias de autoeficacia negativas al encontrar la relación inversa de las variables de la sucesión que le permita hallar los términos cercanos y lejanos, y expresar verbalmente la regla general de forma algebraica. Estos resultados son muy similares al desempeño encontrado por Zapatera (2018) de los estudiantes de 3º a 6º grado Educación Básica Primaria que resolvieron la sexta tarea que mostra que la mayoría de los estudiantes que participaron en la investigación lograron encontrar con facilidad los elementos cercanos de la sucesión y presentaron dificultades al encontrar la relación inversa de las variables de la sucesión que le permita hallar los términos cercanos y lejanos, y expresar verbalmente la regla general de forma algebraica. De esta manera, podemos afirmar que los participantes de este estudio tienen creencias de autoeficacia similar al rendimiento de los estudiantes de Educación Básica Secundaria. Aclarando, que este estudio no está abordando el rendimiento académico de los participantes en la solución de tareas de sucesiones sino sus creencias de autoeficacia.

El grado de autoeficacia negativa por parte de los estudiantes en la solución de las tareas de sucesiones puede estar asociada a la falta de aplicación y exploración de tareas que aborden patrones, regularidades y el proceso de generalización en distintas situaciones contextualizadas en sala de aula que proporcionen distintas formas de resolver problemas de generalización de patrones (Zapatera, 2018); el desarrollo y comprensión del pensamiento inductivo (Álvarez, 2012; Cañadas, 2007); y su articulación con otros contenidos matemáticos y áreas del conocimiento en los distintos niveles de educación (Álvarez, 2012). De igual manera, no se potencializa y desarrolla los procedimientos o descriptores de los niveles de trayectoria para solucionar una tarea de sucesiones en la clase de matemáticas (Zapatera, 2018)

Tabla 2

Distribución de frecuencias de las categorías de las creencias de autoeficacia según las últimas tareas.

Nº	AE+	AE-
7	75 (65,8%)	39 (34,2%)
8	64 (56,1%)	50 (43,9%)
9	35 (30,7%)	79 (69,3%)
10	37 (32,5%)	77 (67,5%)

Fuente: Autoría propia.

En el contexto computacional, que hace parte de las últimas cuatro tareas (Tabla 2), se destaca que el 65,8% de los estudiantes poseen creencias de autoeficacia positiva con relación a su capacidad de identificar software de programación para páginas web, video juegos o aplicaciones de celulares; el 43,9% consideran que pueden usar software de programación para calcular las soluciones de las seis tareas para cualquier valor; el 30,7% creen que consiguen expresar de forma verbal la programación de las soluciones de las tareas para cualquier valor en el software conocido; y el 32,5% consideran que pueden expresar de forma escrita (código) la programación de las soluciones de las tareas para cualquier valor en el software conocido.

Según lo anterior, se considera que los estudiantes consiguen identificar software de programación de distintas aplicaciones, pero poseen creencias de autoeficacia negativas en la utilización de ellas para encontrar las respectivas soluciones de las tareas de sucesiones, esto se debe a que la enseñanza de la programación de computadores en la Institución Educativa no es articulada con los contenidos matemáticos. De acuerdo con Pérez Palencia (2017) el uso de las herramientas tecnológicas en las escuelas representan un gran potencial pedagógico, por ello no debe centrarse en su forma simple de utilización, por lo contrario, debemos aprovechar el poder computacional de estas para que fornezcan la apropiación de contenidos disciplinares, el desarrollo de los pilares del pensamiento computacional y la construcción creación de artefactos computacionales mediante la promoción de ambiente de instrucción guiada que articule situaciones contextualizadas. Además, los estudios de López Vargas y Triana Vera (2013) y Valencia-Vallejo, López-Vargas & Sanabria-Rodríguez (2016) destacan que cuando los estudiantes trabajan en escenarios computacionales donde se diseñen e implementen andamiajes autorreguladores (autoeficacia) propician la autorregulación del aprendizaje y el logro académico.

Al hacer el análisis estadístico descriptivo general de los datos, se obtuvo que 60 (52,6%) participantes presentan tendencia a creencias de autoeficacia positivas en tareas de sucesiones en contexto matemático y computacional, de los cuales 40 (35,1%) estudiantes son de séptimo, 5 (4,4%) son de octavo y 15 (13,1%) de noveno. Mientras que 54 (47,4%) participantes presentan tendencias negativas, donde el 27 (23,7%), 14 (12,3%) y 13 (11,4%) son estudiantes de séptimo, octavo y noveno grado respectivamente.

Posteriormente, se realizó la prueba de hipótesis de Chi-Cuadrado entre las variables creencias de autoeficacia (categorizados como autoeficacia positiva y negativa), nivel educativo, género y edad con el fin de encontrar relaciones entre las variables, encontrando una relación estadística significativa entre las variables creencias de autoeficacia con: el nivel educativo (x^2=6.631; p < 0,036), es decir, que a medida que los estudiante aumenta en el nivel educativo disminuye las creencias de autoeficacia en la solución de tareas de sucesiones; y el género (x^2=4.4982; p <0.03393), resaltando que los estudiantes de género masculino (28,9%) presentan significativamente una creencia de autoeficacia más fuerte que el género opuesto (23,6%). Mientras que las variables creencias de autoeficacia y la edad son independientes (x^2= 1.6061; p < 0.448). Las relaciones encontradas en este estudio no están en concordancia con los resultados obtenidos por Brito y Souza (2015), ya que sus resultados demuestran significativamente que las niñas poseen una creencia de autoeficacia más fuerte que los niños y con los trabajos de Pinheiro (2018) y Dobarro (2007), puesto que no se identificaron diferencias significativas entre las creencias de autoeficacia, cuando fueron agrupados por género y nivel académico. Esto puede estar asociado a que estos trabajos se desarrollaron en distintos niveles académicos y con diferente contenido matemático, puesto que la creencia de autoeficacia, se hace referencia a lo que alguien cree sobre sus capacidades en realizar una tarea en un dominio especifico donde puede variar su percepción de sus capacidades dependiendo al contenido que aborda la tarea y el nivel formación académico que posee de esos contenidos (Sander, 2018).

Conclusiones

En este trabajo pretende contribuir a la comprensión de las creencias de autoeficacia en el contexto educacional. Evidenciando que las creencias de autoeficacia en la solución de tareas de sucesiones disminuyen a medida que los estudiantes avanzan en el nivel educativo y los participantes del estudio de género masculino poseen creencias de autoeficacia más fuertes que el género opuesto, pero esta, es independiente a la edad de los estudiantes. Además, los estudiantes poseen creencia de autoeficacia negativa en la solución de las tareas de sucesiones en el contexto computacional debido a la falta de articulación de los contenidos matemáticos en la programación de los computadores. Por tanto, consideramos que esta temática, creencias de autoeficacia, merece una profundización mayor, en términos de investigaciones, ya que posee fuertes influencias en el aprendizaje de las matemática en los alumnos de la Educación Básica.

Referencias y bibliografía

Álvarez, L. M. R. (2012). *Patrones y Regularidades Numéricas: Razonamiento Inductivo*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Bandura, A. (1986). Social foundations of thought and action. *Englewood Cliffs*, NJ, 1986.

Bandura, A. (1994). Self-efficacy. En Ramachaudran, V. S. (Ed.), *Encyclopedia of human behavior* (*4*, pp. 71-81). New York: Academic Press. (Reprinted in H. Friedman [Ed.], Encyclopedia of mental health. San Diego: Academic Press, 1998).

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. New York, NY, US: W H Freeman/Times Books/ Henry Holt & Co.

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: Um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico*. (Tesis doctoral). Universidad de Minho, Braga, Portugal.

Brito, M. R F. & Souza, L. F. N. I. (2015). Autoeficácia na solução de problemas matemáticos e variáveis relacionadas. *Temas em Psicologia, 23*(1).

Bzuneck, J. A. (2001). As crenças de auto-eficácia e o seu papel na motivação do aluno. En E. Boruchovitch & J.A. Bzuneck (Org.) *A Motivação do Aluno: Contribuições da Psicologia Contemporânea* (pp. 116-133). Petrópolis: Editora Vozes.

Cañadas, M. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. (Tese de doutorado). Universidade de Granada, Granada, Espanha.

Caprara, G., Barbaranelli, C., Steca, P., & Malone, P. (2006). Teachers' self-efficacy beliefs as determinants of job satisfaction and students' academic achievement: A study at the school level. *Journal of School Psychology, 44*(6), 473–490.

Dobarro, V.R. (2007). *Solução de problemas e tipos de mente matemática: relações com as atitudes e crenças de autoeficácia*. (Tesis doctoral). Universidad Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Sexta Edición. Editorial Mc Graw Hill. México.

López Vargas, O., & Triana Vera, S. (2013). Efecto de un activador computacional de autoeficacia sobre el logro de aprendizaje en estudiantes de diferente estilo cognitivo. *Revista Colombiana De Educación,* (64), 225.244.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). República de Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá.

Morais, J. A. R. S (2016). *Atribuição de sucesso e fracasso e as crenças de autoeficácia Matemática: Um estudo com alunos do Ensino Médio*. (Tesis de Maestría). Universidad Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", Bauru, Brasil.

Morales, R. (2013). *Pensamiento lógico matemático en alumnos de 6-7 años en tareas de seriaciones*. (Tesis de maestría). Universidad de Granada, Granada, España.

Moreno, Y. C. (2017). *Validación de la teoría cognitivo social del desarrollo de la carrera en el contexto colombiano*. (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.

Patrício, A. S. A. (2012). *Crenças de autoeficácia e objetivos: um estudo exploratório*. (Tesis de maestría). Universidad de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Pérez Palencia, M. (2017). El pensamiento computacional para potenciar el desarrollo de habilidades relacionadas con la resolución creativa de problemas. *3cTIC: cuadernos de desarrollo aplicados a las TIC, 6*(1), 38-63.

Pinheiro, A. C. (2018). *O ensino de álgebra e a crença de autoeficácia docente no desenvolvimento do pensamento algébrico*. (Tesis de Maestría). Universidad Estadual Paulista "Julio de Mesquita

Filho”, Bauru, Brasil.

Rodrigues, C. S. (2015). *Crenças de autoeficácia matemática na Educação de Jovens e Adultos: um estudo com alunos de Ensino Médio de Divinópolis (MG)*. (Tesis de Maestría). Universidad Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Brasil.

Sander, G. P. (2018). *Um estudo sobre a relação entre a crença de autoeficácia na resolução de tarefas numéricas e o sentido de número de alunos do Ciclo de Alfabetização*. (Tesis de doctorado). Universidad Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”, Bauru, Brasil.

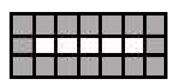
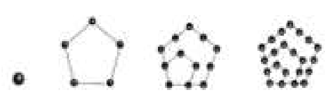
Souza, L. F. N. I., & Brito, M. R. F. (2008). Crenças de auto-eficácia, autoconceito e desempenho em matemática. *Estudos de Psicologia, 25*(2), 193-201.

Valencia-Vallejo, N., López-Vargas, O., & Sanabria-Rodríguez, L. (2016). Self-efficacy in computer-based learning environments: A bibliometric analysis. *Psychology, 7*(14), 1839-1857.

Zapatera Llinares, A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. una trayectoria de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(1), 87-114.

Apéndice A

Algunas tareas presentadas en el cuestionario de creencias de Autoeficacia en el contexto matemático y computacional.

Nº	Tarea	Grado de confianza				
1	Se tiene la siguiente secuencia de números: 3,7,13,21... Escribe los cuatro números siguientes de la secuencia, justificando tu respuesta.	1	2	3	4	5
3	Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:  Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:  ¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1432 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que hemos hecho en el dibujo?, justificando tu respuesta.	1	2	3	4	5
5	Observa los siguientes números pentagonales:  $P_1=1$ $P_2=5$ $P_3=12$ $P_4=22$ Expresar matemáticamente, mediante una formula, los números pentagonales.	1	2	3	4	5
6	Observa las siguientes figuras que representan mesas y sillas. 					
6A	Si continuamos la figura, dibujando otra mesa, o sea 4 mesas ¿Cuántas sillas hay?	1	2	3	4	5
6C	Sin hacer dibujos, ¿Cuántos estudiantes pueden sentarse si colocamos 100 mesas?	1	2	3	4	5
6D	Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.	1	2	3	4	5
6E	Y si colocamos m mesas ¿Cuántos estudiantes pueden sentarse?	1	2	3	4	5
6F	¿Cuántas mesas necesitaríamos en una sala de clase para sentar a 12 estudiantes?	1	2	3	4	5
6I	Expresar mediante una fórmula matemática la relación inversa de las variables de la sucesión.	1	2	3	4	5
7	Identificar software de programación para páginas web, video juegos o aplicaciones de celulares.	1	2	3	4	5
10	Expresar de forma escrita (código) la programación de las soluciones de las 6 tareas para cualquier valor en el software conocido.	1	2	3	4	5

Fuente: Autoría propia (link: https://goo.gl/forms/xqCKfJdt8AXzgyc73).

Analizando funciones lineales a partir de situaciones del entorno[1]

Lina Marcela **Angulo** Valencia
Institución Educativa Luis Carlos Valencia
Colombia
lina-mar88@hotmail.com

Delimitación del estudio

La enseñanza de las matemáticas es por lo general atribuida a prácticas mecanizadas y memorísticas, con lo cual se descuida el desarrollo del pensamiento espacial, numérico, métrico estocástico y variacional; este último comúnmente abordado en la escuela secundaria. Esta situación se convierte en una problemática por cuanto el pensamiento variacional, tal como lo reconoce el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, 2006), debe abordarse desde el inicio de la escolaridad e integrando las otras formas del pensamiento matemático. Desde esta perspectiva, se promueve el estudio de situaciones de variación y cambio, lo que implica, necesariamente, estudiar el concepto de función, dado que, como lo sostiene (Freudenthal) (1983), es el concepto que matematiza estas situaciones.

Sin embargo, se evidencia que, por lo general, el estudio de las funciones suele presentarse al margen del análisis de situaciones variables que posibiliten formas de analizar e interpretar la dinamicidad de las cantidades que ahí se presentan (Sierpinska, 1992), en este sentido, se tiende más a favorecer una enseñanza en la presentación de definiciones, ejemplo instrucción o estudio de modelos de funciones y posteriormente ejercicios. Por ello es necesario el desarrollo de secuencias didácticas que planteen estrategias distintas a las tradicionales para abordar en el aula el concepto de función, es necesario considerar la investigación en Educación Matemática, los intereses de los estudiantes, el contexto cercano a ellos, así como, la incorporación de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), dado que~~,~~ el estudio de las funciones se puede optimizar con el uso de estos recursos. Es así como el trabajo que aquí se reporta da cuenta del diseño, implementación y análisis de resultados de una secuencia didáctica.

Marco de referencia conceptual

Para el diseño de la secuencia, así como para el análisis de los resultados fruto de su implementación con el grupo de estudiantes focalizados, se tomó como referente algunos elementos de política pública nacional (MEN, 1998, 2006), así como los cuatro primeros niveles de razonamiento covariacional presentados por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu. (2003). Los cuales exponen: nivel 1. Se relaciona con la acción mental de coordinar el cambio de una variable

[1] La realización de este trabajo fue posible gracias al *Programa de cualificación y acompañamiento a docentes del municipio de Jamundí en el diseño de Secuencias Didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas en sus estudiantes*, desarrollado por la Universidad del Valle y la fundación EPSA, con los docentes Juan Diego Mena y Nivaldo Carabali y con el acompañamiento del profesor Mg. Cristian A. Hurtado Moreno.

con cambios en la otra variable, nivel 2. Hace referencia a la acción mental de coordinar la dirección del cambio de una variable con cambios en la otra, n*ivel 3.* Indica la acción mental de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra y n*ivel 4.* Es la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. Además se consideran los planteamientos de Sierpinska (1992) sobre las condiciones para la comprensión del concepto de función.

Diseño metodológico y análisis de los datos

La secuencia didáctica diseñada se configura por distintas tareas agrupadas en cuatro situaciones: analizando un plan para celular, comparando planes de telefonía móvil, analizando desplazamientos gráficamente, y estudiando el crecimiento de 3 fetos; todos relacionados con situaciones de variación y cambio. Se implementó con 27 estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Luis Carlos Valencia, institución rural del municipio de Jamundí en el Valle del Cauca, Colombia. Para el análisis de los resultados se procedió con una metodología cualitativa de tipo descriptiva, en la cual se consideró tanto las unidades de análisis dispuestos por los referentes conceptuales como los propósitos de las tareas de cada situación, para revisar las producciones escritas de los estudiantes así como sus argumentos en las diferentes intervenciones realizadas en el aula. En términos generales, el análisis de las producciones de los estudiantes permitió constatar que la mayoría de ellos logran pasar sin mayor dificultad por los niveles 1 al 3 de razonamiento covariacional, y varios de éstos llegan a identificar tanto analítica como gráficamente que la razón de cambio en las situaciones presentadas es constante, para lo cual el uso de Geogebra fue fundamental.

Conclusiones y Reflexiones

Se logró evidenciar el fortalecimiento de algunos procesos generales de aprendizaje en los estudiantes tales como la modelación, el razonamiento y la comunicación. En general, durante el desarrollo de las tareas se observó trabajo colaborativo entre los estudiantes, notándose interés y participación permanente. Se puso en evidencia la importancia del uso de Geogebra en el aula, ya que facilitó el análisis de aspectos importantes de la función lineal que no se habrían logrado de esta manera mediante el uso de lápiz y papel. También se puso de manifiesto la importancia del trabajo en el aula a partir de situaciones problemáticas contextualizadas, las cuales deben ser integradas en las planeaciones en tanto que los estudiantes le encuentran más sentido y significado al aprendizaje de las matemáticas.

Referencias Bibliográficas (Bibliografía y referencias)

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, 8(2), pp. 121-156.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Reidel, Dordrecht. Kluwer Academic, Plenum Publishers, New York

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). *Lineamientos curriculares para matemáticas*. Bogotá, Colombia: Autor.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia: Autor.

Sierpinska, A. (1992). Sobre la comprensión de la noción de función (Traducción de Cesar Delgado). En E. Dubinski and G. HAarel (eds.), *The Concept of function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, Vol. 25, pp. 25-58 Washington, DC.: Mathematical Association of American

Construcción del significado de las expresiones algebraicas a partir del Diseño de un experimento de enseñanza centrado en el álgebra como Actividad

Mónica **Correa** Ángel
Área de Educación Matemática, Universidad del Valle
Colegio Jefferson
Colombia
correa.monica@correounivalle.edu.co

Resumen

Este documento presenta los elementos teóricos y metodológicos que sustentan una situación de enseñanza para introducir el álgebra en nivel octavo. Esta se desarrolló en el marco de la maestría en educación matemática, y se organiza en relación con la metodología de los Experimentos de enseñanza y recoge la propuesta de Kieran (2007) y Radford (2006) sobre la concepción del álgebra y el desarrollo del pensamiento algebraico, respectivamente. La búsqueda en la investigación se centró en un análisis pragmático del discurso, retomando elementos expuestos por van Dijk (1980) y Searle (1992, 2005, 2009) como una forma de reconocer y caracterizar, en los procesos discursivos de los estudiantes, una construcción de significado de las expresiones algebraicas; por lo que la situación de enseñanza introdujo a los estudiantes a las expresiones algebraicas mediante la comprensión y el uso con sentido de los diversos sistemas matemáticos, sin negar el desarrollo de habilidades procedimentales.

Palabras clave: Experimento de enseñanza, pensamiento algebraico, análisis pragmático del discurso, procesos discursivos, construcción de significado.

Introducción

Este trabajo presenta una propuesta de enseñanza guiada por la metodología de los Experimentos de enseñanza (Cobb, Steffe & Thompson, 2000), la cual retoma aspectos fundamentales de la práctica educativa, por ejemplo, la necesidad de reconocer al educador como sujeto crítico de su quehacer y la revisión analítica de las situaciones de clase para la enseñanza de las matemáticas. Particularmente, en esta comunicación se expone el resultado de la implementación de un Diseño que surge de una crítica de la enseñanza del álgebra, específicamente de su introducción en la escuela; pues si bien, es cierto que en el marco de distintas investigaciones y de los referentes curriculares (MEN, 1998, 2006) se explicita la necesidad de un aprendizaje del álgebra desde la comprensión de la variación y el cambio, la realidad de la enseñanza en Colombia parece no dar cuenta de esto.

La principal cuestión que dio lugar a la propuesta de enseñanza aquí expuesta fue la crítica que se puede plantear en relación con las formas de introducción al álgebra en la escuela, pues la concepción que un educador tiene sobre el álgebra, sin lugar a dudas, determina sus prácticas de enseñanza; por ejemplo, si asume este tópico matemático como una manipulación de símbolos, entonces centrará su praxis en la movilización exclusiva de propiedades y operaciones posibles dentro del lenguaje alfanumérico. En este sentido, se retoma en este trabajo el modelo de Kieran (2007) en el que sintetiza y organiza la idea del álgebra como una *actividad,* a partir de las propuestas de otros autores, quienes han señalado que esta debe entenderse como una acción sobre los objetos que den lugar a una construcción de estos objetos algebraicos y a sus transformaciones posibles.

En coherencia con esta idea se propone el diseño de la situación de enseñanza en la que los estudiantes, a través de un proceso de análisis sobre las características de una manilla en mostacilla checa (ver *Ilustración 1*), cantidad de hilos y sus medidas, número de mostacillas y patrones tejidos, pudiesen comprender las magnitudes que se involucran en el tejido de dichas manillas, y las relaciones que se dan entre estas; para que posteriormente, mediante el diseño y elaboración de sus propias manillas, puedan avanzar en el desarrollo de un pensamiento algebraico, particularmente, en relación con tres elementos que ha propuesto Radford (2006): la designación simbólica, la indeterminancia y la analiticidad.

Ilustración 1. Manillas en mostacilla checa.

Así, la organización que se desarrolla en esta comunicación corresponde a la presentación del marco metodológico y cómo sus elementos posibilitaron el Diseño de un experimento de enseñanza; por tanto, se señalan los referentes teóricos, en particular se hace énfasis en la meta de aprendizaje planteada para el Diseño, la conjetura que guía la situación de enseñanza, el análisis local y retrospectivo.

Diseño de un experimento de enseñanza

Como se ha señalado en la introducción, los referentes centrales en esta investigación corresponden a la metodología de los Experimentos de enseñanza, la cual establece una estrecha relación entre los referentes teóricos, el diseño de una situación de enseñanza y el análisis del Diseño. Además, los referentes sobre el álgebra escolar y el desarrollo del pensamiento algebraico; y los referentes sobre un análisis pragmático del discurso. Estos se presentan a continuación con la intención de exponer su incidencia en el diseño de la situación de enseñanza, el análisis de esta y la determinación de cómo finalmente aportó a la construcción del pensamiento algebraico de los estudiantes.

Así, este trabajo muestra el Diseño de un experimento de enseñanza para la introducción al álgebra en nivel octavo, el cual se fundamenta en la concepción del álgebra como una *Actividad* y un análisis pragmático del discurso para comprender el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes. El diseño, que se compuso de dos situaciones, se propuso a tres grupos de estudiantes de nivel octavo, cuyas edades se encuentran entre los 14 – 15 años.

La primera situación, que es objeto de presentación en esta comunicación, se compone de tres actividades con las que se pretendía que los estudiantes conocieran los materiales requeridos para el tejido de manillas en mostacilla, y a partir de ellos establecieran formas de calcular dichos materiales, lo cual supone que mediante estas formas los estudiantes se podrían acercar a las expresiones algebraicas. La segunda situación se propuso con el objetivo de que los estudiantes, al tener la necesidad de preparar los materiales para el tejido de su propia manilla, pusieran en juego las relaciones entre las magnitudes que tuvieron lugar en la situación 1 y avanzaran en la construcción de significado de las expresiones algebraicas.

Los Experimentos de enseñanza se enmarcan en la Investigación Basada en Diseño, y se constituyen de dos aspectos cíclicos, el primero correspondiente al diseño y planeación de su puesta en acto, y el segundo a los análisis; este último se da en dos momentos: los análisis locales y el análisis retrospectivo.

En la primera fase, *planeación del Diseño*, se establecen los elementos fundamentales que se consideran en el experimento, es decir que en esta se define el fenómeno y los elementos de análisis sobre los que gira el experimento. En particular, es indispensable en esta fase aclarar que el Diseño se concibe como todos aquellos elementos que constituyen la situación de enseñanza y no solo como el conjunto de tareas propuesto para dicha situación.

En el marco de esta metodología es fundamental la construcción de una meta de aprendizaje y una conjetura que guían el experimento, las cuales pueden ser revisadas y ajustadas en el transcurso de la implementación. Estas son expresiones que recogen las propuestas teóricas de la investigación, con la diferencia de que la primera da cuenta del propósito que se tiene con el Diseño del experimento, mientras la segunda es “una proposición en la que se determinan las condiciones que deben tener las situaciones propuestas para posibilitar el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes, los procesos que se espera que ellos realicen, las intervenciones del docente y demás” (Correa, 2017, p. 32), esto implica que la conjetura expresa el qué y cómo se va a enseñar.

De manera específica, la meta de aprendizaje que se estableció para este Diseño pretendía promover la construcción de un significado de los elementos constitutivos de las expresiones algebraicas, a partir de la comprensión de las cantidades, que se involucran en el diseño y elaboración de manillas, y las relaciones entre estas (Correa, 2017). La conjetura de la primera situación establece la necesidad de identificar magnitudes para aproximarse a las expresiones algebraicas y comprender las relaciones entre ellas, para precisar aquello que se quiere enseñar; y, mediante la determinación de la cantidad de los materiales necesarios para tejer una manilla, establecer una estrategia de enseñanza, esta se expresó de la siguiente manera: “la identificación de cantidades variables y constantes, y establecer relaciones entre ellas para determinar la cantidad de materiales requeridos en la elaboración de distintos diseños de manillas, posibilita una aproximación a las expresiones algebraicas.” (Correa, 2017, p. 34)

En la primera actividad de la situación 1 se propuso una búsqueda de los materiales requeridos en el tejido de manillas en mostacilla checa, lo cual permitió establecer unos elementos básicos como el telar, el hilo, aguja, las mostacillas, entre otros; lo cual generó la discusión sobre aspectos más puntuales en el tejido como, por ejemplo, conocer qué condiciones tienen los hilos que se utilizan y cómo optimizar este material. Las anteriores observaciones posibilitaron, finalmente, establecer unos acuerdos para referirse al proceso de tejer la manilla, por ejemplo, al haber dos tipos de hilos se nombró hilo vertical a aquellos que determinan el largo de la manilla e hilo de entrelazar a aquel que atravesaba las mostacillas.

En la segunda actividad, se propuso el análisis de los materiales utilizados en una manilla que se entregó a cada pareja. Este análisis centraba la atención en el hilo vertical, el hilo de entrelazar y el número de mostacillas, particularmente en la forma de sus medidas o cantidades, como se muestra en la ilustración 2.

> **E10:** Y el hilo que entrelaza, en la b, pues el hilo que entrelaza la fila de mostacilla (señala la forma en que se ubica este hilo en la manilla), que pasa doble, sola es 0.8 (indica la operación que han realizado en su hoja) y lo multiplicamos por 2 porque pasa dos veces por la misma línea, y entonces da 1.6 y el 1.6 por el número de filas (señala en la manilla cómo se ubican las filas) lo multiplicamos, que son 56, y nos dio 89.6.

Ilustración 2. Expresión de los estudiantes sobre la forma de calcular el hilo de entrelazar

En cuanto a la actividad tres, los estudiantes establecieron algunas generalidades sobre el cálculo de los hilos y la cantidad de mostacilla, lo cual les permitió avanzar hacia el desarrollo del pensamiento algebraico en tanto a las formas de nombrar las magnitudes, las operaciones que proponen y, sobre todo, la posibilidad de no necesitar conocer el valor de una cantidad determinada para realizar dichas operaciones.

Respecto a la segunda fase, la e*xperimentación*, se incluye no solo la puesta en práctica de la situación de enseñanza propuesta, sino que se considera como parte de la experimentación las reuniones previas que tiene el equipo investigador para revisar la propuesta, ultimar detalles tanto de la conjetura como los métodos de selección de la información, entre otras.

En esta fase de experimentación tienen un lugar crucial los **análisis locales**, los cuales dieron lugar al reconocimiento de las magnitudes señaladas anteriormente (hilo vertical, hilo de entrelazar, y número de mostacillas), y las expresiones lingüísticas utilizadas por los estudiantes para referirse a las formas de calcular las cantidades asociadas a estas. Particularmente, los análisis locales posibilitaron el reconocimiento de unos elementos pragmáticos del discurso para comprender la construcción de significado de las expresiones algebraicas que los estudiantes habían desarrollado a través de la situación de enseñanza.

Finalmente, el **análisis retrospectivo**, se realiza al finalizar la aplicación de las situaciones de enseñanza, apunta al estudio de los resultados obtenidos en dicha aplicación, es decir configurar cuáles son los aportes a los que se llega, cuáles son las observaciones resultantes de la actividad, las limitaciones del experimento y los posibles caminos que se siguen. En esta fase se plantean dos propósitos esenciales: comprender la situación de enseñanza en su globalidad y reconocer los cambios generados a partir de las intervenciones del equipo investigador (Molina, 2011).

Para estos dos análisis se presentan, a continuación, los referentes teóricos que dieron lugar a la comprensión de la construcción que realizaron los estudiantes de las expresiones algebraicas a partir de la situación propuestas. Dichos referentes corresponden a una perspectiva sobre el álgebra escolar y el desarrollo del pensamiento algebraico y a un análisis pragmático del discurso; con base en estos, se pudo reconocer en las expresiones discursivas de los estudiantes relaciones entre las cantidades involucradas, las cuales vistas desde la perspectiva de Radford (2006) permiten establecer un acercamiento al álgebra escolar entendida como una actividad y no como una manipulación de símbolos.

Una perspectiva sobre el álgebra escolar

Como se ha señalado anteriormente, la situación de enseñanza surge de reconocer el álgebra como una actividad, cuyo sustento fundamental es el modelo de Kieran (2007) en el que la enseñanza del álgebra escolar implica tres tipos de actividades: Generacional, Transformacional y Global/meta – nivel (GTG). Este modelo defiende ante todo la idea de enseñar el álgebra con apoyo en estas tres actividades y hace hincapié en la posibilidad de plantear situaciones de enseñanza que involucren dos o tres tipos de actividades. Dichas actividades mantienen una relación cíclica, en la que hay una construcción constante de significados y una manipulación de los objetos algebraicos en contextos específicos.

Particularmente, en este trabajo el diseño propuesto se relaciona con la *actividad Generacional*, en tanto que pretendió que los estudiantes construyeran un significado de las expresiones algebraicas a partir del establecimiento de relaciones entre cantidades que se involucran en el diseño y la elaboración de manillas. Con esta propuesta, se espera que los estudiantes logren una construcción del pensamiento algebraico, el cual Radford (2006) ha caracterizado con tres elementos: el sentido de la indeterminancia, esto dado que se reconoce en el álgebra objetos como las variables, los parámetros y la incógnita; la analiticidad, en el sentido de poder operar con estos objetos; y la designación simbólica, en cuanto a la posibilidad de designar con determinados signos. Esto conlleva a asumir el pensamiento algebraico como una forma de reflexionar matemáticamente, por lo que se puede suponer la necesidad de reconocer el razonamiento y el lenguaje algebraico como inherentes al pensamiento algebraico, como lo ha señalado Radford (2006).

Un análisis pragmático del discurso

Un análisis pragmático del discurso se ocupa no solo de las emisiones que realizan los hablantes sino de establecer una conexión con el contexto de enunciación, en la cual se identifica una situación en la que un hablante interactúa con otros, razón por la cual aquello que es enunciado cumple con unas condiciones y características particulares. Así, una propuesta en el marco de un análisis pragmático involucra a los *Actos de habla* como unidad mínima del discurso (Searle, 2005, 2009) y el reconocimiento de una *Intencionalidad* (Searle, 1992) al decir lo que se dice o al hacer cierto tipo de movimientos o gestos.

Debido a lo anterior, se presentan dos elementos del análisis del discurso: primero, se parte de reconocer que los discursos o conversaciones no se dan a través de Actos de habla independientes, sino que es a través de una Secuencia de actos de habla que un hablante puede expresar una idea alrededor de un tema, específicamente los elementos constitutivos de las expresiones algebraicas; y segundo, la posibilidad de abstraer del discurso de los estudiantes Macroactos que den cuenta de la construcción que han realizado de dicho significado. Estos Macroactos están asociados principalmente a un acto global o idea principal que se expresa mediante una Secuencia de actos.

> Un Macroacto de habla es un acto de habla que resulta de la realización de una secuencia de actos de habla linealmente conectados. Los actos de habla se dicen linealmente conectados si i) el discurso que los realiza es linealmente coherente y ii) satisfacen las condiciones para las secuencias… (van Dijk, 1996, p. 72)

Así, mediante un análisis del discurso se desarrolló el análisis local de la implementación de la situación 1, lo cual dio lugar al reconocimiento de expresiones lingüísticas que dan cuenta distintos procesos para calcular las cantidades asociadas a cada magnitud. Con base en la implementación, se identificaron tres procesos sobre la forma de calcular la medida del hilo vertical y el hilo de entrelazar.

Tabla 1

Procesos de los estudiantes para calcular las medidas de las cantidades involucradas en el tejido de manillas.

		Cálculo de la medida el hilo vertical	**Cálculo de la medida el hilo de entrelazar**
Procesos realizados por los estudiantes	P1	Toma en cuenta la medida del hilo en el que se teje el diseño y la medida del hilo que se necesita para realizar la trenza de amarre, incluyendo unos centímetros adicionales porque con la trenza se encoje el hilo.	Toman la medida del largo de la manilla (correspondiente a la parte en la que hay mostacillas) y lo dividen entre la medida de una mostacilla (0.2 cm), para conocer cuántas filas habría en la manilla y estas multiplicarlas por el número de columnas, multiplicado por 2.
	P2	Solo toma en cuenta la medida del hilo en el que se teje el diseño y la medida del hilo que se necesita para realizar la trenza de amarre	Es el producto de las filas por 2 por el número de columnas
	P3	Solo toma en cuenta la medida del hilo en el que se teje el diseño, sin incluir en la medida del hilo unos centímetros adicionales para amarrar la manilla.	Se obtiene al multiplicar la fila por 2, sin considerar las veces que este debe pasar por toda la manilla.

Así, con base en los procedimientos realizados y las distintas expresiones de los estudiantes para referirse a las formas en que calcularon las cantidades correspondientes a las magnitudes involucradas en el tejido de manillas en mostacillas checas, se planteó el análisis retrospectivo en el que se estableció una relación entre la propuesta de desarrollo del pensamiento algebraico (Radford, 2006) y las expresiones tanto lingüísticas como no lingüísticas, para identificar una construcción de significado de las expresiones algebraicas que surgieron en el Diseño.

Análisis retrospectivo

La realización de este análisis retrospectivo inició con la determinación de las Secuencias de actos de habla que enunciaron los estudiantes para referirse a las formas de calcular la medida de las magnitudes involucradas (análisis local), en este proceso surgieron distintas Secuencias de actos de habla, que permitieron identificar las formas en que los estudiantes comprenden las relaciones entre las magnitudes. Esto implicó reconocer distintas funciones de los Actos de habla, para luego establecer el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes en tanto a la indeterminancia, designación de objetos y analiticidad que se promueve a través de este Diseño.

Por ejemplo, se pueden identificar expresiones en las que los estudiantes señalan que el número de hilos verticales está asociado al número de columnas más uno, lo cual es muestra de que reconocen que hay cantidades que, aunque sus valores no siempre son conocidos, se pueden operar con un valor constante. En relación con este mismo componente, los estudiantes indican que el número de mostacillas se puede obtener del producto entre número de columnas y número de filas, más, el número de mostacillas que hay en la zona de cierre de la manilla.

Expresiones como *"Aquí para saber cuánto hilo de entrelazado es el ancho de la manilla* *por dos por el número de filas"*, permiten señalar que los estudiantes identifican relaciones entre las cantidades sin necesidad de indicar unos casos específicos, lo que refleja un acercamiento a la construcción de expresiones algebraicas en un lenguaje natural, lo cual responde de manera parcial a la meta de aprendizaje propuesta, y da cuenta de la conjetura planteada para la situación 1, y posibilitó que en la situación 2 los estudiantes lograran después de las discusiones de clase, reconocer el sentido que tienen las expresiones algebraicas en un lenguaje alfanumérico, tal como se muestra en la Ilustración 3.

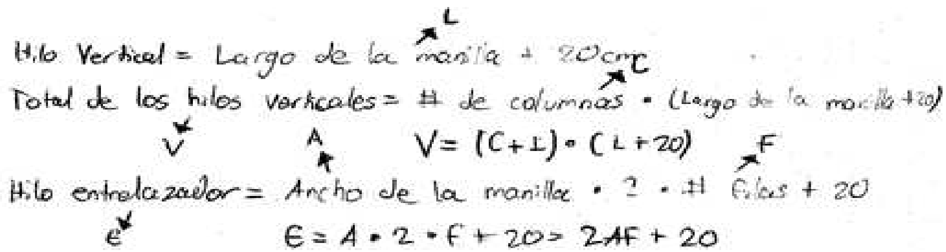


Ilustración 3. Producción de los estudiantes.

Conclusiones

Un primer resultado recoge la postura que se planteó sobre la concepción del álgebra como *actividad*, pues si bien se reconocen las perspectivas funcional, resolución de problemas, modelación y generalización como perspectivas potentes para la enseñanza; es necesario examinar en la práctica docente formas de ahondar en situaciones que, de alguna manera, engloben distintos aspectos que son propios del álgebra, tal como lo hacen dichas perspectivas de forma puntal. Es decir, se propone finalmente que la enseñanza del álgebra se pueda abordar en relación con las actividades Generacional, Transformacional y Global meta, debido a que en este marco se pueden potencializar las perspectivas antes mencionadas, y que los maestros propongan situaciones integradoras que den cuenta de la riqueza del álgebra no solo en sus formas de representación, sino en el desarrollo de un pensamiento algebraico.

La gestión de la profesora, durante las discusiones de cierre de la situación 1, se centró en establecer con los estudiantes formas de expresión más generales de las relaciones que habían planteado; esto conllevó a plenarias en las que los estudiantes ponían de manifiesto las formas de calcular las medidas de los hilos. En este sentido, se llegó a afirmaciones como: el hilo vertical es el largo de la manilla más 20 cm por el número de columnas más 1; y el hilo de entrelazar es el ancho de la manilla por 2, por el número de filas más 20 cm. Dichas expresiones, en las plenarias, fueron transformándose en representaciones propiamente algebraicas al convenir con los estudiantes que las cantidades como el largo de la manilla, el número de columnas, el número de filas, y demás cantidades se pueden representar mediante signos (letras) cuyas relaciones se marcan con operaciones. En este sentido, se resalta el lugar del investigador como profesor que se propone en los Experimentos de enseñanza, debido a que se posibilita una continuidad entre las situaciones propuestas en la investigación y otras actividades de clase, cuestión que en el trabajo investigativo permitió identificar un avance importante en planteamiento y resolución problemas en términos alfanuméricos como las ecuaciones e inecuaciones.

En relación con el diseño de la situación surgen inquietudes sobre otras formas de llevar a cabo la implementación de esta, pues bien podría plantearse que los estudiantes aprendan a tejer estas manillas y que luego se realice un análisis de este proceso en términos matemáticos. Así mismo, queda abierta una tercera situación sobre el análisis de los patrones que se tejen; dicho análisis implicaría, por un lado, que con base en los diseños de manillas identificar la organización de los colores, esto es reconocer una variación de las mostacillas según el lugar que ocupan y la forma que producen, y por otro, promover la explicación sobre cómo fue pensado el diseño, potencializando la lengua natural para referirse a los aspectos que componen los patrones y las formas visuales de reconocerlos.

Finalmente, el trabajo investigativo permitió desarrollar una serie de actividades con las cuales los estudiantes lograron avanzar en su formación de pensamiento algebraico. Los análisis desarrollados pusieron en juego diversas perspectivas teóricas que permitieron avanzar en la comprensión del papel de la lengua natural en la formación de pensamiento matemático.

Referencias y bibliografía

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. *Approaches to algebra* (pp. 3-12). Springer Netherlands.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. *A. Kel & R. Lesh (Eds.), Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education, Cap. 12* (pp. 307 - 326). N Jersey: Lawrence Earlbaum.

Correa, M. (2017). *Un experimento de enseñanza para la introducción al álgebra. Análisis del discurso para la comprensión de la construcción de significado de las expresiones algebraicas*. Trabajo de maestría no publicado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

van Dijk, T. A. (1996). Estructuras y funciones del discurso: Una introducción interdisciplinaria a la lingüística del texto y a los estudios del discurso. México, D.F: Siglo XXI editores.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. *The handbook of research on mathematics education*. (Vol. 2,707-762). Greenwich, Conn: Information Age.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29,1, 75-88. MEN. (1998). Lineamientos curriculares. Bogotá, D.C.: Ministerio de Educación Nacional

MEN (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá, D.C.: Ministerio de Educación Nacional

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking & Learning*, 5, 1, 37-70.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, North American chapter (Vol. 1, pp. 2-21).

Searle, J. (1992). Intencionalidad, un ensayo en la filosofía de la mente. Madrid, España: Tecnos

Searle (2005). Una taxonomía de los actos ilocucionarios. *La búsqueda del significado: Lecturas de filosofía del lenguaje* (pp. 415- 430). Madrid, España. Tecnos.

Searle, J. (2009). Actos de habla ensayo de filosofía del lenguaje. Madrid, España: Ediciones Cátedra.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), Research design in mathematics and science education* (pp. 267- 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Sobre la configuración de un modelo local para identificar y caracterizar formas de pensamiento algebraico

Johnny Alfredo **Vanegas** Díaz
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
johnny.vanegas@correounivalle.edu.co

Resumen

La presente comunicación se inscribe en el marco del *early algebra* y se ocupa de una problemática asociada con la naturaleza del pensamiento algebraico. Inicialmente se discute la problemática existente en torno a la naturaleza del pensamiento algebraico y se deja entrever que atender este asunto puede verse como una posibilidad teórica para generar análisis profundos sobre las filiaciones, rupturas y discontinuidades entre la aritmética y el álgebra. Seguidamente se presentan y discuten las reflexiones teóricas que dieron lugar a la configuración de un modelo de algebrización, que incluye tres componentes fundamentales: *lo relacional*, *lo analítico* y *lo notacional*, el cual puede resultar útil para identificar y caracterizar formas de pensamiento algebraico, específicamente aquellas que emergen en la actividad matemática desplegada por los estudiantes como resultado del trabajo con tareas relativas a las ecuaciones lineales. Finalmente se exponen algunas reflexiones y se presentan nuevas ideas para seguir investigando.

Palabras clave: early algebra, formas de pensamiento algebraico, resolución de ecuaciones lineales, modelo de algebrización

Introducción

Desde hace unas décadas se viene considerando un cambio de perspectiva, hacia un álgebra para todos, como una red de conocimientos y habilidades que los estudiantes pueden desarrollar a través de todo su ciclo escolar (Kaput, 2000). Este enfoque, reconocido internacionalmente como *early algebra* plantea: a) la introducción de formas de pensamiento algebraico en la matemática escolar, pretendiendo la algebrización del currículo; y b) nuevos puntos de vista entre la aritmética y el álgebra que promuevan continuidad entre estos dominios (Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006; Kaput, 2000).

En consonancia con la visión del early algebra se apertura un nuevo espacio curricular para las matemáticas del siglo XXI; se incorpora un nivel de coherencia, profundidad y poder a la matemática escolar, tanto curricularmente como cognitivamente, y finalmente, se marginan los cursos abruptos, aislados y superficiales del álgebra de la escuela secundaria (Kieran, 2004).

Si bien, la algebrización del currículo aliviana, en gran medida, la remarcada transición de la aritmética al álgebra, también es cierto que genera un nuevo campo de discusión en torno a: 1) la naturaleza del pensamiento algebraico y 2) la manera en que dicho pensamiento puede ser desarrollado en el ámbito escolar (Aké, 2013). Aunque ambos aspectos se encuentran íntimamente relacionados, el énfasis de esta comunicación está puesto sobre el primero de ellos, entre otros aspectos, porque durante los últimos años, numerosas investigaciones (e.g., Carraher et al., 2006; Godino, Aké, Gonzato, & Wilhelmi, 2014) han señalado la importancia de clarificar y profundizar en la comprensión de los procesos involucrados en el pensamiento algebraico.

En el marco de las consideraciones anteriores, esta comunicación aporta al señalado panorama de discusiones teóricas –alrededor de la naturaleza del álgebra escolar–; al poner de manifiesto el proceso constitutivo de un modelo local de algebrización, que incluye tres componentes fundamentales: *lo relacional*, *lo analítico* y *lo notacional*.

Contextualización de la problemática de interés

Diferentes investigaciones en el campo de la Educación Matemática dejan entrever que se conoce poco sobre la naturaleza del pensamiento algebraico. La complejidad detrás de una definición precisa y concisa del pensamiento algebraico es producto de la amplia gama de objetos y procesos relacionados, así como de las diversas formas de concebir el pensamiento en general (Radford, 2012). Por su parte, Aké (2013), indica que es necesario clarificar la naturaleza del álgebra escolar y responder a cuestiones, tales como: ¿Qué formas de razonamiento son algebraicas? y ¿Cuáles son las características de esas formas de razonamiento?. En esta misma dirección, Vergel (2014) pone de manifiesto la necesidad de identificar y caracterizar las formas de pensamiento algebraico que emergen en estudiantes jóvenes cuando trabajan con generalización de patrones.

Si bien, desde la perspectiva de la *generalización de patrones* hay numerosas investigaciones (e.g., Radford, 2014; Vergel, 2014) que presentan resultados entorno al pensamiento algebraico en estudiantes jóvenes; se conoce muy poco acerca de las formas de pensamiento algebraico de estos estudiantes, frente a situaciones inscritas en el contexto de las ecuaciones. De hecho, pese a que existe un claro conceso que actividades relativas a la formación y manipulación de expresiones simbólicas tienen relación directa con formas de pensamiento algebraico, sigue siendo discutible los **contornos** de la actividad algebraica en actividades que incluyen la resolución de problemas y la equivalencia de expresiones aritméticas (Aké, 2013). En consecuencia, parece necesario incursionar en el contexto matemático de las ecuaciones y re-descubrir por qué este contexto sigue ofreciendo elementos de estudio que son importantes para comprender la actividad algebraica desplegada por los estudiantes.

Abordar el estudio del pensamiento algebraico desde un contexto simple, como es: la resolución de ecuaciones lineales, contribuye a la generación de espacios para indagar sobre las formas en que los estudiantes hacen explicito su pensamiento algebraico, pues tal como lo indican, Carpenter, Levi, Franke, & Zeringue (2005) hay mucho que aprender de las generalizaciones que hacen los estudiantes acerca de las propiedades de los números y las operaciones y de cómo ellos exploran y trabajan con relaciones entre cantidades.

Hacia la construcción de un modelo de algebrización

Algunas conceptualizaciones sobre el pensamiento algebraico

Dentro de la diversidad de perspectivas teóricas, se pueden reconocer diferentes maneras de entender y conceptualizar el pensamiento algebraico. Por un lado, Radford (2014) en el marco de la *teoría de la objetivación* define el pensamiento algebraico como una forma particular de reflexionar matemáticamente, la cual se manifiesta a través de diferentes recursos semióticos de objetivación, incluso sin hacer uso del simbolismo alfanumérico. De hecho, Vergel (2014) siguiendo esta misma dirección, señala que tales manifestaciones, que dan cuenta del proceso de conocer, no pueden ser descritas únicamente en términos de prácticas discusivas y por lo tanto, hace énfasis en la importancia que trae consigo los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes movilizan cuando trabajan con ideas matemáticas. Por otra parte, Godino et al. (2014), en el marco del *enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática* (EOS) prefieren hablar en términos del razonamiento algebraico. Definen este tipo de razonamiento como una zona transicional, desde la aritmética hasta el álgebra, en la que se admite la presencia de tipos de tareas, objetos y procesos algebraicos de una forma gradual pero creciente.

Aportes desde la resolución de problemas y la modelación matemática

Lins (1992) desarrolla una caracterización del *pensamiento algebraico* que incluye: *pensar aritméticamente*, *pensar internalistamente* y *pensar analíticamente*. Fundamenta tal caracterización en una revisión de literatura sobre investigaciones previas concernientes a dos tópicos: a) desarrollo histórico del álgebra y conocimientos matemáticos en culturas matemáticas culturalmente situadas (e.g., aspectos de la cultura matemática griega, china, etc.) y b) aprendizaje y enseñanza del álgebra (e.g., dificultades causadas por el uso de la notación literal). Para este autor, el *pensamiento algebraico* es una forma de modelación y de manipulación de modelos, como una vía de organización del mundo que involucra diversas manifestaciones. En concreto, el pensamiento algebraico puede entenderse como una "intención"; es decir, una manera en la cual una persona quiere hacer las cosas. Incluso si los conceptos o métodos necesarios para llevar a cabo esa intención no están disponibles o desarrollados.

Aritmética generalizada y pensamiento relacional

Jacobs, Franke, Carpenter, Levi, & Battey (2007) caracterizan el pensamiento algebraico desde la perspectiva de la aritmética generalizada y el estudio de las relaciones. La caracterización del *pensamiento relacional* incluye, la observación de expresiones y ecuaciones en su totalidad, en lugar de los procedimientos que se llevan a cabo paso a paso. Implica cierto nivel de conocimiento de las operaciones y de las propiedades de los números, pero no necesariamente una comprensión completa de ellas y de sus definiciones formales. La idea es que al poner la atención sobre las relaciones y propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas, en lugar de centrarse en los procedimientos de cálculos de respuestas, se puede hacer más coherente la enseñanza y el aprendizaje con los tipos de conocimientos que apoyan el aprendizaje del álgebra, y al mismo tiempo, apoyar y mejorar el aprendizaje de la aritmética (Carpenter et al., 2005).

Identificación de los componentes constitutivos de un modelo de algebrización

En el presente marco conceptual, el pensamiento algebraico remite a la descripción de una actividad matemática que abarca a) el trabajo con ecuaciones lineales, b) significados del signo igual, c) formas analíticas de proceder, y d) diferentes notaciones para representar los objetos matemáticos. Así, la conceptualización del pensamiento algebraico que aquí se esboza, sienta las bases para construir un modelo de algebrización que incluye tres componentes: *lo relacional*, *lo analítico* y *lo notacional*.

El *componente relacional* destaca hallazgos de diversas investigaciones, enmarcadas en la resolución de ecuaciones (e.g., Kieran, 1992), las cuales convergen en que el significado relacional del signo igual es fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico. Al parecer una comprensión más rica del signo igual, que la proporcionada por la aritmética tradicional, genera mayores oportunidades de éxito con el álgebra de las ecuaciones.

Por otra parte, el *componente notacional* para ser indispensable en la comprensión de la actividad algebraica desplegada por los estudiantes (Godino et al., 2014; Van Amerom, 2003; Vergel, 2014). Si bien, es necesario orientar una buena parte de la enseñanza del álgebra hacia el aprendizaje y comprensión de las reglas sintácticas, también hay que reconocer que el álgebra implica trabajo con otras formas notacionales que incluyen representaciones visuales y materiales, tales como: dibujos, tablas y diagramas.

Finalmente, el *componente analítico* es considerado por la presencia de la analiticidad como un aspecto distintivo del pensamiento algebraico (Lins, 1992; Radford, 2014) que tiene sus orígenes históricos en la formalización del "método analítico" definido por Vieta y Descartes, alrededor del siglo XVI. La lógica de este método es diferente a la utilizada para resolver problemas aritméticos. En el método analítico, las relaciones entre las cantidades se describen empleando los datos conocidos y los desconocidos de manera similar, construyendo relaciones equivalentes a partir de ellos, hasta que se obtiene una respuesta al problema.

Configuración de un modelo de algebrización

La revisión de literatura en torno al pensamiento algebraico (e.g., (Aké, 2013; Godino et al., 2014; Lins, 1992; Vergel, 2014), así como la mirada a diversos trabajos de investigación enmarcados en el contexto de la resolución de ecuaciones (e.g., (Andrews & Sayers, 2012; Van Amerom, 2003) posibilitan la construcción de un modelo de algebrización. La estructura de este modelo se basa en articulación de tres componentes algebraicos que lo constituyen: a) *componente relacional*, b) *componente analítico* y c) *componente notacional* (Fig. 1).

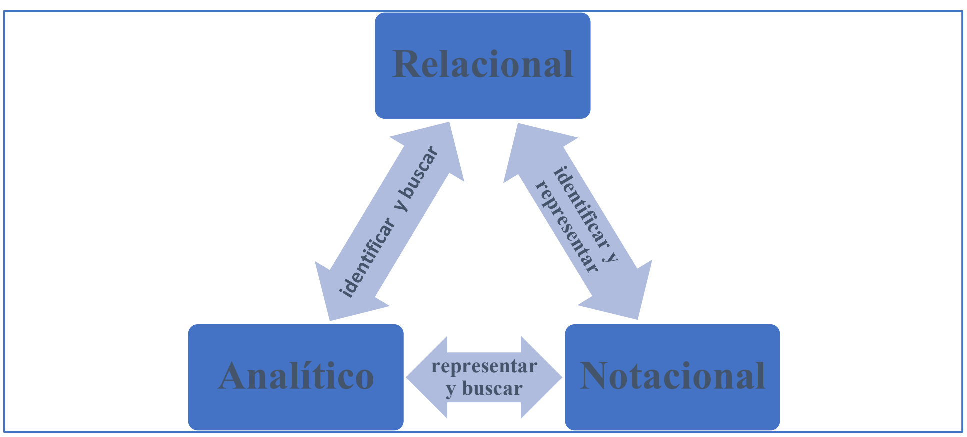


Figura 1. Modelo de algebrización

Individualmente cada componente aborda una dimensión ontológica de las nociones matemáticas, en términos de dos categorías: *operacional* y *estructural* (Sfard, 1995; Sfard & Linchevski, 1994). Aunque se reconoce el hecho de que esa diferenciación es evidente en algunos casos, y objeto de debate en otros, metodológicamente resulta útil. En primer lugar, la delimitación aporta elementos para construir un puente entre la aritmética y el álgebra. Y en segunda instancia, se constituye en una herramienta para identificar formas de pensamiento algebraico, en diferentes niveles de concreción.

El *componente relacional* incluye dos significados asociados al signo igual. La literatura de investigación revela que gran parte de los estudiantes de Educación Básica carecen de un *significado relacional* del signo igual y en su lugar, presentan un *significado operacional* (Jacobs et al., 2007)

El *significado relacional* indica una equivalencia entre dos expresiones que se encuentran a ambos lados del signo igual. En contraste, el *significado operacional*, sitúa el signo igual como un operador, es decir, una instrucción para realizar una operación. La consideración de dos significados para el signo igual, tiene consonancia con numerosos estudios. La tabla 1 ilustra algunas investigaciones, cronológicamente organizadas, que destacan este hecho.

Tabla 1.

Investigaciones que reportan dos significados relativos al signo igual

Investigaciones	**Significados del signo igual**	
	Operacional	**Relacional**
(Kieran, 1992)	El signo igual anuncia un resultado	El signo igual representa una equivalencia
(Jacobs et al., 2007)	Una señal para realizar el cálculo que le precede.	Indicador de una relación entre dos expresiones

El *componente notacional* está conformado por dos categorías que integran las cuatro formas de representación más resonantes en la literatura de investigación. Estas cuatro formas de representación pueden concebirse como una colección de herramientas que están a disposición de los estudiantes al momento de resolver un problema (Van Amerom, 2003) y son consideradas en diversos estudios para explorar perspectivas del pensamiento algebraico de los estudiantes (e.g., Huntley, Marcus, Kahan, & Miller, 2007). Además, se pueden poner en correspondencia con las fases del desarrollo histórico del álgebra, enmarcando las *notaciones singulares* tanto, en la fase retórica como en la sincopada, y las *notacionales simbólicas* en la fase simbólica del álgebra (Van Amerom, 2003).

Las *notaciones simbólicas*, involucran el uso de símbolos alfanuméricos (literales) para representar los objetos desconocidos y las relaciones matemáticas entre las cantidades. En contraste, las *notaciones singulares*, implican representaciones concretas, gráficas y verbales; y las letras aparecen, únicamente, como etiquetas o abreviaciones para designar un objeto.

Desde la visión adoptada para el *componente notacional* se rescata la importancia que posee la notación simbólica como un sistema de representación básico de las matemáticas y un indicador de pensamiento algebraico (Brizuela & Schliemann, 2004); como una forma de expresar los *objetos* y *procesos* algebraicos en niveles superiores de algebrización (Aké, 2013).

Además, al igual que otras investigaciones (e.g., Kieran, 2004; Van Amerom, 2003) se reconoce que el pensamiento algebraico está asociado con diferentes formas de representación que desbordan el marco de la *notación simbólica*. Al respecto, Kieran (2004) señala que el álgebra simbólica-literal puede ser usada como herramienta o apoyo cognitivo de creación y para sostener un discurso en la escuela, pero insiste en que se puede estar involucrado en actividades algebraicas sin utilizar, en absoluto, algún símbolo literal, por ejemplo; al analizar las relaciones entre cantidades.

Finalmente, el *componente analítico* enmarca dos categorías: *contextual* y *sintáctica*. Según, Cai & Knuth (2011), un análisis detallado de las formas en las cuales los problemas se resuelven usando aritmética y álgebra puede ayudar a reconocer aspectos claves del pensamiento algebraico. En palabras de Radford (2012, 2014), dicho análisis es decisivo en la identificación de la *analiticidad* como componente fundamental del pensamiento algebraico. Además, tal como indica Lins (1992), la forma analítica de abordar un problema parece ser una constante dentro del pensamiento algebraico.

En términos generales, la conceptualización del *componente analítico* se basa en ideas de Radford (2012) y Vergel (2014) sobre la *analiticidad*; como forma de trabajar los objetos indeterminados o el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos. Desde esta postura, la analiticidad no emerge, exclusivamente, de manera *sintáctica*, sino que además, tiene presencia en escenarios donde lo indeterminado empieza a ser objeto de discurso (Vergel, 2014). Por lo tanto, el *componente analítico*, está asociado al carácter operatorio de lo desconocido, pero también se refiere a las deducciones que se hacen a partir de ciertas premisas.

De esta manera, se entiende la *analiticidad sintáctica* como la forma de operar con los objetos indeterminados a través de las reglas sintácticas del álgebra. Así, lo desconocido es el punto de partida del proceso de solución, en el que el símbolo, en sí mismo, es el objeto de manipulación. En cambio, la *analiticidad contextual* implica una forma de trabajo que no opera con la sintaxis algebraica. Si bien, pueden usarse literales para representar lo desconocido, los cálculos se realizan utilizando, esencialmente, las operaciones y sus inversas sobre cantidades conocidas, de tal manera que lo desconocido no está involucrado, directamente, en los cálculos. El énfasis está puesto sobre las cantidades y sus relaciones.

Por un lado, la *analiticidad contextual*, en correspondencia con las ideas de Vergel (2014) está implicada en argumentos escritos por los estudiantes, que no necesariamente remiten a una forma simbólica. Por otra parte, la *analiticidad sintáctica* le asigna un lugar protagónico a la *notación simbólica*. De este modo, la *analiticidad sintáctica* guarda cierta relación con los planteamientos de Filloy, Puig, & Rojano (2008), quienes argumentan que el carácter analítico del uso de los sistemas de signos, para reducir el enunciado del problema a una forma canónica, es una característica de lo algebraico. De hecho, Godino et al., (2014) consideran que en un nivel propiamente algebraico se opera de manera analítica/sintáctica sobre un lenguaje simbólico-literal.

Las conexiones entre los componentes algebraicos se delimitan sobre la base de la perspectiva de la *resolución de problemas* y *la modelación matemática*. Los términos *identificar*, *buscar* y *representar* se entienden como acciones fundamentales que emergen y se desarrollan al interior de los procesos de *matematización* en sus dos fases. Por un lado, se corresponden con la *matematización horizontal* en aspectos, tales como: a) la <u>identificación</u> de la matemática que es relevante respecto al problema, b) la <u>búsqueda</u> y hallazgo de regularidades, relaciones y patrones, y c) la esquematización, formulación y visualización del problema desde diferentes puntos de vista. Por otra parte, guardan alguna relación con actividades propias de la *matematización vertical*, tal como: el uso de diferentes representaciones sujetas a estrategias de reflexión, generalización, prueba y simbolización (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Desde esta visión, el trabajo con tareas relativas a las ecuaciones lineales, implica *identificar* las relaciones entre las cantidades, que son relevantes en el contexto de la tarea; *buscar* nuevas relaciones matemáticas a través de las formas analíticas de proceder y *representar* las relaciones matemáticas mediante las formas notacionales.

Reflexiones finales y nuevas rutas de investigación

Es importante resaltar algunos aspectos, sobre la configuración del modelo, que se encuentran permeando la discusión pero que no son evidentes. En primer lugar, se trata de un modelo “local” que no pretende constituirse en un marco explicativo global, pues no aborda cuestiones asociadas, por ejemplo, a la resolución de problemas funcionales. En segundo lugar, no se sugiere que la actividad con ecuaciones y/o sistemas de ecuaciones lineales, pueda estudiarse, únicamente, mediante los componentes señalados y sus relaciones. La indeterminancia, en el sentido de Radford (2012) es propio de lo algebraico, pero agrega una variable que por sí misma resulta compleja de aislar. Finalmente, el modelo se basa en la resolución de problemas y modelación matemática, como perspectiva de introducción del álgebra escolar, lo cual no sugiere que está perspectiva sea independiente, o más importante que otras perspectivas que han sido consideradas en el estudio del pensamiento algebraico.

Por otro lado, al tratarse de una primera versión del modelo, indudablemente se requieren otros estudios que ayuden a consolidar una mejor interpretación de los componentes algebraicos identificados, o bien proponer otros, que posibiliten la exploración y comprensión de la actividad algebraica desplegada por los estudiantes.

En síntesis, está comunicación pone de relieve que una conceptualización del pensamiento algebraico a partir de los tres componentes: *relacional*, *analítico* y *notacional*, podrían proveer un adecuado modelo para intentar explicar y comprender la actividad algebraica desplegada por los estudiantes cuando trabajan con la resolución de situaciones relativas a las ecuaciones lineales. De hecho, la implementación de este modelo permitió reconocer, al menos, cuatro formas de pensamiento algebraico que guardan una estrecha relación con la manera en que los estudiantes trabajan con los componentes algebraicos y sus conexiones, poniendo de manifiesto la riqueza del modelo para explorar, describir y caracterizar la actividad algebraica; pero ello será objeto de otra comunicación.

Referencias

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación*. Granada.

Andrews, P., & Sayers, J. (2012). Teaching linear equations: Case studies from Finland, Flanders and Hungary. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(4), 476–488. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.07.002

Brizuela, B., & Schliemann, A. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, *24*(2001), 33–40. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/10.2307/40248456

Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. New York: Springer.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *37*(1), 53–59. http://doi.org/10.1007/BF02655897

Carraher, D. W., Schliemann, A., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87–115.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*. (A. Bishop, Ed.) *Saudi Med J* (Vol. 43). New York: Springer. http://doi.org/10.1073/pnas.0703993104

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de Las Ciencias*, *32*(1), 199–219. Retrieved from http://www.ugr.es/~jgodino/eos/niveles_algebrizacion.pdf

Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J., & Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*(2), 115–139. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.005

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary cchool. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 258–288. Retrieved from http://homepages.math.uic.edu/~martinez/PD-EarlyAlgebra.pdf

Kaput, J. J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In *The nature and role of algebra in the K–14 curriculum* (pp. 1–20). Washington, DC: National Academy Press.

Kieran, C. (1992). Learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *Mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.

Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is*. Nottingham.

Radford, L. (2012). On the Development of Early Algrebraic Thinking. *Pensamiento Numerico Y Algebraico*, *6*(4), 117–133.

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257–277. http://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 15–39. http://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90022-5

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). Educational Studies in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2), 191–228. http://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000028403.25781.79

Van Amerom, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 63–75. http://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005237.72281.bf

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). the Didactical Use of Models in Realistic. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 9–35. http://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). Tesis doctoral. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Análisis Ontosemiótico de la noción Ecuación Lineal en libros de texto mexicanos

Graciela Rubi **Acevedo** Cardelas
Universidad de Sonora
México
grasick@gmail.com
Ramiro **Ávila** Godoy
Universidad de Sonora
México
ravilag@mat.uson.mx

Introducción

Los resultados aquí mostrados son parte de una investigación más amplia, cuyo objetivo es contrastar las acciones operativas y discursivas llevadas a cabo por los profesores en su planeación con respecto a las realizadas en su implementación en el aula, en el caso de la enseñanza de la ecuación lineal. Una de las acciones implementadas para desarrollar dicha contrastación ha sido una revisión documental de textos que sustentan y apoyan el trabajo de los docentes, es decir, tanto los referentes curriculares como libros de texto. Aquí se presentan los resultados de la revisión y análisis de los libros de texto seleccionados.

Enseñanza de las Ecuaciones Lineales

Dentro de las investigaciones referentes a la visión que los profesores tienen respecto a la enseñanza del álgebra (Tunks & Weller, 2009), se identifica que ésta es concebida, por algunos profesores, como un conjunto de reglas para manipular variables, postura que se ve reforzada por los mismos libros de texto. Así, para muchos profesores, el álgebra consiste en determinar cantidades desconocidas y no se le ve como una actividad de razonamiento que involucra la indeterminación.

Esto se ve reflejado en el campo particular de la enseñanza de las ecuaciones lineales donde se observa que las experiencias previas de aprendizaje y de enseñanza de los profesores les indican que deben dedicar la mayor parte del tiempo en la escuela a desarrollar habilidades procedimentales en vez de conceptuales. Para Attorps (2005) hay dos posibles explicaciones a este hecho: una es que muchos libros de texto no dan suficiente apoyo para este tipo de enseñanza, otra es que los maestros pueden no ser suficientemente competentes en sus conocimientos conceptuales matemáticos.

Tradicionalmente, en la enseñanza de las ecuaciones lineales si un estudiante logra resolver un tipo de ecuación, el profesor le proporcionará ecuaciones más complejas, sin importar si el estudiante la resolvió por prueba y error o a través de operaciones inversas (Linsell, 2009). Otro aspecto que considerar es la importancia del contexto y cómo las preguntas hechas en contexto resultan más sencillas que sus equivalentes simbólicos.

En el caso de las ecuaciones aritméticas —con incógnitas solo en un miembro de la ecuación— los estudiantes necesitan comprender las operaciones inversas y sus características (Linsell, 2009), mientras que para las ecuaciones algebraicas —con incógnitas en ambos miembros de la ecuación— se requiere tanto que los alumnos comprendan que las expresiones en ambos lados del signo igual son de la misma naturaleza (o estructura) como que sean capaces de operar con la incógnita como una entidad y no como número (Filloy & Rojano, 1989). En ese sentido, las ecuaciones aritméticas son procedimentales mientras que las algebraicas son estructurales. (Kieran, 1992). Sin embargo muchos estudiantes no logran esta transición, siendo incapaces de operar espontáneamente con o en la incógnita por lo que terminan constreñidos a realizar operaciones sin sentido con símbolos que no entienden (*cognitive gap*) (Herscovics & Lichevski, 1994) aunque Pirie & Martin (1997) sostienen que esto se puede deber más a una didáctica inapropiada que a una insuficiencia cognitiva.

En cuanto a las investigaciones relacionadas con las aproximaciones de resolución de ecuaciones algebraicas, utilizar la metáfora de la balanza es de los recursos más reportados, pues ésta ayuda a los estudiantes a ver la ecuación como un todo en vez de una instrucción a operar, ayuda a los estudiantes a resolver ecuaciones algebraicas desde la perspectiva de hacer lo mismo en ambos miembros de la ecuación; sin embargo, el uso de números negativos sólo tiene cabida de manera artificial (Vlassis, 2002).

Por su parte, el método de “cambiar de lado, cambiar de signo” se centra en transponer la ecuación de manera que la incógnita quede del lado izquierdo del signo igual, este movimiento arbitrario de la incógnita a la izquierda perpetúa las concepciones operacionales del signo igual y no promueve que los estudiantes comprendan que dicho movimiento no cambia la igualdad de la ecuación (Capraro & Joffrion, 2006 referido en Andrews & Xenofontos (2017)).

En cuanto a la estrategia de “ensayo y error”, aunque promueve una comprensión de la naturaleza relacional del signo igual y el rol de la incógnita en contexto (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg, & Stephens, 2005) y puede ser apropiado como una estrategia inicial en un proceso de enseñanza, es ineficiente y no promueve el aprendizaje de estrategias generales de resolución de ecuaciones (Filloy & Rojano, 1989). Esta estrategia también permite validar los resultados, sin embargo, en cuanto se abandona como técnica de resolución también lo hace para verificar la solución (Kieran, 1992).

Lo reportado en esta sección sirve como referente para indagar en qué medida los libros de texto que se analicen propician una solución a las dificultades que han sido reportadas o si, por el contrario, influyen en su generación.

Análisis de libros de texto

A pesar de que, en educación primaria y secundaria, los docentes cuentan con orientaciones curriculares, la realidad es que la mayoría de los profesores usan los libros de texto como principal recurso didáctico (Kajander & Lovric, 2009). Dichos textos determinan tanto el material que debe ser cubierto como la manera en la que será presentado. De hecho, en lugares como el País Vasco “el 90 por ciento de los centros declara tener un libro de texto para las asignaturas de matemáticas, que es utilizado ‘para todo’ en un 67% de los casos, fuera de un 11% que sólo lo utilizan ‘para los problemas’” (Ruiz de Gauna Gorostiza, Dávila Balsera, Etxeberria Murgiondo, & Sarasua Fernández, 2011).

Una línea de investigación en Matemática Educativa ha sido el análisis de libros de texto, con el fin de responder a diversas cuestiones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Picado & Rico, 2011), por ejemplo, el Proyecto 2061, una iniciativa de la American Association for the Advancement of Science (referido por Kajander & Lovric, 2009) menciona que la mayoría de textos usados para enseñar álgebra tienen potencial para ayudar al aprendizaje de los alumnos, aunque también presentan serias debilidades. De hecho, concluyen que ningún libro de texto hace un trabajo satisfactorio en favorecer que los estudiantes superen conocimientos previos inadecuados o carentes.

A pesar de haber interés por analizar el contenido y explorar la forma en que los libros de texto son usados en el aula, muy pocos investigadores han optado por realizar un análisis profundo de lo que hay en dichos libros, enfocándose en cómo el material es presentado y qué tipo de aprendizaje es promovido (Kajander & Lovric, 2009).

Esto último se ha convertido en un referente para este artículo, donde se tiene el interés de identificar los elementos que son movilizados en los libros de texto y la manera en que interactúan unos con otros, a fin de poder caracterizar lo que se espera aprendan los estudiantes.

Marco Teórico

El marco teórico utilizado en esta investigación es el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la Cognición e Instrucción Matemáticos (Godino J. D., 2017), a continuación, se refieren las herramientas teóricas, propias de este enfoque, que se han utilizado para analizar el tratamiento propuesto en los libros de texto mexicanos para la noción de ecuación lineal.

El EOS asume una visión antropológica y pragmatista de las matemáticas, que se ve reflejada en la noción de práctica matemática, la cual se refiere a "toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino & Batanero, 1994). Dichas prácticas pueden ser realizadas por un sujeto o en el seno de una institución —conjunto de personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas—.

Los objetos matemáticos adquieren un estado derivado de las prácticas que lo preceden; es decir, que los individuos adquieren su experiencia a través de las prácticas matemáticas y de ellas emergen los objetos matemáticos. Una forma de conceptualizar las prácticas matemáticas es considerarlas como la combinación de una práctica operativa, a través de la cual se leen y producen textos matemáticos, y una práctica discursiva que permite reflexionar sobre la práctica operativa (Font, D. Godino, & Gallardo, 2013).

Dentro de los significados institucionales, entendidos en términos de los sistemas de prácticas en las que el objeto es determinante para su realización en el seno de una institución (Godino, Batanero, & Font, 2008), se encuentran los Significados Institucionales de Referencia, Pretendido, Implementado y Evaluado. En el caso particular del Significado Institucional de Referencia, este es considerado como el sistema de prácticas usado como referencia para elaborar el significado pretendido, dado que esta investigación es parte de una mayor que tiene como interés contrastar el Significado Institucional Pretendido con el Implementado, es necesario el caracterizar el Significado Institucional de Referencia. Dado que los docentes con los que se trabaja utilizan como principal fuente para su planeación los libros de texto, es a partir de ellos de donde se ha caracterizado dicho Significado.

Cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado formado por situaciones – problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, ...), lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...), conceptos (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...), proposiciones (enunciados sobre conceptos), procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...) y argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...) (Godino, Batanero, & Font, 2008), los cuales son considerados objetos primarios.

Al realizar y evaluar una práctica matemática, se analiza el conjunto formado por todos los objetos primarios articulados en los que se considera una configuración ontosemiótica, es decir, una red de objetos primarios (intervinientes y emergentes) de los sistemas de prácticas. Cuando estos objetos son movilizados por parte de un sujeto en sus prácticas matemáticas, dicha configuración será cognitiva, mientras que cuando se trata de objetos matemáticos institucionales, la configuración será epistémica (Parra Urrea & Pino-Fan, 2017).

Metodología

Como se ha mencionado anteriormente, este trabajo es parte de una investigación más amplia que pretende contrastar el Significado Institucional Pretendido con el Implementado de la noción de Ecuación Lineal. Para caracterizar el significado institucional de referencia, se ha estudiado el libro de texto que utiliza una de las docentes que es sujeto de investigación: Block Sevilla, D., García Peña, S., & Balbuena Corro, H. (2018). *Matemáticas 1.* México: SM.

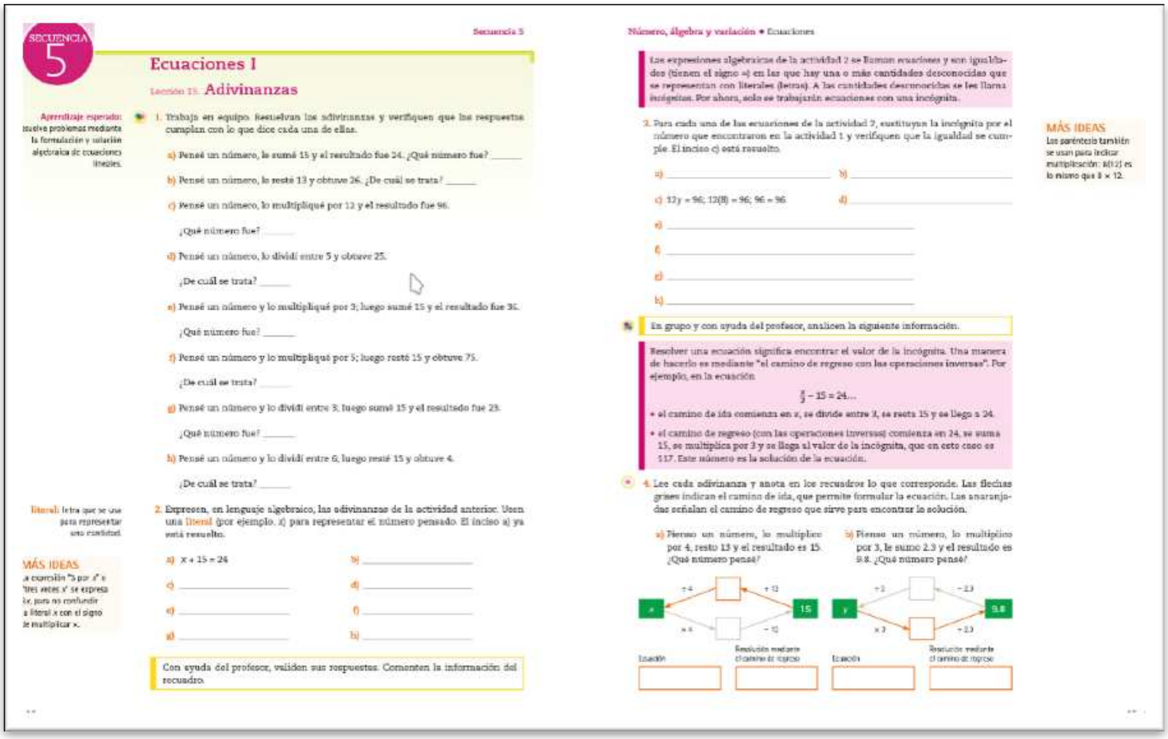
El análisis de este texto cobra importancia, debido a que en el ciclo 2018-2019 se instauró un Nuevo Modelo Educativo (SEP, 2017), que tuvo como consecuencia modificaciones a los planes y programas de estudio y en consecuencia a los libros de texto. El análisis de dichos textos será de utilidad para comprender los alcances de esta nueva propuesta y abona en la posible mejora de la misma.

Esta investigación, de tipo cualitativa, se centra en el análisis del mencionado texto, el cual divide en dos partes el estudio de las ecuaciones lineales, la Secuencia 5 llamada Ecuaciones 1, subdividida a su vez en cuatro lecciones; mientras que la Secuencia 12 llamada Ecuaciones II se ha subdividido en tres lecciones. Cada una de estas siete lecciones representa una Unidad de análisis en este trabajo.

Para lograr los objetivos de esta investigación se establecieron cuatro fases: 1) identificar los objetos primarios intervinientes y emergentes de cada Unidad de análisis, 2) construir una configuración epistémica de cada Unidad de análisis, 3) construir la trayectoria epistémica de la enseñanza de las ecuaciones lineales y a partir de lo anterior 4) caracterizar el Significado Institucional de Referencia de la noción de ecuaciones lineales.

Resultados

Por cuestión de espacio, en este reporte se presentan la identificación de objetos primarios y configuración epistémica de la Unidad de análisis 1 (figura 1), entendiendo que este mismo trabajo se realizó con las unidades subsecuentes.



SECUENCIA 5

Secuencia 5

Ecuaciones I

Lección 15. Adivinanzas

Aprendizaje esperado: resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones lineales.

1. Trabajo en equipo. Resuelvan las adivinanzas y verifiquen que las respuestas cumplan con lo que dice cada una de ellas.

a) Pensé un número, le sumé 15 y el resultado fue 24. ¿Qué número fue? ______

b) Pensé un número, le resté 13 y obtuve 26. ¿De cuál se trata? ______

c) Pensé un número, lo multipliqué por 12 y el resultado fue 96.

¿Qué número fue? ______

d) Pensé un número, lo dividí entre 5 y obtuve 25.

¿De cuál se trata? ______

e) Pensé un número y lo multipliqué por 3; luego sumé 15 y el resultado fue 36.

¿Qué número fue? ______

f) Pensé un número y lo multipliqué por 5; luego resté 15 y obtuve 75.

¿De cuál se trata? ______

g) Pensé un número y lo dividí entre 3; luego sumé 15 y el resultado fue 23.

¿Qué número fue? ______

h) Pensé un número y lo dividí entre 6; luego resté 15 y obtuve 4.

¿De cuál se trata? ______

literal: letra que se usa para representar una cantidad.

2. Expresen, en lenguaje algebraico, las adivinanzas de la actividad anterior. Usen una literal (por ejemplo, x) para representar el número pensado. El inciso a) ya está resuelto.

a) $x + 15 = 24$ b) ______

c) ______ d) ______

e) ______ f) ______

g) ______ h) ______

MÁS IDEAS
La expresión "3 por x" o "tres veces x" se expresa $3x$, para no confundir la literal x con el signo de multiplicar ×.

Con ayuda del profesor, validen sus respuestas. Comenten la información del recuadro.

Número, álgebra y variación • Ecuaciones

Las expresiones algebraicas de la actividad 2 se llaman ecuaciones y son igualdades (tienen el signo =) en las que hay una o más cantidades desconocidas que se representan con literales (letras). A las cantidades desconocidas se les llama incógnitas. Por ahora, solo se trabajarán ecuaciones con una incógnita.

3. Para cada una de las ecuaciones de la actividad 2, sustituyan la incógnita por el número que encontraron en la actividad 1 y verifiquen que la igualdad se cumple. El inciso c) está resuelto.

a) ______ b) ______

c) $12y = 96$; $12(8) = 96$; $96 = 96$ d) ______

e) ______

f) ______

g) ______

h) ______

MÁS IDEAS
Los paréntesis también se usan para indicar multiplicación: 8(12) es lo mismo que 8 × 12.

En grupo y con ayuda del profesor, analicen la siguiente información.

Resolver una ecuación significa encontrar el valor de la incógnita. Una manera de hacerlo es mediante "el camino de regreso con las operaciones inversas". Por ejemplo, en la ecuación

$$\frac{x}{3} - 15 = 24...$$

- el camino de ida comienza en x, se divide entre 3, se resta 15 y se llega a 24.
- el camino de regreso (con las operaciones inversas) comienza en 24, se suma 15, se multiplica por 3 y se llega al valor de la incógnita, que en este caso es 117. Este número es la solución de la ecuación.

4. Lee cada adivinanza y anota en los recuadros lo que corresponde. Las flechas grises indican el camino de ida, que permite formular la ecuación. Las anaranjadas señalan el camino de regreso que sirve para encontrar la solución.

a) Pienso un número, lo multiplico por 4, resto 13 y el resultado es 15. ¿Qué número pensé?

b) Pienso un número, lo multiplico por 3, le sumo 2.3 y el resultado es 9.8. ¿Qué número pensé?

Figura 1. Block, D., García, S., & Balbuena H. (2018). Unidad de análisis 1. Recuperado de https://libros.conaliteg.gob.mx/content/restricted/libros/carrusel.jsf?idLibro=2473#page/47

En la tabla 1 se aprecian los objetos primarios intervinientes y emergentes identificados en la Unidad de análisis 1:

Tabla 1

Situaciones problema asociadas a la Unidad de análisis 1

Objeto primario	Interviniente	Emergente
Situaciones problema	SP1.1 Problemas donde se debe adivinar un número que es el resultado de aplicar, en un primer momento una operación y, posteriormente, dos operaciones, donde tanto los números dados como los resultados, son naturales. SP1.2 Representar, en lenguaje algebraico, las adivinanzas de la actividad anterior. SP1.3 Para cada una de las ecuaciones de SP1.2, sustituir la incógnita por el número que se encontró en SP1.1 y verificar que la igualdad se cumple. SP1.4 Plantear y resolver ecuaciones del tipo de SP1.1 completando un diagrama, como se observa en la Fig. 1.	No se encontraron.
Lenguaje	Verbal: para plantear las situaciones problema, para introducir definiciones y para describir procedimientos.	Algebraico: Para plantear las ecuaciones lineales referentes a los problemas planteados.
Comunicación		

	Diagramático: para hacer ostensivas las operaciones inversas relacionadas con cómo se plantea la ecuación y cómo se resuelve.	
Conceptos	Cantidad desconocida.	Expresión algebraica, ecuación, literales, incógnitas, solución de una ecuación, noción de igualdad como equivalencia entre expresiones.
Proposiciones	No se encontraron.	Propiedad de sustitución de la igualdad.
Procedimientos	Suma, resta, multiplicación, división.	Resolver una ecuación mediante operaciones inversas.
Argumentos	No se encontraron.	No se encontraron.

Una vez que se identificaron los objetos intervinientes y emergentes, se procedió a realizar la configuración epistémica de cada Unidad de análisis. La configuración epistémica relativa a la Unidad de análisis 1 se muestra en la figura 2, esta nos permite observar la movilización que tienen cada uno de los objetos primarios que fueron identificados en esta Unidad de análisis.

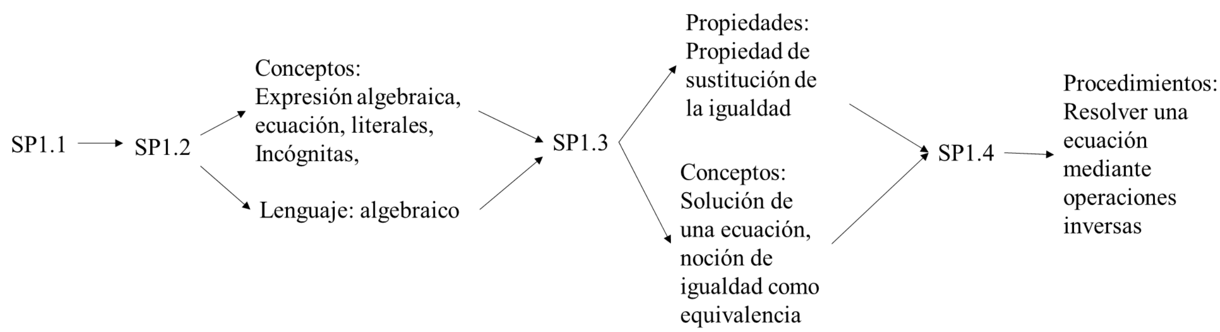


Figura 2. Configuración epistémica asociada a la Unidad de análisis 1

Al tener las configuraciones epistémicas relativas a cada Unidad de análisis, se procedió a conjuntarlas en una trayectoria epistémica, lo cual fue de relevancia ya que a partir de ésta fue posible determinar el Significado Institucional de Referencia asociadas a los libros de texto.

Conclusiones

Se concluye que los sistemas de prácticas asociados a la noción de ecuaciones lineales en el libro de texto comienzan con el alumno resolviendo adivinanzas, lo cual sirve para ir movilizando los saberes previos de los estudiantes, de tal manera que al "adivinar" sean capaces de encontrar relaciones entre la solución y el "candidato a solución" tales como "la solución debe ser un número mayor (o menor) que…", además se va construyendo la noción de *solución de una ecuación*.

Al pedir que esas adivinanzas se escriban como ecuaciones, emerge el lenguaje algebraico y conceptos como *ecuación*, *literal*, *incógnita*. Cabe destacar que el paso de las adivinanzas a la modelación en una ecuación de las mismas podría estar lejano a la zona de desarrollo próximo de los alumnos, a pesar de que se plantee trabajar en equipo.

Cuando se pide al alumno sustituir la incógnita por el número encontrado en la primera actividad emerge el concepto de *solución de la ecuación* como aquel número que hace que la igualdad sea cierta, así como la noción del signo igual como una equivalencia de expresiones.

En la última actividad de esta Unidad de análisis se propone completar un diagrama donde a través de flechas y colores se hace ostensivo el procedimiento para modelar y resolver la ecuación, así como las operaciones inversas que se ponen en juego. A pesar de que este recurso resulta útil para que los alumnos comprendan ambos procedimientos (modelación y resolución), el texto cae en lo que menciona Attorps (2005) de no dar suficiente apoyo para un tipo de enseñanza que favorezca lo conceptual, ya que el procedimiento es establecido por el texto, es decir, no se favorece que sean los alumnos quienes desarrollen sus propias estrategias de resolución.

Referencias y bibliografía

Andrews, P., & Xenofontos, C. (2017). Beginning teachers' perspectives on linear equations: A pilot quantitative comparison of Greek and Cypriot students. *Paper presented to the tenth Congress of European Research in Mathematics Education*. Berlin.

Attorps, I. (2005). Secondary school teachers' conceptions about algebra teaching. *Paper presented at the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Block Sevilla, D., García Peña, S., & Balbuena Corro, H. (2018). *Matemáticas 1*. México: SM. Disponible en https://libros.conaliteg.gob.mx/content/restricted/libros/carrusel.jsf?idLibro=2473#page/1

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9 (2), 19-25.

Font, V., D. Godino, J., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 97-124.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En P. A.-M. J. M. Contreras (Ed.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 7-37.

Herscovics, N., & Lichevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 59-78.

Kajander, A., & Lovric, M. (2009). Mathematics textbooks and their potential role in supporting misconceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(2), 173-181.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of*

Mathematics (págs. 390-419). New York: Macmillan Publishing.

Knuth, E., Alibali, M., McNeil, N., Weinberg, A., & Stephens, A. (2005). Middle school students" understanding of core algebraic concepts: equivalence and variable. *ZDM* (37), 68-76.

Linsell, C. (2009). Students' knowledge and Strategies for Solving Equations. *Findings from the New Zeland Secondary Numeracy Project 2008*, 29-43.

Parra Urrea, Y., & Pino-Fan, L. (2017). Análisis Ontosemiótico de libros de texto chilenos: el caso del concepto de función. En P. A. J. M. Contreras (Ed.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Picado, M., & Rico, L. (2011). Análisis de Contenido en Textos Históricos de Matemáticas. *PNA*, 6(1), 11-27.

Pirie, S. E., & Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, 34(2), 159-181.

Ruiz de Gauna Gorostiza, J., Dávila Balsera, P., Etxeberria Murgiondo, J., & Sarasua Fernández, J. (2011). Los libros de texto de matemáticas del bachillerato en el periodo 1970-2005. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(2), 245-276.

SEP. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral.* México: SEP.

Tunks, J., & Weller, K. (2009). Changing Practice, Changing Minds, from Arithmetical to Algebraic Thinking: An Application of the Concernsbased Adoption Model (CBAM). *Educational Studies in Mathematics*, 161-183.

Vlassis, J. (2002). The Balance Model: Hindrance or Support for the Solving of Linear Equations with One Unknown. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 341-359.

Aspectos característicos del pensamiento variacional en la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática

Jhonatan Elias Posso Torres
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
jhonatan.posso@correounivalle.edu.co
Ligia Amparo Torres
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
ligia.torres@correounivalle.edu.co

Resumen

Esta comunicación es el reporte de una investigación donde se analizan aspectos del razonamiento covariacional desarrollados en estudiantes de grado noveno de la educación básica, al modelar fenómenos mediante la función cuadrática. Al estudiar la variación desde el enfoque covariacional, asociada a la función cuadrática, en situaciones de la vida cotidiana, las matemáticas y otras ciencias, se movilizan aspectos del razonamiento durante los procesos de modelación, que pueden ser identificados y caracterizados. Para esto, se elaboró y se trabajó con estudiantes dos situaciones contextualizadas tomando como referencia aspectos curriculares de la educación en Colombia, aspectos didácticos en relación a la modelación y el razonamiento covariacional, y aspectos disciplinares de las matemáticas afines a la función. En los primeros análisis[1], los estudiantes experimentaron acercamientos a la situación (modelación situacional), uso de *modelos de* (modelación referencial), revelando indicios valiosos de las primeras acciones mentales al atender la covariación entre cantidades.

Palabras clave: Variación, covariación, razonamiento covariacional, modelación, función, función cuadrática.

[1] *Nota:* Al momento del diseño de esta comunicación se continúa realizando los análisis de los registros de los estudiantes respecto al trabajo de la primera situación y la aplicación de la segunda, por lo cual se espera que el día de la presentación se puedan exponer los resultados y conclusiones finales de la investigación.

Problemática

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar son procesos que históricamente han presentado diversas dificultades en las clases, algunas relacionadas con obstáculos epistemológicos en la historia de las matemáticas *per se* y otras identificadas con aspectos metodológicos, cognitivos y de aula, entre otros. Algunas dificultades tienen que ver con la forma como ciertos docentes presentan los contenidos en relación al álgebra, ya que se limitan a explicar el tema y poner ejercicios donde se privilegia el cálculo aritmético principalmente, convirtiéndose en rutinas repetitivas de ejercitación que carecen de sentido; en relación a esto, Castro (2012) indica que de esta manera el álgebra no se enseña a través de una progresión lenta sino como mecanismo manipulador enfatizado en el cálculo.

Andrade (1998) concluye que algunos textos escolares de matemáticas poco contribuyen al conocimiento del concepto de función, pues ilustran la variable como una letra que representa una cantidad desconocida o un número generalizado, no se comprende la relevancia de la variable producto de la ruptura que hay del paso de la aritmética al algebra, ya que "para lograr la variable fue necesario el uso de la letra como incógnita y luego como cantidad general, antes de pasar a representar la variación" (p. 248); Castro (2012) afirma que las primeras aproximaciones escolares donde no se comprende que representan las letras y los símbolos algebraicos empleados en modelos, pueden entorpecer la construcción apropiada del concepto de variable y el estudio de la variación.

Chevallard (1984, 1989), Bolea (2002), Sutherland et al. 2000 (citados en Ruiz Munzón, N; Bosch, M. y Gascón, J., 2007, p. 1) revelan en los resultados de sus investigaciones la ausencia del "juego" entre parámetros y variables, complicaciones para identificar o establecer relaciones entre variables y parámetros solicitados y la manipulación de modelos algebraicos principalmente en forma de reglas, ocasionando un acercamiento inapropiado a la comprensión de la noción de función en general y función cuadrática en particular, "dificultando el estudio de familias de funciones y el uso de estas familias como modelos de relaciones entre magnitudes" (Ruiz Munzón, N; Bosch, M. y Gascón, J., 2007, p. 1).

Respecto al estudio y trabajo con los modelos algebraicos, análisis como el llevado a cabo por Carlson 1998, Monk y Nemirovsky 1994, Thompson 1994a (citados en Carlson *et al*., 2003, p. 122-123) evidencian que incluso estudiantes de nivel de pregrado tienen dificultad para modelar relaciones funcionales de situaciones de variación continua entre variables y que según Kaput 1994 y Rasmussen 2000 (citados en Carlson *et al*., 2003, p. 123) "esta habilidad es esencial para interpretar modelos de eventos dinámicos" y comprender otros conceptos matemáticos de mayor complejidad.

Problemáticas como las expuestas permiten plantear la pregunta:

¿Qué aspectos del pensamiento variacional se desarrollan en estudiantes de grado noveno a través de una propuesta de aula que involucra la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática?

Referentes teóricos y metodológicos

El marco teórico comprende el análisis de aspectos que implican el desarrollo del pensamiento variacional, el estudio de la variación, la comprensión del concepto de función y de función cuadrática desde tres perspectivas las cuales son: Perspectiva curricular, didáctica y disciplinar (de las matemáticas).

Los documentos curriculares de la educación escolar colombiana como son los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) promueven el desarrollo del pensamiento numérico, del pensamiento espacial, del pensamiento métrico, del pensamiento aleatorio y del pensamiento variacional; todos mediados por cinco procesos: Formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Para esto, el docente debe tener la posibilidad de proponer a los estudiantes un contexto enriquecido de situaciones las cuales pueda explorar, realizar representaciones, realizar abstracciones, llevar a cabo el proceso de modelación matemática, entre otras posibilidades (MEN, 1998). Vasco (2003) señala la modelación como la utilización más poderosa del pensamiento matemático, que va más allá de la aplicación de algoritmos conocidos y que es fundamental para el aprendizaje del álgebra escolar, el estudio de la variación y de las funciones, además, plantea que el enfoque covariacional permite la captación y modelación de la covariación entre cantidades del magnitud, y que al momento que el estudiante lleva a cabo estas actividades también piensa de manera dinámica, formándose sistemas mentales propios del pensamiento variacional.

El razonamiento covariacional es el marco conceptual propuesto por Carlson et al. (2003) y se define como “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p.124). En el desarrollo de este tipo de razonamiento se presta especial atención a la covariación entre cantidades de magnitud que se relacionan de manera funcional en eventos dinámicos, analizando la razón de cambio, de tal manera que se llega a formar imágenes de los cambios hasta modelar las relaciones funcionales; los cinco tipos de acciones mentales pueden llegar a ser evidenciadas y clasificadas en cinco niveles de acuerdo a este marco conceptual, tal como también lo evidencian posteriormente Dolores y Salgado (2009) y Villa (2012) en sus respectivos trabajos.

Las siguientes son las características de las acciones mentales en el marco del razonamiento covariacional:

Tabla 1
Acciones mentales del razonamiento covariacional

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios de otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio.

	incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de la concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y las concavidades son correctos)

Nota. Tomado de Carlson et al. (2003, p.128).

Las acciones mentales evidenciadas en los estudiantes conllevan a alcanzar los niveles de razonamiento covariacional, los cuales se describen como:

Tabla 2

Niveles de razonamiento covariacional

Nivel	Descripción del nivel de razonamiento covariacional
Nivel 1 (N1) Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2) Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4) Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5) Razón instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Nota. Tomado de Carlson et al. (2003, p.129).

Por otra parte, la modelación entendida como un proceso mediante el cual se pueden producir modelos mentales, gráficos y analíticos, entre otros (Vasco, 2003) es pertinente en el estudio de la covariación, ya que facilita asociar las imágenes o modelos mentales con expresiones en los variados registros de representación. En la Educación Matemática Realista[2] se plantea que es fundamental que el estudiante pueda matematizar (organizar la realidad con medios matemáticos, incluida la matemática misma) distintas situaciones planteadas en contextos realistas (imaginables, que tienen sentido para el estudiante) ya sean situaciones cotidianas, de las matemáticas y de otras ciencias y para ello se establecen niveles de matematización (situacional, referencial, general y formal), que permiten la comprensión de la situación y consolidan el proceso de modelización, constituyendo la matematización en una actividad fundamental en el aprendizaje de las matemáticas (Freudenthal, 1973).

Aspectos experimentales

El trabajo de investigación se desarrolla en una institución educativa de carácter oficial de la ciudad de Santiago de Cali, departamento del Valle del cauca, Colombia, con un grupo de estudiantes de grado noveno de la educación básica secundaria. La institución queda ubicada en la zona rural de la ciudad en el corregimiento El Hormiguero, los estudiantes son habitantes del lugar y de veredas aledañas, ubicados en zonas de estrato 1.

Las actividades de experimentación están constituidas por dos situaciones, una en contexto de la vida cotidiana y otro en contextos geométrico, compuestas por tareas organizadas de tal forma que promovieran procesos de modelación y movilizaran aspectos del razonamiento covariacional. Dichas situaciones son presentadas a los estudiantes por tareas, en copias donde se pueda llevar a cabo la lectura de las mismas, además, el desarrollo por parte de los estudiantes fue escrito en hojas aparte.

La primera situación que será la analizada a continuación, está organizada a partir de un contexto de la vida cotidiana de la siguiente manera:

Situación 1:
¿Los ingresos de un gimnasio aumentan o disminuyen?
El gimnasio *Hércules* cuenta con 150 socios inscritos los cuales pagan, cada uno, una mensualidad de $60.000. Michael, el dueño del gimnasio, desea incrementar sus ingresos por lo que ordena un estudio de mercado cuyo resultado recomienda reducir la mensualidad, ya que por cada $1.000 que disminuya se inscribirán cinco nuevos socios.
¿Cuál es el máximo ingreso económico que el gimnasio *Hércules* puede recibir si sigue las recomendaciones del estudio?

La situación se diseñó para desarrollarse en cuatro tareas. La primera tarea teniendo como referencia el proceso de modelación de la Matemática Realista, se diseñó para que los estudiantes exploraran y comprendieran la situación a partir de los primeros acercamientos a esta, realizando algunos cálculos iniciales, identificando cantidades como el número de rebajas, tratar de realizar los primeros esquemas y expresar sus primeras ideas o argumentaciones respecto a la situación; esta situación está comprendida en el nivel situacional de modelación y no se esperaba que los estudiantes manifestaran algún tipo de acción mental de acuerdo al marco del razonamiento covariacional, pero constituía parte importante para el surgimiento de las

[2] Corriente didáctica que nace en los años 60 cuyo fundador es Hans Freudenthal, promueve la enseñanza de las matemáticas conectada con la realidad, llevando a cabo procesos de matematización de la realidad con medios matemáticos en niveles de matematización horizontal y vertical.

primeras acciones mentales.

En la segunda tarea se proponía la siguiente tabla:

Tabla 3

Tabla de relaciones del valor de la mensualidad y número de socios

Valor de la mensualidad en pesos	60.000	59.000	58.000			46.000
Número de socios	150			165	180	

A partir de la tabla se esperaba que los estudiantes la completaran e identificaran las primeras regularidades presentes en las cantidades de las magnitudes indicadas, escribiendo algunas expresiones para determinar los valores faltantes, identificando las primeras relaciones de dependencia como es el caso de que la cantidad total de socios dependía de la cantidad de rebajas realizadas y el valor de la mensualidad como resultado de esa rebaja. Además, al cuestionar a los estudiantes acerca de cómo se comportaban los ingresos a medida que se inscribían socios nuevos y se reducía la cuota de la mensualidad, se buscaba hacer una primera aproximación a la pregunta ¿Cómo cambia?; esta situación está inscrita en el nivel situacional de modelación al continuar en el descubrimiento de regularidades y la esquematización de la situación.

En la tercera tarea se presentaba la siguiente tabla:

Tabla 4

Tabla de relaciones entre cantidades

Cantidad de rebajas	Valor de la rebaja (en pesos)	Valor total de cada rebaja (en pesos)	Valor inicial de la mensualidad (en pesos)	Valor de la mensualidad según rebajas (en pesos)	Cantidad inicial de socios	Cantidad de socios nuevos	cantidad total de socios según cantidad de rebajas	Ingreso total inicial (en pesos)	Ingreso total según mensualidad y número de socios (en pesos)
0	1.000	0	60.000	60.000	150	0	150	9.000.000	9.000.000
1	1.000	1.000	60.000	59.000	150	5	155	9.000.000	9.145.000
2	1.000	2.000	60.000	58.000	150	10	160	9.000.000	9.280.000
3									
4		4.000			150		170		
5						25			
	1.000	15.000			150		225		
⋮									
x		$1000x$							

En la tarea 3 se esperaba que los estudiantes completaran la tabla y a partir de la información identificaran las regularidades presentes en la misma, identificando relaciones de dependencia entre cantidades, como por ejemplo de que el valor total de cada rebaja dependía de multiplicar el número de rebajas por $1000, hasta obtener las primeras expresiones o modelos como $1000x$ en este caso. En esta tarea se esperaba que los estudiantes presentaran un nivel referencial de modelación al emplear modelos gráficos y notacionales de la situación para analizar las dependencias y los cambios en las cantidades, desarrollando a su vez las primeras acciones mentales (AM1) inscritas en el nivel 1 de razonamiento covariacional (N1)

En la cuarta tarea se planteaba la siguiente gráfica:

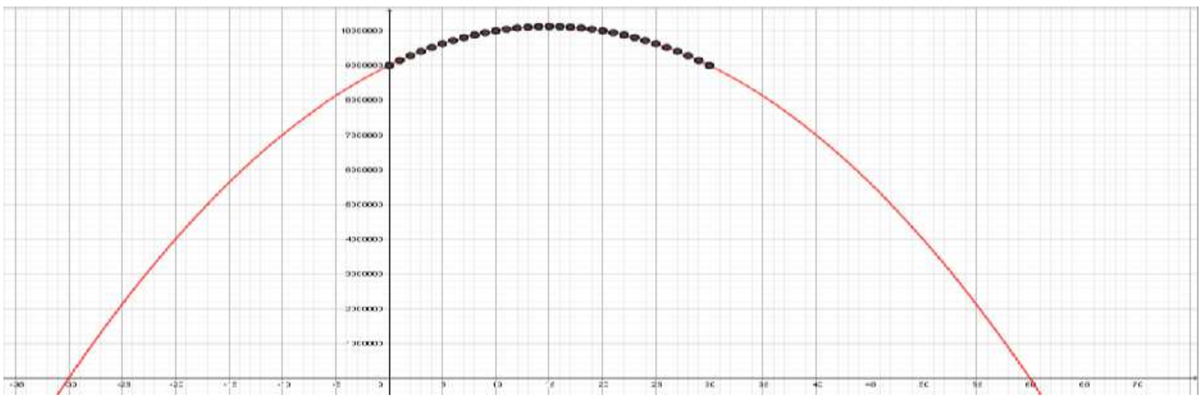


Figura 1. Gráfica de número de rebajas vs ingresos totales.

A partir de la gráfica se pretendía que los estudiantes continuaran identificando las relaciones de dependencia en la situación de tal manera que se analizara cómo cambian los valores de acuerdo a las rebajas realizadas. Estos modelos empleados son aún modelos particulares de la situación y por tanto se desarrollan en el nivel referencial de modelación y de acuerdo a la información suministrada, los estudiantes podían llevar a cabo algunas argumentaciones acerca de la dirección del cambio en ciertos instantes, atendiendo a la covariación entre las variables y estos planteamientos pretendían acciones mentales de segundo nivel (AM2), coordinando la dirección del cambio de una variable con los cambios de otra y propiciando un paso a un segundo nivel de razonamiento covariacional.

Discusión de resultados

Los primeros resultados de los análisis de los registros de los estudiantes son el producto de las aproximaciones al contexto de la situación. Estos evidencian, principalmente, que los primeros cálculos y cuestiones acerca de la situación en la tarea 1 fueron abordados de manera natural por los estudiantes, llevando a cabo procedimientos que son similares a las prácticas habituales en clases de matemáticas, pero que para este caso constituye principalmente el acercamiento a las características básicas de la situación planteada para el estudio posterior de la covariación. De acuerdo al nivel situacional de modelación, los estudiantes percibieron características de las magnitudes como la cantidad de socios, valor de la mensualidad y la última en identificar de manera clara fue el número de rebajas, mostrando ciertas dificultades al comprender esta última como una de las magnitudes en cuestión y que para el propósito de esta situación constituye un elemento fundamental en el proceso de modelación y posteriormente el análisis de la covariación.

En la tarea 2, al emplearse una tabla como otro registro de trabajo de situaciones con relaciones funcionales, la mayoría de estudiantes tuvo facilidad para completar la tabla mediante cálculos e identificar las relaciones de dependencia, como la del total de socios en relación con la cantidad de rebajas, el total de ingresos en relación al total de socios, con el propósito de comprender el papel que advierte la cantidad de rebajas en la identificación de dependencias y la construcción de los primeros modelos mentales y algebraicos, aspecto clave en el estudio de la covariación. En los resultados de las tareas 1 y 2 no se evidenciaron de manera clara acciones mentales relacionadas con el razonamiento covariacional.

En el desarrollo de la tarea 3 la mayoría de estudiantes realizaron los cálculos y completaron con cierta facilidad la tabla que comprendía suficiente información de las cantidades en el estudio de la situación. Los primeros modelos de (modelación referencial) la situación fueron desarrollados por algunos estudiantes, por ejemplo al realizar preguntas como: Escribe una expresión que permita calcular el valor total de cada rebaja, según una cantidad de veces (x). Lo anterior permitió evidenciar resultados de estudios previos en los cuales se hace mención a la dificultad que muestran los estudiantes en la construcción de modelos de situaciones problema, esto debido a las rutinas habituales de trabajo y ejercitación en forma mecánica principalmente de ejercicios de cálculo aritmético durante los niveles educativos anteriores al año lectivo en estudio. En la misma tarea se movilizaron en los estudiantes las primeras acciones mentales del razonamiento covariacional, AM1, en las cuales justificaron las relaciones entre cantidades presentes y en relación a esto establecer la coordinación de los valores de una variable en relación a los cambios de la otra, acciones mentales esenciales para el desarrollo de las siguientes tareas.

Referencias y bibliografía

Andrade, C (1998). Dificultades en el aprendizaje de la Noción de variación. *Revista EMA*, 3 (3), 241-253.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA,* 8(2), 121-156.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.

Dolores, C., Salgado, G., (2009). Elementos para la graficación covariacional. *Números, Revista de didáctica de las matemáticas*. 72, 63-74.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht. Reidel Publishing Co.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares Básicos en Competencias Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ruiz Munzón, N; Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con WIRIS. En L. Ruiz–Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 677–702). Jaén, España: Universidad de Jaén.

Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In *Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau* (Vol. 9).

Villa-Ochoa, J. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Revista Tecné, Episteme y Didaxis*, 31, 9-25.

Razonamiento Covariacional mediado por GeoGebra en Estudiantes de Quinto Grado de Educación Primaria (11-12 años)

Iván Eduardo **Gálvez** Giraldo
Institución Educativa Juan María Céspedes
Colombia
ivan.galvez@correounivalle.edu.co
Diana Marcela **Tamayo** González
Institución Educativa Juan María Céspedes
Colombia
diana.m.tamayo@correounivalle.edu.co

Resumen

En esta comunicación se presentan los resultados de una investigación que centró la atención en caracterizar el razonamiento covariacional que los estudiantes de un grupo de quinto grado (11-12 años) manifestaron al desarrollar tareas de variación y cambio. Para este estudio, se usó el marco conceptual propuesto por Carlson et al., (2003) y se diseñó una situación dinámica mediada por GeoGebra y contextualizada en apartes de "La vuelta al mundo en 80 días" de Julio Verne, adaptada mediante un cómic. A partir de observaciones directas y del análisis de episodios de la interacción entre estudiantes e investigadores, se constató que la totalidad de estudiantes lograron identificar qué cambia, qué no, y la dirección de cambio, pero no todos dieron cuenta de la cuantificación del cambio de las magnitudes involucradas en el estudio. Estos resultados alimentan la reflexión acerca del desarrollo de razonamiento covariacional desde los primeros grados de escolaridad.

Palabras clave: razonamiento covariacional, variación, covariación, GeoGebra.

Presentación del problema y Justificación

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar han sido y siguen siendo objeto de interés para múltiples investigadores en el campo de la educación matemática. En buena parte esto se debe a la complejidad que distintas investigaciones como las de Kieran (1992), Molina (2007), Socas (2011), Castro (2012), entre otras, han puesto de manifiesto en torno a su enseñanza y aprendizaje. Es así como se encuentran en la literatura reportes que expresan diferentes obstáculos, dificultades y errores encontrados en el aprendizaje del álgebra pese al gran empeño que los maestros suelen colocar en su enseñanza. La toma de conciencia sobre estas y otras situaciones ha generado que un buen número de trabajos hayan intentado explicar el origen de estas problemáticas y buscar alternativas para hacerles frente.

Es así como Kieran (1992), afirma que buena parte de las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar están asociadas, entre otras razones, con el significado de las letras y el cambio de convenciones entre la aritmética y el álgebra donde se privilegia lo sintáctico por encima de lo semántico, descuidando con ello sus aspectos conceptuales y su conexión con otras áreas del conocimiento. Tal manipulación mecánica de símbolos en álgebra podría explicar lo encontrado por Doorman y Gravemeijer (citado por Villa & Vahos, 2010), quienes afirman que un gran número de las dificultades que presentan los estudiantes en los cursos de cálculo tienen su génesis en la escasa familiarización con la construcción de modelos, propósitos, convenciones y formas de representación en las situaciones y problemas a resolver.

Este panorama general de investigaciones en didáctica del álgebra se ratifica con la experiencia pedagógica de los autores de la investigación que aquí se reporta. En efecto, el trabajo docente en la Institución Educativa donde se realizó el estudio muestra cómo tradicionalmente el abordaje del álgebra se deja para unos años en particular, por lo general, para grado octavo de la educación básica secundaria (estudiantes que oscilan entre los 13 y 14 años de edad). Lo anterior ha contribuido a la inconexión entre la aritmética y el álgebra, dejando de lado el abordaje de procesos tan importantes como son el estudio de la variación y el cambio, la generalización y la modelación, entre otros aspectos.

En atención a lo anterior, Godino y Font (2003) son claros en indicar que no se trata de implementar el álgebra desde la educación básica primaria pero sí de favorecer el desarrollo de pensamiento algebraico. Igualmente, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 1998, 2006) proponen el inicio del desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos como un logro para alcanzar desde los primeros grados de escolaridad. Esto es, entre otras cuestiones, una matemática escolar que permita analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones de variación y cambio en diversos contextos, para lo cual la incorporación de las nuevas tecnologías puede jugar un papel relevante. Así, Vasco (2006) afirma que las reinterpretaciones dinámicas de representaciones gráficas y tabulares por medio de pantallas computacionales son una de las maneras como puede desarrollarse el pensamiento variacional. Esto implicaría cambios metodológicos que, a diferencia de estilos tradicionales, permitan una interacción directa de los estudiantes con las herramientas tecnológicas de tal modo que se acerquen, mediante la visualización, al estudio de la variación y el cambio.

Con la intención de analizar el pensamiento variacional de un grupo de estudiantes y, específicamente, cómo enfrentan situaciones de variación y cambio, esta investigación buscó identificar algunos rasgos del razonamiento covariacional en un grupo específico de estudiantes de quinto grado de la educación básica Colombiana, para lo cual se diseñó una situación dinámica en la que interviene el software GeoGebra.

Marco Teórico de Referencia

Para Posada y Obando (2006) el análisis de la covariación debe incluirse en la relación entre multiplicación y proporcionalidad e integrando el estudio de las magnitudes de tal manera que no se produzca una desvinculación entre la proporcionalidad y las funciones. Esto se puede significar mediante la representación tabular visibilizando la relación directa entre la multiplicación y proporcionalidad directa simple, relación que puede ser descrita de diferentes formas como son la verbalización, la comparación de representaciones y el empleo de variables (Confrey y Smith, 2016).

Carlson et al.,(2003) definen el razonamiento covariacional como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra"(p.124). En este referente se tienen en cuenta cinco acciones mentales con sus comportamientos asociados, que a su vez están relacionados con los niveles de desarrollo del razonamiento covariacional, en el cual se requiere de la construcción de imágenes de dos variables, de manera que el estudiante identifique los cambios simultáneos de una con respecto a la otra. Así, en este marco se describen las acciones mentales involucradas cuando sujetos ponen en juego su razonamiento covariacional al estudiar situaciones dinámicas.

Las acciones mentales dentro del marco conceptual de Covariación

Las imágenes de covariación proveen un medio para clasificar los comportamientos de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de covariación. El análisis de este conjunto de acciones mentales y comportamientos permite determinar la habilidad de razonamiento covariacional de un estudiante para una tarea en particular. Para describir las acciones mentales y sus respectivos comportamientos, se presenta la Tabla 1:

Tabla 1

Acciones mentales en la covariación (Carlson, et al., 2003, p.128)

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos asociados
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función.

Conforme a la tabla anterior, un estudiante se encuentra en un nivel determinado cuando sustenta las acciones mentales asociadas a ese nivel, dando cuenta también de las anteriores en el contexto de la tarea. A partir de la Acción Mental 1 (AM1), donde se identifica de manera verbal lo que está cambiando, las acciones mentales van incrementando su nivel de complejidad hasta llegar a la Acción Mental 5 (AM5).

Niveles de razonamiento covariacional dentro del marco conceptual de Covariación

Para describir la evolución del razonamiento covariacional y clasificar a las acciones mentales que se manifiestan en un estudiante frente a una tarea de carácter covariacional, Carlson et al., (2003) describen cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.

Tabla 2

Niveles de Razonamiento Covariacional (Tomado de Carlson, et al., 2003, p.129)

Niveles del razonamiento Covariacional
Nivel 1 (N1). Coordinación En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2). Dirección En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4). Razón promedio En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5). Razón instantánea En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

De este modo, la evolución de la imagen de covariación sustenta un razonamiento covariacional más sofisticado. Es así como dentro de una tarea particular, si el razonamiento empleado por un estudiante se clasifica en el nivel 4 (N4), está en la capacidad de razonar en dicha acción mental, en conjunto con los razonamientos de la AM1 a la AM3. Por consiguiente, el estudiante está en la capacidad de coordinar la razón de cambio promedio de una función con los cambios uniformes en los valores de entrada de la variable, lo que implica, haber identificado lo que cambia y cómo cambios en una variable producen cambios en otra, la relación en las direcciones de cambio de las variables y además cuantificar los cambio de una variable con respecto a la otra.

Diseño metodológico de la investigación

El trabajo de investigación se inscribió dentro del enfoque de investigación cualitativo de tipo descriptivo – interpretativo (Louis, & Lawrence, 1990). La situación que se diseñó fue implementada con 15 estudiantes con edades entre 11 y 12 años de una institución educativa de carácter público del municipio de Tuluá, Valle del Cauca, Colombia, con un análisis basado tanto en las respuestas ofrecidas por los estudiantes al resolver cada una de las tareas propuestas en la situación, como en los diálogos ofrecidos por ellos al justificar sus actuaciones a partir de las intervenciones realizadas por los investigadores (grabadas en video); se procedió a revisar los datos recogidos tomando como unidades de análisis los niveles de razonamiento covariacional, fruto del marco conceptual adoptado para este estudio.

El diseño de la situación se hizo a partir de cinco tareas dispuestas en cuatro archivos de GeoGebra, en las cuales se estudiaba de manera dinámica la distancia y el tiempo, la primera como variable dependiente de la segunda. Cada una de las tareas, a excepción de la primera, ponían en juego las primeras cuatro acciones mentales descritas por Carlson et al.,(2003), todas contextualizadas en apartes del libro "La vuelta al mundo en 80 días" de Julio Verne. En su orden, las tareas desarrolladas por los estudiantes fueron: *Tarea 1. Comprendiendo la situación* (Figura 1), con la que se buscaba contextualizar a los estudiantes mediante un cómic en la narrativa dispuesta en los apartes del libro en mención, haciendo énfasis en una persecución en elefante llevada a cabo en Bombay por el detective Fix a Phileas Fogg; *Tarea 2.* R*econociendo relaciones entre magnitudes* (Figura 2), en donde se indagó sobre qué magnitudes cambiaban cuando se recreaba en GeoGebra la persecución en elefante, lo que pone en juego AM1; *Tarea 3. Identificando cómo cambian las magnitudes*, con el propósito de identificar la dirección de cambio de las magnitudes estudiadas en la persecución, propio de AM2; *Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables*, apareciendo por primera vez en registros tabulares valores numéricos para las distancias recorridas y para el tiempo, favoreciendo así la identificación de patrones de covariación entre ambas cantidades, comportamiento propio de AM3. Finalmente la *Tarea 5*. *Estudiando los cambios de las relaciones entre magnitudes*, se puso en juego la coordinación de la razón de cambio promedio entre la distancia recorrida por los personajes con incrementos uniformes en el tiempo, lo que corresponde con acciones asociadas a AM4.

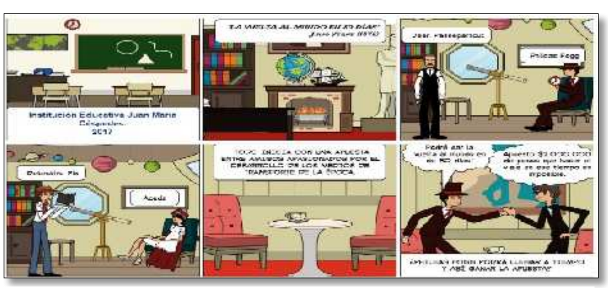


Figura 1. Fragmento del Cómic: Contextualización Tarea 1 (Adaptación propia)

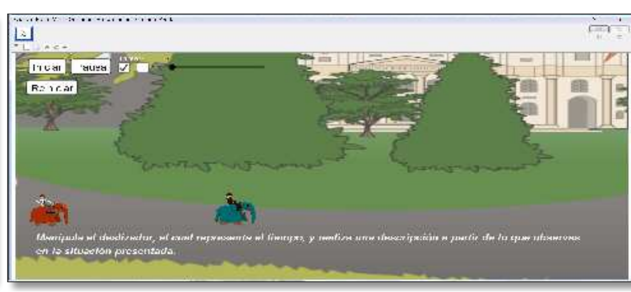


Figura 2. Fragmento Tarea 2: Reconociendo relaciones entre magnitudes

Análisis de resultados

Las respuestas ofrecidas por los estudiantes (E1, E2,…E15) a las preguntas de cada tarea se clasificaron conforme a qué tan lejos o cerca se encontraban de las respuestas esperadas en el contexto de cada acción mental del referente conceptual adoptado, lo cual, a su vez, permitía identificar el nivel de razonamiento covariacional puesto en juego al responder a ellas.

Las producciones de los estudiantes en la Tarea 1, dejó notar que todos comprendieron la situación narrada mediante el cómic, especialmente, que se trataba de una persecución entre dos personajes: el detective Fix a Phileas Fogg, y cuál fue el propósito que dio origen a tal evento.

A partir de las respuestas dadas en la Tarea 2 (en la cual se evaluó la AM1), se constató que el 80% (12) de los estudiantes lograron identificar que en la medida en que cambia el tiempo (representado por el deslizador) la posición de los personajes cambia. Esto se hace evidente en sus producciones escritas, tal como se ilustra a modo de ejemplo en la Figura 3.

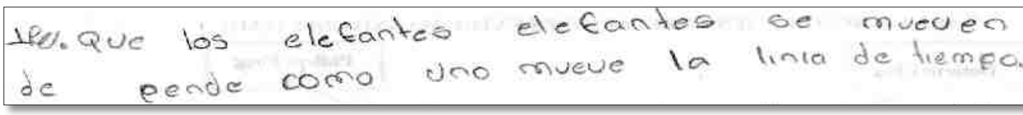

1R/. Que los elefantes elefantes se mueven de pende como uno mueve la linia de tiempo.

Figura 3. Respuesta de uno de los estudiantes al ítem 2 de la Tarea 2 (¿Qué está variando o cambiando en la situación?)

En la Tarea 3 (que evaluaba la AM2), 12 estudiantes (80%) centraron su atención en la disminución de la distancia que separa los personajes (Fix y Phileas Fogg) a medida que transcurre el tiempo, lo cual se interpreta como la identificación de una correlación inversa entre estas magnitudes. Además de esto, los estudiantes identificaban que a medida que el tiempo aumentaba también lo hacían las distancias recorridas de cada personaje (ver Figura 4).

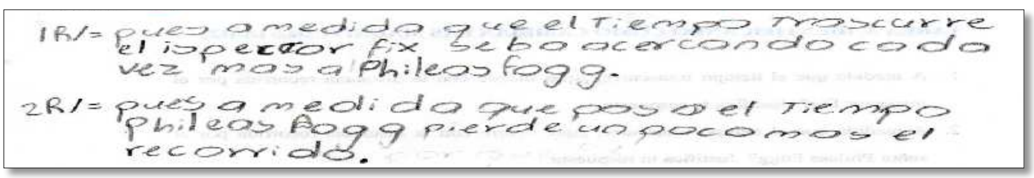

1R/= pues a medida que el Tiempo Trascurre el ispector fix se bo acercando cada vez mas a Phileas fogg.
2R/= pues a medida que pasa el Tiempo Phileas Fogg pierde un poco mas el recorrido.

Figura 4. Ejemplo de respuestas ofrecida por un estudiante a los ítems 1 y 2 de la Tarea 3

A partir de las producciones realizadas por los estudiantes en la Tarea 4 (que se indagaba por la AM3), se indagó sobre cómo ellos daban cuenta de la cuantificación de los cambios de las cantidades presentes en la persecución y de la forma cómo covariaban dichas cantidades. En las producciones de los estudiantes se observaron que fácilmente 2 de ellos (13.3%) manifestaron que mientras el tiempo cambia de 1 hora en 1 hora las distancias cambian de 5 km en 5 km para el inspector Fix (Figura 5), y de 4 km en 4 km para el señor Phileas Fogg, es decir, reconocieron que cambios en la magnitud *tiempo* determinan cambios simétricos en la *distancia recorrida* por los personajes. Los demás estudiantes también reconocieron esto, pero no de manera inmediata.

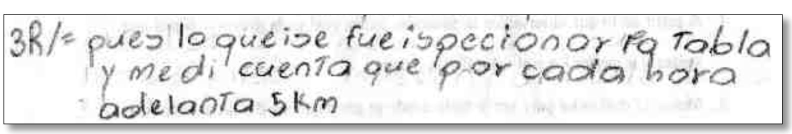

3R/= pues lo que ise fue ispeccionar la Tabla y me di cuenta que por cada hora adelanta 5km

Figura 5. Respuesta de un estudiante al ítem 3 de la Tarea 4

Obsérvese cómo estos dos estudiantes establecen la razón entre las distancias recorridas y el tiempo, identificando en el primer caso la razón *5 kilómetros / 1 hora*, y para el segundo caso la razón 4 *kilómetros / 1 hora*. De ahí que estos 2 estudiantes logran identificar la covariación que se presenta entre las cantidades de ambas magnitudes (tiempo y distancia recorrida).

Finalmente, en la Tarea 5 (AM4) ante solicitudes como: *"Describe la relación que hay entre la distancia recorrida por el señor Phileas Fogg para cada hora transcurrida"* cuya intención fue indagar sobre el comportamiento de la velocidad que tuvo el señor Phileas Fogg durante toda su huida, se logró apreciar que 3 estudiantes identificaron que las distancias recorridas por el personaje son distintas para cada unidad de tiempo y parecieron tener una noción intuitiva de la velocidad cuando asociaron los cambios de las distancias recorridas a elementos como el cansancio o la energía de los elefantes, tal como se muestra a manera de ejemplo en la Figura 6.

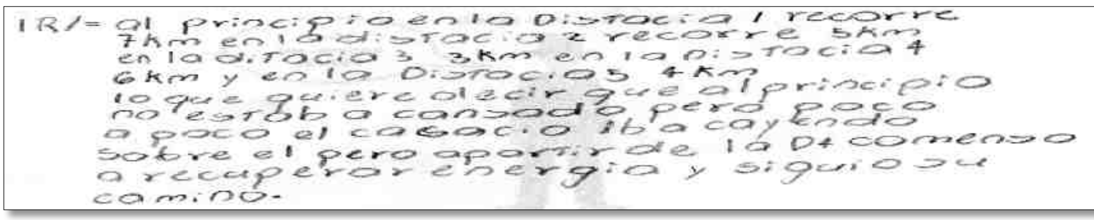

1R/= al principio en la Distacia 1 recorre
7km en la distacia 2 recorre 5km
en la ditacia 3 3km en la distacia 4
6km y en la Distacia 5 4km
lo que quiere decir que al principio
no estaba cansado pero poco
a poco el cansacio iba cayendo
sobre el pero apartir de la D4 comenzo
a recuperar energia y siguio su
camino.

Figura 6. Producción de un estudiante al ítem 1 de la Tarea 5 (Describe la relación que hay entre la distancia recorrida por el señor Phileas Fogg para cada hora transcurrida)

Conclusiones

Las producciones escritas y verbalizaciones de los estudiantes dejaron ver la emergencia de características relacionadas con el razonamiento covariacional enmarcado en esta propuesta (Figuras 6). Si bien, conforme al marco conceptual adoptado (Carlson et al., 2003) los estudiantes de esta investigación no dieron cuenta de un nivel 4 de razonamiento covariacional (Razón de Cambio Promedio), se pudo constatar que todos pasaron por N1 y N2 de este razonamiento, sustentados por AM1 y AM2, esto es, la coordinación del valor y dirección de cambio de una magnitud con los cambios en la otra. Asimismo, 9 estudiantes presentaron características asociadas a N3, sustentadas por AM1, AM2 y AM3, siendo esta última la coordinación de la cantidad de cambio de una magnitud con los cambios en la otra magnitud. De estos 9 estudiantes, 2 tuvieron un acercamiento intuitivo a la velocidad por medio de la comparación de las 2 magnitudes que aparecían en escena, pero sin llevar a cabo la coordinación de la razón de cambio promedio de la distancia recorrida (magnitud de salida) con los incrementos uniformes del tiempo (magnitud de entrada), es decir, sin una verdadera construcción de esta nueva magnitud (la velocidad). Este hecho sugiere que la construcción de la razón de cambio como una nueva magnitud independiente de las que la generan, es asunto complejo y que requiere tiempo.

La vinculación entre el deslizador y la generación de las tablas (Tarea 4) permitió a los estudiantes la identificación de patrones y relacionar la simulación con la representación tabular (tiempo y distancia recorrida) para cada uno de los personajes (Figura 5). Ese asunto aportó al reconocimiento de la variación de las magnitudes en todos los estudiantes y, en algunos casos, la forma en cómo dichas magnitudes covariaban. Por tal razón, la representación tabular posibilitó el reconocimiento de la variación de cada una de las magnitudes y en algunos casos de la covariación dada entre ellas. En este sentido pudo verificarse lo que propone el MEN (2006) cuando reconoce la importancia de usar tablas y gráficas como formas de acercamiento temprano al desarrollo de pensamiento variacional.

La incorporación del cómic en la contextualización de la situación junto a las interacciones con los archivos de GeoGebra propició una actitud receptiva en los estudiantes hacia la implementación de las tareas, facilitándose la indagación en las características del razonamiento covariacional. Esta articulación de la literatura, las matemáticas, la tecnología e incluso las ciencias al intentar abordarse la construcción intuitiva de la velocidad, contribuyó a un acercamiento al desarrollo de este razonamiento en los estudiantes.

Referencias y bibliografía

Aké, L. P. (2014). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros de formación*. Universidad de Granada.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio*. Revista EMA, 8(2), 121-156.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Magisterio.

Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Godino, J., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema, 26*(46), 483-511.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 390-419. New York: Macmillan

Louis, C. y Lawrence, M. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid, La muralla.

Molina, M. (2007). La integración de pensamiento algebraico en educación primaria. En M. Camacho, P. Flores P. Bolea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XII*, 53-69. SEIEM. La Laguna.

Posada, F. y Obando, G. (2006). *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico*. pp. 79-107.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, revista de didáctica de las matemáticas*, 77, 5-34.

Vasco, C. (2006*).* El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías*.* In C. *Vasco, Didáctica de las matemáticas: artículos selectos*. (pp. 134-148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Verne, J. y Dios, M. F. (1999). *La vuelta al mundo en 80 días* (Vol. 2). Edaf.

Villa-Ochoa, J. A. y Vahos, M. R. (2010). *Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales*. Educação matematica pesquisa, 12(3), 514-528.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Construcción del concepto de función desde la Teoría APOE: La coordinación entre representaciones como apoyo

Hellen Catherine **Serrano** Iglesias
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
hellen-serrano@hotmail.com
Solange **Roa-Fuentes**
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander; Grupo de investigación EDUMAT-UIS
Colombia
sroa@matematicas.uis.edu.co

Resumen

Este documento muestra los avances de una propuesta de investigación que busca caracterizar las *estructuras* y *mecanismos* mentales que evidencian estudiantes de secundaria (14 a 15 años) al resolver tareas matemáticas que requieren de la coordinación entre representaciones estáticas y dinámicas del concepto de función. Para ello, se exponen los elementos que componen la Teoría APOE (Arnon et al., 2014) y algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación (Duval, 2004), que fundamentan teóricamente esta propuesta. Además, se muestra una adaptación del Ciclo de Investigación de la teoría APOE que direcciona el desarrollo de este proyecto.

Palabras clave: función, coordinación, representaciones, registros, APOE, secundaria.

Introducción

El concepto de función es una de las ideas fundamentales de las matemáticas actuales, ya que muchos de los otros conceptos de matemáticas y otras ciencias giran alrededor de este. Especialmente, se puede encontrar el concepto de función en los cursos de matemáticas de la escuela y la universidad. Sin embargo, este concepto es uno de los más difíciles de comprender (Eisenberg, 1991, Carlson y Oehrtman, 2005, Hitt, 2005, Sánchez, 2009). Una de estas dificultades es la falta de coordinación entre sus diferentes representaciones (Guzmán, 1998, Duval, 2004, Sánchez, 2009, Oviedo et al., 2012, Prada-Núñez, Hernández-Suárez y Ramírez-Leal, 2016). Por ello, se hace necesario poner el foco en investigaciones previas, en las cuales se haya trabajado sobre el concepto de función.

Estudios sobre el concepto de función en Didáctica de las Matemáticas

Sin hacer un análisis exhaustivo, dentro de estos estudios se pueden citar autores como Eisenberg (1991), Carlson y Oehrtman (2005), Hitt (2005), Sánchez (2009), quienes insisten que los estudiantes siguen teniendo una comprensión débil del concepto de función. Por ejemplo, Carlson y Oehrtman (2005) proporcionan una visión general de lo que implica conocer y aprender el concepto de función. Los autores afirman que el concepto es difícil de comprender para los estudiantes porque en su enseñanza se hace mucho énfasis a los procedimientos. Aseguran Carlson y Oehrtman (2005): "este fuerte énfasis procedimental no ha sido efectivo para construir concepciones de funciones fundamentales, las que permiten la interpretación significativa y el uso de la función en varios escenarios representativos y novedosos" (p. 2).

Para contribuir sobre este fenómeno de estudio se han tomado como referentes teóricos la teoría APOE (Arnon et al., 2014) y los Registros de Representación Semiótica (Duval, 2004), ya que se consideran complementos uno del otro. Por un lado, la teoría APOE es un modelo que describe cómo se pueden aprender conceptos matemáticos; es un marco utilizado para explicar cómo puede construirse en la mente de un individuo un concepto matemático. Por otro lado, la teoría cognitiva de Duval estudia fenómenos relativos al conocimiento, es un marco para medir niveles de comprensión de los estudiantes.

Estudios sobre las representaciones semióticas y el concepto de función

Los estudios realizados bajo la teoría de registros de representación, generalmente muestran que una de las dificultades en el aprendizaje del concepto de función, es el paso de un sistema de representación a otro. Es decir, a los estudiantes se les dificulta conectar, o bien, articular los diferentes registros de representación, lo que hace que se limite el estudio del concepto de función, y por ende, la comprensión del mismo. Guzmán (1998), Duval (2004), Sánchez (2009), Oviedo et al. (2012), Prada-Núñez, Hernández-Suárez y Ramírez-Leal (2016), entre otros autores así lo confirman en sus investigaciones. Se puede ver por ejemplo, el trabajo de Guzmán (1998), que toma el marco de las representaciones semióticas para su estudio. Allí la autora considera tres registros para analizar algunas representaciones de las nociones de funciones: gráfico, algebraico y lenguaje natural. Los resultados muestran que los estudiantes recurren a un solo registro, en especial, el algebraico. Además, las respuestas de los estudiantes se limitan al registro en el cual se plantea la pregunta, según la autora, esto se debe a que no logran coordinar dos o más registros.

Estudios sobre el concepto de función visto desde la Teoría APOE

Un estudio preliminar hecho por Dubinsky (1991) sobre funciones, es fundamentado en la Teoría APOE y en la comprensión que él tiene del concepto desde el punto de vista matemático. Su intención es ilustrar el poder explicativo de la teoría y establecer pautas para el trabajo empírico posterior. Dubinsky manifiesta que una serie de actividades matemáticas pueden lograr que el estudiante construya un Esquema de función, más aún, estas actividades pueden requerir que el Esquema se reconstruya a un nivel más alto en el que una función, más allá de ser un Proceso interiorizado, es un Proceso que puede ser tratado como un Objeto por el sujeto como resultado de la encapsulación (Dubinsky, 1991).

En general, Dubinsky ha observado que una parte importante al entender una función, es construir un Proceso que se pueda utilizar para dar sentido a un cierto tipo de fenómeno. Este Proceso, necesariamente requiere de la interiorización o encapsulación por parte del individuo.

En otras palaras, más allá de replicar algún procedimiento, se requiere de mecanismos de abstracción reflexiva para que el individuo pueda construir el concepto de función.

Se resalta que aunque inicialmente las investigaciones realizadas bajo la Teoría APOE se enfocaron en el estudio de pensamiento matemático avanzado, donde según Romero (2016) se espera que los estudiantes ya cuenten con estructuras abstractas sobre las cuales trabajar, hoy se pueden encontrar investigaciones en el nivel de secundaria, y otras más, que se proponen por ejemplo, con poblaciones con discapacidad auditiva.

Las investigaciones presentadas hasta aquí junto con otras ya realizadas por varios autores, han reportado diversos acercamientos al concepto de función. Existen estudios didácticos, cognitivos, históricos, epistemológicos, entre otros, para explicar fenómenos de enseñanza y aprendizaje, relacionados a este concepto.

Estos y otros estudios han reportado diversos acercamientos al concepto de función. Existen estudios didácticos, cognitivos, históricos, epistemológicos, entre otros, para explicar fenómenos de enseñanza y aprendizaje, relacionados a este concepto.

Para continuar, se describen las estructuras y mecanismos mentales que explican la construcción de conocimiento matemático y su rol en el diseño de una descomposición genética. Además se explica de manera general el Ciclo de Investigación que propone la teoría. Por otra parte se discuten elementos fundamentales de la teoría de Registros de Representación que son usados para estudiar fenómenos relativos al conocimiento.

Referente Teórico

Elementos de la Teoría APOE

Estructuras y mecanismos mentales: Teoría APOE y construcción de conocimiento matemático

En términos de APOE, una *estructura mental* es cualquier estructura relativamente estable que usa un individuo para dar sentido a situaciones matemáticas (Arnon et al., 2014). Dicha estructura es construida en la mente del individuo y puede seguir desarrollándose gracias a lo que se denomina: *mecanismo mental* (medio por el cual se desarrolla una estructura mental). En esta teoría, las estructuras son definidas como: Acción, Proceso, Objeto y Esquema, de ahí el acrónimo de APOE, y los mecanismos como: interiorización, encapsulación, coordinación, reversión, desencapsulación, tematización y generalización.

Una *Acción* es una transformación guiada por un conjunto de instrucciones externas al individuo. Estas Acciones se realizan paso a paso, cada paso es fundamental y no es posible omitir ninguno. Dichas Acciones pueden ser básicas o complejas dependiendo del contexto y la experiencia de cada individuo. En el caso de las funciones, por ejemplo, si un individuo sustituye algunos valores del dominio en funciones de las que conoce su expresión algebraica, y encuentra su imagen, se considera que tiene una concepción Acción del concepto.

Los *Procesos* son Acciones interiorizadas que se construyen usando el mecanismo de interiorización o de coordinación. A medida que las Acciones se repiten y el individuo ya no depende de instrucciones externas, sino que ahora tiene control sobre ellas se dice que la Acción ha sido interiorizada en un Proceso (Arnon et al., 2014). Esto es, el individuo tiene la capacidad de omitir, invertir o imaginar el paso a paso, sin tener que realizar explícitamente cada uno de ellos. Para el caso de las funciones, el individuo puede pensar en un elemento de entrada que es transformado dada una regla, para generar un elemento de salida. El mecanismo de interiorización le permite al individuo considerar que todos los elementos del dominio han sido transformados. Cuando el individuo construye un Proceso es consciente y reflexivo sobre las Acciones que realiza.

El mecanismo de *encapsulación* va más allá de la concepción Proceso, este ocurre cuando un individuo busca aplicar acciones sobre un Proceso. Para el caso del concepto de función, este mecanismo permite realizar composiciones y aplicar transformaciones sobre funciones. Es decir, generar nuevas funciones a partir de funciones conocidas.

La *desencapsulación* se da cuando un individuo necesita regresar al Proceso que dio origen al Objeto, siempre que sea necesario.

El mecanismo *coordinación*, fundamental en la construcción de algunos Objetos y más aún, en esta investigación, se puede evidenciar cuando el individuo tiene dos o más Procesos y necesita construir un único Proceso que pueda ser encapsulado.

El mecanismo de *reversión* permite a un individuo revertir un Proceso existente dando origen a un nuevo Proceso. Un ejemplo de este mecanismo puede darse cuando el individuo necesita trabajar sobre la función inversa.

Los *Esquemas* son un conjunto de otras estructuras mentales (Acciones, Procesos, Objetos, otros Esquemas) que contienen las descripciones, la organización y los ejemplos de dichas estructuras que un individuo ha construido alrededor de un concepto matemático. Finalmente, el mecanismo *tematización* es el que posibilita a un individuo aplicar transformaciones al Esquema construido.

Las relaciones entre estas estructuras y mecanismos son generalmente presentadas como aparece en la Figura 1.

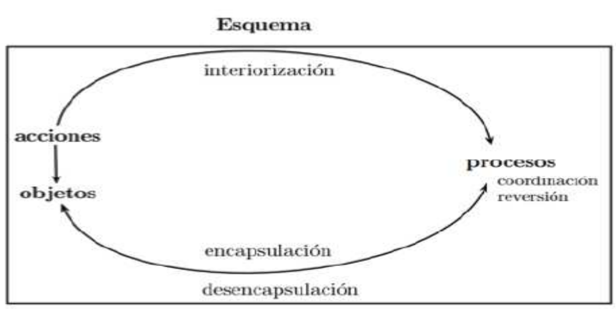


Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de contenido matemático (Arnon et al., 2014, p. 18)

La relación entre los elementos que se muestran en la figura 1 es considerada por Dubinsky (1991), citado en Arnon et al. (2014), como un "sistema de retroalimentación circular". Del mismo modo Asiala et al. (1996, citado en Arnon et al., 2014), describen la interacción entre las estructuras y los mecanismos que la generan: La construcción de un Objeto matemático inicia cuando un individuo manipula Objetos construidos previamente; esta manipulación está definida por las Acciones que puede realizar sobre él. Dichas Acciones al ser interiorizadas por el individuo son estructuradas en Procesos que posteriormente son encapsulados para formar Objetos. Los Objetos, pueden desencapsularse para regresar sobre el Proceso que le dio origen. Por último, las Acciones, los Procesos y los Objetos pueden ser organizados en Esquemas.

Las estructuras y mecanismos mentales que constituyen la Teoría APOE, fueron descritos con el fin de dar paso al desarrollo de modelos teóricos que un individuo construye para aprender un concepto. Estos modelos son llamados *descomposiciones genéticas.*

Descomposición Genética

Una descomposición genética en palabras de Arnon et al., es “un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar para aprender algún concepto matemático específico” (p. 27).

Estas descomposiciones pueden ser fundamentadas desde experiencias de aprendizaje o enseñanza, hasta el análisis de libros de texto. Las descomposiciones genéticas también pueden fundamentarse en resultados de investigaciones previas, el desarrollo histórico epistemológico de los conceptos matemáticos, entre otros aspectos que definen los conceptos matemáticos y su didáctica. Las descomposiciones genéticas de un concepto o noción matemática no son únicas, están determinadas por la experiencia de los individuos resolviendo situaciones más o menos relacionadas con un concepto o noción particular.

Ciclo de investigación basado en la Teoría APOE

Las investigaciones fundamentadas en APOE involucran tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de instrucción, y recolección y análisis de datos.

Inicialmente, en el ciclo de investigación, se propone un *análisis teórico* del desarrollo cognitivo del concepto a estudiar, en el caso de esta investigación: el concepto de función. Esta primera componente de análisis teórico, genera una descomposición genética preliminar basada en la comprensión matemática del concepto de función desde diversas maneras: como lo comprende el investigador, los libros de texto, como se comprende históricamente, a través de las experiencias como docente, o de investigaciones hechas previamente, entre otras. Esta descomposición genética preliminar guía el *diseño e implementación de enseñanza* que es justamente la segunda componente de este ciclo de investigación. La enseñanza está orientada, en palabras de los autores, a “promover la abstracción reflexiva en lugar de obtener respuestas correctas” (Arnon et al., 2014, p. 58). Si esta descomposición preliminar es una buena aproximación a la construcción del concepto de función, la tercera etapa, *recolección y análisis de datos*, va a permitir la validación de la descomposición genética y su implementación en la enseñanza. En esta implementación, se recolectan los datos para dar respuesta a dos interrogantes: ¿Los estudiantes aparentemente realizan las construcciones mentales descritas por la descomposición genética? ¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el concepto en cuestión? (Arnon et al., 2014, p. 94).

Si el investigador concluye que en efecto, los estudiantes aparentemente realizan las construcciones mentales descritas por la descomposición genética preliminar, pero no aprendieron el concepto en cuestión, el análisis teórico es reconsiderado y modificado. Pero si ni siquiera realizan las construcciones descritas por la descomposición genética preliminar, la enseñanza debe ser reconsiderada y modificada. Es decir, este ciclo puede ser repetido hasta dar respuesta afirmativa a los dos interrogantes propuestos y tener como resultado, una descomposición genética validada.

Elementos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

Una *representación* es interpretada por Duval como una “codificación de la información”. Además, Duval asegura que “no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación” (Duval, 2004, p.25). Por otro lado, Duval se refiere a la *semiosis* como una implicación de la variedad de signos que pueden ser utilizados para ponerlos en correspondencia. En efecto, los sistemas semióticos, que permiten que se cumplan las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación (representación de alguna cosa, transformar las representaciones, y convertir las representaciones) se denominan *registros de representación semiótica*.

El autor analiza entonces, las representaciones semióticas en las que se llevan a cabo todos los aprendizajes sujetos a una enseñanza, ya que dichas representaciones permiten una “mirada del objeto”. Las representaciones semióticas pueden ser: esquemas, figuras, gráficos, expresiones simbólicas, etc. Además, Duval afirma que la propiedad más importante de esas representaciones es su transformabilidad en otras representaciones que guardan todo el contenido de la representación inicial, o que guardan solo una parte de ese contenido. Particularmente, esta transformabilidad se da con las actividades cognitivas de las representaciones semióticas, las cuales son descritas a continuación.

Actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis

Las actividades de *formación, tratamiento* y *conversión* que se presentan en este apartado, son fundamentales para el análisis de un aprendizaje conceptual. Dicho aprendizaje centrado en el cambio y la coordinación de los distintos registros de representación, resulta muy beneficioso en la comprensión de conceptos (Duval, 2004, p. 49).

La primera actividad, la *formación* de una representación semiótica, es el medio de selección de unos signos que establecen lo que se quiere representar. Esto es, el medio para expresar una representación mental o para evocar un objeto real. Por ejemplo, se realiza la actividad de formación cuando se representa una función en lenguaje algebraico. La segunda actividad, la actividad de *tratamiento,* consiste en transformar una representación inicial en otra representación terminal dentro del mismo registro, con el fin de “expandir” la información brindada. En el caso de las funciones, cuando se pasa de escritura conjuntista a escritura funcional, se está haciendo tratamiento de la representación, ya que ambas escrituras hacen parte del registro algebraico. La tercera actividad conocida como *conversión,* consiste en transformar una representación dada en un registro, a otra representación de un registro distinto al inicial, por ejemplo, trasformar una función del lenguaje algebraico a un esquema gráfico, pero sin ser reducida a un algoritmo. Esta actividad puede favorecer la coordinación de los registros de representación.

Método

El método que será usado para la investigación, es el ciclo de investigación de la Teoría APOE (Arnon et al., 2014) con algunas adaptaciones en el diseño e implementación de enseñanza. En dicha componente se puede ver el rol que juega la Teoría de Duval en esta propuesta de investigación.

A continuación se describe el desarrollo de cada una de estas componentes.

Análisis teórico

El objetivo principal de esta componente, es diseñar una descomposición genética preliminar del concepto de función basada en estudios de libros de texto, investigaciones previas y experiencia propia, que determine un camino viable para los estudiantes. Es decir, dicha descomposición debe ser realizable por los estudiantes, para que puedan construir el concepto de función.

Para el diseño de la descomposición genética, se toma como guía el trabajo realizado por Roa-Fuentes y Asuman Oktaç (2010) en el cual dan a conocer el procedimiento que siguieron para diseñar una descomposición genética sobre el concepto de transformación lineal.

Después de realizar la descomposición genética preliminar, se pasa a la siguiente componente del ciclo de investigación: diseño e implementación de un modelo de enseñanza.

Diseño e implementación de un modelo enseñanza

Los individuos que participan en esta investigación son estudiantes que cursan noveno grado (14 – 15 años) en la institución pública Fundación Colegio de las Américas, ubicada en el municipio de Bucaramanga.

Inicialmente, se genera un espacio para que los estudiantes se familiaricen con un ambiente dinámico, específicamente, con el software de geometría dinámica GeoGebra. Siguiendo el ciclo metodológico de ACE (estrategia pedagógica que consta de tres componentes: Actividades, discusión en Clase, y Ejercicios), se busca introducir actividades en el aula para promover los mecanismos asociadas a la abstracción reflexiva. Las actividades buscan potenciar la construcción de estructuras mentales propuestas en la descomposición genética preliminar. Estas actividades debido a que están fundamentadas en la teoría de Duval, incluirán problemas de situaciones nuevas que involucren la transformación de estructuras previas y que permitan la coordinación entre las diferentes representaciones del concepto de función. En la discusión en clase, se espera que los estudiantes reflexionen sobre el trabajo que están desarrollando. Finalmente, se dejan tareas extra-clase para que refuercen el trabajo que han realizado.

Recolección y análisis de datos

Para la validación de la descomposición genética preliminar y la implementación de la enseñanza, se usan tres instrumentos: 1. Prueba diagnóstica, 2. Prueba pos-instrucción, y 3. Entrevista semiestructurada.

La prueba diagnóstica evalúa las construcciones previas a la enseñanza sobre el concepto de función y si estas construcciones son las propuestas en la descomposición genética preliminar. Asimismo la prueba diagnóstica evaluará las habilidades de los estudiantes en los registros de representación. Con la prueba pos-instrucción se espera caracterizar las concepciones desarrolladas por los estudiantes y se pretende responder a los interrogantes planteados en el ciclo de investigación: ¿Los estudiantes aparentemente realizan las construcciones mentales descritas por la descomposición genética? ¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el concepto en cuestión? (Arnon et al., 2014, p. 94). Se recuerda que para validar la descomposición genética preliminar, la respuesta a estos dos interrogantes debe ser afirmativa. Finalmente, la entrevista semiestructurada se propone para que los estudiantes tengan la oportunidad de defender sus respuestas en la prueba pos-instrucción. Más aún, la entrevista es el instrumento que ayuda a validar las construcciones mentales que se caractericen en la descomposición genética.

Reflexiones iniciales

Dado que las investigaciones realizadas bajo la Teoría APOE, inicialmente se enfocaron en el estudio de pensamiento matemático avanzado (matemáticas universitarias), se esperaba que los estudiantes ya contaran con estructuras abstractas sobre las cuales trabajar. Esta propuesta, por el contrario, pretende trabajar con estudiantes que tienen sus primeros acercamientos formales al concepto de función, para que estos logren construir estructuras más sólidas del concepto.

La descomposición genética diseñada, podría servir como herramienta para describir y predecir el pensamiento matemático de un individuo genérico, es decir, la descomposición genética puede ser usada por cualquier estudiante que tenga las características generales del grupo en el que se pretende llevar a cabo la enseñanza, esto es, "está al alcance" de cualquier estudiante que curse noveno grado. No es una forma que solo pueda usar un individuo con características particulares. Dicha descomposición también podría ser una herramienta para elaborar secuencias de enseñanza, incluso, secuencias elaboradas por el profesor mismo.

Se hace énfasis en que este documento muestra los avances de una propuesta de investigación, por ende, ésta sigue en construcción.

Referencias y bibliografía

Arnon, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory*. New York: Springer.

Carlson, M. & Oehrtman, M. (2005). Research Sampler 9: Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (Traducción de Miryam Vega). Cali: Universidad del Valle.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In Tall, D. (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In Tall, D. (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 140-152). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de los estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *1*(1), 5-21.

Hitt, F. (2005). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En Cortés C. Et Hitt F. (Éds), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza,* 81-108. México: Morevallado.

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, *13*, 29-36.

Prada-Núñez, R., Hernández-Suárez, C. A. y Ramírez-Leal, P. (2016). Comprensión de la noción de función y la articulación de los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de ingeniería. *Revista Científica, 25*, 188-205. doi: 10.14483/udistrital.jour.RC.2016.25.a3

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(1), 89-112.

Romero Félix, C. F. (2016). *Aprendizaje de transformaciones lineales mediante la coordinación de representaciones estáticas y dinámicas*. (Tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.

Sánchez, B. I. (2009). Las representaciones sociales como base para el diseño de una secuencia de aprendizaje sobre el concepto de función. *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación*, *4*, 45-71.

El concepto de función como covariación en la escuela secundaria

Ronald Andrés **Grueso**
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
ronald.grueso@correounivalle.edu.co

Resumen

La presente comunicación es un reporte de un trabajo de grado de maestría de la Universidad del Valle y muestra aspectos teóricos, el diseño y algunos resultados de la implementación de una secuencia de actividades relacionada con el estudio de la función a través de situaciones de covariación, en grado noveno de una Institución Educativa de Colombia.

La secuencia consta de tres situaciones, cuyo diseño se fundamentó en el marco conceptual del razonamiento covariacional y se basó en una situación problema sobre la maximización del área de un rectángulo inscrito en una forma cuadrada. En algunos resultados se pudo evidenciar la importancia de enseñar la función desde una perspectiva de dependencia y cambio sin hacerlo únicamente desde la correspondencia. Igualmente, que la consideración de la razón de cambio, les permitió a algunos estudiantes poder caracterizar el comportamiento y tendencia de una función.

Palabras clave: Razonamiento covariacional; modelos teóricos locales; Covariación; Concepto de Función.

Introducción y contextualización de la problemática

En la literatura se encuentra un acervo considerable de investigaciones sobre el concepto de función, específicamente, estudios asociados a su enseñanza y aprendizaje. En este sentido, se puede citar estudios como los de Kaput (1992), Dubinsky & Harel (1992), Sierpinska (1992), Carlson (1998), Hitt (1998), Guzmán (1998) y Ruiz (1994). En dichas investigaciones, además de caracterizar las distintas dificultades que tienen los estudiantes al abordar dicho concepto, se propone la enseñanza de la función desde una perspectiva variacional que privilegie la relación de dependencia entre magnitudes.

A pesar de estas propuestas y otros estudios sobre la enseñanza del concepto de función, en la actualidad, se sigue abordando la función desde una perspectiva de correspondencia o de asignación. Además, muestran que su enseñanza obedece a ideas netamente algorítmicas o estáticas, sin privilegiar que la comprensión del concepto de función va más allá de las letras o de los símbolos que lo representan. Lo que significa, que su estudio se continua haciendo de forma estática, donde predomina la importancia por generar habilidades en la sintaxis y en los procesos algorítmicos, más que en la comprensión de su significado y elementos constitutivos.

En consecuencia, no se puede desconocer que los estudiantes, además de cometer errores en el manejo y tratamiento de funciones, no tienen claro dicho concepto; por consiguiente, enseñar y aprender este concepto es una tarea compleja, dispendiosa y de mucho cuidado, tal como lo expresan López y Sosa (2008)

La enseñanza del concepto de función actualmente gira alrededor del registro algebraico, la internación de este registro con otros, como el grafico, suele ser limitado a una simple ejemplificación. Por ello, se sugieren tratamientos alternativos del concepto, como el numérico, geométrico, etc., con especial énfasis en el aspecto discursivo para la resolución de problemas y la modelación de fenómenos (p. 317)

De otra parte, los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas (1998) en Colombia proponen que: "Los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para "enlazar" patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio" (p.51). Sin embargo, esta directriz no se concretiza en las propuestas de enseñanza para trabajar el concepto de función en el aula. Además, direccionan, para los procesos de enseñanza, la movilización de diferentes registros de representación y las transformaciones que son consecuencia del cambio de un registro a otro. "El cambio de registro constituye una variable fundamental en didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje pues ofrece procedimientos de interpretación". (Duval, 2004, p.62). Pese a lo anterior, es frecuente que en la escuela, la función se aborde desde dos o tres registros de representación (algebraico, tabular y gráfico) de forma aislada, es decir, sin considerar las implicaciones que tienen las variaciones de un registro en los de otro registro. Así pues, ni siquiera el estudio de una gráfica cartesiana puede asegurar el acercamiento dinámico a la función, si dicha gráfica sólo se considera como el conjunto de unas parejas ordenadas en un plano cartesiano. Si no se estudia el comportamiento de los cambios, la gráfica puede esconder la *covariación*. Cuando hay una relación de dependencia entre dos magnitudes, la *covariación*, debe entenderse como el estudio de los cambios de una magnitud atendiendo a los cambios de la otra (Carlson, 2003).

Por otra parte, el quehacer de la enseñanza para un docente, está permeado por distintas mediaciones que acompañan o complementan su intervención directa con los estudiantes. Un ejemplo particular de un recurso usado con frecuencia es el libro de texto, que en muchas ocasiones se convierte en una fuente para preparar sus clases y actividades a proponer, por consiguiente, muchas de las definiciones y ejercicios son tomados de forma explícita de dicho texto escolar. Es por esta razón que los libros de texto pueden ser un indicador de lo que pasa en una clase promedio, y de ahí la importancia de estudiar y analizar la forma en que estos textos presentan un concepto tan relevante para el desarrollo del pensamiento variacional, como lo es la función. En la mayoría de los libros utilizados en Colombia, privilegian el concepto de función desde una perspectiva estática, donde la correspondencia y asignación son aspectos centrales bajo un enfoque conjuntista. Como consecuencia, se presenta una definición formal que propone una abstracción de los fenómenos de cambio, a través de la generalización de cuantificaciones y notaciones matemáticas. Aunque se suelen presentar aplicaciones, estas aparecen desligadas de la necesidad de introducir el concepto, es decir, después de trabajar lo algorítmico se establecen ejemplos que sirven de guía para resolver problemas de aplicaciones, lo cual implica la contemplación, desde la instrucción, de la discriminación de unas estrategias estandarizadas. De esta manera, la covariación difícilmente se logra trabajar desde la propuesta de enseñanza de los textos.

Teniendo en cuenta la problemática descrita en este estudio, que se hizo en el marco de un trabajo de grado para optar por el título de Magíster en Educación Matemática, se trata de dar respuesta a la siguiente pregunta: *¿Qué elementos o rasgos del concepto de función se identifican, en un grupo de estudiantes de grado 9°, a través del desarrollo de situaciones problema de covariación?*

Algunos elementos teóricos de referencia

El marco teórico y metodológico usado en el estudio fue el de los Modelos Teóricos Locales (MTL) Filloy (1999), entendiendo que los MTL se fundamentan en la observación experimental y la replicabilidad de diseños experimentales. Asimismo, en la determinación de un MTL, se hace énfasis en la caracterización de cuatro componentes interrelacionados entre sí, y la consideración de unas etapas durante la observación experimental. Las cuatro componentes teóricas son: Componente de enseñanza del Modelo Teórico Local o, de forma abreviada, Modelo de enseñanza. Componente de cognición del Modelo Teórico Local o Modelo para los procesos cognitivos. Componente de competencia formal del Modelo Teórico Local o Modelo de competencia formal y Componente de comunicación del Modelo Teórico Local o Modelo de comunicación. Dentro de cada componente se consideran elementos o referentes teóricos para ayudar a documentar la problemática y poder proponer una secuencia de enseñanza que consolide o sea acorde a dichos referentes.

El modelo de competencia formal, está direccionado por un análisis fenomenológico de la función. En este orden de ideas, en el modelo de competencia formal, el análisis fenomenológico del concepto de función se hace a partir de la fenomenología histórico-epistemológica y la fenomenología pura. De esta manera, se menciona de forma breve el transitar del concepto de función a través de la historia, para contemplar de forma paralela su visión epistemológica y por consiguiente, las distintas concepciones que ha tomado, lo cual dará indicios de sus usos, formas de difusión y posibles obstáculos epistemológicos. Asimismo, se hace énfasis en la concepción actual y usos del concepto de función. Para ello, se detalla cómo se concibe el concepto de función desde el saber sabio, antes de ser transpuesto a un contexto escolar.

En el Modelo de enseñanza se estudia y analiza el marco legal curricular que propone el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), en particular, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (2006). Este acercamiento al marco legal curricular se hace con el fin de identificar su papel en el estudio y enseñanza del concepto de función. Igualmente, se hace revisión del concepto de función en algunos libros de texto y revisión de la propuesta curricular de la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta con el propósito de caracterizar el modelo de enseñanza predominante en el sistema educativo y que, en últimas, ha permeado la enseñanza que han recibido los estudiantes que son objeto de observación en este estudio.

En el modelo cognitivo y de Comunicación, es vital reflexionar y analizar sobre la forma en que los estudiantes aprenden y logran adquirir o acumular conocimientos matemáticos nuevos. Para ello, se requiere contar con un instrumento bien estructurado, soportado en un marco conceptual, que permita clasificar las actuaciones de los estudiantes en torno a las actividades de covariación. Este modelo se apoya fundamentalmente en el Razonamiento

Covariacional (Carlson, et al. 2003). Este razonamiento es definido como: “Actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p. 130).

El estudio y desarrollo del razonamiento covariacional va ligado a fenómenos o situaciones dinámicas que no necesariamente deben ser modeladas en un software como Cabri o GeoGebra. Estas situaciones dinámicas permiten que el estudiante construya imágenes de dos variables dependientes de una función que cambia simultáneamente con el cambio imaginado de una variable independiente, por ejemplo el área de la sombra de un edificio con respecto a la hora del día. Como no se puede percibir directamente lo que piensan los estudiantes, los comportamientos se convierten en el mayor insumo para saber qué acción mental se encuentra asociada. Por ejemplo, para Carlson, los estudiantes deben ser capaces de analizar patrones de cambio en varios contextos y esto debe ir ligado a cómo los estudiantes interpretan y construyen enunciados. Así pues, Carlson contempla cinco acciones mentales relacionadas con el grado de evolución que muestra el estudiante al desarrollar tareas que implican la covariación. Las acciones mentales en orden ascendente de complejidad, están dadas por la coordinación: del valor de una variable con los cambios de la otra, dirección del cambio entre las cantidades, cantidad de cambio entre las variables, razón de cambio promedio de la función que relaciona las variables, razón instantánea de dicha función.

Además de estas cinco acciones mentales, Carlson propone cinco niveles de Razonamiento covariacional donde se puede evidenciar el grado de pensamiento covariacional desarrollado por el estudiante. Para la covariación, propone que cada nivel se va alcanzando de acuerdo a su desarrollo en la sustentación de las anteriores acciones mentales, por ejemplo, si un estudiante está en el nivel 3, es porque manifiesta los tres comportamientos que sustentan cada uno de estos tres niveles, es decir que de manera acumulada muestra las características de las acciones mentales uno, dos y tres (AM1, AM2 y AM3).

Para la clasificación de los estudiantes, Carlson también manifiesta que hay que tener cuidado con los pensamientos pseudo-analíticos ya que estos derivan comportamientos pseudo-analíticos. Un comportamiento pseudo-analítico se entiende como un comportamiento que no está ligado a los características o propiedades de un concepto, más bien está ligado a la memoria del estudiante porque seguramente lo vio, pero no lo comprende, es decir, está ligado a procesos más mecánicos o algorítmicos, por ello, al mostrar estos comportamientos, se pueden clasificar a los estudiantes de manera errónea.

A continuación se explicitan los niveles de razonamiento covariacional que guiaron el estudio.

Tabla 1
Niveles de razonamiento covariacional

NIVELES	CARACTERÍSTICAS
Nivel 1 Coordinación	Las imágenes de la Covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 Dirección	Las imágenes de Covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. (AM1 y AM2).

Nivel 3 Coordinación Cuantitativa	Las imágenes de la Covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. (AM1, AM2 y AM3).
Nivel 4 Razón Promedio	Las imágenes de Covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada (AM1 hasta AM4).
Nivel 5 Razón Instantánea	Las imágenes de Covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de los puntos de inflexión (AM1 hasta AM5).

Tomado de Carlson et al. (2003)

En cuanto a las demás componentes que integran el MTL, El modelo de competencia formal, está direccionado por un análisis fenomenológico de la función. En este orden de ideas, en el modelo de competencia formal, el análisis fenomenológico del concepto de función se hace a partir de la fenomenología histórico-epistemológica y la fenomenología pura. En cuanto al modelo de enseñanza, se estudia y analiza el marco legal curricular que propone el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), en particular, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (2006). Este acercamiento al marco legal curricular se hace con el fin de identificar su papel en el estudio y enseñanza del concepto de función. Igualmente, se hace revisión del concepto de función en algunos libros de texto y revisión de la propuesta curricular de la Institución Educativa.

Al indagar sobre el aprendizaje y estudio del concepto de función, mediante la secuencia de tareas que proponen los componentes de los MTL, este estudio o investigación es de carácter cualitativo y cuantitativo en el marco de un enfoque descriptivo en la medida en que se quieren detallar procesos, actitudes y aptitudes de los estudiantes al desarrollar unas tareas propuestas. La primera fase consiste en identificar la problemática y posteriormente hacer un análisis previo del problema.

Como consecuencia del análisis previo, en una segunda fase, se formula una hipótesis que a su vez, sugiere el diseño de una propuesta de aula a partir de la articulación de los componentes mencionados anteriormente. Dicha propuesta se implementa con 22 estudiantes de grado 9° de la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta (de carácter rural) de la ciudad de Yumbo. De acuerdo con el análisis previo de la fase 1, la secuencia de tareas se enfoca en poder tener en cuenta en cada pregunta, la forma de que las posibles respuestas puedan ser analizadas en el marco del Razonamiento Covariacional y por ende, permitan dar una respuesta a la hipótesis. A partir de los resultados, se categorizan las actuaciones de los estudiantes mediante una tipificación de las respuestas, para posteriormente analizar esos resultados a la luz de unas variables de análisis predeterminadas por los referentes teóricos mencionados en cada componente del MTL.

El análisis de los resultados permite, que en una fase final, se puedan consolidar unas conclusiones y reflexiones didácticas en términos, también de los referentes teóricos y la posible respuesta a la hipótesis planteada.

Algunas conclusiones y reflexiones

Tanto la fenomenología pura como la epistemológica, proponen una definición que actualmente, está en términos de una visión conjuntista, sin embargo, para el diseño de las tareas de covariación se retoma la definición dinámica, pues lo histórico la presenta como prevalente, además, el no hacerlo, sería desconocer el largo camino que ha sido necesario recorrer para llegar a las definiciones clásicas que respondían a la necesidad de estudiar el movimiento. Adicional a lo anterior y pese a la definición conjuntista, en la revisión de la literatura, los usos que se proponen se dan en el marco del estudio del cambio. La puesta en escena de tareas en torno a la covariación permitió evidenciar en los razonamientos de los estudiantes, el acercamiento a nociones asociadas al concepto de función, como: variables independientes, variables dependientes, dominio, rango, máximos y mínimos relativos, monotonía en el comportamiento creciente o decreciente de una función.

Con las tareas de covariación se logró que los estudiantes pasaran del reconocimiento de una relación entre magnitudes, a capturar la covariación como tal. En este orden de ideas, es importante resaltar que los puntos en el plano cartesiano representan relaciones entre magnitudes, a su vez, la comparación de dos puntos da cuenta del cambio, cambio que relacionado con otros de la misma gráfica, da cuenta de la variación. Así pues, con las tareas se logró que los estudiantes analizaran los cambios de los cambios, es decir, que compararan los cambios; esto implicó el reconocimiento de la correlación de la forma de cambio entre dos cambios.

En el estudio realizado, el razonamiento covariacional (Carlson, 2003) fue una herramienta importante para clasificar las actuaciones de los estudiantes como consecuencia de comportamientos asociados a determinadas acciones mentales, para posteriormente situar a los estudiantes en unos niveles de razonamiento covariacional. Esto pone de manifiesto la importancia de que los profesores puedan contar con herramientas que permitan poder clasificar y observar las actuaciones de los aprendices, en procura de poder analizar los procesos cognitivos que subyacen a las respuestas de sus estudiantes y que por consiguiente le permitan reflexionar y reorientar sus prácticas pedagógicas.

La metodología propuesta para la aplicación y evaluación de las tareas de covariación, se caracterizó por tener en algunos momentos trabajos en parejas (trabajo colaborativo) lo cual permitió la discusión y confrontación de saberes que posteriormente condujo a la institucionalización de saberes.

El trabajo con la covariación se puede articular en instrumentos de intervención en el aula, sin importar la edad. Esto se vio reflejado cuando los estudiantes enunciaban aspectos relacionados con el comportamiento de los cambios y no necesariamente requerían de pre-requisitos de carácter sintáctico del álgebra escolar.

De acuerdo al marco conceptual de Carlson, el nivel N5 no fue abordado en las tareas, lo cual es una limitación en el estudio de la razón instantánea y su relación con la función derivada. De esta manera, un posible estudio futuro podría estar basado en el diseño y posterior aplicación, de actividades donde las respuestas esperadas estén relacionadas con la función derivada y casos asociados al límite cuando la variación de una variable tienda a ser cero.

La puesta en escena de tareas en torno a la covariación permitió que los estudiantes, con preguntas específicas se fueran encaminando y obteniendo avances en las formas del razonamiento que usaban. En dichos razonamientos fue evidente el acercamiento a nociones asociadas al concepto de función, como: variables independientes, variables dependientes, dominio, rango, máximos y mínimos relativos, monotonía en el comportamiento creciente o decreciente de una función. Esta conclusión se hace a partir de los resultados de las actuaciones de los estudiantes en las tres tareas de la situación 2, donde las preguntas también tenían la intención de observar elementos presentes en el discurso de sus explicaciones para poder tener más información acerca de la forma en que están entendiendo o comprendiendo alguna situación. Asimismo, estos comportamientos observados en los estudiantes dan cuenta del porqué se les clasificó en el nivel N3 de razonamiento covariacional del marco conceptual propuesto por Carlson, puesto que los estudiantes, en sus actuaciones, dieron cuenta de la comprensión del comportamiento de los cambios desde el punto de vista cualitativo y cuantitativo.

Algunos estudiantes llegaron a reconocer que para esbozar una gráfica, no necesariamente se debe tener una expresión algebraica que la soporte predeterminadamente. Esto se evidenció cuando ellos esbozaban la forma de la curva dependiendo del comportamiento de los cambios de una variable respecto a la otra, en términos de la coordinación cualitativa y cuantitativa de las cantidades involucradas.

En relación con la hipótesis que se pretendía contrastar en el MTL inicial, se puede afirmar que en efecto, el concepto de función se puede y se debería trabajar a partir de tareas de covariación, ya que estas permiten observar el comportamiento dinámico que subyace a dicho concepto. El desarrollo del pensamiento variacional y en particular, el aprendizaje de la función, se ve potencializado a partir del estudio del razonamiento covariacional.

Teniendo en cuenta que el estudio de la función es el eje principal para la comprensión del cálculo, es importante destacar que la función debe ser estudiada no sólo desde la definición de sus elementos asociados, sino también desde los aspectos dinámicos que ella modela o representa. En este orden de ideas, el estudio del comportamiento de los cambios posibilita que la función realmente sea el epicentro del estudio del cálculo. En la escuela, normalmente, la función se muestra aislada de otros aspectos como los límites, la derivada y las integrales, es decir, el cálculo diferencial e integral pierde sentido si no se le ha adjudicado al concepto de función su carácter dinámico.

Referencias y bibliografía

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, *8*(2), pp. 121-156.

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *Research in collegiatemathematicseducation*, *3*, pp. 114-62.

Dubinsky, E., & Harel, G. (Eds.) (1992). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Washington: Mathematical Association of America.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.

Filloy, E. (1999). Modelos Teóricos Locales: Un marco teórico y metodológico para la observación experimental en matemática educativa. En *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Iberoamericana.

Grueso, R. A., y González, G. (2016). *El concepto de función como covariación en la escuela* (Tesis de Maestría). Universidad del valle, Cali.

Guzmán, I. (1998). Registros de Representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1(1), 5-21.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), pp. 123-134.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En Grouws,D. (Ed.) Handbook on research in mathematics teaching and learning. 515-556. New York: Macmillan.

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *Acta latinoamericana de Matemática educativa*, (21), pp. 308-318.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares.* Serie Lineamientos curriculares. República de Colombia. Bogotá, D.C. Colombia. MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas. En MEN, Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: MEN.

Ruíz Higueras, L. (1994). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. Ph D. Universidad de Granada.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. MAA Notes # 25 (pp. 3–58). Washington, DC: Mathematical Association of America

Villa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (31), 9-25

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Dificultades en la comprensión de la función por tramos en estudiantes universitarios

Roger Leandro Díaz Villegas
Universidad Nacional de Cañete
Perú
rdiaz@undc.edu.pe
Candy Clara Ordoñez Montañez
Universidad Nacional de Cañete
Perú
cordonez@undc.edu.pe

Introducción

Actualmente, observamos que la mayoría de los estudiantes ingresantes a las diferentes universidades de nuestro país, en su estadía, presentan dificultades en el proceso de aprendizaje de las matemáticas y, la Universidad Nacional de Cañete (UNDC) no es ajena a esta problemática. Existen investigaciones como la de Yam (2009) que manifiesta que los estudiantes presentan diversos obstáculos en la adquisición de un nuevo conocimiento y en el uso del concepto de función. Según Chumpitaz (2013) asegura que los universitarios de la carrera de ingeniería muestran obstáculos en el aprendizaje de la función por tramos. En este estudio nos basaremos en la Teoría de Duval por los elementos teóricos que permite la investigación en el aprendizaje de la función por tramos. Así, por la relevancia ya evidenciada, nos planteamos investigar: ¿Qué dificultades presentan los estudiantes del ciclo I de contabilidad en la comprensión de la noción de función por tramos cuando transitan por los distintos registros de representación semiótica?

Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (RRS)

La Teoría propuesta por Raymond Duval se enfoca en el uso de los registros de representación semiótica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, Duval (2006) incide que en la actividad matemática lo importante no es la representación de un objeto matemático, sino las transformaciones que pueden realizarse: tratamiento y conversión. Según Duval la comprensión de un objeto matemático se basa en el uso de al menos dos RRS. Nuestro objeto matemático en estudio, función por tramos, se basa en los RRS: verbal, gráfico y algebraico.

Metodología

El trabajo se realizó con 10 estudiantes (entre 17 a 25 años) que se encontraban cursando el ciclo I de la carrera de Contabilidad de la UNDC. Ellos no contaban con conocimientos previos sobre función por tramos. Estos estudiantes participaron de manera voluntaria en esta investigación luego de realizarse una convocatoria a todos los estudiantes del curso de Matemática básica.

La metodología aplicada en este estudio está dada en un enfoque cualitativo con estas etapas: 1) Aplicación de la sesión de clase: a partir de una situación problemática se trabajó la construcción de la noción de función por tramos tanto en su representación verbal, tabular, algebraica y gráfica. 2) Elaboración de la actividad: se diseñó 3 tareas. La tarea 1 buscó transitar del registro verbal al algebraico, es un problema referido al pago del impuesto a la renta de un trabajador peruano. La tarea 2 buscó transitar del RRS gráfico al algebraico. El gráfico propuesto es una función que está compuesto por secciones de una función lineal, cuadrática y constante. La tarea 3 trató transitar del RRS gráfico al verbal. A partir de un gráfico propuesto se buscó que los estudiantes inventen una situación, el cual evidencien: relacionar las variables independientes y dependientes, describir el comportamiento de la gráfica, corresponder a cada valor del registro de partida un único valor en el registro de llegada y asociar las unidades. 3) Experimentación y 4) Resultados.

Experimentación y resultados

Se realizaron dos sesiones, la sesión 1 y 2 con una duración de 4 y 3 horas, respectivamente.

Respecto a la tarea 1 se observó en los estudiantes las siguientes dificultades: expresan parcialmente la situación como representación algebraica de una función por tramos, por ejemplo: no expresan completamente la regla de correspondencia, ausencia del dominio o no describen el significado de las variables empleadas en la expresión matemática. Para la tarea 2, los estudiantes determinaron parcialmente la regla de correspondencia, especialmente, las dificultades halladas han sido obtener la regla de correspondencia cuando una de las secciones de la gráfica es una función cuadrática con un vértice que no es (0,0) y, otras de las dificultades han sido para representar el dominio de la función. En el caso de la tarea 3 observamos que los estudiantes inventan situaciones que relacionan las variables (independientes y dependientes) y asocian las unidades, por ejemplo, los metros que recorre una liebre depende de la velocidad que emplee. Sin embargo, la dificultad encontrada es que en sus problemas solo asocian valores enteros de las variables, es decir, consideran los puntos (3;3), (4;3), etc. y no consideran (3;3.2), (4;3.7), etc.

Conclusiones

La pregunta de investigación, se responde: Las respuestas de las tareas evidencian que los estudiantes del I ciclo de contabilidad presentan dificultades para la comprensión de la noción función por tramos cuando estos transitan por los distintos registros de representación semiótica.

Las dificultades encontradas en las respuestas de los estudiantes respecto a cada tarea son distintas. La tarea 3 resultó ser la de mayor dificultad para los estudiantes, pues el hecho de transitar del registro gráfico al verbal, demanda una interpretación global de la gráfica y comprensión del significado de la relación que existe entre las dos variables. Consideramos, que esta dificultad se debe a que este tipo de tareas son poco trabajadas tanto en las clases y en los libros de textos. Por otro lado, en la tarea 2, la dificultad para los estudiantes es lograr asociar la representación gráfica de cada curva con su respectiva regla de correspondencia. Para conseguir lo esperado en las tareas debemos tomar las sugerencias dadas por Tocto (2015), en base a su investigación y sus resultados obtenidos, el de utilizar el RRS tabular para luego transitar del RRS gráfico y al RRS algebraica.

Referencias y bibliografía

Chumpitaz, L. (2013). *La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú.

Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación.* Revista la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española. 9(1), pp. 143-168.

Tocto, E. (2015). *Comprensión de la noción función cuadrática por medio del tránsito de registros de representación semiótica en estudiantes de quinto año de secundaria.* (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú).

Yam Huh, E. (2009). *Función definida por partes. Un análisis histórico – didáctico referente a su tratamiento escolar.* (Tesis de licenciatura). Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Del Contexto Geométrico al Razonamiento Funcional

César **Briseño** Miranda
CINVESTAV-IPN
México
cbriseno@cinvestav.mx
Ernesto **Sánchez** Sánchez
CINVESTAV-IPN
México
esanchez@cinvestav.mx

Resumen

En este trabajo se identifican los tipos de razonamientos [cuantitativo, inductivo y representacional] surgidos en estudiantes de bachillerato al resolver tareas que involucran situaciones geométricas dinámicas. Se trata de un estudio de tipo cualitativo surgido desde una concepción de la Teoría Fundamentada, que permite identificar la manera en cómo los estudiantes se acercan —desde el punto de vista cognitivo— al Esquema de Función diseñado [por los autores] en este trabajo. Los resultados muestran que las tareas, los conocimientos previos de los estudiantes y el adecuado uso de los ambientes de trabajo, ambiente Tecnológico Digital como complemento del ambiente de Lápiz y Papel, promueven [en conjunto] la interrelación de los registros de representación que son esenciales para promover los razonamientos asociados con los conceptos involucrados.

Palabras clave: Tipos de razonamiento, relación funcional, bachillerato, lápiz-y-papel, tecnológico digital.

Introducción y planteamiento del problema

Diversos autores (p.ej, Doorman & Drijvers, 2011; Freudenthal, 1983; Weigand & Weller, 2001) afirman que el concepto de función es una de las nociones más potentes y útiles dentro de las Matemáticas y su manejo integral se relaciona con la capacidad no sólo de comprender y utilizar sus representaciones, sino también de relacionarlas entre sí y transitar de una a otra con fluidez. El tránsito entre diferentes representaciones constituye un instrumento importante para el aprendizaje de los conceptos matemáticos y, en particular, las variadas representaciones del concepto de función se han enriquecido y vuelto más accesibles y manipulables con ayuda de la tecnología (Cuoco & Goldenberg, 1997). De acuerdo con la NCTM (2000), si no se promueve la transición entre los diferentes registros será menos probable que los estudiantes favorezcan su razonamiento e identifiquen la relación de los diferentes registros de representación, lo cual provocaría que sea más probable el desarrollo de conceptos erróneos.

Un problema que surge cuando se emplea el ambiente *Tecnológico Digital* (TD) en la enseñanza, consiste en cómo integrar las habilidades que los estudiantes han adquirido para trabajar en ambiente de *Lápiz y Papel* (LyP). En este trabajo, se diseñaron tareas para promover en los estudiantes, el uso de distintos registros de representación con base en sus conocimientos previos y sus habilidades en ambiente LyP. Estas tareas se implementaron y se recogió el registro escrito con sus respuestas. La base de las tareas fue el reconocimiento de la variación de áreas de figuras geométricas en función del desplazamiento de un punto, con la finalidad de obtener su expresión algebraica que pueda explorarse con ayuda del ambiente TD.

Antecedentes

Hay una gran cantidad de investigaciones sobre el concepto de función. Aquí sólo mencionaremos algunos trabajos representativos. En el análisis del concepto de función, Freudenthal (1983, p. 496) la enfatiza en su relación con la variación, considerando que es la relación de elementos que varían libremente a elementos que varían bajo restricción. Para Cañadas y Molina (2016, p. 211), el trabajo con funciones depende de y aporta comprensión sobre las variables, la manipulación de fórmulas y la relación entre diferentes representaciones. La comprensión del concepto de función es un aspecto crítico del razonamiento algebraico y la construcción de relaciones funcionales es una actividad que debe aprovechar el poder de las capacidades de los estudiantes para razonar acerca de las cantidades y el uso de múltiples representaciones, con la finalidad de fomentar una comprensión profunda del concepto de función (Ellis, 2011; Kieran, 1992).

Por un lado, diversos autores (e.g., Ellis, 2011; Kieran, 1992) afirman que los estudiantes demuestran una visión limitada del concepto de función, a pesar de que algunos sean capaces de detectar patrones, ya que es posible que no puedan formalizar esos patrones correctamente escribiendo ecuaciones o expresiones algebraicas apropiadas. Por otro lado, los estudiantes tienen problemas para interrelacionar correctamente las representaciones tabulares, gráficas y algebraicas de las relaciones funcionales y pueden volverse excesivamente dependientes de un tipo de registro; se restringen a una manipulación algebraica que produce una limitación en el desarrollo de este concepto, de tal manera que los estudiantes no pueden hacer una conexión adecuada entre las distintas representaciones; la falta de conciencia algebraica hace que el razonamiento con funciones sea complejo (Doorman & Drijvers, 2011; Ellis, 2011).

La utilización de diversos sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, diagramas, gráficos cartesianos o figuras geométricas son esenciales para el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales (e.g., Arcavi, 2003; Duval, 2006; entre otros). La única manera de tener acceso a los objetos matemáticos y tratar con ellos es a través de sus representaciones semióticas (Duval, 2006). Para que los estudiantes comprendan y utilicen formas pertinentes de representaciones, deben entender el significado de éstas (e.g., en representaciones geométricas se requiere comprender el significado de las rectas, los números y variables, entre otras). Debido al uso de diversos sistemas de representación no son fáciles de emplear en la actividad matemática, por ello es necesario que los alumnos tengan conocimiento considerable de los símbolos y convenciones de ellas de modo que esas representaciones adquieran sentido para los estudiantes (Eisenberg, 1992). Algunos investigadores (e.g., Doorman & Drijvers, 2011; Ellis, 2011; Freudenthal, 1983) afirman que para lograr razonar y comunicarse en torno al tema de funciones se requiere conocer y emplear de manera adecuada su notación; cada una resalta aspectos específicos del concepto de función asociado.

En general, no hay una sola concepción de función para la enseñanza, pues se puede caracterizar de diferentes maneras según el aspecto en que se quiera enfatizar; por ejemplo: como regla de correspondencia, como parejas ordenadas, como una curva en el plano cartesiano o como covariación de cantidades. En la presente investigación nos hemos centrado en las primeras tres caracterizaciones. Con la finalidad de desarrollar en los estudiantes el sentido de función se debe promover la habilidad de visualizar gráficas de funciones, sin embargo, la mayor parte de los estudiantes cuando trabajan en ambiente LyP no pueden conectar la gráfica de la función con su descripción analítica, ya que se requieren habilidades de nivel superior en el análisis y desarrollo del argumento cognitivo que el procesamiento visual de ideas matemáticas proporciona para identificar esa interconexión (Eisenberg, 1992). El uso del ambiente TD promueve la interconexión entre conceptos, ya que permite generar ejemplos que invitan a la clasificación, reconocimiento de patrones, generalización e indagación de relaciones (Doorman & Drijvers, 2011), pero la efectividad del aprendizaje matemático con tecnología depende en gran medida del tipo de estudiantes.

Diseño y metodología

En el estudio participaron 16 alumnos de bachillerato (17 años en promedio) que se encontraban inscritos en la asignatura de Matemáticas VI (Cálculo Diferencial e Integral) y cursaban el sexto año con orientación a las carreras universitarias de fisicomatemáticas. Los alumnos trabajaron en parejas, formando ocho equipos a los que referiremos como: E1, E2, E3… E8. Las tareas se elaboraron con la idea de guiar a los estudiantes para que construyan una expresión algebraica surgidas de un patrón de covariación emergente a partir de una situación geométrica [función] y obtengan su expresión simbólica, después, con ayuda del ambiente TD, pudieran explorarla mediante su representación gráfica empleando algunas transformaciones. La tarea implementada para este trabajo se divide en dos momentos: (i) trabajo en ambiente estático con el recurso de *Lápiz y Papel*, (ii) trabajo en ambiente dinámico con el recurso *Tecnológico Digital* (GeoGebra). En seguida se expone la primera de tres actividades que se implementaron.

Actividad

La actividad a realizar en un ambiente de *Lápiz y Papel,* fue la siguiente: La Figura 1 muestra el segmento $\overline{AB}$ cuya longitud es 10 unidades. Coloca un punto Q sobre el segmento $\overline{AB}$. Dibuja el cuadrado *AQCD* cuya longitud de sus lados es el segmento $\overline{AQ}$. Enseguida, dibuja el cuadrado *QBEF* cuya longitud de sus lados es el segmento $\overline{QB}$.

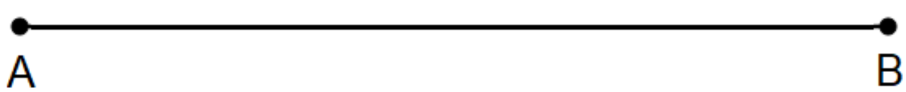


Figura 1. Segmento $\overline{AB}$ empleado en la primera actividad.

a) Con base en las características de la figura obtenida, determina el área del polígono *ABEFCD*. Explica tu procedimiento.

b) Coloca en el segmento un punto R diferente al del problema anterior. Calcula el área del polígono *ABEFCD* y compárala con la obtenida en el inciso anterior. ¿Cuál es mayor o son iguales? Explica tu procedimiento [Hay que notar que no se pide la expresión algebraica sino el cálculo del área].

c) ¿De qué depende el valor del área del polígono *ABEFCD*? Justifica tu respuesta.

d) Suponiendo que un punto P se desplaza a lo largo del segmento $\overline{AB}$ y se forman distintos polígonos *ABEFCD* con las características mencionadas en el enunciado inicial ¿El área del polígono *ABEFCD* es constante? Explica tu razonamiento

e) Calcula el área para los casos en que $\overline{AB} = 10$ y $\overline{AP} = 2, 4.5, 7.3$

f) ¿Qué expresión permite calcular el área del polígono *ABEFCD* para cualquier punto P ubicado en el segmento $\overline{AB}$? Justifica tu respuesta.

g) La expresión simbólica propuesta en el inciso anterior. ¿puede representarse gráficamente? En caso afirmativo, ¿qué tipo de gráfica se obtendrá? Explica tu razonamiento

h) Elabora la representación gráfica de la expresión simbólica obtenida en el inciso anterior.

La actividad a realizar con ayuda de *GeoGebra* consistió en lo siguiente:

a) [Instrucciones para construir en *GeoGebra* la figura solicitada].
b) Mueve el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$: observa los valores involucrados en la "Vista gráfica" y contesta ¿qué sucede al mover el punto? ¿cómo se comporta el polígono *ABEFCD*? Explica tu razonamiento.
c) De acuerdo con la configuración del polígono *ABEFCD*, calcula su área para cualquier punto P que se coloque sobre el segmento $\overline{AB}$. Explica tu procedimiento
d) [Obtén con *GeoGebra* las áreas de los polígonos que se calcularon en *Lápiz y Papel* y compara].
e) ¿Cómo son los resultados usando *Lápiz y Papel* (segunda columna) comparados con los resultados dados por el software (tercera columna)? Explica.
f) ¿Qué expresión permite calcular el área del polígono *ABEFCD* para cualquier punto P ubicado en el segmento $\overline{AB}$? Justifica tu respuesta.
g) Elabora la gráfica de la expresión simbólica obtenida en el inciso anterior. ¿Qué sucede con la gráfica al duplicar el valor del segmento $\overline{AB}$. ¿Cuál es su expresión simbólica?

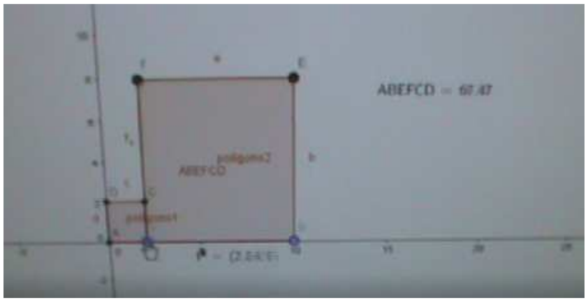
Los datos y su análisis

Los datos que se analizaron son las respuestas a las preguntas formuladas, que los estudiantes escribieron en sus hojas de trabajo y que mediante las respuestas registradas en grabaciones de video de las discusiones entre los estudiantes y entre estudiantes e investigador. Estas se transcribieron en archivos electrónicos para poder manipularlas, se codificaron comparando las respuestas entre sí y se agruparon cuando se identificaron rasgos similares, con base en la *Teoría Fundamentada* (Glaser & Strauss, 1967/2008; Birks & Mills, 2014), que recomienda no adherirse a alguna teoría preestablecida sino generar conocimientos y construir una teoría [local] con base en los datos. Mediante este proceso se determinaron las categorías que forman parte de los resultados propuestos al identificar los tipos de razonamiento que llevaron a cabo.

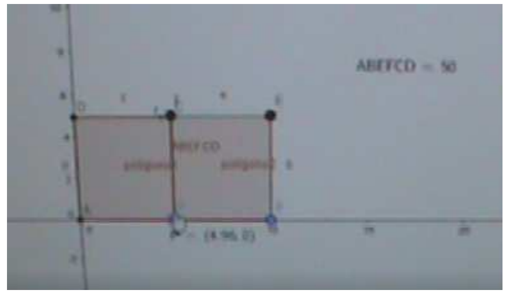
Resultados

Los participantes identificaron el comportamiento del polígono cuando se mueve el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$. Con ayuda del software los estudiantes se dan cuenta que el área del polígono ABEFCD varía de manera no lineal y encuentran que el área mínima se alcanza en el punto medio del segmento $\overline{AB}$ (véase Figura 2).

A continuación, ofrecemos ejemplos de respuestas que dan cuenta de diferentes tipos de razonamiento de los estudiantes, que llamaremos: *Razonamiento cuantitativo, Razonamiento* *inductivo y Razonamiento representacional*. Cuando estos tipos de razonamiento se integran en un solo razonamiento decimos que se alcanza el *razonamiento funcional*.



(a)



(b)

Figura 2. Desplazamiento del punto P sobre el segmento $\overline{AB}$, por parte de E2: (a) identifican cómo cambia el área del polígono; (b) el área mínima del polígono se localiza en el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

El *razonamiento cuantitativo* involucra cantidades concretas; se presenta cuando se reconocen rasgos comunes en secuencias de figuras y se determinan valores numéricos mediante el cálculo de área del polígono *ABEFCD*. Este tipo de razonamiento se presentó cuando los estudiantes calcularon los valores del área del polígono *ABEFCD* para varias posiciones del punto P con base en una expresión general previamente construida. Posteriormente verificaron que sus resultados son válidos con ayuda del software. Una de las formas en que el software (*GeoGebra*) influyó [de manera positiva en la reflexión de los alumnos] fue provocando conflictos en los estudiantes que habían obtenido un resultado diferente en la actividad previa de *Lápiz y Papel*; por ejemplo, en los equipos 1 y 4 (véase *Figura 3*) surgió la necesidad de modificar y adecuar la expresión algebraica original y se promovieron los *razonamientos cuantitativo* e *inductivo* de manera simultánea.

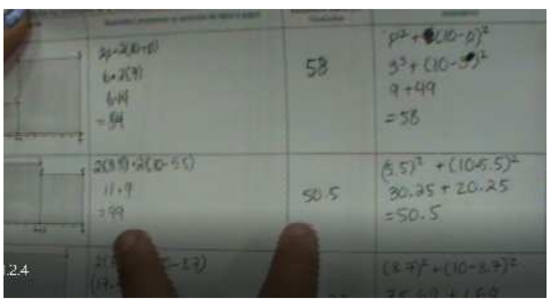


Figura 3. Evidencia del razonamiento cuantitativo. Respuestas del Equipo 4 al comparan los resultados propuestos en LyP respecto a los dados por el ambiente TD.

Diremos que se presenta un *Razonamiento inductivo* cuando a partir de los casos particulares se formula una expresión simbólica general. La mayoría de los estudiantes utilizan notación geométrica (véase *Figura 4.a*), otros combinan esta notación con expresiones verbales (véase *Figura 4.b*) y finalmente, sólo un Equipo utiliza una notación algebraica (véase *Figura 4.c*); también hay quien hace mezclas con los diferentes tipos de notación (véase *Figura 4.d*). El *razonamiento inductivo* se manifiesta con mayor claridad cuando los estudiantes representan simbólicamente el área del polígono *ABEFCD*. Tres equipos expresan el área del polígono utilizando símbolos y notación propia del contexto geométrico, con el cual fue formulado el problema, a saber: $\overline{AP}$, $\overline{AB}$ y p. Otros equipos dan la expresión para $\overline{PB}$ en términos de $\overline{AP}$ y $\overline{AB}$. Dos equipos utilizan notación algebraica; mientras que otro expresa el área en notación funcional. Un estudiante, E3 realiza operaciones en su expresión original, desarrollando el binomio y simplificando (véase *Figura 4.c*). Finalmente, hay dos equipos que muestran dificultades; el primero, E1 representan el área del polígono como la suma de las áreas de los dos cuadrados, mientras que el segundo, E4 calculan el área del polígono como el producto del doble de cada uno de sus lados (véase *Figura 4.d*).

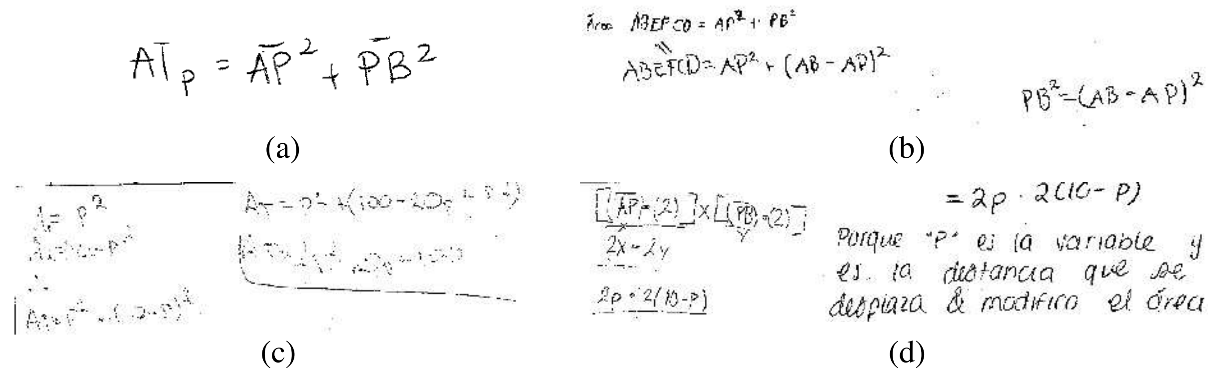
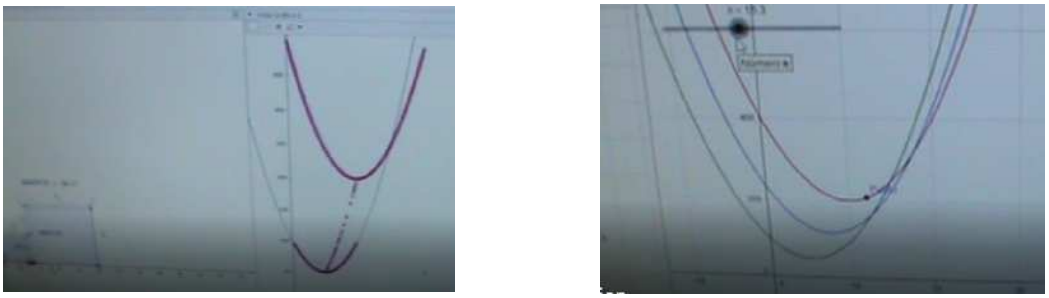


Figura 4. Evidencias del *razonamiento inductivo* para el cálculo de área del polígono *ABEFCD* en *TD*. (a) Respuesta dada por E2. (b) Respuesta dada por E8; (c) Respuesta dada por E3; (d) Respuesta dada por E4.

El *razonamiento representacional* se presenta cuando los estudiantes vinculan las diferentes representaciones, en especial, la expresión algebraica con su representación gráfica (véase *Figura 5.a*); de modo les permite ir construyendo la noción de función. Para propiciar este tipo de razonamiento, se pidió a los estudiantes reformular la expresión simbólica del área del polígono de modo de uniformizar la notación para ser introducida en el software. Esto implica, sustituir el segmento $\overline{AP}$ por "*x*", y hacer las demás sustituciones, como $\overline{AB}$ por 10, etc. Al emplear el software y generar la representación gráfica, el total de los equipos indican que al activar el rastro y desplazar el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$, se genera una parábola (véase *Figura 5.b*). Con base en los resultados e inferencias previas, los equipos definen el comportamiento de la gráfica al aumentar al doble la longitud del segmento $\overline{AB}$ y argumentan que dada la configuración geométrica del problema cuando se aumenta el segmento $\overline{AB}$ seguirá manteniéndose una representación gráfica relacionada con una parábola y el valor mínimo de área del polígono *ABEFCD* se encontrará, en todo momento, cuando el punto P se encuentre a la mitad del segmento $\overline{AB}$ (véase *Figura 6.c*).



(c) (d)

Figura 5. Evidencia del *razonamiento representacional*. (a) Respuesta dada por E1 en *LyP*; (b) gráfica que proporciona el software *GeoGebra* a E1; (c) Comportamiento de la gráfica al aumentar al doble la longitud del segmento $\overline{AB}$ dada por E6. (d) Modificación del valor asignado al deslizador "*n*" empleado por E5.

En seguida, el Equipo 5 propuso en *notación geométrica* la expresión $y = x^2 + (n - x)^2$ se aprovechó para que todos los equipos exploraran el efecto del parámetro "*n*" en la representación gráfica. Se utilizó el comando "*slider*" para encontrar que la forma parabólica de la gráfica se conserva y que el vértice se desplaza a lo largo de un segmento de recta. En la *Figura 6.d* se observan los resultados de algunas de las exploraciones.

El razonamiento funcional integra todos los razonamientos anteriores y emerge cuando se les pregunta a los participantes cuál es la expresión algebraica para definir el comportamiento de área del polígono *ABEFCD* para cualquier longitud del segmento $\overline{AB}$. Al proponer expresiones algebraicas para el polígono con un parámetro, cuatro equipos proponen representar al parámetro con una variable algebraica: *n*, *z* ó *b*. Cinco equipos expresan el área del polígono como una combinación de variables [algebraica y geométrica]; un equipo mantiene totalmente una notación geométrica $\overline{AP}$ y $\overline{AB}$. Otro equipo expresa el área del polígono de dos maneras diferentes: algebraica y geométrica. Cuando se les entrevista explican que para los diferentes valores de $\overline{AB}$ se mantendrá la forma parabólica que representa la variación del área del polígono cuando cambie "*x"* (véase *Figura 6*). En general, con base en la expresión simbólica que cada equipo obtuvo, explicaron que cuando la longitud del segmento $\overline{AB}$ cambia, la gráfica se comporta con características similares a la original (como parábola).

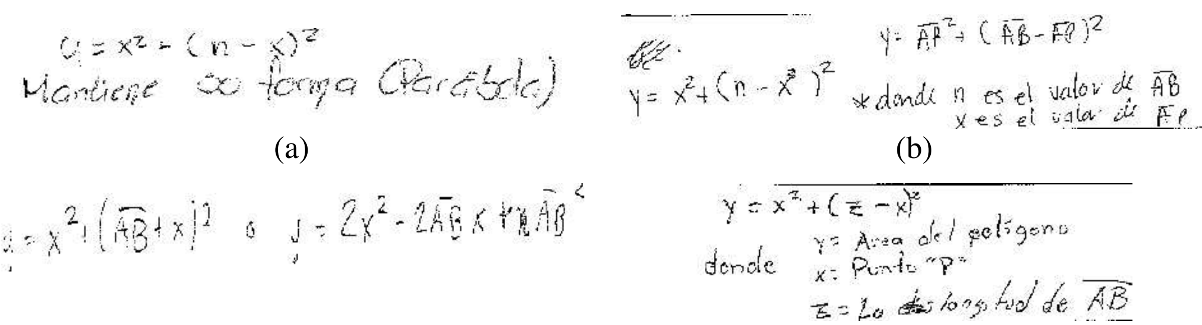


Figura 6. Representación simbólica para cualquier valor del segmento $\overline{AB}$: (a) Respuesta dada por E1. (b) Respuesta dada por E5. (c) Respuesta dada por E6; (d) Respuesta dada por E7.

Conclusiones

La actividad propuesta llevó, a los estudiantes, a reconocer que la parábola expresa la relación entre la magnitud del segmento $\overline{AP}$ y el área del polígono *ABEFCD*; para hacerlo tuvieron que aplicar los diferentes tipos de razonamiento que hemos caracterizado. En primer lugar, encontrar numéricamente áreas particulares y percibir que la relación no era constante o lineal. En segundo lugar, hallar una expresión algebraica que expresara la relación general de la covariación entre el lado y el área del polígono. Esta expresión se daba con un lenguaje simbólico geométrico o algebraico y geométrico, y fue necesario que lo transformaran en un lenguaje algebraico para representar su gráfica con ayuda del software. En cada uno de esos pasos algunos estudiantes tuvieron más dificultades que otros, pero en conjunto en el avance de la actividad lo comenzaron a lograr. Cabe destacar que el papel del ambiente Tecnológico Digital (*TD*) contribuyó a consolidar las representaciones que los estudiantes propusieron en ambiente de *Lápiz-y-Papel*, permitiéndoles corregirlas y refinarlas. El papel de las tareas fue crucial para movilizar los conocimientos de los estudiantes y para promover su razonamiento, permitiendo su integración con ayuda de la tecnología digital y, como consecuencia generando nuevos conocimientos sobre el concepto de función.

Referencias y bibliografía

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52 (3),* 215-241.

Birks, M., Mills, J. (2015). Grounded Theory. A Practical Guide. Los Angeles: SAGE.

Cañadas, M. C. & Molina, M. (2016). Approach to the conceptual framework and background of functional thinking in early years. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*. Homenaje a Luis Rico (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Cuoco, A. A. & Goldenberg, E. P. (1997). Dynamic Geometry as a Bridge from Euclidean Geometry to Analysis. In J. King, D. Schattschneider (Eds.), *Geometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research,* MAA Notes 41, (pp. 33–46). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Doorman M., Drijvers P. (2011) Algebra in Function. In: Drijvers P. (eds) *Secondary Algebra Education: Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown* (pp. 119 – 135). SensePublishers.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1), 103–131.

Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes 25, (pp.153-174). Washington DC: Mathematical Association of America.

Ellis A.B. (2011) Algebra in the Middle School: Developing Functional Relationships Through Quantitative Reasoning. In: Cai J., Knuth E. (eds) *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education* (pp 215-238). Springer, Berlin, Heidelberg.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967/2008). The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research. New Brunswick, USA: Aldine Transactions.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 390-419). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: The Council.

Weigand, H-G., & Weller, H. (2001). Changes of working styles in a computer algebra environment-The case of functions. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*, 87–111.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Movilización de las Concepciones en la Actividad Matemática para la Enseñanza del Álgebra Temprana

July Marcela **Londoño** Ospina
Universidad de Antioquia
Colombia
jmarcela.londono@udea.edu.co
Sandra Milena **Zapata**
Universidad de Antioquia
Colombia
sandra.zapata@udea.edu.co
Carlos Mario **Jaramillo** López
Universidad de Antioquia
Colombia
carlos.jaramillo1@udea.edu.co

Resumen

A la luz de la necesidad de aportar a la transformación del currículo de la educación básica primaria, en el contexto rural, frente a la inclusión del álgebra temprana, el objetivo de esta investigación es analizar cómo el maestro moviliza sus concepciones en la actividad matemática para la enseñanza del álgebra en la educación básica primaria, teniendo como fundamentación teórica la perspectiva de la objetivación de Radford y los medios semióticos que permiten promover formas de pensamiento algebraico.

Está fundamentada en un paradigma cualitativo y el método fenomenológico; se realizará por medio de encuentros de formación con maestros, a través de la estrategia microcentro rural; la producción de los datos se hará sobre las tareas de formación, utilizando técnicas como: grupos de discusión, la observación, la entrevista, los diarios y el mural de situaciones. Se espera aportar a las investigaciones sobre cómo preparar profesores de primaria para enseñar álgebra.

Palabras clave: álgebra temprana, actividad matemática, concepciones, currículo, enseñanza, formación de maestros, medios semióticos, microcentro rural, movilización, objetivación.

Planteamiento del problema

En la educación del contexto rural, donde el maestro multigrado es quien se encarga de los grados que corresponden al ciclo de educación básica primaria y al nivel de preescolar, con estudiantes en diferentes situaciones de aprendizaje, contextos familiares y sociales, se requiere pensar en la escuela como un escenario propicio de educación integral, en el cual necesariamente el maestro reflexione sobre su práctica pedagógica, currículo, didáctica, saber, ambientes educativos, metodologías y demás aspectos que en ella le permiten educar en y para el contexto. Según Moretti (2007) "El profesor se constituye profesor al objetivar su necesidad de enseñar y por lo tanto de organizar la enseñanza para favorecer con la praxis pedagógica, la transformación de la realidad escolar" (p. 213).

En este sentido, puede ser pertinente pensar en el colectivo de maestros o redes académicas que se conforman en las instituciones educativas como escenarios para el dialogo, la reflexión y la puesta en escena del devenir del maestro en su práctica pedagógica; tal es el caso de la estrategia microcentro rural, que promueve la formación de maestros, posibilita el compartir y la socialización de experiencias pedagógicas significativas, buscando soluciones a las dificultades que se presentan en el aula, a la vez que propende por el mejoramiento continuo de la calidad educativa. Esta estrategia de microcentro rural se adoptó en la I.E.R Zoila Duque Baena de la vereda Chagualal, Municipio de Abejorral, con la participación de 24 maestros rurales, formados en diferentes áreas específicas y con atención a los modelos de escuela nueva, posprimaria y escuela graduada, maestros convocados por el rector y la docente investigadora quien coordina la estrategia pedagógica; estos espacios de reflexión propician la formación, el diálogo de experiencias compartidas y la movilización de sus pensamientos, conocimientos y hacer educativo.

Así entonces, desde los microcentros rurales, una mirada sobre la práctica no escapa al escenario de la educación matemática, donde se hacen conversatorios y se abren espacios de discusión que permiten explicitar situaciones que a diario convergen en el aula; una reflexión sobre el currículo y los pensamientos matemáticos que en él emergen, como posible espacio de consolidación para una propuesta de unificación de criterios en la enseñanza que se imparte en las diferentes sedes educativas que hacen parte de la institución, ha permitido dilucidar la visión sobre lo que se enseña en la básica primaria, encontrando como un factor relevante la primacía del pensamiento numérico, pues este es considerado en las concepciones de los maestros de primaria, parte elemental del currículo (mallas curriculares, planes de área, planeaciones de los maestros, entre otros) como la base principal donde el estudiante aprende lo que debe saber al finalizar el grado quinto y enfrentarse a la secundaria, por ello probablemente otros pensamientos como el espacial, métrico, aleatorio, variacional y sistemas algebraicos ocupan un espacio secundario.

Algunas razones que enmarcan estas concepciones de los maestros se asocian posiblemente a la importancia que estos dan al pensamiento numérico en la básica primaria, así como a motivos relacionados a la durabilidad de los periodos académicos, el cual, mediado por diferentes actividades extracurriculares se hace corto y obstaculiza el poder ampliar la enseñanza hacia pensamientos como el espacial, que se trata con alguna frecuencia, en comparación con las reducidas ocasiones en que se incorpora el pensamiento variacional o sistemas algebraicos a la enseñanza de las matemáticas; como resultado de lo anterior, una mirada sobre el álgebra, desde los primeros grados de escolaridad, no se tiene en cuenta en el currículo y en la actividad de enseñanza como necesidad e interés de aprendizaje y con ello, según los maestros de matemáticas de la básica secundaria de la institución, se hacen más evidentes las dificultades de los estudiantes en la posterior formación de este nivel.

En este sentido, investigaciones como las de Wagner & Kieran (1989); Bednarz, Kieran y Lee (1996); Kieran (2007); Filloy, Rojano y Puig (2008) ponen de manifiesto diversas dificultades de los niños en el paso de la aritmética al álgebra en la escuela secundaria. Estas investigaciones han descrito aproximaciones al razonamiento algebraico que, posteriormente, permitieron aportar datos experimentales y justificaciones teóricas para apoyar la inclusión del álgebra desde la escuela primaria. Así, este campo de la investigación puede convertirse entonces en un escenario para la discusión, el análisis y la puesta en común en las actividades con los profesores del microcentro rural, quienes al movilizar sus concepciones sobre el álgebra pueden conocer otras maneras de enseñarla en la escuela, más allá de letras complejas, a través de la emergencia de pensamiento algebraico desde la mirada de otros mundos posibles alrededor de las matemáticas.

En otros escenarios, una posible causa de las concepciones de los maestros que enseñan matemáticas radica en la formación disciplinar como licenciados en otras áreas específicas: ciencias naturales, lenguaje, educación física, ciencias sociales, las cuales dificultan el tener el saber disciplinar para llevar de manera asertiva y pertinente la enseñanza de las matemáticas a la práctica en el aula; es así como los maestros en las reflexiones generadas en el microcentro rural manifiestan la necesidad de tener un conocimiento disciplinar sobre el álgebra y la manera de cómo enseñarla de forma armónica con el pensamiento aritmético, considerando que este ha sido la base fundante de lo que los estudiantes aprenden en matemáticas en los niveles de la educación básica primaria.

En este sentido, la incorporación del pensamiento algebraico al aula requiere de una nueva visión del maestro como agente de cambio e impulsor de un nuevo cambio curricular, como lo afirma Radford (2000) "necesitamos profundizar en nuestra propia comprensión de la naturaleza del pensamiento algebraico y la manera en que se relaciona con la generalización" (p. 38), para brindar al estudiante las posibilidades de educación que le serán posiblemente pertinentes en su proceso formativo y que al maestro le permitan ampliar su conocimiento y concepción sobre el pensamiento algébrico, en tanto "la forma de saber de un profesor llevaba consigo unas actitudes hacia la iniciación del trabajo algebraico, hacia sus estudiantes y hacia la introducción de cambio en su enseñanza, y una percepción específica de su eficacia personal" (Agudelo, 2005, p. 402).

En coherencia con estos planteamientos, el inicio del trabajo algebraico escolar en el marco de una enseñanza basada en la comprensión y el significado de la misma no debería centrarse en la presentación de simbolizaciones prefabricadas llamadas expresiones algebraicas, sino en la organización de actividades para el aula que involucren activamente a los estudiantes en procesos matemáticos, donde el pensamiento algebraico pueda surgir y ser comprendido; indiscutiblemente es aquí, donde el maestro, a partir de la reflexión de su actividad de enseñanza matemática, puede permear posibles transformaciones futuras en la forma de enseñar el álgebra. Radford (2003) propone que los estudiantes de los primeros niveles educativos también pueden usar otros medios de expresión para representar objetos y procesos de índole algebraica, en particular el lenguaje ordinario, gráfico, tabular, incluso gestual; para que esto suceda es necesario que el maestro "provea formas apropiadas de apoyo profesional que le permita producir cambios en las prácticas curriculares" (Blanton y Kaput, 2005).

Es pertinente entonces, comprender cómo el maestro puede llevar el álgebra a la práctica de la básica primaria desde su conocimiento matemático y la movilización sobre su actividad de enseñanza, para ello se debe dar una mirada amplia sobre su formación, sus concepciones en la actividad matemática y específicamente sobre la manera cómo concibe el álgebra y sus formas de llevarla al aula, en tanto, como lo plantea Agudelo (2005) "los profesores no ven sus concepciones de las matemáticas escolares como el factor determinante crucial de su práctica de enseñanza" (p.403).

Con el panorama de ideas expuesto, en el cual se consideran las reflexiones que se suscitan en la práctica de los maestros de la I.E.R Zoila Duque Baena y las distintas investigaciones, que vislumbran en la incursión del álgebra temprana una necesidad manifiesta para el campo de la educación matemática, se propone para la presente investigación la pregunta: ¿Cómo el maestro moviliza sus concepciones en la actividad matemática para la enseñanza del álgebra en la educación básica primaria? y el objetivo propuesto es analizar cómo el maestro moviliza sus concepciones en la actividad matemática para la enseñanza del álgebra en la educación básica primaria.

Horizonte teórico

Indagar sobre los principales elementos teóricos que sustenten la investigación implica rastrear teorías que posibiliten acercarnos a la manera como el maestro moviliza su comprensión y concepciones sobre el álgebra temprana, para encontrar medios posibles de llevarla al aula en la básica primaria, como un nivel de enseñanza a través de medios de expresión que permitan al estudiante entenderla y aprenderla, para iniciar con ella un proceso ameno y pertinente hacia la básica secundaria. Bajo esta mirada, para Ponte (2006) iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros años, exige una profundización de la comprensión del álgebra, de lo que esta envuelve y de donde está presente y, también, de sus relaciones con otros temas matemáticos, para fomentar el establecimiento de conexiones del álgebra con toda la matemática, fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos.

Es así como, después de un rastreo bibliográfico, acompañado de una reflexión sobre el problema de investigación, se vislumbra que la teoría de la objetivación, como una aproximación histórico-cultural, puede enmarcar el camino sobre el abordaje del álgebra temprana en esta investigación para la formación de los maestros. Desde esta teoría el conocimiento es producto de un tipo específico de actividad humana (Radford, 2006), precisamente, de una muy específica: el pensamiento, una actividad reflexiva y sensible mediada por signos, materializada en la corporeidad de las acciones, gestos y artefactos; partiendo de estas premisas hacemos un entretejido dinámico entre lo que se puede ir constituyendo como pensamiento algebraico para el maestro y como este puede hacerlo posible en el aula a través de diferentes medios de expresión. Según Radford (2006), "el pensamiento es una reflexión, es decir, un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios" (p. 108).

En esta perspectiva, los procesos de objetivación (Radford, 2009) indican un proceso que tiene como objetivo mostrar alguna cosa (un objeto) a alguien; en esta investigación se trata de mirar la manera como el álgebra puede ser concebida por el maestro para posteriormente ser enseñada en el aula. Pero, ¿cuáles son los medios para mostrar el objeto?, ¿cuáles son los medios posibles para enseñar el álgebra? Radford (2003) los llama medios semióticos de objetivación; esto es, objetos, artefactos, términos lingüísticos y en general signos que se utilizan para comunicar o hacer visible una intención y para llevar a cabo una acción. Para Radford (2003), los medios semióticos de objetivación son todos los medios utilizados por los individuos que se encuentran en un proceso de producción de significados, para lograr una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones y así adquirir las metas de sus acciones.

Así, pensar en tareas de formación, concebidas por Ponte et al. (2009), como tareas de aprendizaje profesional para los maestros, implica propender por medios posibles para que las concepciones del maestro sobre el álgebra puedan darse en otros escenarios y a partir de otros medios para su enseñanza, al respecto Radford (2010) reconoce tres formas de pensamiento algebraico o estratos caracterizados por los medios semióticos de objetivación movilizados por los sujetos en su actividad reflexiva, incluyendo percepción, movimientos, gestos y lenguaje natural. Estas formas de pensamiento algebraico para Radford (2010) son el pensamiento algebraico factual, pensamiento algebraico contextual y pensamiento algebraico simbólico.

Desde las anteriores consideraciones, se pretende que las tareas de formación con los maestros sean diseñadas a través de medios semióticos de objetivación que respondan a cada uno de los niveles de pensamiento algebraico propuestos por Radford, teniendo en cuenta que una experiencia de formación al maestro puede proporcionar el desarrollo del conocimiento matemático de los alumnos y su conocimiento didáctico (Ponte y Chapman, 2008), permitiría un escenario para movilizar su actividad de enseñanza, desde la reflexión de su ser y que hacer profesional, su práctica y la manera como concibe la matemática y el álgebra.

Para ello, se requiere de la formación continuada del maestro en la educación matemática, independiente de no tener su formación de pregrado en esta área; dicha formación se convierte en factor fundamental para desarrollar buenas prácticas educativas, saber y saber hacer en el estudiante, pues ser maestro multigrado en el modelo de escuela le exige enseñar todas las áreas y formar de manera íntegra en sus respectivos ámbitos, saberes y dimensiones, así lo requiere su formación académica, personal y social. Al respecto, investigaciones como las de Ponte y Chapman (2008) evidencian como en los últimos años se ha desarrollado una mejor comprensión de los procesos por los cuales se aprende a enseñar Matemáticas y se desarrolla la identidad profesional del profesor durante su formación.

Horizonte metodológico

Está investigación está fundamentada en un paradigma cualitativo, el cual, según Denzin, Guba y Lincoln (1994) "posibilita indagar en situaciones naturales, intentando dar sentido o interpretar los fenómenos en los términos del significado que la personas les otorgan" (p.10). En este sentido, realizar una investigación cualitativa se enfoca en la posibilidad de alcanzar transformaciones en las circunstancias de los sujetos y aportar a un mejoramiento en los procesos cotidianos que desarrollan. Así mismo, se adopta el método fenomenológico, en el cual, de acuerdo con Álvarez – Gayou (2003) tiene como propósito principal explorar, describir y comprender las experiencias de las personas con respecto a un fenómeno y descubrir los elementos en común de tales vivencias, permitiendo así, en esta investigación, a través de la formación continuada de maestros, desarrollar e implementar tareas de formación que posibiliten el dialogo, la reflexión y la movilización de concepciones, prácticas y actividad de enseñanza sobre el fenómeno del álgebra temprana, para entender lo que sucede en su inclusión a la básica primaria.

La investigación se desarrollará con seis maestros a través de la estrategia microcentro rural como escenario de formación continuada para maestros en el contexto rural; desde el trabajo colaborativo, la reflexión en la enseñanza, la producción e intercambio de experiencias, entre otras acciones, que permitan explorar, describir y comprender lo que lo maestros tienen en común de acuerdo con sus experiencias compartidas a priori y posterior a las tareas de formación. Para ello, se proponen diferentes encuentros con temas de discusión sobre la incursión del álgebra temprana a la actividad de enseñanza. El trabajo de campo se realizará con los maestros de la Zona Santa Ana, pertenecientes a cuatro sedes educativas de la I.E.R Zoila Duque Baena, dichos encuentros se llevarán a cabo dos veces al mes, desde febrero y hasta junio del año 2019. Los sitios de encuentro se proponen de manera aleatoria en cada una de las sedes, para facilitar el desplazamiento de los maestros protagonistas y un compartir de experiencias, el reconocimiento de sus contextos educativos y un ambiente propicio para la discusión, el dialogo y el trabajo formativo.

La producción de los datos se hará sobre las experiencias de los participantes en las tareas de formación a través del reconocimiento en los enunciados desde las voces de los maestros protagonistas de la investigación, utilizando técnicas como: grupos de discusión, la observación, la entrevista semiestructurada, los diarios reflexivos y el mural de situaciones. Las voces de los maestros protagonistas según Bajtín (2009), sus enunciados, sentires, expectativas y utopías, permitirán analizar los comportamientos y narrativas personales en la manera como llegaron a constituirse maestros. Así mismo, se pretende llegar a reconocer como ha sido su experiencia en la actividad de enseñanza de las matemáticas en la básica primaria, y a través del modelo de escuela nueva como estrategia multigrado propia del contexto rural; y de manera específica analizar cuáles son las concepciones que subyacen entorno a la incursión del álgebra temprana en el currículo de la básica primaria.

Los grupos de discusión, la entrevista semiestructurada y el mural de situaciones serán técnicas que en el trabajo de campo pretenden identificar las unidades de significado, donde el maestro, a partir de sus concepciones, discusiones, reflexiones y tareas de formación, valida o refuta medios de objetivación posibles para comprender el álgebra temprana, la manera como puede ser incorporada a la actividad de enseñanza y su importancia desde los primeros grados de escolaridad. Estas tareas de formación sobre el álgebra temprana serán llevadas al campo aplicado de la práctica de cada maestro, por ello los diarios reflexivos serán una técnica importante para develar las reflexiones de lo que subyace al aula y lo que sucede en el aprendizaje de los estudiantes en la aplicación de las mismas. Conforme se realice el trabajo colaborativo de formación con los maestros, se llevará a cabo la sistematización de los registros y triangulación de datos que surjan conjuntamente con ayuda de herramientas como el Atlas Ti y en forma digital en la interpretación de experiencias y datos, que posibiliten el análisis de las categorías.

Resultados esperados

Se espera que los resultados encontrados durante el desarrollo de la investigación permitan identificar cómo el maestro moviliza sus concepciones en la actividad matemática para la enseñanza del álgebra en la educación básica primaria, aportando así a la línea de formación de maestros, y a los estudios que reportan investigaciones sobre cómo preparar profesores de primaria para enseñar álgebra temprana.

Así mismo, desde el conocimiento teórico se busca que la investigación dilucide aportes pertinentes a la manera como el maestro moviliza sus concepciones y la actividad matemática desde la Teoría de la objetivación y los medios semióticos de representación para el pensamiento algebraico en la perspectiva de Radford.

La investigación por tener influencia en los maestros pretende contribuir a nivel local en el desarrollo del Plan Educativo Municipal de Abejorral, desde la línea estratégica de formación de maestros y motivar con ella a la reestructuración de la red de matemáticas municipal y a nivel regional, nacional e internacional participar a través de reportes de investigación en eventos como Foros, Congresos, CIAEM 2019, RELME 2019.

Referencias y bibliografía

Álvarez-Gayou, J. (2003). Cómo hacer investigación cualitativa: Fundamentos y Metodología. México: Paidós.

Agudelo, C. (2005). Explicaciones de ciertas actitudes hacia el cambio: las concepciones de profesores y profesoras de matemáticas colombianos (as) sobre los factores determinantes de su práctica de enseñanza en el álgebra escolar. (Recuperado el 10 de agosto de 2018 de: http://funes.uniandes.edu.co/1505/1/123_Agudelo2005Explicaciones_RevEMA.pdf)

Bajtín, M. (2009). *Estética de la creación verbal*. México: Publimex.

Bednarz, N.; Kieran, C. & Lee, L. (1996) Approaches to Algebra: perspectives for Research and Teaching. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. Journal for Research in Mathematics Education. 36(5), 412-446.

Denzin, N., Guba, E. & Lincoln, Y. (1994). *Competing paradigms in qualitative research*. Handbook of qualitative research. Park, CA: SAGE Publications.

Filloy, E.; Rojano, T. & Puig, L. (2008). Educational algebra: A theoretical and empirical approach. Berlin: Springer.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. En F. L. Jr, Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Charlotte NC: New Age Publishing; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Moretti, V. D. (2007). A Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. En M. O. Moura, A atividade pedagógica na teoría Histórico-Cultural (p.213). Brasilia: Liber Livro.

Ponte, J. (2006) En "El álgebra en la formación inicial de profesores de los primeros años: Una experiencia de formación". Recuperado en: http://revistas.ua.pt/index.php/ID/article/view/914.

Ponte, J. y Chapman, O. (2008) En "Conocimientos y prácticas de los profesores de matemáticas". p. 256.

Ponte, J., Zaslavsky, O., Silver, E., Borba, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Gal, H., & Chapman, O. (2009). Tools and Settings Supporting Mathematics Teachers' Learning in. (R. Even, & D. Ball , Edits.) The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics, 185 - 209. doi:10.1007/978-0-387-09601-8 17.

Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Educación Matemática, 12*(1), 51-69.

Radford, L. (2003) Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. Mathematical Thinking and Learning, 2003.Vancouver, v. 5, n. 1, p 37 – 70.

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A semiotic perspective. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2009). No! He starts walking backwards!‘‘: interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, DOI 10.1007/s11858-009-0173-9.

Radford, L. (2010). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. Educational Studies in Mathematics, Berlin, v. 42, n. 3, p. 237 - 268.

Wagner, S., & Kieran, C. (1989). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. In: Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Reston, VA: NCTM-LEA. p. 220 – 237.