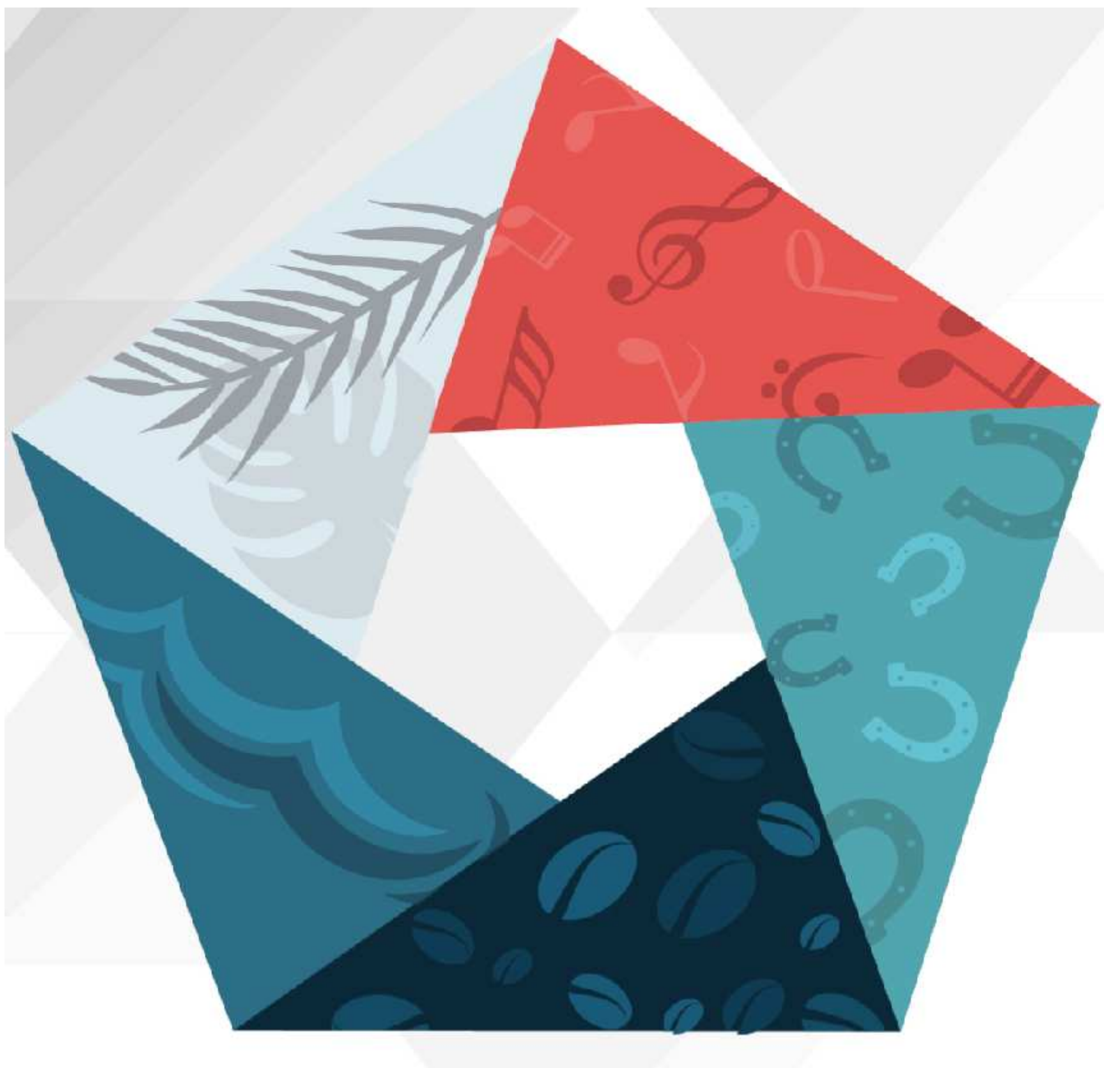
Educación Matemática en las Américas 2019

Volumen 12: Aritmética y sistemas numéricos



CIAEM IACME

desde - since 1961

Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO
www.ciaem-iacme.org

Educación Matemática en las Américas 2019
Volumen 1: Formación inicial de profesores
Editado por Yuri Morales-López y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN: 978-9945-09-413-8

El *Comité Interamericano de Educación Matemática* (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la *International Commission on Mathematical Instruction*. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera al CIAEM y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no fue previamente publicado en otro medio; y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Se respetaron los metadatos (nombres, apellidos, títulos, entre otros) que los autores proporcionaron cuando postularon su trabajo en la plataforma del evento.

Para citar este libro:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2020). *Educación Matemática en las Américas 2019.* Editores: Yuri Morales-López y Ángel Ruíz. República Dominicana: Autor.

ISBN: 978-9945-09-413-8
9 789945 094138

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LAS AMÉRICAS 2019

Presentación

Para el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es un placer y un honor ofrecer a la comunidad educativa este Volumen de *Educación Matemática en las Américas 2019*, en donde se pueden encontrar muy importantes insumos para comprender el momento histórico que atraviesa la Educación Matemática desde la perspectiva de las Américas.

La *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática* se realizó entre el 5 y 10 de mayo del 2019 en Medellín, Colombia. La Universidad de Medellín y la Universidad de Antioquia fueron las organizaciones académicas anfitrionas del evento. Las sesiones fueron realizadas en el campus de la Universidad de Medellín. Participaron 700 personas provenientes de 25 países de cuatro continentes: Europa, Asia, África y las Américas. Participaron centenares de docentes en servicio de la ciudad de Medellín y del Departamento de Antioquia.

Alrededor de 400 trabajos fueron presentados: conferencias plenarias y paralelas, mesas plenarias, minicursos, sesiones temáticas, comunicaciones cortas, talleres y posters. Unas 50 personalidades del mayor nivel en la comunidad internacional de Educación Matemática expusieron sobre sus investigaciones. Entre ellas Jill Adler (Suráfrica), Ferdinando Arzarello (Italia), Salvador Llinares (España), Yoshinori Shimizu (Japón), Michael Shaughnessy (EUA), Luis Rico (España), Fidel Oteiza (Chile), Carlos Vasco (Colombia), Carlos Sánchez (Cuba), Luis Carlos Arboleda (Colombia), Edwin Chaves (Costa Rica), Nelly León (Venezuela), Vilma Mesa (EUA). Aunque físicamente no pudo estar presente envió su contribución en forma de video Ubiratan D'Ambrosio (Brasil). Los trabajos dentro de la plataforma del congreso se pueden consultar en https://ciaem-redumate.org/conferencia/index.php/xvciaem/xv/schedConf/presentations

La revisión científica de todos los trabajos fue responsabilidad de un Comité Asesor Internacional, un Comité Internacional del Programa y el Comité Ejecutivo del CIAEM. Se contó con la coordinación central de Directores de tema y la Dirección de la plataforma científica realizada por el académico Yuri Morales con el apoyo de la profesora Johanna Mena (ambos de Costa Rica) y con la participación voluntaria de muchísimos revisores científicos de muchos países.

Este volumen incluye trabajos que fueron efectivamente presentados en ese congreso.

Expreso mi agradecimiento a todos los miembros de los comités científicos, directores de tema, revisores científicos, y directores de la plataforma científica. También deseo agradecer por su apoyo en el registro de este libro a Sarah González y a la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra en República Dominicana. Agradezco mucho a todos los autores que decidieron compartir su trabajo en las instancias que abrimos

mediante la XV CIAEM. También a Yuri Morales quien técnica y formalmente generó este volumen para su registro.

En las diversas dimensiones del congreso, de cuya realización este libro es producto, quiero aprovechar esta ocasión para reconocer la valiosa contribución de las Universidades de Medellín y de Antioquia y al Comité Organizador Local de la XV CIAEM, y, además, agradecer al equipo humano del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* que ha sido durante muchos años un sostén crucial en la organización de todos los eventos del CIAEM y de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*; y en particular de este libro que hoy sacamos a la luz pública.

Este volumen es una parte del libro de *Memorias* completo (son 15 volúmenes que se pueden ver/descargar). Se ha respetado aquí la paginación del libro completo. Y las referencias *deben hacerse con base en el libro y su paginación*. No es necesario indicar el volumen específico donde se cita pues esta es una versión funcional al servicio de una mejor visualización o descarga de este valioso material.

Invitamos a los lectores de este libro a promoverlo en sus diversas actividades de docencia, investigación, extensión y divulgación en todos sus países.

Con afecto

Ángel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática
Presentación del 17 de julio de 2024
Costa Rica

Índice

Basado en la información suministrada durante la postulación de cada trabajo

7. Aritmética y sistemas numéricos

XV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

O método Montessori no ensino e aprendizagem de números na Educação Infantil

Caroline de Paula Ribeiro
Faculdade de Educação, Universidade Federal de Juiz de Fora
Brasil
caroline-ad@hotmail.com
Reginaldo Fernando Carneiro
Faculdade de Educação, Universidade Federal de Juiz de Fora
Brasil
reginaldo.carneiro@ufjf.edu.br

Resumo

O presente artigo investigou as contribuições do método Montessori para o ensino e a aprendizagem dos números na Educação Infantil. Para tanto, realizamos uma pesquisa qualitativa em que utilizamos para produção de dados observações da sala de aula e notas de campo. O estudo foi realizado em uma escola particular de um município do interior de Minas Gerais, Brasil, em uma turma de Educação Infantil que recebe alunos de 3 a 6 anos de idade. Os resultados evidenciaram que a sala de aula montessoriana é repleta de materiais e conceitos matemáticos que respeitam o ritmo de desenvolvimento da criança e que proporcionam um aprendizado ativo, dinâmico e criativo em torno da construção do conhecimento. Além disso, as atividades permitiram abordar importantes ideias de conceitos matemáticos de números, mesmo sem a formalização e o rigor que ocorrerá nos níveis escolares seguintes.

Palavras-chave: método Montessori, números, ensino, aprendizagem, Educação Infantil.

Introdução

Desde muito cedo as crianças têm contato com a matemática. Elas observam o ambiente ao seu redor, as pessoas e suas ações em diferentes processos matemáticos e, no decorrer de sua vida, vão se apropriando de conhecimentos que estão inseridos na cultura a que ela pertence.

A Educação Infantil no Brasil é considerada a primeira etapa da Educação Básica e atende crianças de 0 a 5 anos de idade. Ao considerar as especificidades das crianças, o método Montessori reconhece a presença de conceitos topológicos na vida delas e busca a alfabetização matemática por meio do desenvolvimento da capacidade de pensar e de resolver problemas, uma vez que ela observa os adultos o tempo todo e constrói suas experiências a partir disso.

Assim, esse método desenvolve um modo de organizar o ambiente, planejar o tempo, as intervenções e a maneira de lidar com a criança de acordo com a concepção de infância que considera “a importância das condições ambientais iniciais no desenvolvimento mental da criança, a percepção sensorial, a motivação intrínseca da criança, os períodos sensíveis no seu desenvolvimento e o papel do desenvolvimento cognitivo no estabelecimento dos seus poderes sociais e criativos” (Lillard, 2017, p. 25).

Essa pesquisa teve o objetivo de investigar as contribuições do método Montessori para o ensino e a aprendizagem dos números na Educação Infantil. Para tanto, desenvolvemos uma pesquisa de caráter qualitativo em escola montessoriana de uma cidade do interior de Minas Gerais, Brasil, que utilizamos para produção de dados a observação e as notas de campo.

Referencial teórico

A matemática está presente na vida das crianças desde muito pequenas, pois elas tem, por exemplo, que “conferir figurinhas, marcar e controlar os pontos de um jogo, repartir as balas entre os amigos, mostrar com os dedos a idade, manipular o dinheiro e operar com ele etc.” (Brasil, 1998, p. 207).

Dessa forma, a Educação Infantil pode auxiliar as crianças a organizarem estratégias e informações, assim como apreender conhecimentos matemáticos. Segundo os Referenciais Curriculares Nacionais para a Educação Infantil (Brasil, 1998, p. 207), o ensino de matemática permite atender as “necessidades das próprias crianças de construírem conhecimentos que incidam nos mais variados domínios do pensamento; por outro, corresponde a uma necessidade social de instrumentalizá-las melhor para viver, participar e compreender um mundo que exige diferentes conhecimentos e habilidades”.

Ao refletir sobre a Educação Infantil é preciso considerar o princípio de que a infância tem caráter histórico e cultural e também a heterogeneidade das relações infantis, uma vez que esse conceito abrange a multiplicidade e a individualidade da criança, que é um ser “social, histórico, político e criador de cultura” (Fazolo, 2014, p. 33).

A partir do cuidado, do acolhimento, da alegria e da brincadeira, a criança tem a oportunidade de iniciar seus primeiros contatos com a matemática e a instituição que oferece a Educação Infantil é uma das mediadoras entre ela e sua relação com os conceitos matemáticos por meio das práticas pedagógicas desenvolvidas.

Nesse contexto, Machado (1986) destaca que o método Montessori corresponde a um conjunto de práticas de ensino que foram elaboradas pela médica e pedagoga Maria Montessori (1870-1952), considerada como uma das pioneiras da Educação Infantil, pois buscou pensar a relação do processo de ensino e aprendizagem a partir das especificidades das crianças.

Montessori teve suas primeiras experiências educacionais quando começou a desenvolver um trabalho com crianças internadas em hospícios para propiciar a elas uma educação especial. Para isso, desenvolveu alguns materiais e ao levá-los para manuseio, ela obteve um ótimo retorno dos alunos considerados deficientes intelectuais. Devido ao grande êxito de sua experiência, ela percebeu que seus materiais poderiam ser utilizados por todas as crianças (Perry, 2017).

A médica e pedagoga elaborou um modelo de sala de aula, que segundo Lillard (2017) buscava a autoconstrução da criança, que só seria alcançada pela relação da criança com seu ambiente e as pessoas inseridas nele, e pela liberdade. O modelo de sala de aula observado é estruturado por áreas de ensino que são chamadas de áreas de desenvolvimento e se dividem em: linguagem, matemática, sensorial, educação cósmica (história, ciências e geografia) e vida prática que proporcionam às crianças aprendizagens significativas por meio da exploração, com liberdade e autonomia.

Outro aspecto do método, é a organização das turmas por agrupamentos de idades. A proposta de Montessori baseia-se na composição de crianças com idades mistas variando entre duas ou três faixas etárias. O espaço é composto por uma variedade de recursos com diferentes níveis de dificuldade para atender crianças em diversas etapas de desenvolvimento e níveis de aprendizagem. A estruturação da sala proporciona à criança um aprendizado que é construído em conjunto, incentiva a interação social e respeita as diferentes formas de aprender com cooperação mútua, trocas e experiências.

Em relação aos conceitos matemáticos, Machado (1986) afirma que Montessori concluiu que a mente do homem é de natureza matemática e tende para a exatidão, para a medida e para o confronto. Para ela, a aquisição de conceitos matemáticos deve ter início no concreto para "materializar as abstrações"[1]. Para chegar a essa conclusão, ela passou por inúmeras experiências pedagógicas cientificamente comprovadas.

Assim, no ensino de matemática o método busca promover a capacidade de desenvolver conceitos relacionados à topologia e às ideias comparativas, relacionadas ao tempo e ao espaço como conceitos de grande e pequeno, alto e baixo, em cima e em baixo, longe e perto, entre outros; conceitos relacionados ao desenvolvimento da lógica e do raciocínio lógico, da aritmética, da construção dos números e seus desdobramentos, da geometria e, sobretudo, da resolução de problemas.

Metodologia da pesquisa

A pesquisa desenvolvida possui caráter qualitativo e de natureza descritiva que caracteriza-se pela possibilidade de compreender a percepção, a representação, as imagens e os significados sobre determinada temática ou objeto e a natureza da descrição refere-se à percepção dos fenômenos levando em consideração os aspectos mais e menos complexos (Richardson et al., 2008).

Conforme Bogdan e Biklen (1994), na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural e o investigador constitui-se como o instrumento principal. Para isso, foi realizada a inserção no ambiente escolar para investigar as contribuições da perspectiva montessoriana para o ensino e a aprendizagem de números.

A pesquisa foi realizada em uma escola particular de uma cidade do interior de Minas Gerais, na turma de Educação Infantil nomeada de Agrupada II, da professora Bianca[2], que recebe alunos de 3 a 6 anos de idade.

---

[1] Abstração que acontece a partir do trabalho de manipulação com os materiais.

[2] Bianca é licenciada em Pedagogia e professora nesta escola há 9 anos. Nome fictício para manter o anonimato da professora.

Ao considerar que a investigação qualitativa é descritiva, o trabalho busca narrar os dados em toda sua riqueza, pois "a palavra assume particular importância na abordagem qualitativa, tanto para o registo, como para a disseminação dos resultados (Bogdan & Biklen, 1994, p. 49). Os dados foram produzidos por meio de notas de campo da observação de quinze aulas com quatro horas diárias.

A observação proporcionou o contato privilegiado com as situações reais, pois para Laville e Dione (1999, p. 176), "é observando que nos situamos, orientamos nossos deslocamentos, reconhecemos as pessoas, emitimos juízos sobre elas".

Além disso, utilizamos também as notas de campo que referem-se ao "relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e reflectindo sobre os dados de um estudo qualitativo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150). Segundo esses autores, as notas de campo se constituem de duas parte: a descrição e a reflexão. A descrição é a preocupação em captar com palavras uma imagem do que aconteceu no campo e a reflexão são as ideias, preocupações e pontos de vista do pesquisador.

Para a análise dos dados, fizemos a leitura das notas de campo inúmeras vezes e escolhemos situações que emergiram dos dados e que nos auxiliaram a alcançar o objetivo da pesquisa e que chamamos de episódios. Interessantes destacar que a observação realizada pela pesquisadora, primeira autora deste texto, possibilitou captar essas situações, no entanto, o distanciamento do experienciado necessário para a análise não foi fácil, pois ela trabalhava na escola e estudava o método Montessori.

Apresentação e análise dos dados

A turma acompanhada era composta por 19 crianças de 3 a 6 anos, sendo 10 meninas e 9 meninos. O agrupamento II da Educação Infantil é dividido em três níveis de idade e ano escolar, o maternal III – com crianças a partir de três anos; o 1º período – com crianças a partir de 4 anos e; o 2º período – com crianças a partir de 5 anos.

Bianca, professora da turma é acompanhada por duas assistentes que a auxiliam no dia a dia da sala. Existe uma rotina que varia apenas nos dias de aula específicas (Educação Física, Artes e Biblioteca). Geralmente, as crianças chegam à sala, realizam uma atividade em grupo, conhecida também como rodinha. Nesse momento, a professora abre espaço para trocas de relatos entre as crianças, conversam sobre a data do dia e da semana, contam quantos amigos já chegaram e quantos ainda estão faltando e também desenvolvem atividades de equilíbrio, de concentração e de ampliação do vocabulário.

Após esse momento, a professora convida as crianças para começarem as atividades e cada uma pode escolher o material de seu interesse. A concepção da escola é trabalhar com a livre escolha, em que a criança pode se direcionar para o material que tenha interesse, uma vez que para Montessori a criança precisa ter liberdade para que possa desenvolver sua criatividade e escolher o que atrai sua atenção no ambiente, para "se relacionar com isso sem interrupção e pelo tempo que desejar, para descobrir soluções e ideias e escolher uma resposta própria e comunicar e compartilhar suas descobertas com os outros conforme queira". (Lillard, 2017, p. 41)

Para análise dos aspectos matemáticos trabalhados no dia a dia de uma classe montessoriana da Educação Infantil, foram selecionados 4 dentre 11 episódios observados durante o estudo. Esses episódios abordam especificamente os conceitos e conteúdos de números.

Quadro 1: *Episódio 2 - Relação entre número e quantidade*

A professora chama uma menina para realizar uma atividade com ela, mas a menina diz que quer um desafio! Professora: *"Combinado, vai ser um desafio."* A aluna aceita o convite e busca o tapete enquanto a professora pega numerais de madeira de 1 a 10 e os embaralha no tapete. Professora: *"Coloquei no tapete números que você já conhece. Quero que você organize eles do menor para o maior."* A menina organiza na sequência correta e mostra a professora. Professora: *"Olha, você organizou todos os números. Este aqui é o número um (ela aponta para o 1). Quero que você vá no jardim e traga uma folha para mim."* E assim sucessivamente. Ao perceber o envolvimento da criança, a professora se afastou, continuou observando o trabalho e aluna permaneceu envolvida durante muito tempo. Entretanto, ao chegar no número oito, ela começou a demonstrar certa dispersão, pois uma amiga veio pedir ajuda com um desenho. A professora não insistiu que ela terminasse, apenas solicitou ajuda para organizar o material e disse que em outro dia poderiam fazer novamente.

Fonte: dados da pesquisa

O trabalho com os números ajuda a desenvolver nas crianças o pensamento numérico. Ao quantificar as folhas, a aluna estava interpretando os números de acordo com suas quantidades, ou seja, relacionando a quantidade com os numerais.

Essa proposta permite o desenvolvimento do conceito de número pela criança, embora como nos lembram Lopes, Roos e Bathelt (2014, p. 34), "não podemos confundir a capacidade que as crianças têm de reproduzir oralmente os nomes dos números na sequência correta da contagem oral com a compreensão e o domínio do processo da contagem propriamente dito". E que é por meio de brincadeiras e desafios que a criança compreende essas noções.

Assim, conseguir relacionar o numeral a uma quantidade de objetos, nesse caso, de folhas permite ao professor saber que a criança já iniciou o desenvolvimento dessa noção.

A atividade anterior além de trabalhar a matemática, apresenta o movimento do corpo, uma vez que a criança precisa se deslocar da sala até a área externa da escola. O movimento do corpo está presente nas atividades diárias da sala observada. De acordo com Lillard (2017), Montessori defendia o desenvolvimento de conceitos psíquicos da criança em conjunto com a atividade física.

Quadro 2: *Episódio 3 - Números de lixa*

Uma aluna é convidada pela professora a trabalhar com os números de lixa. Professora: *"Este é o número 1!"* Passa o dedo no numeral 1 e, posteriormente, o registra em uma bandeja de areia. Professora: *"Agora é sua vez."* A aluna faz o mesmo que a professora e continua com os números seguintes mesmo sem a professora solicitar.

Figura 1: Números de lixa

Criança 1: *"Eu já fiz todos, tia. O que posso fazer agora?"*
Professora: *"Agora eu vou pegar para você um material que vai nos ajudar."*
A professora pega na estante um quadro mural quadriculado e convida a criança a registrar os números com giz.

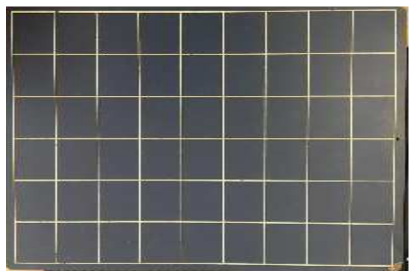


Figura 2: Quadro mural quadriculado

Um aluno que estava observando o trabalho chega até a professora e diz:
Criança 2: *"Tia, quer ver meu número oito?"*
Professora: *"Quero sim!"*
Ele direciona-se até o quadro de giz e faz o número 8 (com o movimento idêntico ao feito nos números de lixa).
Depois, ele faz um número 7 e o transforma em 8, junto a isso, diz que está descobrindo maneiras de transformar um número em outro.

Fonte: dados da pesquisa

A atividade apresenta à criança os símbolos que representam os números e proporciona um trabalho tátil acerca do movimento de cada número. O objetivo direto desse material é "apresentar às crianças os símbolos dos numerais, isto é, os algarismos – a 'chave' do mundo dos números" (Almeida, 2004, p. 19). Além disso, o material utilizado prepara a mão da criança para escrita dos numerais, por meio do movimento específico do toque e ao traçá-los, a criança trabalha sua memória muscular do formato dos numerais que futuramente serão escritos no papel.

Machado (1986) ressalta que a importância dos materiais montessorianos é que possibilita à criança a auto atividade, estimulando sua atenção e concentração por meio da manipulação de materiais manipuláveis que permite que elas intuam e pensem sobre os conceitos.

A forma na qual a professora conduziu a atividade conseguiu cativar a atenção da criança 2 que observava de longe e fez com que ela se envolvesse tanto quanto a criança 1. No momento em que a professora se afastava das crianças, ela continuava observando o trabalho e analisando como cada uma desenvolvia e quais seriam as próximas intervenções. Essa atividade auxilia também no desenvolvimento da coordenação motora da criança para que ela represente os numerais.

Quadro 3: *Episódio 11 - Contar as patas dos animais*

Algumas crianças estavam trabalhando com a caixa de animais que pertencem à classificação dos répteis (material de ciências). Ao observar o trabalho e perceber que elas comentavam sobre as patas dos animais, a professora decidiu apresentar às crianças um conceito matemático.

Ela solicitou que eles escolhessem um animal e contassem quantas patas eles tinham. Depois entregou a eles alguns círculos e pediu para colocarem a quantidade correspondente a cada pata. No momento que as crianças chegaram na cobra, elas perceberam que ela não tinha nenhuma pata e foi quando a professora comentou sobre o zero.

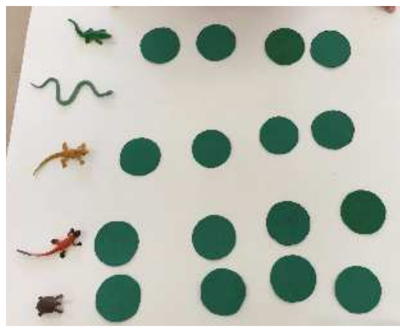


Figura 4: animais e círculos representando a quantidade de patas

Fonte: dados da pesquisa

Novamente, essa atividade envolveu a contagem e a representação com círculos, ou seja, para cada pata dos animais as crianças recortaram um círculo. Dessa forma, a professora abordou o conceito de correspondência um a um, ideia muito importante para compreensão do número.

A correspondência um a um refere-se a comparação entre dois conjuntos em que um deles é constituído pelos elementos que se deseja contar e o outro permite controlar a quantidade do primeiro (Moretti & Souza, 2015).

Além disso, possibilitou também a discussão sobre o zero já que a cobra não tem patas. É preciso ter o cuidado ao trabalhar a ideia do zero com as crianças evitando associá-lo ao nada, pois ele refere-se, na verdade, a ausência de quantidade e esse exemplo da cobra permite compreender esse fato.

O método Montessori busca trabalhar a conceituação de numeração e contagem ao relacionar sistematicamente as quantidades aos símbolos numéricos. Existe um material na sala de aula montessoriana chamado fusos que possibilita à criança "contar quantidades avulsas dentro do limite 10 e introduzir o conceito do zero, de ausência" (Almeida, 2004, p. 39).

Algumas considerações

Ao analisar as atividades observadas e registradas nas notas de campo, foi possível perceber que a matemática e o conceito de número está presente em todas as áreas de desenvolvimento oferecidas pela sala montessoriana, ou seja, o espaço é enriquecido de nomenclaturas e de conceitos matemáticos que contribuem para a ampliação do vocabulário das crianças.

A professora trabalhou a contagem de rotina com o uso do calendário, com a quantidade de crianças que estavam na sala e que tinham faltando, etc. Ela sempre estimula às crianças a pensarem em formas de resolver os problemas, o que fazia com que elas pensem e busquem formas de resolver as situações.

Os trabalhos observados exploraram conceitos como contagem, número, quantidade, o zero etc. Ainda sobre os conceitos matemáticos foi interessante perceber que eles foram trabalhados, mas não da maneira formalizada que deve ocorrer nos anos seguintes de escolarização. Além disso, as atividades desenvolvidas proporcionaram às crianças o protagonismo na construção de seus conhecimentos em conjunto com a manipulação de materiais que contribuem para a abstração dos conceitos de número.

Durante as observações, Bianca trabalhou frequentemente a conquista do 10 com as crianças por meio de trabalhos com os números de 1 a 9 e, posteriormente, com a apresentação de novas ordens. A postura da professora deixou claro que seu principal objetivo era mediar a relação da criança com o ambiente e guiá-las na utilização dos materiais.

As crianças vivenciaram situações que foram oportunidades de conectar os conhecimentos adquiridos à realidade. O aprendizado era ativo, criativo, dinâmico e o interesse era contínuo e contribuiu significativamente para a construção do conhecimento matemático.

Dessa forma, percebemos algumas contribuições que o método Montessori traz para o ensino e aprendizagem de números na Educação Infantil.

Referências

ALMEIDA, Talita. *Desenvolvimento da mente matemática 2: Aritmética Montessoriana l.* 7ª Edição. Rio de Janeiro: Presence Editora, 2004.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Brasil. Ministério da Educação e do Desporto. (1998). *Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil.* Brasília: MEC.

Fazolo, E. (2014). Políticas de atendimento à infância no Brasil: entre proposições e perspectivas. In: M. Carvalho & M. Bairral et al. (Org.). *Matemática e educação infantil*: investigações e possibilidades de práticas pedagógicas. Petrópolis: Editora Vozes.

Laville, C. & Dionne, J. (1999). *A construção do saber*: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Porto Alegre: Artmed.

Lillard, P. P. (2017). *Método Montessori*: uma introdução para pais e professores. Barueri: Editora Manole.

Lopes, A. R. L. V., Roos, L. T. W. & Bathelt, R. E. (2014). O número: compreendendo as primeiras noções. In: Brasil. Secretaria de Educação Básica. *Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa*: construção do sistema de numeração decimal. Brasília: MEC.

Machado, I. L. (1986). *Educação Montessori:* De um homem novo para um mundo novo. São Paulo: Pioneira.

Moretti, V. D. & Souza, N. M. M. (2015). *Educação matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental:* princípios e práticas pedagógicas. São Paulo: Cortez.

Perry, C. (2017). Prefácio. In: M. Montessori. *A descoberta da criança*: pedagogia científica. Campinas: Kírion.

Richardson, R. J. et al. (2008). *Pesquisa Social: métodos e técnicas*. São Paulo: Atlas.

O Lúdico dos Jogos Digitais na Interpretação e Resolução de Problemas Matemáticos no Ensino Fundamental I: Um relato de uso

Márcia Regina **Kaminski**
Escola Municipal Aloys João Mann
Cascavel/PR – Brasil
marciarkjf@gmail.com

Clodis **Boscarioli**
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Cascavel/PR – Brasil
boscarioli@gmail.com

Resumo

Em alguns contextos escolares os Jogos Digitais são amplamente utilizados em especial devido ao caráter lúdico, atrativo e motivador que podem propiciar aos processos de ensino e aprendizagem. Há questionamentos, porém, em torno de como utilizá-los para que atendam às finalidades pedagógicas e não se limitem apenas à uma atividade lúdica. Nesse sentido, o presente trabalho apresenta uma sugestão de sequência de três tipos de jogos para a abordagem do conteúdo Interpretação e Resolução de Problemas Matemáticos em turmas de 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental I. A proposta é resultado da experiência realizada com estudantes dessa faixa etária em aulas de Informática Educacional em uma escola da Rede Municipal de Ensino de Cascavel/PR. Os resultados apontam que é possível abordar o conteúdo de forma atrativa e motivadora sem preterir o conteúdo pedagógico curricular.

Palavras-chave: Informática na Educação, Jogos Digitais, Ensino de Matemática, Resolução de Problemas, Ensino Fundamental.

Introdução

A palavra jogo normalmente remete à ideia de brincadeira, ludicidade e diversão. Por isso, não raro, os jogos são vistos com resistência nos contextos escolares mais tradicionais que, muitas vezes, os consideram como atividades de passatempo sem relevância ou contribuição significativa aos processos de ensino e aprendizagem. Porém, considerando os aspectos históricos e culturais da relação da humanidade com os jogos, de diferentes naturezas, é possível reconhecer o potencial atrativo e motivador que eles proporcionam.

Schwartz (2014) considera o jogo como uma questão histórica e cultural que faz parte do desenvolvimento da humanidade que tem necessidade do lúdico, do imaginário, da diversão. Para esse autor, o jogo é inerente à atividade humana e sempre traz um sentido motivador individual para o homem que sempre buscou formas de representar o imaginário, desafiar-se e ao mesmo tempo, divertir-se através de diferentes formatos de jogos, que no contexto atual inclui os digitais, que são desenvolvidos e jogados por meio de algum tipo de dispositivo eletrônico.

O caráter lúdico, atrativo e motivador dos jogos é inegável, especialmente para os estudantes do século XXI que estão em contato cada vez mais intenso e frequente com diversos tipos de jogos digitais, de modo que a escola pode fazer uso desse interesse dos estudantes pelos jogos como recurso para os processos de ensino e aprendizagem.

Reconhecendo esse fato, os jogos digitais estão sendo explorados em vários contextos escolares e as experiências revelam que sua utilização tem propiciado uma abordagem dos conteúdos que favorece o interesse dos estudantes. A exemplo disso, Silva e Queiroz (2014, p. 2) destacam que por meio dos jogos é possível trabalhar com uma nova abordagem educacional baseada na motivação e na experimentação: "os jogos criam uma necessidade convincente para saber, uma necessidade de perguntar, examinar, assimilar e dominar certas habilidades e conteúdos". Para esses autores, os jogos podem funcionar como sistemas de aprendizagem se bem direcionados e explorados pelos professores. O engajamento dos alunos nessas atividades favorece o querer aprender. Para Corbellini *et al.* (2015), os jogos desafiam os estudantes tornando o aprender mais prazeroso, desenvolvendo a tomada de decisões e atraindo a atenção.

Os jogos, sejam eles digitais ou não, se caracterizam por envolver, de acordo com Prensky (2012), os seguintes elementos: regras que orientam as ações, objetivos ou metas que motivam às ações, resultados que indicam respostas às ações, desafios que estimulam a continuar o jogo, a interação entre os jogadores e o enredo que indica o que o jogo representa (um conflito, uma história). Sousa (2016) separa os jogos utilizados no contexto escolar em duas categorias: os educativos, que fazem parte dos Objetos Virtuais de Aprendizagem (OVA), cuja principal finalidade é instruir e ensinar; e os educacionais que incluem os jogos comerciais, que não têm por objetivo principal ensinar algum conteúdo específico como os educativos, mas podem ser utilizados para esse fim a depender da abordagem utilizada, porém com finalidades diferentes, visando contribuições diferentes. Os jogos educativos estão cada vez mais incorporando elementos dos comerciais, tornando-se mais desafiadores, englobando enredos e aprimorando o caráter atrativo do jogo sem perder a finalidade pedagógica para a qual são desenvolvidos. No entanto, suas contribuições aos processos de ensino e aprendizagem vão muito além da questão motivacional, e o professor pode variar sua utilização dependendo dos objetivos. A título de ilustração, os trabalhos abaixo exemplificam diferentes cenários e contextos de uso.

Costa *et al*. (2009) abordaram conteúdos de geometria com alunos do curso de licenciatura em Matemática, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, por meio de *software* e jogos matemáticos e concluíram que o jogo contribuiu para uma aprendizagem significativa na qual os alunos realmente entenderam os conceitos abordados e não apenas memorizaram ou decoraram. Gonçalves (2011) utilizou quatro jogos digitais educativos para o ensino de Matemática, com 17 alunos do 9º ano da rede estadual de Santa Catarina, destacando o auxílio na compreensão, motivação e aumento da confiança dos estudantes em relação à capacidade de aprender Matemática. Couto *et al.* (2016) relatam uma experiência positiva com alunos do 4º Ano do Ensino Fundamental I, de uma escola pública em Belém do Pará, na qual utilizaram o jogo *TuxMath* para o ensino da operação de adição, relatando que o jogo auxiliou na aprendizagem lúdica e motivou os alunos.

Boscarioli *et al.* (2017), realizaram uma experiência com 20 alunos do 6º ano em um colégio estadual indígena, para abordagem de dois conteúdos da disciplina de Matemática utilizando dois jogos educativos. Para a experiência foram utilizados apenas 3 *notebooks* devido às limitações em termos de infraestrutura da escola e os alunos trabalharam com os jogos em sistema de rodízio coordenado pelos professores, adaptando a metodologia de rotação por estações de aprendizagem definida por Moran e Bacich (2015). Os resultados apontaram o maior interesse dos alunos em resolver problemas matemáticos no desafio do jogo do que em atividades convencionais. Além disso, os resultados também revelaram a importância da inserção das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação em todos os contextos educacionais, seja urbano, rural ou indígena.

Para que os objetivos sejam atingidos e os resultados esperados sejam alcançados, é preciso utilizar os jogos com intencionalidades bem definidas e realizar mediações pedagógicas que propiciem a reflexão por parte do aluno durante o jogo. Assim, feita essa contextualização do uso de jogos em diferentes conteúdos matemáticos e níveis de ensino, este artigo centra-se a partir de agora em apresentar possibilidades de abordagem do conteúdo Interpretação e Resolução de Problemas a partir da experiência de uso de jogos com alunos do 4º e 5º ano em uma escola pública municipal da cidade de Cascavel/Paraná.

Interpretação e Resolução de Problemas com Jogos Digitais

No município analisado, as escolas ofertam em período regular de ensino, o atendimento semanal de 40 minutos a todos os alunos no Laboratório de Informática. Desde 2017, por orientações da Secretaria Municipal de Educação, devem ser priorizados os conteúdos da disciplina de Matemática nas aulas de Informática, que são planejadas e ministradas por Instrutores qualificados para tal. Essa seção objetiva exemplificar a dinâmica do trabalho realizado no Laboratório de Informática de uma dessas escolas, no sentido de abordagem lúdica dos conteúdos matemáticos, a partir de três aulas desenvolvidas nesse espaço, nas quais foram trabalhados, de forma diferenciada, a interpretação e resolução de problemas matemáticos, conteúdos já explorados em sala de aula pelas professoras regentes.

Para essas aulas foram selecionados diferentes jogos educativos (OVA), sendo que alguns apresentam características dos jogos comerciais. Também foram empregadas estratégias de gamificação como o uso do recurso *Quiz* do *software Kahoot*[1]. Essa é uma estratégia para tornar as aulas mais dinâmicas, atrativas e desafiadoras aos alunos, de modo que o professor pode incorporar elementos dos jogos em diversas aulas ou atividades que desenvolve. Plataformas gratuitas como *Kahoot* possibilitam a criação de *Quizzes* sobre vários conteúdos tornando possível uma aprendizagem mais dinâmica.

> No *Kahoot* (em *Quiz*), cada aluno visualiza no seu dispositivo móvel se a resposta está correta ou incorreta. Na sala, é projetada a pergunta, a distribuição das respostas pelas opções sendo destacada a resposta correta. Em seguida, é apresentado o ranking com os nomes dos respondentes com melhor pontuação

[1] *Kahoot* é uma plataforma gratuita de aprendizagem baseada em jogos, usada como tecnologia educacional, disponível em https://kahoot.com

> (sendo consideradas a resposta correta e a rapidez de resposta). Este resultado costuma gerar alguma euforia. A competição impõe-se e, simultaneamente, estimula os alunos a quererem saber para conseguirem responder corretamente, no mais breve espaço de tempo (CARVALHO, 2015, p. 11).

Na sequência, são descritos os recursos e encaminhamentos adotados em cada uma das três aulas em que o conteúdo foi explorado, junto à discussão dos principais resultados.

Aula 1: Nessa aula, o objetivo foi trabalhar interpretação e resolução de problemas paralelamente às relações inversas entre as operações de adição e subtração desenvolvendo o pensamento algébrico, e estimulando o cálculo mental. Para isso preparou-se um *quiz* no *Kahoot* com problemas matemáticos personalizados ao conteúdo e às necessidades dos estudantes. A Instrutora tem uma conta na plataforma, e quinze questões foram elaboradas definindo as alternativas erradas e certas, e o tempo limite para a resposta, definido em 20 segundos.

A instrutora acessou o *game* na sua conta do ambiente e projetou a tela para os alunos que se conectaram a ele em seus equipamentos (neste caso os computadores do Laboratório), solicitando aos estudantes que inserissem o código do *game* gerado automaticamente pelo ambiente e fornecido pela Instrutora e, à medida que foram se conectando os seus nomes foram exibidos da tela de projeção. As perguntas são projetadas, a exemplo da Figura 1, junto com as alternativas vinculadas a uma cor e forma geométrica.

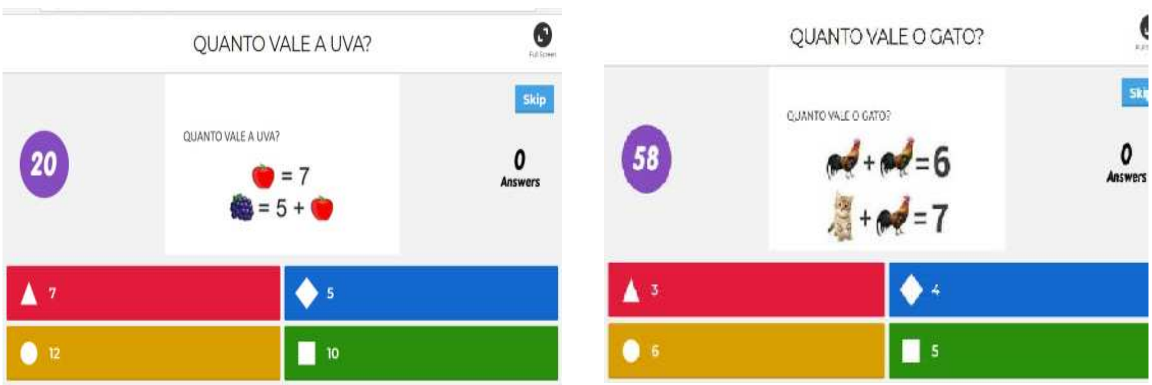


Figura 1. Exemplos dos problemas criados no *Kahoot*
Fonte: Perfil de usuário da escola no *Kahoot*.

Os alunos têm um tempo para responder sendo que nos seus equipamentos aparecem apenas as cores e formas que representam as alternativas. O aluno deve ler a pergunta projetada na tela, definir a resposta correta e clicar no símbolo e cor correspondente dentro do tempo estipulado, de forma que *Kahoot* é também útil no desenvolvimento das funções psicológicas superiores como memória, raciocínio, atenção, concentração. A pontuação é exibida na tela assim que o limite de tempo é atingido e é definida pelo acerto e velocidade em responder.

O jogo gerou bastante euforia. Os alunos mostraram-se envolvidos e preocupados em acertar as respostas. Inicialmente, tentavam responder rápido sem ler atentamente as questões, preocupados com o esgotamento do tempo, mas perceberam que assim os erros eram constantes e nas perguntas seguintes mantiveram-se focados na leitura e interpretação das questões.

A quantidade de questões foi adequada, considerando que inicialmente a Instrutora teve que explicar a dinâmica do jogo aos estudantes e entre a apresentação de uma questão e outra fazia-se a discussão oral e coletiva das soluções, a fim de que os estudantes pudessem verificar as razões dos erros ou acertos. Em todas as questões a Instrutora realizou a discussão dos resultados por meio de questionamentos como: Por que essa alternativa não é a correta? Como podemos ter certeza disso? Como vocês pensaram para chegar a essa resposta?

Assim, a Instrutora fez mediação pedagógica do processo por meio de perguntas que ajudassem os alunos a analisar os erros e acertos. Por essa mediação os estudantes puderam perceber os conceitos matemáticos envolvidos na atividade e utilizá-los para responder as próximas questões. Interessante notar que mesmo os alunos que não ficaram entre os primeiros colocados não desistiram do jogo, nem se demonstraram desanimados, ao contrário, participaram de forma ativa e envolvida empenhados em acertar as questões e ao final, questionaram a Instrutora sobre quando teriam outra aula com o *game*. Algumas vezes houve lentidão para as questões serem carregadas em função de todos os alunos estarem conectados. Porém, isso não foi um impedimento à realização das atividades que foram concluídas como planejadas.

Aula 2: Foi selecionado o OVA "Operações com Números em Situações Problemas" (ALVES, 2015) para a prática da interpretação e resolução de problemas. Nesse jogo o aluno tem o desafio de conduzir o personagem pelo ambiente do jogo, fugindo dos obstáculos e capturando as bandeiras que estão distribuídas pelo cenário. Ao tocar em uma bandeira, um problema é apresentado e o aluno só ganha a bandeira em questão ao responder o problema corretamente. O jogo termina quando as 20 bandeiras tiverem sido capturadas. A Figura 2 mostra o cenário após a captura da bandeira e a pontuação obtida.

Os alunos mostraram-se entusiasmados com o ambiente e proposta do jogo. Porém, inicialmente valeram-se de estratégias para conseguir as bandeiras de forma por eles considerada mais fácil, sem ter que resolver todos problemas. Eles perceberam que ao tocar em uma bandeira e depois afastar-se dela, quando tocavam na mesma bandeira pela segunda vez, um problema diferente era apresentado. Assim, começaram a fazer isso diversas vezes para evitar os problemas mais complexos. Essa estratégia, no entanto, não funcionou, pois, os problemas não resolvidos acabam sendo exibidos novamente em outro momento. O OVA mostra-se adequado nesse sentido, pois apresenta os problemas aleatoriamente sem descartar nenhum deles, tal que todos devem ser resolvidos.

Figura 2. Exemplos de telas do OVA "Operações com Números em Situações Problemas"
Fonte: http://atividades.fundetec.org.br/.

Outra estratégia dos estudantes foi observar somente os números que apareciam no problema e realizar diversas operações combinando-os de formas diferenciadas, fazendo tentativas aleatórias de cálculos envolvendo subtração, adição, multiplicação e divisão, o que não fornecia o resultado correto e os alunos não avançavam no jogo. Nesse momento reclamavam: "*O jogo está errado porque já fiz todas as contas de todos os jeitos e não passa". "O jogo está "bugado" professora! Já fiz mais, menos, vezes e dividir e não dá.".* A Instrutora então procedeu com as mediações pedagógicas por meio dos questionamentos: Por que você fez assim? Por que você escolheu essa operação? As respostas das crianças giravam em torno de: *"Não tem que fazer uma dessas contas"?* A Instrutora questionava: Pode me dizer do que se trata esse problema? As crianças apenas liam o problema para a Instrutora, mas não conseguiam explicá-lo. A Instrutora conduziu novos questionamentos como: Sobre o que ou quem o texto fala? O que aconteceu? O que nós sabemos? O que precisamos saber? Podemos utilizar as informações dadas para identificar o que precisamos? De que forma? A partir daí as crianças compreenderam a importância de ler para então decidir como resolver o problema e começaram a avançar no jogo. Em média, conseguiram capturar 12 bandeiras durante a aula.

As dificuldades com leitura e interpretação foram mais significativas do que as com os cálculos envolvidos. A mediação da Instrutora foi importante e o jogo mostrou-se adequado, pois impossibilitou aos alunos avançarem por outros métodos que não fosse a resolução dos problemas, o que é fundamental, pois do contrário, os alunos apenas passariam as fases usufruindo o lúdico do jogo, mas sem haver apropriação do conteúdo.

Aula 3: Com o objetivo de aprofundar o conteúdo, a Instrutora propôs uma atividade onde os estudantes elaboraram seus próprios problemas matemáticos. Para isso, foi selecionado o OVA Histórias Fantásticas© (CASTRO FILHO; PEQUENO, 2018) utilizado para a produção de textos pelos alunos, a partir do qual o aluno pode escolher uma atividade com objetos prontos para montar o cenário da história, ou pode ilustrar sua história. Os alunos escolheram um dos temas e montaram o cenário inserindo os objetos selecionados. A Instrutora auxiliou as duplas esclarecendo suas dúvidas. Os alunos foram lembrados das características de um problema por meio de questionamentos como: O que precisamos ter em um problema? Qual será a situação? Quais serão os personagens ou objetos envolvidos? O que acontecerá com eles? Qual será a pergunta final? Que informações serão dadas e quais precisarão ser identificadas?

A Instrutora lembrou os alunos do cuidado com a escrita tanto em questões ortográficas e gramaticais, além importância de o texto do problema ser escrito de forma compreensível, uma vez que outras pessoas iriam resolvê-lo. Alguns alunos elaboraram problemas simples, outros, problemas mais complexos. Passado o tempo, as duplas trocaram de computadores para resolver os problemas uns dos outros. Alguns problemas puderam ser resolvidos facilmente, pois estavam bem escritos. Alguns tiveram escrita não muito clara e outros esqueceram de colocar a pergunta. Nesses casos, as duplas chamavam a Instrutora e argumentavam: *"Não dá pra resolver porque falta a pergunta."; "Não dá pra entender nada."; "Não dá pra saber o que é pra fazer."*. Nesses casos a Instrutora orientava o diálogo entre as duplas autoras e as duplas que estavam solucionando para que explicassem e reformulassem o necessário. Esse exercício de refletir e dialogar sobre os problemas, de compartilhar estratégias e dúvidas e expressar suas opiniões justificando suas escolhas no momento da elaboração e da solução foi bastante produtivo. Alguns alunos se deram conta dos erros, tanto de autoria quanto de solução, apenas nesse momento.

As duplas foram incentivadas, no momento da solução, à além do cálculo, escrever um pequeno texto explicando a razão pela qual optaram por determinada forma de solução. Esse escrever sobre uma solução matemática também é um exercício importante, segundo Boaler (2018), para estruturar o raciocínio e o pensar matemático, ajudando a construir significados.

Ao final da aula os problemas com as respectivas soluções foram impressos. A Instrutora fez a correção ortográfica final e algumas observações para ajudar as duplas a melhorar tanto o problema quanto a solução. A Figura 3 ilustra o trabalho final realizado por uma das duplas.

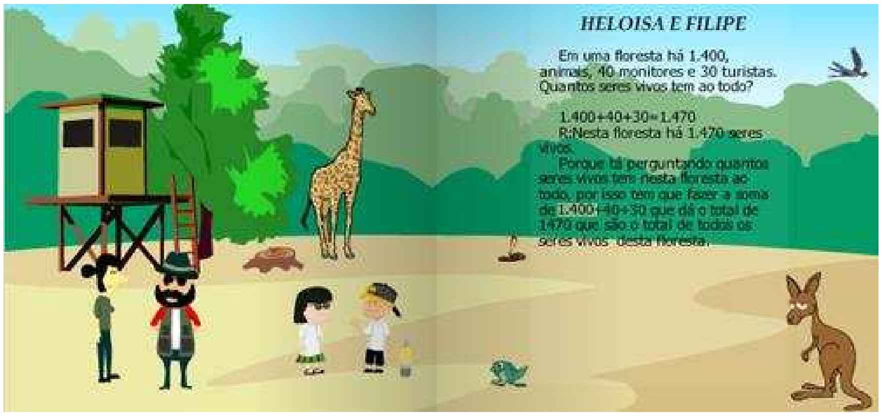


Figura 3. Exemplo de problema elaborado pelos alunos
Fonte: Dados da pesquisa.

Na aula seguinte, o material impresso foi distribuído às duplas que fizeram as devidas correções nos problemas, tanto no texto quanto da solução para impressão da versão final e montagem do mural com os trabalhos. A atividade foi bastante produtiva no sentido de que os alunos compreenderam as características de um problema, seus elementos e como utilizá-los como estratégia de solução. Também perceberam a importância de escrever corretamente e de forma clara. De forma interdisciplinar a atividade explorou conceitos matemáticos e linguísticos além de trabalhar a aspectos sociais e emocionais. Elaborar seus próprios problemas para outra dupla resolver chamou a atenção dos estudantes que se engajaram na atividade.

Considerações Finais

A sequência de jogos apresentada foi testada com alunos de 4º e 5º ano do Ensino Fundamental I, sendo que no 4º ano o enfoque foi a introdução e no 5º ano a revisão e a prática do conteúdo. As atividades trouxeram contribuições importantes à medida que tornaram o conteúdo mais dinâmico, atrativo, motivador, sem deixar de lado a mediação pedagógica. Os alunos foram envolvidos pelas atividades, e na última foram protagonistas na criação de seus próprios problemas e puderam mostrar o que aprenderam exercitando a escrita e trabalhando colaborativamente com os colegas.

Kahoot oferece a possibilidade de criar *games* sobre diversos conteúdos adaptados às necessidades da turma. Portanto, é uma estratégia interessante para conteúdos com poucos materiais disponíveis em repositórios. Contudo, uma das dificuldades para utilização desse recurso pode ser o acesso à internet. O fato de ser um recurso que funciona apenas *online* é uma limitação nas realidades que não dispõe de acesso à internet. Os jogos que incorporam características dos jogos comerciais como o utilizado na segunda aula, que envolvem um personagem com desafios e metas a cumprir em um ambiente desafiador, prendem a atenção dos estudantes que ficam desejosos de resolver os problemas, o que muitas vezes não ocorre quando os mesmos problemas são propostos em formato tradicional. A última atividade, embora não se trate de um jogo em si, foi desenvolvida em uma perspectiva de protagonismo e colaboração entre os estudantes, o que a tornou desafiadora e instigante.

A importância da mediação pedagógica durante todo o trabalho ficou evidente de modo que o potencial de contribuições dos Jogos para o Ensino embora seja grande, só será plenamente alcançado quando os objetivos forem definidos e as mediações por parte do professor forem constantes. Como trabalhos futuros, pretende-se elaborar sequências de jogos para abordagens de outros conteúdos incluindo os anos da alfabetização.

Bibliografia e Referências

Alves, J. C. V. (2015). *Operações com números em situações problemas*. Disponível em: <https://bit.ly/2xce4gG > Acesso em 13/09/2018.

Boaler, J. (2018). *Mentalidades Matemáticas*. Porto Alegre: Penso, 256p.

Boscarioli, C., Kaminski, M. R., Jumkerfeurbom, M. A. & Ribeiro, R. G. T. (2017). A Experiência de Alunos de uma Escola Indígena nos Primeiros Contatos com Jogos Digitais de Matemática. In: *Anais do XXIII Workshop de Informática na Escola*. p. 185-194. Disponível em: <http://goo.gl/yZu4VU>. Acesso em: 12/09/2018.

Carvalho, A. A. A. (2015). Apps para ensinar e para aprender na era mobile-learning. In: Carvalho, A. A. A. (Org.). *Apps para dispositivos móveis: manual para professores, formadores e bibliotecários*. Lisboa: Ministério da Educação de Portugal. Cap. 1. p. 9-18. Disponível em: <https://bit.ly/2lFBiXd> Acesso em: 11/09/2018.

Castro Filho, J. A. & Pequeno, M. C. (2018). *Histórias Fantásticas*. Universidade Federal do Ceará. Disponível em: <https://bit.ly/2Oi4KiE>. Acesso em: 17/08/2018.

Corbellini, S., Real, L. M. C. & Michailoff, F. (2015) Jogos online: ferramentas nas Intervenções Psicopedagógicas. In: *Anais do XXI Workshop de Informática na Escola*. p. 147-156. Disponível em: <https://bit.ly/2MnhHWp>. Acesso em: 11/09/2018.

Costa, B. F., Jorge, M. O., Basso, M. & Tonet, V. (2009) Interação Virtual para a Aprendizagem de Matemática. In: *Anais do XV Workshop de Informática na Escola*. p. 1897-1900. Disponível em: <goo.gl/eYX27L>. Acesso em: 09/08/2018.

Couto, F. V., Sousa, D. F., Barreto, W. D. L. & Sousa, A. M. C. (2016) Contribuições da Informática Educativa para a Operação de Adição: Uma Experiência com Alunos nos Anos Iniciais. In: *Anais do XXII Workshop de Informática na Escola*. Disponível em: <https://bit.ly/2t8355B>. Acesso em: 12/09/2018.

Gonçalves, P. A. S. (2011) *Jogos Digitais no Ensino e Aprendizagem da Matemática: efeitos sobre a motivação e o desempenho dos alunos*. 235 f. Dissertação - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade do Algarve. Disponível em: <http://sapientia.ualg.pt/handle/10400.1/5003> Acesso em: 08/08/2018.

Moran. J. & Bacich, L. (2015) Aprender e ensinar com foco na educação híbrida. *Revista Pátio*, n. 25, p. 45-47, jun. Disponível em: <http://goo.gl/1oBHmQ>. Acesso em 23/05/2018.

Prensky, M. (2012) A aprendizagem baseada em jogos digitais. São Paulo: SENAC, 546p.

Schwartz, G. (2014) *Brinco, logo aprendo: educação, videogames e moralidades pós-modernas*. São Paulo: Paulus, 343p.

Silva, L. R. A. & Queiroz, R. J. G. B. (2014) Aprendizagem baseada em jogos: Uma reflexão sobre o modelo de currículo da Quest to Learn. In: *Anais do XX Workshop de Informática na Escola*. p. 86-90. Disponível em: <https://bit.ly/2oZZapW>. Acesso em: 12/09/2018.

Sousa, C. A. B. (2016) O jogo em foco: uma discussão sobre os games e a aprendizagem. In: Raabe, A. L. A., Gomes, A. S., Bittencourt, I. I. & Pontual, T. *Educação criativa: multiplicando experiências para a aprendizagem Pipa Comunicação*. 472p. Série professor criativo: construindo cenários de aprendizagem - vol. 4 (e-book). p. 301-347.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ábaco, regletas, bloques multibase y billetes decimales: reflexiones acerca de su uso en la enseñanza del sistema de numeración decimal.

Olga Emilia **Botero** Hernández
Universidad de Antioquia.
Colombia
oebotero@gmail.com

Ana María **Jiménez** Echavarría
Colegio Gimnasio Los Pinares
Colombia
ana.jimeneze13@gmail.com

Resumen

El presente taller pretende contribuir a la formación de maestros de matemáticas, al ofrecer elementos teóricos y metodológicos que les permitan establecer una comparación práctica entre los diversos materiales manipulativos que se proponen en el ámbito académico para la enseñanza y aprendizaje del sistema de numeración decimal. Se proponen varias tareas a los maestros para que las resuelvan usando el ábaco, las regletas de Cuisenaire, los bloques multibase y los billetes decimales con la finalidad de que analicen las posibilidades o limitaciones de cada uno de estos materiales por medio de una guía de trabajo y la retroalimentación grupal. En el análisis sobre los alcances y limitaciones de cada material se hará énfasis en la comprensión sobre el sistema de numeración decimal que se favorece en los niños.

Palabras clave: sistema de numeración decimal, ábaco, regletas de Cuisenaire, bloques multibase, billetes decimales.

Introducción

El eje central de este taller es el desarrollo y análisis de tareas que permitan a los maestros reflexionar acerca de los diferentes materiales manipulativos que se usan de manera frecuente en la escuela para la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal (SND) como son el ábaco, los bloques multibase, las regletas de Cuisenaire y los billetes decimales[1]. Como señalan Wolman y

[1]Es un material compuesto por fichas en forma de billetes con denominaciones 1,10 y 100 etc. que permite la manipulación de las unidades del SND y cuyas características se describirán más adelante.

Terigi (2007), la comprensión y utilización del SND es un propósito fundamental durante los primeros años de escolaridad.

En este taller se ofrecen a los participantes diversas oportunidades de favorecer la comprensión del SND, a partir de su participación en el desarrollo de tareas que se han llevado a cabo con niños y niñas de los grados preescolar y los primeros grados de educación básica en Colombia[2] en contextos de aula regular y en el desarrollo de diversas investigaciones. Las tareas propuestas han representado para los niños la oportunidad de comprender las relaciones al interior del SND a partir de las diferentes posibilidades de conteo o cálculo, en términos de Brissiaud (1993), quien señala la importancia de trascender en los niños de los procesos de conteo que se llevan a cabo cuando se observa la colección completa, a los procesos de cálculo que implican establecer una relación numérica entre dos cantidades, sin que medie la representación analógica de cada una de ellas. Los materiales utilizados en el taller permiten llevar a cabo agrupamientos, emplear el principio de la base y el valor posicional de las cifras, los cuales según Guitel, Ifrah (citados en Wolman y Terigi, 2007) ofrecen, además, la posibilidad de llevar a cabo diferentes cálculos, en particular, los relacionados con el pensamiento aditivo, sin recurrir a la enseñanza exclusiva de los algoritmos convencionales como único recurso de cálculo. Al finalizar el taller se invitará a los participantes a reflexionar alrededor de las prácticas de enseñanza y el diseño de las tareas que se dinamizan a partir del uso de estos materiales, así como las dificultades o restricciones que supone su utilización en el aula para la constitución de este saber matemático (SND) y el desarrollo de otras habilidades de pensamiento numérico.

Justificación

Cuando se piensa en los materiales pertinentes para potenciar los primeros aprendizajes numéricos y de manera particular la comprensión del SND, es común hacer referencia a los materiales manipulativos, los cuales han sido utilizados de manera amplia en la educación matemática, especialmente en los primeros grados, ya que estos materiales permiten que los estudiantes interactúen de forma directa con representaciones físicas de una idea matemática que se considera, puede ser abstracta para ellos.

El SND se considera una idea abstracta en tanto que es un saber que se constituyó de manera histórico-social con unas reglas y características específicas en relación con situaciones propias de la actividad matemática de determinadas culturas. Este saber se complejiza en tanto requiere la comprensión de asuntos como la representación que se hace de los numerales en dicho sistema y la comprensión de sus características decimales y posicionales tales como: el uso de una base, la equivalencia entre unidades de diferente orden, las agrupaciones, reagrupaciones y el valor relativo de cada cifra dependiendo de la posición.

En este sentido, es muy común encontrar en nuestro medio el uso de materiales manipulativos con criterios que atienden a diversas demandas o situaciones propias de la cotidianidad escolar, por ejemplo, las propuestas que se realizan a partir de los textos escolares,

[2] El sistema educativo colombiano lo conforman: la educación inicial, la educación preescolar, la educación básica (primaria cinco grados y secundaria cuatro grados), la educación media (dos grados y culmina con el título de bachiller.), y la educación superior.

el material disponible en los diferentes establecimientos educativos y el acercamiento que el maestro tuvo a determinado material en sus años de formación en didáctica, entre otros. Sin embargo, es necesario que el maestro constituya un criterio claro frente al uso de estos materiales, sus potencialidades y alternativas para su incorporación en el aula.

Algunos de los materiales que se pueden observar comúnmente en la escuela son[3]: el ábaco, bloques multibase, regletas de Cuisenaire y billetes decimales. En términos generales estos materiales favorecen la comprensión de aspectos fundamentales del SND.

Ábaco

Es un instrumento que fue utilizado por diversas culturas para llevar a cabo cálculos y operaciones entre cantidades, un ejemplo de este es el ábaco chino cuyo propósito no era de carácter didáctico sino que apoyaba tareas concernientes al comercio. Sólo a partir de comienzos del siglo XIX con el movimiento de la reforma de la enseñanza primaria se incorporó a las aulas con el propósito de apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la aritmética básica en el aula (Gallego, 2018).

El ábaco se conforma por una base rectangular a la cual se encuentran sujetos barras o vástagos paralelas entre ellas, las cuales representan las unidades, decenas, centenas y/o unidades de mil, a estos vástagos se añaden arandelas que representan un numeral según la posición del vástago.

Bloques multibase

Se emplean en la escuela con el propósito de permitir a los niños la visualización de la relación entre los diez cubos de $1cm^3$ y la barra equivalente a ellos, entre las diez barras y la placa que las representa y entre las diez placas y el cubo, relaciones en las cuales cada bloque representa una unidad, una decena, una centena y una unidad de mil, respectivamente.

> El material se presenta en cajas de madera. Una para cada base de numeración y está compuesto de cubos, placas y barras de madera pulida, sin color a fin de conseguir una mayor abstracción. En cada caja se encuentran: unidades, barras, placas y bloques. Llevan unas ranuras, fácilmente apreciables a un cm de distancia. Dienes (citado en Silva y Varela, 2010, p. 31)

Regletas de Cuisenaire

Su uso en el aula corresponde a la enseñanza de la serie numérica y de relaciones de carácter aditivo entre diversas cantidades que pueden representarse mediante la yuxtaposición de dos más regletas para formar otra equivalente, pretende hacer visibles estas equivalencias entre cantidades que se componen para formar otra.

> También se denominan ‘números en color’, son una colección de barras en forma de prismas rectangulares de diverso color según las longitudes, estas van desde 1 cm hasta 10 cm. Las regletas que tienen el mismo color poseen la misma longitud, este tipo de

[3] Esta lista no pretende ser exhaustiva, solo se describen algunos materiales que se usan en la escuela para la enseñanza del sistema de numeración decimal.

> material permite la yuxtaposición de las regletas para evidenciar la equivalencia que puede haber entre una y otra (Jiménez, Zapata y Cautiva, 2017, p. 23)

Billetes decimales

Este material, aunque no se presenta de forma generalizada en la escuela, es una propuesta reciente para la enseñanza de las características de sistema de numeración decimal que pretende ampliar las posibilidades y alternativas para prácticas educativas en la educación primaria. Una primera experiencia en la cual se describen algunas particularidades del uso de este material se encuentra documentada en el trabajo de investigación titulado "Prácticas matemáticas que movilizan estudiantes de primer grado, al utilizar los billetes decimales" (Jiménez, Zapata y Cautiva, 2017). "este material diseñado con las mismas características de nuestro sistema, pues consta de unos, dieces, cienes, etc., favorece la manipulación concreta de las unidades del sistema de numeración que usualmente es presentado de forma abstracta" (Botero, 2011, p. 7).

Existe una amplia gama de alternativas para la incorporación de materiales en la escuela y una multiplicidad de factores y de visiones que influyen en su elección y utilización en el aula. De manera particular, la naturaleza y las características de cada uno de estos materiales determinan los alcances y restricciones en términos de las relaciones que permiten reflejar en relación con el SND. Por tanto, se hace necesario desarrollar espacios y alternativas para favorecer la reflexión sobre a las posibilidades o limitaciones que, para la enseñanza de las matemáticas, ofrecen estos materiales. Es así como el presente taller permite a los maestros llevar a cabo tareas con cada uno de los materiales manipulativos y a partir del análisis que se realice, determinar las características de cada uno y plantear tareas que atiendan a la pertinencia o no de su uso, teniendo en cuenta las propiedades del SND que pueden estudiar con sus alumnos mediante el uso de dichos materiales.

Los objetivos que guían el desarrollo de este taller son:

- Reflexionar acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje del sistema de numeración decimal que se llevan a cabo en la escuela.
- Interactuar con diversos materiales manipulativos que se emplean en la escuela para la enseñanza del SND.
- Reconocer las fortalezas y debilidades que ofrece cada material manipulativo y las características particulares de las tareas que pueden llevarse a cabo con ellos.
- Plantear situaciones que pueden desarrollarse en el aula con cada uno de los materiales y comparar los alcances en cuanto a la comprensión que éstos posibilitan del SND en los niños.

Marco teórico

El uso de material manipulativo en la escuela primaria tiene un papel importante a la hora de medir los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, de esta manera los materiales manipulativos deben ser entendidos como instrumentos que median su acción en el aula de clase. Vygotsky (1995) es uno de los primeros autores en indicar la importancia de la acción mediada instrumentalmente en el desarrollo de los procesos psicológicos superiores, es decir, el sujeto actúa sobre la realidad a partir del uso de diferentes instrumentos simbólicos o físicos, los cuales le permiten transformarla y transformarse. Entonces, de manera particular comprenderemos los instrumentos como "ese conjunto de recursos simbólicos —signos, símbolos, textos, fórmulas, medios gráfico -simbólicos, artefactos, software, gestos— que constituyen los medios para la acción matemática" (Obando, Arboleda & Vasco, 2014, p. 85)

Otro autor que se refiere a la idea de los instrumentos y su relevancia en la actividad de los sujetos es Leontiev citado en Obando et al., (2014) quien al referirse a los instrumentos menciona que:

> (...) es a la vez objeto con el cual se realiza la acción laboral, pero también, el objeto social que sintetiza unos modos de acción socialmente elaborados. El instrumento es el conjunto complejo de métodos y operaciones socialmente elaboradas y cristalizadas en él. (p. 81)

En este sentido, los instrumentos no deben comprenderse solamente como objetos para la acción, sino como elementos que se dotan a través de la historia, de diversas ideas y significados a partir de las acciones de los sujetos que participan en la actividad. Un ejemplo de esto es el ábaco, el cual fue un instrumento creado para la realización de cálculos matemáticos en diversas prácticas que se relacionaban con la economía de la antigüedad, esta actividad matemática propia de los sujetos en una época y lugar determinado hace que la estructura física del ábaco- sistema de vástagos para representar las unidades decenas y centenas- , así como su funcionamiento y diseño se relacionen con las características del sistema de numeración decimal que usamos en la actualidad. De esta manera el material se constituyó a partir de la actividad humana de la época y en él se encuentra consignada la naturaleza de un saber matemático que determina su aspecto y funcionamiento. Además, es común encontrar en la actualidad el ábaco en el aula para mediar procesos relacionados con la enseñanza de las operaciones básicas o de algunas características del sistema de numeración decimal.

De acuerdo con lo anterior, los instrumentos toman especial relevancia durante la actividad matemática del sujeto que participa en el proceso de constitución del saber matemático, ya que estos "median las prácticas matemáticas en el aula de clase, dado que cristalizan en su estructura ciertas formas de relación que pueden ser puestas en analogía con formas de relación entre conceptos y objetos matemáticos" (Obando et al. 2014, p. 85).

Los materiales manipulativos, por tanto, se convierten en una alternativa para el trabajo en la escuela y, de manera especial, en los primeros grados de escolaridad, en los cuales se prioriza el trabajo con diferentes materiales para mediar los procesos de enseñanza de los numerales y del sistema de numeración decimal, materiales tales como el ábaco, las regletas de Cuisenaire, bloques multibase, billetes decimales, etc. Estos materiales se convierten en una herramienta indispensable para favorecer procesos de visualización y manipulación de estas ideas matemáticas que poseen una naturaleza abstracta, al considerar particularmente que nuestro sistema de numeración es un producto de la actividad humana, y dicho sistema cuenta con un desarrollo histórico-social. En este sentido es una convención cultural que se dota de una simbología y reglas particulares para su constitución y utilización.

En el caso específico de Colombia, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) sugiere en sus documentos rectores para la educación matemática en primaria la utilización de este tipo de material, de manera precisa en estos documentos se hace alusión al uso de materiales de la siguiente manera:

> Para que los niños logren entender el significado de los números, además del uso cotidiano, hay que darles la oportunidad de realizar experiencias en las que utilicen materiales físicos y permitirles que expresen sus reflexiones sobre sus acciones y vayan construyendo sus propios significados (MEN, 1998, p. 46).
>
> Los modelos y materiales físicos y manipulativos ayudan a comprender que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tienen sentido, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas. (MEN, 2006, p. 54)

Aunque muchos autores resaltan la importancia de estos materiales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas e incluso se pueden encontrar diversas experiencias con estos materiales, otros autores también han reflexionado alrededor de las limitaciones de estos materiales para el aprendizaje del sistema de numeración decimal como lo son Silva y Varela (2010) y Lerner (1999). Se propone este espacio como un encuentro de formación, análisis y reflexión a partir de la experiencia misma con dichos materiales para constituir posturas críticas para su uso en el aula de clase.

Metodología

Los momentos que se presentan a continuación tienen como propósito brindar a los maestros asistentes al taller, los elementos teóricos y prácticos para tomar decisiones frente a la pertinencia y los usos más adecuados de los materiales manipulativos utilizados en la escuela para la enseñanza del SND. Es así como al finalizar el taller los maestros serán capaces de diseñar y llevar a cabo actividades de clase en las que incorporen de manera efectiva los diferentes materiales reconociendo y teniendo claridad frente a los criterios y los momentos en los que puede utilizarse cada uno de acuerdo con el nivel de desarrollo de los alumnos y con las intenciones didácticas del maestro con relación a dicho saber.

Primer momento: 5 minutos

Contextualizar a los participantes acerca de los antecedentes del taller, entre los cuales se encuentra la práctica en el aula regular en los grados primero y segundo de educación primaria y los referentes aportados por la investigación.

Segundo momento: 5 minutos

Realizar una primera indagación entre los maestros participantes acerca de las referencias que tienen de los materiales didácticos que se utilizarán en el taller: el ábaco, las regletas de Cuisenaire, los bloques multibase y los billetes decimales y en qué tipo de tareas los han empleado.

Tercer momento: 75 minutos

Se presenta a los maestros una tarea relacionada con los aprendizajes que los estudiantes constituyen en los primeros grados de escolaridad con respecto al SND, que deberán resolver, en grupos, cada uno con un material didáctico diferente registrando en un cuadro comparativo las posibilidades y limitaciones de dicho material. Los grupos de trabajo irán rotando, de manera organizada, por las bases en las que se encuentran los materiales restantes para llevar a cabo la tarea que se propone en cada una de ellas y llenar el registro.

Cuarto momento: 25 minutos

Se pondrán en discusión los registros que los maestros llevaron a cabo en las diferentes bases del momento anterior y se hará una caracterización del tipo de tareas que pueden ser abordadas en las aulas con cada uno de los materiales manipulativos utilizados durante el taller.

Referencias y bibliografía

.

Brissiaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos.* Madrid: Aprendizaje Visor.

Gallego, D. C. (2018). Los catálogos de material escolar como fuente de la historia de la educación matemática: el caso de los ábacos. *Historia y Memoria de la Educación*, (7), 573-613.

Jiménez, A., Zapata, C y Cautiva, F. (2017). *Prácticas matemáticas que movilizan estudiantes de primer grado, al utilizar los billetes decimales (Tesis de grado)*. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Lerner, D. (1999). Reflexiones sobre: Uso del Material concreto en Matemáticas. Problemas de la Vida cotidiana. QUEHACER EDUCATIVO Nº 34 (Marzo), 56-60

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2010). *https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-231235.html.* Bogotá, Colombia: Magisterio

Obando, G., Arboleda, L. y Vasco, C. (2014). Filosofía, Matemáticas y Educación: una perspectiva histórico-cultural en Educación Matemática. *Revista Científica*, 3*(20),* 72-90.

Silva, A. y Varela, C. (2010). Los materiales ―concretos‖ en la enseñanza de la numeración. Didáctica y prácticas docentes. *Que hacer Educativo*, 26-36.

Villa-Ochoa, J. y Botero, O. (2011). Estrategias y reflexiones matemáticas de maestr@s para maestr@s. Propuestas para la Educación Básica Primaria. Medellín, Colombia: Escuela del Maestro.

Vygotski, L. S., Kozulin, A., & Abadía, P. T. (1995). Pensamiento y lenguaje (pp. 97-115). Barcelona: Paidós.

El número natural como obstáculo en la comprensión del racional

Juan Manuel **González-Forte**
Universidad de Alicante
España
juanma.gonzalez@ua.es
Ceneida **Fernández**
Universidad de Alicante
España
ceneida.fernandez@ua.es
Salvador **Llinares**
Universidad de Alicante
España
sllinares@ua.es

Resumen

Algunas dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión del número racional están vinculadas a la aplicación inapropiada de las propiedades de los números naturales (fenómeno *natural number bias*). El objetivo de esta investigación es identificar perfiles de estudiantes de educación primaria y secundaria cuando resuelven tareas sobre la magnitud, la densidad y las operaciones con números racionales y su evolución a lo largo de los cursos. Participaron 438 estudiantes desde 5º de educación primaria (10 años) hasta 4º de Educación Secundaria Obligatoria (16 años). En los resultados se muestran las características de siete perfiles identificados y sus relaciones en cuanto a la evolución a lo largo de los cursos.

Palabras clave: *natural number bias*, *gap thinking*, perfiles, educación primaria y secundaria.

Introducción y marco teórico

Comprender el número racional es una parte esencial de la competencia matemática, ya que facilita la adquisición de contenidos matemáticos más avanzados como el álgebra y el cálculo (Behr, Lesh, Post y Silver, 1983). Sin embargo, desde la década de los 80 las investigaciones están mostrando que los estudiantes de educación primaria y secundaria, e incluso los adultos, tienen dificultades en la comprensión de diferentes aspectos de los números racionales (Fischbein, Deri, Nello y Marino, 1985; Moss y Case, 1999; Resnick et al., 1989; Stafylidou y Vosniadou, 2004), mostrando que es un contenido complejo. Una de las posibles causas de estas dificultades es la tendencia a aplicar (inapropiadamente) propiedades de los números naturales. La aplicación inapropiada de propiedades de los números naturales para resolver tareas de números racionales se está denominando fenómeno *natural number bias* (Ni y Zhou, 2005; Van Dooren, Lehtinen y Verschaffel, 2015).

La investigación sobre este fenómeno está siendo replanteada a nivel internacional en los últimos años desde nuevas perspectivas, que subrayan que el conocimiento sobre los números naturales facilita la resolución de tareas de números racionales que son compatibles con este conocimiento, pero provoca el efecto contrario cuando las tareas no son compatibles con dicho conocimiento (Vamvakoussi, Van Dooren y Verschaffel, 2012; Van Dooren et al., 2015). Los resultados obtenidos indican que los estudiantes resuelven de forma más eficaz las tareas con los números racionales que son compatibles con el conocimiento de los números naturales que aquellas en el que el conocimiento de los números naturales no es compatible con la tarea propuesta (Stafylidou y Vosniadou, 2004).

Con el fin de conocer en qué medida el conocimiento sobre el número natural interfiere en la comprensión de número racional, las investigaciones previas han considerado tres dominios: la magnitud de los números (su tamaño relativo), las operaciones aritméticas y la densidad (Obersteiner, Van Hoof, Verschaffel y Van Dooren, 2016; Van Hoof, Vandewalle, Verschaffel y Van Dooren, 2015), teniendo en cuenta el papel desempeñado por las distintas representaciones de los números racionales (fracciones y números decimales).

Magnitud

A menudo los estudiantes de educación primaria y secundaria se basan en la ordenación de los números naturales cuando comparan fracciones, considerando que "a mayor numerador y denominador, mayor es la fracción" (Gelman, Cohen y Hartnett, 1989; Resnick, et al., 1989). Este conocimiento es compatible para resolver tareas de comparación de fracciones congruentes con la ordenación de los números naturales (aquellas en las que la fracción mayor tiene el numerador y el denominador mayor: 2/3 vs. 7/9) y no compatible para resolver tareas incongruentes con la ordenación de los números naturales (la fracción mayor tiene un numerador y un denominador menor: 3/4 vs. 5/9) (González-Forte, Fernández y Van Dooren, 2018; Van Hoof, Lijnen, Verschaffel y Van Dooren, 2013). Sin embargo, estudios recientes han obtenido resultados contrarios en los que los estudiantes tienen mayor nivel de éxito en las tareas incongruentes que en las congruentes. Estos resultados han sido obtenidos en estudiantes universitarios (DeWolf y Vosniadou, 2015) y en expertos matemáticos (Obersteiner, Van Dooren, Van Hoof y Verschaffel, 2013), poniéndose de manifiesto la necesidad de considerar otras posibles causas no relacionadas con el *natural number bias* que expliquen las dificultades encontradas en este tipo de tareas, como el uso de estrategias erróneas como *gap thinking* "a menor diferencia entre numerador y denominador, mayor es la fracción" (Pearn y Stephens, 2004) y la estrategia *reverse bias* "cuanto más pequeño es el denominador, mayor es la fracción" (DeWolf y Vosniadou, 2015).

En cuanto a las tareas de comparación usando números decimales, los estudiantes de educación primaria y secundaria tienden a creer que cuantos más dígitos tiene la parte decimal, más grande es el número (Resnick et al., 1989). Por ejemplo, que 0.37 es mayor que 0.6 ya que 37 es más grande que 6. El rol del cero también desempeña un papel importante en las tareas de comparación de números decimales, ya que a menudo los estudiantes consideran que añadir un 0 al final de un número decimal incrementa su valor (0.320 es mayor que 0.32) (Durkin y Rittle-

Johnson, 2012).

Operaciones aritméticas

Cuando los estudiantes aprenden las operaciones aritméticas con los números naturales pueden asumir que la suma y la multiplicación "siempre dan como resultado un número mayor", y la resta y la división "siempre dan como resultado un número menor" (Fischbein et al., 1985). Sin embargo, esta afirmación no siempre es válida para los números racionales. Investigaciones indican que los estudiantes tienen mayor nivel de éxito y necesitan menos tiempo para estimar el resultado en tareas en las que se multiplica o divide un número natural por un racional mayor a la unidad: $3 \times 7/5$ o $3 \div 1.5$ que son congruentes con el modelo implícito anterior, que en las tareas en las que se multiplica o divide un número natural por un racional inferior a la unidad: 7×0.5 o $7 \div 1/3$) (Obersteiner et al., 2016; Van Hoof et al., 2015), que no es compatible con el modelo implícito generado por los números naturales.

Densidad

A diferencia de los números naturales, hay infinitos números racionales entre dos racionales (densidad). El concepto de densidad es complejo de comprender en estudiantes de educación primaria y secundaria, e incluso en adultos (Vosniadou y Verschaffel, 2004). Por ejemplo, los estudiantes tienden a considerar que entre 3/5 y 4/5 no hay ningún número, o que entre 4/7 y 6/7 únicamente está 5/7 (Merenluoto y Lehtinen, 2004; Vamvakoussi et al., 2012). Lo mismo ocurre con los números decimales, a menudo los estudiantes tienden a considerar que entre 1.67 y 1.68 no hay ningún número, o que entre 0.45 y 0.47 únicamente está el 0.46 (Moss y Case, 1999).

Nuestro estudio

La presente investigación tiene como objetivos (i) identificar perfiles de estudiantes con diferentes formas de comprender el número racional considerando sus respuestas a tareas de magnitud, densidad y de operaciones aritméticas de los números racionales (fracciones y números decimales), y (ii) examinar la evolución de los perfiles desde 5º de educación primaria a 4º de educación secundaria. La inclusión de los tres dominios de los números racionales en un mismo estudio puede permitir identificar relaciones entre ellos, así como caracterizar perfiles de estudiantes y su evolución con los años.

Método

Participantes

Los participantes fueron 438 estudiantes de primaria (10-12 años) y secundaria (12-16 años, ESO) pertenecientes a cuatro centros educativos (dos centros de educación primaria y dos centros de educación secundaria) de diferentes localidades de la provincia de Alicante (España) (Tabla 1). Los centros están situados en ciudades donde las familias son de clase media y alta.

Tabla 1

Número de participantes por curso

	Primaria		**Secundaria**				
Curso	5º	6º	1º	2º	3º	4º	**Total**
Nº de estudiantes	85	81	78	81	57	56	438

Instrumento y análisis

Diseñamos un test compuesto por 16 ítems sobre los tres dominios: magnitud, densidad y operaciones, incluyendo diferentes representaciones: fracción y decimal. Se incluyeron ítems congruentes e incongruentes con el conocimiento sobre el número natural (Tabla 2). El test estaba formado por 7 ítems de magnitud (2 congruentes y 5 incongruentes), 5 ítems de densidad (2 congruentes y 3 incongruentes) y 4 ítems de operaciones (2 congruentes y 2 incongruentes). Con relación al dominio de la magnitud, se propusieron 4 ítems de comparación de fracciones y 3 ítems de ordenación/comparación de números decimales. En los ítems de comparación de fracciones, se incluyeron 2 ítems con distinta diferencia entre numerador y denominador, donde el uso de la estrategia *gap thinking* lleva a la respuesta correcta (2/7 vs. 5/8: la fracción mayor tiene menos diferencia entre numerador y denominador); y 2 ítems con la misma diferencia, donde no se podía aplicar la estrategia *gap thinking*. De hecho, los estudiantes que usan la estrategia *gap thinking* para comparar, al observar la misma diferencia en estos ítems piensan que ambas fracciones son iguales. Para estudiar la densidad se propusieron 5 ítems en los que se pedía escribir un número entre dos racionales dados. Finalmente, el dominio de las operaciones aritméticas fue estudiado a través de 4 ítems de multiplicación de un número natural por un racional. Los estudiantes no solo debían resolver los ítems, sino que también se les pidió que justificaran sus respuestas.

Tabla 2

Ejemplos de ítems propuestos en el test

	Congruente	**Incongruente**
Densidad	Escribe dos fracciones entre 2/7 y 5/7 Escribe dos números entre 0.2 y 0.9	Escribe dos fracciones entre 3/5 y 4/5 Escribe dos números entre 0.4 y 0.5
Operaciones	Si multiplicamos 7 × 1.5 ¿el resultado será mayor o menor que 7?	Si multiplicamos 5 × 1/2 ¿el resultado será mayor o menor que 5?
Magnitud	Rodea la fracción mayor: 2/3 vs. 7/8	Rodea el número mayor: 0.37 vs. 0.5

Se llevó a cabo un análisis clúster con el software SPSS 23, con el fin de identificar clústers de comportamiento de los estudiantes en los diferentes dominios y cursos. Para ello, se codificaron las respuestas de los estudiantes en cada ítem con un 1 si la respuesta era correcta, y con un 0 si la respuesta era incorrecta o estaba en blanco. Además, se examinaron las justificaciones proporcionadas a las respuestas de los estudiantes con el fin de dar sustento a los resultados obtenidos tras el clúster. Los clústers obtenidos nos han permitido identificar siete perfiles de comportamientos de estudiantes que describimos a continuación.

Resultados

Descripción de los perfiles

Los siete clústers obtenidos permitieron clasificar el 95.88% de los estudiantes y los hemos denominado: Correcto, Full NNB, Density&Operation NNB, Fraction NNB, Reverse Operation, Reverse Size y Gap thinker. El ítem de densidad incongruente con fracciones no fue resuelto por casi ningún estudiante, por lo que no fue clave en la determinación de perfiles y no se tiene en cuenta en su descripción.

Perfil *Correcto* (29.22%). Estudiantes que resolvieron correctamente todos los ítems a excepción del de densidad incongruente con fracciones que no fue resuelto correctamente por casi ningún estudiante (tal y como se ha comentado anteriormente).

Perfil *Full NNB* (16.44%). Estudiantes que resolvieron únicamente de forma correcta los ítems congruentes con el conocimiento de los números naturales en los tres dominios.

Perfil *Density&Operation NNB* (6.39%). Estudiantes que resolvieron de forma correcta los ítems congruentes de todos los dominios, y los ítems incongruentes de magnitud con números decimales.

Perfil *Fraction NNB* (20.55%). Estudiantes que resolvieron correctamente los ítems congruentes e incongruentes con números decimales en todos los dominios. Sin embargo, con fracciones, únicamente respondieron correctamente los ítems congruentes.

Perfil *Reverse operations* (5.02%). Estudiantes que respondieron tuvieron más éxito en los ítems congruentes que los incongruentes tanto con fracciones como con decimales en magnitud y densidad, pero tuvieron más éxito en los ítems incongruentes que en los congruentes en el dominio de las operaciones.

Perfil *Reverse size* (4.79%). Estudiantes que tuvieron más éxito en los ítems incongruentes que en los congruentes en el dominio de la magnitud con fracciones. En el resto de dominios, tuvieron más éxito en los ítems congruentes.

Perfil *Gap thinker* (13.47%). Estudiantes que tuvieron más éxito en los ítems de magnitud con fracciones con distinta diferencia (donde el *gap thinking* lleva a la respuesta correcta) que en los ítems con misma diferencia. El resto de dominios los respondieron correctamente.

Evolución de los perfiles

A continuación, se describe, de manera general, la evolución de los perfiles desde 5º de educación primaria hasta 4º de educación secundaria (Figura 1).

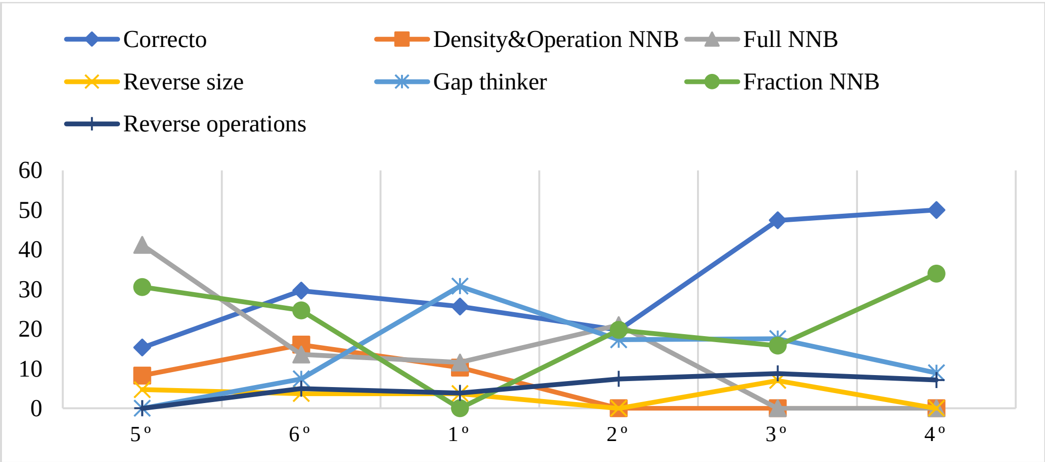


Figura 1. Evolución de los perfiles desde 5º de primaria hasta 4º de secundaria

En 5º de primaria predominan los perfiles *Full NNB* (41.18%) y *Fraction NNB* (30.59%), mientras que el perfil *Correcto* tiene un 15.29%. También aparece la presencia del perfil *Density&Operation NNB* (8.24%). Estos datos indican que, más del 75% de los estudiantes de 5º curso de primaria utilizaron incorrectamente propiedades de los números naturales para resolver tareas con números racionales en algunas de las tareas. De 5º a 6º de primaria aumentan los perfiles *Correcto* (29.63%) y *Density&Operation NNB* (16,05%), pero decrece el *Full NNB* (13.58%) y el *Fraction NNB* (24.69%). De este modo, en 6º de primaria el porcentaje de estudiantes de los perfiles *Fraction NNB* y *Density&Operation NNB* supera al *Full NNB* lo que indica que los estudiantes de 6º curso comienzan a resolver correctamente ítems incongruentes con decimales en los diferentes dominios.

En 1º de Educación Secundaria hay un incremento del perfil *Gap thinker* (30.77%), siendo el curso con mayor número de participantes en este perfil. Por el contrario, los perfiles *Correcto* (25.64%), *Full NNB* (11.54%), *Density&Operation NNB* (10.26%) decrecen y *Fraction NNB* desaparece. Este resultado muestra que, aunque decrece el fenómeno *natural number bias* no aumenta el perfil *Correcto,* sino que aumenta el perfil *Gap thinker*. En 2º de ESO hay un aumento del perfil *Full NNB* (20.99%) y *Fraction NNB* (19.75%) de nuevo, y un decrecimiento de los perfiles *Gap thinker* (17.28%) y *Correcto* (19.75%). En 3º de ESO aumenta significativamente el perfil *Correcto* (47.37%), mientras que el perfil *Gap thinker* (17.54%) se mantiene en el mismo porcentaje que el curso anterior. El perfil *Fraction NNB* (15.79%) decrece ligeramente, mientras que el perfil *Full NNB* desaparece. Sin embargo, el descenso de los perfiles *Fraction NNB* y *Full NNB* se corresponde con un aumento del perfil *Reverse size* (8.77%), alcanzando su máximo porcentaje de empleo en este curso y también con un aumento desde 2º de la ESO del perfil *Reverse operations*. Finalmente, en 4º de ESO, el perfil *Correcto* (50%) aumenta, y disminuyen los perfiles *Gap thinker* (8.92%) y *Reverse size* (desaparece), mientras que el perfil *Fraction NNB* (33.93%) aumenta, siendo el curso con mayor número de participantes en este perfil.

Discusión y conclusiones

El objetivo de este estudio es identificar perfiles de estudiantes cuando resuelven tareas sobre la magnitud, la densidad y las operaciones aritméticas con los números racionales, y examinar su evolución desde 5º de educación primaria a 4º de educación secundaria. El análisis clúster determinó siete perfiles: *Correcto*, *Full NNB*, *Fraction NNB*, *Density&Operaton NNB*, *Gap thinker*, *Reverse size* y *Reverse operation*.

El análisis de la evolución de los perfiles permite señalar las siguientes conclusiones. En los primeros cursos de educación primaria predominan los perfiles *Full NNB* y *Fraction NNB*, lo que ratifica que los estudiantes usan las propiedades de los números naturales cuando comienzan a aprender los números racionales –fenómeno *natural number bias* (Ni y Zhou, 2005; Van Dooren et al., 2015) aunque no sea pertinente su uso. Además, los resultados muestran que el *natural number bias* decrece en números decimales con el aumento de los cursos, desapareciendo a partir de 3º de ESO (Van Hoof et al., 2018). Sin embargo, aunque este fenómeno desaparece con las fracciones a principio de la educación secundaria, aumenta a lo largo de la secundaria llegando a su porcentaje más alto en 4º de la ESO. Por tanto, los estudiantes de 4º de la ESO siguen considerando que “una fracción es mayor si su numerador y denominador son mayores” (DeWolf y Vosniadou, 2015), que “no hay, o hay un número finito de números racionales entre dos dados” (Merenluoto y Lehtinen, 2004; Vamvakoussi et al., 2012), y que “las multiplicaciones siempre dan como resultado un número mayor” (Fischbein et al., 1985).

Por otro lado, los resultados muestran que el perfil *Correcto* desciende de 6º de primaria a 2º de ESO y luego vuelve a aumentar. Este descenso de respuestas correctas se corresponde con un aumento del perfil *Gap thinker,* formado por estudiantes que se basan en la estrategia incorrecta *gap thinking* “a menor diferencia entre numerador y denominador, mayor es la fracción” (Pearn y Stephens, 2004) para resolver las tareas de comparación de fracciones. De este modo, el perfil *Gap thinker* lo forman estudiantes que únicamente tienen dificultades a la hora de determinar la magnitud de las fracciones. Sin embargo, el resto de tareas las resuelven correctamente. Además, es destacable el hecho de que el perfil *Correcto* se observe únicamente en un 50% de los estudiantes al final de la etapa secundaria, por lo que la mitad de la muestra en el último curso de educación secundaria todavía tiene dificultades en la comprensión de algún dominio. También es destacable que se ha considerado como *Correcto* al perfil de estudiante que respondió correctamente todos los ítems, a excepción del de densidad incongruente con fracciones que no fue resuelto correctamente por casi ningún estudiante. Estos datos indican que el dominio de la densidad es el más difícil de comprender para estudiantes de educación primaria y secundaria (Vosniadou y Verschaffel, 2004). Además, se observan diferencias entre las formas de representación en este dominio, ya que los estudiantes en la mayoría de los perfiles fueron capaces de escribir un número entre 0.4 y 0.5, pero no entre 3/5 y 4/5.

El perfil *Density&Operation NNB* está únicamente presente en 5º, 6º y 1º ESO, y evidencia la transición entre el perfil *Full NNB* y el perfil *Fraction NNB*. Este resultado parece indicar, en los ítems utilizados en nuestro estudio, que los estudiantes primero desarrollan la comprensión de los números decimales, y posteriormente sobre las fracciones; y a su vez, primero desarrollan una comprensión en los ítems de magnitud y posteriormente de las operaciones y la densidad (Van Hoof et al., 2018). Por otro lado, el perfil *Reverse operation* evidencia la presencia de ciertos estudiantes, desde 6º hasta 4º ESO, que consideran que "multiplicar un número natural por un racional siempre va a dar como resultado un número menor", al contrario de lo que ocurre con los números naturales. Finalmente, el perfil *Reverse size*, formado por estudiantes que consideran que "cuanto más pequeño es el denominador, mayor es la fracción" (DeWolf y Vosniadou, 2015), parece mantener una trayectoria constante a lo largo de los cursos, sin ser predominante en ninguno de ellos.

Esta investigación tiene implicaciones para la enseñanza. En primer lugar, proporciona información sobre la comprensión sobre los racionales a lo largo de la educación primaria y secundaria a tener en cuenta en la elaboración de secuencias de enseñanza. En segundo lugar, proporciona información para el diseño de trayectorias hipotéticas de aprendizaje del estudiante, en este caso sobre la comprensión de los números racionales, para ser usadas en los programas de formación inicial de maestros y profesores de matemáticas.

Agradecimientos

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana, España) (PROMETEO/2017/135).

Referencias

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. y Silver E. (1983). Rational Number Concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). New York: Academic Press.

DeWolf, M. y Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction, 37*, 39-49.

Durkin, K. y Rittle-Johnson, B. (2012). The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. *Learning and Instruction, 22*(3), 206-214.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education, 16*, 3-17.

Gelman, R., Cohen, M. y Hartnett, P. (1989). To know mathematics is to go beyond thinking that "fractions aren't numbers." En C. Maher, G. Goldin, y R. Davis (Eds.), *Proceedings of the eleventh annual* *meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 29–67). New Brunswick, NJ: Center for Mathematics, Science, and Computer Education at Rutgers–The State University of New Jersey.

González-Forte, J.M., Fernández, C. y Van Dooren, W. (2018). Gap and congruency effect in fraction comparison. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 459-466). Umeå, Sweden: PME.

Merenluoto, K. y Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction*, *14*(5), 519-534.

Moss, J. y Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 122-147.

Ni, Y. y Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52.

Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J. y Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. *Learning and Instruction*, *28*, 64-72.

Obersteiner, A., Van Hoof, J., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2016). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. *British Journal of Psychology*. *107,* 537-555.

Pearn, C. y Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what year 8 students really think about fractions. En I. Putt, R. Faragher,y M. McLean (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 430–437). Sydney, Australia: MERGA.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. y Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for research in mathematics education*, *20*, 8-27.

Stafylidou, S. y Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and instruction*, *14*(5), 503-518.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W. y Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 344-355.

Van Dooren, W., Lehtinen, E. y Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, *37*, 1-4.

Van Hoof, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences*, *61*, 99-108.

Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2013). Are secondary school students still hampered by the natural number bias? A reaction time study on fraction comparison tasks. *Research in Mathematics Education, 12*(2), 154-164.

Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction*, *37*, 30-38.

Vosniadou, S. y Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. En L. Verschaffel y S. Vosniadou (Eds.), Conceptual change in mathematics learning and teaching. Special Issue of *Learning and Instruction*, *14*(5), 445–451.

Erros de alunos nos algoritmos das operações aritméticas e o sistema de numeração decimal

Leila Pessôa **Da Costa**
Universidade Estadual de Maringá – UEM
Brasil
lpcosta@uem.br
Regina Maria **Pavanello**
Universidade Estadual de Maringá – UEM
Brasil
reginapavanello@hotmail.com

Resumo

Esta oficina tem como objetivo discutir os erros cometidos pelos alunos na execução dos algoritmos das operações básicas aritméticas. A discussão tem como subsídios pesquisas sobre o tema bem como dados obtidos em pesquisa de doutoramento que investigou o ensino e a aprendizagem de alunos dos 4ºs e 5ºs anos do Ensino Fundamental matriculados em duas escolas da região noroeste do estado do Paraná – Brasil. Observou-se que as incorreções dos alunos relacionavam-se diretamente à ausência de compreensão das características do Sistema de Numeração Decimal, conhecimento este necessário para que o professor possa fazer intervenções pontuais com vistas a auxiliar o processo de aprendizagem dos alunos.

Palavras chave: Educação Matemática, Ensino Fundamental, Aritmética e sistemas numéricos, formação continuada e desenvolvimento profissional.

A proposição dessa oficina considera a importância do conhecimento do professor sobre o objeto e/ou conteúdo a ser ensinado. Considera, como Tardif (2002, p. 39), que os professores "[...] devem conhecer sua matéria, sua disciplina e seu programa, além de possuir certos conhecimentos relativos às ciências da educação e à pedagogia e desenvolver um saber prático baseado em sua experiência cotidiana com os alunos".

Shulman (1987), ao analisar historicamente a questão do conhecimento e da habilidade para ser professor, sugeriu a distinção do conhecimento do professor em três tipos diferentes de conhecimento do conteúdo: (a) conhecimento sobre o assunto, (b) conhecimento pedagógico do conteúdo e (c) o conhecimento curricular.

Considerando a importância do conhecimento do professor sobre a matéria ser ensinada e o conhecimento pedagógico necessário para que esse ensino contribua para a aprendizagem dos alunos, essa oficina objetiva proporcionar a reflexão dos participantes sobre erros comumente observados na resolução dos algoritmos das operações elementares da Matemática e sua relação com as características do Sistema de Numeração Decimal (SND) e as intervenções possíveis a serem desenvolvidas com vista à superação dos obstáculos observados.

De forma geral, algumas incorreções foram observadas na resolução desses algoritmos, tal como apontado na literatura acerca dos erros das crianças na realização dos algoritmos (Dockrell e Mcshane, 2000; Batista, 2009), entre elas:

- Copia o número errado ao armar o algoritmo, escrevendo, por exemplo, 59 ao invés de 89.
- Após realizar o agrupamento, não faz o transporte correto: ao multiplicar (2 x 6) ou somar um número (6 + 6) transporta o 2 ao invés do 1.
- Erro no cálculo/contagem ao adicionar ou subtrair um número do outro.
- Não finaliza o algoritmo.

Quanto ao algoritmo da adição com agrupamento (reserva ou "vai um", tanto na ordem das unidades como na das dezenas ou centenas, quando o aluno deve transportar (reservar) para a ordem seguinte o agrupamento realizado (‘vai um’), observaram-se as seguintes incorreções:

- Ao ‘montar a conta’ (colocar os números verticalmente) não obedece a ordem/classe do número.
- Ignora o agrupamento realizado na ordem anterior, ao adicionar as parcelas.
- Repetem o algarismo que está nas parcelas: na ordem da unidade, copia a unidade da última parcela, na ordem da dezena, copia a dezena da primeira parcela, e assim sucessivamente.

Com relação ao algoritmo da subtração quando o algarismo do subtraendo é maior que o do minuendo e o aluno necessita recorrer à ordem imediatamente superior para fazer as trocas (desagrupamento), ou ‘empréstimo’, foram observados os seguintes erros:

- Subtraem o minuendo do subtraendo.
- Desconsideram o ‘empréstimo’(desagrupamento) feito a uma determinada ordem, ao realizar a subtração dos números dessa ordem.

Observa-se ainda que os alunos demonstram dificuldade em compreender o papel do zero na composição de um número e muitas vezes acreditam que como ‘não vale nada’, no sentido de que não há valor algum naquela ordem, quando ele está presente, não sabem como operar.

Na multiplicação, se houver algum valor agrupado/transportado em qualquer uma das ordens, esse valor é desconsiderado, ou visto como multiplicando.

Outra dificuldade observada está relacionada aos procedimentos algorítmicos que, ensinados aos alunos sem relação com as características do SND, os levam a considerar somente a sequencia das ações a serem desenvolvidas.

No Brasil, é a partir do 4º ano que as professoras enfatizam o ensino dos algoritmos da multiplicação iniciando por operações que tem no multiplicador um número de um só algarismo e, no multiplicando, um número que não leve à necessidade de agrupamento. Percebemos que esse procedimento enfatiza os passos para a resolução do algoritmo ao invés de a exploração do conceito subjacente à ação desenvolvida, o que acaba gerando conflito para os alunos, que, intuitivamente, utilizam o cálculo mental para resolvê-lo.

Observa-se ainda que, na resolução dos algoritmos que envolvem vários procedimentos, os alunos sabem quais são as ações necessárias, como por exemplo, no caso da multiplicação, que deve multiplicar e somar os algarismos, mas não tem claro o como e o porquê dessas ações.

No algoritmo da multiplicação, com 1 e 2 algarismos no multiplicador, percebemos a dificuldade do aluno em compreender a ordem que está sendo multiplicada de modo que, ao realizar o procedimento da operação, opera como se todos os algarismos do multiplicador não pertencessem a diferentes ordens.

Considerando os aspectos apresentados, a oficina procurará ressaltar que as dificuldades observadas a partir dos erros dos alunos são de natureza conceitual, o que contribuí para a incompreensão dos procedimentos utilizados para a resolução dos algoritmos.

Além disso, a ausência de um trabalho que desenvolva o cálculo mental e o sentido numérico inviabiliza a autoregulação pelos alunos da tarefa que executam. Por outro lado, dada as dificuldades que observam na produção dos alunos, e sem o conhecimento necessário para realizar as intervenções necessárias, os professores fazem com que a ênfase seja dada no resultado e acabam por reforçar nos aprendizes a crença de que só há uma forma de se resolver corretamente o algoritmo e é a ensinada pela professora.

Outro aspecto necessário para a intervenção do professor na produção do aluno é a necessidade de sua compreensão dos processos internos utilizados pelos alunos, o que somente se dá por meio da comunicação, que traz implícita a importância da reflexão em um contexto, em um determinado grupo e a partir de um objeto – “objeto pensado” (Freire, 1977) - codificado numa tarefa para este objeto seja compreendido. Nesse sentido, a comunicação, o trabalho em grupo e a tarefa são “ferramentas” importantes no processo de ensino e de aprendizagem.

Como a comunicação em sala de aula está diretamente relacionada às questões que são feitas pelo professor, é preciso que este proponha questões e tarefas que desafiem os alunos a pensar, motivo pelo qual o professor, qualquer que seja o comentário do aluno, deve perguntar o porquê deste ou pedir que ele explique seu pensamento (Meneses, 1999, p.1).

Além de ser uma capacidade a ser desenvolvida, a comunicação matemática assume também uma orientação metodológica para o ensino e a aprendizagem, orientação essa que a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017, p. 264) apresenta ao observar que “os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem [...] são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação)”.

Para isso, Ponte e Serrazina (2000, p. 60) apontam que, no ensino da Matemática, é preciso

> [...] usar a comunicação para promover a compreensão da matemática, de modo que todos os alunos: - organizem e consolidem o seu pensamento matemático para comunicar com outros; - expressem as suas idéias matemáticas de modo coerente e claro para os colegas, os professores e outras pessoas; - alarguem o seu conhecimento matemático, considerando o pensamento e as estratégias dos outros; - usem a linguagem matemática como um meio de expressão matemática precisa (Ponte e Serrazina, 2000, p. 60).

Como o professor é o elemento chave para introduzir e trabalhar a dinâmica da comunicação matemática em sala de aula é importante que ele a vivencie em situações que articulem o conhecimento pedagógico e o da matéria a ser ensinada.

É por meio da tarefa que se dará a comunicação matemática, direcionada pelo professor. Mas, como salienta Meneses,

> Esta "habilidade" do professor para o questionamento passa pela capacidade de decidir quando colocar questões "provocadoras" ou questões "orientadoras", e depende do entendimento que tem da forma como deve decorrer a aula de Matemática, do seu papel e do papel do aluno (Meneses, 1999, p. 10).

Considerando assim a importância da comunicação matemática e do conhecimento necessário ao professor sobre o objeto a ser ensinado é que essa oficina está sendo proposta. Para o seu desenvolvimento serão apresentadas diferentes produções dos alunos a serem analisadas pelos participantes. As produções evidenciam os "erros" cometidos pelos alunos e trazem à discussão algumas propostas para superá-los.

Durante a análise a ser empreendida, serão discutidos as características do SND e apresentados alguns materiais e jogos que podem auxiliar os alunos nessa compreensão, tais como o ábaco, o material dourado, além de jogos e tarefas que provoquem e orientem os alunos na apreensão dos conceitos subjacentes ao sistema.

Referencias

Batista, C. G. (2009). Fracasso escolar: análise de erros em operações matemáticas p. 61-72. *Zetetiké:* Revista de Educação Matemática, v. 3 (4), n. 4.

Brasil (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação e Cultura.

Dockrell, J.; Mcshane, J. (2000) *Crianças com dificuldades de aprendizagem*: Uma abordagem cognitiva. Artmed.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, v. 57 (1), feb/1987.

Tardif, M. (2002) *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis: Vozes.

Freire, P. (1977). *Extensão ou comunicação*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Meneses, Luís. Matemática, Linguagem e Comunicação. ProfMat 99 – *Encontro Nacional de Professores de Matemática*. Portimão. (2013, 29 de Outubro) Disponível em: < http://www.ipv.pt/millenium/20_ect3.htm >. Acesso 29 out 2013.

Ponte, J. P.; Serrazina, M. L.(2000). *Didáctica da matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

La interdisciplinaridad para el estudio de las fracciones

Luis Alexander **Conde** Solano
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad de Medellín
Colombia
lconde@udem.edu.co
Gerardo Elias **Sepúlveda** Restrepo
Secretaría de Educación del Departamento de Antioquia
Colombia
illecebris@hotmail.com
Marco Antonio **Ayala** Chauvin
Universidad Técnica Particular de Loja (UTPL)
Ecuador
maayala5@utpl.edu.ec

Resumen

El objetivo de este estudio es analizar la construcción de la noción de equipartición de fracción en estudiantes de primaria, a través de un contexto interdisciplinar articulado entre las matemáticas y la música. Este interés surgió de nuestra práctica al observar que los métodos utilizados en la actualidad para la enseñanza de las fracciones, adolece de un mecanismo de comprobación de la existencia o no de la equidad de las partes. Los participantes fueron 17 estudiantes de 4º y 5º grado de educación primaria del sector rural de Antioquia. El análisis de la información recolectada permitió reconocer que los vínculos entre las matemáticas y la música pueden constituirse en un escenario interdisciplinar diferente a los tradicionales, para que los estudiantes por medio de experiencias y representaciones puedan construir una noción de equipartición de fracción.

Palabras clave: Interdisciplinaridad, fracción, matemática, música

Introducción

El uso de las fracciones representa una necesidad relevante para el desenvolvimiento de los estudiantes en la sociedad, a partir de la interpretación de los datos matemáticos con los que interactúa a diario; competencia que el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006) espera haya sido adquirida al terminar el quinto grado de básica primaria.

El dominio de este objeto matemático implica entrar en interacción con diferentes nociones, como lo es la equipartición, un aspecto que generalmente es abordado de manera estática en las aulas de clase, sin mecanismos de verificación y, por ende, sin la generación de autonomía en la valoración de la coherencia de las respuestas dadas a las situaciones que se les presenta a los estudiantes. Para Kieren (1980) la acción de equipartir, es la base fundamental para la creación y aplicación del conocimiento del número fraccionario.

En el ejercicio escolar, los estudiantes y los maestros se enfrentan a dificultades sobre la comprensión y representación de las fracciones, tal vez consecuencia del uso de ejemplos para introducir la equipartición. En ejemplos como: partir frutas, chocolatinas o pasteles, se pasa por alto las unidades de medida, el tamaño de las partes, medio continuo, discreto, equivalencias, entre otros. En este escenario, consideramos que la apuesta interdisciplinaria entre las matemáticas y la música, ofrece una estrategia didáctica en el estudio de los fraccionarios diferente a las usadas tradicionalmente, de las cuales emergen imprecisiones a la hora de transponerlas a situaciones del contexto. Por lo tanto, la interdisciplinaridad como recurso didáctico promueve experiencias y representaciones utilizados por los estudiantes para conjeturar y probar ideas matemáticas emergentes de un fenómeno real observado. Concretamente desde nuestro punto de vista, la aplicación en el aula de actividades interdisciplinarias donde se articulen elementos musicales, objetos sonoros y matemáticos, integrados en procesos de medición, puede ofrecer a los estudiantes posibilidades para construir significados asociados con el objeto fracción.

Marco Conceptual

Actualmente, surgen nuevas problemáticas cada vez más complejas que de cierto modo exigen un trabajo articulado entre diversas disciplinas para su tratamiento. Estos requerimientos de la sociedad moderna necesariamente deben atenderse por medio de la interdisciplinaridad. La idea de un currículo interdisciplinar se puede observar desde la escuela pitagórica donde la música se consideraba una disciplina matemática en la que se estudiaban relaciones de números, razones y proporciones. Para los griegos, la aritmética, geometría, música y astronomía, que formaban el *quadrivium*, junto con la gramática, retórica y dialéctica que formaban el *Trivium* se convirtieron en las siete artes liberales.

En tiempos modernos, en la organización de currículo escolar, según los NCTM (2003) se sugiere la necesidad e importancia en establecer conexiones entre las distintas áreas del conocimiento. Abordar así los contenidos produce algo más que motivar a los estudiantes. “Revela las matemáticas como una disciplina con sentido, en vez de una disciplina en la que el profesor da reglas que deben memorizarse y usarse para hacer los ejercicios”. También en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) se enfatiza que, en la formulación, el tratamiento de situaciones problema con enfoque interdisciplinar contribuye al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de múltiples formas.

Para el interés de este trabajo damos relevancia a las conexiones entre las matemáticas y la música, a partir de las representaciones semióticas visuales desde la perspectiva de De Guzmán (1996); auditivas (McAdams, 1993 y Willems, 1993) y corporales basadas en Conde (2013), como puente dialéctico entre dichas disciplinas. Desde esta perspectiva, se establece un marco conceptual que sirve de soporte para el desarrollo de este estudio y responde a la naturaleza interdisciplinaria de nuestro planteamiento.

Representaciones visuales

Entendemos por representaciones visuales aquellas representaciones pictóricas como diagramas, gráficas, modelos geométricos, animaciones dinámicas virtuales, entre otras, como método para comunicar matemáticas y música.

De Guzmán (1996) señala que los matemáticos se valen de procesos simbólicos y diagramas visuales, aún en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista. Como consecuencia, la visualización aparece así, como algo profundamente natural en la transmisión y comunicación propia del quehacer matemático, en particular, la relación espacio-temporal se constituye en un sistema de representación encargado de organizar la duración de los sonidos y silencios en una línea de tiempo de forma escrita, tal como ocurre en la escritura musical en el pentagrama.

Representaciones auditivas

A diferencia de la actividad matemática, en la música se responde a la naturaleza de evento sonoro, en la cual la representación visual no es la única forma de comunicación y expresión, ya que un músico puede interpretar una melodía sin conocer dicho sistema de escritura. La representación auditiva, implica el desciframiento (reconocer, discriminar e interpretar) de estímulos auditivos asociándolos a experiencias previas (McAdams, 1993). Por lo tanto, se apela a la representación mental en forma de memoria auditiva para establecer relaciones y dar sentido a los sonidos percibidos.

Aunque la cognición auditiva actúa de manera simultánea, los procesos mentales se activan en función de cada cualidad del sonido. Sin entrar en detalle de la función de cada uno de estos elementos, en este estudio se tratan los aspectos que involucran: i) la variación en la duración, relacionada a la medida de tiempo de las figuras musicales y ii) la interrupción regular, que consiste en aquellos que producen repeticiones de una sucesión de sonidos de igual duración alternados con silencios (Willems, 1993).

Representaciones corporales

En la ejecución musical el gesto es un elemento inherente que puede ser relacionado corporalmente con el ritmo. Es decir, la experimentación sensorial de fenómenos sonoros permite al estudiante reconocer estructuras rítmicas por medio de actividad corporal. De esta forma es posible establecer un vínculo entre las estructuras rítmicas y los números fraccionarios (Conde, 2013).

Al realizar la ejecución del ritmo corporalmente (gesto) los estudiantes pueden determinar si el patrón rítmico cumple con ciertas propiedades, por ejemplo, pueden determinar si dos o más patrones rítmicos son equivalentes o no, al interpretarse simultáneamente. Es por ello que el gesto de los estudiantes no está sometido a las interpretaciones personales del maestro, es decir, es validado a través de la reproducción del propio ritmo.

El gesto desde la perspectiva de este trabajo, aunque está influenciado por la cultura e individualidades, es estable en la ejecución ya que posee una estructura rítmica musical. En este caso, los gestos deben ser articulados para cumplir con ciertas reglas temporales que no están sujetas a las interpretaciones de un observador (o experto) porque son inherentes a la métrica musical de un patrón determinado.

Metodología

Esta comunicación hace parte de una investigación de maestría en Educación Matemática. Es de corte cualitativo, cuyas fases de la investigación consistieron en: i) diseño y desarrollo curricular, en la que se estableció en una propuesta didáctica, ii) diseño y desarrollo de software educativo y iii) un análisis cualitativo sobre la manera en que los estudiantes de primaria construyen una noción de equipartición de fracción, a través del contexto interdisciplinar. En este estudio participaron 17 estudiantes de los grados cuarto y quinto de básica primaria, de una institución educativa rural ubicada al occidente de Antioquia, Colombia.

Los recursos de apoyo elaborados como soporte a las acciones de intervención fueron una guía del docente, un cuaderno de trabajo del estudiante, un software educativo y material manipulativo. Los instrumentos de recolección y organización de la información consistieron en cuadernos de trabajo diligenciados por los estudiantes, videograbaciones de las actividades y un diario pedagógico como herramienta de registro de las experiencias e impresiones que surgieron del desarrollo de las sesiones de clase.

Discusión de resultados

En este apartado se ejemplifican algunas formas cómo los estudiantes a partir de sus experiencias en un contexto interdisciplinario, pueden de cierto modo construir una noción de equipartición de fracción. Para ello exhibimos episodios tomados de los diferentes instrumentos de recolección y organización de la información donde se evidencia el tránsito de una idea intuitiva, pasando por representaciones formales e informes de un fenómeno acústico hasta la consolidación de significados de la noción de equipartición.

Ideas intuitivas sobre la equipartición y sus representaciones no convencionales

La percepción de los sonidos y la necesidad de comunicar estas ideas, acercan a los estudiantes a formas de representación no convencionales ligadas a la descripción del fenómeno acústico percibido. Es así como, tras realizar una actividad de juego que vincula un patrón rítmico regular como los que se muestran en la Figura 1, las representaciones de los estudiantes se aproximan al cumplimiento de criterios de medición, comparación y simbolización.

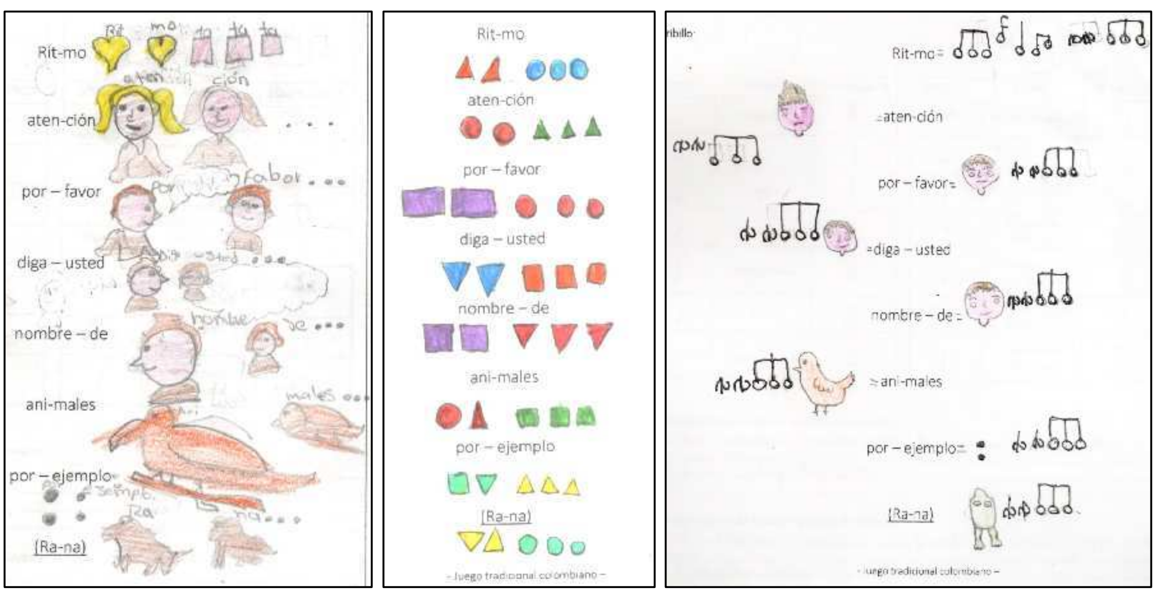


Figura 1. Construcción de patrones rítmicos con representaciones informales

La sensación de partición regular experimentada por los estudiantes, les permite dar sentido a la idea de patrón como experiencias repetidas (Johnson, 1987). Mismas que ofrecen conexiones con experiencias biológicas (pulsaciones del corazón) y experiencias cotidianas como las actividades de baile. En los dos ejemplos anteriores están regulados por pulsaciones, es decir, sonidos con igual tiempo de duración. Precisamente, las ideas intuitivas van surgiendo de percepciones de eventos sonoros con tiempos de igual duración. Por lo tanto, los estudiantes representan dichos eventos con signos de la misma clase, con el mismo color y proporciones similares, tal como se muestra en la Figura 1.

Ideas sobre la equipartición y sus representaciones convencionales

En el entorno computacional se presentaron tres animaciones (Figura 2). En la primera consiste en barras dinámicas donde se articulan fracciones de sonidos o silencios con recubrimiento de la misma. En la segunda y tercera consiste en ordenar de mayor a menor las figuras musicales y la fracciones.

Figura 2. Duración de las figuras, (Software Educativo de acceso público registro: 13-67-227)

En la primera escena, aunque no se menciona la palabra fracción, implícitamente los estudiantes han trabajado con la sensación de partir o de fracturar para hacer discreto el tiempo de duración del sonido en la dimensión temporal. La representación dinámica permitió que los estudiantes reconocieran en una línea de tiempo, sonidos y silencios según su tiempo de duración determinado por los cortes entre sonidos. La idea de “fractura” que se considera fundamental en el estudio las fracciones tiene varias representaciones simultáneas que permiten a los estudiantes a determinar las características, el número y la medida de las partes en que está compuesto el todo referencial (Freudenthal, 1983).

La segunda y tercera escena, en las que se pretende medir el tiempo de duración de sonidos y silencios, crean en los estudiantes una noción de orden. Es decir, los conducen a reconocer y comparar sonidos/silencios asociados a sus representaciones. Esta exploración temporal inicial les permitió a los estudiantes adentrarse en la organización de eventos fundamentada en la percepción visual (sistema de representación gráfica), gestual y auditiva (sonido).

Aproximación a la noción de equipartición

En la interacción de los estudiantes con el entorno computacional (Figura 3), se introducen representaciones que ilustran la propiedad de construcción de las figuras musicales: *Cada figura* *es la mitad de la anterior y el doble de la siguiente* (Conde, Parada y Liern, 2016). Se representa la construcción de una redonda como la figura equivalente a cuatro pulsos y a partir de la redonda se asigna los tiempos musicales de las demás figuras.

Figura 3. Las figuras musicales y sus silencios - Multimedia

La redonda está representada en el ambiente computacional por una circunferencia completa, formada por cuatro fracciones de 1/4 o, lo que es lo mismo, cuatro negras. En lo auditivo, mientras se forma la circunferencia se reproduce un sonido o se deja un silencio de duración equivalente a cuatro pulsos, marcados a igual distancia temporal por un golpe del metrónomo.

Respecto a dicha construcción se generó el siguiente dialogo con los estudiantes:

> Docente: ¿Qué cantidad de pulsos hay en una blanca?
> Estudiantes: Dos pulsos
> Docente: ¿y cuantos había en una redonda?
> Estudiantes: Cuatro
> Docente: ¿Qué relación hay entre la blanca y la redonda?
> Estudiantes: La blanca tiene…, la mitad de los pulsos que tiene la redonda.

Al parecer los estudiantes describen una trayectoria de construcción de una noción de equipartición, puesto que se establece una unidad de medida como base (el pulso). Para luego expresar la duración de un sonido con relación a esta y trascender posteriormente a relacionar una figura con otra, partiendo de la cantidad de veces en las que el pulso aparece en ellas. La equipartición se asocia al número de figuras con iguales duraciones necesarias para completar la unidad de referencia. Desde nuestro contexto la equipartición está controlada por experiencias gestuales, visuales y auditivas que verifican la acción de equipartir. Como valor agregado tenemos los efectos sonoros dentro de la métrica musical que validan cuándo existe o no una equipartición, es decir, los estudiantes construyen un significado sobre la noción de "igual tiempo de duración".

Conclusiones

La enseñanza con enfoque integrador entre las matemáticas y otras disciplinas requiere no sólo conocimientos especializados, sino un cambio de creencias en torno a las opiniones de los profesores de matemáticas, ciencias y artes, sobre la organización del currículo, su enseñanza y cómo aprenden los estudiantes. Es decir, La interdisciplinariedad no aparece como un elemento que sea producto de la espontaneidad. Por lo tanto, Este estudio apunta a proveer experiencias diferentes al tradicional tratamiento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Desde nuestro punto de vista, centramos la atención en el estudio de objetos integradores que coexisten en contextos interdisciplinares y que pueden promover en los estudiantes procesos de construcción de su propio conocimiento.

En la interacción de las actividades interdisciplinarias propuestas en este estudio se observa que los estudiantes descubren, representan y comparan la forma como el pulso, el tiempo y el ritmo musical constituyen una aproximación a la noción de equipartición determinando al pulso como su unidad de medida. Aquí los estudiantes aprecian la equipartición en condición de igual tiempo de duración entre pulso y pulso. También los estudiantes confirman que los tiempos iguales son invariantes al patrón rítmico de una canción o fragmento musical.

Acto seguido, los estudiantes encuentran que hay una forma de establecer unidades de medida a partir del pulso, que pueden ser convencionales o no convencionales inicialmente, hasta cobrar forma en las figuras musicales como lenguaje universal para expresar la duración de un elemento sonoro de la música. Además, establecen una relación fraccionaria entre cada una de ellas, partiendo de la redonda como unidad y las demás como cierta parte de ella, siguiendo la propiedad de que cada figura es la mitad de la anterior y el doble de la siguiente.

Como reflexión final, sugerimos cambios en la escuela tradicional en cuanto a herramientas y argumentos para el estudio de las fracciones. Una sugerencia podría ser reorientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la equipartición, a través de objetos musicales. Aquí se generan diversos escenarios didácticos que pueden favorecer el aprendizaje de las fracciones con base en su estructura métrica musical.

Referencias

Conde, A. (2013). La unidad relativa como vínculo cognitivo entre el tiempo musical y las fracciones. (Tesis de Doctorado). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Conde, A., Parada, S., & Liern, V. (2016). Estudio de fracciones en contextos sonoros. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, *16*(2),1-21.

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la Pizarra*. Madrid: Pirámide.

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* (Trad. L. Puig). México: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Johnson, M. (1987). The body in the Mind. Chicago: University of Chicago Press.

Kieren, T. (1980). The racional number constructs. Its Elements and Mechanisms. En: T. Kieran (Ed). Recent Research on Number Learning, (pp. 128-149). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

McAdams, S. (1993). Recognition of sound sources and events. In S. McAdams y E. Bigand (Eds.), *Thinking in Sound: The Cognitive Psychology of Human Audition* (pp. 146-198). Oxford: Oxford University Press.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias Matemáticas.* Bogotá. Colombia: Imprenta Nacional de Colombia.

NCTM (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: SAEM Thales.

Willems, E. (1993). *El ritmo musical* (Trad V. Hemsy). Buenos Aires: Eudeba.

Comprensión de problemas de tipo multiplicativo en el modelo Escuela Nueva

Alexander **Largo** Cañaveral.
Universidad de Antioquia
Colombia
largocanaveral@gmail.com
Gladys María **Rivera** Gonzáles
Universidad de Antioquia
Colombia
gladysmariarivera@gmail.com

Resumen

El presente proyecto de investigación enfoca su interés en determinar cómo comprenden los problemas de tipo multiplicativo estudiantes de cuarto y quinto de Básica Primaria en el modelo Escuela Nueva, se presentan los acercamientos conceptuales sobre la teoría de Enseñanza para la Comprensión (EpC), definiendo las dimensiones y niveles de la comprensión; luego, de estos acercamientos, se hace referencia al marco metodológico, donde se define el paradigma de investigación cualitativa, desde un enfoque interpretativo. Allí, se recurre al estudio de casos como el tipo de estudio que orienta este trabajo. Es así, como se determinan las técnicas a utilizar: la observación participante, diario de campo y entrevistas semiestructuradas.

Palabras claves: problemas de tipo multiplicativo, comprensión, Escuela Nueva

Planteamiento del problema

La resolución de problemas matemáticos se ha considerado como un aspecto relevante en los currículos escolares de Colombia; Como lo afirma el Ministerio de Educacion Nacional,

> “la resolución de problemas debe ser eje central del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática. Pero esto no significa que se constituya en un tópico aparte del currículo, deberá permearlo en su totalidad y proveer un contexto en el cual los conceptos y herramientas sean aprendidos. (Ministerio de Educacion Nacional, 1998, p. 52).

Además, estos aportan al estudiante la capacidad de generalizar hipótesis, explorar, tomar decisiones, proponer nuevas ideas y hacer frente a diversas situaciones problemas; asi mismo expone la importancia del trabajo por competencia y proponen la Enseñanza para la Comprension, como un protente precursor para su dominio, ya que este permite valorar gradualmente el nivel de desarrollo de cada competencia, en progresivo creciemiento y deacuerdo al contexto donde se desarrolle (Ministerio de Educacion Nacional, 2006).

Con respecto al desarrollo del trabajo escolar como profesor del área de matemáticas, se ha podido observar que los estudiantes en los grados cuarto y quinto al enfrentarse a problemas matemáticos de tipo multiplicativo, constantemente se preguntan ¿qué operación debo hacer? confunden los conceptos de resta, suma, multiplicación y división. Esta realidad sumada a los resultados de las prueba SABER, donde se evidencia que sólo algunos estudiantes resuelven problemas de proporcionalidad directa, factor multiplicante, adición repetida, producto cartesiano y razón, son el origen del interés que orienta este trabajo.

La pertinencia de esta investigación también se sustenta en el rastreo de antecedentes, donde se puede evidenciar que la producción académica relacionada con la comprensión de problemas de tipo multiplicativo en el modelo Escuela Nueva dirigidos por la fundación Volvamos a la Gente, es escasa. De acuerdo con lo anterior se formula la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo comprenden problemas de tipo multiplicativo los estudiantes de los grados cuarto y quinto de Básica Primaria, en el contexto de Escuela Nueva, en el marco de la Enseñanza para la Comprensión?

Objetivo general

Analizar cómo comprenden problemas de tipo multiplicativo en el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión estudiantes de grado cuarto y quinto, de Educación Básica Primaria, en el modelo de la Escuela Nueva.

Objetivos específicos

- Describir la comprensión de problemas de tipo multiplicativo en el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión de los estudiantes de cuarto y quinto de Educación Básica Primaria, en el modelo de la Escuela Nueva.

- Identificar los desempeños de comprensión que muestran los estudiantes al solucionar problemas de tipo multiplicativo en los grados cuarto y quinto de Educación Básica Primaria, en el modelo de Escuela Nueva, en el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión.

Problemas de tipo multiplicativo

Este apartado del trabajo se subdivide en dos momentos, en primera instancia se realiza un acercamiento a los problemas de tipo multiplicativo iniciando por Vergnaud (1991). En segundo lugar el estudio de los niveles de comprensión de resolución de problemas verbales simples de comparación multiplicativa realizados por Castro (1994). Seguido, se presenta de manera sucinta una definición de ruralidad y el modelo Escuela Nueva desde distintos autores.

Inicialmente, dentro de esta sección, se presentan los estudios realizados por Vergnaud (1991), quien haciendo uso de la teoría de los campos conceptuales describe y categoriza tres tipos de problema en la estructura multiplicativa. En esta línea, para Vergnaud (1990) "Un campo conceptual es el conjunto de problemas o situaciones cuyo tratamiento requiere conceptos, procedimientos, relaciones, contenidos, operaciones y representaciones, íntimamente relacionados, pero distintos, que están conectados unos con otros y probablemente entrelazados en el proceso de adquisición" (p. 142). Desde esta perspectiva, los conceptos involucrados en las situaciones que constituyen el campo conceptual de los problemas de tipo multiplicativo son las que implican el uso de divisiones y/o multiplicaciones.

En la línea de los problemas de tipo multiplicativo, Vergnaud (1991) propone dos formas de relación dentro de la estructura: relaciones ternarias tipo a.b=c y relaciones cuaternarias a/b=c/d. Además, de estas relaciones el autor, expone tres clases de problemas de tipo multiplicativo: isomorfismo de medidas, un solo espacio de medidas y producto de medidas. En el primero, interactúan cuatro cantidades y una de ellas constituye la incógnita. El segundo, –un solo espacio de medida– cuenta con "una sola categoría de medidas […] y la correspondencia no se establece entre cuatro cantidades sino entre dos, por una parte, y dos objetos, […] por la otra" (Vergnaud, 1991, p. 220). En tercer lugar, se encuentran los problemas tipo producto de medidas definidos como aquellos donde dos medidas del mismo o de diferente tipo dan origen a otra medida.

Estas construcciones, aportan al presente estudio de investigación, no solo en la clasificación de los tipos de problema multiplicativos sino, además, en el llamado que hace el autor, sobre la importancia de abordar cuidadosamente las diferentes clases de problemas y su análisis "con el fin de ayudar al niño a reconocer la estructura de los problemas, y a encontrar el procedimiento que conducirá a su solución" (Vergnaud, 1991, p. 223). Asimismo, Vergnaud en el II Congreso Internacional de la Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas (2016), se refiere a la comprensión matemática como una actividad que el estudiante desarrolla, advierte que, se comprende aunque no se diga ni una palabra. También, asegura que la comprensión se concibe a través de la observación de la actividad señalando lo esencial del plano metodológico.

Continuando con el rastreo de autores que aportan al campo de estudio de los problemas de tipo multiplicativo, se presentan las construcciones de Castro (1994), quien asocia el aspecto de la representación mental en el campo de la resolución de problemas con la interpretación o comprensión que el estudiante construye en relación a un problema. El autor también señala que dichas representaciones dan cuenta de los conocimientos y esquemas de conocimiento que el estudiante posee. A diferencia de lo que pretende este trabajo: abordar el estudio de la comprensión de diferentes tipos de problema asociados a la estructura multiplicativa, los estudios de Castro (1994), se centran en los niveles de comprensión de la resolución de problemas verbales simples de comparación multiplicativa, tales estudios se realizan bajo el diseño de fases propuestas por el autor, mientras este trabajo retoma las actividades, guías y desempeños de aprendizaje propuestas en el modelo de Escuela Nueva, los describe e interpreta de acuerdo con las dimensiones y niveles de comprensión propuestos en la Teoría de la Enseñanza para la Comprensión.

Para Castro (1994), la comprensión de problemas aritméticos verbales se subdivide en dos niveles: "traducción del problema a una representación interna e integración del problema en una estructura coherente" (Castro, 1994, p. 23). Al referirse al primero, este autor menciona la importancia de interpretar el lenguaje matemático; relacionando este nivel con el campo de la significación. En cuanto al segundo nivel, Castro (1994) plantea que tiene relación con “la expresión matemática del problema” (Castro, 1994, p. 35) con situar el problema en un campo, en una estructura, en identificar los conocimientos matemáticos que se requieren para su solución. Los aportes de Castro (1994), señalan la necesidad de llevar a cabo estudios de este tipo con el propósito de realizar aportes didácticos que apuntan, de algún modo, a la evaluación y al contenido matemático en el ámbito de la aritmética.

Seguido, teniendo en cuenta que la sede El Cedro se encuentra ubicada en el contexto rural; el presente estudio expone la necesidad de acercarse a lo que implica esta realidad. Antes que nada, la ruralidad se entiende como algo que va más allá del campo, de los cultivos y los animales “el concepto de ruralidad trasciende lo agropecuario en términos de su relación con los contextos urbanos” (Pérez, 2003, p. 4). Para el Ministerio de Educacion Nacional (2012), dicha trascendencia está marcada por el acceso que tienen las comunidades rurales a las comunicaciones, las nuevas tecnologías y su vinculación con los centros urbanos. Entrena (1998) citado en Matijasevic y Ruiz (2013) plantea diferencias entre lo rural y la ruralidad, entendiendo “lo rural como un particular medio geográfico, y la ruralidad como una cultura o forma de vida vinculada con dicho medio” (p. 25).

En Colombia, el 32% de la población es reconocida como rural, según el Informe Nacional de Desarrollo Humano (PNUD, 2011), esta condición hace que en 1970 el país hable de educación rural incorporándola dentro las políticas de reforma agraria y de desarrollo rural a través de un modelo denominado Escuela Nueva (Ministerio de Educacion Nacional, 2012). Más adelante, se determina que corresponde a las entidades territoriales y al Gobierno Nacional la promoción de un servicio de educación campesina y rural, que comprenda especialmente la formación técnica en actividades agrícolas, pecuarias, pesqueras, forestales y agroindustriales que contribuyan a mejorar las condiciones humanas, de trabajo y la calidad de vida de los campesinos (Ley 115, artículo 64 de1994).

Es así como en la década del 70 surge en Colombia el denominado modelo Escuela Nueva, “caracterizado como sistema, como modelo, como programa y como metodología” (Colbert y Vásquez, 2015, p. 48). Para el caso de esta investigación se ha adoptado el término modelo Esuela Nueva este término incluye una fundamentación teórico-conceptual y operativa (Colbert y Vásquez, 2015). En este sentido, conceptos y teoría se abordan tal cual se presenta en las guias de aprendizaje, en cuanto a la cuestion operativa el abordaje de los problemas de tipo multiplicativos se contextualizan, ademas, se relacion con otros elementos como el trabajo cooperativo y los centro de recursos de aprendizaje.

Aproximación al marco teórico/aproximación al horizonte conceptual.

A continuación, se realiza una aproximación al marco conceptual de la EpC como referente que orienta el desarrollo de este trabajo, teniendo en cuenta los elementos, dimensiones y niveles de la comprensión. En esta sección se relaciona esta teoría con el contexto metodológico desde el cual se enmarca esta investigación, el modelo Escuela Nueva.

Marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión

Este marco conceptual nace como producto de un proyecto realizado en la Universidad de Harvard, inscrito en la escuela de Educación. La EpC intenta dar respuesta a cuestiones relacionadas con el cómo enseñar y el cómo lograr que los estudiantes se interesen, comprendan y usen lo que la escuela pretende abordar en el aula de clase, de esta manera, la EpC plantea no solo el estudio de la comprensión como punto de llegada o resultado, sino que también expone una serie de elementos, metas de comprensión, desempeños de comprensión, dimensiones y niveles de comprensión que configuran toda una perspectiva de enseñanza, es decir, incluye una apuesta metodológica (Stone 1999). Es decir, incluye una apuesta metodológica. Sin embargo, en este trabajo solo son retomados las dimensiones y niveles de la comprensión con relación a los problemas de tipo multiplicativo, ya que la apuesta metodológica que se lleva a cabo en las escuelas multigrado del departamento de Antioquia se inscribe en el modelo de Escuela Nueva.

En consecuencia, en el marco conceptual de la EPC se define la comprensión como:

> La habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. Para decirlo de otra manera, la comprensión de un tópico es la "capacidad de desempeño flexible" con énfasis en la flexibilidad. De acuerdo con esto, aprender para la comprensión es como aprender un desempeño flexible (Perkins, 1999, pág. 70).

De acuerdo con esta definición, se espera que los estudiantes al terminar un ciclo de formación, cuenten con un repertorio de conocimientos y habilidades específicos, además, se espera que presenten una comprensión del sentido, la significación y el uso de dichos conocimientos y habilidades, es por ello que la EpC plantea una serie de desempeños que permiten identificar el nivel de comprensión del estudiante en diferentes dimensiones respecto a un tópico incluyendo el uso flexible de los conceptos en escenarios escolares o no escolares (Perkins, 1999). Esta forma de concebir la comprensión, responde a nuevas miradas sobre la enseñanza que ponen de manifiesto una educación más centrada en el contexto, en la cultura y en el reconocimiento de cómo los aprendizajes transforman el sujeto y su forma de ver el mundo (Perkins, 1999).

Conviene subraya que la comprensión se apoya en unas dimensiones que denotan las diferentes formas que demuestra el estudiante cuando comprende, estas se pueden definir como todas aquellas características observables durante el proceso de comprensión (Boix y Gardner, 1999). “Lejos de ser categorías estáticas y desvinculadas, interactúan dinámicamente en los desempeños de los alumnos” (Boix y Gardner, 1999 p. 243)

De acuerdo a esto, en primer lugar se presenta la dimensión de contenido que evalúa el paso de los conocimientos empíricos que ha construido el estudiante a través de sus experiencias, al conocimiento académico para ser aplicado de manera correcta, este escenario posibilita que el estudiante transforme sus creencias intuitivas y la coherencia de las redes conceptuales (Boix y Garnerd, 1999). En este sentido, los problemas de tipo multiplicativo en el modelo Escuela Nueva plantea el conocimiento de cada uno de los conceptos que subyacen este tipo de problemas, multiplicación y división, a través de situaciones del contexto.

En segundo lugar, se presenta la dimensión de método, esta se refiere a las diversas formas y procesos que utilizan los estudiantes para construir, validar y resolver un problema o confirmar cierta información (Boix y Gardner, 1999). Al enmarcar esta dimensión en la solución de problemas de tipo multiplicativo en el modelo Escuela Nueva, se involucra el uso de materiales concretos, representaciones pictóricas, simbólicas, entre otros métodos de solución, que permiten desentrañar la naturaleza del problema y sus conceptos.

Seguido, se encuentra la dimensión de propósitos, por su parte, se basa en "la convicción de que el conocimiento es una herramienta para explicar, reinterpretar y operar el mundo" (Boix y Gardner, 1999, p. 235). Se reflexiona acerca de las preguntas que los estudiantes plantean, en este sentido, Vergnaud (1990) propone que situaciones complejas se analicen como una combinación de tareas de las que es importante conocer su naturaleza y su dificultad, asi mismo, los conocimientos pueden ser puestos en juego a través de la formulación de preguntas de interés y la reflexión que se evoluciona en el conocimiento (Boix y Gardner, 1999).

Por último, la dimensión de formas de comunicación permite al estudiante implementar el uso de ciertos símbolos para comunicar lo que ha aprendido mediante la utilización de un lenguaje apropiado y comprensible (Boix y Gardner, 1999). En esta línea, el modelo Escuela Nueva posibilita que los estudiantes dialoguen sobre lo que van comprendiendo a través del trabajo colaborativo, el dialogo, el uso del cuaderno en donde se plasman las respuestas de los problemas multiplicativos, también se utiliza la herramienta del autocontrol de progreso, en donde los estudiantes escriben qué aprendieron y cuáles fueron sus dificultades.

Como ya se ha dicho, cada una de estas dimensiones de la compresión contiene distintos niveles, niveles que se dan de modo independiente en de cada una de las dimensiones; sin embargo, cada uno conserva características similares dentro de las dimensiones atendiendo a las particularidades de cada una. Es así, como en el nivel de ingenuo, los desempeños se basan en los conocimientos empíricos que no son aplicados en un contexto real, no hay conciencia del significado del conocimiento y la expresión del conocimiento es rígida carece de creatividad (Boix y Gardner, 1999). En el siguiente nivel, novato, los estudiantes difícilmente dan cuenta de conexiones entre ideas y conceptos, por lo tanto, su forma de presentar y demostrar el conocimiento es mecanizada (Boix y Gardner, 1999).

Más adelante se encuentra el nivel de aprendiz, en este nivel se presenta una relación consolidada entre el conocimiento y su uso flexible, existe conciencia de la complejidad de la construcción del conocimiento y la constante validación del mismo ((Boix y Gardner, 1999). Después, se encuentra el nivel de maestría, caracterizado por un convencimiento definido acerca de la importancia de construir el conocimiento a través de diferentes medios, es decir "los alumnos pueden usar el conocimiento para reinterpretar y actuar en el mundo que los rodea" (Boix y Gardner, 1999, p. 241). Es así que, el marco conceptual de la EpC entiende la compresión de un modo plural, es decir, no es estática, ni única, es móvil y múltiple, que reconoce diferentes dimensiones y niveles de ella (Stone, 1999).

Metodología

A continuación, se presentan las particularidades del diseño metodológico cualitativo que caracteriza este proyecto de investigación, proyecto que busca identificar cómo comprenden los estudiantes de los grados cuarto y quinto los problemas de tipo multiplicativo orientado bajo el modelo de Escuela Nueva, entendiendo que las comprensiones se construyen dentro de realidades particulares, es por ello que en este estudio la realidad desde los aportes de Hernández, Fernández y Baptista (2010):

> La "realidad" se define a través de las interpretaciones de los participantes en la investigación respecto de sus propias realidades. De este modo convergen varias "realidades" por lo menos la de los participantes, la del investigador y la que se produce mediante la interacción de todos los actores (p. 51).

Después de lo anterior, es necesario indicar que este estudio presenta características inductivas, ya que los datos son utilizados para proponer categorías (Taylor y Bogdan citado en González, 2014). En este sentido, el grupo de estudiantes, representado en tres niños, va construyendo comprensiones que se extienden y tocan otras formas de comprensión. Además de ser inductiva, esta investigación es de carácter es naturalista, que procura acercamientos de modo natural, intentando que la realidad se presente de la misma forma en la que los participantes la experimenten, sin limitarlos, ni condicionarlos.

Atendiendo a estas características, el método de investigación que adopta este trabajo es el estudio de casos, ya que permite investigar un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto de vida real, sobre todo, cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes (Yin, 1994). El estudio de caso pretende comprender el cómo o por qué se da la comprensión y los factores que influyen en dicho proceso. Este método, posibilita que las comprensiones emerjan para describirlas e iluminarlas a la luz de la teoría.

El estudio de caso, admite seleccionar una muestra determinada de estudiantes para llevar a cabo este estudio, su selección está ligada a aquellos casos que puedan brindar gran "rentabilidad" (Stake, 1999, pág. 14); para la presente investigación se seleccionan tres casos. Las interacciones se realizan, inicialmente en las clases de matemáticas con el fin de observar las diferentes formas de la comprensión.

Después de determinar el método de estudio que orienta este proyecto de investigación, se proponen las fuentes o instrumentos de recolección de datos. En este sentido, Yin citado en Martínez (2006) plantea la importancia de utilizar múltiples fuentes de datos y el cumplimiento del principio de triangulación para garantizar la validez interna de la investigación, por tal razón, los instrumentos de recolección de información que aplican para esta investigación son:

En primer lugar, el diario de campo, esta herramienta de recolección de datos permite al investigador "vaciar sus anotaciones, reflexiones, puntos de vista, conclusiones preliminares, hipótesis iniciales, dudas e inquietudes" (Hernández, Fernández, & Baptista, 2010, pág. 424). Seguido, se encuentra, la observacion participante, la cual en palabras de Corbetta (2003) es una técnica que conlleva a un contacto personal intenso entre el sujeto que estudia y el sujeto estudiado, además, el investigador observa y participa en la vida de los investigados. Por último, se utilizan las entrevistas que, según Stake (1999) permite ver aquello que no se ha percibido a través de la observación, por lo general confirman la descripción en alguna medida; Corbetta (2003) asegura que el investigador observa, escucha y pregunta, al preguntar utiliza la entrevista como instrumento.

La anterior ruta metodológica permite reconocer qué niveles de comprensión alcanzan los estudiantes, en la solución de problemas de tipo multiplicativo, en las diferentes dimensiones de la comprensión que plantea el marco conceptual de la Enseñanza para la comprensión, orientado bajo el modelo educativo Escuela Nueva- Fundación Volvamos a la Gente.

Resultados esperados.

Los niveles de comprensión en el que se inscribe cada estudiante de acuerdo a las dimensiones de la Enseñanza para la Comprensión: comunicación, métodos, propósitos y contenidos; se indagará a través del trabajo de campo y de los diferentes herramientas de recolección de información, se espera que estas comprensiones sean similares en algunas dimensiones y disimiles en otras, en este sentido los aprendizajes que construyan los estudiantes se darán a través del trabajo colaborativo, pero las comprensiones que de ella emerjan, serán individuales y se convertirán en el objeto de estudio de esta investigación.

Se espera que los problemas de tipo multiplicativo al contextualizarse con situaciones o actividades propias del cultivo del café como, la siembra, la recolección y la venta; así como la participación de los estudiantes con sus familias y sus compañeros en estas acciones, desarrollen comprensiones en la resolución de problemas de tipo multiplicativo y a su vez permitan afrontar de manera positiva la resolución de problemas de multiplicación y división en diferentes situaciones, escenarios o contextos.

Referencias y bibliografía

Castro, E. C. (1994). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa.* Granada-España: Universidad de Granada.

Colbert de Arboleda, V., & Vásquez Castro, L. N. (2015). *Escuela Nueva - Escuela Activa, manual para el docente.* Bogota: Fundacion Escuela Nueva Volvamos a la Gente.

Corbetta, P. (2003). *metodología y técnicas de investigación social.* España: Mac Graw Hill.

González Molina, J. D. (2014). *Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricutura del café.* Medellín: Universidad de Antioquia tesis de maestría.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigacion quinta edición.* México: McGRAW-HILL/INTERAMERCANA EDITORES, S.A. DE C.V.

Martínez Carazo, P. C. (2006). El método de estudio de caso. Estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y Gestion* , 165-193.

Ministerio de Educacion Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Medellín : Imprenta Nacional.

Ministerio de Educacion Nacional. (2012). *Manual para la formulacion y ejecucion de planes de educacion rural* . Bogota: Imprenta nacional.

Perkins, D. (1999). ¿Qué es la comprensión? En M. Stone Wiske, *la enseñanza para la comprensión. vinculación entre la investigación y la práctica.* (págs. 69-95). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de caso. Segunda edición.* Madrid: Edciones Morata.

Stone Wiske, M. (1999). *La enseñanza para la comprensión.* México: Paidós.

Yin, R. K. (1994). *Investigación sobre estudios de casos. Diseños y métodos. Segunda edición.* London: SAGE publication .

Vergnaud, G. (1990). *La teoria de los campos conceptuales.* (U.R. Descartes, & CNRS, Edits.) Recherches en didáctiques en mathématiques, 10(2,3) 133-170.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad.* Mexico: Trillas.

Vergnaud, G. (6 del 9 de 2016). segundo congreso internacional de la enseñanza de las ciencias y las matematicas (CIECYM). (M. R. Otero, & V. Llanos, Entrevistadores)

Comprensión del concepto de número natural en Preescolar

Maribel **Gil** Villegas
Universidad de Antioquia
Colombia
magilv3@gmail.com
Dora Mercedes **Bedoya** Vélez
Universidad de Antioquia
Colombia
dorabedoyav@gmail.com
Tanith Celeny **Ibarra** Muñoz
Universidad de Antioquia
Colombia
tanith2710@gmail.com

Resumen

La comprensión del concepto de número en el nivel Preescolar, es quien centra el interés de esta investigación, para lo cual, se retoman tres aspectos fundamentales, el primero es el número natural como concepto matemático, el segundo se refiere a la articulación con el Marco Conceptual Enseñanza para la Comprensión (EpC). Este marco brinda las herramientas para analizar cómo se presenta ésta desde una propuesta pedagógica de aula y el tercero es el uso de material reutilizable, elemento concreto, el cual cumple un doble propósito; permitirle al estudiante establecer relaciones cognitivas que lo lleven al número natural y para el docente investigador ser insumo de las observaciones de campo. La metodología, que plantea esta propuesta se enmarca en la investigación cualitativa, desde el enfoque hermenéutico, de tipo estudio de caso, con el propósito de encontrar explicaciones con relación a la pregunta sobre la comprensión del concepto matemático.

Palabras clave: educación, número natural, Preescolar, Enseñanza para la Comprensión, material reutilizable

Planteamiento del problema

Esta investigación centra la indagación en un área: las Matemáticas, específicamente en la comprensión del concepto de número natural, pues en dicho nivel es conveniente hacer acompañamiento desde la creación de ambientes que motiven al estudiante a pensar sobre el número y su relación con el contexto circundante, lo que posibilita la construcción de este objeto matemático.

Los dos hallazgos que justifican y dan relevancia de este proceso investigativo, son; primero, la observación en el aula de clase, que toma como referente el diagnóstico que se realiza al inicio del año escolar y el interés del docente investigador por aportar desde el Marco General de los Planes Educativos que con relación al fortalecimiento de la educación en primera infancia se vienen impulsando a nivel institucional y en segundo lugar, los aportes que brindan los referentes de calidad propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

Estos hallazgos se describen a continuación:

Observación en el aula

Al respecto en la Institución Educativa de Jesús, sede Camilo González, del municipio de Concordia, departamento de Antioquia (Colombia), los estudiantes de Preescolar, población objeto de estudio de esta investigación, participan al inicio del ciclo escolar de una evaluación diagnóstica; la cual se realiza desde cada una de las dimensiones del desarrollo (socio- afectiva, corporal, comunicativa, cognitiva, estética, espiritual, ética), con indicadores que refieren al documento Derechos Básicos del Aprendizaje (DBA), éstos se han instaurado en la malla curricular de la Institución Educativa. Específicamente, se amplían los resultados con relación a la dimensión cognitiva, la cual es prioridad, desde las necesidades del grupo de estudiantes y los intereses institucionales en relación con el fortalecimiento de la educación para la primera infancia.

A partir de la prueba se evidencia que la construcción y posterior comprensión del concepto de número natural, se presenta desde acciones como: organización de elementos en el espacio desde la intuición, nombrar elementos sin orden específico ni relación perceptual, realizar conteos usando la palabra número desde el reconocimiento social que tienen.

Otro elemento que se resalta de este proceso diagnóstico, está relacionado con las diferencias cognitivas presentes en este grupo de estudiantes, donde algunos nombran los elementos de un conjunto separando por una característica física, pero sin establecer relaciones de comparación entre ellos, es decir, al preguntar cuál de estas dos colecciones es mayor o menor, dan respuestas basados en la percepción visual desde la ubicación en el espacio de los conjuntos, sin relación directa con la cantidad, por el contrario, otros establecen correspondencias y orden mental a los objetos.

Las diferencias en el proceso de construcción del número natural son evidentes, mientras algunos estudiantes establecen orden espacial de los objetos y correspondencia biunívoca; relación uno a uno de las palabras número con los objetos nombrados, otros por su parte, realizan conteos recitando secuencias de palabras número y señalando más de una vez el mismo objeto, lo cual evidencia la pertinencia de implementar estrategias que incluyan material concreto al momento de realizar acompañamientos fundamentados en el proceso cognitivo de cada estudiante para la comprensión del concepto.

Referentes de calidad

A continuación, se explicitan algunos apartados de referentes de calidad, segundo aspecto que perfila esta investigación, que fundamentan la Educación Preescolar en el país.

Lineamientos Curriculares de Preescolar (1998). Este documento refiere el sentido y significado de la Educación Preescolar y la visión del niño desde las dimensiones del desarrollo, describe el proyecto pedagógico, como eje articulador de la teoría y práctica, en tanto que es un:

> […] proceso de construcción colectiva y permanente de relaciones, conocimientos y habilidades que se va estructurando a través de la búsqueda de soluciones a preguntas y problemas que surgen del entorno y la cultura del cual el grupo y el maestro hacen parte -el grupo investiga, explora y plantea hipótesis en busca de diferentes alternativas-. (MEN, 2008, p. 14).

En este sentido, el enfoque que desde la Educación Preescolar se ha planteado para este grado específico, remite a la búsqueda de respuestas en el contexto, donde el estudiante tiene una participación activa, que los lleva a encontrar caminos para la comprensión de conceptos específicos.

Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) Transición (2016). En los DBA, se reconocen las interacciones que establecen los niños con el mundo, con los otros y consigo mismos, por medio de experiencias y ambientes pedagógicos en los que está presente: el juego, las expresiones artísticas, la exploración del medio y la literatura. Estos elementos se hacen visibles en tres grandes propósitos:

> a. Las niñas y los niños construyen su identidad en relación con los otros; se sienten
>
> queridos, y valoran positivamente pertenecer a una familia, cultura y mundo.
>
> b. Las niñas y los niños son comunicadores activos de sus ideas, sentimientos y emociones; expresan, imaginan y representan su realidad.
>
> c. Las niñas y los niños disfrutan aprender; exploran y se relacionan con el mundo para comprenderlo y construirlo (MEN, 2016, p. 5).

La presente investigación, focaliza el discurso desde el último propósito, en el cual se explicita la necesidad que tienen los estudiantes de explorar, comprender y construir el mundo, para responder a situaciones de contexto, a partir de sus conocimientos y el uso de recursos que les permiten proponer diversas alternativas de solución.

Bases Curriculares para la Educación Inicial y Preescolar (2017). Este documento desarrolla los referentes técnicos que desde el Ministerio de Educación Nacional se han expuesto para la atención a la primera Infancia; la cual va desde los cero hasta los siete años de edad.

El estudiante de Preescolar se desarrolla de forma integral, explorando el mundo que lo rodea, creando situaciones en las que intercambia información desde sus capacidades, para tomar decisiones y poner a prueba lo aprendido.

Es por lo anterior, que todo proceso de aprendizaje que se articula a lo planteado para esta etapa del desarrollo, debe tener en cuenta las condiciones cognitivas y específicamente el paso del pensamiento concreto al simbólico, como ocurre con relación a la construcción del concepto de número natural, lo cual remite a los cimientos, a esa pregunta por el cómo, desde aquello que ellos verbalizan, para construir un aprendizaje dialógico, en donde a través de preguntas y respuestas se comprenda el proceso que se viene desarrollando.

Objetivo general

Analizar cómo comprenden estudiantes de Preescolar el concepto de número natural, en el Marco Conceptual de (EpC), mediante el uso de material reutilizable.

Objetivos específicos

• Describir los niveles de comprensión que presentan los estudiantes del nivel Preescolar, a partir del registro de observaciones durante el desarrollo de un proyecto de aula diseñado para la comprensión del concepto de número natural.

• Interpretar cómo comprenden los estudiantes de nivel Preescolar el concepto de número natural, utilizando material reutilizable en el desarrollo de un proyecto de aula.

• Detallar las explicaciones escritas y verbales dadas por los estudiantes del nivel Preescolar durante la realización de entrevistas semiestructuradas en relación con la comprensión del concepto de número natural.

Marco Referencial

Concepto de número natural

Piaget (1991), buscó con sus investigaciones dar respuesta a preguntas epistemológicas sobre el conocimiento, llevándolo a estudiar los orígenes del mismo, en el desarrollo del pensamiento en los niños, conceptualizando de esta forma cómo piensan y solucionan situaciones de la vida cotidiana.

El número, desde esta teoría es definido como una estructura mental que "construye cada niño mediante una aptitud natural para pensar, en vez de aprenderla del entorno" (Piaget, citado por Kamii 2000, p. 17). El número es el resultado de dos tipos de relaciones que el niño establece entre objetos, de orden y de inclusión jerárquica.

Además, Piaget (1991) realizó una distinción entre tres tipos de conocimiento, uno es el físico, relacionado con los elementos físicos, lo visible y tangible, el segundo es el social o convencional, representado en hechos y fechas especiales que se dan en sociedades específicas, y el tercero es el conocimiento lógico- matemático, el cual es construido por cada niño, la mente es quien realiza las relaciones y diferencias entre los elementos físicos, este proceso es interno.

En este mismo sentido, para estructurar el conocimiento físico y lógico-matemático, el niño realiza dos tipos de abstracción, la abstracción empírica y reflexionante.

Según la teoría de Piaget, la abstracción del color de los objetos es de naturaleza muy distinta a la abstracción del número. En realidad, son tan diferentes, que se designan con términos distintos. Para la abstracción de las propiedades de los objetos, Piaget usó el término abstracción empírica (o simple). Para la abstracción del número usó el término abstracción reflexionante (abstraction réfléchissante) (Piaget, citado por Kamii, 2000, p. 22).

Teniendo en cuenta lo anterior, el niño se concentra en una sola característica de los objetos en la abstracción empírica, olvidando las otras, por su parte en la abstracción reflexionante, involucra relaciones entre objetos para establecer orden mental e inclusión jerárquica, para dar como síntesis el número, para esto pasa del conocimiento del objeto concreto abstracción empírica, empleando nociones lógicas de clasificación, seriación y correspondencia lo que le permite al estudiante establecer relaciones de inclusión jerárquica de clases y de orden con los elementos abstraídos, significación que se establece a partir de lo simbólico e interno de la abstracción reflexionante, coordinado por la mente, a partir del desarrollo del pensamiento lógico matemático.

La comprensión del número, no es un proceso innato, como afirma Kammi (2000), el niño lo construye de forma individual, por la capacidad que tiene para pensar y las relaciones que establece con el mundo que lo rodea a través de la experiencia, esta investigación pretende integrar las consideraciones de la teoría piagetiana al reconocer que establece la evolución del desarrollo infantil, de las relaciones lógicas y cognitivas que están involucradas en la comprensión del número, además reconoce los aportes didácticos de Kamii en la propuesta de enseñanza la cual será articulada al Marco Conceptual de (EpC).

Será entonces, el Marco conceptual de Enseñanza para la Comprensión (EpC), el que fundamenta desde la integración de la teoría, que sirve de base para el análisis de la comprensión del concepto de número natural en Preescolar.

Marco Conceptual Enseñanza para la Comprensión (EpC)

El Marco Conceptual de Enseñanza para la Comprensión (EpC), en la compilación que realiza Stone (1999), busca promover y reconocer los procedimientos básicos que el docente tiene en cuenta al momento de planear una intervención en el proceso de enseñanza. Este marco desarrolla una propuesta fundamentada en tres componentes: Elementos, Niveles y Dimensiones. A continuación, se presenta esta descripción:

Elementos de la comprensión

Este componente desarrolla cuatro Elementos de Comprensión, que se describen a continuación de forma separada, pero que se articulan en una misma práctica, ya que “en rigor, cada uno de los elementos invoca aspectos de los demás” (Stone,1999, p. 96).

Tópicos generativos. Estos hacen referencia a los temas o ideas, las cuales deben ser motivantes, interesantes y accesibles, buscando establecer relaciones de comprensión.

Metas de comprensión. Después de elegir un buen tópico, se pasa a plantear las metas, las cuales guían el proceso a seguir, enfocando hacia el lugar que se dirige el proceso formativo, delimitando el campo conceptual.

Desempeños de comprensión. En este se desarrolla toda la propuesta de intervención, las actividades dinámicas, que han sido pensadas para el aprendizaje desde las inteligencias múltiples (Gardner, 1995) y la progresión que el estudiante realiza al pasar una a una por las categorías de desempeño para la comprensión.

Evaluación diagnóstica continua. Esta es pública y establecida desde el inicio del proceso formativo, se da en múltiples direcciones: el docente a los estudiantes, estudiantes con estudiantes, el proceso de autoevaluación y evaluación con expertos.

Niveles de comprensión

En (EpC), los estudiantes van pasando por diferentes niveles, que los llevan del ingenuo, al novato, para pasar al aprendiz y finalmente maestría, cada trabajo de comprensión implica un proceso, por lo tanto, se puede ser novato en cualquier área del saber y contar al mismo tiempo con una comprensión avanzada en otro campo determinado.

Dimensiones de comprensión

Además, en la compilación de Stone (1999), se proponen cuatro dimensiones: contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación, que permiten hacer la definición de comprensión más específica, ya que facilitan el análisis del desarrollo progresivo de cada estudiante. Dentro de cada dimensión, se establecen los cuatro niveles de comprensión: ingenuo, novato, aprendiz y maestría.

De acuerdo con lo anterior, esta investigación busca articular el Marco de la (EpC) con el objeto de estudio planteado: concepto de número natural, retomando sus tres componentes. Desde cada una de las dimensiones se analizará el nivel de comprensión alcanzado por los estudiantes, y se describirán al interior de cada una de estas cuál sería el nivel ingenuo, novato, aprendiz y maestría en la comprensión del concepto de número natural.

A partir de los elementos se implementa un proyecto de aula para el nivel Preescolar, pensando en la edad y por ende en el nivel de desarrollo cognitivo y de lenguaje de los estudiantes, se propone el uso de material reutilizable como elemento mediador para la simbolización del proceso lógico y la interpretación de la comprensión.

Material reutilizable

Los estudiantes de Preescolar se encuentran en el proceso de simbolización del lenguaje y del conocimiento matemático, expresar lo que piensan y sienten se hace posible a través de las actividades rectoras: arte, juego, literatura y exploración del medio. El MEN (2017), relaciona esta última actividad con el contexto, la manipulación que el estudiante realiza de los materiales que se encuentran disponibles en su entorno, le permiten leer la realidad y apropiarse de la herramienta cultural que los rodea.

Si bien es cierto que "el niño aprende a partir de la acción sobre los objetos" (Piaget y Inhelder, 1975, p. 56), no es la manipulación como tal, la que contribuye al desarrollo del pensamiento matemático, sino la acción mental sobre estos elementos, la cual se estimula al momento de combinar diversidad de materiales para establecer distintas relaciones lógicas.

El material reutilizable es un mediador del conocimiento, que facilita la observación del docente, el cual infiere a través de las acciones del estudiante la forma que actúa sobre los objetos, para analizar e intervenir en orden de influir en el proceso de razonamiento y así avanzar desde lo que sabe hacia lo que pretende comprender.

Metodología

Metodología cualitativa

La Investigación social de corte cualitativo, desde los planteamientos de Sandoval (2002), es aquella que "Se interesa por lo particular desde una mirada interna." (p.19) Se desarrolla en contextos reales, en este caso, la Institución Educativa de Jesús, sede Camilo González, desde las interacciones sociales que establecen los estudiantes.

En este mismo sentido, la comprensión del concepto de número natural, se da desde la interacción social que involucra a diferentes actores: familiares, sociales y escolares, dinámicas reales que pretenden ser analizadas e interpretadas.

Enfoque hermenéutico y estudio de caso

De acuerdo con Sandoval (2002), la investigación tiene en cuenta el enfoque hermenéutico, ya que busca interpretar y comprender la acción de los actores, mediante procesos libres, donde el investigador es un actor participante, que observa la realidad para reconstruirla desde la flexibilidad, sin codificaciones previas, ni interpretaciones a priori, en escenarios reales donde se posibilita el diálogo.

Contexto, participantes e instrumentos.

La Institución Educativa de Jesús, se encuentra en el municipio de Concordia, ubicado al suroeste de Antioquia (Colombia). Una de las sedes periurbanas de la Institución, es la sede Camilo González, la cual ofrece educación formal hasta el grado Noveno, en la modalidad de Escuela Nueva; en este contexto se desarrolla la presente experiencia investigativa.

La población objeto de estudio son los estudiantes del nivel de Preescolar, éstos se encuentran entre los cinco y seis años de edad. El trabajo de campo se realiza con el grupo de estudiantes completo y para el estudio de caso, se seleccionan 4 estudiantes, con el propósito de analizar a profundidad la comprensión, ya que como afirma Stake (1999, p.11) "[…] es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes".

Es así, como los instrumentos que se han seleccionado como pertinentes para indagar la comprensión del concepto de número en nivel Preescolar son: observación y la entrevista semiestructurada.

Observación. Es el elemento que permite analizar la comprensión de un caso en particular, desde este instrumento que es registrado en un diario de campo, el investigador realiza sus interpretaciones de la realidad circundante en que está inmerso.

La interpretación es una parte fundamental de cualquier investigación. Podríamos discutir con quienes sostienen que en la investigación cualitativa hay más interpretación que en la cuantitativa -pero la función del investigador cualitativo en el proceso de recogida de datos es mantener con claridad una interpretación fundamentada. Los investigadores sacan sus conclusiones a partir de las observaciones y de otros datos (Stake, 1999, p. 21).

Entrevista semiestructurada. En esta misma línea del discurso, Stake (1999) propone que la entrevista "es el cauce principal para llegar a las realidades múltiples" (p. 63). Dando pertinencia al uso de la entrevista semiestructurada, para el análisis de casos particulares, estableciendo preguntas abiertas y cerradas que en el proceso permitan analizar la comprensión que cada estudiante está construyendo.

Teniendo en cuenta la información recolectada con los instrumentos mencionados y que la técnica empleada es el estudio de casos, el análisis de la información se realiza teniendo en cuenta los procesos de codificación y categorización de la información de los cuatro casos particulares, para cada caso se presenta el análisis en coherencia con los códigos y categorías que emergen en el desarrollo del trabajo de campo, realizando una descripción detallada de los procesos de comprensión del concepto de número en los estudiantes del nivel Preescolar.

Resultados esperados

La presente investigación articula el Marco de Enseñanza para la Comprensión (EpC), desde la implementación de un proyecto de aula con los estudiantes del nivel Preescolar buscando en primer lugar, interpretar sus comprensiones, teniendo como mediador desde dos perspectivas el material reutilizable, como elemento concreto que le permitan al estudiante establecer relaciones desde la abstracción empírica y reflexionante y al docente investigador como insumo de observación, para reconocer como el estudiante resuelve las situaciones que se presentan (intuitiva, espacial o lógica) y analizar desde esta perspectiva la comprensión del concepto matemático. En segundo lugar, describir los niveles de comprensión que éstos presentan con respecto al concepto de número natural, teniendo como apoyo el registro de las observaciones en un diario de campo. Por último, se detallarán sus explicaciones escritas y verbales, para obtener como resultado el análisis de la forma como los estudiantes se enfrentan a diferentes requerimientos lógicos y cognitivos propios de la comprensión del concepto de número natural, utilizando material reutilizable durante el desarrollo de un proyecto de aula que incluye los componentes del marco de (EpC).

Referencias y bibliografía

Gardner, H. (1995). *Inteligencias Múltiples. La Teoría en la Práctica*. Barcelona: Paidós.

Kamii, C. (1995). *El número en educación preescolar.* Madrid: España

________ (1996). La teoría de Piaget y la enseñanza de la aritmética. En C. Kamii, Piaget los mecanismos del desarrollo y los aprendizajes escolares (p.109-119). Madrid: Perspectivas.

________ (2000). *El niño reinventa la aritmética. Implicaciones de la teoría de Piaget.* Madrid: España.

Ley N° 1098. Código de la Infancia y la Adolescencia, Bogotá, Colombia, 8 de noviembre de 2006.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares Preescolar*. Bogotá: Colombia

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas.* Bogotá: Colombia

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá: Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *DBA Preescolar*. Bogotá: Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Bases Curriculares. Para la Educación Inicial y Preescolar*. Bogotá: Colombia.

Piaget, J. (1991). *Seis Estudios de Psicología. Barcelona*: España. Labor S.A.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1975) Psicología del niño. Madrid: Ediciones Morata.

Sandoval, C (2002). *Investigación Cualitativa*. Bogotá: Colombia.

Stake, R. (1999). *Investigación con Estudio de Caso*. Madrid: Morata

Stone, M. (comp). (1999). *La Enseñanza para la Comprensión: vinculación entre la investigación y la práctica.* Buenos Aires: Paidós.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Un Modelo de Enseñanza para la adquisición de las nociones de los números naturales con base en von Neumann

María Leticia **Rodríguez** González
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
leticia.rodriguez@cinvestav.mx
Eugenio **Filloy** Yagüe
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
smmeef@aol.com
Bernardo **Gómez** Alonso
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia
España
bernardo.gomez@uv.es

Resumen

Este proyecto de investigación tiene como propósito diseñar un Modelo de Enseñanza, basado en la construcción de los números naturales de von Neumann. Los Modelos Teóricos Locales (MTLs) y sus cuatro componentes, son el referente teórico y metodológico para identificar y comprender las dificultades que tienen los alumnos de 6 a 9 años, con el uso de la lógica de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) que se involucran; así como los procesos cognitivos que se promueven con este Modelo de Enseñanza. En este espacio de comunicación la atención se centra en el componente de Comunicación: la producción de sentido para la construcción de significado de las acciones derivadas de las actividades realizadas con los números naturales y sus operaciones. Se presentan los primeros acercamientos al análisis e interpretación de la experimentación, misma que servirá de diagnóstico, para hacer las modificaciones correspondientes al Modelo inicial.

Palabras clave: Modelo de Enseñanza, Modelo de Comunicación, Números Naturales.

Introducción

El aprendizaje de los números forma parte de los procesos de la vida cotidiana; también es una prioridad curricular en los primeros años de escolarización de los niños de nuestra nación. En este sentido, en México el modelo de enseñanza que propone el Plan de Estudios, precisa que "…el estudio de la matemática considera el conocimiento y uso del lenguaje aritmético, algebraico y geométrico, así como la interpretación de información y de los procesos de medición." (SEP 2011, p. 53) El libro de texto oficial para el alumno Desafíos Matemáticos (SEP, 2015), prioriza el tratamiento cardinal de los números como comparar e igualar conjuntos;

y sólo hay dos lecciones que hacen referencia al sentido ordinal, en la primera “Carrera de autos” se les pide que pinten de diferente color de acuerdo con el lugar de llegada a la meta; en la otra lección “Animales en orden” se les pide que coloquen figuras de acuerdo con el orden de selección: conejo – primero, vaca – segundo,…

La estrategia pedagógica propuesta para trabajar los “Desafíos Matemáticos” (SEP, 2015), sugiere que a los niños se les planteen como retos, organizando diferentes formas de interacción; sin embargo, lo que se observa es que los maestros los abordan como lecciones o ejercicios al estilo tradicional, de forma individual e incluso los dejan de tarea en casa, los calificándolos y asignándoles mediciones numéricas, rompiendo el sentido pedagógico de la evaluación como proceso de valoración y análisis para revisar y consensar los procedimientos más factibles y económicos e identificar las dificultades que tuvieron y cómo lo resolvieron. Cuando los profesores no siguen la secuencia gradual de los libros de texto “Desafíos Matemáticos”, rompen la progresión conceptual. Otra de las prácticas comunes que se observan es el abuso de mecanizaciones que van desde secuencias numéricas orales, escritas, ejercicios fotocopiados de libros de matemáticas que no tienen coherencia ni relación con el enfoque didáctico de la asignatura de matemáticas.

Por lo que, el interés de esta investigación está centrada en identificar las dificultades que tienen los niños, cuando se trabaja con ellos un modelo de enseñanza con la estructura formal de von Neumann y que pueda servir de base para la construcción del pensamiento aritmético. El único trabajo que se ha implementado en este sentido, es la propuesta que se viene explorando con niños preescolares con el trabajo de Maravilla (2011) y que ahora se pretende continuar en una nueva etapa con niños de los tres primeros grados de educación primaria. Se reitera, que un modelo de enseñanza con estas características nunca se ha puesto en práctica ni ha sido objeto de investigación. La estructura aritmética que se propone es la lógica de construcción de los Sistemas Matemáticos de Signos involucrados en la construcción de los números naturales, sus propiedades y operaciones.

Con el marco teórico de los Modelos Teóricos Locales (MTLs) (Filloy, Rojano y Puig, 2008) y sus cuatro componentes este proyecto de investigación se ha estructurado de la siguiente manera: a) *Modelo Formal* de John von Neumann precisa una lógica de construcción de los números naturales a partir del orden, con los procesos de iteración y recursividad, ir construyendo el sucesor a partir del antecesor; b) *Modelo de Cognición* recupera las aportaciones de Piaget (1984) y su relación con la lógica en la construcción de número y las contribuciones de la psicología soviética representada por Galperín (1976) y Talizina (2001) con la Teoría de las Acciones; c) *Modelo de Comunicación* implica a los usuarios competentes para usar los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) involucrados en las nociones de número y; d) Diseñar un *Modelo de Enseñanza* que traslade el modelo formal a un modelo con el uso de material concreto y la recta numérica.

La metodología de la investigación es de corte cualitativo, que se desarrolla en dos momentos: a) observación experimental (diagnóstico con la participación de 3 grupos de 1º, 2º y 3º de tres escuelas primarias públicas de la Ciudad de México. Con el análisis de estos primeros acercamientos a la experiencia empírica, se pretende tener elementos para seleccionar a los niños que participarán en el estudio de casos y entrevista clínica. Lo que permitirá tener elementos a partir de la triangulación del reporte de la observación con la guía teórica y metodológica de los MTLs para continuar con lo que se propone en la segunda parte de la investigación: el rediseño del Modelo de Enseñanza. Para este texto, se presentan sólo algunos ejemplos de interpretación desde el modelo de comunicación en la producción de sentido para construir significados matemáticos.

Marco Teórico y Metodológico: Modelos Teórico Locales

Los MTLs son un marco teórico y metodológico que toma en cuenta las dificultades que se producen en las aulas cuando se plantean diferentes tipos de actividades que tienen que ver con la producción de sentido de mensajes matemáticos y su decodificación; su interés está en la observación en materia educativa. La observación empírica es la principal herramienta para comprender los procesos cognitivos que se articulan en la competencia formal y pragmática. Lo local profundiza en el análisis de un fenómeno específico, el cual es analizado a la luz de las cuatro componentes: formal, cognitivo, enseñanza y de comunicación. Los diseños experimentales tienen la intención de analizar la información que permita comprender las dificultades a las que se enfrentan los actores en situaciones problemáticas para observar las interacciones y contraposiciones de las competencias (cogniciones) que se ponen en juego en el espacio textual; cómo se van construyendo los intertextos a través del modelo de enseñanza específico con un soporte en el modelo formal y qué competencias comunicativas usan para decodificar y codificar los mensajes, así como las dificultades o posibilidades tienen para realizar un esbozo lógico semiótico de la situación problemática. La pregunta que guía esta investigación es:

¿Qué dificultades tienen los niños en la adquisición de las nociones de la estructura aritmética a partir de la construcción de los números naturales como base el modelo formal de von Neumann?

Para este propósito se han diseñado los siguientes objetivos:

- Diseñar un modelo de Enseñanza que traslade el Modelo de la Matemática Formal a un Modelo Matemático Concreto; sin intervenir ni obstaculizar la estructura curricular, con la finalidad de conocer los procesos de generalización y comunicación con contenido matemático, a través del estudio de casos como estrategia metodológica.
- Identificar y comprender las dificultades que tienen los niños en los dos primeros ciclos de educación primaria, en la adquisición de las nociones de la estructura aritmética a partir de la construcción de los números naturales, con base en el modelo de von Neumann y a través del desarrollo de procesos de iteración y recursividad; teniendo como referente teórico y metodológico los Modelos Teóricos Locales.

Estructura de este MTL para la construcción de los números naturales

Modelo de Competencia Formal. En este componente se requiere de un referente matemático abstracto, que permita describir "...las situaciones observadas por medio de un SMS más abstracto que permita decodificar todos los textos que se producen en un intercambio de mensajes en el que los actores tienen diversos grados de competencia de uso de los SMS utilizados..." (Filloy, 1999, pág. 7). Para este trabajo se retoma la construcción de los números naturales propuesta por J. von Neumann, desarrollado por Hamilton & Landin (1961) como la base teórica - conceptual para diseñar un modelo concreto, con el agregado de la recta numérica como un recurso didáctico en la construcción de los números a partir del orden, retomada de la aportación que hace Maravilla (2011) para darle sentido al orden de construcción de los números naturales, así como el uso de bolsas como contenedores de los conjuntos de elementos.

Modelo de Cognición. Se pretende comprender el desarrollo de los procesos cognitivos de la percepción, atención y la memoria a corto, mediano y largo plazo, para desarrollar los procesos conceptuales que realizan los niños en la construcción de los números naturales y las nociones de la estructura aritmética.

Modelo de Enseñanza. Es una colección de textos, en que la secuencia de actividades constituye espacios textuales (Filloy, Rojano & Puig, 2008, p. 129), para generar y modelar situaciones, el lenguaje va de concreto a abstracto, con códigos intermedios, que les permite gradualmente desarrollar habilidades matemáticas para resolver distintas situaciones o problemas. Estas habilidades matemáticas van desde los conocimientos intuitivos que ya poseen, sintácticas y semánticas que la experiencia escolar y cognitiva les va aportando. Las primeras y las segundas en nuestro caso hacen uso de la operatividad aritmética y mientras que en las últimas van acompañadas del sentido y uso en diversas situaciones problemáticas y escolares, como de la vida cotidiana. El diseño de las actividades del Modelo de Enseñanza, se realizó de acuerdo con la estructura del capítulo dos, presente en Hamilton & Landin (1961, págs. 74 – 115), quienes desarrollan el modelo formal de la construcción de los números naturales de von Neumann. La secuencia se organizó en tres etapas:

1ª Construcción de los primeros números naturales. a) el Modelo Formal se fundamenta en las definiciones de los números naturales del cero al nueve; sucesor; número natural y las relaciones de orden. b) Modelo de enseñanza – actividades concretas: construcción de los números naturales empezando por cero usando bolsas como contenedores (conjuntos), cubos, cuadrados, puntos, el cambio (construcción de la nueva unidad 10) y la recta numérica.

2ª Adición y multiplicación a partir de la construcción de las tablas de Pitágoras. a) Modelo Formal: definiciones de las relaciones de orden, conteo (correspondencia uno a uno) y las operaciones de suma, resta y multiplicación a partir de la construcción de las tablas de Pitágoras de suma y multiplicación. b) Modelo de Enseñanza: Secuencias numéricas, uso de la calculadora, saltos de la rana “adelante” y “atrás” en la recta numérica, construcción de las tablas de Pitágoras, contamos en diferente orden una colección.

3ª Relaciones de orden, adición, multiplicación y propiedades de las operaciones. a) Modelo Formal: definiciones de relaciones de orden, conteo, multiplicación como suma iterada, como producto cartesiano y reparto. b) Modelo de Enseñanza: Tiro al blanco, el Boliche, El artesano (operaciones de resta), los payasos (multiplicación).

Modelo de Comunicación. De acuerdo con Filloy, Puig y Rojano (2008, págs. 4 - 6) la matemática educativa se ocupa de comprender y entender cómo son los procesos de significación y comunicación que se generan en los espacios educativos, en nuestro caso, actividades relacionadas con la construcción de los números naturales. El referente que se retoma es la conceptualización del Sistema Matemático de Signos, así como la construcción de conceptos semióticos provenientes de Peirce y su relación triádica, para identificar y comprender la lógica de uso que siguen los niños en la construcción del SMS involucrados en la construcción de los números naturales, para producir sentido y significación, que les permita llegar a la abstracción.

Lógica de construcción del significado. Para fundamentar esta conceptualización los Modelos Teórico Locales (Filloy, Rojano y Puig 2008) se apoyan en la semiótica de Peirce, quien identifica en el signo y su doble y triple dimensión: acto como acción y representación; así como su relación tríadica (signo, objeto e interpretante) en la cual el interpretante (cognición) va a jugar un papel fundamental, para construir procesos de significación. Se trata de un

"...*Interpretante Dinámico*, pensamiento-signo u hombre-signo. Sólo este sujeto-significante completa una explicativa tríada genuina y permite un enfoque no dicotómico del tipo <<significado-significante>>" (Peirce 1987, pág. 11)

Signo y Símbolo. Para Peirce los procesos de significación que realiza el interpretante le lleva a generar tres premisas: el signo es una relación tríadica con la actuación del interpretante; está relacionado con la cognición "Es que la palabra o signo que el hombre usa es el hombre mismo." (Peirce, 1987, p. 8); la relación tríadica del signo no es arbitraria, es la relación entre el signo (representamen), el objeto y el interpretante. El representamen es el fundamento de las ideas, es el objeto que representa al signo, son los interpretantes quienes construyen el sentido y la significación a partir de la tríada signo – objeto – interpretante.

La semiótica se articula con las condiciones de verdad, "…como una teoría de la referencia y una teoría de la significación." (Peirce, 1987, pág. 9). Este proceso de significación se posibilita con la participación del interpretante. Entonces podemos afirmar que un signo y la cosa significada, son producto de la cognición producida en la mente. Siguiendo esta lógica de construcción, Peirce refiere como relación triádica: el signo como ícono es la relación del signo y la cosa.

Abducción, inducción, deducción. - En este planteamiento Peirce, conlleva a identificar otra tricotomía: los procesos de *inducción, abducción y deducción*; en el primero la *inducción* permite comprender los hechos homogéneos para clasificar, pero no explicar, busca los hechos empíricos para demostrar, prueba experimentalmente sus hipótesis, que a su vez le sugiere otras hipótesis, opera desde lo simbólico y su aproximación a lo real es a través de la verificación de sus resultados. "Una Inducción es (…) una verificación experimental de una predicción general,… " (Peirce 1987, pág. 259); mientras que con la *abducción* se desarrolla la inferencia hipotética, a partir de la consideración de los hechos construye hipótesis, establece un puente de lo real a lo simbólico; es decir, es una transcripción de las palabras en signos, símbolos, este razonamiento permite discriminar premisas verdaderas o falsas, es la base del razonamiento analítico, para formular hipótesis y conjeturas explicativas, con la finalidad de establecer su *falsabilidad,* es decir, como posibilidad de que una proposición que puede ser negada, entonces una

> … Abducción es un método para formar una predicción general sin ninguna seguridad positiva de que tendrá éxito, tanto en el caso especial como de manera usual, y su justificación es que es la única esperanza posible de regular nuestra conducta futura de manera racional,… (Pieice 1987, 259);

y la tercera la *deducción,* consolida la habilidad para razonar de lo general a lo particular.

> Una *Deducción* es un argumento cuyo Interpretante representa que éste pertenece a una clase general de posibles argumentos precisamente análogos, que son tales que a la larga, dentro de la experiencia, la mayor parte de aquellos cuyas premisas son verdaderas tendrán conclusiones verdaderas. Las Deducciones son o *Necesarias* o *Probables*. (Peirce 1987, pág. 258)

El proceso de *abducción* implica un uso correcto de la lógica de los SMS, sus códigos y sus reglas convencionales, artefactos lingüísticos que se emplean en una comunidad matemática. Pero también los sujetos usan metacódigos que constituyen "… una colección de instrumentos discursivos y semióticos heterogénea y divergente que dan cuenta de la <masa de actividades de significación y comunicación que en la práctica acompañan el primer modo (formal y rigoroso) de presentar las matemáticas>." (Filloy, 1999, p. 63) Entonces el interés se centra en la semiótica, como el estudio de los signos en su relación triádica y el papel del interpretante, que es el sujeto de la cognición para producir sentido y significación. "Para Peirce los pensamientos son signos, la mente es un signo (…) el hombre mismo es un signo" (Peirce 1987, pág. 8).

Con estos referentes, se pretende comprender la complejidad que implica la estructura lógica de los SMS involucrados en la construcción de los números naturales, los procesos intermedios que usan los niños para la producción de sentido y significación a las actividades y acciones que se les están proponiendo.

Texto e intertexto matemático. Los textos matemáticos se conforman por un sistema de signos con una estructura formal, que son interpretados por los sujetos que los usan y conceptualizan, a partir de ciertos códigos para comprenderlos. Filloy (1999, pág. 63) recupera la aportación de Javier Lorenzo "la caracterización del texto matemático (...) va a estar en el modo de emplearlo y en el modo por el cual se le da un referente o contenido semántico posterior". Argumenta que en matemática educativa una semiótica de las matemáticas implica centrarse en los sistemas de significación y los procesos de producción de sentido, porque lo que se va a "...calificar de <matemático> no es sólo un tipo particular de signos, sino determinados sistemas de signos." (Filloy 1999, págs. 63 y 64). En el aula, los alumnos y maestros producen textos cuando se está realizando la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas, interactúan a través del sentido y como producto del proceso de significación; dichos textos no son producto del lenguaje matemático (filloy 1999, pág. 64), "...sino el resultado de procesos de lectura/transformación hecho sobre un expacio textual..."

Lógica de uso de los Sistemas Matemáticos de Signos involucrados en construcción de los Números Naturales. Nuestro interés para comprender el uso de la lógica de los SMS está centrado en la realización de actividades sobre los números naturales, apoyándonos en el uso de algoritmos y de los SMS que usan los niños para poder observar lo que llevan a cabo en los procesos de construcción de los mismos. Es común que en la enseñanza se proponga una manera de construir y operar con los números usando los algoritmos convencionales, para lo cual los alumnos usan sus dedos, objetos o calculadoras. Sin embargo, en este punto es necesario precisar que nuestro interés es comprender los modos de significación, pues lo matemático está en los sistemas no en los signos (Filloy 1999, p. 63). Así los SMS se constituyen "…como una herramienta de análisis de los textos que producen los alumnos" (Filloy 1999, p. 63), cuando están construyendo los números naturales con los procesos de iteración y recursividad, para operarlos usando los algoritmos correspondientes, para dar sentido a lo que están haciendo y como los están usando, en situaciones de enseñanza. Cuando los

> …Sistemas Matemáticos de Signos y su código correspondiente, cuando existe una posibilidad convencionalizada socialmente de generar la función de signo (mediante el uso de un functor (…) incluso cuando las correlacionales funcionales se han establecido en el uso de artefactos didácticos en una situación de enseñanza con la intención de que sean momentáneos. Pero también se deben considerar los sistemas de signos o estratos de sistemas de signos que los alumnos producen para dar sentido a lo que se les presenta en el modelo de enseñanza, aunque pueden estar guiados por un sistema que no ha sido socialmente establecido" (Filloy, Rojano y Puig, 2008, pág. 7).

Primeros acercamientos de interpretación de la experiencia empírica con el Modelo de Enseñanza

En los fragmentos de la experiencia empírica que presentamos a continuación se pretende interpretar a la luz del modelo de comunicación los procesos de producción de sentido y significación que van desarrollando los niños a partir de las actividades que se les presentan.

Alumnos de 6 – 7 años (1º grado). En este fragmento, los niños usan la *inducción* para producir sentido a las actividades de recursividad en la construcción de los primeros números naturales, llamándole "construído" a la construcción e inclusión de todos los números antecesores, usando su *memoria* operativa.

M: (...) ¿Quién más le falta al tres? (...)
Ns: El dos, el dos.
M: El dos. Pero el dos ¿Cómo debe de estar?
Ns: Construido.
M: Con el uno y el cero. (...) Pero ¿Qué le falta aquí al dos? (...)
E: El uno.
M: No, al dos ¿Qué le falta?
Ns: El cero.

Alumnos de 7 – 8 años (2º grado). Los niños pudieron usar su *inferencia analítica* para describir el tamaño de la bolsa (contenedora – conjunto) correspondiente al número 10.

M: ¿Hubieran imaginado que dentro del número nueve hay todos estos números?
Ns: Nooo! ¡Está bien gordo! – otro alumno expresa con asombro*:*
N_1: y va ser más gordo que nunca, ¿imagínate el diez?
N_2: Se tendría que tener una bolsa de la basura para el cien.

Alumnos de 8 – 9 años (3º grado). Los niños de este grado escolar ya tienen mayor experiencia cognitiva y académica, implementaron un *recurso intermedio* (palabra "pasajero") para dar cuenta del proceso de recursividad; lo que les permitió producir procesos de sentido y significación a todo el proceso:

M: Para que yo le pueda poner el uno ¿qué debe tener?, ¿cómo está? (se les muestra una bolsa de hule transparente vacía)
Ns: Vacía.
M: No puede ser el uno. Es el uno hasta que yo lo meta.
N: Lo meto (el niño introduce la bolsa del cero en la bolsa contenedora del uno).
M: Ahora si es el uno.
N: ¡Hasta que entre el pasajero!
M: ¡Hasta que entre el pasajero! ¡Muy bien!

Discusión final y continuidad en la investigación

El diseño experimental y el análisis efectuado ha permitido identificar que la dificultad se tuvo en un principio con el proceso recursivo, constituyó una fortaleza cuando un alumno encontró una manera de nombrar el proceso: "pasajero". Los niños estaban atentos y usaron su memoria a corto plazo, centrando su atención en la construcción y no en la secuencia oral o el numeral. Le dieron sentido a la iteración $n + 1$; usaron procesos *abducctivos* para transcribir con sus palabras el sentido recursivo en la construcción de cada número. Logrando con ello un uso correcto de la lógica de los SMS, lo que permitió la construcción de los siguientes números, pues estaban atentos para no omitir algo cada proceso recursivo para el siguiente número, auxiliándose en todo momento de la simbolización que hicieron al usar la palabra "pasajero" y en el caso de los niños de grados inferiores usaron la palabra "construido". La *inducción* y *deducción* les permitió explicar y comprobar sus hipótesis durante el proceso de la construcción, con lo que fueron consolidando argumentos para asegurar que el proceso se está realizando correctamente. Para ello, la atención estuvo presente al activar los receptores para seleccionar la información que ya tenían en la construcción subsecuente. La memoria operativa les permitió pasar a una memoria a largo plazo.

Esta es la primera fase de la investigación experimental, en donde el análisis que se está realizando de la observación, constituye las bases del diagnóstico para seleccionar a los niños que participarán en la entrevista clínica como estudio de casos, para poder confrontar los resultados con la observación experimental y tener elementos para poder rediseñar el modelo de enseñanza.

Referencias y bibliografía

Filloy Yagüe, E. (1999). *Aspectos Teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy Yagüe, E. Rojano Ceballos, T. & Puig Espinosa, L. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*. USA: Springer.

Galperín Yakovlevich, P. (1976). *Introducción a la Psicología: un enfoque dialéctico*. España: Pablo del Río Editor.

Hamilton, N. & Landin, N. (1961). *Set Theory and The Structure of Arithmetic*. Boston, Usa: Allyn and Bacon, Inc.

Maravilla Cruz, A. (2011). *El orden y el conteo en la construcción de los números naturales con el modelo de John von Neumann en niños preescolares*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Piaget Fritz, J. & Inhelder, B. (1984). *Psicología del niño*. España: Morata.

Peirce Sanders, Ch. (1987). *Obra Lógico Semiótica*. Madrid: Taurus Ediciones.

S.E.P. (2011). *Plan de Estudios*. México: Secretaría de Educación Pública.

S.E.P. (2015). *Desafíos Matemáticos*. México: Secretaría de Educación Pública.

Talizina Fiódorovna, N. Comp. (2001). *La formación de las Habilidades del Pensamiento Matemático*. México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Fracción como reparto.
Una experiencia en el aula con GeoGebra.

Nathalia **Moreno** Bermúdez
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
inmorenob@upn.edu.co
María Fernanda **Castro**
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
mfcastros@upn.edu.co
William **Jiménez**
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
williamajg@hotmail.com

Resumen

Este documento presenta una experiencia de aula en la que interviene la tecnología digital en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la cual tuvo lugar en el marco del seminario "Profundización en Matemáticas Elementales" del programa Maestría en Docencia de la Matemática cohorte 2018-I de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) de Bogotá. El objetivo de este documento, es dar muestra de los conocimientos matemáticos movilizados por los estudiantes al dar solución a diferentes problemas propuestos por el docente, quien a su vez hace uso de la tecnología digital. Como producto final del seminario, el docente solicitó a cada estudiante elaborar un aplicativo que promoviera la enseñanza y aprendizaje de un concepto matemático escolar. A lo largo del desarrollo del seminario y en el proceso de elaboración de los aplicativos, se evidenció que los estudiantes movilizaron algunos conceptos matemáticos que no estaban previstos.

Palabras clave: tecnología digital, enseñanza, GeoGebra, fracciones, aplicativo.

Presentación del problema.

Durante el primer semestre del año 2018, la Maestría en Docencia de la Matemática de la UPN ofertó el seminario Profundización en Matemáticas Elementales a estudiantes pertenecientes a una cohorte cuyo énfasis es "Tecnología digital y enseñanza de las matemáticas", por lo que el uso de los recursos digitales se convertía en un aspecto primordial en el desarrollo de cualquier espacio académico adscrito a esta cohorte. En este espacio académico se realizó un estudio de distintos objetos matemáticos propios de la matemática escolar con el fin de incorporar nuevos elementos en su enseñanza y aprendizaje, en particular, la forma en que un recurso tecnológico podría incorporarse en las prácticas escolares, identificando potencialidades pedagógicas en su uso. Para lo cual se crearon ambientes de aprendizaje, apoyados en la resolución de problemas al hacer uso de diversos recursos manipulables, dentro de los cuales se encontraban la calculadora, papel y lápiz, cinta métrica, regla, hojas de cálculo (Excel), software matemáticos (Derive y GeoGebra), entre otros. Al finalizar el seminario y a la luz de un objeto o proceso matemático, cada estudiante debía elaborar un aplicativo en GeoGebra, que a su vez diera cuenta del favorecimiento del aprendizaje del objeto o proceso en cuestión o el desarrollo del proceso mismo. Este trabajo trajo consigo grandes retos, pues no solo demandaba el desarrollo de un aspecto matemático, lo que de forma implícita conlleva al análisis didáctico del tema en cuestión, sino que además confrontaba a los estudiantes ante la necesidad de utilizar las herramientas provistas por el software y así alcanzar el objetivo de enseñanza.

A lo largo del desarrollo de este documento, se presenta uno de los productos finales elaborados en el seminario, enmarcado en la enseñanza y aprendizaje de la aritmética, en particular, la interpretación del concepto fracción como *reparto*. Además, se muestran algunas de las múltiples bondades de GeoGebra, tales como el dinamismo al recrear situaciones que difícilmente se reproducen con lápiz y papel; así como también el papel de la representación gráfica que permite una visión amplia e interactiva del objeto de estudio. Según Villareal (2012), involucrar tecnología en el aula transforma los ambientes donde la matemática puede ser vivenciada como una ciencia experimental, permitiendo así, la generación y validación de conjeturas. En concordancia con este autor y tomando como caso específico el software GeoGebra, se evidencia que al hacer uso del mismo, se puede apreciar el cambio en el ambiente de algunas prácticas que en un principio se tornaban poco interesantes convirtiéndose luego en espacios de descubrimiento y exploración; en otras palabras, la inclusión de la tecnología digital en el aula brinda oportunidades de aprendizaje donde se reconocen acciones como planear, evaluar y decidir.

Marco teórico

Desde comienzo de siglo XXI la comunidad investigativa de Educación Matemática ha centrado sus esfuerzos en la inclusión de la tecnología en las prácticas educativas, posibilitando la transformación de las clases y de los contenidos matemáticos involucrados en estas Mariotti, 2001; Drijvers, 2002; citados en Moreno y Sandoval, 2012), ya que la tecnología tiene un gran potencial para generar nuevas oportunidades en el aprendizaje y provee un acceso a nuevas representaciones (Moreno y Lupiáñez, 2001), al desarrollo de procesos de construcción, la verificación de conjeturas y las estrategias para la resolución de problemas (Noss y Hoyles, 1996; Laborde, 2001; Laborde, et al., 2006; Papodopolus&Dagdilelis, 2009). En el contexto escolar, estos aspectos son transformaciones que aportan de forma significativa al proceso de enseñanza y aprendizaje, por ejemplo, las posibles representaciones y la resolución de problemas que se dan como consecuencia del acceso a nuevos campos operatorios que brinda la tecnología. Según Villareal (2012), una de estas transformaciones son los ambientes creados con herramientas que permiten la generación y validación de conjeturas; laboratorios matemáticos que se construyen en el aula, en donde un "ensayo y error educado" es permitido y la visualización es un aliado para la comprensión matemática.

Es por esto, que las prácticas escolares mediadas con tecnología se convierten en lo que Camargo (2002) denomina como "socio cognitivo que acompaña al estudiante en sus indagaciones sea cual sea el software, el recurso tecnológico se convierte en un inspirador de ideas sobre cómo manipular las representaciones de los objetos geométricos en juego y contribuye a darles sentido" (p.40). Lo anterior, da lugar a pensar en cómo la tecnología puede cambiar las prácticas escolares convencionales; tal como lo señalan Moreno y Sandoval (2012), quienes afirman que las nuevas tecnologías enriquecen las tradicionales representaciones analíticas de carácter estático y que además, proporcionan un campo de exploración que no es factible mediante las representaciones elaboradas con lápiz y papel. Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009, citados en Moreno y Llinares, 2015), aseguran que el uso de herramientas tecnológicas demanda el trabajo con problemas que no son sólo una adaptación de los trabajados con lápiz y papel, sino problemas donde dichas herramientas deben funcionar como mediadores entre el resolutor y la construcción del conocimiento matemático. En este caso, el estudiante es quien juega el rol de resolutor, acerca del que Dugdale (1999) señala la importancia sobre la atención que se le debe prestar, ya que al desempeñarse eficazmente como solucionador de problemas generales, debe reconocer cuándo los métodos de solución informática son propicios, cuándo se debe seleccionar entre una variedad de software aquellas herramientas aplicables a una situación problemática dada y cuándo combinar una variedad de herramientas tecnológicas y no tecnológicas apropiadas para indagar acerca de diferentes aspectos de un problema. Por esa razón no hay que olvidar la importancia del papel que desempeña el profesor, tal como exponen Prieto, Luque y Rubio (2013), quienes afirman que el profesor mejora su práctica en la medida que amplía el repertorio de instrumentos con que cuenta para atender a las demandas propias de la enseñanza. Desde esta perspectiva, el aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas se sustentan y organizan en torno a la elaboración y uso de herramientas enfocadas hacia la mejora de las prácticas escolares.

Según estas prácticas escolares, es importante abordar objetos matemáticos que permitan la interacción entre lo práctico y formal, es decir, entre el conocimiento conceptual y el procedimental. Reconocer que el aprendizaje de las matemáticas se inicia, en algunas oportunidades, en las matemáticas formales y dentro de campos netamente operatorios, y no desde contextos del mundo real, requiere construir situaciones que les permitan a los estudiantes avanzar hacia las matemáticas formales. Un objeto matemático que admite dicha condición son las fracciones debido a los diversos significados y representaciones inmersos en su estudio.

Este concepto cuenta con una amplia variedad de estudios asociados a su enseñanza y aprendizaje (Morcote y Flores, 2001; Godino, 2004 y Vasco, 1991), ejemplos de esto, son las secuencias didácticas y las perspectivas teóricas que han evidenciado su importancia. Autores como Godino (2004) expone en su estudio que las fracciones son las primeras experiencias numéricas de los estudiantes que no están basadas en algoritmos de recuento como los números naturales. Por consiguiente, el trabajo con las diferentes interpretaciones del concepto de fracción, conlleva en el estudiante el desarrollo de habilidades, que posteriormente les serán útiles para el estudio de sistemas numéricos, en otras palabras, logra que el estudiante consiga un aprendizaje producto de una comprensión y un significado.

Según Morcote (2000), una dificultad relacionada con este objeto matemático es representar el todo a partir de la información de una de sus partes, o la duda acerca de la representación de la parte sombreada en gráficas, en las que aparece más de una unidad. En consecuencia, con el diseño del aplicativo se puede establecer que un sistema de representación adecuado puede facilitar la comprensión y percepción de la noción de fracción como reparto.

Metodología

En esta experiencia, se escogió GeoGebra como herramienta mediadora debido a que es un software matemático interactivo libre, de fácil acceso y manipulación. Como señala su creador MarkusHohenwarter[1], este programa es un procesador algebraico y geométrico en el que es posible elaborar construcciones y representaciones de objetos matemáticos desde la geometría dinámica, a partir de la expresión algebraica de estos. En el seminario de Profundización de Matemáticas Elementales, se utilizaron diferentes herramientas tecnológicas como Calculadoras, Hojas de cálculo, Drive y GeoGebra, dando prioridad al manejo de este último y además, se abordaron problemas relativos a estadística, geometría y cálculo. Lo anterior, con el fin de reconocerlas herramientas de GeoGebra en el marco de la solución de los diferentes problemas, así como el estudio de conceptos propios de la matemática escolar. Como se mencionó anteriormente, al finalizar el seminario cada estudiante debía presentar un aplicativo de su autoría desarrollado en GeoGebra, que favoreciera o bien, el aprendizaje de un objeto matemático o el desarrollo de un proceso matemático. Los productos finales reunieron diferentes métodos de enseñanza de los temas seleccionados, además movilizaron en los participantes del seminario, diferentes conocimientos matemáticos que fueron necesarios durante el proceso de diseño y aplicación. Cabe resaltar, que a medida que se hacía necesario, el docente presentaba a los estudiantes el manejo de las diferentes herramientas que el software ofrece, con el fin de que ellos a su vez generaran recursos educativos en los que la representación digital juega un papel importante.

Resultados

Para la construcción del aplicativo se tuvo en cuenta un contexto que fuera familiar para los estudiantes, por tal motivo se escogió la temática del reparto de fracciones utilizando pizzas.
Para la construcción del aplicativo se tuvieron en cuenta los aspectos que se presentan a continuación:

1. Se crearon listas de secuencia para mostrar las porciones de las pizzas representadas gráficamente con circunferencias a partir de sectores circulares. La cantidad de pizzas se relacionan con deslizadores.
2. La programación de los botones se realiza a partir de la construcción de un deslizador, el número ingresado en las casillas debe ser natural para que el contexto de la situación tenga sentido.

[1] Matemático y profesor austríaco nacido en 1976. Presidente del Instituto de Educación Matemática.

El aplicativo diseñado corresponde a la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética y está compuesto por dos ventanas: la primera (parte izquierda, fig. 1) en la cual se muestra representaciones las gráficas de la(s) pizza(s) e imágenes de estudiantes asociadas con las porciones de esta(s); la segunda (parte derecha, fig. 1), se presentan dos casillas y tres botones -dos inicialmente-, en las casillas el usuario ingresa los datos solicitados y haciendo uso de los botones se puede avanzar o retroceder en el proceso de reparto.

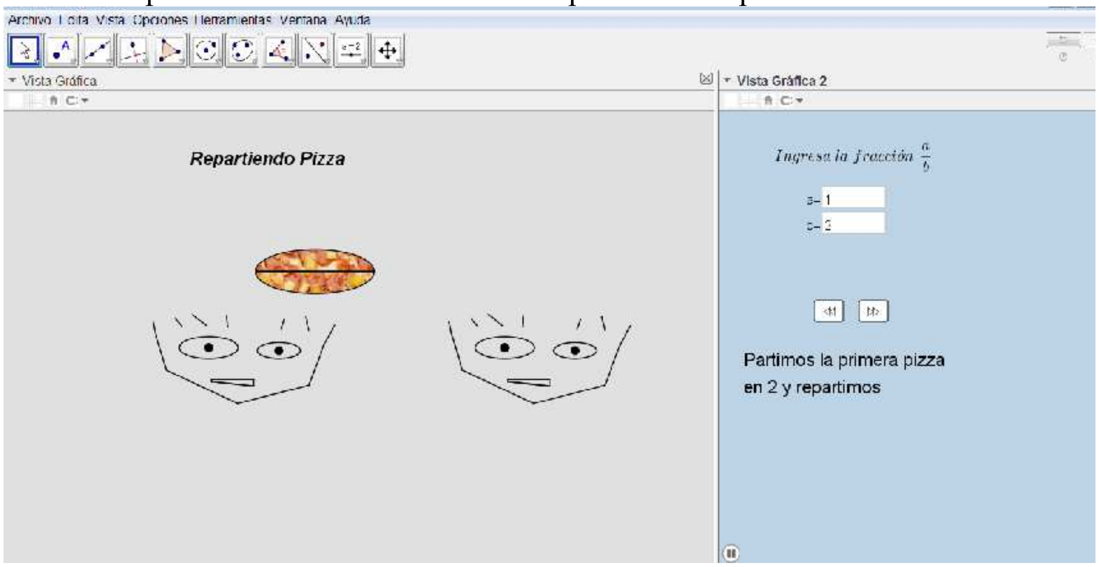


Figura 1. Pantallazo del aplicativo diseñado en GeoGebra.

Inicialmente se tenían conocimientos básicos en cuanto al uso y exploración del software, luego durante el desarrollo del seminario, se reconocieron comandos de programación, útiles para darle solución a los problemas propuestos por el docente encargado. A la luz de los procesos de creación y manejo del aplicativo, surgieron conceptos como estructura booleana, áreas de sectores y conectores lógicos. Dichos conceptos son muestra de que a la hora de construir un aplicativo como el aquí presentado, las matemáticas asociadas no necesariamente corresponden a las que fueron consideradas inicialmente.

Ejercicios como el propuesto, le aportan al profesor experiencia en la construcción de aplicativos, que pueden emplear en el desarrollo de sus clases de matemáticas, además evocan conceptos previos y propenden el conocimiento de algunos nuevos o poco explorados.

La construcción de aplicativos para la enseñanza de las matemáticas requiere del desarrollo de habilidades no sólo matemáticas, que se salen de lo procedimental y memorístico sino también tecnológicas.

Conclusiones

Mediante la construcción de los aplicativos trabajados a lo largo del seminario, los participantes de este, identificaron las bondades del uso de la tecnología en las clases de matemáticas. Una de ellas es la movilización de conceptos matemáticos que no se pretendían abordar y que se encontraban inmersos en cada uno de los trabajos, atendiendo a lo dicho por Castiblanco, Camargo y Villarraga (1999) quienes afirman que la tecnología está cambiando el modo de ver y estudiar las matemáticas y sus usos, ampliando el rango de sus posibilidades.

Adicionalmente se generaron nuevos aprendizajes en cuanto al manejo de GeoGebra, debido a que el ejercicio de construcción de los aplicativos llevo al interés y la necesidad de explorar el software en busca de más herramientas y comandos que resultaban útiles para la construcción de cada uno de los aplicativos. Esta situación está en concordancia con lo planteado por Castiblanco et al. (1999) quien asegura que es necesario que los estudiantes aprendan a utilizar la tecnología como herramienta para procesar información en la investigación y resolución de problemas.

La continua relación que se evidenció entre el conocimiento matemático y el uso repetitivo de GeoGebra en el espacio académico dio paso para aceptar la idea propuesta por Jones, citado en Hoyles (2010), quien asegura que el uso de herramientas en el aula de clase no solo se deben considerar como medio para llevar a cabo una acción concreta sino también considerarlas como un medio para aprender. Por consiguiente, el software de geometría dinámica GeoGebra se transforma en herramienta mediadora. Al reconocer la condición mediadora que tienen las tecnologías en el diseño de propuestas educativas, como menciona Villareal (2012), consideramos que el uso educativo de tecnología fomenta el desarrollo de actitudes favorables, pues promueven y crean ambientes de aprendizaje que se constituyen en escenarios de investigación y exploración.

Cabe resaltar que los aplicativos construidos pueden ser utilizados como una herramienta potente en el aula, teniendo en cuenta los intereses de la clase. Así pues, el papel del docente es hacer parte del proceso de creación de conocimientos y el generador de experiencias que involucren el uso de herramienta digital. El papel del profesor resulta fundamental en el éxito de la producción de conocimiento cuando se resuelve un problema, pues es él quien diseña la situación didáctica para propender un encuentro entre el sujeto y el medio. A partir de esta propuesta, se espera que los docentes desarrollen y empleen aplicativos de este tipo en su labor, debido a las evidencias mostradas en este documento acerca de las ventajas en el proceso de aprendizaje de los estudiantes al hacer uso de herramientas como la presentada anteriormente, para así mejorar las prácticas de aula comúnmente desarrolladas y contribuir en la práctica profesional docente. Finalmente, es importante señalar que el estudiante también cambia por completo, ya no es un receptor si no un generador de su propio conocimiento a través de la exploración con la herramienta y guía del docente.

Referencias y bibliografía

Castiblanco, A., Camargo, L., Villaraga, M. & Zapata. G. (1999). Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas: apoyo a los lineamientos curriculares. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Dugdale, S. International Journal of Computers for Mathematical Learning (1999) 4: 151.

Godino, J. D (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. Departamento de Didáctica de las matemáticas. Universidad de Granada.

Hoyles C, Lagrange JB (eds) (2010) Mathematics education and technology – rethinking the terrain: the 17th ICMI Study. Springer, New York

Morcote, O. y Flores P. (2000): "Algunos elementos del conocimiento profesional en la planeación de clases de futuros profesores, un caso: las fracciones". Granada, España.

Moreno, M.y Llinares, S. (2015). Perspectivas de estudiantes para profesores sobre el papel de La tecnología para apoyar el aprendizaje matemático de los estudiantes. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 413-421). Alicante: SEIEM

Prieto, Juan Luis; Luque, Rafael E.; Rubio, Leonela M. (2013). Cuadriláteros con GeoGebra. Una secuencia de formación docente en la enseñanza de la geometría con tecnologías libres. Revista de la Universidad del Zulia, 4(9), pp. 115-130

Sandoval, I. T., & Moreno, L. E. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: retos para la educación. Horizontes Pedagógicos, 14(1), 21–29.

Villareal, M. (2012). Tecnología y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. Innovación y Experiencias. Vol No. 5. Pag 73 –91. Universidad Nacional de Córdoba. Argentina

La interdisciplinaridad para el estudio de las fracciones

Marco Antonio **Ayala** Chauvin
Universidad Técnica Particular de Loja (UTPL)
Ecuador
maayala5@utpl.edu.ecb
Gerardo Elias **Sepúlveda** Restrepo
Secretaría de Educación del Departamento de Antioquia
Colombia
illecebris@hotmail.com
Luis Alexander **Conde** Solano
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad de Medellín
Colombia
lconde@udem.edu.co

Resumen

El objetivo de este estudio es analizar la construcción de la noción de equipartición de fracción en estudiantes de primaria, a través de un contexto interdisciplinar articulado entre las matemáticas y la música. Este interés surgió de nuestra práctica al observar que los métodos utilizados en la actualidad para la enseñanza de las fracciones, adolece de un mecanismo de comprobación de la existencia o no de la equidad de las partes. Los participantes fueron 17 estudiantes de 4º y 5º grado de educación primaria del sector rural de Antioquia. El análisis de la información recolectada permitió reconocer que los vínculos entre las matemáticas y la música pueden constituirse en un escenario interdisciplinar diferente a los tradicionales, para que los estudiantes por medio de experiencias y representaciones puedan construir una noción de equipartición de fracción.

Palabras clave: Interdisciplinaridad, fracción, matemática, música

Introducción

El uso de las fracciones representa una necesidad relevante para el desenvolvimiento de los estudiantes en la sociedad, a partir de la interpretación de los datos matemáticos con los que interactúa a diario; competencia que el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006) espera haya sido adquirida al terminar el quinto grado de básica primaria.

El dominio de este objeto matemático implica entrar en interacción con diferentes nociones, como lo es la equipartición, un aspecto que generalmente es abordado de manera estática en las aulas de clase, sin mecanismos de verificación y, por ende, sin la generación de autonomía en la valoración de la coherencia de las respuestas dadas a las situaciones que se les presenta a los estudiantes. Para Kieren (1980) la acción de equipartir, es la base fundamental para la creación y aplicación del conocimiento de la fracción.

En el ejercicio escolar, los estudiantes y los maestros se enfrentan a dificultades sobre la comprensión y representación de las fracciones, tal vez consecuencia del uso de ejemplos para introducir la equipartición. En ejemplos como: partir frutas, chocolatinas o pasteles, se pasa por alto las unidades de medida, el tamaño de las partes, medio continuo, discreto, equivalencias, entre otros. En este escenario, consideramos que la apuesta interdisciplinaria entre las matemáticas y la música, ofrece una estrategia didáctica en el estudio de los fraccionarios diferente a las usadas tradicionalmente, de las cuales emergen imprecisiones a la hora de transponerlas a situaciones del contexto. Por lo tanto, la interdisciplinaridad como recurso didáctico promueve experiencias y representaciones utilizados por los estudiantes para conjeturar y probar ideas matemáticas emergentes de un fenómeno real observado. Concretamente desde nuestro punto de vista, la aplicación en el aula de actividades interdisciplinarias donde se articulen elementos musicales, objetos sonoros y matemáticos, integrados en procesos de medición, puede ofrecer a los estudiantes posibilidades para construir significados asociados con el objeto fracción.

Marco Conceptual

Actualmente, surgen nuevas problemáticas cada vez más complejas que de cierto modo exigen un trabajo articulado entre diversas disciplinas para su tratamiento. Estos requerimientos de la sociedad moderna necesariamente deben atenderse por medio de la interdisciplinaridad. La idea de un currículo interdisciplinar se puede observar desde la escuela pitagórica donde la música se consideraba una disciplina matemática en la que se estudiaban relaciones de números, razones y proporciones. Para los griegos, la aritmética, geometría, música y astronomía, que formaban el *quadrivium*, junto con la gramática, retórica y dialéctica que formaban el *Trivium* se convirtieron en las siete artes liberales.

En tiempos modernos, en la organización de currículo escolar, según los NCTM (2003) se sugiere la necesidad e importancia en establecer conexiones entre las distintas áreas del conocimiento. Abordar así los contenidos produce algo más que motivar a los estudiantes. “Revela las matemáticas como una disciplina con sentido, en vez de una disciplina en la que el profesor da reglas que deben memorizarse y usarse para hacer los ejercicios”. También en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) se enfatiza que, en la formulación, el tratamiento de situaciones problema con enfoque interdisciplinar contribuye al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de múltiples formas.

Para el interés de este trabajo damos relevancia a las conexiones entre las matemáticas y la música, a partir de las representaciones semióticas visuales desde la perspectiva de De Guzmán (1996); auditivas (McAdams, 1993 y Willems, 1993) y corporales basadas en Conde (2013), como puente dialéctico entre dichas disciplinas. Desde esta perspectiva, se establece un marco conceptual que sirve de soporte para el desarrollo de este estudio y responde a la naturaleza interdisciplinaria de nuestro planteamiento.

Representaciones visuales

Entendemos por representaciones visuales aquellas representaciones pictóricas como diagramas, gráficas, modelos geométricos, animaciones dinámicas virtuales, entre otras, como método para comunicar matemáticas y música.

De Guzmán (1996) señala que los matemáticos se valen de procesos simbólicos y diagramas visuales, aún en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista. Como consecuencia, la visualización aparece así, como algo profundamente natural en la transmisión y comunicación propia del quehacer matemático, en particular, la relación espacio-temporal se constituye en un sistema de representación encargado de organizar la duración de los sonidos y silencios en una línea de tiempo de forma escrita, tal como ocurre en la escritura musical en el pentagrama.

Representaciones auditivas

A diferencia de la actividad matemática, en la música se responde a la naturaleza de evento sonoro, en la cual la representación visual no es la única forma de comunicación y expresión, ya que un músico puede interpretar una melodía sin conocer dicho sistema de escritura. La representación auditiva, implica el desciframiento (reconocer, discriminar e interpretar) de estímulos auditivos asociándolos a experiencias previas (McAdams, 1993). Por lo tanto, se apela a la representación mental en forma de memoria auditiva para establecer relaciones y dar sentido a los sonidos percibidos.

Aunque la cognición auditiva actúa de manera simultánea, los procesos mentales se activan en función de cada cualidad del sonido. Sin entrar en detalle de la función de cada uno de estos elementos, en este estudio se tratan los aspectos que involucran: i) la variación en la duración, relacionada a la medida de tiempo de las figuras musicales y ii) la interrupción regular, que consiste en aquellos que producen repeticiones de una sucesión de sonidos de igual duración alternados con silencios (Willems, 1993).

Representaciones corporales

En la ejecución musical el gesto es un elemento inherente que puede ser relacionado corporalmente con el ritmo. Es decir, la experimentación sensorial de fenómenos sonoros permite al estudiante reconocer estructuras rítmicas por medio de actividad corporal. De esta forma es posible establecer un vínculo entre las estructuras rítmicas y la fracción (Conde, 2013).

Al realizar la ejecución del ritmo corporalmente (gesto) los estudiantes pueden determinar si el patrón rítmico cumple con ciertas propiedades, por ejemplo, pueden determinar si dos o más patrones rítmicos son equivalentes o no, al interpretarse simultáneamente. Es por ello que el gesto de los estudiantes no está sometido a las interpretaciones personales del maestro, es decir, es validado a través de la reproducción del propio ritmo.

El gesto desde la perspectiva de este trabajo, aunque está influenciado por la cultura e individualidades, es estable en la ejecución ya que posee una estructura rítmica musical. En este caso, los gestos deben ser articulados para cumplir con ciertas reglas temporales que no están sujetas a las interpretaciones de un observador (o experto) porque son inherentes a la métrica musical de un patrón determinado.

Metodología

Esta comunicación hace parte de una investigación de maestría en Educación Matemática. Es de corte cualitativo, cuyas fases de la investigación consistieron en: i) diseño y desarrollo curricular, en la que se estableció en una propuesta didáctica, ii) diseño y desarrollo de software educativo y iii) un análisis cualitativo sobre la manera en que los estudiantes de primaria construyen una noción de equipartición de fracción, a través del contexto interdisciplinar. En este estudio participaron 17 estudiantes de los grados cuarto y quinto de básica primaria, de una institución educativa rural ubicada al occidente de Antioquia, Colombia.

Los recursos de apoyo elaborados como soporte a las acciones de intervención fueron una guía del docente, un cuaderno de trabajo del estudiante, un software educativo y material manipulativo. Los instrumentos de recolección y organización de la información consistieron en cuadernos de trabajo diligenciados por los estudiantes, videograbaciones de las actividades y un diario pedagógico como herramienta de registro de las experiencias e impresiones que surgieron del desarrollo de las sesiones de clase.

Discusión de resultados

En este apartado se ejemplifican algunas formas cómo los estudiantes a partir de sus experiencias en un contexto interdisciplinario, pueden de cierto modo construir una noción de equipartición de fracción. Para ello exhibimos episodios tomados de los diferentes instrumentos de recolección y organización de la información donde se evidencia el tránsito de una idea intuitiva, pasando por representaciones formales e informes de un fenómeno acústico hasta la consolidación de significados de la noción de equipartición.

Ideas intuitivas sobre la equipartición y sus representaciones no convencionales

La percepción de los sonidos y la necesidad de comunicar estas ideas, acercan a los estudiantes a formas de representación no convencionales ligadas a la descripción del fenómeno acústico percibido. Es así como, tras realizar una actividad de juego que vincula un patrón rítmico regular como los que se muestran en la Figura 1, las representaciones de los estudiantes se aproximan al cumplimiento de criterios de medición, comparación y simbolización.

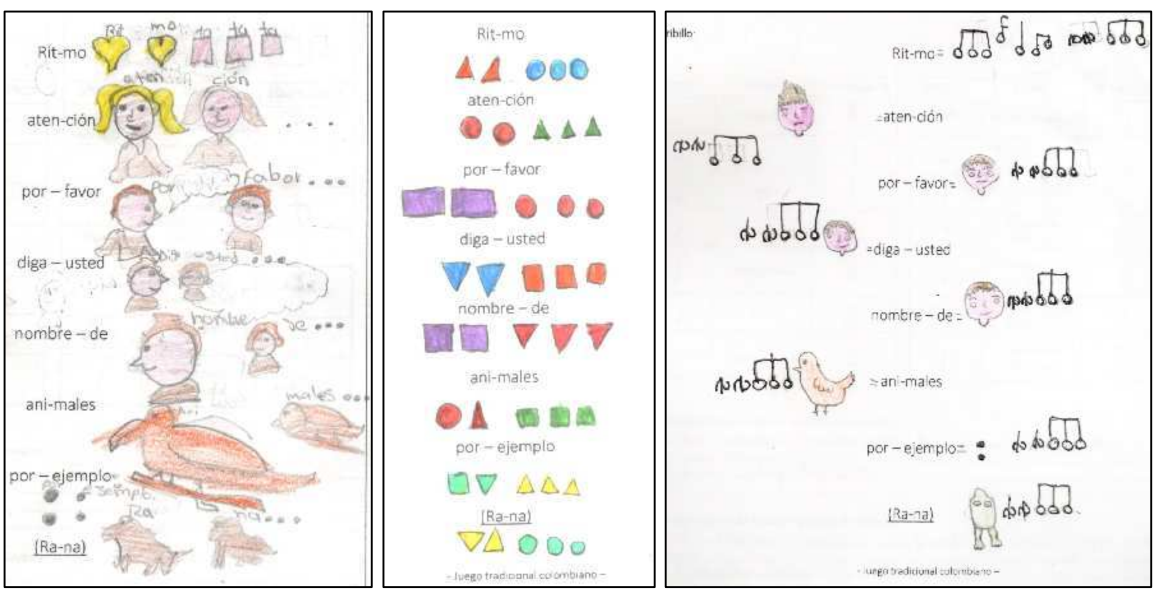


Figura 1. Construcción de patrones rítmicos con representaciones informales

La sensación de partición regular experimentada por los estudiantes, les permite dar sentido a la idea de patrón como experiencias repetidas (Johnson, 1987). Mismas que ofrecen conexiones con experiencias biológicas (pulsaciones del corazón) y experiencias cotidianas como las actividades de baile. En los dos ejemplos anteriores están regulados por pulsaciones, es decir, sonidos con igual tiempo de duración. Precisamente, las ideas intuitivas van surgiendo de percepciones de eventos sonoros con tiempos de igual duración. Por lo tanto, los estudiantes representan dichos eventos con signos de la misma clase, con el mismo color y proporciones similares, tal como se muestra en la Figura 1.

Ideas sobre la equipartición y sus representaciones convencionales

En el entorno computacional se presentaron tres animaciones (Figura 2). En la primera consiste en barras dinámicas donde se articulan fracciones de sonidos o silencios con recubrimiento de la misma. En la segunda y tercera consiste en ordenar de mayor a menor las figuras musicales y la fracciones.

Figura 2. Duración de las figuras, (Software Educativo de acceso público registro: 13-67-227)

En la primera escena, aunque no se menciona la palabra fracción, implícitamente los estudiantes han trabajado con la sensación de partir o de fracturar para hacer discreto el tiempo de duración del sonido en la dimensión temporal. La representación dinámica permitió que los estudiantes reconocieran en una línea de tiempo, sonidos y silencios según su tiempo de duración determinado por los cortes entre sonidos. La idea de "fractura" que se considera fundamental en el estudio las fracciones tiene varias representaciones simultáneas que permiten a los estudiantes a determinar las características, el número y la medida de las partes en que está compuesto el todo referencial (Freudenthal, 1983).

La segunda y tercera escena, en las que se pretende medir el tiempo de duración de sonidos y silencios, crean en los estudiantes una noción de orden. Es decir, los conducen a reconocer y comparar sonidos/silencios asociados a sus representaciones. Esta exploración temporal inicial les permitió a los estudiantes adentrarse en la organización de eventos fundamentada en la percepción visual (sistema de representación gráfica), gestual y auditiva (sonido).

Aproximación a la noción de equipartición

En la interacción de los estudiantes con el entorno computacional (Figura 3), se introducen representaciones que ilustran la propiedad de construcción de las figuras musicales: *Cada figura* *es la mitad de la anterior y el doble de la siguiente* (Conde, Parada y Liern, 2016). Se representa la construcción de una redonda como la figura equivalente a cuatro pulsos y a partir de la redonda se asigna los tiempos musicales de las demás figuras.

Figura 3. Las figuras musicales y sus silencios - Multimedia

La redonda está representada en el ambiente computacional por una circunferencia completa, formada por cuatro fracciones de 1/4 o, lo que es lo mismo, cuatro negras. En lo auditivo, mientras se forma la circunferencia se reproduce un sonido o se deja un silencio de duración equivalente a cuatro pulsos, marcados a igual distancia temporal por un golpe del metrónomo.

Respecto a dicha construcción se generó el siguiente dialogo con los estudiantes:

> Docente: ¿Qué cantidad de pulsos hay en una blanca?
> Estudiantes: Dos pulsos
> Docente: ¿y cuantos había en una redonda?
> Estudiantes: Cuatro
> Docente: ¿Qué relación hay entre la blanca y la redonda?
> Estudiantes: La blanca tiene…, la mitad de los pulsos que tiene la redonda.

Al parecer los estudiantes describen una trayectoria de construcción de una noción de equipartición, puesto que se establece una unidad de medida como base (el pulso). Para luego expresar la duración de un sonido con relación a esta y trascender posteriormente a relacionar una figura con otra, partiendo de la cantidad de veces en las que el pulso aparece en ellas. La equipartición se asocia al número de figuras con iguales duraciones necesarias para completar la unidad de referencia. Desde nuestro contexto la equipartición está controlada por experiencias gestuales, visuales y auditivas que verifican la acción de equipartir. Como valor agregado tenemos los efectos sonoros dentro de la métrica musical que validan cuándo existe o no una equipartición, es decir, los estudiantes construyen un significado sobre la noción de “igual tiempo de duración”.

Conclusiones

La enseñanza con enfoque integrador entre las matemáticas y otras disciplinas requiere no sólo conocimientos especializados, sino un cambio de creencias en torno a las opiniones de los profesores de matemáticas, ciencias y artes, sobre la organización del currículo, su enseñanza y cómo aprenden los estudiantes. Es decir, La interdisciplinariedad no aparece como un elemento que sea producto de la espontaneidad. Por lo tanto, Este estudio apunta a proveer experiencias diferentes al tradicional tratamiento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Desde nuestro punto de vista, centramos la atención en el estudio de objetos integradores que coexisten en contextos interdisciplinares y que pueden promover en los estudiantes procesos de construcción de su propio conocimiento.

En la interacción de las actividades interdisciplinarias propuestas en este estudio se observa que los estudiantes descubren, representan y comparan la forma como el pulso, el tiempo y el ritmo musical constituyen una aproximación a la noción de equipartición determinando al pulso como su unidad de medida. Aquí los estudiantes aprecian la equipartición en condición de igual tiempo de duración entre pulso y pulso. También los estudiantes confirman que los tiempos iguales son invariantes al patrón rítmico de una canción o fragmento musical.

Acto seguido, los estudiantes encuentran que hay una forma de establecer unidades de medida a partir del pulso, que pueden ser convencionales o no convencionales inicialmente, hasta cobrar forma en las figuras musicales como lenguaje universal para expresar la duración de un elemento sonoro de la música. Además, establecen una relación fraccionaria entre cada una de ellas, partiendo de la redonda como unidad y las demás como cierta parte de ella, siguiendo la propiedad de que cada figura es la mitad de la anterior y el doble de la siguiente.

Como reflexión final, sugerimos cambios en la escuela tradicional en cuanto a herramientas y argumentos para el estudio de las fracciones. Una sugerencia podría ser reorientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la equipartición, a través de objetos musicales. Aquí se generan diversos escenarios didácticos que pueden favorecer el aprendizaje de las fracciones con base en su estructura métrica musical.

Referencias

Conde, A. (2013). La unidad relativa como vínculo cognitivo entre el tiempo musical y las fracciones. (Tesis de Doctorado). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Conde, A., Parada, S., & Liern, V. (2016). Estudio de fracciones en contextos sonoros. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, *16*(2),1-21.

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la Pizarra*. Madrid: Pirámide.

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* (Trad. L. Puig). México: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Johnson, M. (1987). The body in the Mind. Chicago: University of Chicago Press.

Kieren, T. (1980). The racional number constructs. Its Elements and Mechanisms. En: T. Kieran (Ed). Recent Research on Number Learning, (pp. 128-149). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

McAdams, S. (1993). Recognition of sound sources and events. In S. McAdams y E. Bigand (Eds.), *Thinking in Sound: The Cognitive Psychology of Human Audition* (pp. 146-198). Oxford: Oxford University Press.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias Matemáticas.* Bogotá. Colombia: Imprenta Nacional de Colombia.

NCTM (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: SAEM Thales.

Willems, E. (1993). *El ritmo musical* (Trad V. Hemsy). Buenos Aires: Eudeba.

Zahira en la resolución de problemas multiplicativos con fracciones

Maribel **Hernández** Cobarrubias
Centro de Investigación y Estudios Avanzados
México
marybellcob@gmail.com
Marta Elena **Valdemoros** Álvarez
Centro de Investigación y Estudios Avanzados
México
mvaldemo@cinvestav.mx

Resumen

El presente documento forma parte de una investigación cualitativa realizada en una escuela primaria pública del Estado de México, con estudiantes de sexto grado. Nos enfocamos en la resolución de problemas de estructura multiplicativa mediante el uso de fracciones y para ello recurrimos a la observación de clases, un cuestionario exploratorio, entrevista y un taller dividido en dos partes. La primera parte del taller dirigida a ofrecer a los alumnos prerrequisitos que enriquecieran sus nociones sobre la fracción y la segunda donde se abordó la multiplicación de fracción mediante la estructura de partes de partes. Integramos en esta comunicación el caso de Zahira quien al inicio presentó varias dificultades cognitivas con el uso de fracciones, pero que fueron superadas en el transcurso de la investigación.

Palabras clave: problemas multiplicativos, fracciones, estrategias, resolución, dificultades cognitivas.

Planteamiento del problema de investigación

En el Plan y Programas (SEP, 2011) se prevé que al finalizar la educación primaria los alumnos, en su formación matemática, ya hayan desarrollado diferentes actividades donde abordasen situaciones problemáticas con estructura multiplicativa, usando números fraccionarios. Al mismo tiempo se anticipa que ellos han transitado por diferentes significados de dicha operación. Sin embargo, resultados en evaluaciones oficiales como PLANEA (2017) manifiestan que a nivel nacional tan sólo el 6.8 % del total de alumnos que fueron evaluados al concluir el sexto grado de primaria logra resolver problemas multiplicativos donde intervienen dichos números.

Datos como los anteriores y nuestra experiencia docente nos permiten identificar lo complejo que es para los alumnos el manejo de situaciones que presentan estructura multiplicativa, haciendo uso de fracciones. En la búsqueda de mayor comprensión de tales contenidos de aprendizaje, en la presente comunicación identificamos un espacio que focaliza nuestra atención en la resolución de problemas con estructura multiplicativa, en alumnos de sexto grado de educación primaria, mediante el uso de números fraccionarios.

En esta documento buscamos responder a 2 interrogantes referidas a los estudiantes de sexto grado de educación primaria, resolviendo problemas mediante el uso de números fraccionarios:

- ¿Cuáles son las estrategias que emplean?
- ¿Cuáles son las dificultades cognitivas a las que se enfrentan?

El presente estudio tiene como objetivo general:

- Identificar las estrategias y dificultades cognitivas que los alumnos de sexto de primaria presentan al resolver problemas multiplicativos, aplicando números fraccionarios.

Antecedentes teórico-empíricos

Vergnaud (1991) presenta en su clasificación sobre problemas con estructura multiplicativa, entre otros, aquéllos que reconoce como “producto de medida” y que se retomaron para el diseño de algunas tareas planteadas en el cuestionario exploratorio, donde la fracción se utiliza como medida.

Con respecto a las estrategias que los alumnos despliegan en la resolución de problemas de estructura multiplicativa recuperamos las que Mulligan (1992) identificó, entre otras, como el uso del “**number fact**”, entendido en nuestra lengua como la aplicación de *hechos numéricos* conocidos por los niños que les permiten la actuación eficiente ante situaciones problemáticas. Recientemente, Ivars y Fernández (2016) encuentra que a partir del tercer grado la estrategia que más emplean los alumnos es el uso de algoritmos, pero que a su vez incrementa la aparición de una estrategia incorrecta al usar un algoritmo inverso. Esto coincide con lo que plantean Peralta y Valdemoros (1989), es decir con la aparición del algoritmo no se mejora la comprensión de las situaciones problemáticas existentes.

Con relación a la enseñanza de las fracciones, las aportaciones de Streefland (1991) son de gran relevancia para la presente investigación. Con su planteamiento sobre la matemática realista propone formas de permitir que los alumnos accedan a los diferentes significados que pueden atribuirse a las fracciones y que les faciliten dar sentido a las mismas.

Piaget (1975) identificó las relaciones que los niños pueden establecer entre clases y subclases (que se recuperan en este estudio como partes de partes) del todo continuo y discreto frente a ellos los niños pueden identificar tanto la conservación como la identificación de las características que los hacen pertenecer a una clase o subclase. Peralta (1989) así como Peralta y Valdemoros (1989) recuperan el planteamiento de Piaget en torno a que la relación parte-todo permite identificar a las partes como elementos que ayudan a reconstruir el todo. Con esta línea las autoras plantean tareas donde recuperan el todo continuo y el todo discreto, observando que los alumnos no hacen partición del todo continuo, de manera que las fracciones sean partes del todo original, pero también sean partes de sí mismas ya que pueden ser subdivididas de nuevo cuando se expresa “a/b x c/d” que se asocia a “a/b de c/d”. De igual manera detectan que a los alumnos se les dificulta asociar la preposición “de” con la multiplicación de fracciones. En el presente estudio retomamos estas concepciones bajo el referente de partes de partes y recuperamos actividades propuestas en la segunda parte del taller para establecer una relación multiplicativa, usando fracciones.

Para el análisis recuperamos a Valdemoros (2004) quien propone un modelo interpretativo que permite el análisis de datos recuperados a través de la investigación empírica. Dicho modelo, con carácter lingüístico, permite identificar los tres planos de todo lenguaje: el semántico, el sintáctico y el pragmático. Presenta en cinco dimensiones los planos de análisis por lo que es una herramienta interpretativa de gran alcance, a la vez que posibilita interpretaciones semióticas.

Método

Escenario y sujetos

Para la realización del presente estudio se eligió como escenario una escuela pública de turno matutino de Educación Primaria del Estado de México, debido a la apertura y facilidades que tanto el directivo como la docente del grupo dieron para el desarrollo de la investigación. El estudio se realizó considerando al único grupo de sexto grado naturalmente constituido, integrado por 40 alumnos, de los cuales 22 son niñas y 18 niños, cuyas edades oscilaban entre 11 y 12 años al momento del estudio. Zahira pertenecía a este grupo y fue seleccionada por presentar diversas dificultades cognitivas en el desarrollo del cuestionario inicial, así como su facilidad para expresar verbalmente sus procedimientos y actuaciones ante las tareas propuestas.

Instrumentos metodológicos

Para la consecución del objetivo planteado se buscó la obtención de datos haciendo uso de los siguientes instrumentos metodológicos: observación de clases cuestionario exploratorio, entrevistas y un taller de enseñanza dividido en dos partes, con los que se integró el estudio de casos. El siguiente diagrama muestra la secuencia temporal en la que se aplicaron dichos instrumentos.

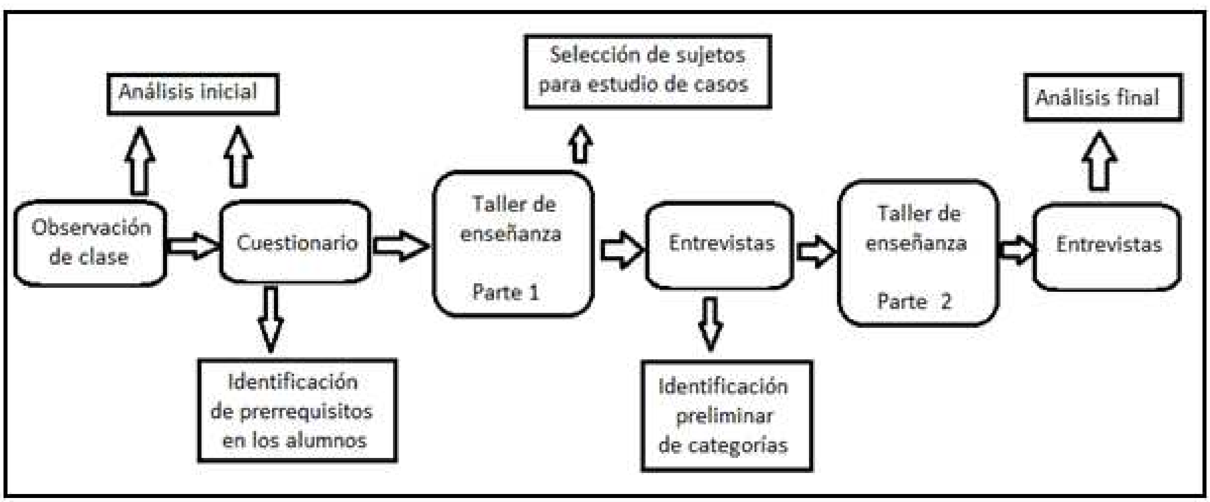


Figura 1. Secuencia temporal de aplicación de instrumentos metodológicos durante la investigación.

a) Observación de clases

Se realizó observación de clase durante 3 sesiones, donde la docente titular abordó la multiplicación de fracciones auxiliándose de la idea de iteración. Encontramos el uso del término "uneavos", refiriéndose a la fracción unitaria, que usaban al multiplicar mediante el uso de fracciones y aplicando un algoritmo.

b) Cuestionario

El cuestionario exploratorio (sometido a una experiencia piloto previa en otro grupo escolar), estuvo integrado por 10 tareas vinculadas al uso de fracciones mediante repartos, como medida y problemas de estructura multiplicativa. Se distribuyó a lo largo de 4 sesiones de una hora cada una. El análisis de las producciones de los estudiantes y lo observado durante las clases permitió identificar algunas de sus dificultades cognitivas con respecto a su concepción y manejo del número fraccionario y que les dificultaría la resolución de las tareas planeados para el taller.

c) Taller de enseñanza (Parte 1)

Con la intención de ampliar sus nociones de fracción, decidimos incluir actividades introductorias en lo que denominamos taller de enseñanza parte 1. En esta primera parte se desarrollaron actividades adaptadas de la secuencia que Streefland (1991) propuso y otras tareas planteadas por las autoras del presente reporte. En el contexto de visitas a una pizzería se desarrolló: a) noción de fracción a partir del reparto, b) reparto equitativo, c) generación de fracciones equivalentes, d) adición de fracciones y e) sustracción de fracciones.

d) Entrevistas

Considerando las producciones de los alumnos en los instrumentos previos, fue posible comenzar a plantear algunas categorías preliminares y a su vez seleccionar a Zahira, quien mostró algunas dificultades en las tareas del cuestionario; sin embargo durante las entrevistas de carácter semiestructurado de 3 sesiones de 45 minutos cada una, fue posible reorientar las inconsistencias conceptuales que se asumía le dificultaban su transición a un mejor desempeño.

e) Taller de enseñanza Parte 2

El taller de enseñanza en su segunda parte constó de 4 sesiones de trabajo, en donde se desarrollaron actividades relacionadas con la multiplicación de fracciones. Mediante el desarrollo de actividades lúdicas e inspiradas en un enfoque "realista", se pretendía que los alumnos alcanzaran la comprensión en la búsqueda de significados de la multiplicación de fracciones mediante el manejo del "todo continuo" y "el todo discreto" a través del trabajo con "partes de partes". En él se planteó un juego mediante el uso de dados, tarjetas y material manipulativo para la identificación de expresiones de la forma $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b}$ de n. De igual manera, la identificación del todo a partir de las partes haciendo uso del todo discreto como vía para la identificación de relaciones multiplicativas.

Validación cualitativa

En el presente estudio recurrimos a un uso combinado de diversos recursos de validación; sin embargo priorizamos la triangulación de diferentes métodos, lo cual permitió identificar las respuestas y procesos más estables tanto en el cuestionario, la entrevista y el taller. El contraste lo realizamos tomando en cuenta tareas con significados afines en los instrumentos. La identificación de categorías permitieron contrastar a lo largo de los instrumentos, tanto estrategias de solución de los alumnos, sus dificultades y los significados con las que las desarrollan. El caso de Zahira muestra el cambio cualitativo en el tipo de producciones, así como el sentido y significados[1] con los que desarrolla las estrategias de solución de las tareas.

[1] En Vigotsky (1977) el sentido es dado y comprensible por el propio sujeto, mientras que el significado es verbalmente formulado y comprensible para cualquier interlocutor.

Análisis del caso de Zahira a través de su actuación durante el taller

El caso de Zahira se recuperó debido a su facilidad para verbalizar sus procedimientos, así como las dificultades que manifestó al trabajar con las tareas propuestas. Entre otras, al hacer repartos sólo recurría a la equidad, sin hacer uso de la exhaustividad. Para expresar mediante una fracción, la porción correspondiente a cada sujeto, derivada del reparto, no establecía la relación aditiva de todas las partes producidas, sino que se auxiliaba sólo de aquéllas que le eran más representativas.

Al trabajar con expresiones a/b de n recurría a representaciones pictóricas[2] que hacían referencia al todo continuo y que no le permitían pasar hacia el todo discreto. El único significado que daba a la multiplicación era mediante una composición aditiva.

En los planteamientos de partes de partes, no consideraba que una fracción pudiera ser incluida en otra, en la identificación de la fracción resultante sólo consideraba el área sobrante de la primera parte. Esta dificultad se muestra en su actuación en la Figura 2 (tarea no. 8 del cuestionario) y que encontramos era compartida por varios de sus compañeros.

8. El patio de mi casa lo voy a utilizar para sembrar algunas plantas de hortaliza. $\frac{1}{2}$ del patio lo voy a ocupar para **verduras** y el otro $\frac{1}{2}$ del patio será para **plantas de otro tipo**.

* De la sección de verduras $\frac{1}{3}$ se destinará para chiles, $\frac{1}{6}$ para tomates y $\frac{1}{2}$ para jitomates.

¿Qué parte del patio se destina a cada verdura?

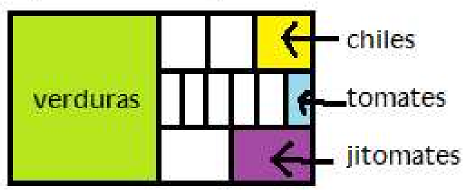


Figura 2. Representación de Zahira para resolver la tarea no. 8 del cuestionario.

Zahira mostró gran facilidad para verbalizar todo lo que producía y mucha apertura para contestar al cuestionarle sobre lo que cada representación, operación, frase o número que producía significaban para ella. A continuación mostramos parte de su producción durante el taller 2ª parte.

Al salón llevamos algunos cupcakes para celebrar el día del maestro. La mitad de todos los cupcakes son de vainilla y la otra mitad, de otros sabores.
* De los cupcakes que son de vainilla, $\frac{1}{3}$ tienen decoración rosa y el resto, decoración azul.
* De los cupcakes que son de otro sabor, $\frac{1}{2}$ son de chocolate, $\frac{1}{4}$ de piña colada y el resto de red velvet.

1) Si sabemos que de red velvet tenemos 6 cupcakes y éstos representan $\frac{1}{8}$ del total de los cupcakes, ¿cuántos cupcakes tenemos en total?

Figura 3. Hoja de trabajo de la 3er sesión del taller de enseñanza en su segunda parte.

[2] Valdemoros (1997) se refiere a éstas como algoritmos gráficos pues son una sustitución del algoritmo formal por dibujos que representan y son útiles en el complejo proceso de entender los algoritmos con fracciones.

En Figura 3 (hoja de trabajo del taller 2ª parte) inicialmente estableció relaciones aditivas, utilizando todos los números que aparecían en la situación planteada (figura 4), al finalizar de realizar el conjunto de adiciones entre los números se le pregunta sobre lo que significa para ella el resultado obtenido, a lo que responde que no lo sabe. Se le motiva a que vuelva a leer el planteamiento y trate de hacer algún dibujo que le ayude a comprender.

$$\frac{1}{3}^{2}+\frac{1}{2}^{3}=\frac{5}{6}^{20}+\frac{1}{4}^{6}=\ \frac{26}{24}^{208}+\frac{1}{8}^{24}=\ \frac{232}{192}^{232}$$

Figura 4. Actuación inicial de Zahira al tratar de encontrar la cantidad de cupcakes que hay en total.

A continuación se transcribe parte del diálogo que se entabló con Zahira cuando se retomaron sus producciones en la hoja de trabajo durante la entrevista.

ZAHIRA: Es que intento saber cuántos cupcakes hay en total, por eso creí que necesitaba sumar todas las fracciones para que me diera el total [refiriéndose al entero], pero no sé cómo convertirlo a cuántos cupcakes… [pausa] déjeme ver porque aquí me dice que hay 6 cupcakes [señala parte del texto y comienza a multiplicar 1/8 X 7/8 = 7/64]

ENTREVISTADORA: ¿Por qué elegiste resolverlo así?

ZAHIRA: Es que aquí me dice que seis cupcakes son un octavo y me faltan 7/8 para tenerlos completos [ella hacía referencia a que el todo sería igual a 8/8 del total de cupcakes], entonces yo podría multiplicarlo, pero no pueden ser 7/64, porque son menos de 6 cupcakes, entonces… [pausa prolongada].

Podemos identificar en este punto de su reflexión, que si bien ella plantea una multiplicación de fracciones, aún está presente una relación aditiva entre 1/8 + 7/8 = 8/8, que busca para reconstruir el todo. Ahora bien, la falta de sentido que tiene para ella el resultado la hace seguir buscando establecer una relación multiplicativa, pero ahora vinculada al uso de enteros; sin embargo no está del todo convencida y lo corrobora estableciendo una relación aditiva (Figura 5).

6 X 8 = 48
6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 48

Figura 5. Desarrollo de Zahira para encontrar la cantidad de cupcakes en total, sabiendo que 6 piezas son un octavo del total.

ZAHIRA: Es que aquí (señalando en su lista el primer número que sumó) tenemos un octavo, dos octavos, tres octavos… [va señalando siguiendo la lista hasta llegar a ocho octavos] y por eso tenemos 48 cupcakes en total.

En el seguimiento anterior reconocemos la búsqueda que realiza Zahira en su intento de establecer relaciones multiplicativas; sin embargo no es capaz aún de justificarlo y recurre al establecimiento de relaciones aditivas [que le resultan más familiares] para poder establecer la relación parte-todo. Para ello reconoce que para encontrar el total de cupcakes deberá hacerlo reconstruyendo el entero mediante 8/8 y establece la equivalencia entre 8/8 y el entero o unidad. Dicha representación nos

permite ilustar una de las categorías encontradas para las estrategias a las que recurren los alumnos para la reconstrucción del todo que clasificamos como: "Relaciones aditivas".

En la búsqueda de sentido de los enunciados del texto, Zahira y sus compañeros (33/42 del total del grupo), establecieron relaciones entre la preposición "de" (que en sesiones de clase con su maestra comentaron que se relacionaba con la multiplicación de fracciones) y la multiplicación (Figura 6). Cabe hacer notar que en la estructura del problema la relación entre las fracciones vinculadas mediante la preposición "de" no estaba señalada de manera explícita, es decir ellos tuvieron que buscarlas y la tradujeron a la operación de multiplicación con fracciones.

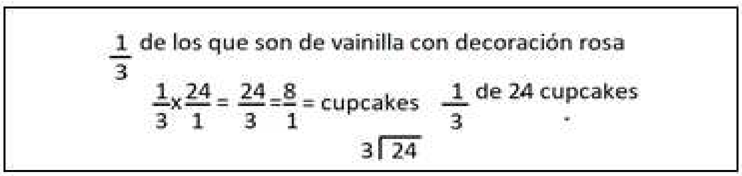


Figura 6. Secuencia que desarrolló Zahira, después de reconocer la cantidad de cupcakes que correspondían a la mitad de todo, para encontrar 1/3 de 24, realiza una multiplicación, encuentra el equivalente y lo vincula con el número de piezas solicitadas.

Zahira, al igual que varios de sus compañeros de clase (33/42 del total del grupo), después de identificar por diferentes caminos la cantidad de cupcakes que representaban al todo, fue capaz de establecer con facilidad las relaciones multiplicativas existentes en los planteamientos de partes de partes del problema planteado (Figura 6). Opera según lo ha trabajado con la maestra de grupo haciendo uso del elemento neutro, que como ella lo designa "convierten el entero a uneavos" y multiplica los numeradores y los denominadores para identificar la cantidad de cupackes decorados con color rosa.

Durante la sesión 4 del taller en la 2ª parte, se plantearon situaciones del tipo "a/b de n", Zahira (como varios de sus compañeros) asoció la relación multiplicativa de la situación planteada con el significado de "reparto" (Figura 7).

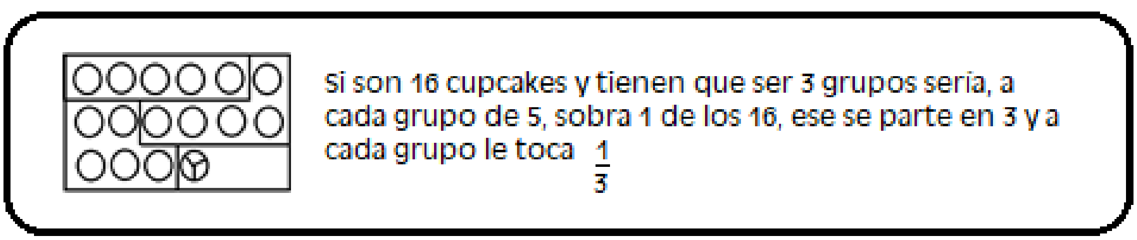


Figura 7. Durante el juego de la sesión 4, Zahira "lanza el dado y cae 1/3 de, toma una tarjeta que dice 16 cupcakes, las integra y forma la situación a desarrollar: "1/3 de 16 cupcakes" que desarrolla auxiliándose de representaciones pictóricas asociándolas con el significado de reparto.

Podemos identificar en Zahira un tránsito paulatino pero estable del uso y manejo que da a las situaciones problemáticas con estructura multiplicativa. Fue capaz de vincular la relación parte de parte con una relación multiplicativa mediante fracciones y definió adecuadamente la relación de la preposición "de" con la multiplicación con fracciones, asignando el significado de reparto a situaciones vinculadas con la estructura a/b de n.

Dificultades generales

Zahira al hacer representaciones cometía errores de trazo o de corte y al realizar comparaciones entre las porciones resultantes atribuía esa diferencia al número y no al trazo en sí. Esta dificultad pudo ser superada al solicitar verificar su respuesta haciendo uso del material de apoyo del taller.

Conclusiones generales

En esta investigación identificamos que Zahira llegó a utilizar el recurso de "partes de partes" y vincularlo con la multiplicación de fracciones, haciendo uso de expresiones de la forma a/b de c/d de pastel y reconstruyéndolo como ac/bd del pastel.

Al trabajar con partes de partes resulta necesario tener presente en todo momento la unidad con la que se está trabajando para no perder de vista la unidad de referencia inicial.

En la enseñanza escolar, el trabajo centrado en algoritmos con operaciones aditivas y multiplicativas mediante fracciones cobra mucha fuerza, pero a nivel de comprensión de los alumnos o transferencia de ideas genera lagunas e inconsistencias que se reflejan al plantear nuevas situaciones donde los estudiantes desconocen o confunden la forma de resolver.

Referencias

Ivars, P. y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación matemática*, 28 (1), 9-38.

Mulligan, J. (1992). "Children's solutions to multiplication and division word problems: a longitudinal study". *Mathematics Education Research Journal*, 4 (1), 24-41.

Peralta, M. T. (1989). *Resolución de las operaciones de suma y multiplicación de fracciones, en su forma algorítmica y su representación gráfica, en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. México.

Peralta, M. T. y Valdemoros, A. M. (1989). Representación gráfica de la multiplicación de fracciones, en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad. *Memorias de la cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. Acapulco, México, 285-290.

Piaget, J. (1975). *Génesis del número en el niño*. Buenos Aires, Argentina: Edit. Guadalupe.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic Education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Secretaría de Educación Pública. (2011).*Plan y programas de estudio, Educación Básica, Primaria.* Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal. México.

Valdemoros, M. (1997) Recursos intuitivos que favorecen la adición de fracciones; estudio de caso. *Educación Matemática*. 9 (3), 5-17.

Valdemoros, M. (2004). Lenguaje, Fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación de Matemática Educativa.* 7 (3), 235-256.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México, México: Editorial Trillas.

Vigotsky, L. S. (1977). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires, Argentina: La Pléyade.

http://planea.sep.gob.mx Fecha de consulta 5 de febrero de 2018

http://143.137.111.132/PLANEA/Resultados2016/Basica2016/R16baCCTGeneral.aspx

Una aproximación al aprendizaje de los fraccionarios como relación parte-todo mediante una propuesta de aula para el grado tercero de educación básica

Cristian Andrés **Hurtado** Moreno
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
cristian.hurtado@correounivalle.edu.co
Juan Sebastián **Cortés** Monroy
Universidad del Valle
Colombia
juan.sebastian.cortes@correounivalle.edu.co
Raúl Fernando **Mendoza** Yela
Universidad del Valle
Colombia
raul.mendoza@correounivalle.edu.co

Resumen

En esta comunicación se presentan los avances de una investigación en curso, cuyo propósito es caracterizar los procesos de matematización que logran un grupo de estudiantes de grado tercero de la Educación Básica Colombiana en torno a los fraccionarios como relación parte-todo. Para ello, se diseña e implementa una propuesta de aula que toma como referente conceptual y metodológico el enfoque de *La Educación Matemática Realista* (Freudenthal, 1973, 1991) y la propuesta de Ohlsson (1988) en torno al concepto matemático que se moviliza, y como referente curricular documentos de política pública nacional; en la cual se involucra el uso de artefactos (Radford, 2012) como el Tangram y las Regletas de Cuisenaire. El diseño que se propone parte de contextos reales favoreciendo la comparación cuantitativa de cantidades de magnitudes como el área, en el caso del uso del tangram, y de longitudes, en el caso del uso de las regletas.

Palabras clave: fraccionario, relación parte-todo, matematización, Educación Matemática Realista, artefacto.

1. Presentación del problema y justificación

La enseñanza y aprendizaje del número fraccionario ha sido y sigue siendo tema de debate y preocupación para la investigación en Educación Matemática. En efecto, distintos investigadores como Llinares y Sánchez (1997), Obando (2003), Freudenthal (1983), Cortina, Zúñiga y Visnovska (2013), Rodríguez y Sarmiento (2002), Pontón (2008), entre otros, han puesto de manifiesto la diversidad de dificultades, obstáculos y errores que suelen presentarse en su aprendizaje pese al gran esfuerzo que los maestros colocan en su enseñanza. No obstante, y de acuerdo con Llinares y Sánchez (1997), los maestros, que suelen privilegiar la introducción de los fraccionarios en la escuela desde la "relación parte-todo", lo hacen con un énfasis, a veces exclusivo, en su representación simbólica y mediante un tratamiento inadecuado de las representaciones gráficas, que por lo general se reduce al conteo de partes sombreadas y no sombreadas, y a la asignación de etiquetas y roles para las partes de la fracción.

Desde esta perspectiva, Obando (2003) considera que dicha forma de presentar este concepto matemático conlleva a que, primero, se entienda la igualdad en la equipartición de la superficie de una figura bidimensional únicamente como congruencia entre las regiones en que se subdivide la figura, por lo que se termina concibiendo el número fraccionario como una etiqueta asignada a una región sombreada de una figura; segundo, se interprete el fraccionario $\frac{a}{b}$ como el acto de dividir la superficie de una figura bidimensional en b partes iguales y de estas tomar a partes, causando que los estudiantes conciban al fraccionario como dos números naturales que están separados por un vínculo (raya), sin relación alguna entre ellos.

En este sentido, Cortina et al. (2013) plantea que el uso inadecuado de la equipartición en la enseñanza inicial de las fracciones, puede conducir a ciertas dificultades que impiden el desarrollo de concepciones maduras. En su investigación propone que la equipartición genera tres "imágenes", las cuales se constituyen en limitantes para la comprensión de los estudiantes, estas son: *la fracción como resultado de transformar un objeto*, donde a los educandos les resulta tentador asociar las fracciones con la necesidad de transformar, física e irreversiblemente, un objeto y tomar algunas partes de este, lo cual favorece únicamente las fracciones propias; *la fracción como tantos de tantos*, en esta "imagen" los estudiantes conciben la fracción como un subconjunto del conjunto que representa el todo, siendo el denominador la cantidad de elementos del conjunto y el numerador la cantidad de elementos que contiene el subconjunto de este conjunto, por lo que el numerador y el denominador se interpretan como números que expresan el resultado de un conteo y no un solo número, el fraccionario; *la fracción como incluida en un entero*, esta "imagen" consiste en concebir una fracción como algo que necesariamente está contenido dentro de un entero, lo cual limita tanto el tipo de situaciones en las que se pueden utilizar las fracciones como las cantidades de las que pueden dar cuenta (únicamente ≤ 1).

Como alternativa para evitar estas y otras problemáticas reportadas, Obando (2003) sugiere que una de las formas que se deberían privilegiar en el abordaje de este concepto matemático en el salón de clase, son los procesos de medición y comparación de cantidades de magnitudes, para que así, por ejemplo, la igualdad entre las regiones en que se subdivide una figura bidimensional por la equipartición se entienda como igualdad en cantidad de superficie, y de ahí, el fraccionario en su interpretación parte-todo se conciba como una relación cuantitativa entre magnitudes.

La propuesta de este autor se fortalece con los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional (en adelante, MEN) (2006), donde se propone que a finales de grado tercero de Educación Básica, los estudiante deben ser capaces de describir situaciones de medición utilizando fracciones comunes, siendo el establecer relaciones cuantitativas entre medidas (magnitudes) la esencia de la relación parte-todo (Obando, 2003).

Ahora bien, Freudenthal (1983) ha indicado que buena parte de las dificultades que se presentan en el aprendizaje de los fraccionarios se deben a que éstos son poco estudiados a partir de situaciones de la vida real de los estudiantes. Así mismo, Streefland (1991) y Martínez, Da Valle, Bressan y Zolkower (2002), plantean que es necesario buscar una relación cercana entre la enseñanza de las matemáticas y los contextos de la vida real de los estudiantes, dado que estos despiertan su interés al poner en juego elementos de su sentido común y conocimientos de lo que saben acerca de cómo son las cosas en el ámbito extraescolar, permitiéndoles acceder a las actividades con cierta familiaridad y comprensión previa. Es así como Freudenthal (1983) y Goffree (2000), llaman la atención en que para la introducción de los fraccionarios desde la relación parte-todo en el aula es necesario diseñar situaciones problemáticas concretas en contextos reales para que el alumno pueda dar sus propios significados, así como crear modelos de una situación real que le permita investigar, apropiándose de dichos modelos para solucionar otros problemas, es decir, que se pueda *matematizar* la situación.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, en el trabajo que aquí se reporta, se adopta la postura de *La Educación Matemática Realista* (Freudenthal, 1973, 1991) (en adelante, EMR) para diseñar una propuesta de aula, donde, a partir de los procesos de medición y comparación de magnitudes, como el área y longitud, favorecidos a través del uso del Tangram y las Regletas de Cuisenaire en contextos y situaciones reales, se favorezca una aproximación al aprendizaje de los fraccionarios como relación parte-todo en un grupo de estudiantes de grado tercero de la Educación Básica, y así poder caracterizar los procesos de matematización que logran el grupo de estudiantes focalizados al desarrollar la propuesta.

2. Marco de referencia conceptual

El planteamiento del marco conceptual toma en consideración el estudio de los referentes curricular y didáctico, a partir de los cuales se logran identificar elementos conceptuales de los números fraccionarios y estrategias metodológicas que permiten interpretar y organizar el estudio de las condiciones, restricciones y posibilidades que están involucradas en el diseño de una propuesta didáctica relativa a la enseñanza de los números fraccionarios en su interpretación como relación parte-todo desde un enfoque *realista* de la matemática. A continuación se exponen los elementos más sobresalientes de este marco.

2.1 Referente curricular

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas (MEN, 1998) una visión global e integral del quehacer matemático debería considerar tres grandes aspectos que permitan organizar el currículo, a saber: los procesos generales, que tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación, y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos; los conocimientos básicos, que se relacionan con el desarrollo de los pensamientos numérico y sistemas numéricos, espacial y sistemas geométricos, métrico y sistemas de medida, aleatorio y sistemas de datos, y variacional y sistemas algebraicos y analíticos; y el contexto, el cual se relaciona con tres escenarios como lo son el de la vida cotidiana, de las matemáticas mismas y de otras ciencias.

Tomando en consideración esta forma de estructurar el currículo, en este trabajo interesa para el diseño de la propuesta hacer énfasis en los procesos generales de razonamiento, comunicación y modelación. En cuanto a los conocimientos básicos, interesa favorecer los producidos por los pensamientos numérico y métrico con sus respectivos sistemas. Por último, referente a los contextos las situaciones se diseñan en ambientes cotidianos y matemáticos.

Ahora bien, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) se considera que el paso del número natural al número fraccionario requiere la comprensión de las medidas en situaciones donde la unidad de medida no está contenida un número exacto veces en la cantidad que se desea medir o en las que es necesario expresar una magnitud en relación con otras magnitudes. Desde esta perspectiva se plantean distintos estándares que se deben lograr con los estudiantes para favorecer en ellos diferentes interpretaciones de los fraccionarios tales como razón, operador, parte-todo, entre otras. De esos estándares se consideran para el diseño de la propuesta de aula algunos de los sugeridos para finales de grado tercero, los cuales guardan coherencia con el énfasis conceptual puesto en la investigación y se relacionan con los pensamientos numérico y métrico, estos son: Reconocer significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización, entre otros); Describir, comparar y cuantificar situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones; Describir situaciones de medición utilizando fracciones comunes; Comparar y ordenar objetos respecto a atributos medibles.

2.2 Referente didáctico

En este apartado se realiza una conceptualización didáctica, basada en elementos matemáticos, de los fraccionarios a partir de los planteamientos de Ohlsson (1988). Luego, se presenta el enfoque conceptual y metodológico de la EMR en términos de Freudenthal (1973, 1991). Por último, se exhibe el rol cognitivo, epistemológico y ontológico que tienen los artefactos en la actividad matemática (Radford, 2012).

2.2.1 El concepto de número racional. Ohlsson (1988) plantea la teoría de los constructos matemáticos, donde estos se entienden como entidades conceptuales (en este caso matemáticas) que están compuestas no sólo de un significado matemático (definiciones, axiomas y teoremas), sino también de un significado aplicacional, lo que incluye todas aquellas situaciones problema y registros simbólicos que estén relacionados con la teoría. Bajo esta perspectiva, propone cuatro subconstructos para el constructo de número fraccionario, a saber: función cociente, número racional, vectores binarios y función compuesta. En el segundo de estos se ubica la relación parte-todo como uno de sus significados aplicacionales. Según este autor la relación parte-todo presenta tres interpretaciones:

i. La fracción $\frac{n}{m}$ representa n partes cada una de las cuales mide $\frac{1}{m}$ de la unidad correspondiente.
ii. La fracción $\frac{n}{m}$ representa n partes iguales (iguales en cuanto a la magnitud en que se parten o comparan) de las m partes en que se ha dividido la unidad.
iii. La fracción $\frac{n}{m}$ representa la razón de la cantidad n a la cantidad m.

En la propuesta que se diseña en la investigación se favorecen las dos primeras interpretaciones, puesto que la tercera de ellas está más cercana al concepto de razón.

2.2.2 La educación matemática realista. Este enfoque conceptual y metodológico, propuesto inicialmente por Freudenthal (1991, 1983), toma como base la concepción de que la matemática es una actividad humana que consiste en matematizar, esto es, organizar o estructurar la realidad, incluida la matemática misma, por lo que insiste en la necesidad de proponer a los estudiantes actividades de organización de situaciones problemáticas genuinas que dan lugar a procesos de matematización, siendo *la fenomenología didáctica* una potente ayuda para lograrlo. La EMR se compone a partir de seis principios, los cuales son:

Principio de actividad. El quehacer matemático es una actividad estructurante u organizadora de matematización que está al alcance de todos los seres humanos, porque la matemática debe ser para todos.

Principio de realidad. Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales, es decir, en situaciones problemáticas que son reales en la mente de los educandos.

Principio de interacción. La enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social, donde la interacción entre los participantes puede provocar que cada uno reflexione con base en lo que aportan los demás, y así, lograr alcanzar niveles más altos de comprensión.

Principio de reinvención. La enseñanza debe tomar la forma de reinvención guiada, es decir, que los alumnos reinventan ideas y herramientas matemáticas a partir de organizar o estructurar situaciones problemáticas en interacción con sus pares y bajo la guía del docente.

Principio de niveles. El aprendizaje es un proceso discontinuo que involucra distintos niveles de comprensión (matematización horizontal y vertical), y es a partir de los diferentes contextos, situaciones y modelos que se favorece el cambio de nivel. Estos niveles son:

- **Situacional:** Comprensión en el contexto de la situación.
- **Referencial:** Esquematización a través de los *modelos de*, descripciones, entre otros.
- **General:** Exploración, reflexión, generalización y formulación de *modelos para*.
- **Formal:** Procedimientos estandarizados y manejo de la notación convencional.

Principio de interconexión. Los contenidos matemáticos no deben ser tratados de manera aislada. Por tanto, se requiere de situaciones problemáticas incluyan contenidos matemáticos interrelacionados, pues así, los estudiantes podrán acceder a diversos modos de matematización.

Así, los principios que caracterizan la EMR se constituyen en el eje fundamental no solo para la elaboración de la propuesta (principio de actividad, principio de realidad y principio de interconexión) sino también su implementación (principio de interacción y principio de reinvención) y análisis de las producciones de los estudiantes (principio de niveles).

2.2.3 El uso de artefactos en la actividad matemática. Según Radford (2012), los artefactos son entendidos como recursos que desempeñan un papel importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, dado que ofrecen nuevas posibilidades para pensar y aprender, contribuyendo así a una mejor comprensión de los conceptos matemáticos. Sin embargo, reconoce que para obtener estos beneficios es necesario estudiar los roles cognitivo, epistémicos y ontológico de ellos en la actividad matemática.

De acuerdo con esta perspectiva, en el diseño de la propuesta de aula que en esta investigación se desarrolla, se asumen el Tangram y las Regletas de Cuisenaire como artefactos cuyos roles se presentan de la siguiente manera: En cuanto al rol cognitivo, estos artefactos no son sólo mediadores o facilitadores de la adquisición de conocimiento sobre los fraccionarios como relación parte-todo, sino que se vuelven parte de la manera en que se llega a pensar sobre estos y a conocerlos, desde esta perspectiva, la presencia de estos dos artefactos modifica cognitivamente la forma como se acercan los estudiantes a los fraccionarios. Referente al rol epistemológico, la inserción de estos artefactos permite concebir el fraccionario como un concepto matemático que no sólo tiene significado en el contexto abstracto de las matemáticas, sino que colabora en la construcción de este concepto, cuyo significado se genera por medio del razonamiento producido por la manipulación de estos artefactos. Además, estos artefactos incorporan formas particulares de comunicación, permitiendo complementar el conocimiento mediante la interacción con otros estudiantes o el mismo profesor (actividad conjunta). Por último, en el rol ontológico estos artefactos se consideran no como un medio para acceder a objetos matemáticos y formas matemáticas de razonamiento, dado que estos no se conciben como entidades trascendentales, estáticas o inmutables, sino como parte de la actividad matemática (como práctica material) de un grupo de estudiantes de grado tercero.

3. Diseño metodológico de la investigación

Para el desarrollo de la presente investigación se asume la metodología cualitativa de corte descriptiva e interpretativa (Monje, 2011), puesto que en este trabajo se busca, a través de la recopilación de información, datos y reflexiones que dejan los estudiantes al interactuar con las actividades propuestas, dar respuesta al objetivo trazado en el estudio. Para lograr esto, primero se ha delimitado el campo de estudio en términos de: ubicar una problemática, adoptar un marco de referencia conceptual, definir el tipo de estudio a realizar (metodología) y configurar el diseño de la propuesta de aula. Luego, llega el momento de la implementación de la propuesta de aula con un grupo de estudiantes de tercer grado de Educación Básica Primaria, donde se obtiene información mediante registros fílmicos y hojas de trabajo donde se expresen las producciones escritas de los estudiantes, para, posteriormente, simplificar la recolecta de datos a partir de la creación de categorías de respuestas afines, lo que permite manejar de mejor manera el corpus de datos recolectado. Por último, se procesa la información recogida de la implementación contrastándola con los fundamentos conceptuales adoptados, para presentar las conclusiones y reflexiones en torno al objetivo trazado en el estudio.

Ahora bien, la propuesta de aula que en este trabajo se realiza está configurada por dos situaciones, la primera vinculada al uso del Tangram y la segunda al uso de las Regletas. A continuación se hace una descripción de la primera de estas, resaltando especialmente los elementos del marco conceptual que en ella se movilizan.

La situación denominada *Fraccionando el Cuadro de Colores* está compuesta por cuatro actividades, cada una de las cuales corresponden a los cuatro niveles de comprensión (matematización horizontal y matematización vertical) descritos en la EMR. En ella se recrea el caso de una profesora de artística que desea colorear un cuadro de vidrio con forma cuadrada para obsequiar, pero éste se le ha caído al suelo partiéndose en siete fragmentos con forma poligonal, coincidiendo con la forma de cada una de las siete fichas del Tangram. Pese a lo sucedido, la profesora decide aprovechar las partes que resultaron para decorarlas con pintura y que de esta forma el regalo no se pierda. A partir de eso se les solicita a los estudiantes desarrollar las actividades. Tal y como se aprecia, la situación se instaura en un contexto de la vida diaria (MEN, 1998), real en el sentido propuesto por Freudenthal (1983), y plantea el uso del Tangram para, mediante un trabajo grupal entre estudiante-estudiante y estudiante-profesor, se aborde, como se verá en adelante, la comparación de las superficies de sus fichas, esto es, para trabajar sobre una magnitud continua. De este modo, se parte del estudio de una situación para que en su matematización propicie el acercamiento a algunos fraccionarios, dando cuenta así de los principios de actividad, realidad e interconexión.

Actividad 1. En esta actividad se les solicita a los estudiantes recortar las piezas que resultaron al quebrarse el cuadro a partir de una cartulina blanca entregada que de antemano tiene marcadas con líneas punteadas dichas piezas, resultando así las siete fichas del Tangram. A partir de la manipulación y visualización de éstas, se propone a los estudiantes analizar qué tipo de forma tienen las figuras (cuadrada, triangular, etc.) y si poseen o no la misma cantidad de superficie. Con esto se promueve el pasaje de un contexto cotidiano a un contexto matemático, dando cuenta del *nivel situacional* (matematización horizontal).

Actividad 2. En esta actividad, se remplaza el Tangram hecho por los estudiantes en papel por uno de madera, cuyas fichas están etiquetadas con una letra y pintadas de colores distintos. A partir de la manipulación con el artefacto, se proponen una serie de preguntas en las que se deben realizar comparaciones, en cuanto a cantidad de superficie, entre las siete figuras del Tangram y el cuadro completo (la unidad). Dicha comparación (medida relativa entre áreas) se puede expresar como la cantidad de veces que cabe la superficie de una figura en la superficie de otra, favoreciendo las comparaciones que dan a lugar a expresiones como: cabe dos veces, está cuatro veces, entre otras, para ir avanzando hacia la construcción de expresiones como “ser la mitad de” o “ser la cuarta parte de” asociadas a las primeras, respectivamente. Así por ejemplo, si la superficie del cuadrado (llamado F) cabe exactamente dos veces sobre la superficie de uno de los triángulos con mayor superficie (llamado A), se genera en el estudiante la idea que la superficie de F es la mitad de la superficie de A. De esta forma, hace presencia el nivel referencial (matematización vertical), por cuanto se describen relaciones matemáticas a través de “modelos de” una situación particular y se inicia así la aproximación a la segunda interpretación (ii), arriba señalada, de la relación parte-todo propuesta por Ohlsson (1988).

Actividad 3. Se propone aquí a los estudiantes la reflexión sobre las expresiones, procedimientos, estrategias y modelos hasta aquí utilizados, para que así logren detectar la existencia de aspectos generalizables de los mismos, permitiéndoles deducir que los modelos construidos no sólo son para una situación en particular, dando a lugar a los “modelos para” la resolución de las mismas. En este sentido, se quiere que la relación cuantitativa de ser un medio de, un cuarto de, etc., no se conciba como exclusiva de la comparación entre dos triángulos del Tangram, más aún, en el contexto propio de la comparación de superficies, sino que se logre generalizar a otros contextos y situaciones. Es así como se promueve en los estudiantes el nivel general (matematización vertical) y se continúa movilizando la segunda interpretación (ii).

Actividad 4. Con esta última actividad se desea, por un lado, que los estudiantes pasen de expresiones en lenguaje natural (“ser un octavo de”) al lenguaje simbólico ($\frac{1}{8}$), es decir, que puedan reconocer la existencia del número fraccionario como el símbolo que expresa las relaciones cuantitativas dispuestas a lo largo de la situación; y por otro, que se construya la idea del fraccionario n/m como las n partes que miden $1/m$ de la unidad. De esta manera, se propicia el nivel formal (matematización vertical) y la primera interpretación (i) de la relación parte-todo propuesta por Ohlsson (1988) en torno a la relación parte-todo de los fraccionarios.

Es pertinente señalar que el manejo del Tangram presenta limitaciones en cuanto al aprendizaje de los fraccionarios, debido a que éste sólo permite el abordaje de algunos de ellos ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$) (Rodríguez y Sarmiento, 2002). Es por ello que se propone abordar una segunda situación vinculada al uso de las Regletas, que propicie el estudio de otros fraccionarios como $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$, entre otros, y mediante el estudio de otra magnitud como lo es la longitud.

Referencias

Cortina, J., Zúñiga, C. y Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática, 25* (2), 7-29.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht. Reidel Publishing Co.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education: China Lectures, Kluwer, Dordrecht.

Goffree, F. (2000). "Principios y paradigmas de una 'educación matemática realista'", Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional, Barcelona, Graó, vol. 9, pp. 151-167.

Llinares, S., y Sánchez, M. (1997). *Fracciones: La relación parte-todo*. Madrid: Síntesis S.A.

Martínez, M., Da Valle, N., Bressan, A. y Zolkower, B. (2002). La relevancia de los contextos en la resolución de problemas de matemática. *Paradigma, 22*(1), 59-94.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Magisterio.

Monje, C. (2011). *Metodología de la Investigación Cuantitativa y Cualitativa Guía Didáctica*. Recuperado de *https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Guia-didactica-metodologia-de-la-investigacion.pdf*

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA. 8*(2), 28-41.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. En J. Hiebert and M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pontón, T. (2008). *Una propuesta multirregistro para la conceptualización inicial de las fracciones* (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Radford, L. (2012). On the cognitive, epistemic, and ontological roles of artifacts. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources mathematics curriculum materials and teacher development* (pp. 282 – 288). New York: Springer.

Rodríguez, C. y Sarmiento, A. (2002). El tangram y el plegado: dos recursos pedagógicos para aproximarse a la enseñanza de las fracciones propias. *Revista EMA, 7*(1), p. 84-100.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Kluwer. Dordrecht. The Netherlands.

Vasco, C. (1994). El archipiélago fraccionario. En A. C. Castiblanco (Ed.), Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas (Vol. 2, pp. 23-45). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Análisis de una prueba diagnóstica relativa a la multiplicación en la Educación Básica Primaria. Una experiencia desde la cualificación y formación docente

Johnny Alfredo **Vanegas** Díaz
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
johnny.vanegas@correounivalle.edu.co
Teresa **García** Franco
Institución Educativa Gimnasio del Calima
Colombia
tedaja20@hotmail.com
Liliana **Escudero**
Institución Educativa Gimnasio del Calima
Colombia
lilianaes9@gmail.com

Resumen

En esta comunicación se presenta el análisis de una prueba diagnóstica sobre la multiplicación, la cual se implementó a un grupo de estudiantes de cuarto grado de Educación Básica Primaria de la Institución Educativa Gimnasio del Calima, sede Gabriela Mistral. Dicho análisis se consolidó a través de un proceso de cualificación y acompañamiento a dos docentes de esa Institución Educativa. En este sentido, se discute, desde la perspectiva del tutor que orientó el proceso, algunas características de la prueba diagnóstico y de la matriz de análisis que se construyó como base para interpretar y evaluar las producciones escritas de los estudiantes. Adicionalmente, se muestran algunos apartados del análisis alrededor de las preguntas más problemáticas para los estudiantes y finalmente, se mencionan algunas implicaciones de dicho análisis en los procesos de formación de los docentes participantes y en la reestructuración de una secuencia didáctica que había sido pensada previamente.

Palabras clave: isomorfismo de medida, producto de medidas, prueba diagnóstica, multiplicación.

Introducción

Desde el año 2014 la fundación Epsa, en alianza con la Universidad del Valle, viene desarrollando un programa de *cualificación y acompañamiento a docentes en el diseño de secuencias didácticas en el área de matemáticas*, el cual busca a través de un proceso de formación y acompañamiento enriquecer las prácticas docentes en el ámbito escolar. Todo esto organizado en cuatro fases planeadas para desarrollarse durante dos años. En la fase I se conforman los grupos de docentes de acuerdo a las problemáticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que ellos mismos identifican; las cuales son documentadas a través de talleres, reflexiones y discusiones enmarcadas en diversas perspectivas: didáctica, curricular, matemática y de herramientas e instrumentos de mediación, concluyendo con una propuesta de diseño de una secuencia didáctica para su reformulación y aplicación en la siguiente fase. De esta manera, la fase II contempla la aplicación de una prueba diagnóstica, el análisis de las producciones de los estudiantes y la planeación de nuevas actividades y/o la reestructuración de las actividades de la secuencia para desarrollar en la tercera fase. La fase III se ocupa de la implementación, gestión y análisis de la secuencia didáctica diseñada, mientras que en la fase IV se propone un acompañamiento al diseño curricular de las instituciones educativas participantes.

La ruta de trabajo que aquí se esboza expone una parte del trabajo desarrollado en la fase II, llevado a cabo en el municipio de Calima-El Darién, por un equipo conformado por dos docentes quienes bajo la orientación de un tutor logran concluir el análisis de una prueba diagnóstica relativa a la multiplicación para el grado cuarto de primaria, la cual se implementó con un grupo de estudiantes de la Institución Educativa Gimnasio del Calima, sede Gabriela Mistral.

La consideración de una prueba diagnóstica, su implementación y respectivo análisis hace parte de la fase II del programa. Si bien, este es uno de los productos finales de la fase, el centro de atención está puesto sobre la configuración de una secuencia didáctica sobre la multiplicación. En consecuencia, el análisis de la prueba diagnóstica se gestiona con el fin de reconocer, entre otros elementos, qué tanto pueden hacer los estudiantes de grado cuarto al enfrentarse a problemas con estructura multiplicativa y cuáles son las dificultades que presentan frente a conceptos asociados con la multiplicación. De esta manera, el análisis de la prueba resulta útil para que los docentes del grupo integren nuevos elementos y reestructuren las actividades planteadas inicialmente en la secuencia didáctica de interés.

Características de la prueba diagnóstica, contexto y participantes

La prueba objeto de análisis en su versión original está constituida por 10 preguntas que incluyen dos tipologías, las primeras ocho son de opción múltiple con única respuesta y las otras dos se corresponden con el tipo de preguntas abiertas, caracterizadas por una formulación precisa que posibilita en su proceso de resolución diferente métodos y procedimientos. Sin embargo, en esta comunicación, únicamente, se discuten algunos resultados obtenidos del análisis de las preguntas cerradas.

Todas las preguntas que integran el diseño de la prueba son producto de un proceso de selección y adaptación de preguntas de selección múltiple, propuestas en los cuadernillos de las *pruebas saber* de los años 2012, 2013, 2014 y 2015 para los grados tercero y quinto[1]. El conjunto de preguntas atiende diversos contenidos específicos, que pueden entenderse en términos de significados y representaciones asociados con la multiplicación de números naturales. Entre tales contenidos se destacan: l*a unidad como agrupamiento, arreglos rectangulares*, *suma repetida de*

[1] Estos cuadernillos pueden descargarse de manera gratuita a través del sitio web: http://www2.icfes.gov.co/estudiantes-y-padres/pruebas-saber-3-5-y-9-estudiantes/ejemplos-de-preguntas-saber-3-5-y-9

sumando iguales, *series proporcionales* y *producto cartesiano*.

La prueba diagnóstica se implementó el día 23 de marzo de 2018, a 26 estudiantes de la Institución educativa Gimnasio del Calima, sede: Gabriela Mistral, del grado cuarto, grupo tres (4-3). La prueba fue desarrollada de manera individual y se utilizó una intensidad horaria de dos horas de clase (60 minutos) para su implementación, la cual fue orientada por la directora de grupo, la profesora Liliana Escudero. Es importante anotar que la selección de este grupo, entre todos los cursos de grado cuarto, tuvo que ver con los buenos resultados obtenidos en la *prueba saber 3 matemática 2012*.

Preliminares del análisis de la prueba diagnóstico

Para analizar la prueba diagnóstica se diseñó una matriz de análisis constituida por: los *contenidos específicos*, *la intención de cada pregunta*, el *desempeño evaluado* y los *indicadores de los tipos de respuestas*, los cuales permitieron interpretar las producciones escritas de los estudiantes.

Para ejemplificar dicha unidad de análisis se toma como referente la pregunta 2. En este caso, el contenido específico remite tanto a la *unidad como agrupamiento* como a las *series proporcionales*. Se trata de una pregunta que busca que los estudiantes piensen en un grupo de grupos, como si se tratara de una unidad (Isoda y Olfos, 2009). Particularmente, el contexto en que se inscribe la pregunta requiere que los estudiantes identifiquen la regularidad de la serie numérica involucrada (para una malla más le sumo tres pelotas más; voy de tres en tres), lo que eventualmente puede llevarlos a reconocer y usar ciertos productos (Itzcovich y Broitman, 2001). El desempeño evaluado se corresponde con uno de los estándares básicos de competencias de matemáticas del pensamiento numérico (MEN, 2006) y se expresa en los siguientes términos: *Resuelvo problemas multiplicativos de proporcionalidad directa a partir de la progresión escalar en las magnitudes*. Finalmente, la Tabla 1 presenta los indicadores considerados para los diferentes tipos de respuestas a la pregunta 2.

Tabla 1.

Características de los tipos de respuestas a la pregunta 2.

<table>
<tr><th>Pregunta 2</th><th>Indicadores de los tipos de respuestas</th></tr>
<tr><td rowspan="3">En un almacén se empacan pelotas de tenis en mallas de la siguiente manera.


Un cliente lleva una caja que contiene 12 mallas como la anterior. ¿Cuántas pelotas se llevó el cliente?
A) 12 pelotas
B) 15 pelotas</td><td>A) Los estudiantes que seleccionan esta respuesta, no identifican la relación de proporcionalidad directa existente entre la cantidad de mallas y la cantidad de pelotas de tenis, al considerar que la cantidad de mallas es igual a la cantidad de pelotas de tenis.</td></tr>
<tr><td>B) Los estudiantes que eligen esta respuesta, adicionan la cantidad de mallas (12) con la cantidad de pelotas de tenis (3). Esto debido a que no diferencian las magnitudes y no referencian que una malla contiene 3 pelotas de tenis, por lo que al aumentar las mallas, la cantidad de pelotas de tenis también aumentará.</td></tr>
<tr><td>C) Los estudiantes que seleccionan esta respuesta, reconocen la proporcionalidad que existe entre la cantidad de mallas y la cantidad de pelotas de tenis (por cada malla hay tres pelotas). Este proceso requiere que el estudiante realice cálculos aritméticos con estrategias multiplicativas</td></tr>
</table>

C) 36 pelotas D) 48 pelotas	D) Los estudiantes que escogen esta respuesta, tienen en cuenta la cantidad de mallas totales (12), pero omiten la información del gráfico y asumen que cada malla contiene 4 pelotas de tenis, por lo que el escalar les da 48 pelotas.

Es importante anotar que los indicadores de los tipos de respuestas, también son producto de las reflexiones que emergen en las discusiones con el grupo de docentes, al revisar investigaciones relacionadas con la temática. Por ejemplo, las investigaciones de Itzcovich y Broitman (2001), Usuga (2014) y Obando (2015) permitieron reconocer una amplia variedad de problemas multiplicativos –problemas de proporcionalidad, de organizaciones rectangulares y de combinatoria– y de estrategias que ponen en juego los estudiantes para su resolución.

Resultados de la prueba diagnóstica

Los resultados obtenidos se organizan en una tabla (Tabla 2) y en diagramas de barras (Figura 1). Es importante recordar que en la implementación de la prueba participaron 26 estudiantes que respondieron las primeras 8 preguntas seleccionando una única opción de respuesta, lo cual facilitó la clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes.

Tabla 2.

Clasificación inicial de las respuestas de los estudiantes.

PREGUNTAS	A	B	C	D	CORRECTA	INCORRECTA	CLAVE
1	2	3	4	17	17	9	D
2	4	1	21	0	21	5	C
3	2	2	3	19	19	7	D
4	4	1	12	9	12	14	C
5	2	4	0	20	20	6	D
6	2	1	0	23	23	3	D
7	7	18	0	1	18	8	B
8	19	0	7	0	7	19	C

Para comprender la información presentada en la Tabla 2, se toma como referente la pregunta 1. En este caso, la respuesta correcta es la opción D (**clave**). Esta pregunta fue contestada por todos los estudiantes, pero solamente 17 de ellos acertaron con la opción correcta, mientras que los 9 restantes escogieron las opciones A (2 estudiantes), B (3 estudiantes), y C (4 estudiantes), las cuales son incorrectas. A continuación, se describen los resultados de la Tabla 2 a través de un diagrama de barras (ver Figura 1), el cual permite visualizar y contrastar entre sí los resultados obtenidos en forma de porcentajes.

Los resultados presentados en la Tabla 2 y en la Figura 1 ponen de manifiesto que las preguntas 1, 4, 7 y 8 fueron problemáticas para los estudiantes; aspecto que se evidencia en el bajo porcentaje de aciertos. Si bien, en la pregunta número uno el 65% de los estudiantes respondió correctamente, los estudiantes restantes (35%) no se han familiarizado con un significado fundamental para construir el concepto de multiplicación, la unidad como agrupamiento. Se requiere entonces que los estudiantes reorganicen sus conocimientos, pensando en un grupo de grupos, superando el obstáculo de pensar solo en el 1 como unidad (Isoda y Olfos, 2009).

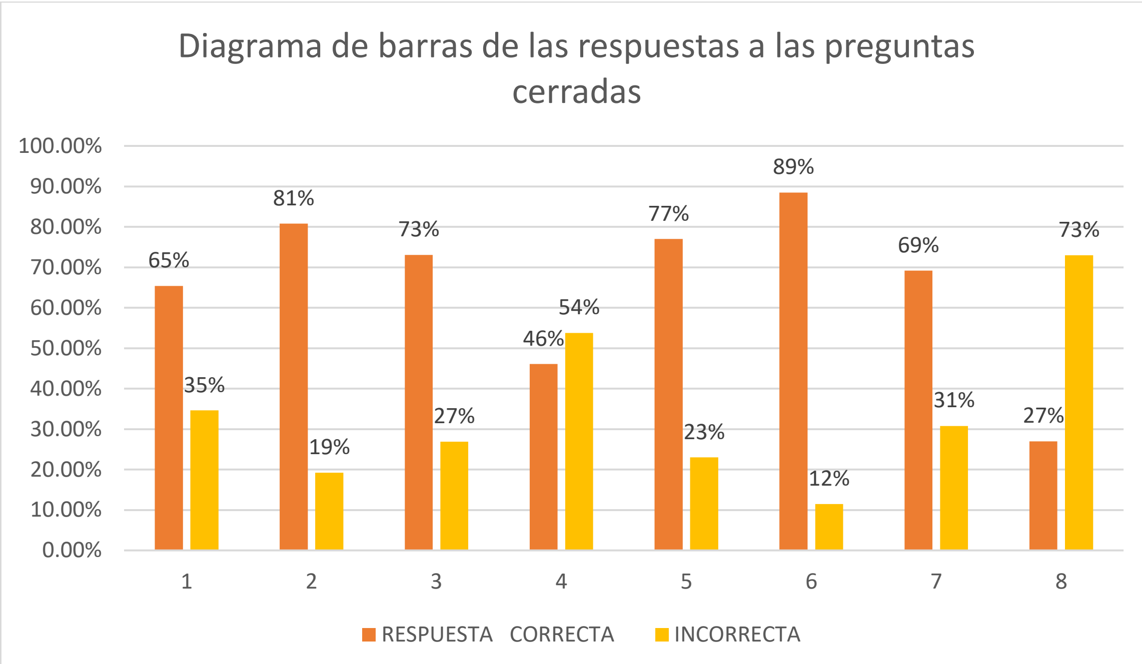


Figura 1. Clasificación porcentual de las respuestas a las preguntas 1- 8.

En el caso de la pregunta número cuatro, los resultados revelan que más de la mitad de los estudiantes (54%) no lograron resolver una situación problemática que involucra un isomorfismo de medida-tipo multiplicación, cuando se emplean representaciones pictóricas. En este sentido, se pone de manifiesto la dificultad que presentan los estudiantes para establecer una relación entre la multiplicación y la proporcionalidad simple directa, cuando se presenta esquemas gráficos (Obando, 2015). En contraste, los resultados obtenidos en la pregunta número siete revelan que un 31% de la muestra responden de manera incorrecta, lo cual parece indicar que la problemática con la estructura matemática de un isomorfismo de medida está más arraigada al trabajo con representaciones pictóricas y no tanto, cuando se proponen problemas en un contexto eminentemente numérico.

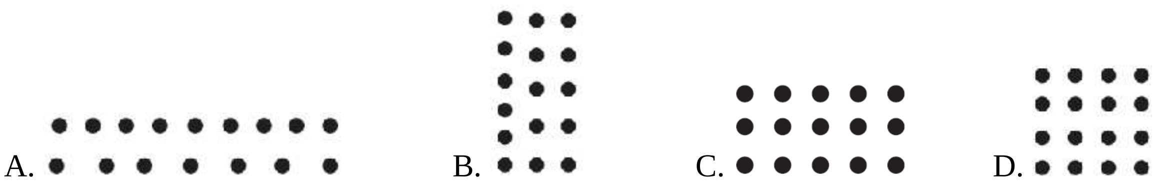
De manera general, los resultados obtenidos en las preguntas cuatro y siete sugieren un mayor trabajo con problemas que integran este tipo de estructuras (isomorfismo de medidas), favoreciendo las formas de razonamiento típicamente multiplicativas –variación conjunta de dos o más cantidades– *en las que la variación de una de las cantidades condiciona el proceso de variación en la otra* (Obando 2015).

Finalmente, se destacan los resultados de la pregunta número ocho, puesto que se pone en evidencia la dificultad que presentan los estudiantes para resolver un problema asociado al producto de medidas (combinatoria). Los resultados obtenidos sugieren mayor trabajo con este tipo de escenarios, dado que son muy pocos los estudiantes (27%) que establecen una relación entre la multiplicación y los contextos que involucran diferentes tipos de combinaciones. En consecuencia, se puso de manifiesto la necesidad de incluir más actividades, como parte de la secuencia didáctica en construcción, que orientaran el trabajo de los estudiantes hacia la búsqueda de estrategias para encontrar las combinaciones que se pueden establecer entre los elementos de dos colecciones con independencia de colocación de los mismos (Itzcovich y Broitman, 2001). Este hecho fue tan representativo para el grupo de docentes que, al examinar los libros de texto empleados por ellos mismos, lograron constatar que son escasos los problemas de esta índole, pese a que las directrices curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) consideran su introducción para el cuarto grado de Educación Básica Primaria.

A continuación se exponen algunas de las preguntas que integran la prueba diagnóstica. Estas han sido consideradas porque a) permiten visualizar los contenidos específicos tratados y b) dan cuenta de las preguntas más problemáticas para los estudiantes. Además, se incluye una pequeña descripción del análisis organizado y desarrollado por los docentes participantes, entorno a la pregunta 1.

Primera pregunta

1. Un profesor debe organizar a sus 16 estudiantes en filas con igual número de integrantes. ¿Cuál de las siguientes alternativas le sirve al profesor?



En relación con esta pregunta, se puede apreciar que la mayoría de los estudiantes (65.4%) contestaron correctamente, quizá porque hicieron una buena interpretación del enunciado, al identificar las dos condiciones dadas, 1) que la configuración debería tener 16 puntos y 2) que cada fila debería tener igual número de integrantes.

Por otra parte, al analizar las respuestas incorrectas de los estudiantes se logró establecer al menos dos tipologías, a saber: a) los que contaron el número de puntos en la organización rectangular y no tuvieron en cuenta la organización de las filas, es decir, que escogieron las opciones A y B, y b) los que observaron unas filas bien organizadas, pero no tuvieron en cuenta el número total de puntos, es decir los que respondieron la opción C. En consecuencia, estos estudiantes no interpretan las relaciones de un número natural múltiplo de otro, a partir de un arreglo rectangular. Además, las respuestas escogidas, en este caso, da indicios sobre que los estudiantes no han logrado construir el significado de la multiplicación como una suma de sumando iguales, que responde al hecho ilustrado gráficamente en el arreglo rectangular planteado.

Séptima pregunta

7. Una familia compuesta por **3 adultos** y **2 niños** desea ingresar al circo. Al pagar las entradas en la taquilla les cobrarán

A. $26.500	B. $28.500
C. $18.500	D. $27.000

Octava pregunta

8. En una pequeña reunión hay 2 niños y 3 niñas. ¿Cuántas parejas distintas se pueden formar?

A. 2 parejas B. 4 parejas C. 6 parejas D. 12 parejas

Reflexiones finales

El análisis elaborado por el grupo de docentes (en compañía del tutor), permitió reconocer el papel de la prueba diagnóstica como instrumento de apoyo en la identificación de fortalezas y debilidades conceptuales por parte de los estudiantes, frente al contenido matemático de interés. En particular, dicho análisis dejó entrever los aspectos del proceso de aprendizaje de los niños, en los cuales debía hacerse énfasis, tales como: el trabajo con problemas de estructura multiplicativa que involucran el *producto de medidas* (producto cartesiano), el *isomorfismo de medidas* (series proporcionales) y la *unidad como agrupamiento*. En consecuencia, los docentes empezaron a reflexionar sobre las situaciones multiplicativas como aquellas en las que intervienen al menos dos clases de elementos y necesariamente una relación constante, enriqueciendo de este modo la visión simplista de la multiplicación como "una suma de sumando iguales" (Fernández, 2007).

Finalmente, es importante mencionar que este ejercicio de formación docente promueve espacios para que ellos hagan una reflexión profunda sobre su quehacer en el aula, por ejemplo: al reconocer que el análisis de las producciones escritas de sus estudiantes va más allá de una simple descripción numérica y que por tanto, se requiere un componente interpretativo que ayude a identificar dificultades e incluso, que aporte en la construcción de nuevas estrategias de intervención en el aula.

Referencias

Fernández, J. (2007). La enseñanza de la multiplicación aritmética: una barrera epistemológica. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 119-130.

Isoda, M., & Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas: en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Itzcovich, H., & Broitman, C. (2001). Orientaciones didácticas para la enseñanza de la multiplicación en los tres ciclos de la EGB. Dirección de Educación General Básica, Argentina.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares Básicos de Competencias. Bogotá: Magisterio.

Obando, G. (2015). Profesora, ¿qué es multiplicar? Trabajo derivado de la tesis doctoral que lleva por título: sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica. Universidad del Valle, Colombia.

Usuga, O. (2014). Diseño de una unidad didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la multiplicación de números naturales en el grado tercero de la Institución Educativa Antonio Derka Santo Domingo del municipio de Medellín. Tesis inédita de maestría. Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

La importancia de los ambientes para el aprendizaje una experiencia desde multiplicación de los números Naturales

Mary Luz **Bernal** Pinzón
Magister en Educación, Facultad de Educación, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Marlubernapi@yahoo.es

Alba Soraida **Gutiérrez** Sierra
Doctorando en Educación, Universidad Metropolitana de Educación Ciencia y Tecnología Panamá
albasoraidagutierrez@gmail.com

Resumen

La presente comunicación, pretende mostrar la relación entre la didáctica y ambientes para el aprendizaje; se inicia con el recuento sobre cómo ha venido empleándose la didáctica de una forma instrumental haciendo un paralelo en la teoría de Shulman (1986).Se resalta la importancia de la enseñanza y aprendizaje en el contexto escolar, como un reto para la educación actual, pues el maestro como agente dinamizador debe propiciar ambientes de aprendizaje, en los cuales el estudiante interactúa con el conocimiento para llegar a la apropiación de conceptos abstractos más elaborados. Se muestra una experiencia relacionada con la didáctica de las matemáticas en la construcción del concepto de multiplicación en números naturales utilizando el conocimiento Didáctico del contenido CDC.

Palabras clave: didáctica, ambientes de aprendizaje, multiplicación, números naturales.

Algunas posturas sobre didáctica

Cuando se habla de didáctica, se piensa en diferentes estrategias que motivan, técnicas y actividades novedosas, creativas, además de elementos que se pueden involucrar dentro de la construcción del aprendizaje, pero no como una manera de ir moldeando y reflexionando sobre la praxis educativa, donde esta reflexión debe permitir el hecho de sobrepasar las barreras de los contenidos que se imparten dentro del aula y conducir a una dimensión donde se potencialice el desarrollo de competencias individuales y sociales.

Por ejemplo, la mirada que ofrece Astolfi (1998) sobre didáctica, hace reflexión sobre la epistemología del contenido (registro epistemológico) convirtiendo ese conocimiento en actividades que permitan mirar las potencialidades, comprensiones o dificultades en el estudiante (registro psicológico) luego, realizar actividades donde el educando pueda dar cuenta de su apropiación y comprensión del concepto (registro pedagógico).Lo más importante es la interacción que hay entre saber-alumno y maestro. (Astolfi, 1998); frente a esta postura existe una figura ampliamente dominante en el campo didáctico francés conocida como triangulo didáctico, que relaciona los tres sujetos que intervienen en el hecho y el acto educativo: el saber, el profesor y alumno

En conformidad con lo anterior, Zambrano (2005) expresa que la didáctica es una ciencia que tiene por objeto la reflexión, sobre cómo organizar y orientar situaciones de enseñanza con el finde obtener la construcción de saberes, además de la formación intelectual del educando. Es decir, el papel de la didáctica en relación con el ambiente de aprendizaje, es una disciplina científica que problematiza, reflexiona, produce saber, conocimiento sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de un saber especifico. Por tal razón se debeentender qué es un ambiente de aprendizaje y qué conlleva en la práctica educativa.

Por su parte, Castaño & Fonseca (2008) se refieren a la didáctica, como una disciplina reflexiva, que le permite al docente cuestionarse constantemente sobre lo que sucede en torno a su quehacer pedagógico, donde lo invita a transformar su praxis, teniendo en cuenta que sus estudiantes no son simples objetos receptores, sí no que ellos se deben involucrar de manera directa en la construcción del conocimiento, haciendo de estos sujetos más críticos y auto-reflexivos.

Ambientes para el aprendizaje y su relación con la didáctica.

Existe una gran variedad de opiniones y conceptos en cuanto al término ambientes de aprendizaje, para este caso se toman algunas pautas en el análisis sobre ambiente educativo dadas por Duarte (2003) en ellas se destaca lo siguiente: el ambiente es concebido como una construcción diaria, reflexión cotidiana, singularidad permanente que asegura la diversidad y con ella la riqueza de la vida en interacción con el mismo, induce a pensar el ambiente educativo como sujeto que actúa con el ser humano y lo transforma. Es un espacio y un tiempo en movimiento, donde los participantes desarrollan capacidades, competencias, habilidades y valores.

Desde este punto de vista, cabe realizar un paralelo entre la didáctica como acción transformadora, y la construcción de un ambiente para el aprendizaje donde "El estudio de los diferentes discursos y la observación de las diversas prácticas en la educación relativa al ambiente ha permitido identificar seis concepciones sobre el mismo: El ambiente como problema, El ambiente como recurso, El ambiente como naturaleza, El ambiente como biosfera, El ambiente medio de vida y El ambiente comunitario". (Duarte, 2003, p.99). Es decir paragenerar ambientes educativos, la escuela debe integrar abiertamente cada uno de los mencionados anteriormente para llegar a la construcción de diversos saberes que influyen en la calidad de vida de cada integrante

El conocimiento didáctico del contenido y sus elementos (CDC)

El CDCes especialmente importante, pues en él se identifican los diferentes estadios de conocimientos para la enseñanza. Como señala Shulman (1987):

> Representa la relación entre materia y didáctica por la que se llega a una comprensión de cómo determinados temas y problemas se organizan, se representan y se adaptan a los diversos intereses y capacidades de los educandos, y como éstos son transformados para su enseñanza. El CDCde la materia es la categoría que con mayor probabilidad permite distinguir entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del maestro. El CDC trata de cómo puede ser interpretado el contenido específico en una situación de enseñanza (Cooney, 1994). Supone la comprensión de tópicos centrales en cada materia por parte del profesor y que éste sea capaz de responder a los siguientes tipos de preguntas acerca de cada tópico: ¿Qué conceptos clave, habilidades y actitudes potencia este tópico en los estudiantes? ¿Cuáles son los aspectos de este tópico que son muy difíciles de entender para los estudiantes? ¿Cuál es el más grande interés intrínseco del estudiante? ¿Qué analogías, metáforas, ejemplos, demostraciones, simulaciones, manipulaciones u otras formas parecidas son más eficaces para lograr que los alumnos comprendan este tópico? ¿Cuáles preconcepciones de los estudiantes son posibles de considerar en su forma de aprender el tópico? (Shulman y Sykes, 1986, p. 9.)

Una experiencia didáctica desde el CDC

La siguiente experiencia se trabajó en la Institución Educativa la Cabaña, del municipio de Maripi; con niños de segundo y tercer grados de primaria al estudiar las tablas de multiplicar.

Para el diseño del ambiente para el aprendizaje a la luz del CDC se partió de:

Creencias de los estudiantes

Se empezó indagando a los niños si habían escuchado el término tablas de multiplicar y de que otra manera se realizaba, ellos daban diferentes anotaciones, se les puso varios ejemplos cotidianos para que ellos dieran cuenta que era igual a la suma, se les hizo ver la importancia de este concepto en la vida cotidiana, y los resultados que tienen en el aprendizaje de las matemáticas y facilidad para realizar cualquier operación.

Proceso de toma de decisiones en la enseñanza

A partir de las creencias y los preconceptos que se evidenciaron en los estudiantes se plantearon diferentes problemas y situaciones cotidianas empleando la suma para resolverlos; es aquí donde ellos proponen otras maneras de multiplicar, sin dejar atrás la importancia de generar ambientes de aprendizaje y trabajo colaborativo.

Esta experiencia fue de gran ayuda, puesto que propicioreflexión sobre la acción, contribuyendo al beneficio de un ambiente de aprendizaje donde el docente investiga ese saber científico y busca apoyo en la didáctica, no solo como herramienta sino más a manera de que el estudiante en la interacción con el saber pueda dar cuenta de sus dificultades y fortalezas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, dando pistas al maestro de cambiar, mejorar o innovar para que este proceso sea más flexible al niño.

Shulman(1986) lo denominó “conocimiento de la valoración de aprendizaje” en este caso las tablas de multiplicar. Frente al conocimiento del plan de estudios, se tuvieron en cuenta tres aspectos:

Materiales curriculares

Una de las actividades que realizaron los niños fue entrevistar a los diferentes docentes de la Institución, en este caso se inició con el profesor del área de matemáticas. El cual dió respuestas similares al apropiar el concepto por ellos, de esta manera evidenciaron que no sólo hay una manera de aprender las tablas, sino que existe la posibilidad de realizarlas mediante la suma consecutiva, antes de dar un concepto como tal, cada niño escribió el concepto de tablas de multiplicar de acuerdo con lo que había entendido. También ayudó la utilización de materiales del medio (piedras, semillas, tapas) el ábaco, yupana, etc. Esto con el fin de facilitarle al niño el proceso sumatorio que permite llegar a la multiplicación.

Exploración de los Números

Un primer acercamiento al concepto tablas de multiplicar se dio contando la historia de cómo éste se convirtió en un saber enseñable, como herramienta se utilizó una fotografía de Pitágoras de Samos, Grecia, quien inventó las tablas de multiplicar y dejó como parte de su legado el cuadro pitagórico. Esto les permitió a los niños contextualizarse con la construcción histórica del concepto.

Interdisciplinaridad del saber

Se realizó una actividad en el área de inglés cuyo objetivo era entrelazar el concepto tablas de multiplicar y el fortalecimiento en el Bilingüismo, los niños respondían preguntas que la maestra hacía en inglés a cerca de sumas abreviadas con problemas que involucraban la utilización de éstas.

Otras de las actividades que permitió el trabajo colaborativo fue una actividad lúdica llamada; Pepe el pescador. Los estudiantes se organizaron grupos de cuatro para pegar pescados. Cada equipo elegía a un niño para ir a pescar, en cada figura se encontraba escrita una multiplicación, ejemplo (2x8), ellos tenían que resolverla sumando tantas veces el numero como lo indicaba, este ejercicio reforzó el concepto de que multiplicación.

De esta forma se evidenció claramente cómo la didáctica jugó un papel necesario para la construcción de dicho concepto.

Métodos de Evaluación

Para evidenciar el aprendizaje apropiado por los estudiantes se utilizaron diferentes estrategias de evaluación tales como:

Lluvia de ideas, construcción del concepto a través de entrevistas directas, análisis y solución de problemas que se les plantearon.

Conclusiones

En la actualidad algunas investigaciones han hecho evidente el gran desinterés de los estudiantes, pues ellos no interiorizan la importancia de aprender para la vida, si va a la escuela o no; para él ya no es de gran importancia, el profesor ya no tiene ese mismo ímpetu que poseía hace unos años, los estudiantes van a la escuela a realizar todo tipo de actividades como: jugar, descansar del trabajo de casa, compartir con los amigos pero no a compartir conocimientos ni mucho menos como superar las dificultades vistas en clase, es aquí donde el maestro apoyándose en el CDC, realiza una transformación en la práctica cotidiana, generando ambientes que saquen de la monotonía su forma de enseñar e inviten a la interacción docente-estudiante-conocimiento.

En relación con lo anterior frente a esta postura, se podría indicar que algunas dificultades presentadas en el proceso de aprendizaje cuestionan conclusiones aparentemente evidentes a las que pueden llegar los profesores y padres, desde un análisis superficial, y simple, que podrían resumirse en atribuir el fracaso o demora del educando en la adquisición de los conocimientos de ciencias a determinadas características personales, cómo la falta de capacidad para aprender, de esfuerzo, de motivación, asociados a problemas de disciplina. Estas conclusiones hechas a la ligera impiden ver que existen problemas ocultos en los propios saberes y la forma en que estos son traspuestos, dificultando o hacen imposible un aprendizaje comprensivo, generando en elestudiante un sentimiento de incapacidad y desinterés.

Referencias

Astolfi J.(1998). *Estudios Pedagógicos, conceptos clave en la didáctica de las disciplinas.* Primera edición, 1998, pp. 73-82. Universidad de Sevilla .Sevilla, España.

Castaño& Fonseca.(2008).*La didáctica un campo de saber y de prácticas*. En R.S.otros,Contextos y pretextos sobre pedagogía,(pags.73-95). Bogotá: Fondo Editorial UPN.

Cooney, T. J. (1994), "Research and teacher education: In search of common ground", *Journal for* Research *in Mathematics Education,* vol. 25, núm. 6, pp. 608-636

Duarte D., J.(2003).*Ambientes de aprendizaje: una aproximación conceptual Estudios* Pedagógicos, núm. 29, 2003, pp. 97-113. Universidad Austral de Chile. Valdivia, Chile.

Shulman, L.S. y G. Sykes (1986).A*national board for teaching?: In search of bold standard*, Paper commissioned for the task force on teaching as a profession, Carnegie Forum on Education and the Economy, marzo.

Smith, D.C. y D.C. Neale (1989), *The construction of subject matter knowledge in primary* science *teaching*, Teaching and Teacher Education, vol. 5, núm. 1, pp. 1-20.

Zambrano A.(2005). *La didáctica lugar en las ciencias de la educación*.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Enseñanza de la división, basada en justificaciones, con estudiantes de primaria

Candy Clara **Ordoñez** Montañez
Universidad Nacional de Cañete
Perú
cordonez@undc.edu.pe

Resumen

Existen investigaciones que muestran la importancia de incluir a las justificaciones como medio para enseñar las matemáticas. En ese sentido, este trabajo pretende investigar las condiciones en las que es posible lograr que los estudiantes de tercer grado de primaria sean capaces de construir la noción de división de números naturales cuando la enseñanza es basada en justificaciones. En este estudio participaron estudiantes de tercer grado de primaria de un colegio estatal. Las actividades que se diseñaron y aplicaron estuvieron enmarcados en una noción intuitiva que busca la construcción gradual de la noción de división. En el análisis de las respuestas de los estudiantes obtuvimos como principal hallazgo el logro de la comprensión de manera significativa de la relación existente entre el residuo y el divisor de una división de números naturales.

Palabras clave: enseñanza, división, repartición, justificación, primaria.

Introducción

En las últimas décadas, los documentos referidos a estándares de aprendizaje han enfatizado en la importancia de desarrollar las habilidades de los estudiantes para generar y criticar argumentos matemáticos en todos los grados de los diferentes niveles (Bieda, et al., 2013). Nuestro país no es ajeno a ello, pues en el Currículo Nacional (2016), propuesto por el Ministerio de Educación de Perú, contempla en sus cuatro competencias matemáticas la capacidad de la argumentación de afirmaciones (elaborar, justificar, validar o refutar afirmaciones). Sin embargo, todavía, resulta ser una capacidad matemática poca desarrollada en nuestros estudiantes de todos los niveles, especialmente, del nivel primario. En ese sentido, creemos que una forma de desarrollar esta capacidad y lograr la construcción de conocimientos matemáticos es con una enseñanza basada en justificaciones. Desde la perspectiva presentada por la investigadora Vallejo (2012) explica que las justificaciones matemáticas de un estudiante del nivel de primaria o secundaria se entienden como aquellos primeros argumentos que presentan los estudiantes que se inician en los procesos demostrativos. Es decir, es un sentido más amplio que la demostración matemática. Por otro lado, existen investigaciones que muestran la relevancia de las justificaciones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que son implícitas en temas afines. Por su parte, De Villiers (2001) manifiesta que la demostración cumple varias funciones, no sólo consiste en la verificación de proposiciones matemáticas, sino contribuye a la creación de nuevos resultados. Asimismo, Reid (2011) señala que probar es un tema fundamental para las matemáticas, en que debe ser visto como una forma de desarrollar la comprensión de los conceptos matemáticos y de descubrir nuevos y significativos conocimientos matemáticos. De otro lado, tenemos el estudio de Stylianou (2011) el cual manifiesta que los estudiantes de nivel primario traen consigo una inclinación natural por probar, convencer o convencerse y que esto puede aprovecharse para ser cultivada en su pensamiento matemático. De igual modo, Schifter (2011) investiga sobre los argumentos que emplean los estudiantes en el nivel primario cuando se da una práctica docente basada en pruebas. En su estudio, uno de los casos que presenta es el de un profesor que trabaja los números pares e impares con sus estudiantes de tercer grado de primaria, que conjeturaron que la suma de dos números pares es par. La investigadora reporta cuatro categorías de argumentos que intentan probar la conjetura planteada; a partir de ello, le conlleva a concluir que los estudiantes son capaces de justificar afirmaciones de carácter general empleando como argumento la representación de objetos físicos, imágenes, diagramas o contextos de historias. Es por esa razón, que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediante pruebas permiten explorar las nociones intuitivas e informales de la prueba y cómo estas pueden nutrirse de tal manera que sientan las bases para realizar pruebas matemáticas en grados posteriores. Investigaciones como las mencionadas muestran el papel importante de la demostración, la prueba y la estrecha relación con las justificaciones, siendo de sumo interés para la comunidad de la Educación Matemática y para la Comunidad Matemática. En ese sentido, este trabajo tiene como objetivo mostrar qué condiciones permiten a los estudiantes de tercer grado de primaria construir el conocimiento de la división de los números naturales cuando la enseñanza es basada en justificaciones.

Justificación matemática

Nuestra postura acerca de las justificaciones matemáticas se refiere a todos aquellos argumentos que permiten validar la veracidad o falsedad de una afirmación matemática, ya sea que se haya planteado como tal, o que esté involucrada en una pregunta. Un ejemplo de esto último es el siguiente caso que muestra dos maneras "equivalentes" de plantear un mismo problema.

- Planteado como una afirmación: Determine el valor de verdad de la siguiente afirmación y justifique su respuesta: "un residuo de una división con divisor 3 puede ser el número 4".
- Planteado como pregunta: ¿4 es un residuo de una división con divisor 3? Justifique su respuesta.

Observamos que para justificar la veracidad o falsedad de ambos problemas se requerirán básicamente de los mismos argumentos, ya que en esencia es el mismo problema. Por otro lado, entre los argumentos que se pueden emplear para una justificación tenemos: definiciones, resultados previamente justificados, ejemplos, contraejemplos, etc. La elección del argumento adecuado dependerá básicamente del tipo de problema que nos planteen: dependerá específicamente de si un problema es particular o general.

División como repartición equitativa y máxima

Lay (2009) considera que las pruebas (o justificaciones) dependen de buenas definiciones, ya que si estas últimas son inadecuadas no podemos esperar que los estudiantes puedan construir pruebas válidas. En base a ello, el presente trabajo toma la propuesta de Vallejo (2012) quien define la división de números naturales en función de la noción de la repartición equitativa y máxima como se esquematiza en la siguiente figura:

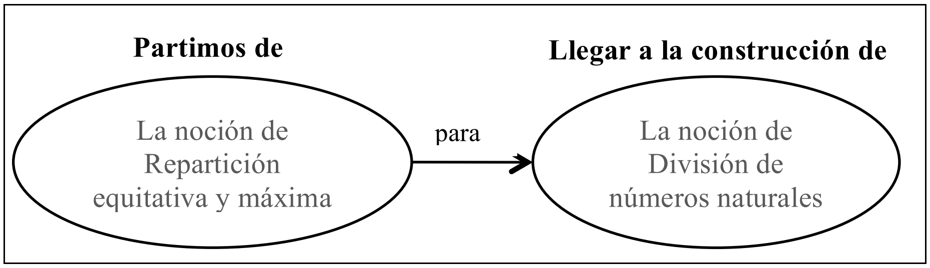


Figura 1. Esquema tomado de la investigación de Ordoñez (2014).

La noción de repartición equitativa y máxima cumple un rol importante en el desarrollo de este trabajo de investigación, es así que, explicamos los diferentes tipos de reparticiones a partir de los aportes de la investigadora Vallejo (2012) que se resume en la tabla 1.

Tabla 1
Tipos de reparticiones y sus ejemplos

Nociones	**Significado**	**Ejemplo de las reparticiones (ER):** Repartimos 15 lápices entre Hema y Felipe
Repartición equitativa	Repartición en la que cada persona recibe un mismo número de objetos.	ER: Entregamos a Hema 6 lápices y a Felipe 6 lápices y nos sobra 3 lápices después de la repartición.
Repartición máxima	Repartición en la que se reparte la mayor cantidad de objetos. Es decir, no sobra objetos después de la repartición.	ER: Entregamos a Hema 7 lápices y a Felipe 8 lápices.
Repartición equitativa y máxima	Repartición en la que cada persona le corresponde una misma cantidad de objetos y a la vez recibe la mayor cantidad posible de objetos.	ER: Entregamos a Hema 7 lápices y a Felipe 7 lápices y nos sobra 1 lápiz después de la repartición.
Repartición natural	Repartición en la que el número de objetos que le corresponde a cada persona es un número natural.	ER: Entregamos a Hema 5 lápices y a Felipe 10 lápices. Las dos personas tienen un número natural de lápices
Repartición Libre	Repartición que no presenta condición alguna.	ER: Entregamos a Hema 8 lápices y a Felipe 5 lápices y nos sobra 2 lápices después de la repartición.

Fuente: Nociones de reparticiones tomadas de Vallejo (2012)

Las reparticiones libres, reparticiones equitativas, reparticiones máximas por sí solas se caracterizan por tener más de una respuesta. Mientras que las reparticiones del tipo equitativas y máximas a la vez admiten una única respuesta. En base a la noción de repartición equitativa, y máxima la autora define división y divisibilidad (Vallejo, 2012, p. 153-157). En este trabajo nos concentramos en la noción de división, la cual define en términos de repartición:

> División de X entre Y como una repartición equitativa, máxima y natural de X objetos entre Y sujetos.

Metodología

Contexto y muestra

Este trabajo se llevó a cabo con 24 estudiantes del tercer grado de primaria, entre 8 y 9 años de edad, de un colegio estatal de Lima-Perú. Antes de desarrollar la investigación, ninguno de ellos contaba con conocimiento alguno sobre división de números naturales. Sin embargo, tenían como conocimiento previo la noción de adición, sustracción y multiplicación de números naturales. Por otra parte, el Currículo Nacional (2016) contempla la enseñanza y aprendizaje de la noción de división en el nivel 4 de los estándares de aprendizaje. Concretamente, en el tercer grado de primaria, es por esa razón que la investigación se sitúa en ese grado.

Procedimiento

Para la elaboración de nuestras actividades nos hemos basado en las nociones que presenta Vallejo (2012), pues presenta una propuesta de enseñanza por medio de justificaciones. La investigación se desarrolló en 14 sesiones, todas estas situaciones han sido diseñadas con el propósito de construir gradualmente las nociones de divisiones y divisibilidad de números naturales a partir de la noción de repartición equitativa y máxima. Nos centraremos en las 7 primeras sesiones, ya que estas estuvieron orientadas a la construcción de la noción de división de números naturales. Estas sesiones se han desarrollado en base a tres tipos de actividades: *Trabajo en clase* (todos los estudiantes con la guía de la investigadora), *Trabajo en grupos* (los estudiantes de manera grupal y sin la guía de la investigadora) y *Trabajo individual*.

Tabla 2
Resumen de sesiones y actividades

Sesión (*S*) y tipo de trabajo	**Actividad (*A*) y nociones trabajadas (*N*)**	**Propósito**
S1 Trabajo en clase y trabajo en grupos	*A: Situación “El álbum de frutas”* *N:* Repartición libre, equitativa, máxima, natural y libre.	*Caso: división con divisor fijo 2* Trabajar con un álbum de 2 páginas para repartir y pegar figuritas de frutas.
S2 Trabajo en clase y trabajo en grupos	*A:Situación “La promesa de las canicas”* *N:*Repartición equitativa y máxima	*Caso: división con divisor fijo 3* Trabajar con 3 bolsas de mallas para repartir canicas
S3 Trabajo individual	*A:Ficha “La promesa de las canicas”* *N:*Repartición equitativa y máxima	*Caso: división con divisor fijo 3* Conjeturar que existe infinitos números naturales que son divisibles entre 3.
S4 Trabajo individual y trabajo en clase	*A:Ficha “Reparticiones equitativas y máxima”* *N:*Repartición equitativa y máxima	*Caso: división con divisor fijo 3* Identificar las razones por las que 3 no pueden ser un valor del residuo en una división con divisor igual a 3.
S5 Trabajo en clase	*A:Ficha “Reparticiones equitativas y máxima”* *N:*Repartición equitativa y máxima	*Caso: división con divisor fijo 3,4 y 5* Identificar los posibles valores del residuo en una división con 3, 4 y 5.
S6 Trabajo en clase	*A:Situación: “Goles con premio”* *N:* Repartición exacta e inexacta	*Caso: división con dividendo fijo 24* Determinar los divisores de 24, en función de la noción intuitiva, para que cumpla la repartición exacta e inexacta
S7 Trabajo individual	*A:Situación: “La radio”* *A:Ficha: “Repartiendo entradas de forma equitativa y máxima”* *N:*Repartición exacta e inexacta	Identificar y justificar por qué las reparticiones son de tipo exacta o inexacta

Principales hallazgos

Para el análisis de las justificaciones de los estudiantes tanto individuales y grupales se han tenido en cuenta la puesta en práctica de las secuencias de actividades, así como también, las transcripciones que se han obtenido de las grabaciones en las sesiones de clases. Principalmente, el análisis de la información recopilada es cualitativa. Por otro lado, en esta investigación se combinan dos elementos relevantes de la enseñanza basada en las justificaciones: establecer un marco conceptual a partir del cual justificar y establecer como expectativa que las respuestas deben justificarse dentro de ese marco. Estos dos elementos se evidencian en las respuestas de los estudiantes dados a partir de la situación siguiente:

> ***Promesa de las canicas:*** Luis y sus amigos juegan un partidito de canicas. Esta vez Luis tiene presente que el día anterior había prometido a sus tres primos que les obsequiaría las canicas que gane en su próximo juego. Luis ha pensado en detalle cómo hará la repartición de las canicas que gane entre sus tres primos: "*Repartiré entre ellos la mayor cantidad de canicas que pueda, respetando que cada uno de ellos tenga una misma cantidad de canicas, así todos quedan contentos. Yo me quedaré con las canicas que sobren después de la repartición*". (Ordoñez, 2014, p.102)

A continuación, presento fragmentos de las transcripciones obtenidas en las sesiones.

Investigadora: ¿Podrá Luis tener 3 canicas después de repartir 12 canicas entre sus 3 primos?

Estudiante 1: No, porque Luis tiene que repartir la cantidad máxima de canicas.

Investigadora: Entonces, ¿no ha repartido la cantidad máxima de canicas?

Estudiante 2: No, todavía esas 3 (canicas) las puede repartir a sus primos

Investigadora: Ahora, ¿cuánto le corresponde a cada primo?

Estudiante: 4 canicas a cada primo y a Luis le sobrarían 0 canicas.

[...]

Investigadora: ¿con cuántas canicas como máximo se puede quedar Luis después de repartir cierta cantidad de canicas entre sus 3 primos?

Estudiante 3: 2 canicas

Respecto a este fragmento, notemos que las respuestas de los estudiantes proporcionan justificaciones en base a las expectativas que las respuestas han de tener dentro de un marco conceptual. En este caso, se estableció un marco conceptual, parte de ese marco es la noción de repartición máxima. Además, la justificación que presenta el estudiante 1 está basada en dicha noción; mientras que, el estudiante 2 considera la redistribución de canicas, de esa manera aplica la noción de repartición máxima. Es relevante mencionar que la enseñanza por medio de justificaciones permite construir la noción de división, pues comprenden y justifican por qué no puede ser el resto 3 cuando la división presenta como divisor a 3.

[...]

Investigadora: ¿Qué pasaría si Luis tiene 4 primos?, ¿con cuántas canicas Luis puede quedarse después de la repartición de un cierto número de canicas?

Estudiante 4: con 0, 1, 2 y 3 canicas

Investigadora: Ahora, Luis tiene 6 primos, ¿con cuántas canicas Luis puede quedarse después de la repartición de un cierto número de canicas?

Estudiante 5: 0, 1, 2, 3, 4 y 5 canicas

Investigadora: ¿por qué no le pueden quedar más de 5 canicas?

Estudiante 6: porque si fuera 6 canicas, tendría que repartirlas a sus primos.

Este fragmento, nos da señales claras que esta forma de enseñanza por medio de justificaciones permite que los estudiantes puedan construir la noción de división, y esto se evidencia cuando determinan los posibles valores que toma el resto cuando la división es por 4 y por 6. Cabe señalar que en las preguntas que se planteó solo tenían como dato el divisor (número de primos), pero esto no fue impedimento para que logren dar los posibles valores del residuo de la división (número de canicas que le quedan a Luis después de la repartición). Creemos que este tipo de respuestas dadas por los estudiantes conllevan a que más adelante hagan generalizaciones en relación al resto y el divisor de la división. Por otra parte, la intervención del estudiante 6 lo consideramos como una justificación, ya que emplea un ejemplo y se evidencia el uso de la noción de repartición máxima.

Investigadora: Luis tiene 672 primos, ¿con cuántas canicas se puede quedar Luis después de a la repartición de las canicas?

Estudiante 7: 671 canicas

Estudiante 8: también, 669, 668, …

Investigadora: ¿con cuántas canicas como mínimo se puede quedar Luis?

Estudiante 9: con 0 canicas.

Este último ejemplo y otros más, conlleva a deducir que los estudiantes han logrado comprender, justificar y construir su propio conocimiento de división, particularmente, cuando el residuo de una división no puede ser igual o mayor al divisor de la división. Por otra parte, en las transcripciones, hemos ilustrado el papel que tomó las justificaciones en la enseñanza de la división y como el establecimiento de la noción de la repartición máxima permitió que las justificaciones estén dentro del marco de dicha noción.

Según el esquema (ver figura 1) el logro de la construcción de la división se debe a la noción de repartición equitativa y máxima, pues este tipo de repartición admite una única respuesta. En los siguientes trabajos de los estudiantes muestran las actividades graduales que desarrollaron para lograr la adquisición de la noción de división.

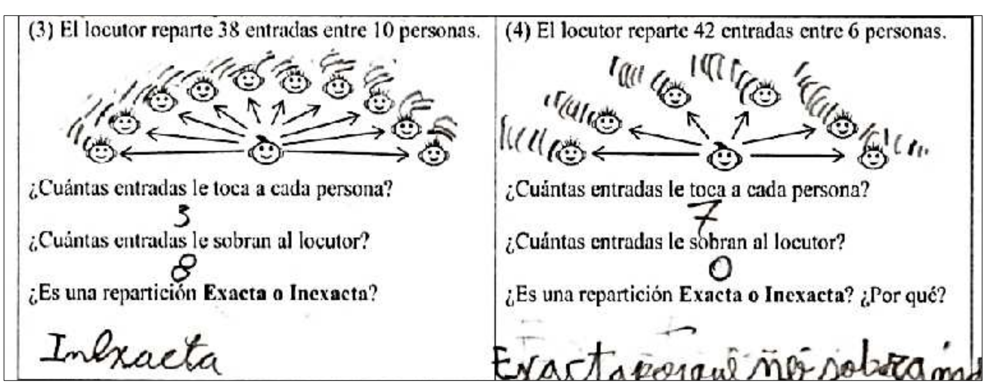


Figura 2. Ejemplo del estudiante 10

El trabajo anterior, presenta el ejemplo de un estudiante que para dar respuesta a lo planteado ha recurrido a un procedimiento de repartición equitativa y máxima, nuestro concepto primitivo. Notemos que da una justificación válida, de acuerdo al valor del residuo.

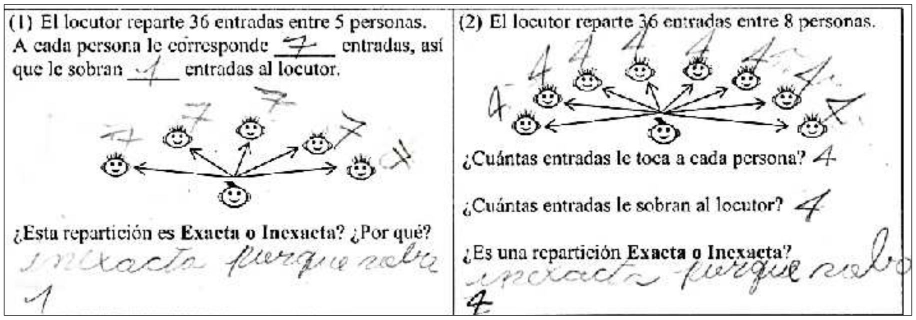


Figura 3. Ejemplo del estudiante 11

En la figura 3, creemos que el estudiante para dar respuesta a lo planteado recurre a dos nociones: reparticiones equitativas y máximas y, multiplicación. Justamente, el Currículo Nacional (2016) sugiere asociar la noción de la multiplicación con la división. Por otra parte, el estudiante en los dos casos presenta una justificación válida, según el resto obtenido.

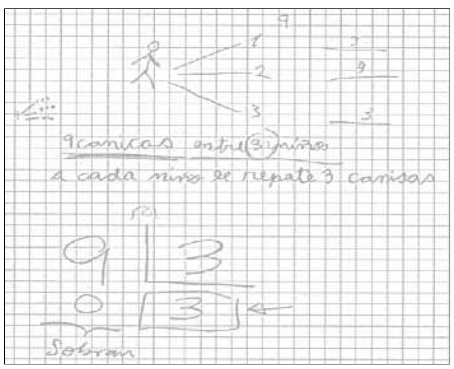


Figura 4. Ejemplo del estudiante 12

El estudiante 12 muestra claramente la vinculación entre las dos nociones: repartición equitativa y máxima (noción intuitiva), y la división de números naturales. Asimismo, evidencia como a partir de la noción intuitiva concibe la división y sus elementos (dividendo, divisor y residuo). Cabe aclarar que se orientó el uso de la notación de la división y se reforzó mediante el pedido de la creación de ejemplos de divisiones con esta nueva notación.

Conclusiones

Respecto al objetivo general, determinamos que las condiciones que permite la construcción de la noción de división son *la noción de repartición equitativa y máxima y, las justificaciones*. Estas dos condiciones se complementan, dado que la noción de repartición equitativa y máxima ha sido la base para la construcción de la división de números naturales, mientras que las justificaciones involucradas en los problemas han sido el medio para que se logre la construcción de dicho conocimiento. Asimismo, cabe señalar que la noción de repartición equitativa y máxima es un concepto intuitivo para los estudiantes, el cual permite con naturalidad asociar con la noción de división.

Coincidimos con lo manifestado por Reid (2011), las justificaciones (prueba) ha de ser vista como un vehículo para descubrir y construir conocimientos matemáticos. Consideramos que este trabajo de investigación es una muestra clara que la enseñanza basada en justificaciones permite que los estudiantes logren construir sus propios conocimientos y, que consigan darle sentido y un gusto por aprender las matemáticas.

Notamos que la mayoría de los alumnos lograron darse cuenta de la relación existente entre el divisor y el residuo (esto al menos de manera implícita) y no memorizarse como muchos estudiantes de su edad lo hacen. En concreto, los estudiantes lograron justificar por qué el residuo no puede ser mayor o igual que el divisor. Asimismo, los estudiantes han logrado identificar los posibles valores del residuo y el valor máximo del residuo teniendo como información dada el valor del divisor. Este logro fue conseguido en base a la noción de repartición equitativa y máxima, gracias a la cual construimos la noción de división.

Asimismo, cabe resaltar que más del 50% (17 de los 24) de los estudiantes concibieron con facilidad el algoritmo de la división y en todo momento evidenciaron la vinculación con la noción de repartición equitativa y máxima.

Finalmente, nos sumamos a lo dicho por Stylianou (2011), la enseñanza de las matemáticas por medio de justificaciones (pruebas) en estudiantes de primaria es una oportunidad para que nuestros estudiantes puedan desarrollar su pensamiento matemático, explorar sus nociones intuitivas y construir los cimientos para que en los grados posteriores puedan realizar pruebas matemáticas.

Referencias y bibliografía

Bieda, K., Xueying, J., Drwencke, J., & Picard, A. (2013). Reasoning-and-proving opportunities in elementary mathematics textbooks. *International Journal of Educational Research*

De Villiers, M. (2001). Papel e funcoes da demonstracao no trabalho como o sketchpad. 31-36. Key Curriculum Press.

Lay, S. (2009). Good proofs depend on good definitions: Examples and counterexamples in arithmetic. In F. Lin, F. Hsieh, G. Hanna & M. De Villiers (Eds.), Proc. 19th Conf. of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) Study (Vol. 2, pp. 27-30). Taipei, Taiwan: ICMI.

Ordoñez, C. (2014). La construcción de la noción de división y divisibilidad de números naturales, mediada por justificaciones, en alumnos de tercer grado de nivel primaria. (Tesis de maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Perú, Ministerio de Educación (2016). Currículo Nacional de la Educación Básica. Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016-2.pdf

Reid, D. (2011) Understanding proof and transforming teaching. In Wiest, L., & Lamberg, T. (Eds.) Proceedings of the Thirty-third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (pp. 15-30) Reno NV: University of Nevada.

Schifter, D. (2011). Representation-based Proof in the Elementary Grades. En Stylianou, D., Blanton M. & Knuth, E.(eds.). Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective.(cap.4, pp.71-86). New York: Routledge.

Stylianou, D., Blanton M. & Knuth, E. (2011), Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective. (pp.65-70). New York: Routledge.

Vallejo, E. (2012). Análisis y propuesta en torno a las justificaciones en la enseñanza de la divisibilidad en el primer grado de secundaria. (Tesis de maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú