Educación Matemática en las Américas 2019

Volumen 11: Geometría

CIAEM
IACME
desde - since 1961

Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO
www.ciaem-iacme.org

Educación Matemática en las Américas 2019
Volumen 1: Formación inicial de profesores
Editado por Yuri Morales-López y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN: 978-9945-09-413-8

El *Comité Interamericano de Educación Matemática* (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la *International Commission on Mathematical Instruction*. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera al CIAEM y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no fue previamente publicado en otro medio; y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Se respetaron los metadatos (nombres, apellidos, títulos, entre otros) que los autores proporcionaron cuando postularon su trabajo en la plataforma del evento.

Para citar este libro:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2020). *Educación Matemática en las Américas 2019.* Editores: Yuri Morales-López y Ángel Ruíz. República Dominicana: Autor.

ISBN: 978-9945-09-413-8

9 789945 094138

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LAS AMÉRICAS 2019

Presentación

Para el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es un placer y un honor ofrecer a la comunidad educativa este Volumen de *Educación Matemática en las Américas 2019*, en donde se pueden encontrar muy importantes insumos para comprender el momento histórico que atraviesa la Educación Matemática desde la perspectiva de las Américas.

La *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática* se realizó entre el 5 y 10 de mayo del 2019 en Medellín, Colombia. La Universidad de Medellín y la Universidad de Antioquia fueron las organizaciones académicas anfitrionas del evento. Las sesiones fueron realizadas en el campus de la Universidad de Medellín. Participaron 700 personas provenientes de 25 países de cuatro continentes: Europa, Asia, África y las Américas. Participaron centenares de docentes en servicio de la ciudad de Medellín y del Departamento de Antioquia.

Alrededor de 400 trabajos fueron presentados: conferencias plenarias y paralelas, mesas plenarias, minicursos, sesiones temáticas, comunicaciones cortas, talleres y posters. Unas 50 personalidades del mayor nivel en la comunidad internacional de Educación Matemática expusieron sobre sus investigaciones. Entre ellas Jill Adler (Suráfrica), Ferdinando Arzarello (Italia), Salvador Llinares (España), Yoshinori Shimizu (Japón), Michael Shaughnessy (EUA), Luis Rico (España), Fidel Oteiza (Chile), Carlos Vasco (Colombia), Carlos Sánchez (Cuba), Luis Carlos Arboleda (Colombia), Edwin Chaves (Costa Rica), Nelly León (Venezuela), Vilma Mesa (EUA). Aunque físicamente no pudo estar presente envió su contribución en forma de video Ubiratan D'Ambrosio (Brasil). Los trabajos dentro de la plataforma del congreso se pueden consultar en https://ciaem-redumate.org/conferencia/index.php/xvciaem/xv/schedConf/presentations

La revisión científica de todos los trabajos fue responsabilidad de un Comité Asesor Internacional, un Comité Internacional del Programa y el Comité Ejecutivo del CIAEM. Se contó con la coordinación central de Directores de tema y la Dirección de la plataforma científica realizada por el académico Yuri Morales con el apoyo de la profesora Johanna Mena (ambos de Costa Rica) y con la participación voluntaria de muchísimos revisores científicos de muchos países.

Este volumen incluye trabajos que fueron efectivamente presentados en ese congreso.

Expreso mi agradecimiento a todos los miembros de los comités científicos, directores de tema, revisores científicos, y directores de la plataforma científica. También deseo agradecer por su apoyo en el registro de este libro a Sarah González y a la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra en República Dominicana. Agradezco mucho a todos los autores que decidieron compartir su trabajo en las instancias que abrimos

mediante la XV CIAEM. También a Yuri Morales quien técnica y formalmente generó este volumen para su registro.

En las diversas dimensiones del congreso, de cuya realización este libro es producto, quiero aprovechar esta ocasión para reconocer la valiosa contribución de las Universidades de Medellín y de Antioquia y al Comité Organizador Local de la XV CIAEM, y, además, agradecer al equipo humano del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* que ha sido durante muchos años un sostén crucial en la organización de todos los eventos del CIAEM y de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*; y en particular de este libro que hoy sacamos a la luz pública.

Este volumen es una parte del libro de *Memorias* completo (son 15 volúmenes que se pueden ver/descargar). Se ha respetado aquí la paginación del libro completo. Y las referencias *deben hacerse con base en el libro y su paginación*. No es necesario indicar el volumen específico donde se cita pues esta es una versión funcional al servicio de una mejor visualización o descarga de este valioso material.

Invitamos a los lectores de este libro a promoverlo en sus diversas actividades de docencia, investigación, extensión y divulgación en todos sus países.

Con afecto

Ángel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática
Presentación del 17 de julio de 2024
Costa Rica

Índice

Basado en la información suministrada durante la postulación de cada trabajo

6. Geometría

Recursos para la gestión de problemas de modelaje en clases de geometría

Patricio **Herbst**
University of Michigan
Estados Unidos
pgherbst@umich.edu

Resumen

Esta comunicación se enmarca dentro del estudio de la gestión del enseñante. Se identifican situaciones de construcción y de demostración presentes en la enseñanza típica de cursos de geometría en escuelas secundarias en Estados Unidos. Y se muestra como las mismas pueden servir como recursos para que un maestro gestione el trabajo de sus estudiantes en un problema de modelaje geométrico. Se propone la noción de que tales situaciones pueden servir para contextualizar o enmarcar el trabajo de los estudiantes de manera tal que ellos puedan usar las normas de las situaciones de construcción y demostración como soporte para pensar en las demandas de una tarea nueva.

Palabras clave: educación, matemática, ciencias, didáctica, pedagogía, formación.

La noción de modelaje matemático ha cobrado interés en la comunidad de investigadores en educación matemática en los últimos veinte años. Kaiser y Sriraman (2006) describieron una variedad de perspectivas sobre el uso del modelaje, entre ellas la que ellos llaman la perspectiva epistemológica, en la que tareas de modelaje se utilizan como instrumento para construir conocimientos matemáticos. Autor y Colegas (2017) utilizan esta noción de modelaje como marco de una propuesta de investigación y desarrollo en la enseñanza de la geometría en secundaria. La presente comunicación se basa en esa perspectiva y examina los recursos disponibles para la gestión del docente en tales tareas de modelaje, utilizando como caso una lección sobre triángulos observada en tres clases de geometría en los Estados Unidos.

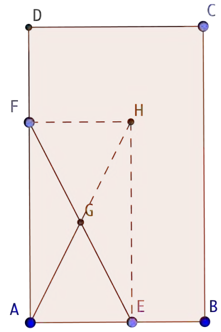
El modelaje geométrico y la gestión didáctica

Nuestra pregunta de investigación concierne la gestión didáctica. Desde el punto de vista del aprendizaje, tareas de modelaje permiten a los estudiantes ver las conexiones entre la matemática y la vida real, involucran al estudiante en la traducción de aspectos del contexto en términos de representaciones matemáticas, y permiten el uso del sentido común como recurso para la resolución de problemas. En la medida que esas tareas incluyen aquellos elementos de la vida real que apoyan al razonamiento, es posible utilizarlas, a pesar de su novedad, para desarrollar la comprensión de conceptos nuevos: El estudiante puede abordar el problema y tomar decisiones aún si los conceptos matemáticos en juego están en curso de ser descubiertos como resultado del modelaje. Desde el punto de vista de la gestión del maestro, sin embargo, hace falta saber qué tipo de acciones del maestro proveen suficiente apoyo para asegurar que el estudiante participe en aquellas tareas sin disminuir su nivel cognitivo (Hennigsen y Stein, 1997). La investigación sobre la gestión didáctica ha documentado tensiones y dilemas que los maestros deben de manejar cuando involucran a los estudiantes en este tipo de tareas nuevas, sean éstas tareas de modelaje o puramente matemáticas (Ball, 1993; Lampert, 1990). Nuestro trabajo contribuye a esta tradición, no solamente identificando tensiones sino también caracterizando recursos disponibles al maestro. En lo que sigue describimos primeramente la tarea utilizada y cuál es su objetivo de enseñanza. Luego describimos la metodología usada en el análisis de la gestión didáctica.

Una tarea de modelaje geométrico: El problema de la piscina

La tarea propuesta a los estudiantes fue una variación de lo que llamamos el problema de la piscina. Se les dice a los estudiantes que tres nadadores van a zambullirse en una piscina rectangular desde tres lugares distintos: uno de ellos desde una esquina y los otros dos desde lugares a lo largo de los bordes de la piscina que son adyacentes a aquella esquina. Los nadadores competirán nadando hacia un premio ubicado en un lugar en la piscina (sujeto a un lugar mediante un ancla). Los estudiantes deben investigar si es posible anclar el premio de tal manera que la competencia sea justa.

Debe notarse que salvo la mención verbal de la forma rectangular de la piscina el problema no les da a los estudiantes ninguna representación geométrica. Sin embargo, si ellos representaran la piscina como un rectángulo y a los nadadores como puntos a lo largo de los lados del rectángulo, el problema podría conceptualizarse en términos de encontrar un cuarto punto que sea equidistante de los tres puntos dados. Varias estrategias pueden llevar a los estudiantes a la conjetura de que el punto medio del segmento entre los puntos que representan a los dos nadadores que no están en la esquina es también equidistante del vértice del rectángulo que representa la esquina donde el tercer nadador se ubicara. En efecto, el trabajo en este problema da origen a la conjetura de que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de los tres vértices del triángulo. La prueba puede verse en la Figura 1. El problema formulado en términos de nadadores a lo largo de los lados de la piscina, contiene una fuente importante de generalidad con respecto al resultado geométrico que se busca introducir: El triángulo rectángulo con el que trabajarán no depende de una figura particular ya que sus catetos están definidos por posiciones arbitrarias de los nadadores ubicados en los lados de la piscina. En ese sentido, el problema ilustra como al presentar el problema en el contexto de una situación real es posible hacer cargo al estudiante de tratar con el problema en general.



Si consideramos el rectángulo *AEFH* determinado por las posiciones de los tres nadadores (*F*, *A*, y *E*), se puede probar primero que las diagonales *AH* y *EF* son congruentes y se intersectan en su punto medio. Por consiguiente, los segmentos *GF*, *GA*, y *GE* son congruentes.

Figura 1. Demostración de la proposición

Obviamente, es posible para el maestro producir una representación como la de la figura 1 y luego demostrar que el punto G es el punto deseado. Sin embargo, si el maestro hiciera eso reduciría dramáticamente la oportunidad de que los estudiantes modelen el problema usando geometría. Por otra parte, la mera presentación del problema en términos de la piscina no provee ninguna garantía de que los estudiantes harán un modelo geométrico. Si la selección del problema responde a la necesidad de enseñar un teorema geométrico, y no solamente a la decisión de involucrar a los estudiantes en la resolución del problema, se presenta aquí una tensión posible para el maestro. Esta tensión podría describirse en términos de los siguientes extremos. Por una parte, el maestro puede limitarse a presentar el problema sin presionar para que los estudiantes utilicen ningún modelo en particular, aceptando como válida cualquier estrategia que los alumnos utilicen, y de esa manera arriesgarse a que los conocimientos geométricos que llevaron a la selección del problema no puedan encontrarse en esta ocasión. Por otra parte, el maestro puede proveer, además del problema dado, representaciones e instrucciones que aseguren que los conocimientos en juego sean encontrados en la manera deseada. Haciendo eso, el maestro podría arriesgarse a limitar el nivel cognitivo de la tarea del alumno. Nuestro trabajo consiste en identificar posibles recursos para la gestión del maestro que le permitan, en particular, manejar aquella tensión sin necesariamente reducir las demandas cognitivas.

Recursos para la gestión didáctica

Nos interesa aquí destacar los recursos disponibles al maestro para apoyar a los alumnos al hacer ellos mismos la tarea. En las clases de geometría en Estados Unidos existen dos casos de las que hemos llamado *situaciones de instrucción* (Autor y Colegas, 2010) que podrían ser útiles al maestro para incorporar este problema a su práctica: Las situaciones de construcción y de demostración.

Llamamos *situaciones de instrucción* a especificaciones del contrato didáctico (Brousseau, 1997) que permiten realizar transacciones particulares de conocimientos. Las actividades de estudiantes y su maestro en clase se pueden describir como transacciones en las que lo que los alumnos hacen en una tarea (tal vez con algo de ayuda del maestro) sirve de evidencia para que el maestro pueda decir que ellos conocen o no ciertos saberes que están en juego: Son transacciones simbólicas entre un tipo de representación del saber (como acción contextualizada en una tarea) y otro tipo de representación del saber (como conocimientos a ser aprendidos, formulados en el contexto más amplio del curso de estudios). En el caso del problema bajo consideración, existe una transacción posible entre las actividades que los estudiantes hagan en respuesta al problema de la piscina y la proposición que describe la propiedad del punto medio de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo. Tal transacción no es inmediata, a juzgar por los posibles extremos de la tensión mencionada más arriba: Los estudiantes podrían hacer trabajo que no dé evidencia de que conozcan la proposición en juego, o tal vez la evidencia esté presente pero su existencia no dependa tanto del trabajo del alumno como de las decisiones tomadas por el maestro.

Está claro que la posibilidad de que el maestro pueda efectuar tal transacción favorablemente depende de que los estudiantes tomen una serie de decisiones correctas, lo que no es inmediato. Por ejemplo, los estudiantes podrían mantener el problema en la escala de la piscina y del tamaño de los nadadores (lo que Berthelot y Salin, 1998, llamaron el mesoespacio), representándolos con ubicaciones en distintos lugares del salón de clase, y producir estimaciones del lugar donde ubicar el premio que fueran aproximadas mediante contar pasos, jamás dándose cuenta que el punto obtenido está en uno de los lados de un triángulo. O podría ser que luego de construir un modelo geométrico a una escala más pequeña (lo que Berthelot y Salin, 1998, llamaron el microespacio) los estudiantes pudieran visualizar el triángulo y encontrar el punto en la hipotenusa, pero que no vieran más necesidad para confirmar su ubicación que simplemente hacer algunas mediciones. Aquí es donde la noción de situación de instrucción se vuelve útil para describir los recursos disponibles para el maestro.

En trabajos anteriores (Autor y Colegas, 2010) hemos descripto situaciones de construcción y de demostración en términos de las normas que regulan la división del trabajo entre el estudiante y el maestro. Cada situación se desarrolla alrededor de tareas canónicas en las que se provee al estudiante de una meta particular y de ciertos recursos y se espera que el estudiante ejecute la tarea usando ciertas operaciones. En la situación de construcción, las tareas suelen identificar como meta construir una figura particular y proveen como recursos la regla y el compás (o alternativamente un software de geometría dinámica como GeoGebra) además de algún objeto geométrico que se debe de usar como dado al hacer la construcción. Los estudiantes no solamente deben de producir la figura deseada sino también dejar visible las líneas auxiliares que les permitieron arribar a la construcción deseada (Schoenfeld, 1986). En la situación de demostración, las tareas suelen identificar la proposición a probar, enunciándola en términos de su representación en un diagrama, dándole a los estudiantes un diagrama con todas las construcciones auxiliares hechas y sus puntos etiquetados, y proveyendo además los enunciados que se pueden usar como premisas. Los estudiantes deben de escribir una serie de enunciados que describan la figura dada, justificándolos con teoremas y definiciones que han sido estudiadas con anterioridad y que conecten las premisas con la conclusión (Autor y colegas, 2009). En una clase donde estas situaciones han sido establecidas, podría ser posible para el maestro gestionar el trabajo en el problema de la piscina mediante transformarlo en dos tareas sucesivas, enmarcadas cada una de ellas en distintas situaciones. La figura 2 muestra como podría el maestro reducir el problema de la piscina utilizando las situaciones descriptas.

Tarea 1	Tarea 2

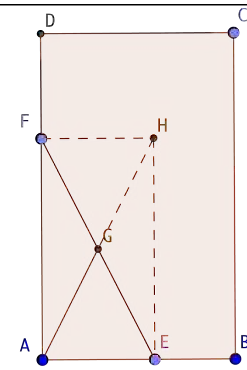
Construye un rectángulo. Ubica puntos en dos lados consecutivos del rectángulo y luego encuentra un punto equidistante de aquellos dos puntos y del vértice donde se intersectan aquellos lados.	Dado que *ABCD* es un rectángulo, demuestra que $GA \cong GF \cong GE$	

Figura 2. Reducción del problema de la piscina a las situaciones de construcción y demostración

Nótese que mientras esta reducción del problema a dos tareas canónicas podría producir trabajo más cercano a la validación del teorema en juego, haría tal cosa a costa de que el maestro tome muchas de las decisiones en lugar del alumno. Esto está particularmente claro en el caso de la tarea de demostración, donde es el maestro quien provee las construcciones auxiliares necesarias para hacer la demostración. Al hacer eso, el maestro reduce la probabilidad de que otras demostraciones originales puedan ofrecerse, que otras líneas auxiliares se usen, etc. Por ejemplo, hemos observado estudiantes trazar una circunferencia con centro en el punto medio de la hipotenusa y ocuparse de argumentar que el vértice del rectángulo está también en la circunferencia. Tal construcción sería poco probable de observar en una clase donde el maestro hubiera provisto la Tarea 2 (Figura 2). Más aún, la separación del problema en estas dos tareas reduce las oportunidades de discusión entre los estudiantes, las cuales podrían dar lugar a la participación de más estudiantes en la resolución del problema.

Aun si las situaciones de construcción y de demostración parecen transformar radicalmente al trabajo de los estudiantes en el problema de la piscina, es importante notar que esas dos situaciones, y tal vez otras situaciones como las de exploración o de cálculo, son recursos sociotécnicos disponibles para el maestro. Sus usos posibles van más allá de la mera transformación de la tarea; pueden también servir de recursos para establecer nuevas maneras de interactuar—para negociar un contrato didáctico ad-hoc que sirva para el trabajo en esta tarea nueva.

El rol de las situaciones de instrucción en la gestión didáctica

Este tipo de uso de los recursos sociales es corriente en la vida diaria. En efecto, nuestras interacciones en sociedad frecuentemente se apoyan en esquemas compartidos de acción en sociedad (Goffman, 1959). Consideremos tres tipos de cenas compartidas: Cena de trabajo, cena familiar, y cena íntima, son distintos tipos de cenas cuyos esquemas promueven ciertas acciones y el uso de símbolos y tecnologías particulares. Esos esquemas condicionan cómo nos vestimos para la ocasión, qué vocabulario usamos, cuanto compartimos de nuestra vida privada con nuestros acompañantes, etc. Esos tipos de cenas no agotan las posibilidades de una cena compartida. Pero esos esquemas nos ayudan a pensar en como manejar problemas nuevos: Una cena familiar en la que también estará presente un pariente lejano que es un posible empleador nos presentará con un problema nuevo en el que dos de los esquemas mencionados más arriba (la cena familiar y la cena de trabajo) podrán ser usados como recursos para decidir como usar el tiempo, como vestirnos, como hablar, etc.

En la enseñanza de las matemáticas, las situaciones de instrucción instaladas en un curso de estudios son recursos sociotécnicos que pueden servirle al maestro y a los estudiantes para facilitar sus transacciones de conocimientos aún en el caso de problemas que no se ajustan directamente a las tareas canónicas de esas situaciones. Decimos que esas situaciones son recursos sociotécnicos porque combinan normas y recursos sociales (e.g., dados los participantes presentes, a quién le toca hacer cada cosa) con recursos y normas técnicas (e.g., dados los recursos matemáticos disponibles, qué se puede o debe de hacer con ellos).

Entonces el problema de la gestión didáctica en lo que concierne al problema de la piscina se puede reformular como sigue. Ante la oportunidad de involucrar a los estudiantes en el descubrimiento de un teorema (e.g., el que caracteriza al punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo) mediante un problema formulado en lenguaje de la vida real, ¿cómo pueden las situaciones de construcción y de demostración proveer recursos para que el maestro gestione una transacción de conocimientos en la que los estudiantes hagan el trabajo matemático deseado en el período disponible?

Observando el problema de la piscina en tres clases de geometría

Hemos observado el uso del problema de la piscina en tres clases paralelas de geometría, ofrecidas durante el mismo día en una escuela secundaria. Los estudiantes estaban en la gran mayoría de los casos en el décimo grado (15 años). La lección fue planeada en conjunto con la maestra a quien referimos como Megan. Durante nuestras reuniones de planificación compartimos con Megan y otros docentes los ejemplos de situaciones de instrucción mencionados más arriba (construcción y demostración); también hicimos saber que nuestro interés en la investigación era explorar en qué medida esas situaciones proveen de recursos al docente para gestionar el trabajo de los estudiantes en tareas nuevas.

A través de las observaciones en tres clases paralelas en el curso del día hemos visto como Megan hizo pequeñas modificaciones a la lección que le permitieron, llegado el final del día, hacer posible una variedad de objetivos relacionados con el uso del problema de la piscina para estudiar la propiedad del punto medio de la hipotenusa. Durante la primera lección del día, Megan presentó su versión del problema—básicamente la misma citada arriba, a la que Megan le agregó elementos de color local incluyendo el premio por el cual los alumnos iban a competir. Luego de discutir el enunciado, Megan les pasó computadoras portátiles a los alumnos y les dijo que usaran GeoGebra para construir un modelo de la piscina y luego ubicar el punto. Si bien los estudiantes habían utilizado GeoGebra con anterioridad, observamos que los estudiantes dedicaron más de la mitad de período de clase a la tarea de construcción del rectángulo. En muchos casos sus dificultades radicaban en recordar como construir perpendiculares usando los menús del programa. Algunos de ellos no habían logrado ir más allá de construir un rectángulo para representar la piscina cuando Megan llamó la atención a toda la clase para escuchar algunas de las soluciones. Otros estudiantes lograron construir el rectángulo y pudieron utilizar dinámicamente la posición arbitraria de los dos nadadores ubicados a lo largo de los lados del rectángulo para desarrollar la intuición de que las distancias de los tres vértices a un punto cerca del punto medio de la hipotenusa se mantendrían iguales entre sí a pesar de que cambiaran de valor para distintas posiciones de los nadadores. Sin embargo, la ubicación de tal punto no resultó por lo general de utilizar una construcción dinámica; resultó de arrastrar el punto hasta que las distancias fueran iguales. Un grupo de estudiantes tuvo la idea de construir un círculo, ajustarlo en tamaño, y moverlo sobre la pantalla para que pasara por los tres vértices, luego eligió el centro de tal círculo como punto equidistante propuesto. Luego de que la clase discutiera las distintas soluciones propuestas, no hubo tiempo para volver a trabajar sobre la prueba del teorema. Al final de la clase Megan les hizo notar a los estudiantes el enunciado del teorema y la clase terminó.

Durante el segundo período, Megan hizo disponibles las computadoras sin insistir que los estudiantes las usaran. En lugar de ello, Megan invitó a los estudiantes a *esbozar* (en inglés, *sketch*) el contexto del problema. Si bien un par de grupos echó mano a las computadoras, otros prefirieron hacer diagramas en papel, a los que les agregaron marcas para indicar segmentos congruentes. El tiempo que anteriormente se había dedicado a construir el rectángulo inicial fue ahorrado en todos los casos—los estudiantes parecían entender que el rectángulo inicial era de poca importancia. Muy pocos estudiantes exploraron mas de una ubicación posible para los dos nadadores en los lados del rectángulo. Sin embargo, la generalidad de la solución pudo observarse cuando los estudiantes compartieron soluciones—los triángulos se veían claramente distintos a pesar de todos ellos ser triángulos rectángulos, y en todos los casos la solución propuesta fue la misma—el punto medio de la hipotenusa. Hubo tiempo para que Megan hiciera que los estudiantes dediquen tiempo a buscar un argumento que justifique el teorema. Hacia el final de la clase se observó algunos estudiantes proveyendo un argumento similar al ofrecido más arriba (usando las diagonales de un rectángulo). No hubo tiempo para dedicar mucha atención a estos argumentos, sin embargo.

Durante el tercer período, Megan introdujo el problema y similarmente dirigió a los estudiantes a esbozar un diagrama, pero no hizo referencia a posibilidad de construirlo con GeoGebra. En discusiones con los estudiantes, sin embargo, Megan les preguntó qué habían hecho para determinar la ubicación del punto. Fue así que un estudiante (hablante del castellano, con poca facilidad en inglés) describió los pasos que siguió para encontrar una solución distinta a la de muchos otros. Este estudiante encontró lo que serían las mediatrices de estos lados del triángulo e identificó al punto de intersección de las mediatrices como el punto deseado. La figura 3 muestra la solución de ese estudiante al problema de encontrar el punto. Si bien el diagrama es claramente un esbozo y no una construcción precisa, el diagrama deja ver cuales fueron los pasos seguidos para determinar el punto. El uso de esbozos en lugar de construcciones sirvió además para justificar la desconfianza de las mediciones y la necesidad de un argumento. Luego de discutidas las distintas construcciones, hubo oportunidad para que la clase construya un argumento de por qué tanto el punto medio de la hipotenusa como la intersección de las mediatrices de los lados perpendiculares resultarían ser el mismo punto. El argumento construido, sin embargo, fue un argumento oral en el cual algunos de las expectativas de la situación de demostración no se presentaron: Por ejemplo, mientras que en la situación de demostración se espera que los enunciados se escriban y se lean usando las letras que designan a los objetos representados en el diagrama, en esta lección la discusión se mantuvo al nivel de los conceptos representados en el diagrama y de gestos indexicales a los objetos diagramáticos.

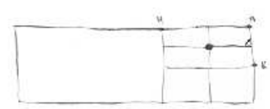


Figura 3. La solución de un alumno

Discusión y conclusión

Una observación general, importante para nuestros propósitos, es que, si bien las situaciones de construcción y de demostración fueron útiles para Megan, el uso que ella les dio no fue canónico. En la primera lección del día observamos que Megan intentó organizar la primera parte de la tarea utilizando una reducción del problema a la situación de construcción, pero en las lecciones subsiguientes el uso de la situación de construcción fue mucho más sutil. De manera similar, la situación de demostración no fue utilizada para reformar la tarea. La situación de demostración proveyó algunos elementos que contextualizaron la tarea original, permitiéndoles a los alumnos llegar a algo que se asemejaba a una prueba del teorema. En lugar de utilizar las situaciones de construcción y demostración para cambiar la tarea, Megan las utilizó a esas situaciones de manera metafórica y como marcos o contextos para que los estudiantes hagan partes de la tarea. Este fenómeno que llamamos en inglés *framing* y que podría traducirse al castellano como *enmarcado* o *encuadrado*, consiste en hacer presentes algunas claves que sugieren la pertinencia de las normas de aquellas situaciones (de construcción y de demostración) sin necesariamente requerir a los estudiantes que cumplan con todas las normas de tales situaciones.

Una importante ventaja de usar de marea metafórica estas situaciones ha sido la posibilidad que la maestra tuvo de controlar mejor el tiempo que la clase dedicó a encontrar el punto buscado, lo que hizo posible dedicar tiempo a la búsqueda de un argumento. Desde el punto de vista del contrato didáctico, éstas observaciones enfatizan la importancia de la negociación permanente del contrato, además del valor de algunas situaciones de instrucción que sirvan de puntos de partida para tal negociación.

Las normas de las situaciones de instrucción pueden jugar un rol heurístico para los estudiantes. El uso de la palabra *esbozar* (en inglés, *sketch*) en lugar de *construir*, por ejemplo, no impone la necesidad de usar GeoGebra o regla y compás, pero sí sugiere que el estudiante deberá de decidir sobre qué elementos creará como parte de su esbozo y la secuencia con la cual los creará. Tales decisiones podrían ser objeto de preguntas más adelante que pongan en juego consideraciones sobre las condiciones de posibilidad de cada construcción. De la misma manera, la situación de demostración podría ser usada metafóricamente para encuadrar la tarea—claves como *justifique* o *provea razones* pueden servirle al maestro para hacer a los alumnos responsables de construir un argumento que vaya más allá de haber obtenido una solución efectiva. Si bien *justificar* hace un llamado metafórico a la noción de demostración, por ejemplo, sugiriendo cuales podrían ser las justificaciones (teoremas, definiciones, etc.), tal palabra no requiere que se cumpla con todas las normas de la situación de demostración (véase Autor y Colega, 2009).

Por supuesto, para que esbozar y justificar puedan cumplir con aquél rol heurístico, es necesario que las situaciones de construcción y de demostración existan de antemano. El punto es importante en el contexto de las reformas educativas, y sirve enfatizarlo como una conjetura general. Si bien las tareas de modelaje, y las tareas nuevas en general, pueden dar lugar a comportamientos muy interesantes de parte del alumno, es previsible que el maestro tendrá que apoyar estos comportamientos de alguna manera. La utilización metafórica de situaciones de instrucción anteriores, enmarcando la tarea a realizar, puede servir para que los alumnos se den una idea de qué es lo que pueden hacer, sin que esto implique ni cambiar la tarea ni decirles explícitamente cómo resolver el problema.

Referencias y bibliografía

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The elementary school journal*, *93*(4), 373-397.

Berthelot, R., & Salin, M. H. (1998). The role of pupils' spatial knowledge in the elementary teaching of geometry. In C. Mammana & V.Villani, (Eds.) Perspectives on the teaching of geometry for the

21st century: An ICMI study (pp. 71-77). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des Mathematiques 1970-1990*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Goffman, E. (1959). The presentation of self in everyday life. *New York*: Anchor DoubleDay.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524-549.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American educational research journal*, *27*(1), 29-63.

Schoenfeld, A. H. (1986). On having and using geometric knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 225-264). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum.

Estudo dos sólidos geométricos por meio do gênero literário popular "cordel": uma abordagem interdisciplinar nas aulas de Matemática

Ana Nonato **Trigueiro**
Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
Brasil
aninha2014n@hotmail.com

Rodiney Marcelo Braga **dos Santos**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
Brasil
marcelllobraga@hotmail.com

Resumo

Esta pesquisa objetiva apresentar uma experiência na formação inicial do professor de Matemática para o ensino da Geometria com o suporte do recurso literário cordel. Balizada na expressão literária popular, quais as potencialidades do cordel para a promoção de um ambiente de aprendizagem comprometido com um fazer Matemática interdisciplinar? A tipologia da pesquisa compreende uma abordagem qualitativa e exploratória do tipo aplicada. Os sujeitos participantes passaram a se apropriar de conhecimentos, com os quais criaram relações sociais constituídas de sensibilidade, criatividade, autonomia e criticidade, características essenciais para transformação da realidade em que estão inseridos. Contudo, a abordagem interdisciplinar demanda aprofundamento teórico e metodológico, bem como ressignificação do planejamento em virtude da demanda do público-alvo que compreende o campo de atuação. Trata-se de uma estratégia de ensino potencial que a partir de suas especificidades e ampliação do olhar comprometido com uma práxis contextualizada pode corroborar para a aprendizagem significativa da Matemática.

Palabras chave: ensino, geometria, interdisciplinaridade, recurso didático, literatura de cordel.

Introdução

O presente texto objetiva apresentar uma experiência na formação inicial do professor de Matemática para o ensino da Geometria, dada ênfase ao estudo dos sólidos geométricos, com o suporte do recurso literário cordel realizada durante a disciplina de Pesquisa aplicada ao ensino de Matemática II, do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública. A referida disciplina reservou espaço em seu programa para a inserção de recursos didáticos e pedagógicos literários como estratégia de ensino. Com efeito, aqui trataremos de aspectos observados no momento da prática de ensino a partir de uma abordagem interdisciplinar entre as áreas de Matemática e Linguagens e Códigos desenvolvida em uma escola pública de educação básica estadual situada no sertão paraibano, por representar uma seara fértil para pôr em prática a construção desse conhecimento.

É sabido que no processo educacional, desde o passado, vem ocorrendo constantes mudanças em busca de melhorias e conquistas para a díade ensino e aprendizagem da Matemática. São inúmeros os obstáculos que o aluno de hoje enfrenta para se apropriar do conhecimento escolar de forma robusta. Souza et al. (2007, p. 68) sugerem que, por vezes, as dificuldades encontradas pelos estudantes brasileiros no aprendizado de Matemática decorrem das estratégias de ensino utilizadas por seus professores. A fim de mudar tal realidade, propõe-se neste trabalho mostrar que por meio da literatura de cordel e numa perspectiva interdisciplinar é possível viabilizar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática escolar, isso por que o ensino mediante essa visão pedagógica torna-se mais atrativo e interessante. Arriscamos novas linguagens nas aulas de Matemática para que, do ponto de vista da aprendizagem significativa, sejam mais interessantes.

Neste contexto, sinaliza-se nossa questão de investigação: balizada na expressão literária popular, quais as potencialidades do gênero literário cordel, enquanto recurso didático e pedagógico, para a promoção de um ambiente de aprendizagem comprometido com um fazer Matemática interdisciplinar?

O cordel é uma cultura popular brasileira e tem uma grande representatividade no Nordeste do país. Para Araújo (2007, p. 17), o cordel se torna um recurso didático quando “Ao ser articulado à educação, o cordel, por tratar de conteúdos culturais e de aprendizagem, pode enriquecer o ato educativo, nas situações de ensino-aprendizagem, ampliando a compreensão sociocultural nordestina, por parte do educando”. Assim, o trabalho pedagógico a partir da sua utilização pode potencializar a prática interdisciplinar em virtude do gênero literário abordar temáticas acerca dos problemas sociais. Outrossim, conforme Amorim (2008, p. 191):

> Pelas suas lições, a literatura de folheto apresenta larga aplicação dentro do ambiente escolar. Ela se presta a estudos em diversas disciplinas e em vários níveis. Alguns de seus empregos são óbvios; outros, nem tanto. Na área da linguagem, a lista estender-se-ia desde os mais simples conceitos da poética – como as noções de metrificação, rima, verso, estrofe, enfim, tudo ou quase que se faz geralmente com a poesia canônica – até as reflexões e críticas proporcionadas pelo próprio conteúdo de um folheto.

Conforme as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), o estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento de competencias, habilidades e atitudes para resolver problemas práticos do cotidiano. À guisa de exemplificação, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida.

Por meio do estudo dos cordelistas da região que comprende nosso campo empírico da pesquisa, bem como dos aspectos que constituem a produção da literatura de cordel foram abordados tópicos referentes ao cálculo da área e do volume dos sólidos geométricos. A abordagem interdisciplinar da estratégia de ensino deu-se através da integração da produção do conhecimento das áreas da Matemática, Língua Portuguesa, Literatura Brasileira e Artes. Para Fazenda (2011, p. 73), a interdisciplinaridade é:

> [...] é um termo utilizado para caracterizar a colaboração existente entre disciplinas diversas ou entre setores heterogêneos de uma mesma ciência [...]. Caracteriza-se por uma intensa reciprocidade nas trocas, visando a um enriquecimento mútuo. Não é ciência, nem ciência das ciências, mas é o ponto de encontro entre o movimento de renovação da atitude diante dos problemas de ensino e pesquisa e da aceleração do conhecimento científico.

Diante do exposto, este trabalho tem como base para a discussão o eixo "Ensino de Geometria, a interdisciplinaridade e o gênero literário cordel". Sendo detalhado o percurso metodológico e a experiência a partir do uso do cordel nas aulas de Matemática. Dessa maneira, o trabalho tem uma grande relevância em virtude da valorização da cultura popular, bem como do estudo das potencialidades desse recurso didático e pedagógico.

Referencial teórico: Ensino de Geometria, a interdiciplinaridade e o gênero literário cordel

O conhecimento matemático é inerente à atuação de um sujeito protagonista no meio o qual está inserido, bem como em seu entrono. A Matemática compreende subáreas, quais sejam: Aritmética, Álgebra e Geometria; que por sua vez estão dispostas de forma desarticulada e/ou excludentes, ou seja, são tratadas de forma que uma apresenta-se em detrimento da outra (FILHO ARCANJO; TAVARES, 2015). Outrossim, os autores destacam que o ensino de Geometria não tem sido priorizado por parte dos professores de Matemática. Assim, assumindo o segundo plano de um planejamento que demanda sua apropriação em virtude da articulação necessária para formação desse sujeito. Segundo Ferreira (1999, p. 983):

> é ciência que investiga as formas e as dimensões dos seres matemáticos" ou ainda "um ramo da matemática que estuda as formas, plana e espacial, com as suas propriedades, ou ainda, ramo da matemática que estuda a extensão e as propriedades das figuras (geometria Plana) e dos sólidos (geometria no espaço).

O ensino de Geometria se justifica pelo fato de suas especificidades para o aperfeiçoamento e ampliação de competências para a aprendizagem da Matemática, bem como para o auxílio às outras áreas do conhecimento. Nesse sentido, Kaleff (2003, p.14) cita os estudos de Van Hiele em que "a visualização, a análise e a organização informal (síntese) das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização do conceito". À título de ilustração, destaca-se Lorenzato (1995, p. 5):

> Na verdade, para justificar a necessidade de ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.

Diante do exposto, a interdisciplinaridade pode potencializar o desenvolvimento de competências, habilidades e atitudes necessárias para a apropriação dos conceitos geométricos no cotidiano do sujeito em processo de formação. Segundo Sommerman (2006), o termo interdisciplinaridade é bastante controverso e que historicamente há aparições que datam antes do século XX, bem como sua consolidação se deu na década de 70 do século passado no I Seminário Internacional sobre a Pluridisciplinaridade e a Interdisciplinaridade, realizado na França. Ademais, Silva e Rodrigues (2009, p. 1) destaca que "O interesse pela interdisciplinaridade, que não é novo, tem suas raízes na Grécia Antiga, nas idéias de Platão e

Aristóteles. No decorrer da história, há, em determinados momentos, a busca por um saber unitário, com vistas a uma visão global de Universo".

Ser professor sempre foi desafiador. No escopo da sua atuação na área de Matemática o desafio parece ser exaustivo quanto à falta de interesse por parte dos alunos e o déficit da aprendizagem dos conteúdos da referida disciplina. De forma generalista, para promover um ambiente de aprendizagem convidativo, bem como significativo é imprescindível ter como ponto de partida todas as situações possíveis do cotidiano com as quais se pode deparar e a reexploração do conhecimento escolar para tentar minimizar os impasses existentes. A partir do nosso objeto de estudo, destaca-se a falta de leitura que reflete no ato de interpretar e compreender conceitos. Também, os alunos têm uma tendência a só ler o que o professor escreve, sem assumir uma postura protagonizadora, ou seja, não buscam descobrir novas formas e sensações promovidas pelo hábito da leitura. Para Nogueira (2009, p. 4):

> Por serem essenciais na formação escolar a leitura e a escrita merecem atenção específica dos professores das diversas áreas. A escola deve criar um círculo virtuoso em que esses dois segmentos melhorem e ajudem na aprendizagem global do aluno. É de suma importância, não somente a leitura de materiais que se encontrem na sala de aula, é preciso ir mais longe, é preciso, como dizia Paulo Freire, uma leitura de mundo para que se possa compreender a própria realidade onde se está inserido.

Assim, enfatiza-se que a interrelação da área de Linguagens e Códigos com a Matemática pode potencializar a compreensão de conteúdos matemáticos. Para que a interdisciplinaridade possa ser introduzida no ambiente escolar é preciso partir de um modelo construtivista, em que se objetiva que o ser humano nasce com capacidade de aprender e esta se desenvolve em interação com o mundo: "Com nova concepção de divisão do saber, frisando a interdependência, a interação e a comunicação existentes entre as disciplinas e buscando a integração do conhecimento num todo harmônico e significativo" (ANDRADE, 1995, p. 23).

Segundo Cereja e Magalhães (2005, p. 11), "o ser humano dispõe de diferentes linguagens para se comunicar com o mundo e com as pessoas". No tocante a poesia, sua prática de reescrever passa a ser do próprio aluno o que o torna capaz de ser, ele mesmo, o produtor dos cordéis, com suas ideias e criatividade fixando o processo de aprendizagem. Para ZÓBOLI (1998, p. 56) a "poesia é um instrumento educativo que gera imagens e visões poéticas fictícias, estimula a motivação e inflama, aguça, a imaginação de quem aprende passando a adquirir novas atitudes".

Quanto ao gênero literário cordel, sua historicidade, remonta à Grécia antiga e no Império Romano quando os artistas populares já versejavam animando os saraus da alta nobreza período medieval. No Brasil foi introduzido pelos portugueses em meados do século XVIII e transformado em linguagem popular a partir das bases lusitanas. Os primeiros poetas cordelistas declamadores surgiram no interior do Nordeste, mais precisamente no sertão paraibano, bem como um dos momentos de auge da literatura de Cordel foi entre 1950 e 1980, quando ocorreram os grandes festivais de repentistas e declamadores nas principais cidades nordestinas (GALVÃO, 2001). Segundo Curran (1998, p. 17), a literatura de cordel:

> é uma poesia folclórica e popular com raízes no Nordeste do Brasil. Consiste, basicamente, em longos poemas narrativos, chamados "romances" ou "histórias" que falam de amor, sofrimento ou aventuras, num discurso heróico de ficção [...] exibe métricas, temas e performances da tradição oral.

Este gênero literário pode expressar a situação socioeconômica de uma determinada região e/ou público-alvo, bem como outros temas de ordem. Ademais, este viés revela a linguagem como manifestação cultural, muito utilizada como ponto de articulação dos processos ideológicos e dos fenômenos linguísticos. Assim, essa literatura engajada à realidade transforma-se em um recurso interdisciplinar para o ensino e para educação quando amplia conhecimentos em forma de diálogo do cotidiano.

Um dos grandes desafios enfrentados pelos professores de Matemática é despertar o interesse do aluno pelo conteúdo abordado em sala. No âmbito das dificuldades enfrentadas pelos alunos nas aulas de Matemática, a literatura de cordel apresenta uma oportunidade para que os alunos tenham acesso a textos com uma linguagem mais acessível o que corroborar para a construção do conhecimento matemático de forma mais significativa.

Metodologia

A tipologia da pesquisa compreende uma abordagem qualitativa e exploratória do tipo aplicada. O período desta experiência compreendeu o semestre letivo 2018.1, de acordo com o calendário acadêmico da graduação da instituição de ensino. Tendo como tomada de partida o uso do gênero literário cordel, buscou-se a exploração de algumas obras dos principais cordelistas da região, bem como a proximidade da cultura popular e a produção da literatura de cordel a partir da compreensão dos elementos constitutivos do referido gênero literário, dada ênfase ao estudo do cálculo da área e do volume dos sólidos geométricos.

Quanto ao percurso metodológico, inicialmente, foi realizada a ambientação dos alunos participantes acerca dos conceitos preliminares sobre os sólidos geométricos e as características que compreendem a literatura de cordel necessárias para sua elaboração, quais sejam: ritmo, estrofe, métrica e rima. Em seguida, foi realizado um breve levantamento e estudo acerca dos principais cordelistas nordestinos e/ou paraibanos, desde sua biografia até o conteúdo das respectivas obras selecionadas. Sendo formado 10 grupos de 06 alunos de turmas do 1º, 2° e 3° ano do Ensino Médio. Cada grupo teve a autonomia de escolha das obras. Por fim, os cordéis foram confeccionados e expostos em uma atividade de culminância das obras produzidas.

A abordagem interdisciplinar deu-se por meio da produção textual que pode compreender um contexto histórico, social, filosófico, religioso, cultural e político. Outrossim, por meio da identificação, leitura, representação e utilização da linguagem poética para representação dos conteúdos matemáticos que foram abordados em forma de versos e que refletiram no estreitamento de uma ampla integração e socialização dos conhecimentos da Matemática e os da Língua Portuguesa, pois, como afirma Veloso (1997), “a frase, o texto, o enredo, o verso e, sem dúvidas, sobretudo o verso, é que podem lançar mundos no mundo (...)”.

Resultados

A linguagem de cordel apresentou-se como uma forma bem humorada, com um ritmo próprio, de se estudar Matemática. Trabalhou-se com diversas possibilidades para expressar está linguagem poética aplicada ao ensino de Matemática o que foi verificado na produção dos versos elaborados pelos alunos participantes. Na perspectiva da não linearidade dos conhecimentos foi promovido um ambiente de aprendizagem irreverente e contextualizado dos saberes matemáticos. A ludicidade foi potencializada em virtude da efetivação de uma proposta na forma de brincandeira com relações matemáticas e produção textual.

O discurso de uma prática de ensino contextualizada e efetiva é emergente para a aprendizagem da Matemática. O estreitamento das relações sociais dos alunos foram identificados nos versos elaborados que enfatizaram temas de urgência social a partir da utilização da linguagem matemática e suas relações com os objetos em seu torno.

A literatura de cordel está presente no cotidiano do paraibano, suas raízes originaram-se em parte por este estado. Seu uso como recurso no ensino de Matemática promoveu a compreensão de temas que são discutidos no dia-a-dia do aluno na escola como no convívio em seu contexto social. A partir da prática escolar, alunos e professores carregam consigo experiências vividas que fazem parte de sua vivencia e que devem ser levadas em consideração quando é realizado o planejamento de ensino.

Foi delimitado o cálculo da área e do volume dos sólidos geométricos em virtude da demanda diagnosticada no nosso campo empírico da pesquisa. As Figuras 1-2 ilustram exemplos da produção de temas acerca do cálculo dos sólidos geométricos em formatos de folheto de cordel:

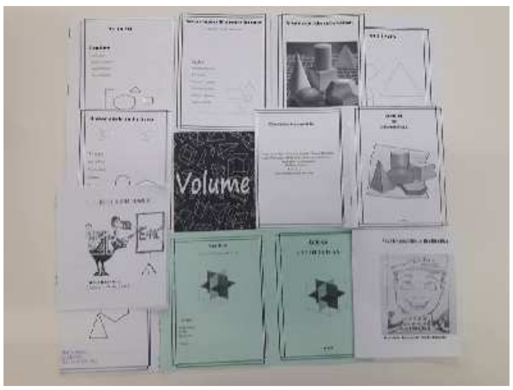


Figura 1. Cordéis produzidos.

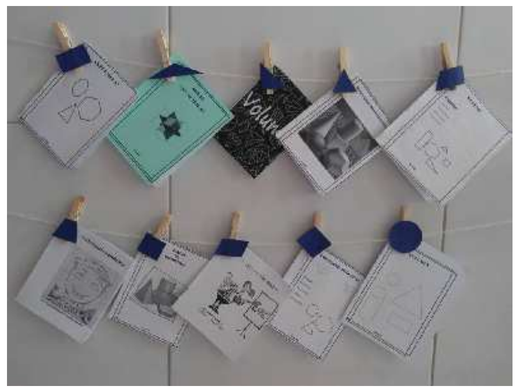


Figura 2. Mostra dos cordéis produzidos.

Constatou-se, que a produção da literatura de cordel assistiu de forma significativa o déficit dos alunos quanto ao conteúdo matemático, ou seja, surge como recurso didático pedagógico táctil, cotidiano e nítido. Identificado na fala dos alunos, o ensino de Geometria não é interessante pelo fato da falta de compreensão de sua aplicabilidade e o modo de que são abordados os conteúdos nas aulas de Matemática. Com a dinâmica de utilização deste recurso, os alunos mostraram-se mais produtivos e motivados nas aulas, ou seja, contribuiu para melhora da aprendizagem quanto aos conteúdos objeto de estudo. Todavia, as dificuldades dos alunos surgem com mais frequência quando as conversões são representações de registros diferentes, ou seja, a transposição da linguagem escrita para a linguagem geométrica e vice-versa. Quanto às produções, as Figuras 3-4 expressam a simplicidade de um grupo dos alunos participantes adaptarem o conteúdo a poesia, escrevendo seu próprio verso:

PASSEANDO PELA ÁREA

Área é um conceito matemático
Mas não é nada anormal
Consiste na quantidade
De um espaço bidimensional

Existem varias unidades de medida
Para que o cálculo seja realizado
Mas a que é mais comum
É a do metro quadrado

Para calcular a área do retângulo
Não é peleja tão dura
Basta lembrar-se da fórmula
Da base vezes a altura

Para calcular a área do triângulo
Não deixo pra depois
Multiplico a base pela altura
E divido tudo por dois

Para calcular a área do trapézio
Veja que não tem frescura
Base maior mais base menor
Multiplicado pela metade da altura

Para calcular a área do quadrado
Parece até engraçado
Basta que multipliquemos
Lado vezes lado

Para calcular a área do losango
Não deixe para depois
Faça o produto das diagonais
E divida tudo por dois

Vou terminar por aqui
E espero que tenha aprendido
Guarde tudo na memória
E não se faça de esquecido.

Figura 3. Cordel "Passeando pela área".

VOLUME

Estudar volume é massa
E um assunto fenomenal
Medir coisas é sobrenatural
O que o faz ainda mais sensacional

Volume é importante
Apesar de ser um cubo
Só precisa da aresta ao cubo
Pra seu volume encontrar

No paralelepipedo retangular
Tem que saber a fórmula correta
Multiplicar todas as dimensões
Para seu volume encontrar

Trata-se de figuras geométricas
Geralmente com coisas dentro dela
É uma matemática seria
Mas não é tão difícil de calcular

Muitos sólidos existem
Na vertical, em linha reta
Para que possamos saber
Como vamos calcular

Mostro esse cordel
Que retrata bem o assunto
E apesar de pequeno
Nos é do bom uso

Só basta saber as fórmulas
Pois cada sólido geométrico
Carrega as medidas certas
Para você não errar

E está sempre presente
Na vida de muita gente
Pois até um copo d'água
Tem volume pra calcular.

Figura 4. Cordel "Volume".

A abordagem interdisciplinar despertou não somente a motivação por outras áreas do conhecimento, como pelas Artes, Literatura e Língua Portuguesa em suas diferentes formas, mas potencializou competências e habilidades que compreendem está área do conhecimento (Linguagens e Códigos), quais sejam: analisar, interpretar e aplicar os recursos expressivos das linguagens, relacionando textos com seus contextos, mediante a natureza, função, organização, estrutura das manifestações, de acordo com as condições de produção e recepção e compreender e usar os sistemas simbólicos das diferentes linguagens como meios de organização cognitiva da realidade pela constituição de significados, expressão, comunicação e informação.

Assim, os alunos passaram a se apropriar de conhecimentos, com os quais criaram relações sociais constituídas de sensibilidade, criatividade, autonomia e criticidade, características essenciais para transformação da realidade em que estão inseridos.

Outrossim, constatou-se que a prática de ensino na perspectiva da interdisciplinaridade demanda aprofundamento teórico e metodológico, bem como ressignificação do planejamento em virtude da demanda do público-alvo que compreende o campo de atuação.

Considerações

O presente trabalho teve como objetivo nuclear relatar uma prática de ensino de Matemática dos sólidos geométricos a partir da apropriação do gênero literário cordel na perspectiva da interdisciplinaridade. Para isso foi desenvolvida uma estratégia de ensino em uma escola de educação básica pública no sertão paraibano.

Os resultados obtidos são indicativos de que a literatura de cordel pode despertar maior interesse por parte dos alunos e promover a eficiência da aprendizagem da Matemática. Assim, aponta-se a relevância de uma prática de ensino dessa natureza por agregar valor pedagógico potencial para melhora da qualidade de ensino da Matemática. Contudo, depreende-se que é um exercício árduo, porém passível de realização. Portanto, demanda-se por parte do sujeito professor propriedade quanto ao entendimento de uma prática interdisciplinar, bem como da apropriação de recursos didáticos e pedagógicos para o ensino de Matemática.

Referências

Amorim, M. S. (2008). *A permanência de aspectos orais no romance de folheto.* 227p. Tese (Doutorado em Letras) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Andrade, R. M. C. (1995). *Interdisciplinaridade:* um novo paradigma curricular. *Revista Dois Pontos*.

Araújo, P. C. A. (2007). *A cultura dos cordéis:* território(s) de saberes. 257p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.

Brasil. (2006). Secretaria de Educação Básica. *Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*, v. 2, Brasília: MEC/SEB, 135p. - (Orientações Curriculares para o Ensino Médio).

Cereja, W. R.; Magalhães, T. C. (2005). *Gramática Reflexiva:* texto, semântica e interação. São Paulo: Atual.

Curran, M. (1998). *História do Brasil em Cordel.* São Paulo: EDUSP, 288p.

Fazenda, I. C. A. (2011). *Integração e Interdisciplinaridade no Ensino Brasileiro*: efetividade ou ideologia. 6. ed. São Paulo: Loyola, 113p.

Ferreira, S. M. M. (2007). *Os recursos didáticos no processo de ensino-aprendizagem:* estudo de caso da Escola Secundária Cónego Jacinto. 69p. Monografia (Graduação em Pedagogia) – Universidade Jean Piaget de Cabo Verde, Cidade da Praia.

Filho Arcanjo, M.; Tavares, A. H. C. (2015). O ensino de geometria numa perspectiva interdisciplinar como iniciativa para uma abordagem transdisciplinar. *Revista Ensino Interdisciplinar,* v. 1, n. 3, p. 277-286. doi:10.2192/recei.v1i3.1699

Galvão, A. M. O. (2001). *Cordel:* leitores e ouvintes. Belo Horizonte: Autêntica, 240p.

Kaleff, A. M. M. R. (2003). *Vendo e entendendo poliedros:* do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. Niterói: EdUFF, 209p.

Lorenzato, S. (1995). Porque não ensinar Geometria? *A Educação Matemática em Revista,* São Paulo, v. 3, n. 4, p. 3-13.

Nogueira, A. M. (2009). *Origem e características da literatura de cordel.* Ariquemes: FIAR. Disponível em:< http://livros01.livrosgratis.com.br/ea00709a.pdf>. Acesso em: 03/08/2018.

Silva, O. S. da.; Rodrigues, M. A. (2009). *A Interdisciplinaridade na visão de professores de Química do Ensino Médio*: concepções e práticas. In: Anais do VII Enpec, Florianópolis. Disponível em: <http://posgrad.fae.ufmg.br/posgrad/viienpec/pdfs/781.pdf. Acesso em: 03/08/2018.

Sommerman, A. (2006). *Inter ou transdisciplinaridade?* Da fragmentação disciplinar ao novo diálogo entre os saberes. São Paulo: Paulus, 78p.

Souza, M. F. C.; Castro Filho, J. A de.; Pequeno, M. C.; Barreto, D. C.; Barreto, N. C. (2007). Desenvolvimento de habilidades em tecnologias da informação e comunicação (TIC) através de objetos de aprendizagem. In: Prata, C. L.; Nascimento, A. C. A. A. (Orgs). *Objeto de aprendizagem:* uma proposta de recurso pedagógico. (2007). Brasília: MEC/SEED, p. 161.

Veloso, C. Livros. (1997). In: ______. *Livro.* (1997). Rio de Janeiro: Polygram, 1 CD, faixa 2.

Zóboli, G. (1998). *Práticas de ensino:* subsídios para a atividade docente. São Paulo: Ática, 149p.

Recreando el triángulo de Pascal

Luís Eduardo **Guerra** Betancourt
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Venezuela
Lewisedward1984@gmail.com
Yannely Del Valle **Núñez** Ruiz
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Venezuela
Yanunez2@gmail.com

Resumen

Este taller está orientado a la presentación y estudio de ciertos referentes teóricos geométricos (semejanza y simetría) y estrategias didácticas circunscritas al Triángulo de Pascal, permitiendo un aprovechamiento algebraico, desde diversos análisis provenientes de investigaciones recientes como la de Usón y Ramírez (2006) que enriquecen su estudio con relaciones geométricas, entre otras, que surgen a partir de las discusiones generadas en el aula. Además, se observan ilustraciones, propuestas en diversos textos, que muestran dicho triángulo con aplicaciones diversas, en cuadrículas, en fractales, y otras opciones didácticas que de forma amena revelan nuevas relaciones y series numéricas asociadas a las formas geométricas, en lo histórico se revisa la biografía de este matemático, anécdotas y otros personajes vinculados a la época. Las herramientas que serán proporcionadas, facilitarán la visualización de aspectos teóricos de este objeto matemático y la generación de problemas atendiendo la contextualización intra y extra matemática (fractales).

Palabras clave: Triángulo de Pascal, Contextualización, Didáctica, Geometría.

Introducción

El Triángulo de Pascal, constructo matemático vinculante en diversas áreas de esta disciplina, es un elemento fascinante y enriquecedor desde el punto de vista didáctico, donde se puede mostrar en diversas opciones como material de trabajo fundamentado en los conceptos geométricos y algebraicos que contemplan las asignaturas relacionadas con el área. El estudio de este tema permite dinamizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría plana con una perspectiva que haga aflorar la creatividad en los actores involucrados en esta tarea, con la inclusión de los conceptos de la geometría fractal entre otras áreas de las matemáticas.

Con el taller se han planteado una serie de objetivos tales como: dar a conocer ciertos referentes teóricos donde es aplicable el Triángulo de Pascal, hacer un análisis de tópicos geométricos en relación con el Triángulo de Pascal, visualizar la integración de este constructo matemático en relación con otras áreas de las matemáticas, presentar recursos didácticos referentes al Triángulo de Pascal en relación con diversas áreas de las matemáticas, reconstruir ciertos conceptos geométricos a partir del estudio del Triángulo de Pascal.

Para alcanzar los objetivos planteados, se presentarán diversas actividades que permitirán la articulación e integración de diversos referentes teóricos y didácticos de las Matemáticas en relación con el Triángulo de Pascal.

Pretendiendo así, generar un aula taller, en la que se aspira que cada participante construya y descubra sus propios alcances de aprendizajes, dándole espacio al asombro de generar la novedad en lo que se realiza, para ello se propone un plan de acción donde se busca: a) Complementar cada construcción geométrica con los patrones numéricos sugeridos, b) Resaltar las observaciones que emergan de la discusión sobre los triángulos ya elaborados, c) Constrastar las relaciones con lo fractálico y d) Presentar las construcciones realizadas y su aprovechamiento didácticos.

Referentes teóricos

Son diversos los matemáticos a los que se les acuña el descubrimiento del triángulo aritmético, presentado en la época del renacimiento, que, aunque lleva el nombre del genial matemático Pascal, fue usado anteriormente por otros como Tartaglia, Stifel y Stevin (Ruíz, 2009), luego existió la expansión para $(a+b)^n$ con n entero, que es el llamado teorema del binomio, relacionado con el triángulo, el cual también era conocido por los árabes del siglo XIII. Es por esto que en diversas ocasiones a este aporte matemático se le conoce con el nombre de triángulo de Tartaglia o triángulo de Pascal

El matemático italiano, Nicola Fontana, que nació en el año 1499, conocido como Tartaglia (por su tartamudez) adquirió una reputación de matemático prometedor. A este matemático se le vincula con el estudio de este triángulo aritmético, debido a que según diversos acontecimientos históricos y primeramente en 1535, se dio una competencia entre Tartaglia y Fior, este último un estudiante de Del Ferro que cuando estaba en el lecho de muerte le informó a su pupilo como resolver una ecuación cúbica. Fior confiado por la información que su maestro le había transmitido, sometió a Tartaglia a una serie de preguntas acerca de estas ecuaciones y en menos de dos horas Tartaglia pudo resolverlas. Fior perdió la competencia. Cardano, que presenció la competencia, le solicitó a Tartaglia su solución para incluirla en su libro, a lo que Tartaglia se negó. En 1539, viajó a Milán a visitar a Cardano y en esta ocasión le reveló la solución. Tiempo después, Cardano junto a su asistente Ferrari publicarón las fórmulas y otras derivaciones de éstas y se acreditó a Del Ferro y a Tartaglia el descubrimiento (Ruiz, 2003 y Rey Pastor y Babini,1997).

Pascal es un matemático, cofundador junto a Fermat en el siglo XVII de la teoría matemática de probabilidades, considerada como uno de los cinco progresos progresos principales en el origen de la matemática moderna (Bell, 1949), a parte de dar aportes posteriores junto a Desargues hacia la Geometría Proyectiva Sintética, para su invención, la cual se atenuó hasta principios del siglo XIX, él fue un matemático de grandes alcances, aunque al igual que a Descartes y Leibniz se le recuerde popularmente por otras cosas, pero Pascal fue aún más genuinamente precoz que este último. De muchacho no fue una simple esponja que absorbiera el saber de los demás, sino un matemático creador. A los doce años redescubrió y demostró para sí mismo varios de los teoremas más sencillos de la geometría elemental, por lo cual es de visualizar que su aporte hacia el triángulo aritmetico podría contener enriquecimiento geométrico.

Inmerso dentro de la didáctica, se ha buscado predominar, dentro del ámbito escolar, la contextualización de los contenidos presentes en el triángulo de Pascal, ya sea desde lo intramatemático como lo extramatemático, resaltando comunmente los contenidos algebráicos y aritméticos (Carrrera, 2010), pero desde un enfoque social y natural podria adaptarse al campo geométrico, su desarrollo externalista en proximidad, está dado en el uso de las combinaciones en la vida cotidiana, aunque desde el punto de vista de la naturaleza y el acercamiento de este contenido a lo fractálico, es posible la visualiación del mismo a través de estos ámbitos teóricos.

El triángulo de Pascal es una construcción aritmética partiendo de la suma en donde se consideran los siguientes pasos:

Se inicia colocando el número uno (1) en la fila cero (0)

1 ⟵ fila 0

Luego, debajo, se coloca en la siguiente fila dos uno (1) a los lados del superior

1

1 1 ⟵ fila 1

En las siguientes filas escribimos un 1 en cada extremo y cada número interior es obtenido sumando los dos que están encima de él

1

1 1

1 2 1 ⟵ fila 2

Así sucesivamente se va continuando, hasta obtener el famoso triángulo de Pascal o Tartaglia que se aprecia en la figura 1.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 27 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Figura 1. Triángulo de Pascal o Tartaglia

En Iran este triángulo se le conoce como el triángulo de Khayyan (1048-1131), en china se le conoce con el nombre de triángulo de Yang Hui (1238-1298), pero las referencias existentes desde hace 200 años, hacen ubicar al mismo en el renacimiento, otorgándole esta originalidad a Pascal y Tartaglia (Duarte A., Moya A. y otros; 2014b).

Otro concepto vinculante en la presente investigación es lo referente al termino fractal, que fue acuñado por Beniot Mandelbrot, en 1975, para describir formas complejas y este proviene del adjetivo latino fractus que significa "interrumpido", "irregular" o "fraccionado" y en cierta forma los objetos provenientes de la naturaleza poseen esta característica (Carrera, 2010), en si un fractal es una figura geométrica en la que un patrón se repite pero siempre disminuyendo la escala. Es por esto que los fractales son semejantes entre sí, entre los más conocidos están, el pentágono de Durero, el árbol de Pitágoras, la esponja de Menger, la alfonbra, el triángulo y tetraedro de Sierpinski. (Mandelbrot, 1996 y Martínez, 1994)

Metodología del taller

El desarrollo del taller se hará en dos partes, la primera basada en un recuento histórico de la generación de este famoso triángulo y los personajes a los cuales se refiere, segundo se propondrán una serie de actividades vinculantes a diversas formas de apreciar el triángulo de Pascal dentro de las matemáticas, desde la parte aritmética, pasando por la algebraica hasta llegar a la geométrica, buscando que las personas participantes conozcan y ejecuten diversas propuestas de trabajar este constructo matemático dentro de su abundante enriquecimiento en problemas y curiosidades, propicios para la generación de una didáctica integrativa de lo intramatemático

Actividades sugeridas

Actividad 1. Triángulo y Cuadrados de cifras de uno (1)

En esta actividad se apreciará las curiosidades presentes entre las cantidades resultantes de los cuadrados de cifras de 1, primero observese bien la construcción de los siguientes cuadrados:

Fila	Potencia	Resultado
0	1^2	1
1	11^2	121
2	111^2	12321
3	1111^2	1234321
4	11111^2	123454321
5	111111^2	12345654321
6	111111^2	1234567654321

En el desarrollo de estas potencias se evidencia una distribución, que es una de las curiosidades de los números, simétricos entre sí, denominados palíndromos, los mismos pueden leerse bien de derecha a izquierda como de izquierda a derecha, esta relación que se presenta también se observa en el triángulo de Pascal pero con cifras desvinculadas (Ver figura 3).

Actividad 2. Triángulo de Pascal, los Números y sus formas

En esta actividad se busca observar las cantidades presentes en cada diagonal con la denominación de los números triangulares y cuadrados, como también otras cantidades que se evidencian en el triángulo.

Los números triangulares o cuadrados, conocidos como guijarros (García, 2006) son aquellos que se les denomina por la forma de agruparse ya sea en forma de triángulos (triangulares) o en forma de cuadrados, los griegos se dieron cuenta que en los primeros se obtenían con sumas de números naturales consecutivos. Los números cuadrados resultan de los cuadrados perfectos pero los griegos se dieron cuenta debido a la forma en que se distribuían las piedras para formar un cuadrado.

Número Triangulares

1, 3, 6, 10, 15, 21 ....

Números Cuadrados

1, 4, 9, 16, 25, 36....

Apreciando el triángulo de Pascal, es posible observar la disposición de los números triangulares, en forma diagonal a partir de la segunda fila en dicho triángulo y los cuadrados son los resultantes de sumar dos de estos números triangulares consecutivos, dispuestos en la misma diagonal.

Números triangulares

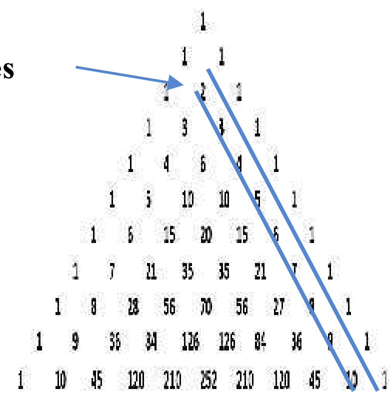


Figura 2. Triángulo de Pascal o Tartaglia y números triangulares

Números Cuadrados

1, 1+3 = 4, 3+ 6 = 9, 6+10 = 16.....

Estas no son las únicas clases de números que podemos encontrar en el análisis interno del Triángulo de Pascal, también podemos encontrar números naturales, tetraédricos, entre otros, formas que dependen de figuras bidimensionales y tridimensionales (Usón y Ramírez, 2006).

Actividad 3. Triángulo de Pascal y el Fractal.

En esta actividad se busca apreciar la relación de este triángulo con algunos contenidos geométricos, tales como la simetría, geometría fractálica, resaltando ciertas cantidades presentes en el triángulo.

Primeramente podemos apreciar en el triángulo de Pascal la existencia de un eje de simetría vertical (Ver Figura 3), término matemático muy utilizado en la naturaleza y en la geometría (Weyl, 1975).

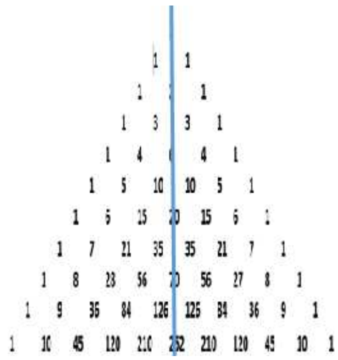


Figura 3. Eje de simetría sobre el Triángulo de Pascal

Para esta actividad, es necesario ubicar los números pares e impares en el triángulo, a los impares le asignaremos el número uno (1) y a los pares el número cero (0), tal como se aprecia en la Figura 4.

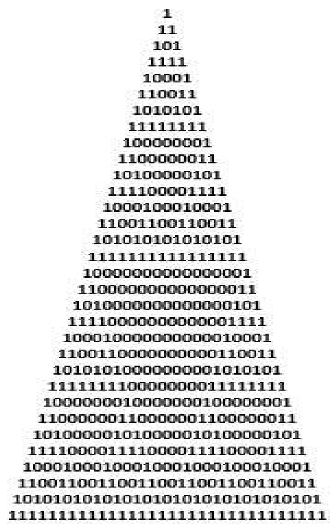


Figura 4. Triángulo en ceros y unos

Se resalta en la distancia ciertos triángulos formados por los ceros (0), de diversos tamaños, pero semejantes entre si.

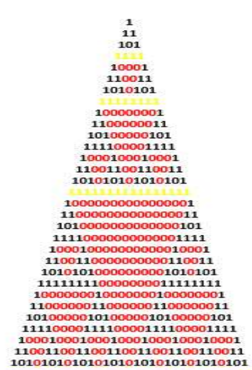


Figura 5. Triángulo de Pascal en ceros y unos (coloreado)

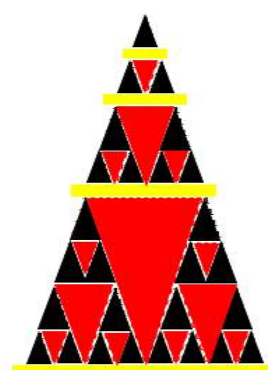


Figura 6. Generación del Triángulo de Sierspinski

Este triángulo que se ha formado (ver figura 6) es semejante al popular Triángulo de Sierspinski, fractal que se puede construir a partir de un triángulo equilátero, generando triángulos interiores cuyos vértices están en el punto medio de los lados. En este momento de aprovechar para el estudio en geometría fractálica de temas como semejanza, proporcionalidad y congruencia.

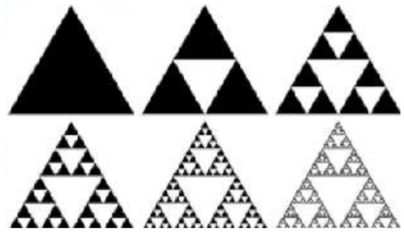


Figura 7. Triángulo de Sierspinski

En la anterior construcción sobre el triángulo de Pascal, se podría decir que la transformación de los impares a uno (1) y los pares a cero (0) es el resultado de dividir cada elemento entre 2 y sustituirlo por el resto de la división. Caso interesante seria seguir haciendo estas divisiones de las cantidades del triángulo de Pascal a ver que sucede, por lo cual se procede a estudiar el caso en que la división sea entre tres (3) y cada valor del triángulo sea sustituido por el resto de la división (ver figura 8). En el mismo se observa la relación de autosemejanza de un fractal (ver figura 9) evidenciada en parte en similitudes existente de acuerdo a las cantidades.

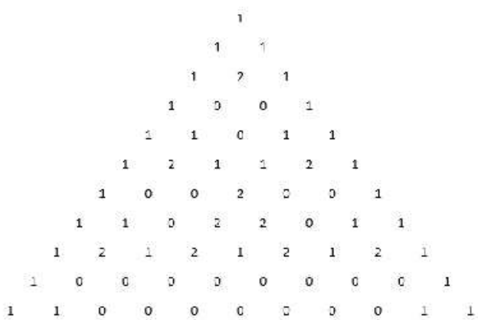


Figura 8. Triángulo de Pascal en cociente

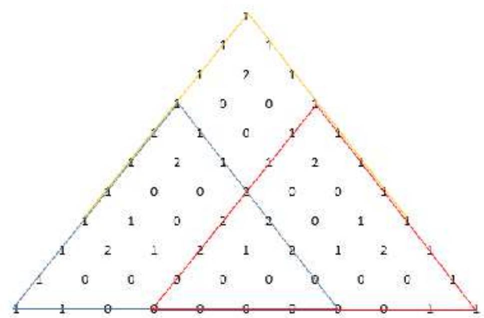


Figura 9. Triángulo de Pascal en cociente 3 autosemejanza

Actividad 4. Triángulo de Pascal y Geometría.

En esta actividad se busca apreciar dentro del triángulo de Pascal las diversas cantidades de rectas y diagonales de polígonos presentes en n puntos.

Observemos primero las rectas que pasan por n puntos no colineales, distribuidos exactamente de manera de obtener un polígono regular y las diagonales presentes.

Número de puntos	**Número de rectas**	**Número de Diagonales en el polígono**
1	infinitas	0
2	1	0
3	3	0
4	6	2
5	10	5
6	15	9

7	21	14

En el triángulo de Pascal, si observamos detenidamente aparece esta relación. Cuando se observa en los elementos seleccionados que el valor de la izquierda corresponde a el número de puntos y el de la derecha (ver figura 10) a las rectas que pasan por él, y si ejecutamos la sustracción entre los mismos nos darán el número de diagonales del polígono determinado por dichos puntos.

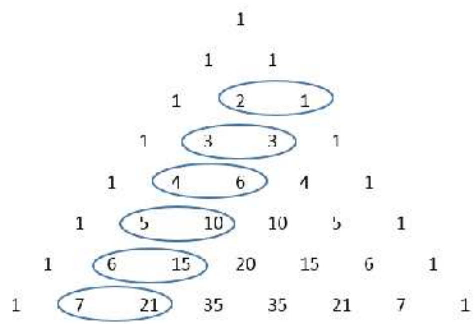


Figura 10. Triángulo de Pascal resaltando relación de rectas y puntos

Consideraciones finales

Son diversas las contribuciones de este constructo hacia las áreas de las matemáticas, más que todo en la probabilidad, con aportes a la teoría combinatoria (Brett, 2003), en el álgebra, visto hacía el desarrollo de los productos notables, y en la combinación de ambas, durante el estudio del binomio de Newton y los Multinomios (Rodríguez, 1995). Dentro del área de la geometría su desarrollo ha sido a través de los aportes con los números y sus formas, las líneas en los polígonos y los fractales, que están presentes en situaciones cotidianas generalmente a través del arte y la naturaleza. Son muchos los aportes que hacia la construcción de nuevas actividades en torno a este constructo se pueden hacer, pero para el tiempo requerido es necesario la adecuación acertada de ciertas actividades concretas.

Referencias y bibliografía

Bell E. (1985). *Historia de las matemáticas*. Traducido de Ortiz R. 2da ed. México: FCE.

Brett,E. (2003). *Actividades de Matemática II* Cs. C.D. JOHNEVE; Caracas.

Brook, F. (1995). El triángulo de Pascal una fuente de inspiración (I). *Revista Números* 26; 27-36.

Carrera I. (2010). Matemática Maravillosa. Caracas: Fundación Polar.

Duarte A., Moya A. y otros (2014a). Naturaleza Matemática 4to año. *Colección Bicentenario*. Caracas.

Duarte A., Moya A. y otros (2014b). La Matemática y el vivir bien 5to año. *Colección Bicentenario*. Caracas.

García L. (2006). *La sonrisa de Pitágoras*. Barcelona: Debolsillo.

Mandelbrot, B. (1996). *Los Objetos Fractales*. Matatemas 13. Libros para Pensar La Ciencia. 4ta. Edición. Barcelona - España.

Martínez, J. (1994). Los Conjuntos de Mandelbrot, de Julia y la Familia de Transformaciones No Lineales. *II^as Jornadas Andaluzas de Didáctica de las Matemáticas*. Epsilon Nº 2. 81-88.

Rey Pastor y Babini (1997). *Historia de la Matemática* Vol. II.. España: Editorial Gedisa.

Rodríguez J. (1995). *El arte de contar*. Mérida: Kariña Editores.

Ruiz A. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. Costa rica. EUNED.

Usón, C. y Ramírez A. (2006). En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La ambición de trascender las propias limitaciones (VI). *Revista Suma*. 53; 53-60

Weyl, H. (1975). *La Simetría*. Barcelona. España: Promoción Cultural, S.A.

Sobre el teorema de Pompeiu

Geovanni **Figueroa** Mata
Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica
Costa Rica
gfigueroa@tec.ac.cr

Resumen

Se generaliza el teorema de Pompeiu a triángulos isósceles y escalenos. Se presenta la deducción de la desigualdad que describe la región $\mathcal{R}$ del plano xy compuesta por los puntos P que satisfacen dicho teorema. Además, se caracteriza dicha región para triángulos isósceles y se presentan gráficas que ilustran los diferentes casos analizados. Para ello se usaron scripts implementados con las herramientas GeoGebra y/o Mathematica que permiten visualizar y validar los resultados obtenidos.

Palabras clave: Teorema de Pompeiu, geometría plana, ley de cosenos, lugares geométricos, GeoGebra.

Introducción

En 1936 el matemático rumano Dimitrie Pompeiu (1873-1954) publicó su conocido teorema de la geometría plana (Pompeiu, 1936):

Teorema de Pompeiu

> Dado un triángulo equilátero ABC y un punto P cualquiera del plano, si P no pertenece al círculo Γ circunscrito al triángulo ABC entonces con los segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}$ y $\overline{CP}$ se puede formar un triángulo.

La mayoría de los textos de geometría plana no incluyen este interesante resultado, pero existen muchas demostraciones y una gran cantidad de resultados se han propuesto alrededor de dicho teorema (Bényi y Casu, 2009; Sándor, 2005).

Observe que si el punto P pertenece al círculo Γ, entonces la medida de uno de los segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}$ o $\overline{CP}$ es igual a la suma de los otros dos. Sin embargo, para un triángulo que tenga al menos dos sus lados con longitudes diferentes, podemos escoger un punto P tal que las medidas de los Segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}$ y $\overline{CP}$ no correspondan a las medidas de los lados de un triángulo. Para lograr esto basta elegir un punto P "*tan cerca*" como sea necesario del punto A de forma que $|\overline{CP}| > |\overline{AP}| + |\overline{BP}|$, como se muestra en la *Figura 1*.

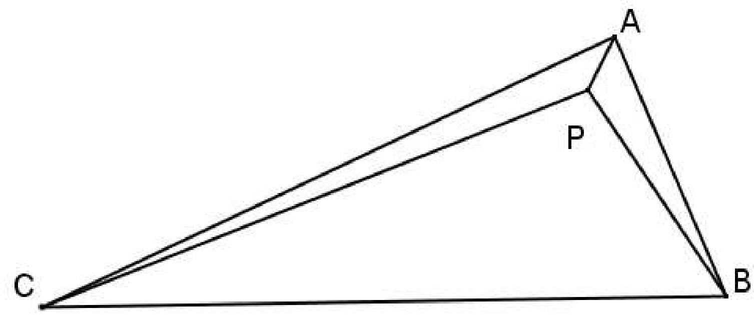


Figura 1. Punto P tal que los segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}\ y\ \overline{CP}$ no forman un triángulo.

Esto nos lleva a plantear la siguiente pregunta: ¿Para cuáles puntos P del plano xy los segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}\ y\ \overline{CP}$ forman un triángulo? Sea $\mathcal{R}$ la región del plano xy que contiene a estos puntos y sea $\mathcal{R}^C$ el complemento, es decir, el conjunto de puntos P para los cuales los segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}\ y\ \overline{CP}$ no forman un triángulo.

En el presente trabajo deducimos una desigualdad que describe de forma general la región $\mathcal{R}$ y caracterizamos dicha región para el caso de triángulos isósceles. El trabajo está organizado de la siguiente forma: en la sección 2, se deduce la desigualdad que describe de forma general la región $\mathcal{R}$, en la sección 3 se deduce la desigualdad que describe la región $\mathcal{R}$ para triángulos isósceles y en la sección 4 se caracteriza la región $\mathcal{R}^c$ para este tipo de triángulos y por último, en la sección 5 se describe gráficamente algunos casos de la región $\mathcal{R}^c$ para triángulos escalenos.

Caracterización de la región $\mathcal{R}$

Dado un triángulo CAB y un punto P cualquiera en el plano, como se muestra en la *Figura 2*, los segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}\ y\ \overline{CP}$ forman un triángulo si y sólo si

$$|\overline{BP}| + |\overline{CP}| > |\overline{AP}| \tag{1}$$
$$|\overline{AP}| + |\overline{CP}| > |\overline{BP}| \tag{2}$$
$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| > |\overline{CP}| \tag{3}$$

Por comodidad denotemos las longitudes de los lados del triángulo por: $|\overline{AB}| = c$, $|\overline{AC}| = b$, $|\overline{BC}| = a$.

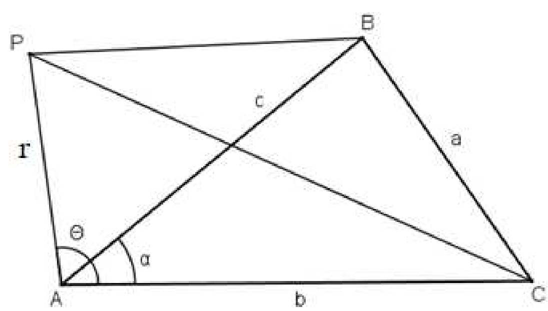


Figura 2. Los segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}\ y\ \overline{CP}$ forman un triángulo.

Sean $\sphericalangle ACB = \alpha$, $\sphericalangle PCB = \theta\ y\ |\overline{CP}| = r$ (como se muestra en la *Figura 2*), al aplicar la ley de cosenos al triángulo CPB obtenemos

$$|BP|^2 = |\overline{CP}|^2 + |\overline{CB}|^2 - 2|\overline{CP}||\overline{CB}|Cos(\theta) = r^2 + a^2 - 2ar\ Cos(\theta)$$

De igual forma, al aplicar la ley de cosenos, pero al triángulo CPA obtenemos

$$|\overline{AP}|^2 = |\overline{CP}|^2 + |\overline{CA}|^2 - 2|\overline{CP}||\overline{CA}|Cos(\theta - \alpha) = r^2 + b^2 - 2br\ Cos(\theta - \alpha)$$

Con lo cual las desigualdades (1), (2) y (3) se transforman respectivamente en

$$r + \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta)} > \sqrt{r^2 + b^2 - 2br\cos(\theta - \alpha)} \tag{4}$$
$$r + \sqrt{r^2 + b^2 - 2br\cos(\theta - \alpha)} > \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta)} \tag{5}$$
$$\sqrt{r^2 + b^2 - 2br\cos(\theta - \alpha)} + \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta)} > r \tag{6}$$

Se puede comprobar que cada una de estas desigualdades, al eliminar los radicales, conducen a la desigualdad (7). A manera de ejemplo, tomando cuadrados a ambos lados de la desigualdad (5) obtenemos

$$r^2 + b^2 - 2br\cos(\theta - \alpha) > r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta) - 2r\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta)} + r^2$$

Simplificando

$$2r\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta)} > r^2 + a^2 - b^2 + 2br\cos(\theta - \alpha) - 2ar\cos(\theta)$$

Tomando de nuevo cuadrados a ambos lados de la desigualdad anterior obtenemos

$$4r^2(r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta)) > (r^2 + a^2 - b^2)^2 + 4r(r^2 + a^2 - b^2)(b\cos(\theta - \alpha) - \mathrm{a}\cos(\theta)) + 4r^2(b\cos(\theta - \alpha) - \mathrm{a}\cos(\theta))^2 \tag{7}$$

Así, la región $\mathcal{R}$ queda determinada por los puntos $P = (r, \theta)$ que satisfacen la desigualdad (7).

Región $\mathcal{R}^C$ para triángulos isósceles

Si el triángulo CAB es isósceles, $|BC| = a = |AC| = b$ la ecuación (7) se transforma en

$$4r^2(r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta)) > r^4 + 4r^3a(\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta)) + 4r^2a^2(\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta))^2$$

Que simplificando obtenemos

$$r^2(3r^2 - 4ra(\cos(\theta - \alpha) + \cos(\theta)) - 4a^2((\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta))^2 - 1)) > 0 \tag{8}$$

Por lo tanto, para que la desigualdad (8) se satisfaga es suficiente que

$$3r^2 - 4ra(\cos(\theta - \alpha) + \cos(\theta)) - 4a^2((\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta))^2 - 1) > 0 \tag{9}$$

Con lo cual la región $\mathcal{R}$ para triángulos isósceles queda determinada por los puntos $P=(r,\theta)$ que satisfacen la desigualdad (9).

El caso de igualdad en (9) corresponde a una ecuación cuadrática que podemos resolver para determinar la frontera de la región $\mathcal{R}$. Calculando el discriminante de dicha ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
\Delta &= 16a^2(\cos(\theta-\alpha)+\cos(\theta))^2+16a^2\cdot 3((\cos(\theta-\alpha)-\cos(\theta))^2-1)\\
&= 16a^2\begin{pmatrix} cos^2(\theta-\alpha)+2cos(\theta-\alpha)\cos(\theta)+cos^2(\theta)+3cos^2(\theta-\alpha)\\ -6cos(\theta-\alpha)\cos(\theta)+3cos^2(\theta)-3\end{pmatrix}\\
&= 16a^2(4cos^2(\theta-\alpha)-4cos(\theta-\alpha)\cos(\theta)+4cos^2(\theta)-3)\\
&= 64a^2\left(cos^2(\theta-\alpha)-cos(\theta-\alpha)\cos(\theta)+cos^2(\theta)-{}^3/_4\right)\\
&= 64a^2\left(cos^2(\theta-\alpha)-cos(\theta-\alpha)\cos(\theta)+\frac{cos^2(\theta)}{4}+\frac{3cos^2(\theta)}{4}-{}^3/_4\right)\\
&= 64a^2\left(\left(cos(\theta-\alpha)-\frac{\cos(\theta)}{2}\right)^2+\frac{3}{4}cos^2(\theta)-\frac{3}{4}\right)\\
&= 64a^2\left(\left(cos(\theta-\alpha)-\frac{\cos(\theta)}{2}\right)^2-\frac{3}{4}sen^2(\theta)\right)\\
&= 64a^2\left(cos(\theta-\alpha)-\frac{\cos(\theta)}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}sen\,(\theta)\right)\left(cos(\theta-\alpha)-\frac{\cos(\theta)}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}sen\,(\theta)\right)\\
&= 64a^2\left(cos(\theta-\alpha)-cos\left({}^\pi/_3-\theta\right)\right)\left(cos(\theta-\alpha)-cos\left({}^\pi/_3+\theta\right)\right)\\
&= 64a^2\left[-2sen\left(\frac{\theta-\alpha+{}^\pi/_3-\theta}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\theta-\alpha-{}^\pi/_3+\theta}{2}\right)\cdot -2sen\left(\frac{\theta-\alpha+{}^\pi/_3+\theta}{2}\right)\right.\\
&\qquad\left.\cdot\, sen\left(\frac{\theta-\alpha-{}^\pi/_3-\theta}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

De donde

$$\Delta = -256a^2\cdot sen\left(\frac{{}^\pi/_3-\alpha}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{{}^\pi/_3+\alpha}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{2\theta-\alpha-{}^\pi/_3}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{2\theta-\alpha+{}^\pi/_3}{2}\right)$$

Con lo cual las soluciones de dicha ecuación cuadrática están dadas por:

$$\begin{aligned}
r_1(\theta) &= \frac{2a(cos(\theta-\alpha)+\cos(\theta))+8a\sqrt{\mathrm{T}(\theta)}}{3}\\
r_2(\theta) &= \frac{2a(cos(\theta-\alpha)+cos(\theta))-8a\sqrt{\mathrm{T}(\theta)}}{3}
\end{aligned}\qquad (10)$$

donde

$$T(\theta) = -sen\left(\frac{\pi/_3 - \alpha}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{\pi/_3 + \alpha}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{2\theta - \alpha - \pi/_3}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{2\theta - \alpha + \pi/_3}{2}\right) \quad (11)$$

Cuando el triángulo CAB es equilátero se tiene que $\alpha = \frac{\pi}{3}$, con lo cual $T(\theta) = 0$, por lo que la ecuación cuadrática asociada a la desigualdad (9) sólo tiene una solución, dada por:

$$r_1 = \frac{2a}{3}(cos(\theta - \alpha) + \cos(\theta))$$
$$r_1 = \frac{4a}{3} \cdot \cos\left(\theta - \pi/_6\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (12)$$
$$r_1 = \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot cos\left(\theta - \pi/_6\right)$$

Observe que la expresión (12) es la ecuación de un círculo de radio $\frac{a}{\sqrt{3}}$ que pasa por el origen con centro en $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6}\right)$, el cual corresponde al círculo Γ circunscrito al triángulo CAB. Por otro lado, dado que la desigualdad (9) en este caso se reduce a $(r - r_1)^2 > 0$, todo punto $P = (r, \theta)$ del plano que no esté en Γ satisface dicha desigualdad (*Figura 3*), tal y como lo afirma el teorema de Pompeiu.

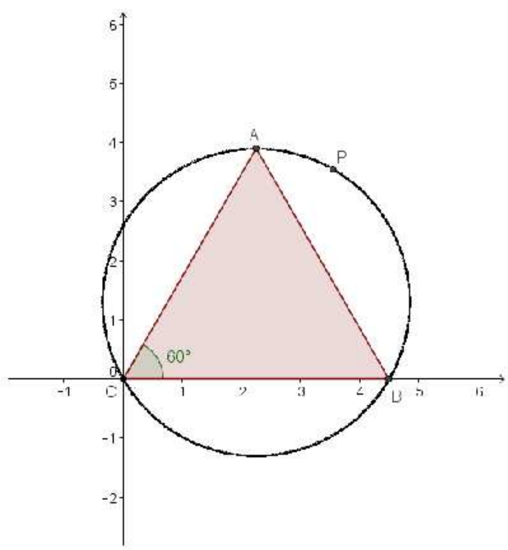


Figura 3. Región $\mathcal{R}^c = \Gamma$ para triángulos equilátero, $\alpha = \pi/_3$.

Caracterización de la región $\mathcal{R}^c$ para triángulos isósceles

Las ecuaciones en (10) describen la frontera de la región $\mathcal{R}$, lo cual nos permite obtener su representación gráfica. Para esto, observe que $T(\theta)$ puede reescribir de la siguiente forma:

$$T(\theta)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\cos(\alpha)\right)\left(\frac{1}{2}-\cos(2\theta-\alpha)\right)$$

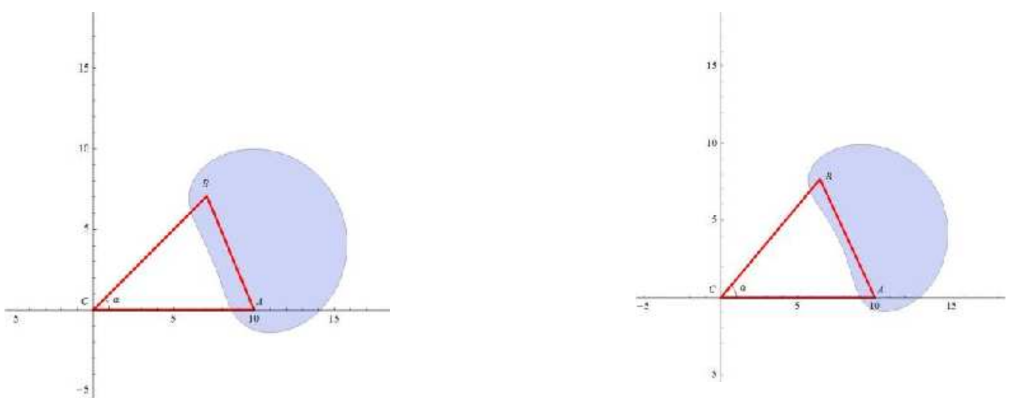
Con lo cual el signo de $T(\theta)$ queda determinado por la expresión $\frac{1}{2}-\cos(2\theta-\alpha)$ ya que

- Si $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$, entonces $\frac{1}{2}-\cos(\alpha)<0$
- Si $\frac{\pi}{3}<\alpha<\pi$, entonces $\frac{1}{2}-\cos(\alpha)>0$

Esto no permite determinar para un valor dado de α, el dominio de $T(\theta)$ y así poder graficar la frontera de la región $\mathcal{R}$ usando las ecuaciones dadas en (10). Esto nos lleva a distinguir dos tipos de regiones, según sea el valor del ángulo α.

Regiones $\boldsymbol{\mathcal{R}^c}$, con $\boldsymbol{\alpha} \in]\mathbf{0}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}[$

La *Figura 4*, muestran la región $\mathcal{R}^C$ para los casos $\alpha=45°$ y $\alpha=55°$ y $a=10$. Observe que este tipo de regiones tienen una forma semejante a la de un "*riñón*".

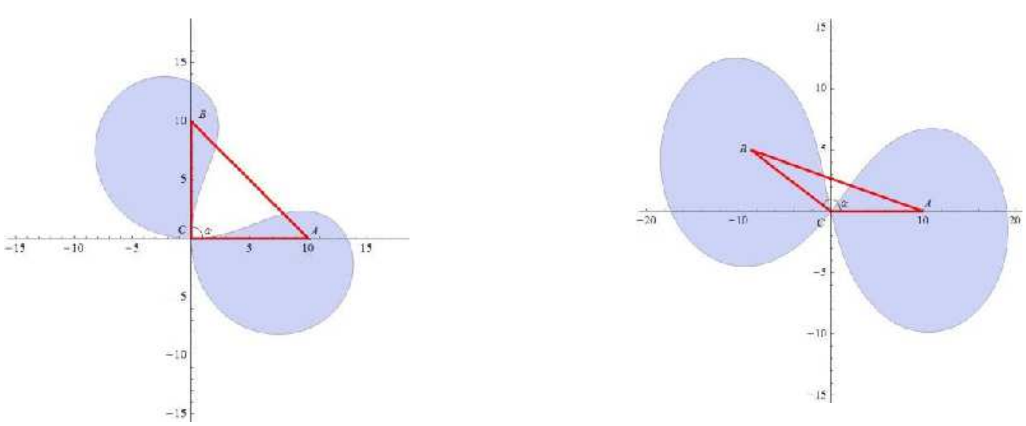


(a) $a=10$ y $\alpha=45°$. (b) $a=10$ y $\alpha=55°$.

Figura 4. Región $\mathcal{R}^c$ tipo "*riñón*", $\alpha\in]0,\frac{\pi}{3}[$.

Regiones $\boldsymbol{\mathcal{R}^c}$, con $\boldsymbol{\alpha} \in]\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}, \boldsymbol{\pi}[$

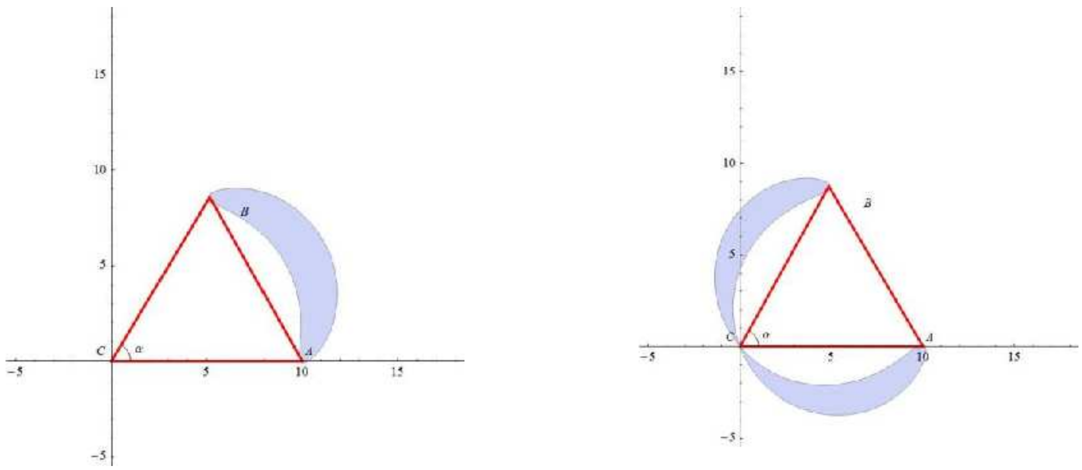
La *Figura 5*, muestran la región $\mathcal{R}^c$ para los casos $\alpha=90$ y $\alpha=150°$ y $a=10$. Observe que este tipo de regiones tienen una forma similar a una "*lemniscata*".



(a) $a=10$ y $\alpha=90°$. (b) $a=10$ y $\alpha=150°$.

Figura 5. Regiones $\mathcal{R}^c$ tipo "*lemniscata*", para $\alpha\in]\frac{\pi}{3},\pi[$.

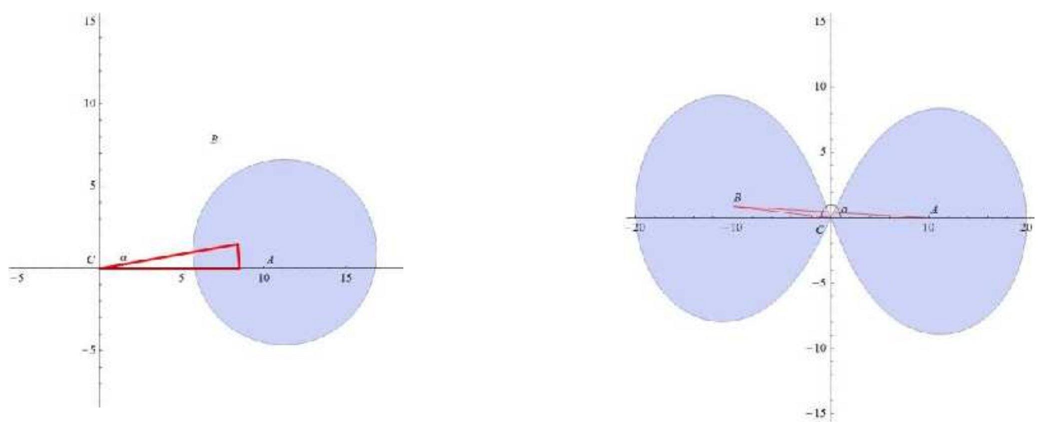
Es interesante analizar el comportamiento de la región $\mathcal{R}^c$ para valores frontera de α, es decir, valores cercanos a $0, \frac{\pi}{3}$ y π. Por ejemplo, cuando $\alpha \to \frac{\pi}{3}^-$ las regiones son similares a una lúnula, como se muestra en la *Figura 6a*. Cuando $\alpha \to \frac{\pi}{3}^+$ las regiones se asemejan a un par de lúnulas como se muestra en la *Figura 6b*. Estas regiones conforme $\alpha \to \frac{\pi}{3}$ convergen al círculo Γ circunscrito al triángulo CAB.



(a) $a = 10$ y $\alpha = 59°$. (b) $a = 10$ y $\alpha = 61°$.

Figura 6. Regiones $\mathcal{R}^c$ cuando $\alpha \to \frac{\pi}{3}$.

Por otro lado, cuando $\alpha \to 0^+$ las regiones son casi circulares como se muestra en la *Figura 7a* y cuando $\alpha \to \pi^-$ la región $\mathcal{R}^c$ es ‘‘casi’’ una lemniscata como se observa en la *Figura 7b*.



(a) $a = 8.5$ y $\alpha = 10°$. (b) $a = 10$ y $\alpha = 175°$.

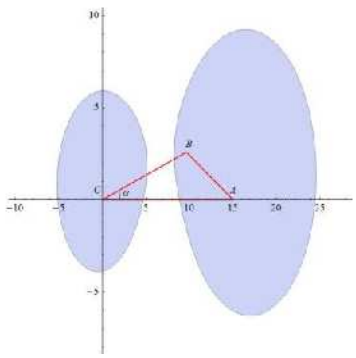
Figura 7. Regiones $\mathcal{R}^c$ cuando $\alpha \to \pi$.

Representación gráfica de la región $\mathcal{R}^c$ para triángulos escalenos

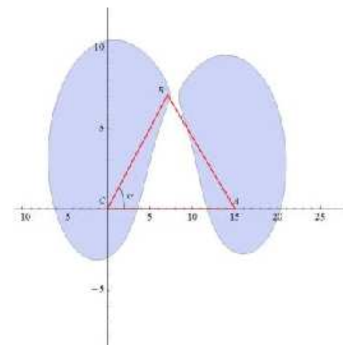
Caracterizar la región $\mathcal{R}^c$ para el caso de triángulos escalenos resulta mucho más complejo que para el caso de triángulos isósceles, pues la desigualdad (7)

$$4r^2(r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta)) > (r^2 + a^2 - b^2)^2 + 4r(r^2 + a^2 - b^2)(b\cos(\theta - \alpha) - a\cos(\theta)) + 4r^2(b\cos(\theta - \alpha) - a\cos(\theta))^2$$

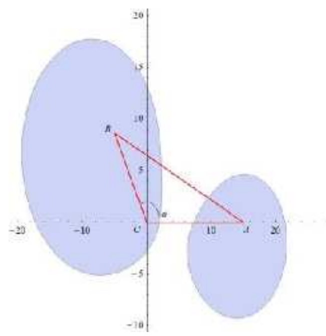
que describe dicha región depende de un parámetro más, a saber b, la longitud del lado $|\overline{BC}|$. Pero, aun así, podemos describir gráficamente algunos casos que nos permiten tener una idea de la posible forma de la región $\mathcal{R}^c$, como se muestra en la *Figura 8*. Pareciera que en este caso la región $\mathcal{R}^c$ siempre es disconexa, pero es parte de las cosas que queda por investigar.



(a) $a = 15, b = 10, \alpha = 15°$.



(b) $\mathrm{a} = 15, \mathrm{b} = 10, \alpha = 45°$.



$\mathrm{a} = 15, \mathrm{b} = 10, \alpha = 120°$.

Figura 8. Región $\mathcal{R}^c$ para triángulos escalenos.

Conclusiones

Se obtuvo una desigualdad que describe de forma general la región $\mathcal{R}$ compuesta por los puntos P del plano xy para los cuales las longitudes de los segmentos $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CP}$ corresponden a las medidas de los lados de un triángulo, en este sentido se generaliza el teorema de Pompeiu para cualquier tipo de triángulo. En particular se logra caracterizar la región para triángulos isósceles y se presentan algunas gráficas que ilustran la región para el caso de triángulos escalenos. En el desarrollo de esta investigación ha sido fundamental el uso de herramientas como GeoGebra, Octave y/o Mathematica que permitieron visualizar y validar los resultados obtenidos, esto reafirma la importancia de incorporar este tipo de herramientas en el quehacer académico.

Referencias

Bényi, Á., Casu, I. (2009). Pompeiu´s theorem revisited. *College Mathematics Journal, 40*(4), 252-258.

Pompeiu, D. (1936). Une identité entre nombres complexes et un théorème de géometrie élémentaire. *Bull. Math. Phys*. École Polytechnique Bucarest 6, 6-7.

Sándor, J. (2005). On the Geometry of Equilateral Triangles. *Forum Geometricorum*, 107-117.

A beleza da matemática

Maria José **Cáceres** Garcia
USAL - ES
Espanha
majoca@usal.es
Ademir **Basso**
CEPACS - PR
Brasil
ademir_basso@yahoo.com.br

A experiência ora exposta ocorreu por ocasião da I EXPO CEPACS – Exposição de Trabalhos e Produções Científicas, Literárias e Quantitativas, ocorrida no CEPACS – PR (CEPACS, 2018). O objetivo era mostrar à comunidade “A beleza da Matemática” em suas mais variadas formas, deixando claro sua importância no cotidiano e em todas as ciências. Os estudantes proponentes são do 3º ano do Ensino Médio (~ 17 anos) e o público que participou voluntariamente das experiências tinham as mais variadas idades já que eram, em sua maioria, alunos do Colégio, pais de alunos e membros da comunidade. O envolvimento dos estudantes proponentes fui singular, enquanto alguns explicavam os conceitos, outros efetuavam as medidas e outros com a calculadora, encontravam os resultados da beleza da matemática. Acredita-se que o conhecimento trabalhado ocorreu da melhor forma possível.

Neste contexto, a beleza da Matemática foi demonstrada, em uma de suas partes, através de medidas e cálculos como uma pessoa pode constatar sua beleza. Neste caso, a beleza tem um valor, que é simbolizado por B, comparado com o valor de ϕ (*fi*), o número de ouro, com valor aproximado de 1,618. Para se chegar ao número de ouro ou aproximar-se dele, os estudantes proponentes do trabalho, determinavam a razão/divisão da medida da altura (h) da pessoa pela medida da altura do umbigo (u) até o solo do voluntário. A equação/fórmula é:

$$B = \frac{h}{u}$$

É possível com esta fórmula, apenas mudando as incógnitas, descobrir se a pessoa tem um rosto bonito. Nesse caso, divide-se a medida do queixo da pessoa até o início de seus cabelos na testa pela medida de uma orelha à outra em linha reta, o resultado deve se aproximar do número de ouro. Outras medidas do corpo do homem podem ser feitas, usando a mesma fórmula, para descobrir se essa pessoa é bonita matematicamente. Nesse sentido, dividir a distância entre o joelho e o umbigo pela distância entre o joelho e o solo é uma delas, dividir a distância da base do nariz até o queixo pela distância dos olhos até a base do nariz é outra (Smole & Diniz, 2005).

De maneira geral todos os voluntários apresentavam medidas muito próxima à razão áurea, o que os deixavam felizes.

Em outra parte do trabalho, a Matemática mostrava a questão da saúde do ser humano, através de duas medidas matemáticas, uma delas o IMC – Índice de Massa Corporal e a G% - Porcentagem de Gordura. Os cálculos eram feitos com as respectivas fórmulas/equações:

$$IMC = \frac{m}{h^2} \qquad \text{e} \qquad \%G = \frac{circunferência\ do\ quadril\ (cm)}{h\,.\sqrt{h}\ (m)} - 18$$

Iniciando com o IMC, os estudantes responsáveis pela experiência mediam e calculavam baseados na massa (m) e na altura (h) do colaborador voluntário. Quanto à porcentagem de gordura, os cálculos foram efetuados levando-se em consideração a circunferência do quadril (cm) e a altura (m) do indivíduo participante. Aos voluntários que se distanciavam das medidas "ideais", os estudantes proponentes mostravam uma tabela com as implicações para a saúde.

Noutra parte do trabalho, os estudantes mostraram que a Matemática explica inclusive qual é a idade ideal para uma pessoa se casar, baseando-se no matemático Dennis Lindley (2007) que criou uma pequena equação para descobrir essa idade. Os estudantes calcularam a idade ideal para se casar (M) daqueles que tinham interesse em descobrir (maiores de 16 anos), baseando-se em uma relação entre a expectativa da pessoa (x) somada com a experiência particular no amor (y) com a colaboração da constante de Euler (e). A idade ideal é calculada pela equação/fórmula:

$$M = y + \frac{(x-y)}{e}$$

Por fim, o ciclo do trabalho fechou com um jogo baseado no "Passa ou Repassa", famoso "torna na cara", com questões que envolviam Matemática. O jogo necessitava de dois jogadores que competiam entre eles, a questão era realizada por um estudante mediador, ao término da questão, o jogador que acreditava saber a resposta, apertava um dispositivo e acertando, o adversário levava torna na cara, se não acertasse, ele seria castigado com a torta na cara.

O ambiente onde ocorreu todo o ciclo que mostrava toda a beleza da matemática estava "decorado" com frases que aludiam a esta beleza, que lembrava também da importância que esta ciência teve e tem na evolução da humanidade e inúmeras frases mostrando o humor nesta disciplina (Baroni, Giolo & Pourrat, 2012).

O que se quer apresentar é que nestas cinco etapas da experiência, mostrou-se a beleza da Matemática aos estudantes e demais participantes da I EXPO CEPACS, a beleza pessoal, a beleza proveniente da saúde do indivíduo, a beleza do casamento e por fim, a beleza de conhecer Matemática e perceber que a mesma está imersa em toda atividade humana desde seu nascimento até o final. A participação do público foi excelente, não faltaram elogios ao trabalho, ficando claro a importância da Matemática.

Referências e bibliografia

Baroni, I., Giolo, L.F. & Pourrat, P. (2012). *Piadas nerds*: as melhores piadas de matemática. Campinas.

Cepacs. (2018). *1ª Exposição de Trabalhos e Produções Científicas, Literárias e Quantitativas* - I EXPOCEPACS. Mariópolis - PR: CEPACS.

Lindley, D. (2007). *Idade ideal de casamento*. 2007. Disponível em: http://www.profcardy.com/calculadoras/aplicativos.php?calc=10. Acesso em: 10/10/2011.

Smole, K.S. & Diniz, M.I. (2005). *Matemática*: ensino médio. 5. ed. São Paulo: Editora Saraiva.

Reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área

Melissa Denisse **Castillo** Medrano
Pontificia Universidad Católica del Perú, Maestría en Enseñanza de las Matemáticas.
Perú
melissa.castillo@pucp.edu.pe
Jesús Victoria Flores **Salazar**
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
jvflores@pucp.pe

Resumen

Desde nuestra práctica docente podemos ser testigos que los estudiantes presentan dificultades con el concepto área. Según diversos autores, esto se debe a la forma mecánica en la que se presenta dicho concepto en las aulas, asociado siempre al uso de fórmulas. En esta investigación se utilizó aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica como marco teórico y aspectos de la Ingeniería Didáctica como marco metodológico. Este taller tiene como propósito analizar la reconfiguración que realizan estudiantes de segundo grado de educación secundaria (13 y 14 años de edad) para determinar la medida de área de polígonos. En la primera parte mostraremos cómo se aborda la reconfiguración a través del tangram y la malla cuadriculada. En la segunda parte, se presentará la reconfiguración que realizaron estudiantes de segundo grado de secundaria y cómo esta les permitió determinar la medida de áreas de polígonos.

Palabras clave: reconfiguración, área como magnitud, registro de representación semiótica, aprehensiones.

Introducción

En el Perú menos del 50% de estudiantes a nivel nacional puede responder correctamente problemas vinculados al cálculo de la medida de área según el Ministerio de Educación del Perú (2016). Diversos autores (Douady & Perrin-Glorian (1987), Corberán (1996), Herendiné (2016)) mencionan que estas dificultades responden a la forma de enseñanza que se da en la escuela, enfocada más en la manipulación numérica y algebraica mediante la aplicación de fórmulas, en vez de la exploración de las relaciones geométricas que proporciona la figura.

Frente a esta realidad, surgen otras alternativas para abordar el concepto de área en el aula como la descomposición y composición. Según Duval (2012b), es posible hallar la medida del área de un polígono a partir de su reconfiguración. Asimismo, existen otras variables que favorecen la operación de la medida del área, como el uso de la malla cuadriculada (Pessoa, 2010). Esto quiere decir que los estudiantes podrían determinar el área de un polígono, como el trapecio por ejemplo, mediante la reconfiguración y la malla cuadriculada sin hacer uso de la fórmula. (Borja, 2015).

En esta investigación nos focalizamos en analizar la reconfiguración para determinar la medida de área de polígonos, realizada por dos estudiantes de segundo grado de educación secundaria (aproximadamente entre 13 y 14 años de edad. Asimismo, analizamos los tipos de aprehensiones que utilizan durante la aplicación de la actividad.

Teoría de Registro de Representación Semiótica

Utilizamos aspectos de la Teoría de Registro de Representación Semiótica de Duval como marco teórico, centrándonos en el registro figural y en la aprehensión operatoria de reconfiguración. Para Duval (2011) es esencial que en la actividad matemática se puedan movilizar muchos registros de representación semiótica. Según el autor existen cuatro tipos de registros: el registro de lengua natural, el algebraico, el figural y el gráfico. En esta investigación, nos enfocaremos en el registro figural. Según Duval (2004) las figuras juegan un papel fundamental en la comprensión de problemas de Geometría ya que forman un soporte intuitivo para las actividades mediante la exploración.

Duval (2012b) considera a la figura como una aprehensión cognitiva y menciona que existen cuatro maneras diferentes de aprehender el registro figural, según su rol estas son: aprehensión perceptiva, operatoria, discursiva y secuencial; cada una de ellas independiente de las otras. En esta investigación trabajaremos con tres de ellas las cuales describiremos a continuación. La aprehensión perceptiva es la que permite identificar o reconocer inmediatamente una forma o un objeto matemático en el plano o en el espacio. La aprehensión discursiva es aquella que corresponde a la explicación desde las propiedades matemáticas de la figura a las indicadas por la leyenda o por la hipótesis. Y la aprehensión operatoria tiene que ver con las modificaciones o transformaciones que podemos hacer a las figuras para lo cual se distingue tres tipos: la modificación mereológica, la modificación óptica y la modificación posicional (Duval, 1994).

Duval (2012a) menciona que la reconfiguración es un tipo de modificación mereológica que consiste en la descomposición en unidades figurales de la misma dimensión que la inicial, para luego ser recombinadas en otra nueva figura. En la operación de reconfiguración, toda figura geométrica puede ser dividida en sub-figuras de diferentes formas como se observa en la Figura 1.

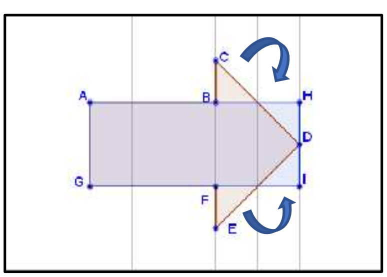


Figura 1. Tratamiento en el registro figural por reconfiguración (Castillo, 2018)

Existen además tres tipos de reconfiguración: estrictamente homogénea, homogénea y heterogénea. La primera se da cuando las sub-figuras de la descomposición tienen la misma forma que la figura inicial; la segunda, cuando las sub-figuras tienen la misma forma entre ellas pero diferente a la inicial; y la tercera, cuando las sub-figuras tienen diferente forma entre ellas y diferente forma a la inicial.

Área como magnitud

Douady y Perrin-Glorian (1987) también mencionan que las dificultades observadas en relación con el concepto medida de área están relacionadas con la introducción prematura de un acercamiento a la medida del área mediante el uso de fórmulas, es decir un enfoque del área como número.

Por esta razón los investigadores proponen la necesidad de construir la noción de área como magnitud. En ese sentido, Da Silva (2011) adopta una organización conceptual para el área en tres cuadros y presenta un esquema inspirado en las investigaciones de Douady y Perrin-Glorian (1987) como se muestra en la Figura 2.

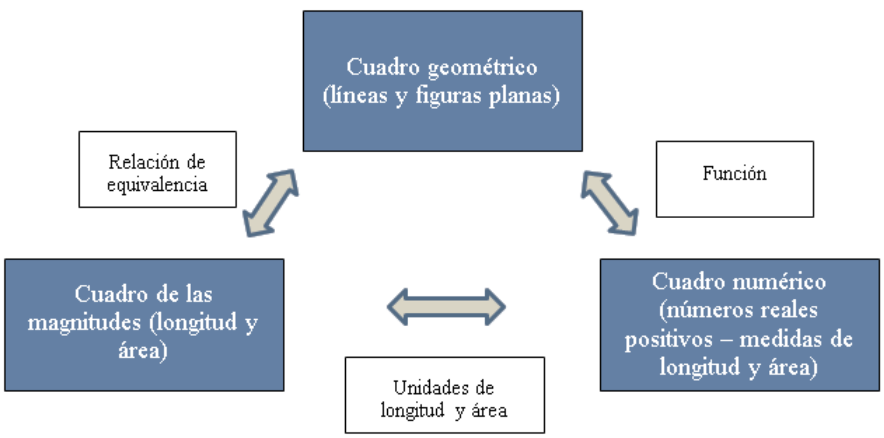


Figura 2. Organización conceptual de referencia del campo de las magnitudes longitud y área, y sus medidas (Da Silva, 2011)

Según Ferreira y Bellemain (2016), el cuadro geométrico está constituido por las superficies planas (cuadrado, rectángulo, triángulo, paralelogramo, trapecio, etc.) y sus propiedades; el cuadro numérico está constituido por las medidas de área de las superficies planas que pertenecen a los números reales positivos; y el cuadro de las magnitudes está constituido por las clases de equivalencia de figuras de la misma área.

Los cuadros están constituidos por objetos que pertenecen a diferentes ramas de la matemática, las relaciones entre los objetos, sus formulaciones y sus imágenes mentales. Es por ello, que consideramos que un estudio del área como magnitud implica establecer distinciones entre el área y la figura, y entre el área y el número. En la distinción entre área y figura, la operación de la reconfiguración juega un papel importante, pues a partir de una figura inicial se puede producir otra figura por la descomposición y recomposición de sus partes, obteniendo así una nueva figura que mantiene la misma medida de área.

Metodología

En cuanto a la metodología, este estudio es de tipo cualitativo y como método utilizamos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) pues como nuestro interés es analizar los procesos que realizan los estudiantes cuando trabajan en situaciones que involucran la medida del área de un polígono mediante la reconfiguración, consideramos que la Ingeniería Didáctica es la más idónea para nuestra investigación.

Como parte de la metodología, se creó dos actividades cada una con cierta cantidad de ítems que promovían en los estudiantes la comparación de áreas de figuras y la reconfiguración de diferentes polígonos para determinar su medida de área. En la Tabla 1 mostramos la organización de la secuencia de actividades y el tiempo utilizado en cada una de ellas:

Tabla 1

Descripción de la secuencia de actividades

Actividad	**Descripción**	**Tiempo**
1. Trabajemos con el Tangram	Realizar reconfiguraciones mediante el uso del Tangram para comparar las áreas de figuras de forma diferente.	80 min
2. Hallemos la medida del área de polígonos	Determinar la medida del área de polígonos usando lápiz y papel mediante el uso de la malla cuadriculada. Movilizar los conocimientos de reconfiguración.	40 min

El propósito de la Actividad 1 fue analizar las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva que realizan los estudiantes mediante el uso del Tangram, pues con esta actividad se buscaba relacionar el cuadro de las magnitudes con el cuadro de las figuras. Mientras que el propósito de la Actividad 2 fue analizar las reconfiguraciones que los estudiantes realizan a diferentes polígonos para determinar la medida de su área, usando lápiz, papel con malla cuadriculada y colores. Asimismo, que los estudiantes movilicen los conocimientos de reconfiguración adquiridos en la primera actividad, es decir lo que se está provocando es relacionar el cuadro de las figuras con el cuadro numérico.

Desarrollo de las actividades y análisis

Si bien esta investigación se realizó con 13 estudiantes de segundo grado de educación secundaria (entre 13 y 14 años) pertenecientes a una institución educativa privada de Lima, en el análisis de las actividades solo se trabajó con dos estudiantes (Sara y Abril) quienes fueron las que mostraron mayor interés durante toda la aplicación y nos proporcionaron mayor información en sus fichas de actividades. En este documento solo mostraremos el análisis a priori y el análisis a posteriori del ítem 1 resuelto por Sara.

Ítem 1

En el ítem 1 se le pidió al estudiante determinar la medida del área de las figuras considerando a cada cuadradito como unidad de medida y luego se le pidió justificar su repuesta, como se muestra en el Figura 3.

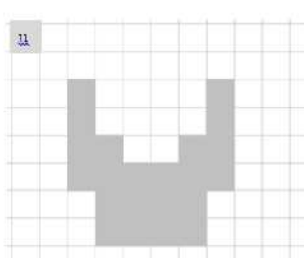


Figura 3. Ítem 1 de la Actividad 2(Castillo, 2018)

Análisis a priori: Las variables didácticas que intervienen en este ítem son: nitidez de la figura (sin malla visible) y posición relativa del polígono en relación con la malla (todos los lados coinciden con la línea de la cuadrícula).

Para resolver este ítem esperamos que el procedimiento más usado sea el conteo de cuadraditos con el que se obtiene como respuesta 22u. Por otro lado, es posible que surjan otros procedimientos como por ejemplo la descomposición de la figura en once rectángulos cuyos lados midan 2 y 1, es decir, una descomposición homogénea. Después, se determine la medida del área de uno de los rectángulos y luego se multiplique este valor por la cantidad de rectángulos que hay en la figura. Otro posible procedimiento sería la reconfiguración heterogénea. Por ejemplo, la figura inicial se puede descomponer en tres sub-figuras: dos rectángulos y un dodecágono. Luego, mediante una aprehensión operatoria de modificación posicional se traslade los dos rectángulos y se obtenga una nueva figura en la que sea más fácil determinar su área (ver Figura 4).

Luego de ello, esperamos que el estudiante movilice su aprehensión discursiva que le permita explicar el procedimiento utilizado para resolver el ítem. Por otro lado, pensamos que este ítem sería el más fácil de la actividad puesto que todos los lados de la figura coinciden con las líneas de la malla cuadriculada.

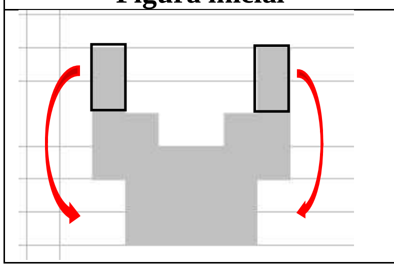
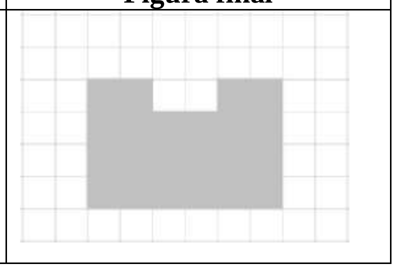
Figura inicial	**Figura final**
	

Figura 4. Posible reconfiguración del ítem 1

Análisis *a posteriori de Sara*: ella decidió usar colores como una forma de organizar mejor su trabajo. Como se muestra en el Figura 5, Sara movilizó su aprehensión perceptiva y operatoria de modificación mereológica de descomposición heterogénea, para transformar su figura inicial en dos rectángulos. A diferencia de lo previsto en el análisis a priori, Sara realizó más descomposiciones en la figura. Ella descompuso la figura inicial en cuatro cuadrados, un rectángulo y un octógono. Luego, mediante una modificación posicional, trasladó los dos cuadrados verdes y los dos cuadrados rojos para completar los “espacios vacíos” y formar dos rectángulos, uno cuyos lados midan 6 y 3, y otro cuyos lados midan 4 y 1.

En cuanto a su aprehensión discursiva, podemos observar que Sara usó el término “mover” para referirse al movimiento de traslación, usó la frase “agrandar más de la cuenta” para referirse a una figura compuesta en la que no se puede obtener el área desde un principio. Cuando Sara dice que desea “crear dos figuras que me den el área” pensamos que Sara cree que solo puede calcular el área de figuras conocidas como el rectángulo por ejemplo. Por otro lado, podemos observar que Sara respondió correctamente la medida del área de la figura, sin embargo, falló en la unidad de medida elegida. Ella escogió al centímetro cuando el ítem indicaba que la unidad de medida era u.

Es importante mencionar que en nuestro análisis a priori, habíamos pensado que este sería el ítem más fácil y que por lo tanto les tomaría menos tiempo. Sin embargo, pudimos observar que las estudiantes se demoraron en responder este ítem porque no encontraba números de forma explícita y por esta razón pensaban que la pregunta no se podía resolver.

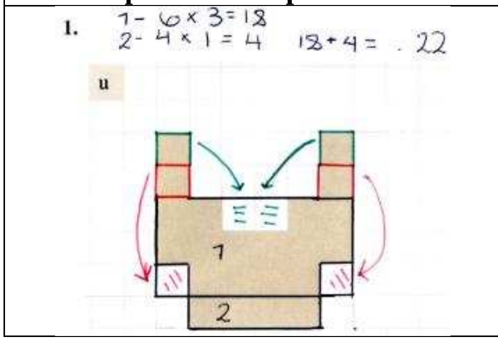
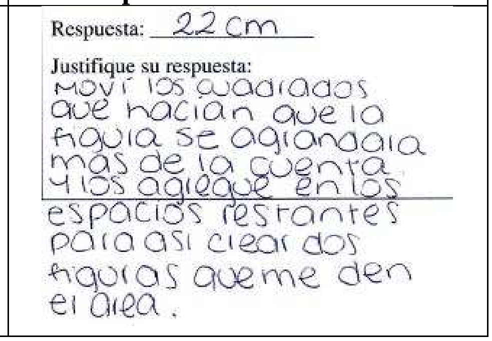
Aprehensión operatoria	**Aprehensión discursiva**
	

Figura 5. Reconfiguración del ítem 1 de la Actividad 2 producido por Sara

En el taller se pretende mostrar también el análisis a posteriori de los otros ítems resueltos por Sara cuyas imágenes se encuentran en el Apéndice A.

Después de realizar el análisis de las actividades, pudimos observar que ambas estudiantes (Sara y Abril) utilizaron a la reconfiguración como una estrategia para poder determinar la medida del área de los polígonos presentados en la ficha. No obstante, manifestaron dificultades en la selección de la unidad de medida.

También observamos que ambas estudiantes realizaron más descomposiciones que las que esperábamos en el análisis a priori, pensamos que esto se debe a que su aprehensión perceptiva se apoyó en la cuadrícula de la malla cuadriculada. Por otro lado, ambas estudiantes lograron articular sus aprehensiones perceptivas, discursivas y operatorias. A lo largo de las dos actividades, las estudiantes lograron realizar conversiones de un registro a otro, generando así el aprendizaje.

Conclusiones

El tangram es un recurso que permite la producción de figuras por el proceso de reconfiguración. Este material facilitó que las estudiantes comprendieran que dos figuras que tienen diferente forma pueden tener la misma área, siempre y cuando estén compuestas por la mismas sub-figuras. Asimismo, permitió que las estudiantes realizaran reconfiguraciones homogéneas y heterogéneas.

La malla cuadriculada por su parte, propició la reconfiguración mediante la descomposición y composición de las figuras. Las reconfiguraciones más utilizadas en las figuras fueron las de tipo heterogénea. Asimismo, la malla cuadriculada facilitó el poder determinar la medida del área de los polígonos mediante el conteo de cuadraditos o la generación de rectángulos. En ese sentido, medir el área se entendió por determinar cuántas veces un cuadradito cabía en la figura.

Confrontamos los análisis a priori y a posteriori de las actividades planteadas, afirmamos que se logró validar el uso de la reconfiguración como una operación en el registro figural que permitió obtener la medida de área de diversos polígonos.

Agradecimientos

A la beca PAIP (Programa de Apoyo a la Investigación para estudiantes de Posgrado), a la beca Marco Polo y a la beca RSU (Responsabilidad Social Universitaria) de la DARS (Dirección Académica de Responsabilidad Social).

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gomez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.

Borja, I. (2015). *Reconfiguración del trapecio para determinar la medida del área de dicho objeto matemático con estudiantes del segundo grado de Educación Secundaria*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Castillo, M. (2018). *Reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área con estudiantes de segundo grado de Educación Secundaria*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes de primaria a la universidad.* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia, España.

Da Silva, J. (2011). *Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didático*. Dissertação (Mestrado en Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco.

Douady, R.; & Perrin-Glorian, M. (1987). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Cahier de didactique des mathematiques-IREM*, 37, 1 – 51.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM*, 17, 121-138.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Trad. Myriam Vega. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática (Obra original publicada en 1995).

Duval, R. (2011). *Ver y ensinar a matematica de outra forma: entrar no odo matemático de pensar: os registros de representaçõe semióticas*. Sau Paulo, Brasil: Proem editora.

Duval, R. (2012a). Registro de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat*, 7(2), 266-297.

Duval, R. (2012b). Abordagen cognitiva de problema de Geometría em termos de congruencia. Revista electrónica de Educación Matemática. *Revemat*, 7(1), 118-138.

Ferreira, L.; Bellemain, P. (2016). Aprendizagem e o ensino das grandezas geométricas no 6° ano: quais as raízes dos entraves enfrentados pelos alunos?. *I Simpósio Latino-americano de Didática da Matemática.* Mato Grosso do Sul.

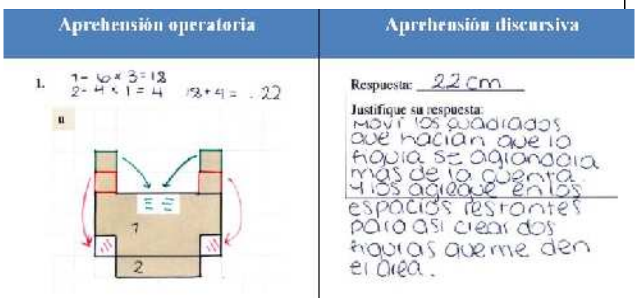
Herendiné, E. (2016). The level of understanding geometric measurement. *Ninth Congress of the European Society of Research in Mathematics Education: CERME 9*, 536-542.

Ministerio de Educación del Perú (2016). *Evaluación Censal de Estudiantes 2015: informe para docentes*. Segundo grado de secundaria. Lima.

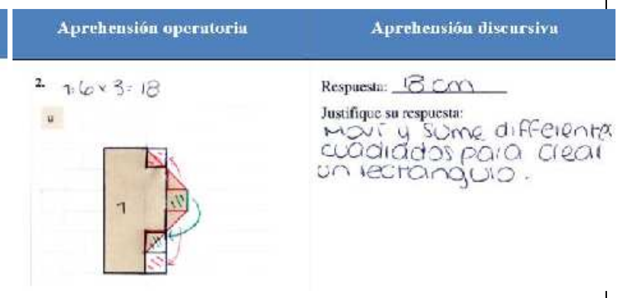
Pessoa, G. (2010). *Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada: influência de algumas variáveis*. Dissertação (Mestrado en Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco.

Apéndice A
Respuestas de Sara a los 6 ítems de la Actividad 2

Ítem 1

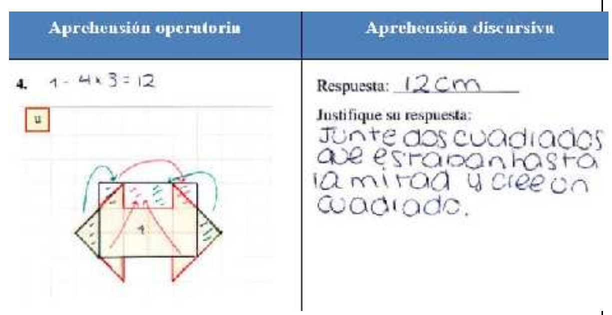


Ítem 2

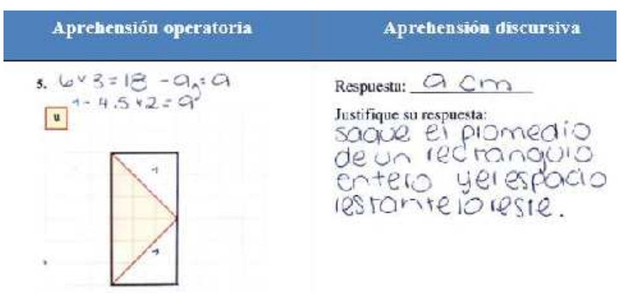


Ítem 3

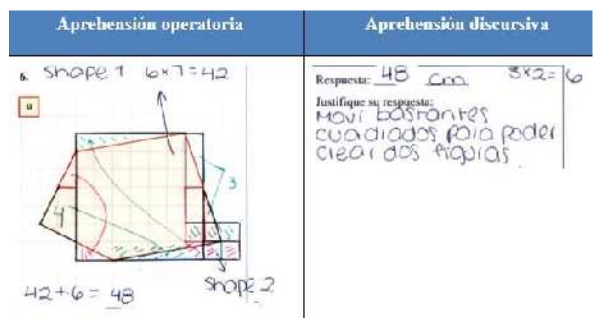
Ítem 4



Ítem 5



Ítem 6



La medida, en el bosque de los colores

Paula Fernanda **Martinez** Ravelo
Universidad Industrial de Santander
Colombia
pfmr09@hotmail.com
Jenny Patricia **Acevedo-Rincón**
Universidad Industrial de Santander
Colombia
j.p.a.rincon@gmail.com

El presente documento presenta una breve descripción de la planeación de la clase realizada bajo la metodología de *Lesson Study* con un grupo de primer grado de primaria. Aquí serán mostradas las experiencias más significativas de esta propuesta. El aprendizaje de la clase estaba enfocado en el concepto de medir (medidas de longitud de cualquier objeto, o lugar han sido necesarias siempre desde las antiguas civilizaciones hasta nuestros días). En la vida cotidiana de una persona se hace uso constante de las unidades de medidas, así que su enseñanza y aprendizaje, dentro del pensamiento métrico y sistemas de medidas, están establecidas por la necesidad que hay de entenderlas como parte del diario vivir del niño. Así mismo teniendo presente el derecho básico de aprendizaje en el cual fue orientada la clase: (i) realiza medición de longitudes, capacidades, peso, masa, entre otros, para ello utiliza instrumentos y unidades no estandarizadas y estandarizadas; (ii) mide longitudes con diferentes instrumentos y expresa el resultado en unidades estandarizadas o no estandarizadas comunes; (iii) toma decisiones a partir de las mediciones realizadas y de acuerdo con los requerimientos del problema. Además, se hace necesario resaltar que la planeación fue pensada hacia la exploración de los niños y la resolución de varias preguntas por medio de juego de roles y reflexiones dirigidas durante la clase.

Lesson Study es una metodología de origen japonés que privilegia el aprendizaje conjunto de quienes participan. Inicialmente fue propuesto para mejorar las prácticas de matemáticas y ciencias bajo el lema de maestros aprendiendo juntos (Lewis, 2002). Las reflexiones suscitadas por la identificación de necesidades de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, nacen a partir de la observación a un grupo de estudiantes, que al complementar con la experiencia de otros (futuros) profesores, promueven ciclos de discusión y reflexión que posibilitan el aprendizaje a partir de la "problematización de diferentes prácticas de enseñanza en matemáticas" (Acevedo y Fiorentini, 2017, p.40).

Este modelo permite planear, reflexionar y analizar las necesidades de enseñanza, mediante las siguientes fases de ejecución: (i) observación en el salón de clases; (ii) identificación del tema a desarrollar en la clase; (iii) planeación; (iv) implementación de la clase; (v) reflexión y sistematización de la experiencia. Estas fases serán detalladas en el siguiente apartado, donde se hará la relación del referente teórico de la metodología de *Lesson Study*, con las prácticas de enseñanza y aprendizaje en una institución Educativa.

Luego de varias semanas de observación a dos grupos de primero de primaria, esta era la primera vez en abordar este tema, por lo que se hizo necesaria la búsqueda y lectura de varias y variadas actividades. Se tenía claro que se pretendía planear una clase participativa en donde los niños fueran los protagonistas de esta, pues ellos debían de llegar a encontrarle significado a medir y sus herramientas a usar. Teniendo presente que en los dos grupos de niños tenía 33 estudiantes muy activos y curiosos, escogí una actividad en donde ellos debían tener un rol o misión para descubrir, fue así como la idea de que fueran exploradores surgió para la clase, pues pretendía que ellos iniciaran la construcción de la noción de medida.

La clase pretendía: medir el largo de objetos o trayectos haciendo uso de unidades no estándar. Esta, a su vez, estuvo organizada en varias actividades fue orientada de la siguiente manera: (i) La profesora se ubica al frente del salón, para dar las respectivas instrucciones de toda la actividad y sus partes (Saludo, dinámica de grupos, preguntas acerca de la medición, e instrucciones de silencio para abordar la actividad), se hacen preguntas como ¿Qué es medir?, ¿Les gustaría ser exploradores?, ¿Qué hacen los exploradores?, ¿Cómo se mide?, ¿para que se mide?, ¿Qué usamos para medir?; (ii) la docente lee en voz alta y haciendo mímica con el rostro a los niños un cuento “midiendo en el bosque de los colores” así mismo, crea expectativa entre los niños por medio de los problemas que tiene (la mariposa) uno de los animales del bosque, se hacen algunas preguntas respectivas de la lectura para verificar la comprensión de esta, (iii) seguidamente se muestra en el tablero cómo se debe de llenar la guía entregada y posteriormente se realiza la asignación de los equipos de 6 estudiantes, se asigna nombre de animales respectivos del cuento, (iv) la profesora entrega a cada uno los atuendos de exploradores (escarapela del animal correspondiente y tabla de registro), se asignan los líderes de cada grupo en donde cabe resaltar que fueron elegidos por poca participación observada en las clases anteriores. Los niños se organizan en los grupos de animales para salir del salón y la profesora hace el recorrido por el bosque junto con los grupos exploradores. Los niños toman los datos midiendo con los materiales (huella de los animales por cada grupo) y lo registran. (v) Devuelta al salón, se utiliza la tabla anexa para registrar los pasos de los animales y trayectos propuestos para medir, haciendo preguntas para que los alumnos pudieran reflexionar al respecto de lo realizado. Finalmente, en el cierre de la actividad, donde (vi) la profesora pregunta si la actividad preparada les gustó, los líderes de cada equipo cuentan su experiencia, además verifica si aprendieron algo de la actividad, lo cual fue satisfactorio pues los niños hicieron comentarios como:

- Qué actividad tan divertida

- profe me gusto caminar como un animal

- ahora podemos medir con diferentes objetos, pero necesitamos ponernos de acuerdo con uno para que tener la misma medida.

La planeación de la clase “la medida, en el bosque de los colores” realizada el lunes 17 de septiembre del 2018 en la institución educativa publica, colegio Liceo Patria con dos grupos de primero de primaria, fue única y muy significativa ya que se pudo desarrollar con éxito, cada una de las actividades y preguntas pensadas fueron abordadas y correspondidas con agrado de los niños, sacarlos del aula de clase y ponerlos a trabajar en grupos de animales, fue una buena decisión ya que ellos deben de organizarse y asignarse pequeñas tareas para lograr la actividad. Resalto que los niños en medio de sus diferentes perspectivas a la hora de hacer una observación o una pregunta lo ponen a prueba como docente dándonos así la oportunidad de ver un enfoque más profundo en un tema en específico.

Quiero resaltar que el trabajar con material concreto ayuda a que esta actividad sea más real, los estudiantes se apropien de las tareas asignadas facilitando así su desarrollo y aprendizaje, los materiales diseñados fueron apropiados para la implementación de las diferentes actividades.

Por mejorar, hubiera sido ideal trabajar el tono de voz más alto, pero contando con que son niños, se entiende que es algo normal en el aula de clase. El tiempo que se planeó para llevar a cabo la clase fue suficiente. Respecto a las preguntas planteadas y las situaciones problema que fueron abordadas, hizo que los estudiantes estuvieran siempre atentos y con el foco en terminar la actividad bien, teniendo presente si lo que hacía estaba bien o no, lo cual me agrado demasiado ya que eran los niños quienes debía validar los proceso, discutir si lo hacían bien, confrontar por medio de argumentos y dar una aprobación de lo encontrado. Siempre hubo trabajo en equipo respectando las tareas asignadas, si se veían en aprietos que no podían resolver me llamaban y ante una nueva pregunta que les hacía iniciaban la resolución nuevamente, hasta llegar al resultado y registrarlo en la tabla, buscando en ellos crear argumentos y construcción del concepto trabajado.

Podría concluir que el éxito de la clase está enfocado al tiempo, la dedicación, las constante revisiones que se le hicieron a las actividades y el análisis previo de cada pregunta con la respuesta suministrada. La participación de los estudiantes fue fundamental pues estos eran los encargados de que la clase fuera evolucionando por cada uno de los aportes. El hecho de tener observadores en la clase es bueno en la medida de que le dan un punto de vista o sugerencias para poder poner en práctica a la hora de desarrollar nuevamente la actividad como lo fue con el segundo grupo abordado, pues se hizo la retroalimentación de la primera clase con sus observaciones y se llevaron a cabo en la segunda clase lo cual mejoro notablemente tanto las preguntas que se les hacía como las respuestas de ellos y comprensión en el tema abordado. El trabajar con niños en demasiado gratificante porque es un aprendizaje mutuo y constructivo integralmente.

Referencias y bibliografía

Acevedo, J.; Fiorentini, D. (2017). A ‘Glocal’ *Lesson Study: the case of pedagogical practices in mathematics.* International Journal for Research in Mathematics Education, vol. 7(2), pp. 24-44.

Lewis, C. (2002). *Lesson Study:* A Handbook of Teacher-Led InstructionalChange. Philadelphia, PA: Research for Better Schools, Inc.

MEN (2016). Derechos básicos de aprendizaje-Matemáticas. Recuperado el 17 de sept 2018 de: http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf.

Pesquisas em Psicologia da Educação Matemática: contribuições para o ensino e a aprendizagem da geometria

Nelson Antonio **Pirola**
Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP
Brasil
npirola@uol.com.br

Resumo

A pesquisa tem como principal objetivo investigar os trabalhos produzidos no âmbito do ensino e aprendizagem da geometria escolar, no que se refere às suas contribuições para o trabalho do professor da Educação Básica. A fonte de dados se constituiu na produção científica dos dois maiores grupos brasileiros de pesquisa em Psicologia da Educação Matemática – PME – de duas universidades estaduais paulistas. O delineamento utilizado foi a pesquisa documental e foram analisadas 12 pesquisas desenvolvidas em níveis de mestrado e doutorado. A análise dos dados apontou 2 eixos de contribuições para o trabalho do professor, em sala de aula: Eixo 1 – ensino e aprendizagem: valoriza aspectos referentes aos exemplos e contraexemplos e atributos definidores de figuras geométricas; Eixo 2- formação de professores: necessidade de trabalho com os conteúdos matemáticos, principalmente na formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Palavras chave: geometria, ensino, aprendizagem, pesquisas, formação.

Introdução

O PROCAD – Programa Nacional de Cooperação Acadêmica da Coordenação Acadêmica da Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior, CAPES, é desenvolvido pelo Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho, UNESP/Bauru, desde 2015, em parceria com outras universidades brasileiras: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia e a Universidade Federal de Sergipe. O tema central do PROCAD é a formação de educadores em Ciências e Matemática por meio das aproximações entre ensino e pesquisa. Este artigo traz uma investigação, no âmbito do PROCAD, e que teve como objetivo analisar as contribuições de trabalhos de mestrado e doutorado, com ênfase no processo de ensino e aprendizagem da geometria escolar, desenvolvidos por dois grandes grupos de pesquisa brasileiros: O GPPEM, Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática, da UNESP/Bauru e o PSIEM, Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática da Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP.

O interesse em investigar esse tema se deve ao fato de o ensino de geometria ainda continuar sendo relegado a um plano secundário. Pavanello (1993), já na década de noventa denunciava o abandono do ensino de geometria nas escolas brasileiras. Embora algumas ações, em termos de políticas educacionais tenham apresentado alguns avanços, como a execução de programas de formação continuada de professores, como o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa, e o Plano Nacional do Livro Didático, com o objetivo de melhor a qualidade dos livros didáticos utilizados nas escolas públicas brasileiras, o que se percebe é uma ausência do ensino de conteúdos de geometria ou um ensino conduzido de forma equivocada, alicerçado em procedimentos prontos e acabado, embasado na memorização arbitrária de fórmulas e procedimentos, como apontam os trabalhos de Silva (2018) e Souza (2018).

Os Grupos de pesquisa GPPEM e PSIEM têm se dedicado ao estudo de vários temas relacionados com os processos de ensino e aprendizagem da Matemática escolar e, entre eles, está a geometria. Embora as pesquisas desenvolvidas por esses grupos apresentem resultados importantes no campo da cognição, como os de Pirola (2000), Tortora (2014) e Souza (2014), e no campo da afetividade, como as pesquisas de Nascimento (2008) e Morais (2018), percebe-se que tais estudos ainda estão longe de serem utilizados/refletivos pelos professores da Educação Básica. Pirola, Sander e Silva (2016) destacam que a transferência dos resultados de pesquisas desenvolvidas na academia tem se constituído em um dos maiores desafios dos pesquisadores da área educacional. De acordo com esses autores, muitos são os fatores para que isso ocorra, entre eles são destacados os problemas na divulgação de pesquisas em que a maior parte dos professores ou não tem acesso a elas, ou, em virtude da carga horária excessiva de trabalho em sala de aula, não conseguem encontrar tempo para os seus estudos.

Pirola, Sander e Silva (2016) apresentam algumas possibilidades para que as pesquisas científicas, desenvolvidas nas universidades, possam ser discutidas pelos professores. Entre elas destacam o horário de trabalho pedagógico (HTP), presentes na maior parte das escolas brasileiras. Nóbrega e Casavechia (2008) apontam que esse horário tem sido subutilizado, muitas vezes caracterizando-se por um momento destinado a resolver problemas burocráticos da escola. O HTP poderia ser aproveitado como um espaço para aproximações entre as pesquisas e o ensino da Matemática escolar, além de se constituir em um momento de formação continuada dos professores. No campo da geometria, poderiam ser discutidas pesquisas que abordam os processos cognitivos e afetivos no desenvolvimento do pensamento geométrico, uso de tecnologias e de diferentes materiais didáticos para a aprendizagem de conceitos geométricos.

Metodologia

A pesquisa tem caráter bibliográfico que, de acordo com Fonseca (2002) é desenvolvida a partir de levantamento de referências teóricas já publicadas em diferentes meios, como eletrônico, livros, revisas, entre outros. Ainda, de acordo com esse autor, na pesquisa bibliográfica procuram-se essas referências com o *"objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a reposta"* (Fonseca, 2002, p. 32).

A fonte de dados se constituiu em teses e dissertações, sobre ensino e aprendizagem de geometria, produzidas por dois grandes grupos de pesquisa: GPPEM e PSIEM. Esses grupos foram escolhidos por terem uma vasta produção na pesquisa em Psicologia da Educação

Matemática e por desenvolverem pesquisas, com um olhar alicerçado em teorias da Psicologia, sobre aprendizagem de conceitos geométricos.

Foram seguidas as seguintes etapas: 1- Seleção de todos os trabalhos de mestrado e doutorado produzidos pelos dois grupos de pesquisa; 2- seleção dos trabalhos cuja temática era ensino e aprendizagem da geometria escolar; 3- leitura, fichamento e resumo de todos os trabalhos, com enfoque nas contribuições que os trabalhos podem dar ao professor da educação básica.

Com base nos critérios elencados acima, foram selecionados os seguintes trabalhos: Tortora (2014), Proença (2008), Kochhann (2007), Nascimento (2008), Moraco (2008), Silva (2018), Silva (2016), Rezi (2001), Viana (2000,2005), Pirola (1995, 2000) e Souza (2018).

A análise dos trabalhos permitiu a identificação de dois eixos: Eixo1: ensino e aprendizagem de geometria; Eixo 2: formação de professores.

Análise e discussão dos resultados

No que diz respeito ao **eixo 1,** os trabalhos de Pirola (1995),Tortora (2014), Proença (2008), Viana (2005), Souza (2018) e Moraco (2008) investigaram os conhecimentos que os alunos da Educação Básica possuíam em relação aos conceitos geométricos. Todos os trabalhos apontaram o baixo conhecimento desses alunos em geometria. As maiores dificuldades encontradas pelos alunos, participantes dessas pesquisas, se concentraram na identificação de atributos definidores das figuras geométricas, na diferenciação entre exemplos e contraexemplos de figuras planas e espaciais. Além disso, o trabalho de Rezi (2001) que realizou um estudo exploratório sobre os componentes das habilidades matemáticas presentes no pensamento em geometria, mostrou a dificuldade dos estudantes do ensino médio no processamento e manipulação de imagens mentais. Esses mesmos resultados também foram encontrados por Viana (2005). O trabalho de Moraco (2008) mostrou a dificuldade de alunos do ensino médio na representação mental de figuras geométricas tridimensionais. O trabalho de Tortora (2014) investigou o desenvolvimento de habilidades básicas de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. De acordo com Pirola (2013), problemas como os identificados nas pesquisas citadas anteriormente, apontam para um problema que tem sido bastante recorrente no ensino da geometria que é uma ênfase muito grande no ensino de procedimentos, em detrimento ao ensino de conceitos.

Os resultados dessas pesquisas podem mostrar ao professor da educação básica: 1- a importância, no processo de formação de conceitos geométricos, do trabalho com os atributos definidores (AD) (características das figuras geométricas que permite fazer relações e diferenciações entre as figuras geométricas). Além disso, o trabalho com os AD pode ajudar o professor a desenvolver nos alunos as relações superordenadas (relações que vão dos casos mais específicos aos mais gerais) e subordinadas (relações que vão dos casos mais gerais aos mais específicos); 2- o trabalho com os exemplos e contraexemplos é extremamente importante para a construção de conceitos e para evitar o processo de supergeneralização que ocorre quando são apresentados contraexemplos em pouca quantidade ou excessivamente parecidos. Como ilustração, o estudo de Pirola (1995) mostrou que um quadrado rotacionado era considerado, por uma grande dos estudantes do Ensino fundamental, como sendo um contraexemplo de quadrado, conforme mostra o trabalho de Pirola (1995). Dessa forma, os resultados dessas pesquisas descritas nesse eixo podem levar o professor à reflexão de que o trabalho com atributos definidores e exemplos e contraexemplos são essenciais para a formação de conceitos.

De acordo com Pirola, Sander e Silva (2016), as pesquisas podem se aproximar ainda mais dos professores por meio dos Mestrados Profissionais (MP) desenvolvidos no Brasil, destinados a professores da Educação Básica. De acordo com esses autores, no MP os professores desenvolvem os produtos educacionais, a partir de problemas identificados em suas aulas. O trabalho de Souza (2018) identificou dificuldades dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental no desenvolvimento de habilidades geométricas. Diante disso, a pesquisadora elaborou uma história em quadrinhos (HQ) valorizando os atributos definidores e exemplos e contraexemplos de figuras bidimensionais e tridimensionais. Além de trabalhar com conceitos a partir da teoria das habilidades de Hoffer (1981), a HQ teve um caráter motivador na aprendizagem das crianças.

No que diz respeito ao **eixo 2** os trabalhos de Kochhann (2007), Nascimento (2008), Silva (2018), Silva (2016) e Pirola (2000) mostram as dificuldades conceituais em geometría apresentada por professores que atuam nos anos iniciais do Ensino fundamental.

Os problemas conceituais evidenciados pelos alunos da Educação Básica, descritos nas pesquisas de Pirola (1995), Souza (2018) e Proença (2008), relacionados aos atributos definidores, exemplos e contraexemplos, também foram identificados nos professores.

Dessa forma, as pesquisas de Kochhann (2007), Nascimento (2008), Silva (2018), Silva (2016) e Pirola (2000) contribuem com o ensino de geometria, na medida em que identificam a fragilidade dos cursos de formação inicial no que se refere ao conhecimento geométrico. Neste sentido, para Pirola (2013) os programas de formação continuada pode ser um caminho possível para que os professores possam encontrar fundamentos teóricos e metodológicos para a reflexão da própria prática docente.

As pesquisas elencadas nos dois eixos também mostram a importância de articulação entre os conhecimentos declarativos e de procedimentos. De acordo com Sternberg (2000) o conhecimento declarativo diz respeito ao "o que é", ou seja, á formação conceitual. Já o conhecimento de procedimento corresponde ao "como". Sendo assim, o que sabemos sobre uma determinada figura geométrica, como por exemplo, atributos definidores, exemplos e contraexemplos, é o conhecimento declarativo. A sequencia de ações para executar uma tarefa, como por exemplo, resolver uma equação, diz respeito ao conhecimento de procedimento. Dessa forma, o estudo de Pirola (2000) indica algumas possibilidades dessa articulação.

Conclusões

Esta pesquisa teve como principal objetivo investigar algumas contribuições de pesquisas desenvolvidas no campo da Psicologia da Educação Matemática, no campo do ensino e da aprendizagem da geometria escolar, produzidas por dois grupos de pesquisa.

A análise dos estudos, distribuídos em dois eixos: ensino e aprendizagem de geometria e formação de professores apontam para:

1- a necessidade de o professor considerar, na formação de conceitos geométricos, os atributos definidores, exemplos e contraexemplos de figuras geométricas planas e tridimensionais. Esse procedimento pode levar os alunos a superarem as dificuldades de inclusão de classes das figuras geométricas, bem como evitar os processos de supergeneralização;

2- A necessidade de desenvolvimento de programas de formação continuada para professores dos anos iniciais do Ensino fundamental que valorizem não somente os aspectos metodológicos, mas também o conhecimento geométrico em seus aspectos declarativos e de procedimentos. Além disso, destaca-se a importância de se valorizar os HTP como um momento de aproximação de pesquisas acadêmicas com o trabalho do professor em sala de aula;

3- A necessidade de o professor utilizar diferentes recursos metodológicos, incluindo as tecnologias da informação e conhecimento, para o desenvolvimento das habilidades geométricas;

4- A necessidade de articulação dos conhecimentos geométricos com diferentes campos das ciências, artes e cultura;

É Importante e desejável que os cursos de licenciaturas, prevejam em seus projetos pedagógicos, momentos para se tratar das articulações entre as pesquisas e o ensino da Matemática escolar, seja por meio do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) e projetos de iniciação científica, seja por meio das transposições didáticas presentes em cada disciplina do curso.

Referências

Fonseca, J. J. S. (2002). *Metodologia da pesquisa científica*. Fortaleza: UEC. Apostila.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher,* NCTM, volume 74, p.11-18.

Klausmeier, H. J. & Goodwin, W. (1977). *Manual de Psicologia Educacional: aprendizagem e capacidades humanas.* Tradução de Abreu, M. C. T. A. São Paulo: Harper & Row.

Kochhann, M. E. (2007). Gestar: formação de professores em serviço e a abordagem da geometria. *Tese* (*Doutorado em Educação para a Ciência*). Pós-Graduação FC/UNESP – Bauru.

Moraco, A. S. C. T. (2006). Um estudo sobre os conhecimentos geométricos adquiridos por alunos do Ensino Médio**.** *Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência)*. Pós-Graduação FC/UNESP – Bauru.

Morais, J. A. R. S. Atribuição de sucesso e fracasso e as crenças de autoeficácia Matemática: Um estudo com alunos do Ensino Médio. *Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência)* - Pós-Graduação FC/UNESP – Bauru.

Nascimento, A. A. S.B. (2008). Relações entre os conhecimentos, as atitudes e a confiança dos alunos do curso de licenciatura em matemática na resolução de problemas geométricos. *Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência)*. Pós-Graduação FC/UNESP – Bauru

Nóbrega, L. & Casavechia, T. M. (2008). Hora de Trabalho Pedagógico: desafio e controvérsias. In: Basso, I.; Rocha, J. C. R.; Esqueda, M. D. *Anais do II Simpósio Internacional de Educação Linguagens Educativas: perspectivas interdisciplinares na atualidade.* Bauru: USC.

Pavanello, R. M. (1993). O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Zetetiké*, v1, n. 1, 7-17.

Pirola, N. A.; Sander, G. P. ; Silva, G. A. (2006). Transferência dos resultados de pesquisas para o ensino da Matemática escolar: contribuições das investigações sobre atitudes em relação à Matemática. *In: XII Congreso Argentino de Educación Matemática. Buenos Aires. Libro de Resúmenes XII CAREM*, 2016. p. 32-33.

Pirola, N. A.. (2013) Algumas contribuições de pesquisas em Psicologia da Educação Matemática. *Tese (Livre-Docência em Educação Matemática)*. FC/UNESP – Bauru.

Pirola, N. A. (1995). Um estudo sobre a formação de conceitos de triângulo e paralelogramo em alunos do 1º grau. *Dissertação (Mestrado em Educação)* – Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Campinas.

Pirola, N. A. (2000). Solução de problemas geométricos: dificuldades e perspectivas. *Tese (Doutorado em Educação Matemática)* – Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Campinas.

Pirola, N. A**.**. (2013). Algumas contribuições das pesquisas em Psicologia da Educação Matemática para o ensino de geometria. In: Groenwald, C. L. O. & Silva, M. A.. (Org.). *Educação Matemática - Contribuição para as séries finas do Ensino Fundamental e Médio.* 1ed.Canoas: Editora da Ulbra. v. 1, p. 173-188.

Proença, M. C. (2008) Um estudo exploratório sobre a formação conceitual em geometria de alunos do ensino médio. *Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência)*. Pós-Graduação FC/UNESP – Bauru.

Rezi, V. (2001). Um estudo exploratório sobre os componentes das habilidades matemáticas presentes no pensamento em geometria**.** *Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)* – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Silva, B. A. C. (2016). Geometria no ciclo de alfabetização: um estudo sobre as atitudes dos alunos do ciclo de alfabetização diante da geometria e suas relações com a aprendizagem. *Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência)* - Pós-Graduação FC/UNESP – Bauru.

Silva, G. A. (2018). O conhecimento declarativo do professor alfabetizador no ensino de geometria. *Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência)*. Pós-Graduação FC/UNESP – Bauru.

Souza, P. P. F. C.. (2018). *O desenvolvimento do pensamento geométrico: uma proposta de recurso didático por meio da HQ*. Dissertação (Mestrado em Docência para a Educação Básica). Pós-Graduação. FC/UNESP – Bauru.

Sternberg, R. (2000). *Psicologia cognitiva*. Trad. Maria Regina Borges Osório. Porto Alegre: ArtMed.

Tortora, E. (2014). Resolução de problemas geométricos: um estudo sobre conhecimentos declarativos, desenvolvimento conceitual, gênero e atribuição de sucesso e fracasso de crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental. *Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência)* - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.

Viana, O. A. O. (2005). Componente da habilidade matemática de alunos do ensino médio e as relações com o desempenho escolar e as atitudes em relação à matemática e à geometria**.** *Tese (Doutorado em Educação)*. Faculdade de Educação - Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP. Campinas.

Viana, O. A. (2000). O conhecimento geométrico de alunos do Cefam sobre figuras espaciais: um estudo das habilidades e dos níveis de conceito. *Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)* – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

La Elipse en la Métrica del Taxista

Wilson Jairo **Pinzón** Casallas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
wjpinzonc@udistrital.edu.co
Wilson **Gordillo** Thiriat
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
wgordillot@udistrital.edu.co
Orlando **García** Hurtado
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
ogarciah@udistrital.edu.co

Resumen

Este artículo presenta una propuesta didáctica para la comprensión de la elipse en estudiantes de primer semestre de la asignatura de cálculo diferencial de ingeniería topográfica, empleando la métrica del taxista, que permite trabajar diferentes representaciones semióticas de la misma con la convicción de que el estudiante entiende la elipse cuando transita entre las distintas representaciones semióticas. La elección de estas métricas se debió a la utilización que tienen los estudiantes de Ingeniería Topográfica para medir. Consideramos que el énfasis en la ecuación cartesiana de la elipse promueve la pérdida de su estructura como lugar geométrico y presenta resultados interesantes y sorprendentes que permiten el desarrollo de un aprendizaje más crítico y significativo.

Palabras clave: didáctica, lugar geométrico, métrica del taxista, elipse.

Introducción

Descripción de la problemática y objetivos de investigación

La elipse es un objeto matemático que se trata en nuestra universidad en la asignatura cálculo diferencial, correspondiente al primer semestre de la ingeniería topográfica. En donde se comienza el uso de técnicas analíticas, y se espera que los estudiantes puedan reconocer cónicas a partir de las ecuaciones cartesianas que las caracterizan. Los estudiantes que han trabajado la elipse bajo el enfoque tradicional, si bien comprenden la elipse a partir de las ecuaciones que la definen, y son capaces de graficarlas, presentan grandes dificultades para entenderla como un lugar geométrico, como se observó en la investigación realizada por Bonilla y Parraguez (2013) sobre la elipse. Con el objetivo de ver las diferentes representaciones semióticas que pueden elaborar los estudiantes sobre una situación planteada en el aula se diseñó esta investigación, en donde los artefactos utilizados en las representaciones son creación propia de los estudiantes.

Marco teórico

¿Qué comprensión es mejor para el aprendizaje de la elipse? Para hacer una elección entre la comprensión relacional y la comprensión instrumental de la elipse, el problema ya debe haber sido identificado y, por lo tanto, comprendido, esto está dentro de la paradoja del presente cognitivo. Es decir, se debe aprender en contexto, se debe entender lo que se aprende, esto permite que no sea olvidado y cuando se necesita solo con recordar una parte se puede reconstruir el todo, toda esta reconstrucción no sería posible sin una comprensión instrumental, por todo esto el aprendizaje de las matemáticas no puede ser memorístico, porque se olvida cuando pasa la evaluación; en otras palabras, se aprende para pasar la evaluación.

La comprensión relacional permite que el aprendizaje de las matemáticas construya una estructura conceptual (esquema) a partir de la cual su poseedor puede (en principio) producir un número ilimitado de planes para llegar desde cualquier punto de partida dentro de su esquema hasta cualquier punto de llegada.

Este tipo de aprendizaje es diferente en varios aspectos del aprendizaje instrumental.

- Los medios se independizan de los fines particulares que deben alcanzarse.
- La construcción de un esquema dentro de un área de conocimiento dada se convierte en un objetivo intrínsecamente satisfactorio en sí mismo.
- Cuanto más completo sea el esquema de un estudiante, mayor será su confianza en su propia capacidad para encontrar nuevas formas de "llegar hasta allí" sin ayuda externa.
- Pero un esquema nunca está completo. A medida que nuestros esquemas se amplían, nuestra conciencia de las posibilidades se amplía. De esta manera, el proceso a menudo se vuelve auto-continuo.

Por lo anteriormente dicho se podría tener en cuenta que el aprendizaje de las cónicas es introducido, en los niveles iniciales, desde una perspectiva procedimental, como generalización de procedimientos abstractos, tratándose las representaciones de la elipse como generalizaciones de las operaciones algebraicas y siendo evaluadas dichas generalizaciones para valores concretos de las variables. Sin embargo, rápidamente pasa a ser considerada desde una perspectiva estructural. Entonces, las representaciones de las cónicas son concebidas como objetos matemáticos en los cuales se llevan a cabo operaciones estructurales.

Este cambio obliga a los estudiantes a afrontar la necesidad de una comprensión relacional que, a menudo, no han experimentado en su aprendizaje matemático previo. En el aprendizaje de las cónicas los estudiantes deben tratar representaciones simbólicas como objetos matemáticos, y operar estos objetos con procesos que habitualmente no conducen a la obtención de una respuesta numérica. Por otra parte, deben modificar sus interpretaciones previas sobre los símbolos y empezar a representar problemas verbales con operaciones que, a menudo, son las inversas de las que utilizan para resolver problemas similares en el álgebra. Los estudiantes, ante este cambio, no sólo encuentran importantes dificultades en adquirir una comprensión relacional, sino también en conjugarla con su comprensión instrumental de las cónicas; aspectos a los que habitualmente no se les presta especial atención en la enseñanza.

Propuesta didáctica

Para diseñar la propuesta didáctica, indagamos en las bases epistemológicas de la Geometría No Euclidiana para pensar la elipse, las cuales nos dio luces sobre los elementos matemáticos que permiten articular las representaciones semióticas. Destacamos como antecedentes didácticos, la investigación de Parraguez y Bozt (2012) que, en una de sus conclusiones, reportan para su objeto matemático de estudio, que aquellos estudiantes que logran transitar entre los modos de pensamiento muestran en sus argumentos una cercanía con las definiciones formales de los conceptos. Así también, Bonilla y Parraguez (2013) realizan un estudio sobre la elipse desde la perspectiva la teoría los modos de pensamiento, donde afirman, que los estudiantes que han trabajado la elipse bajo el enfoque tradicional, si bien comprenden la elipse a partir de las ecuaciones que la definen, y son capaces de graficarlas, presentan grandes dificultades para entenderla como un lugar geométrico.

Con el propósito de que los estudiantes comprendan la elipse –como figura que la representa, como pares ordenados y como lugar geométrico–, nos propusimos como objetivo general de investigación: Diseñar una propuesta didáctica que promueva el tránsito entre las diferentes representaciones semióticas de pensar la elipse, para estudiantes de 16-21 años, utilizando como sistema de referencia el plano en la geometría del taxista (Krausse,1986).

Elementos históricos

En el istmo, entre el mar Mediterráneo y el Lago Mareótis, al oeste del delta del río Nilo, en una antigua aldea de pescadores y pastores llamada Rhakotis, nació la ciudad de Alejandría. En sus geométricas calles cuya planificación se atribuye al urbanista Dinócrates[1], Euclides escribió su obra "*Los Elementos*" que está compuesta de un conjunto de 13 libros. De que sólo se han encontrado versiones y traducciones muy tardías, en donde Euclides buscó dar a las matemáticas griega una base sólida utilizando el método axiomático.

El método axiomático consiste en un grupo de objetos o términos no definidos, llamados objetos o términos primitivos, en función de los cuales se definen todos los demás términos u objetos; un conjunto de proposiciones que se hace sobre los objetos o términos primitivos y aceptados sin demostración, que se llaman axiomas o postulados, y finalmente un conjunto de proposiciones demostradas utilizando la lógica deductiva que se denominan teoremas.

Euclides inicia el Libro I de los Elementos citando 23 definiciones en que busca dejar la comprensión de los objetos y términos, que tendrán sus propiedades estudiadas y establecidas en el transcurso de su obra, de forma bien clara y precisa.

A continuación, Euclides escribe los postulados y axiomas delimitando así las hipótesis que se utilizan en las demostraciones de los teoremas y en el desarrollo de toda la teoría. El cuestionamiento más importante de la obra de Euclides y que permitió a las matemáticas expandir y abrir nuevos caminos y áreas de estudio, giró alrededor del Quinto Postulado, también conocido como Postulado de las Paralelas, ya que puede ser así enunciado: punto, exterior a una recta, puede trazar una sola recta paralela a la recta dada.

[1] Arquitecto y urbanista originario de Rodas o Macedonia, vivió en la época de Alejandro el Grande, y también construyó la gran pira funeraria en Hefestion.

Durante muchos años, nos dice Aaboe, los investigadores creyeron que el Quinto Postulado dependía de los anteriores y, por lo tanto, era posible probarlo y el mismo no debería estar explicitado como un postulado. Varias tentativas de demostración aparecieron y fueron, cada una de ellas, refutadas.

La obra de Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), padre jesuíta, profesor de teología, filosofía y matemática, publicada en 1773 y titulada "Euclides ab Omni Naevo Vindicatus" (Euclides Libre de todos los errores) es una más que tiene como foco la demostración del Quinto Postulado de Euclides. El enfoque de Saccheri fue negar el Postulado de las Paralelas, o sea, él lo tomó como falso y aceptó como premisas verdaderas las 27 primeras proposiciones del Libro I de Euclides. A partir de ahí comenzó a buscar alguna evidencia de que el Quinto Postal era de hecho cierto. Él utilizó un cuadrilátero con dos lados opuestos congruentes y perpendiculares a la base que hoy conocemos como cuadrilátero de Saccheri estudiando así sus propiedades. Se puede decir que él descubrió una nueva geometría o la primera Geometría No Euclidiana, sin haber percibido de tal hecho. Desafortunadamente Saccheri analizó sus hechos bajo una óptica más volcada en la creencia existente en la época en que la verdadera y única geometría era la Euclidiana, que en lo que la lógica le estaba mostrando, dejando así de caminar en la dirección de una nueva e interesante área de las matemáticas. Hoy se considera como un precursor de una geometría no euclidiana.

Finalmente, en 1820 un preocupado padre con el futuro profesional del hijo le da un consejo por carta: "No desperdicies una hora en el problema. En vez de ser recompensador, envenenará toda tu vida. Este celoso padre todavía sigue tratando de disuadir al hijo para otros intereses escribiendo: "los mayores geómetras ponderaron el problema durante cientos de años y no consiguieron probar el postulado de las paralelas sin un nuevo axioma." Y poniendo la autoridad de padre: "Creo que yo incluso investigue todas las ideas posibles ... ".

A pesar de los llamamientos de Farkas Wolfgang Bolyai, el joven de 21 años, Janos Bolyai, nacido en Kolozsvár, Hungría (actualmente Cluj, Rumania), escribió a su padre el 3 de noviembre de 1823 relatando: "He realizado descubrimientos maravillosos que me dejaron extasiados y, sería motivo de lamento si las perdiera. Cuando las veas, querido padre, también lo percibir. En la misma carta Janos Bolyai escribe una conocida frase "He creado un universo de la nada". Y como se disculpó por el hecho de no haber seguido el consejo del padre afirma: "Estoy seguro que me traerá honor, tal como si ya hubiera completado el descubrimiento".

Una vez que nuevas y buenas ideas no son privilegio de una sola persona, pudiendo ocurrir de modo simultáneo entre personajes que nunca se conocieron, Farkas Bolyai aconsejó a su hijo a actuar con rapidez: "primero porque las ideas pasan fácilmente de unos a otros, que las pueden de inmediato publicar, y, segundo, hay alguna verdad en el hecho de que muchas cosas tienen una época para ser descubiertas al mismo tiempo en varios sitios ".

En esa época Farkas Bolyai trabajaba en su libro Ensayos sobre los Elementos de Matemáticas para Jóvenes Estudiosos e inmediatamente invitó a Janos Bolyai para incluir en él su investigación. Pero sólo en 1832 Janos Bolyai publicó sus estudios en un apéndice del 1º volumen de los Ensayos de Farkas Bolyai, con el pomposo título "La ciencia del espacio absoluto con una demostración de la independencia de la verdad o falsedad del axioma XI de Euclides (que no puede se decidirá a priori) y también la cuadratura del círculo en el caso de su falsedad.

Un poco antes, otro personaje de esa historia, Nikolay Ivanovich Lobachevsky, fue el primero en publicar un trabajo que presentó una geometría no euclidiana, que hoy conocemos como la Geometría Hiperbólica. En 1829 en una desconocida revista científica rusa, El Mensajero de Kazam, Lobachevsky presentó un artículo titulado Sobre los Fundamentos de la Geometría. En ese artículo, escrito en ruso, él relató todo el desarrollo de lo que llamó Geometría Imaginaria.

Tanto Bolyai como Lobachevsky no conocían el trabajo el uno del otro y como afirma Mlodinow "... desafortunadamente, nadie tampoco sabía. Matemáticos esencialmente oscuros, cuando hablaron nadie escuchó ". Bolyai nunca más publicó ningún otro trabajo y Lobachevsky se convirtió en rector de la Universidad de Kazam. Mlodinow todavía completa afirmando:

... podrían haber desaparecido en el limbo desconocido, no fuera su contacto con Gauss. Irónicamente, fue la muerte de Gauss que finalmente llevó a la revolución no euclidiana.

Gauss fue un cronista meticuloso de las cosas a su alrededor. Tenía el placer de coleccionar datos bizarros, tales como la duración de la vida de sus amigos muertos, o el número de pasos desde el laboratorio donde trabajaba hasta varios lugares que le gustaba visitar. También hacía registros de su trabajo. Después de su muerte, los expertos estudiaron con atención sus anotaciones y correspondencia. Allí, descubrieron su investigación sobre el espacio no euclidiano, así como los trabajos de Bolyai y Lobachevsky. (Mlodinow, 2010, pg.125).

Sólo en 1862, cuando Richard Baltzer, en la segunda edición de su libro Element der Mathmatik incluyó los trabajos de Bolyai y Lobachevsky, los convirtió en referencias estándar para aquellos que estudian esas nuevas geometrías. Así, de Euclides alrededor de 300 aEC hasta Bolyai y Lobachevsky en el siglo XIX, mucho tiempo se pasó para que las matemáticas consolidaran las ideas y consideraciones en torno al Quinto Postulado de los Elementos y abrirse camino para el estudio de nuevas geometrías que hoy conocemos como las Geometrías No Euclidiana. Tales geometrías son así llamadas, pues contrarían el Quinto Postulado de los Elementos o algunas de sus consecuencias.

Hoy en día llamamos Geometría Euclidiana, Geometría Hiperbólica y Geometría Elíptica aquella que adopta como el Quinto Postulado respectivamente la afirmación de que por un punto exterior a una recta se puede trazar una única recta paralela, infinitas rectas paralelas o ninguna recta paralela a la recta paralela a la recta dado.

A continuación, presentamos una Geometría No Euclidiana que por su simplicidad de comprensión y uso puede ser insertada y trabajada para contextualizar tópicos de la Enseñanza: La Geometría del Taxista.

Representaciones semióticas

En búsqueda de evidencias empíricas para las diferentes representaciones semióticas que pueden elaborar los estudiantes sobre la elipse, se selecciono una situación problema de nuestra secuencia exploratoria para darla a conocer en este artículo, se plantea la siguiente situación:

Un ciclotaxista que trabaja en el centro de la ciudad se desplaza por las calles y las carreras, que son perpendiculares a las calles. Sólo se les permite detenerse en las esquinas, por lo cual ellos miden las distancias en "cuadras" y siempre utilizan los recorridos tales que la suma de las cuadras a las dos estaciones de transporte en este lugar sea de 9 cuadras.

Las representaciones obtenidas se fueron las siguientes:

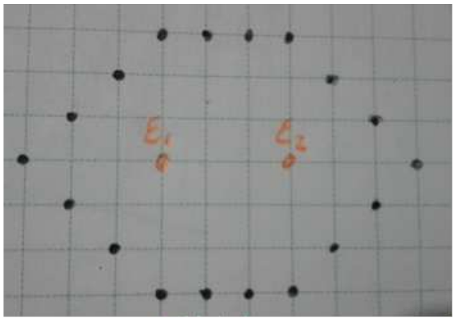


Figura 1. Representación grafica.

La figura 1 muestra la representación semiótica que la mayoría de los estudiantes realizaron de la situación problema, en donde se ve el lugar geométrico, pero no lo identifican como una elipse.

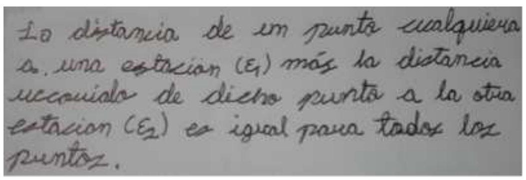
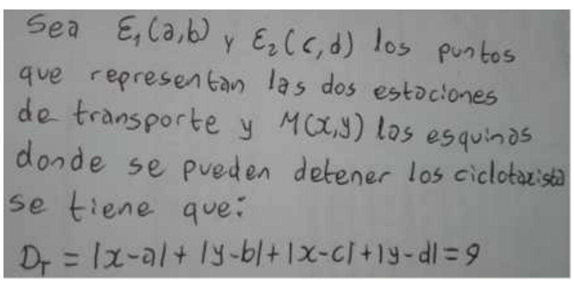

Lo distancia de un punto cualquiera a una estacion (ε_1) más la distancia recorrido de dicho punto a la otra estacion (ε_2) es igual para todos los puntos.

Figura 2. Representación verbal

En relación con la figura 2, se muestran evidencias de estar en vía de comprender un lugar geométrico por medio de una representación semiótica verbal, donde prueban a través de las distancias la propiedad que define la elipse, pero no logran establecer una ecuación.


Sea $\varepsilon_1(a,b)$ y $\varepsilon_2(c,d)$ los puntos que representan las dos estaciones de transporte y $M(x,y)$ los esquinas donde se pueden detener los ciclotaxista se tiene que:

$D_T = |x-a|+|y-b|+|x-c|+|y-d|=9$

Figura 3. Representación algebraica

La figura 3, evidencia una comprensión de una representación semiótica algebraica en donde establecen una ecuación para todos los puntos que forman la elipse.

Es importante destacar que los estudiantes pueden mostrar que un punto específico es parte de la elipse, sin embargo, su dificultad radica en generalizar un punto de la elipse, es decir, si (a,b) es un punto ¿cómo se muestra que ese punto (a,b) es parte de la elipse? Por otro lado, evidenciamos que uno de los elementos que favorecen la conexión entre las representaciones de la elipse es la concepción del conjunto solución de una ecuación. Además, damos cuenta que, si bien los estudiantes han trabajado las cónicas en la geometría euclidiana, las definiciones presentadas en la actividad exploratoria acuden al concepto de lugar geométrico, por lo tanto, es posible que las definiciones de elipse, en la geometría del taxista como lugar geométrico se hayan construido a través de las actividades realizadas en el mismo instrumento exploratorio.

Resultados finales

Esta investigación proporciona al profesor de cálculo diferencial una forma de observar las matemáticas bajo un aspecto integrador y crítico, posibilitando que él mismo incluso pueda reflexionar sobre los procesos de enseñanza y las posibilidades que las representaciones semióticas proporcionan un objeto de aprendizaje. La representación semiótica grafica permite modelar el ambiente como un objeto de aprendizaje de comprensión natural y lúdica. La métrica del Taxista es un modelo natural para la geografía urbana y su conocimiento posibilita, la construcción de otras propuestas motivadoras, interdisciplinares y cercanas al cotidiano del estudiante, posibilitando la ruptura de paradigmas y fomentando enfoques más críticos y, desarrollos más consistentes del aprendizaje. Esperamos con ese trabajo, que el profesor de matemáticas de cálculo diferencial, abra nuevos caminos en su práctica docente y se sienta motivado en crear sus propias estrategias, buscando nuevos conceptos de aprendizaje.

Referencias y bibliografía

Aaboe, A. (1964). Episodes from the early history of mathematics (Vol. 13). MAA.

Bonilla, D. & Parraguez, M. (2013). La elipse desde la perspectiva la teoría los modos de pensamiento. Alemania: *Editorial académica española*.

Krause, E. (1986). Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry. New York: *Dover Publications*.

Mlodinow, L. (2010). *Euclid's window: the story of geometry from parallel lines to hyperspace*. Simon and Schuster.

Parraguez, M. & Bozt, J. (2012). Conexiones entre los conceptos dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R^2 y R^3 desde los modos de pensamiento. *Revista electrónica de investigación en ciencias*, *7*(1), 49-72.

Reflexión por partes de profesores y futuros profesores en matemática en torno a definiciones

Ana María **Mantica**
Facultad de Humaniades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral
Argentina
ana.mantica@gmail.com

María Florencia **Cruz**
Facultad de Humaniades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.
Argentina
ma.florenciacruz@gmail.com

Resumen

En este trabajo se reflexiona en torno a una experiencia de un taller que se lleva a cabo con profesores y futuros profesores en matemática. En el mismo se analizan diferentes definiciones de polígono de distintos libros de texto.

Se pone énfasis en el análisis de la experiencia respecto a cuestiones que emergen en instancias de debate colectivo. Cabe destacar que la discusión versa en la arbitrariedad de las distintas definiciones presentadas, la relación que existe entre representaciones y definiciones formales, la presentación de ejemplos y no ejemplos del concepto de polígono y la equivalencia entre definiciones.

Palabras clave: *Definición, Polígono, Libros de texto, Futuros Profesores, Profesores en Matemática.*

Introducción

En la enseñanza de la matemática, actualmente, los libros de textos son los principales recursos didácticos empleados en los diferentes niveles del sistema educativo (Cárcamo, 2012). Braga Blanco y Belver Domínguez (2014) destacan la necesidad de que los profesores no utilicen diferentes libros de textos de un modo cegado, sino que realicen análisis de los mismos teniendo en cuenta el lugar preponderante que ocupan en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática. Consideraciones similares se señalan en Cárcamo (2012).

En Argentina los documentos regulatorios producto de las últimas reformas curriculares revalorizan el trabajo en geometría (NAP, 2011). Sin embargo, diversos autores ponen de manifiesto la pérdida de presencia de este dominio en las clases de matemática en este país (Schaefer y Sgreccia, 2016; Grossi y Sgreccia, 2016) y parece que esta tendencia se evidencia también a nivel internacional (Ibarra, Formeliano, Patagua, Velazquez, Baspiñeiro, y Mendez, 2013; Olivero, Bosch y Gascón, 2013).

La definición de conceptos en matemática tiene un papel destacado, al respecto Winicki Landman (2006) afirma "Las definiciones, junto a los axiomas y los teoremas son los ladrillos con los que se construyen todas y cada una de las teorías matemáticas" (p. 528). En este sentido, cabe destacar que diversos investigadores en Educación Matemática manifiestan la preocupación por el modo en que se llevan a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje de la definición (Vinner y Dreyfus, 1989; Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1991).

Atendiendo a las consideraciones realizadas se diseña un taller con el fin de reflexionar, analizar y discutir con docentes y futuros docentes definiciones de polígono que se presentan en libros de textos (manuales y académicos). Este taller se lleva a cabo en el XIII Congreso Argentino de Educación Matemática realizado en octubre 2018 en la ciudad de La Plata en la provincia de Buenos Aires (Argentina). En este trabajo se propone analizar la reflexión realizada por futuros profesores en matemática y profesores de matemática en desempeño en torno a cada una de las definiciones de polígono presentadas en el marco del taller mencionado.

Referentes teóricos

En el presente trabajo se abordan las particularidades que presentan los conceptos geométricos que llevan implícito una definición y una representación del mismo, considerando para esto diferentes teóricos que reflexionan sobre esta problemática.

Vinner (1991) hace referencia a definición conceptual cuando remite al significado matemático, es decir, a la definición formal. El autor considera que el nombre de un concepto conocido en raras ocasiones permite evocar su definición formal, sino que hace recordar un "algo" formado por un conjunto de representaciones visuales, imágenes, impresiones o experiencias. Esto es lo que el autor denomina imagen conceptual. En la formación de conceptos geométricos, esta imagen conceptual que se crea en la mente de los sujetos está formada por los diversos dibujos, figuras o representaciones que se recuerdan como ejemplo de este concepto y el conjunto de propiedades que asocian al mismo. La imagen del concepto es correcta cuando le permite al sujeto discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades que lleva asociada son todas relevantes.

Winicki-Landman (2006) destaca que la secuencia clásica de trabajo en el aula de matemática, definición, ejemplos y no ejemplos, potencia el proceso de elaboración de la imagen conceptual. Propone una diferencia entre la definición formal del concepto y la personal. Con la formal se hace referencia a la definición matemática aceptada por la comunidad matemática y con la personal a las interpretaciones, construcciones o reconstrucciones que cada individuo hace respecto de la definición formal.

Guillén (1991) sostiene que la imagen que el estudiantes se forma de un concepto está basada en sus atributos críticos, los que debe poseer para ser un ejemplo de determinado concepto y los no críticos que sólo lo poseen algunos ejemplos. La autora considera que a medida que el mundo de ejemplos y no ejemplos posibles aumenta la imagen se amplia. Al respecto, Vinner y Dreyfus (1989) y Tall (1989) señalan la importancia de la presentación de ejemplos y no ejemplos en la construcción de la definición de un concepto geométrico.

Otra consideración a tener en cuenta es la equivalencia y no equivalencia entre definiciones formales de un mismo concepto matemático.

Van Dormolen y Zaslavsky (2003) sostienen que la equivalencia entre dos definiciones se da si definen el mismo concepto. En caso que se tengan definiciones equivalentes, en la práctica, se debe elegir una de ellas y considerar que las demás pueden probarse como propiedades. Lo mencionado posibilita que un sujeto pueda elegir entre varias definiciones equivalentes la que le resulte más elegante, por diversas razones, entre ellas, necesita menos cantidad de palabras, menos símbolos o porque usa conceptos generales más básicos.

Winicki-Landman (2006) destaca:

> En el proceso de definir se influyen criterios que no siempre se revelan cuando las definiciones son presentadas como hechos consumados […]. Desde el punto de vista lógico, la definición de un concepto: a) Debe ser precisa. b) Debe basarse solamente en otros conceptos previamente definidos o en conceptos primitivos (criterio de jerarquía, según Van Dormolen y Zaslavsky, 2003) c) Debe ser consistente con definiciones anteriores en la que ella se apoya. d) Es arbitraria. e) Establece condiciones necesarias y suficientes, es decir es bicondicional. (p. 530 y 531)

Modalidad de trabajo

El taller se lleva a cabo en un encuentro que posee una duración de dos horas. Participan profesores en matemática que desempeñan en nivel secundario y/o superior y futuros profesores en matemática de Argentina, Uruguay, México y Chile.

El taller se diseña con el fin de discutir con los participantes consideraciones en torno a: la arbitrariedad de la definición de polígono, las imágenes conceptuales que poseen y el valor de los no ejemplos en la formación de dichas imágenes conceptuales. Teniendo en cuenta lo mencionado se ponen en juego dos momentos de trabajo en grupos de al menos seis sujetos.

Para el primer momento se trabaja en torno a la siguiente tarea:

Tabla 1

Tarea 1 que se presenta a los asistentes al taller.

TAREA 1: Analizar las definiciones que se presentan de polígonos a partir de ideas disponibles a fin de justificar si son adecuadas o no.

Para el desarrollo de la tarea se trabaja con cinco definiciones de polígono tomadas de libros de texto de la escuela obligatoria y un libro de Geometría Euclídea destinado a la educación superior. Se entregan en formato papel tres definiciones de polígono a cada uno de los grupos. Luego que cada grupo finaliza la discusión se realiza un debate colectivo. El análisis que se realiza para el presente trabajo se concentra en discutir la reflexión realizada por los participantes en torno a cada definición por lo que no exponemos hasta el análisis cada una de ellas.

En el segundo momento de trabajo se presentan imágenes de ejemplos y no ejemplos de polígonos construidas en el software de geometría dinámica *GeoGebra* a fin de justificar cuáles consideran representaciones de polígonos y cuáles no. En esta instancia se muestra la vista gráfica 2D y 3D con el fin de incentivar la reflexión acerca de la relación entre construcciones bidimensionales, tridimensionales y las definiciones de polígonos. En el debate colectivo se pone especial énfasis en conocer los supuestos de los asistentes sobre polígonos y qué determina para cada individuo que una representación sea un polígono o no, la definición o la imagen. A su vez se reflexiona acerca del potencial del empleo del software de geometría dinámica *GeoGebra* en las vistas simultáneas de una representación en 2D y 3D, se propone la discusión acerca del papel que juegan los no ejemplos en la construcción de conceptos matemáticos, entre otros.

Es de destacar que durante el taller y con el consentimiento de los participantes se registra la discusión en audio. En este trabajo se realiza el análisis de las cuestiones que emergen en torno al primer momento llevado a cabo en el mismo.

Reflexión de discusiones colectivas

Se organiza el análisis presentando cada una de las definiciones y posteriormente una reflexión acerca de lo discutido en torno a la misma en el taller. Cabe destacar que los extractos de transcripciones textuales se presentan en letra cursiva.

Definición 1:

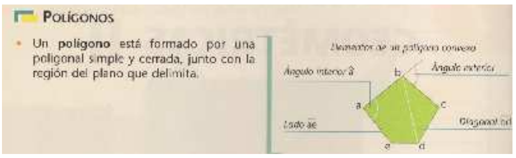


Figura 1. Definición recuperada de Kaczor, P.J.; Piñeiro, G.E.; y Serrano, G.B. (2012). *Actividades clave. II Matemática*. Buenos aires: Santillana.

El grupo A manifiesta que se emplean conceptos que no se encuentran definidos anteriormente en el texto, como ser, poligonal simple y cerrada. También destacan que el texto de la derecha hace referencia a un polígono convexo cuando la definición que se presenta a la izquierda es de polígono. La primera consideración puesta de manifiesto evidencia la necesidad de emplear el criterio de jerarquía al definir (Van Dormolen y Zaslavsky, citado en Winicki-Landman, 2006) La segunda hace referencia a la formación del concepto, este modo de presentación podría contribuir negativamente la formación de la imagen del concepto (Vinner, 1991).

El grupo B agrega a lo mencionado que los elementos que se presentan en el dibujo podrían suponer que un triángulo no es un polígono convexo por no tener diagonales. “*Estos son los elementos, que yo alumno de segundo año como plantea ahí, estas son las cosas que tengo que encontrar en un polígono convexo, la diagonal en un triángulo no existe entonces, ¿el triángulo dejó de ser un polígono convexo?*” Se manifiesta que está categorizado como los demás, y afirma que si se elimina un lado de un polígono convexo deja de ser un polígono.

El grupo C rescata como positivo que se considera el polígono como una región. Parece que debe cumplir estrictamente la definición dicha condición, sin embargo las definiciones son arbitrarias (Winicki-Landman, 2006).

Finalmente el Grupo A plantea que una definición debe responder a la pregunta, ¿qué es?, tanto en el ámbito de trabajo matemático como en otros ámbitos. Y afirma que en este caso no responde a esta pregunta.

Definición 2:

Figura 2. Definición recuperada de Sessa C. (Coord.). (2015). Hacer Matemática 7/1. Buenos Aires: Estrada.

El grupo D presenta la imagen 4 que considera que verifica la definición pero no corresponde a la imagen conceptual de polígono (Vinner, 1991). En este sentido se discute acerca de la necesidad de emplear conceptos previamente definidos (Winicki-Landman, 2006) y la importancia de los acuerdos en la comunidad clase que se trabaja.

Figura 3. Representación Grupo D

Se presenta una discusión en torno a la expresión "lados rectos" y manifiestan que lados son segmentos y por tanto sólo pueden ser rectos.

Definición 3:

POLÍGONOS: DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

Seguramente recuerdas que llamamos polígono a toda figura plana delimitada por segmentos.

En un polígono reconocemos los siguientes elementos: **vértices, lados, ángulos interiores, ángulos exteriores, diagonales.**

Figura 4.: Definición recuperada de Sadovsky, P., Kass, M., Panizza, M.G. y Reyna, I.M. (1989) Matemática 2. Buenos Aires: Santillana.

El grupo A expresa la confusión que puede representar la imagen debido a la continuación del lado que se realiza para considerar el ángulo exterior y al representarlo como el segmento determinado por dos vértices consecutivos. Nuevamente se pone de manifiesto la influencia de las representaciones visuales en la construcción de un concepto (Vinner, 1991). El grupo B agrega que es importante el uso de líneas de puntos para representar con el fin de diferenciar el lado del polígono de la extensión del lado. A su vez los integrantes destacan que lo que se presenta no es una definición, no se profundiza esta afirmación porque no realizan mayores consideraciones al respecto.

Definición 4:

1.7 Polígonos

Las figuras geométricas formadas por líneas rectas son muy comunes en nuestro mundo. Tales figuras reciben el nombre de *polígonos*.

Este polígono tiene ocho lados. Los puntos *A, B, C, D, E, F, G* y *H* son sus vértices. A cada segmento de un polígono se le llama *lado*.

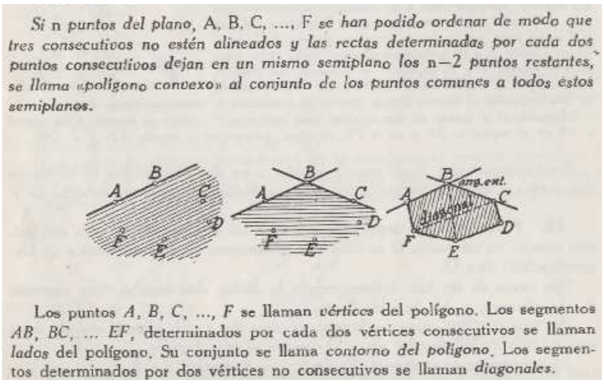
Se escribe:
polígono *ABCDEFGH*.

Definición 1.26
Un **polígono** es la unión de segmentos que se juntan sólo en sus extremos, de tal manera que: (1) como máximo, dos segmentos se encuentran en un punto, y (2) cada segmento toca exactamente a otros dos.

Figura 5. Definición recuperada de Stanley C., Phares G. y Cooney, T. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* Distrito Federal: Addison Wesley Longman.

El grupo A manifiestan que los autores consideran la poligonal, por lo que no toma como otros textos la región. En esta afirmación se explicita la no equivalencia entre las definiciones trabajadas (Van Dormolen y Zaslavsky, 2003). También manifiestan que en la descripción y en la definición se emplean diferentes términos para referir al mismo concepto, por ejemplo, "formados por líneas rectas dice primero, cuando después en la definición habla de segmentos, es la brecha entre lo que cuenta y lo que define", también hacen referencias, entre otros, a los términos, puntos, vértices. A su vez señalan que el concepto está “muy anclado” en la representación que es un polígono convexo puede dificultar la formación de la imagen conceptual de polígono (Vinner 1991).

Definición 5:



Si n puntos del plano, A, B, C, ..., F *se han podido ordenar de modo que tres consecutivos no estén alineados y las rectas determinadas por cada dos puntos consecutivos dejan en un mismo semiplano los* n−2 *puntos restantes, se llama «polígono convexo» al conjunto de los puntos comunes a todos estos semiplanos.*

Los puntos *A, B, C, ..., F* se llaman *vértices* del polígono. Los segmentos *AB, BC, ... EF,* determinados por cada dos vértices consecutivos se llaman *lados* del polígono. Su conjunto se llama *contorno del polígono*. Los segmentos determinados por dos vértices no consecutivos se llaman *diagonales*.

Figura 6. Definición recuperada de Puig Adam, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica*. Tomo I. Fundamentos. Euler, G. Madrid: Puig Ediciones.

El grupo A diferencia esta definición de la presentada en la imagen 1 respecto al concepto de diagonal, puesto que en este caso se expresa que se determinan considerando vértices no consecutivos, en consecuencia no se excluye al triángulo como polígono convexo. Nuevamente se reflexiona en torno a la no equivalencia entre las definiciones presentadas (Van Dormolen y Zaslavsky, 2003)

El grupo B manifiesta que este texto no lo presentaría en la escuela secundaria por la formalidad con que está escrito, pues un libro destinado a la educación superior.

Definición 6:

Para determinar un polígono (del griego *polis*, mucho, y *gonía*, ángulo) podemos, por ejemplo, colocar sobre una mesa tres o más tiras de papel de distinta longitud y “encerrar” con ellas una porción de la superficie de la mesa haciendo coincidir los extremos de las tiras consecutivas. Podemos pensar que cada tira representa un segmento y, por el modo en que las colocamos, que todas forman una poligonal cerrada.

Una poligonal está formada por segmentos consecutivos, y si además los extremos del primero y del último coinciden, la poligonal es cerrada.

Se llama polígono a la unión de una poligonal cerrada y la región del plano que ella encierra.

Figura 7. Definición recuperada de Amenado M.B., Carranza, S.G., Diñeiro, M.T., Grau, J.E. y Latorre, M.L. (1996). Matemática 2. Buenos Aires: Santillana

El Grupo C destaca que “Se coloca en el mismo nivel de análisis y complejidad la palabra, mesa, tirita y polígono”, el grupo D responde que les parece adecuada la presentación. Se hace referencia al material concreto que se emplea para representar los lados, algunos grupos expresan que es interesante el trabajo con el mismo para iniciar la comprensión del concepto y visualizar, y otros consideran que no son adecuados los materiales, puesto que la “*tirita de papel puede mojarse y doblarse. Tiene propiedades que no tiene el concepto, por ejemplo, espesor, una* *superficie, ¿qué es un punto?, ¿qué es un vértice en esa superposición de dos tiras?*". Al respecto se debate que todas las representaciones tiene limitaciones y que nunca la representación es la definición formal, en este sentido cabe destacar la importancia de lograr la fusión entre esta y sus representaciones (Vinner, 1991).

Un integrante del grupo D expresa que el trabajo con el material concreto podría representar cinco tiras articuladas lo cual puede redundar en beneficios de la construcción del concepto de polígono debido a que potencia la visualización de representaciones de polígonos cóncavos y convexos, esta cuestión se encuentra en sinergia con lo planteado por Guillén (1991).

Reflexiones finales

En el taller se pone de manifiesto y discute la arbitrariedad de la definición en matemática. Sin embargo, al hacer referencia a poligonal y región poligonal parece haber una resistencia en algunos docentes en aceptar alguna de ellas como definición de polígono que contradice su propia concepción de este concepto. Esto puede influir en instancias de producción de definiciones en el aula de matemática.

Cabe destacar que la reflexión en torno a la equivalencia y no equivalencia entre las definiciones presentadas puso de manifiesto la necesidad de realizar un análisis del libro de texto a utilizar antes de emplearlo en el aula con estudiantes. Esta cuestión se acrecienta más aún cuando se realiza recopilación de diferentes textos de distintos autores y por tanto con perspectivas disímiles.

Emerge en las discusiones con los profesores y futuros profesores la importancia del empleo de representaciones visuales, imágenes, etc. en instancias de formación de conceptos. Respecto al análisis realizado es evidente que en la mayoría de textos presentados estas representaciones son escasas, estereotipadas y que en algunos casos pueden generar contradicción con la definición dada por el mismo autor. A su vez se destaca la potencialidad del uso de ejemplo y no ejemplos en los proceso de enseñanza y de aprendizaje; en particular se reflexiona la importancia de presentar no ejemplos que cumplan algunas de las condiciones de la definición y no otras.´

El taller permitió a los participantes reflexionar acerca de diversas cuestiones, entre otras, la discusión respecto al lugar que ocupa la definición en matemática y la importancia de análisis de libros de textos, dado que puede redundar en beneficios en la enseñanza de la asignatura matemática y consecuentemente contribuir al logro de resultados satisfactorios de estudiantes.

Bibliografía y Referencias

Adam, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica. Tomo I. Fundamentos*. Euler, G. Madrid: Puig Ediciones.

Amenado M.B., Carranza, S.G., Diñeiro, M.T., Grau, J.E. y Latorre, M.L. (1996). *Matemática 2*. Buenos Aires: Santillana

Braga Blanco, G. y Belver Domínguez, J.L. (2014). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación,* 27 (1), 199-218.

Cárcamo, D. (2012). *Uso de los Libros de Texto de matemática en el proceso de enseñanza: Un análisis de casos comparado.* Tegucigalpa*:* Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán.

Grossi, S. y Sgreccia, N. (2016). Perspectivas docentes acerca de habilidades de representación y comunicación de lo tridimensional. En *libro de actas 2 CIECyM y 3 ENEM*, 73-77.

Guillén Soler, G. (1991). *El mundo de los poliedros.* Madrid. Síntesis.

Ibarra, L.; Formeliano, B.; Patagua, I.;Velazquez, S.; Baspiñeiro, S. & Mendez, G. (2013). La construcción de triángulos en la escuela primaria. Memorias del IV econgrès international sur la TAD.

Kaczor, P.J.; Piñeiro, G.E.; y Serrano, G.B. (2012). *Actividades clave. II Matemática*. Buenos aires: Santillana.

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología. (2011). NAP. Tercer ciclo. Disponible en: https://www.educ.ar/recursos/110570/nap-secundaria-matematica

Olivero, F.; Bosch, M.; Gascón, J. (2013). Praxeologías matemáticas en torno a la geometría para la formación del profesorado. *Memorias del IV econgrès international sur la TAD.*

Sadovsky, P., Kass, M., Panizza, M.G. y Reyna, I.M. (1989) *Matemática 2*. Buenos Aires: Santillana.

Schaefer, L. y Sgreccia, N. (2016). Conocimiento especializado del contenido al enseñar a medir segmentos y ángulos a futuros profesores en matemática. En *libro de actas 2 CIECyM y 3 ENEM*, 66-77.

Sessa C. (Coord.). (2015). *Hacer Matemática 7/1*. Buenos Aires: Estrada.

Stanley C., Phares G. y Cooney, T. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. Distrito Federal: Addison Wesley Longman.

Tall, D. (1989). Concept images, computers and curriculum change. *For the Learning of Mathematics*, *9*(3), 37–42.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

Van Dormolen, J., & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 91-106.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematicas. En D. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989) Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Winicki-Landman, G. (2006). Las definiciones en matemáticas y los procesos de su formulación: algunas reflexiones. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19,* 528-537.

¡Fractales! Factor motivador para el estudio de las matemáticas

Dorenis Josefina **Mota Villegas**
Escuela de Matemática y Física, Pontificia Universidad Católica del Ecuador
Ecuador
djmota@puce.edu.ec

Ricardo Enrique **Valles Pereira**
Escuela de Matemática y Física, Pontificia Universidad Católica del Ecuador
Ecuador
rvalles@puce.edu.ec

En este poster se describe una experiencia de clase llevada a cabo en la asignatura de Matemática para la Carrera de Arquitectura, perteneciente a la Facultad de Arquitectura, Diseño y Artes (FADA) de la Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Sede Quito. El objetivo del proyecto fue promover una actitud positiva hacia el estudio de las matemáticas, dentro de un contexto donde generalmente los estudiantes no muestran un gran interés por la asignatura.

Los fractales y su actual aplicación en situaciones de la cotidianidad fueron el punto de conexión entre los estudiantes y la matemática. El proyecto estuvo basado en varias actividades que poco a poco fueron sumergiendo al estudiante en el mundo de los fractales; donde se le dio primacía a la aplicabilidad de éstos en la actualidad con el estudio de las formas y los elementos matemáticos de rigor fueron abordados de forma superficial, sin embargo, esto último no impidió que el estudiante pudiera manipular fórmulas complejas para crear fractales, pero lo hizo mediante un simulador (fractfinder, 2018).

El proyecto estuvo fundamentado desde el punto de vista didáctico matemático en la teoría de la etnomatemática (Ubiratan, 2008).

Específicamente se llevaron a cado las siguientes actividades:

Actividad 1: Elaboración de un mapa mental por parte de los estudiantes en base al video: "la geometría fractal de la naturaleza". En tal sentido cada estudiante tuvo que diseñar un mapa mental en base a lo que pudo interpretar del material audiovisual. Este recurso fue evaluado siguiendo los lineamientos de una rúbrica facilitada al estudiante previamente.

Actividad 2: Video Didáctico por estudiantes sobre la aplicación de los fractales en Arquitectura y Diseño. Para la actividad dos, cada estudiante debe elaborar un video haciendo uso de cualquier plataforma o recurso visual, en donde se evidencie la aplicabilidad de los fractales en la carrera de Arquitectura.

Actividad 3: Elaboración de una maqueta empleando elementos fractales en su construcción. Finalmente para esta última actividad cada alumno debió elaborar una maqueta de alguna estructura observada en su contexto donde se apliquen las teorías de fractales.

Para concluir, se les presentó una encuesta a los estudiantes de Arquitectura sobre su apreciación de la experiencia realizada; en la cual se lograron resultados positivos, ya que ellos manifestaron el interés por el estudio de los fractales, así como también su aplicabilidad en su campo laboral.

En tal sentido se pudo lograr el objetivo que era generar la motivación por el estudio del tópico matemático Fractal, y su aplicabilidad en el contexto profesional de los Estudiantes de Arquitectura del curso de Matemática en los estudiantes de la Pontificia Universidad Católica del Ecuador.

Referencias y bibliografía

Fractfinder (2018). Página web disponible en: / https://www.fractfinder.es/

Rebeca E, A. A. (2017, 01,03). La Geometría Fractal de la Naturaleza. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=uggDndM-p7Y

Ubiratan, D. A. (2008). Etnomatemática. Entre las tradiciones y la modernidad. México: Limusa

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

La entrevista socrática como medio para detectar el nivel de comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, en el marco del modelo de van Hiele

William Eduardo **Calderón** Gualdrón
Doctorando en Ciencias de la Educación de la Universidad Metropolita de Educación Ciencia y Tecnología. UMECIT. Grupo de Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander EDUMAT-UIS.
Colombia
williameduardoc@hotmail.com

René Alejandro **Londoño** Cano
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
renelondo@gmail.com

Resumen

El presente trabajo es parte de una investigación en curso que tiene por objetivo caracterizar los niveles de razonamiento del modelo de van Hiele asociados a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico. Basados en nuestra experiencia docente y de acuerdo a la literatura abordada, hemos evidenciado que la gran mayoría de estudiantes de primeros semestres de universidad presentan dificultades para comprender el concepto de parábola como lugar geométrico. De acuerdo a Londoño (2011), la entrevista de carácter socrático permite generar, por un lado, experiencias de aprendizaje en relación con un conocimiento matemático y, por otro, avanzar en la comprensión del concepto en cuestión; este estudio retoma esta idea y la adapta al software GeoGebra. Dos hallazgos emergieron de este proceso y nos permitieron caracterizar la comprensión: Un conjunto de descriptores de los niveles de razonamiento de van Hiele y un guion de entrevista socrática mediada por GeoGebra.

Palabras clave: Lugar geométrico, Descriptores, GeoGebra, Parábola, Entrevista socrática Dinámica.

Introducción

Basados en nuestra experiencia docente y de acuerdo a la literatura abordada, los estudiantes de primer año de universidad presentan dificultades en la comprensión de las secciones cónicas, situación que ha sido documentada hace más de 30 años por investigadores como Just y Carpenter (1985), Santa y Jaramillo (2007), Gómez y Carulla (2000), quienes aseguran que los estudiantes que aprenden de memoria las ecuaciones de las cónicas, no comprenden las propiedades ni hacen procesos de análisis; lo anterior conlleva a dificultades en relación a la representación algebraica y geométrica, impidiendo su comprensión como lugar geométrico.

Lo anterior señala la necesidad de aportar elementos que permitan a los profesores mejorar el proceso de enseñanza de las cónicas, en específico, de la parábola como lugar geométrico.

En esta investigación, en particular, interesa aportar a la solución de la problemática de las dificultades en la comprensión de la parábola como lugar geométrico en estudiantes de educación media. Para ello, nos hemos planteado la siguiente pregunta de investigación: *¿Cómo comprenden los estudiantes de educación media el concepto de parábola como lugar geométrico, haciendo uso del software de geometría dinámica GeoGebra?*

Fundamentación teórica

El problema de la comprensión en conexión con el aprendizaje de la geometría ha sido abordado desde antaño por Pierre Van Hiele (1957) quien resalta su importancia al afirmar que "la adquisición de comprensión es, con razón, uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas" (p. 10). Para ello, Pierre señala que se deben crear las condiciones bajo las cuales la comprensión se pueda dar, lo cual conduce a pensar que es, quizás, por la forma tradicional que se enseña que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos.

El modelo de van Hiele

Como docentes de matemáticas siempre estamos buscando la forma en que nuestros estudiantes mejoren su actividad en el área, cuestión que resulta frustrante en ocasiones.

> "Había partes de la materia en cuestión que yo podía explicar y explicar, y aun así los estudiantes no entendían. Podía ver que ellos lo intentaban realmente, pero no tenían éxito. Especialmente al comienzo de la geometría, cuando había que demostrar cosas muy simples, podía ver que ellos daban el máximo de sí, pero la materia parecía ser demasiado difícil. Pero debido a que yo era un profesor inexperto, también tenía que considerar la posibilidad de que yo fuera un mal profesor. Y esta última y desagradable posibilidad se afirmaba por lo que ocurría posteriormente: de pronto parecía que comprendían la materia en cuestión, podían hablar de ella con bastante sentido y a menudo decían: «no es tan difícil, pero ¿por qué nos lo explicó usted de forma tan complicada?» En los años que siguieron cambié mi explicación muchas veces, pero las dificultades se mantenían. Parecía como si siempre estuviese hablando en una lengua distinta. Y considerando esta idea descubrí la solución, los diferentes niveles del pensamiento." (van Hiele, 1957, p. 39)

Estas reflexiones, sobre su propia práctica pedagógica, llevaron a los profesores Van Hiele a plantear su teoría para la enseñanza-aprendizaje de la geometría. Su mentor de tesis doctoral, Hans Freudenthal, precisó:

> Ellos se observaron a sí mismos cuando enseñaban, recordaron lo que habían hecho y lo analizaron. De hecho el pensamiento es una actividad continua, pero existen niveles relativos a esta actividad. En el nivel más alto, la acción del nivel más bajo se convierte en objeto de análisis. Eso fue lo que los van Hiele reconocieron como característica sobresaliente de un proceso de aprendizaje, nombrándolo de la manera como ellos lo aprendieron enseñando. Ellos transfirieron esta característica del proceso de aprendizaje, que era la meta de su enseñanza, al proceso de aprendizaje de los estudiantes quienes estaban aprendiendo matemáticas. Allí, ellos descubrieron niveles similares. Para mí, esto se parece a un descubrimiento importante. (Freudenthal, 1973)

Este descubrimiento del que habla Freudenthal es lo que en la actualidad se conoce como el Modelo de Enseñanza-Aprendizaje de van Hiele, debido a que da una explicación integral del proceso enseñanza-aprendizaje de la geometría de la gran mayoría de estudiantes.

Prat (2105), indica que cualquier modelo educativo se compone de tres etapas diferenciadas, las cuales son:

a. Observación: la primera etapa detecta la repetición de determinados patrones de comportamiento en los estudiantes bajo unas condiciones concretas.

b. Planteamiento: acorde a las regularidades observadas se definen y formulan las características del modelo, que describen cómo se produce el desarrollo o aprendizaje de los estudiantes.

c. Análisis: se realizan diversas experiencias que corroboren o rectifiquen los planteamientos hechos.

El modelo de van Hiele atravesó estas tres etapas, y se validó por parte de los van Hiele en la enseñanza de la geometría en educación secundaria. La geometría fue escogida como un ejemplo debido a que es la piedra angular de las matemáticas. No obstante, el modelo se ha extendido y validado en ramas diversas de las matemáticas como el análisis matemático, la aritmética, la trigonometría, entre otras.

El modelo de van Hiele es "una excelente guía para los profesores pues (…) enseña a descubrir cómo debe comunicarse el profesor con los alumnos, para presentarles nuevos conceptos de manera que se fomente la comprensión de las matemáticas" (Jaime y Gutiérrez, 1990, pp. 302-303).

El modelo de Van Hiele está fundamentado en tres aspectos:

a) "niveles de razonamiento", los cuales referencian una secuencia continua de tipos de razonamientos mediante los cuales progresa, sin saltarse alguno. Permiten analizar la capacidad de razonamiento matemático de los individuos, desde que empiezan su aprendizaje hasta que alcanzan su máximo grado de desarrollo.

b) "fases de aprendizaje", orientada a los profesores, las cuales brindan directrices para encaminar a sus estudiantes hacia un nivel superior de razonamiento.

c) y la percepción-insight, que es el interés original y el tema de disertación.

La entrevista socrática

El método socrático ha ganado un importante lugar en la educación ya que facilita el ambiente para construir conocimiento bajo una característica especial: el profesor, quien dirige el diálogo, asume una actitud de humildad que permite a los estudiantes sentirse cómodos en un nivel en el cual pueden participar abiertamente; en vez de decir qué o cómo hay que pensar, permite el descubrimiento del conocimiento por parte del estudiante. El diálogo socrático se ha validado como medio para que un estudiante encuentre la verdad sobre un conocimiento, de igual forma, la entrevista de carácter socrático se ha implementado como una estrategia que permite generar, por un lado, experiencias de aprendizaje en relación con un conocimiento matemático y, por otro, identificar el conocimiento que se ha aprendido (Londoño, 2011).

El diálogo como elemento importante en la educación matemática es entendido desde los “Diálogos” de Platón (texto que contiene el capítulo llamado “Menón”, en el cual se puede apreciar el diálogo que sostiene Sócrates con el esclavo de Menón acerca de encontrar el cuadrado de área doble, de otro cuadrado dado), cuyos coloquios se caracterizan por su alto grado de indagación y análisis, lo cual supone un compromiso con el intelecto. De la Torre (2003) describe el método socrático como camino hacia el esclarecimiento de los conceptos, tal como se perfila en el Menón; señala además que:

> El camino hacia el conocimiento es un proceso gradual, en el cual la opinión y la creencia constituyen etapas intermedias. El aprendiz se esfuerza y participa activamente en el proceso, que termina cuando aquel inventa o descubre la respuesta adecuada a una pregunta bien formulada. (De la Torre, 2003, p. 102)

Sucerquia, Londoño y Jaramillo (2015) señalan que en una clase de matemáticas el diálogo debe permitir la expresión de ideas, conocimientos, razonamiento crítico y reflexivo, procesos argumentativos, etc.; es decir, el diálogo matemático debe presentar algunas características particulares que deben estar en correspondencia con las propias del diálogo socrático.

> La entrevista socrática […] ha sido el medio más adecuado para realizar el seguimiento de la construcción y evolución de un concepto matemático en la mente del alumno, como también se ha considerado una herramienta fundamental en estos estudios, debido a que ha permitido determinar los niveles de razonamiento a la luz del modelo de van Hiele […]. (Jaramillo y Campillo, 2001, p. 82)

Londoño (2011) emplea la entrevista socrática con una doble intención: a) que el profesor reflexione sobre el concepto y las dificultades en la enseñanza del mismo, esto con el propósito de que forje la necesidad de diseñar una red de relaciones para propiciar el acercamiento del estudiante al concepto; b) que le permita al entrevistado (el estudiante) progresar en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo. La entrevista socrática diseñada en el estudio de Londoño le permite la detección de los niveles de comprensión de tres estudiantes en el marco de la teoría de Piere y Kieren a partir de *descriptores* diseñados para cada nivel, los cuales se obtuvieron durante la aplicación de las diferentes versiones de la entrevista socrática.

El autor enfatiza en las conclusiones de su estudio la importancia de que en la entrevista socrática se generen preguntas que entorpezcan al aprendiz ante un posible error o confusión y así avanzar en su proceso de comprensión.

Asimismo, para efectos de esta investigación, se tomaron en cuenta los aspectos que Van Hiele considera importantes en una clase donde se trabaje con el método socrático; según de De la Torre (2003) ellos son:

- El maestro tiene que asegurarse del interés de los alumnos en el problema y debe captar su atención desde el comienzo.
- El método socrático sólo es efectivo en la medida en que se pueda garantizar que cada uno de los alumnos alcanza la solución mediante su trabajo personal. El profesor no podrá llenarse de impaciencia ni darles la solución prematuramente.
- El trabajo de los alumnos debe ser individual y las conversaciones colectivas en el aula deberán ser guiadas por el maestro, de modo que se les permita avanzar también a los alumnos que se muevan a paso lento.
- El maestro debe calibrar acertadamente la dificultad del problema, de modo que todos los estudiantes conserven el interés hasta el fin, sin que ninguno de ellos olvide el corazón del asunto. (p 103).

van Hiele (1986) insiste en estas premisas pues “es posible emplear el método socrático, con muy buenos resultados, pero también es muy fácil fracasar en el intento” (Londoño, 2010, p. 27).

En este estudio se realizó la entrevista de carácter socrático mediada por un software de geometría dinámica, pues existen investigaciones como las de Peña (2010) que resaltan que los *softwares* de geometría dinámica (SGD) contribuyen con nuevas posibilidades en la enseñanza de la geometría ya que se supera el carácter estático de las figuras en el papel; los SGD dotan de *movimiento* a las figuras, cualidad que permite analizarlas desde diferentes perspectivas y comprender los conceptos y propiedades asociadas a ellas, esto empleando las opciones de arrastre de los programas. La autora señala que “la utilización de los programas de Geometría Dinámica en clase nos ayudará a acercar los contenidos matemáticos a los estudiantes y mejorar su comprensión” (p. 166).

Gracias a la utilización de la tecnología en el aula, en particular de los software de geometría dinámica, Acosta y Fiallo (2017), quienes realizan un estudio con un grupo de estudiantes y docentes tanto de colegio como de universidad, afirman que identificaron “múltiples transformaciones debido al impacto de esas herramientas: transformación de las concepciones y prácticas matemáticas; transformación de las relaciones entre los profesores y el saber; entre los alumnos y el saber; entre los alumnos y los profesores; transformación de las formas de organización de la clase y de las responsabilidades administrativas en la institución; y transformación del currículo de matemáticas, entre otras”.

Los investigadores López-Mesa, Aldana-Bermúdez y Alonso-Arboleda (2013) emplearon el software de geometría dinámica GeoGebra en un estudio con 25 estudiantes (cuyas edades oscilan entre 17 y 30 años) de Ingeniería de Sistemas de primer semestre para conocer cómo ellos adquieren la comprensión del concepto de parábola, mediante geometría dinámica y la Ingeniería Didáctica de Chevallard como soporte teórico. Entre las conclusiones reportadas, destaca que las tecnologías digitales logran una mayor comprensión del objeto matemático, en los siguientes términos:

> […] el medio informático como herramienta facilitó en los estudiantes la comprensión de los elementos que caracterizan la ecuación canónica de la parábola con centro en el origen

y fuera de este; establecieron relaciones entre los elementos matemáticos y los modos de representación gráfico, algebraico y analítico, y lograron una construcción progresiva, ascendente, consciente y real del objeto matemático de estudio.

Todos estos aspectos favorables motivan el uso de GeoGebra y la entrevista socrática en el proceso de enseñanza conducente a la comprensión de la parábola como lugar geométrico.

Hallazgos y consideraciones finales

De acuerdo con las características mencionadas del modelo de van Hiele, esta investigación se centró en la parte prescriptiva del modelo, esto es, en los niveles de razonamiento los cuales son características intelectuales y cognitivas que se pueden describir cuando observamos el desarrollo intelectual y cognitivo por el cual debe atravesar todo estudiante, lo cual permite describir su nivel de razonamiento y comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, así mismo, los niveles permiten conocer el avance de un estudiante en la comprensión en cuanto al concepto matemático. A continuación, presentamos las características generales de los descriptores que se están detectando en cada nivel, los cuales se encuentran en un proceso de refinamiento:

Nivel 0: Predescriptivo

En este nivel se identifica el conjunto de saberes previos que necesita el estudiante para llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico. Los descriptores para este nivel son estrictamente conceptuales sin requerir el uso del software.

Nivel I: Reconocimiento visual

En este nivel el estudiante construye y visualiza, en un ambiente de geometría dinámica, puntos, rectas, rectas paralelas, rectas perpendiculares, entre otras.

Nivel II: De análisis

En este nivel, el estudiante determina algunos puntos que satisfacen la condición de estar a la misma distancia de un punto fijo llamado F y de una recta llamada D.

Nivel III: De clasificación

En este nivel, el estudiante determina la condición que deben cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a la parábola como lugar geométrico y mediante el *software* construye ese conjunto de puntos.

Nuestra investigación no intenta caracterizar los descriptores del Nivel IV, de deducción formal, pues el propio modelo de van Hiele establece que es difícil de detectar y que se considera de carácter teórico.

Se ha identificado hasta ahora que la entrevista socrática mediada por un software de geometría dinámica se diferencia de la planteada por Londoño (2011) y Santa (2007), ya que el software transforma la manera en que el entrevistado interactúa con el entrevistador, al proporcionarle al primero nuevas herramientas en las que puede dotar de movimiento las situaciones que se le presentan, dándole a la entrevista una cualidad en la que mediante la experimentación y manipulación de distintos elementos geométricos en GeoGebra, el estudiante logra deducir resultados y propiedades hasta llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico.

La investigación pretende que la entrevista socrática dinámica pueda convertirse en una estrategia para los profesores de matemáticas, ya que, mediante las actividades propuestas en ella, se orienta sobre cómo debe comunicarse el profesor con los estudiantes a través de un software de geometría dinámica, para presentarles nuevos conceptos, de manera que se fomente la comprensión de las matemáticas, su aprendizaje y el desarrollo de la capacidad de razonamiento de los mismos.

Referencias y bibliografía

Acosta, M y Fiallo, J (2017) Enseñando geometría con tecnología digital: Una propuesta desde la teoría de las situaciones didácticas Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

De la Torre, A. (2000). El método socrático y el modelo de Van Hiele. Lecturas Matemáticas, 24, pp. 99-121.

Fiallo J. (2011). Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica. (Tesis de Doctorado) Universidad de Valencia.

Freudenthal, H. (1973) Mathematics as an Educational Task . Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Gómez, P. y Carulla, C. (2000). *Enseñanza sobre la Función Cuadrática*. Universidad de los Andes. Colombia.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele*. En: Llinares, S. y Sánchez, V. (eds.). Teoría y práctica en educación matemática (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.

Jaramillo, C. y Campillo, P. (2001). Propuesta Teórica de Entrevista Socrática a la Luz del Modelo de van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, *9*, pp. 65–84. Recuperado de https://www.emis.de/journals/DM/v91/art5.pdf

Just, M. y Carpenter, P. (1985). Cognitive coordinate systems: Accounts of mental rotation and individual differences in spatial ability. Psychological Review, 137-172.

Londoño, R. A. . (2011) La Relación Inversa entre Cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren. Medellín: Tesis Doctoral.

López-Mesa, J., Aldana-Bermúdez E., Alonso-Arboleda A. (2013). Análisis de la comprensión del concepto de parábola en un contexto universitario. *Respuestas*; *18*(2): 74-79.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares Básicos de Matemáticas. Colombia: M.E.N.

Peña, A. (2010). Enseñanza de la geometría con tic en Educación secundaria obligatoria. Tesis doctoral

Santa-Ramírez, Z. M. & Jaramillo-López, C. M. (2014). Entrevista socrática para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 41, 45-60. Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/464/986

Santa, Z. y Jaramillo, C. (2007). *Construcción de las secciones cónicas mediante el doblado de papel en el marco del modelo educativo de Van Hiele*. En: X Encuentro Colombiano de Matemáticas Educativa. Universidad de Antioquia.

Van Hiele, P.M. (1957). El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría). (Tesis doctoral). Universidad de Utrecht, Utrecht (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

El uso de software educativo GeoGebra en el estudio de las transformaciones isométricas

Jocelyn Vanessa **Aguilera** Aravena
Colegio Esperanza, Quilpué
Chile
j.aguilera.aravena@gmail.com

Resumen

El objetivo de la presente propuesta de innovación es contribuir a la educación a partir de una secuencia de actividades donde se trabaja el objeto matemático de las transformaciones isométricas, traslación, en terceros básicos a través del uso de la tecnología en el aula utilizando el software educativo GeoGebra. El marco teórico a utilizar, Espacio de Trabajo Geométrico (ETG), se esbozarán elementos de la Génesis Instrumental, en función de la importancia que implica el uso de un software educativo en la enseñanza de la geometría. Los hallazgos visualizados en la puesta en práctica superan lo esperado por la docente, pues lo estudiantes se involucran con las secuencias de actividades a tal nivel que construyen figuras con el objetivo de comprobar lo aprendido en relación a la traslación.

Palabras clave: Innovación, GeoGebra, transformaciones isométricas, traslación, enseñanza primaria.

Problemática

A partir de lo observado en las prácticas pedagógicas de la educación matemática en el establecimiento donde me desenvuelvo como docente de primaria, trabajando en el área de la educación en niveles de primero y tercero básico es que he observado la alarmante situación donde los objetivos de aprendizaje relacionados con la utilización de software educativos para la enseñanza de geometría se han dejado de lado, pues, no son considerados en las planificaciones de los docentes y menos aún en las clases dictadas por ellos.

El problema va in crescendo cuando se observa que la misma problemática se replica en los niveles de secundaria. Es por ello, que se hace elemental, generar situaciones en donde los estudiantes conozcan software educativos para poder aplicar lo conceptual y llevarlo a planos donde se vincula la vista algebraica con lo geométrico.

La idea de innovación está relacionada con generar una situación de aprendizaje en donde los estudiantes comprendan el objeto matemático de las transformaciones isométricas a través del software educativo GeoGebra.

Para llevar a cabo dicha propuesta, se deben generar dos líneas de situaciones de aprendizaje previas: la primera debe estar vinculada a una alfabetización del programa GeoGebra, considerando fases de exploración y elementos sustanciales para poder utilizarlo de manera efectiva. Una segunda línea importante a considerar son los aprendizajes previos de los estudiantes, dado que, es necesario recurrir a ellos para generar una situación en donde puedan construir relaciones ligadas a las transformaciones isométricas. Considerar aprendizajes previos como: elementos primitivos de la geometría, construcción de figuras 2D y perímetros de figuras 2D.

Contextualización

El establecimiento en el cuál se implementará la situación de aprendizaje, tiene las características de ser particular subvencionado, cuenta con una matrícula de 1.080 estudiantes y está ubicado en la comuna de Quilpué, Chile, acoge a familias de nivel socioeconómico medio alto (según los datos obtenidos de la información que nos entregan evaluaciones estandarizadas). La actividad se desarrollará en los terceros básicos A y B, cada uno de ellos cuenta con una matrícula de 34 alumnos y alumnas. Importante es recalcar que esta situación será el primer acercamiento que los estudiantes tendrán acerca de las transformaciones isométricas y es por ello que se hace tan importante, generar una situación que sea atractiva para ellos y que logre el objetivo de que emerja desde los estudiantes este aprendizaje.

La secuencia de actividades abarca tres clases (cada una conformada por bloques de 2 horas pedagógicas --comprendiendo las horas pedagógicas de un tiempo de 45 minutos cada una.)

A continuación se exponen los objetivos de las sesiones sugeridos para la implementación de la actividad:

Sesión Nº1

Objetivo de la clase: *representar elementos primitivos de la geometría utilizando el software educativo GeoGebra.*

En una primera instancia, los estudiantes resuelven actividades relacionadas con los elementos primitivos de la geometría (punto, recta, segmento, rayo y semirrecta) en un módulo de aprendizaje, el cual, será anexado al final del escrito. Luego de ello, exploran el software educativo GeoGebra, visualizando las herramientas con las cuales pueden contar para trabajar con el programa. Finalmente representan los elementos primitivos de la geometría en el software educativo GeoGebra.

Sesión Nº2

Objetivo de la clase: *construir cuadriláteros utilizando el software educativo GeoGebra*

Durante esta sesión, los estudiantes construyen un cuadrilátero utilizando el programa. Para ello, escuchan las indicaciones que les entrega la docente y luego trabajan en su computador individual. La construcción se puede realizar a través de puntos y segmentos por separado o utilizando la herramienta de polígono.

Sesión Nº3

Objetivo de la clase: *aplicar transformación isométrica (traslación) a un cuadrilátero utilizando un vector a través del software educativo GeoGebra.*

Los estudiantes utilizan la herramienta para aplicarle una transformación isométrica, traslación, al cuadrilátero construido anteriormente construido. La traslación se puede hacer utilizando la herramienta  hacer click en el cuadrilátero y luego construir un vector. La otra opción es construir un vector y luego trasladar la figura según el vector construido.

Finalmente, los estudiantes comunican los pasos que han utilizado para poder aplicar la traslación al cuadrilátero que han construido.

Objeto matemático: isometría

El objeto matemático involucrado en este proyecto de innovación son las transformaciones isométricas. Para comprender el significado de isometría debemos observar la raíz epistemológica de su palabra, pues, ***iso*** significa igual y ***metría*** medición, en griego. Esta palabra compuesta significa, entonces, igual medida.

Snapper y Troyer (1971) construyen tres principios de una isometría:

"Una **isometría** de V a W es una función que cumple σ: V → W

1. σ es uno uno y sobre
2. σ es una transformación lineal.
3. AB = (σ A) (σ B) para todos A, B ε V."

Coxeter (1991), en la pág. 54 indica que "una *isometría es una transformación que preserva la longitud, de manera que si (P, P´) y (Q, Q´) son dos pares de puntos correspondientes, determinarán los segmentos congruentes PQ = P´Q´: PQ y P´Q´."* Este segundo acercamiento, a la luz de un saber sabio, se puede acercar a la definición que los textos escolares nos brindan, "si cambias de posición o ubicación una figura sin modificar su forma ni su tamaño, estas realizando una transformación isométrica".

El objeto matemático de las transformaciones isométricas trae consigo una matemática tremendamente profunda y necesaria para futuros aprendizajes escolares. La adhesión y el aprendizaje significativo de éste, se puede lograr utilizando de manera intencionada un software educativo, diseñando actividades que se encuentren articuladas, donde, el objetivo final sea evidenciar el aprendizaje logrado relacionado con el objeto matemático de estudio.

Uso del GeoGebra

Para llevar a cabo dicho objetivo, es necesario que los estudiantes exploren el software educativo, en una primera instancia, posterior a ello, se requiere aplicar una alfabetización básica de la herramienta tecnológica, para que los alumnos puedan cumplir a cabalidad con los objetivos planteados en las sesiones.

El programa GeoGebra emerge de una maestría de año 2001 en donde su autor, Markus Hohenwarter, deseaba generar un sitio web que implicara una fusión entre la geometría dinámica y los sistemas de cálculos simbólicos, que tuviese la modalidad de ser útil en la enseñanza de la matemática en el aula. Tal fue el éxito de su propuesta, que hubo muchos matemáticos que tuvieron la intención a aportar ideas para que dicho software educativo pudiese ampliar sus funciones. Según lo indica https://www.geogebra.org/about

> GeoGebra es un software de matemáticas para todo nivel educativo. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo. GeoGebra, con su libre agilidad de uso, congrega a una comunidad vital y en crecimiento.

Marco teórico

El Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) es un ambiente creado y desarrollado para resolver situaciones y problemas geométricos, donde éstos se pueden relacionar y vincular con un individuo (Kuzniak 2004). Esta relación puede estudiarse desde dos planos; el primero es el plano cognitivo, el cual, está compuesto por la visualización, construcción y prueba. El segundo, plano epistemológico, está formado por el conocimiento referencial, artefactos y el espacio real con figuras. Ambos planos interactúan a través de tres génesis, la semiótica, instrumental y discursiva.

La siguiente imagen logra plasmar la interacción existente entre los planos y sus génesis.

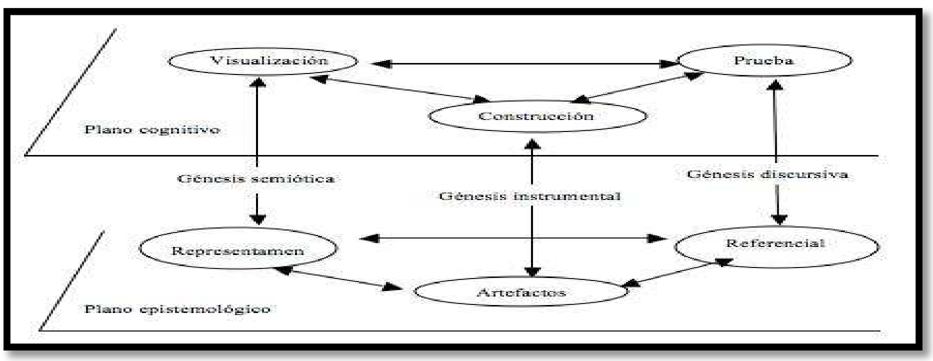


Figura 1: Espacio de Trabajo Matemático Kuzniak 2011

Paralelo a ello, el Espacio de Trabajo Geométrico se puede clasificar en tres tipos:

- ETG de referencia: hace mención al espacio ideal en relación a elementos matemáticos y su empleador es una persona experta en lo epistémico.
- ETG: idóneo: se encuentra centrado en elementos didácticos, pues, en general, su utilizador en el docente.
- ETG: personal: relacionado con el análisis y reflexión de los conocimientos adquiridos, lo cuales, han sido puesto en práctica, en general, su utilizador natural puede ser el estudiante o docente.

Para aplicar la teoría al contexto de esta investigación es que se concretizarán los espacios de trabajo geométrico involucrados en las actividades detalladas anteriormente. En el caso del ETG de referencia se puede evidenciar en los programas de estudios y bases curriculares que contempla el Ministerio de Educación en función del currículo para los establecimientos de enseñanza básica o primaria. En lo que respecta el ETG idóneo, se considerará el análisis del módulo de aprendizaje resuelto por los estudiantes y los documentos en GeoGebra en función de las construcciones realizadas. En relación al ETG personal, corresponde a cada estudiante que participó del proyecto, niños y niñas del Tercero Básico A y B.

Análisis curricular

A continuación se observa una tabla de Objetivos de Aprendizaje (según lo descrito en las Bases Curriculares, Chile):

	Nivel	**1º Básico**	**2º Básico**	**3º Básico**	**4º Básico**
Eje de Geometría	**Elementos de la geometría**	**OA 15.** Identificar y dibujar líneas rectas y curvas.		**OA 18:** Demostrar que comprenden el concepto de ángulo: ›identificando ejemplos de ángulos en el entorno › estimando la medida de ángulos, usando como referente ángulos de 45º y de 90o	**OA 19:** Construir ángulos con el transportador y compararlos.
Eje de Geometría	**Transf.** **isométricas**			**OA 17:** Reconocer en el entorno figuras 2D que están trasladadas, reflejadas y rotadas.	**OA 17:** Demostrar que comprenden una línea de simetría: › identificando figuras simétricas 2D › creando figuras simétricas 2D › dibujando una o más líneas de simetría en figuras 2D › usando software geométrico. **OA 18:** Trasladar, rotar y reflejar figuras 2D.

El texto de estudio de tercero básico que entrega el Ministerio de Educación (2017) brinda una definición de lo que son las transformaciones isométricas, “si cambias de posición o ubicación una figura sin modificar su forma ni su tamaño, estas realizando una transformación isométrica”.

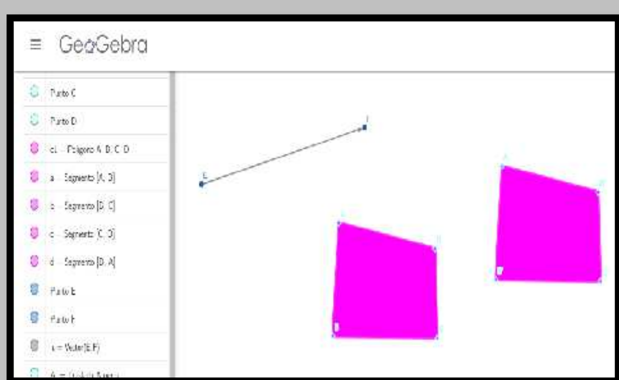
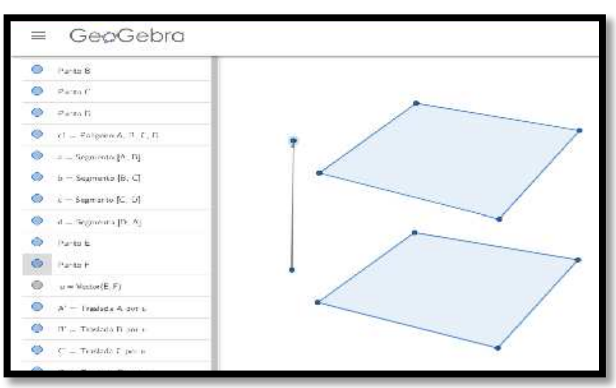
Desde la guía docente no emergen definiciones que puedan complementar este análisis.

La profundización de los aprendizajes relacionados con las transformaciones isométricas emergen desde los textos de estudio de segundaria o segundo ciclo (7mo y 8vo básicos) en donde, los estudiantes deben aplicar las transformaciones isométricas en el software educativo GeoGebra.

En función de ello, es que esta propuesta didáctica cobra real importancia, pues, es trascendental involucrar a los estudiantes con una geometría móvil, integral, diferente. El que los estudiantes se vean envueltos en una alfabetización de GeoGebra a temprana edad, facilitará la adquisición de aprendizaje en el segundo ciclo, además, provoca que los estudiantes se involucren con el objeto de estudio, se interesen por investigar más y se motiven a construir nuevos aprendizajes.

Algunos resultados

La totalidad de los estudiantes logró los objetivos planteados al inicio de las sesiones. Demostrando mucho ánimo en el proceso de exploración, construcción y traslación de cuadriláteros. Tanto fue el asombro y la motivación demostrada por los estudiantes, que fueron ellos quienes solicitaron a la docente, poder construir otras figuras utilizando el software educativo, dado que, estaban curiosos por saber que sucedería si se le aplicaba una traslación. La docente facilitó el tiempo para que implementaran sus construcciones y logran aplicar una traslación a las figuras construidas. A continuación adjunto algunas imágenes de los trabajos realizados por los estudiantes.

Construcción en GeoGebra	**Comentarios de los estudiantes**
Estudiante 1: 	**Estudiante 1:** “tuve que hacer un de esos de cuatro lados (…) cuadrilátero y después apreté el botón para trasladar (…) hice un rayo, ¿rayo se llamaba no? Y se trasladó.
Estudiante 2: 	**Estudiante 2:** “primero tuve que leer bien el módulo, y luego construí un cuadrilátero que tiene cuatro lado, obvio, la traslación es en relación al vector”

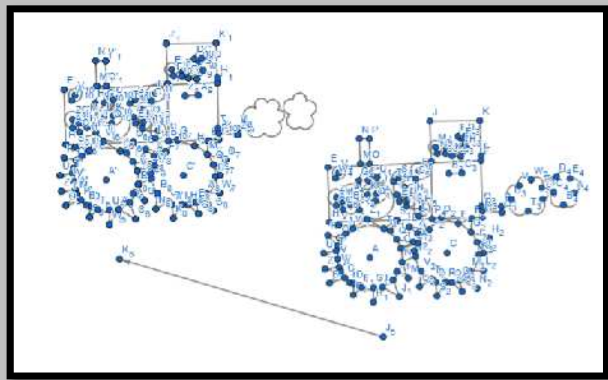
Estudiante 3:	**Estudiante 3:**
	"me dí cuenta que los polígonos son figuras cerradas, porque si yo unía los lados no era asi como exacto, faltaba un poquitito. Entonces el cuadrilátero es una figura cerrada de cuatro lados"

Figura 2: Imágenes de los trabajos realizados por los estudiantes.

Bibliografía y referencias

Coxeter, H. (1991). *Fundamentos de Geometría*. México: Limusa.

Kuzniak Alain. (2004), *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Paris, France: Institute de Recherche sur l'enseignement des Marthématiques Paris VII.

Kuzniak Alain. (2011), Léspace de travail mathématique et ses génèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 16. Pp. 9 – 24.

Kuzniak A, Montoya-Delgadillo E, Viviera L, (2016) El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.* Año 11. Número 15. pp 237-251. Costa Rica

MINEDUC (2012) Programas oficiales de educación matemática. Ministerio de Educación, Gobierno de Chile. Disponible en línea: http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-propertyvalue-49395.html

Montoya-Delgadillo, E. (2014) El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: *profesionales en formación inicial. Enseñanza de las Ciencias,* 32.3 oo: 227-247.

Snapper, E. & Troyer, R. (1971) *Metric Affine Geometry*, Academic Press.

Diseño de situaciones para el trabajo con figuras geométricas basado en operaciones cognitivas

Jorge Enrique **Galeano** Cano
Área de Educación Matemática, Universidad del Valle
Colombia
jorge.enrique.galeano@correounivalle.edu.co

Resumen

Se presenta una síntesis del trabajo de grado en la Maestría en Educación: *Diseño de situaciones para el trabajo con figuras geométricas basado en las operaciones cognitivas de construcción, visualización y razonamiento* (Galeano, 2015). Este propone, a partir de una perspectiva semiótica y cognitiva (Duval, 2005), un acercamiento a las figuras geométricas como un modo de ilustrar las posibilidades de una propuesta para la enseñanza de la geometría y contribuir así al desarrollo del pensamiento espacial. Toma como metodología los Experimentos de Enseñanza (Cobb, 2000); se caracterizan dos grupos de situaciones, las actividades diseñadas muestran cómo pueden usarse para desarrollar procesos de construcción que permiten un acceso significativo a dichas figuras, y procesos de visualización que explotan su productividad heurística. El análisis de la implementación muestra que los estudiantes desarrollan posibilidades de tratamiento sobre las figuras y se acercan a la comprensión de las propiedades características de una figura geométrica.

Palabras clave: Visualización, construcción, razonamiento, geometría, figuras geométricas, aprendizaje, diseño, experimento de clase.

Formulación de la propuesta de trabajo en clase

El trabajo realizado se constituye a partir de la formulación de un problema en Educación Matemática, los elementos teóricos y metodológicos que lo sustentan, lo que finalmente se concreta en el diseño, implementación y análisis de una serie de actividades en un grado sexto de Educación Básica Secundaría para el trabajo con figuras geométricas. En la realización del Experimento de Enseñanza[1] se identifican dos niveles: un micronivel y un macronivel (Cobb, 2000). En el micronivel se encuentra el experimento de enseñanza en el momento en que fue pensado y se hicieron ciertas anticipaciones, junto con los elementos previstos para desarrollar la enseñanza, los cuales contemplan las actividades de clase planeadas y aplicadas; se cierra este

[1] Es una metodología de investigación que provee maneras de explorar las posibilidades de investigar lo que a partir de la propuesta de enseñanza del profesor ocurre con el aprendizaje de los estudiantes y con los cambios que se dan al nivel del salón de clase (Cobb, 2000); está incluida dentro de las metodologías de Investigación Basada en Diseño IBD.

primer nivel con el análisis de la implementación de dichas actividades, estos es, un *análisis local* que permite identificar lo que ocurrió en clase y a partir de ahí desarrollar los ajustes para las actividades siguientes e identificar los primeros resultados del trabajo.

La planeación de las actividades inició con la determinación de los contenidos que serían cubiertos con el desarrollo de la intervención en clase así como una descripción de las maneras en que se espera discurra el aprendizaje (la *conjetura*); en esta parte fue importante tener en cuenta lo que el profesor, y el colegio, tenían planeado para trabajar con los estudiantes.

La conjetura es una afirmación sobre los hechos del salón de clase que se basa en evidencias, tanto teóricas como experimentales, que recoge las creencias del equipo de investigación en relación con las formas en que se han de desarrollar los aprendizajes de los estudiantes (Confrey y Lachance. 2000). Cobb (2000) afirma, al estilo del ya conocido símil de la moneda, que una conjetura tiene dos partes diferentes pero estrechamente ligadas y que se conjugan al momento de formularla. Se tienen entonces la dimensión del contenido y la dimensión pedagógica de la conjetura; la primera asociada a qué se debe enseñar y la segunda a cómo se debe hacerlo. Todo lo anterior se concreta en la formulación de una *trayectoria hipotética de aprendizaje*[2].

En el macronivel, se estudia toda la secuencia completa de enseñanza, todos los elementos que constituyeron la planeación del experimento y sus diversas actividades de clase así como los detalles de su implementación; se trata de crear conexiones, relaciones y explicaciones entre la teoría local que guió el diseño y la implementación de las actividades, para tratar de explicar la forma en que las trayectorias de aprendizaje y las conjeturas respondieron a lo esperado en el experimento de enseñanza; esto se realiza mediante un *análisis retrospectivo*.

Fundamentos de la propuesta

La propuesta de actividades -trayectorias- se organiza siguiendo lo señalado por las dos dimensiones de la conjetura: en el qué enseñar se incluyen reflexiones de orden matemático (sistemas geométricos) y curricular (pensamiento espacial); en el cómo enseñar se introducen consideraciones de orden cognitivo y semiótico. Se presentan a continuación algunos detalles de lo anterior.

La geometría euclidiana es parte importante en el trabajo que sobre el pensamiento espacial se hace en la escuela. Así, la formación de los estudiantes se organiza –según lo señalado por los Estándares- en relación con los sistemas geométricos “Los puntos, líneas rectas y curvas, regiones planas o curvas limitadas o ilimitadas y los cuerpos sólidos o huecos limitados o ilimitados pueden considerarse como los elementos de complicados sistemas de figuras, transformaciones y relaciones espaciales: los sistemas geométricos.” (MEN. 2006, p. 62). Es decir, estos sistemas están constituidos a partir de tres componentes: los objetos geométricos, las operaciones entre ellos y las transformaciones de las que son susceptibles dichos sistemas.

Para alcanzar lo propuesto por el MEN las escuelas definen acciones que se estructuran fundamentalmente desde una mirada conceptual, es decir, se organiza la propuesta de enseñanza

---

[2]Siendo un concepto nuevo, como ocurre con tantos otros en educación matemática, no se encuentra aún un consenso entre los miembros de la comunidad en relación con su definición y alcance. En este trabajo se parte de la acepción de dada por Confrey & Maloney (2009) “… a researcher-conjectured, empirically-supported description of the ordered network of constructs a student encounters through instruction (i.e., activities, tasks, tools, forms of interaction and methods of evaluation)...” p. 347

alrededor de las exigencias que la estructura formal del concepto presenta. Esta decisión, que está ampliamente sustentada, ha logrado darle sentido a las prácticas escolares en los últimos años; sin embargo, parece posible ampliar la mirada e incluir en estas exigencias aquellas que la actividad geométrica le impone a los estudiantes, en particular se considera que desde un punto de vista cognitivo (Duval, 2001) en necesario incluir aspectos relacionados con los procesos de construcción, visualización y razonamiento.

Se puede iniciar haciendo entonces una reflexión en relación con los procesos de visualización involucrados en la actividad matemática. El trabajo que se propone en geometría ha de estar asociado necesariamente con el desarrollo de las capacidades de visualización que debe construir un estudiante. Una primera caracterización de este proceso señala dos tipos de visualización: la icónica y la no icónica (Duval 2010).

La visualización icónica supone un acceso a las figuras geométricas del mismo modo en que sucede en otras representaciones gráficas por fuera de las matemáticas. En geometría el reconocimiento icónico de las figuras requiere de "una figura particular que sirve de modelo, y las otras figuras son reconocidas según su grado de parecido con este modelo" (Duval, 2004. p. 168). Sin embargo, el asunto fundamental en la entrada icónica a la visualización de una figura, en geometría en particular, tiene que ver con el hecho de que en esta las formas reconocidas aparecen estables, es decir, aparecen como si no fueran susceptibles de ser transformadas; al ser representaciones y sabiendo que la potencia de toda representación no está solo en el hecho de poder dar acceso a cierta información, sino que su potencia como signo radica en el hecho de poder transformarse y expresarse de modos distintos, esta estabilidad que la visualización icónica da a las figuras se convierte en algo que ha de ser superado para realizar un aprendizaje significativo de la geometría.

Es claro pues que uno de los primeros retos que ha de enfrentar una propuesta de trabajo en clase de geometría es la de apoyar el desarrollo de habilidades que le permitan al estudiante alejarse de una visualización icónica de las figuras. Un primer paso en este sentido es entonces comprender la naturaleza de la visualización no icónica, Duval (2004) afirma:

> La visualización no icónica… permite reconocer las formas, bien en virtud de las limitaciones internas de organización que hacen imposible ciertas deformaciones o ciertas aproximaciones, bien en virtud de deducciones efectuadas discursivamente en función de las propiedades que hayan sido enunciadas en las definiciones o en los teoremas que declaran lo que representa una figura. (p. 168)

Desarrollar en los estudiantes esta forma de ver que activa, por decirlo de alguna manera, la realización de tratamientos sobre las figuras, que pueden conducir a la solución de un problema, o que por lo menos dan lugar a procedimientos de búsqueda de dicha solución, se constituye en el objetivo que se quiere alcanzar en el proceso de aprendizaje de la visualización en geometría. Esta forma de ver una figura se asocia con distintas transformaciones sobre las figuras; unas tienen que ver con descomponer una figura en otras figuras (subfiguras), otras tienen que ver con la posibilidad de descomponer una figura en unidades figurales de una dimensión inferior. Las primeras se conocen como modificaciones mereológicas y las segundas como un proceso de deconstrucción dimensional (Duval, 2005).

En la construcción de una figura la producción de un trazo está asociada a dos elementos: una instrucción que recoge un pedido en relación con aquello que se quiere construir y la movilización de una propiedad geométrica en relación con el o los instrumentos que se van a emplear. Estos elementos dan lugar a lo que Duval (2005) ha llamado *trazos auxiliares y trazos reorganizadores.* Se tiene aquí un punto de encuentro entre la construcción y la visualización: las posibilidades que un estudiante tiene de ver los trazos reorganizadores necesarios para resolver un problema dependen de las capacidades de visualización que haya construido; se puede decir inicialmente que una mirada icónica sobre las figuras claramente no apoya la construcción de ningún trazo reorganizador.

La práctica tradicional de enseñanza de la geometría, en la cual las figuras se consideran evidentes y acabadas, ha dejado por fuera la enseñanza de algunos tratamientos básicos en el registro de las figuras; poder hacer un trazo que la figura no tenía, tan simple como suena, no es una práctica común en las clases de geometría.

Estructura de la propuesta

Se presentan entonces algunas consideraciones generales en relación con las trayectorias de aprendizaje: las situaciones, las actividades y sus conjeturas. Las tres primera situaciones configuran la trayectoria 1, que fue implementada y analizada, y a partir de los resultados de lo anterior se formula la segunda trayectoria, la cual queda como una propuesta para desarrollar futuros trabajos.

En todas las situaciones, las figuras aparecen como representantes de propiedades geométricas y las modificaciones a realizar son de carácter gráfico solamente; además, se propone como objeto de enseñanza la génesis de formas de actuación que lleven a desarrollar los procesos necesarios para entender las figuras en este sentido. Con tareas de construcción se apoya el primer rol asociado a las figuras y de ahí se pasa a los procesos de visualización no icónica para apoyar el desarrollo de las modificaciones mereológicas y de deconstrucción dimensional.

En la primera trayectoria, compuesta por tres situaciones, todas las actividades son de reproducción de una figura, para lo cual se usan instrumentos de construcción no estándar (ilustración 1) (Duval, 2010) o convencionales; son tareas que exigen la producción de una representación gráfica que debe conservar las mismas propiedades que la figura dada.

Ilustración 1. Instrumentos de construcción no estándar

Cada situación involucra el desarrollo de *objetos* del sistema geométrico que aparecen directamente asociados a figuras geométricas (triángulos, cuadrados, rombos, etc.), y se formularon en relación con los estándares para el pensamiento espacial, del grado sexto a noveno (MEN, 2006); es decir, cada situación se asocia con el desarrollo de alguno de los estándares de este ciclo; aunque es claro que una sola situación no agota el desarrollo de dicho estándar. Además, en cada situación se privilegia el desarrollo de alguna operación cognitiva. La situación 1 surge como una adecuación de la propuesta de Duval (2010). Está constituida por cinco actividades en las que se emplean instrumentos de construcción no convencionales en tareas de reproducción de figuras. La situación 2 consta de cinco actividades. Todas ellas tienen que ver con la reproducción de cuadriláteros empleando instrumentos convencionales (las escuadras) y no convencionales (moldes y plantillas). La situación 3 consta de tres grupos de actividades; en cada una de estas situaciones se daba una figura y la consigna era formular en lengua natural una serie de pasos que le permitan a quien lee o escucha dicho mensaje hacer la reproducción de la figura, conservando forma y tamaño.

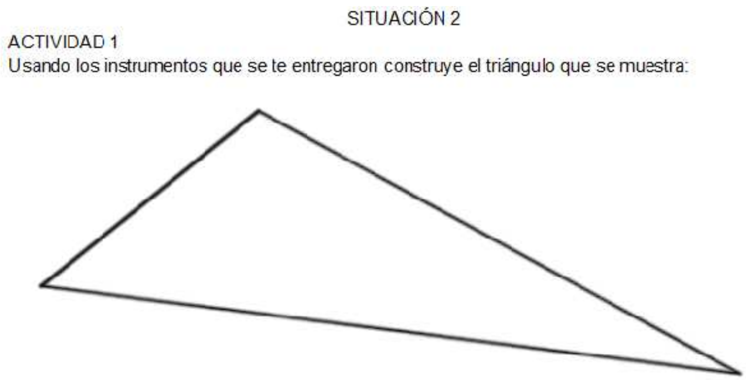


Ilustración 2. Ejemplo de actividad. Es la primera de 3 actividades que conforman la situación 2. En ella se usan una escuadra y la regla no informativa.

Las condiciones sobre lo curricular (Estándares del pensamiento espacial), lo matemático (sistemas geométricos) y los procesos cognitivos introducidas en el diseño se mantienen para todas las situaciones y se resume en la tabla siguiente.

Tabla 1

Condiciones para el diseño de las situaciones

Sistema geométrico	Procesos cognitivos			*Estándares pensamiento espacial 6°-9°*
	Construcción	Visualización	Razonamiento	
Objetos	S2a1 S2a2 S2a3 S2a4 S2a5	S1a1 S1a4 S1a5 S1a2 S1a3	S3a1 S3a2 S3a3	*C*[3]
Relaciones	S4a1 S4a2 S4a3	S5a1 S5a2 S5a3	S6a1 S6a2 S6a3	*J* *E* *H* *I*
Transformaciones				

Nota. Cada celda hace referencia a una situación y las actividades que la componen, determina las relaciones de dicha situación con el sistema geométrico (primera columna a la izquierda), con lo

[3] Se usó una letra para designar cada uno de los Estándares (MEN, 2006) de 6° a 9°: C. Clasifico polígonos en relación con sus propiedades. E. Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte, por ejemplo.

curricular (última columna a la derecha) y lo cognitivo (arriba, columnas del centro). La última fila corresponde a elementos de los sistemas geométricos y a estándares que no se trabajaron en esta experiencia, queda como un asunto pendiente para futuros estudios. La antepenúltima fila corresponde a la primera trayectoria, y la penúltima fila corresponde a la trayectoria 2.

En cada trayectoria, y en el marco del experimento de enseñanza, se determinó una conjetura y sus dos dimensiones, en ellas quedan plasmados los elementos y consideraciones que se han señalado para el diseño; por ejemplo, para la situación 1 se tienen las siguientes:

Conjetura: El uso de instrumentos de construcción no convencionales permite que los estudiantes reconozcan las características y propiedades de una figura geométrica. Dimensión pedagógica: *Las actividades de reproducción de figuras constituyen un escenario ideal para que los estudiantes exploren las diferentes características de una figura geométrica.* Dimensión del contenido: *Los triángulos tienen la característica de ser la figura más simple que contiene ángulos, los cuales son uno de los elementos claves para la determinación de las propiedades de una figura.*

En la segunda trayectoria, se formula en la parte final del trabajo tomando como base los resultados obtenidos en la implementación de la primera (ver abajo, Resultados: micronivel); se presentan algunas generalidades de su diseño.

La trayectoria 2 se compone de tres situaciones, cada una de las cuales responde a una de las categorías que se desprendieron de los análisis locales, se mantiene la relación con algún estándar del pensamiento espacial, y en esta se atiende a las *relaciones* del sistema geométrico (ver penúltima fila, tabla 1). La situación 4 recoge la realización de trazos reorganizadores sobre las figuras como apoyo al surgimiento de nuevas formas de ver; con dichos trazos se puede ver en una figura algo que antes no se veía. La situación 5 pretende apoyar el desarrollo de modificaciones mereológicas sobre las figuras, es decir, avanzar en la comprensión de la aprehensión operatoria. La situación 6 busca el desarrollo de los procesos discursivos de designar, describir y explicar, como formas fundamentales de apoyar el avance hacia la deconstrucción dimensional de figuras.

Resultados

Micronivel

Las situaciones se implementaron en el grado sexto, en el marco de dos trabajos de pregrado de la licenciatura en matemáticas (Bahamón & Bonelo, 2015; Hoyos, 2015) vinculados con el presente trabajo, el autor. Se presenta una síntesis de los resultados de los análisis locales, sobre todo aquellos que encuentran relación con los propósitos del trabajo, se han organizado en dos grandes grupos: los que tienen relación con la actividad de construcción y los que tienen que ver con las actividades de razonamiento y visualización.

Una mirada sobre los datos se hizo atendiendo a los usos dados a los instrumentos, las propiedades de las figuras que se pueden identificar gracias a dicho uso, la relación de estas propiedades y los tipos de instrumentos empleados, el uso de trazos reorganizadores y las posibilidades de avanzar de una visualización icónica a una no icónica, el papel de estos trazos en el desarrollo de la aprehensión operatoria y la deconstrucción dimensional de formas, y algunas consideraciones sobre las restricciones y cuidados en el uso de dichos instrumentos.

Otra mirada, que no se desarrolla en este texto, tiene que ver con los ajustes al diseño que apuntan al refinamiento del mismo, además de los resultados de los estudiantes.

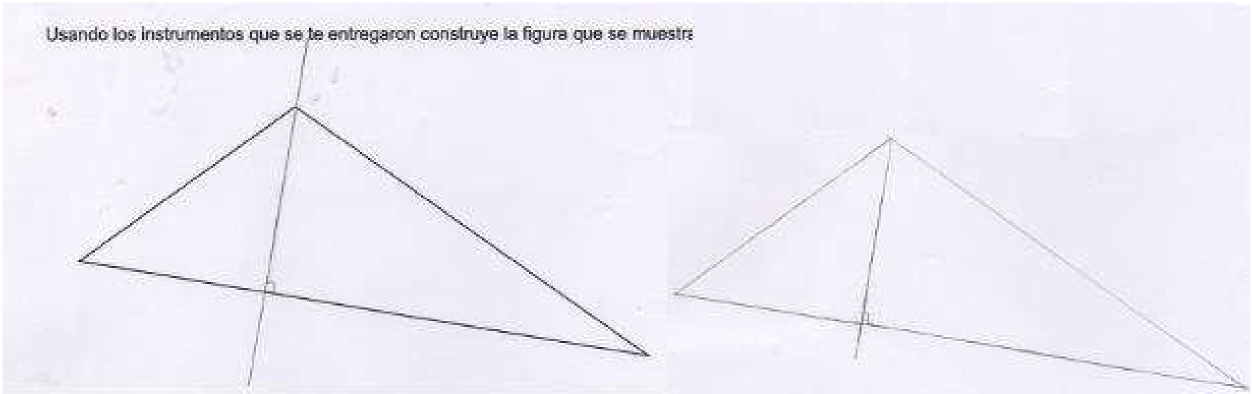


Ilustración 3. Ejemplo de la producción de un estudiante. En la figura dada, el estudiante hizo el trazo de la altura del triángulo; luego, en la derecha, hace el trazo de la base y de la altura, para luego completar las demás partes del triángulo.

Macronivel

Finalizadas las sucesivas intervenciones en clase y sus análisis locales, se inició el análisis retrospectivo que se contempla en la metodología; esto es, se hace una revisión global de los diseños, la implementación y las discusiones y resultados de los análisis locales, con miras a identificar variables que permitan hacer un análisis de las condiciones que produjeron efectos significativos en el diseño y en la implementación. Este análisis además sentó las bases para el diseño de la segunda trayectoria, junto con las actividades de clase respectivas.

Esta revisión permitió identificar las siguientes categorías sobre las cuales se ubicaron la mayoría de las producciones de los estudiantes y que al mismo tiempo daban elementos para atender la pregunta del proyecto y los objetivos del mismo. Así, el análisis permitió que:

1. Se caracterizaran los diferentes usos que los estudiantes dieron a los instrumentos de construcción empleados en las actividades; estos usos se ponen en relación con las características que teóricamente se asignaron a dichos instrumentos.
2. Se determinaran las formas de visualización presentes en el trabajo de los estudiantes, sobre todo el proceso de evolución de lo icónico a lo no icónico.
3. Se identificaran algunos desarrollos en relación con la deconstrucción dimensional de figuras.

Conclusiones

Los resultados obtenidos evidencian las potencialidades de una propuesta de trabajo en clase de geometría basada en el desarrollo de los procesos cognitivos, pues abren una amplia gama de opciones de trabajo con las figuras en geometría; además dejan ver que es posible hacer avanzar a los estudiantes en formas de trabajo que dan cuenta de desarrollos en su conocimiento geométrico al mismo tiempo que construyen formas de actuación y reflexión potentes para la solución de problemas.

El asunto central en los desempeños de los estudiantes es que logran dar el salto dimensional; pasan de ver las figuras de dos dimensiones como unidades figurales, a ver las unidades de una dimensión que las conforman; es decir, ya es claro para la mayoría de ellos que son los trazos de una dimensión los que permiten la construcción de figuras de dimensión superior.

La visualización no icónica se manifiesta sobre todo en el reconocimiento de las subfiguras que surgen al hacer trazos reorganizadores, aunque se debe entender que este reconocimiento no es suficiente para realizar modificaciones mereológicas. Es decir, se logró que los estudiantes hagan los tratamientos que les permiten identificar subfiguras, pero no se establece completamente la aprehensión operatoria.

Los trazos que predominaron en las actividades fueron el trazo de alturas, las cuales siempre llevaban a dividir el primer contorno en otro que contenía triángulos rectángulos. Aparecen diversas formas de lograr dichos trazos. En todos estos casos los trazos nuevos entran a jugar un papel central en el avance desde la visualización icónica a la no icónica.

La visualización no icónica, la que apoya la deconstrucción dimensional, se presentó claramente en las acciones de los estudiantes; aunque restringida a ciertas líneas y no a todo el espectro posible de rectas asociables a una figura. Esto debido a que las tareas que se debían resolver solo requerían de algunas de estas rectas.

Se abre la necesidad de seguir pensando en la relación entre los procesos de visualización y razonamiento, y entre la construcción y razonamiento, pues se ve que los estudiantes presentan serias dificultades para usar un discurso potente en geometría.

Referencias y bibliografía

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. *A. Kelly & R. Lesh (Eds.), Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education,* Cap. 12 (pp. 307 - 326). N Jersey: Lawrence Earlbaum.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative Teaching Experiments through Conjecture-Driven Research Design. *A. Kel & R. Lesh (Eds.), Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Cap. 10 (pp. 231 – 265)

Confrey, J., Maloney, A. P., Nguyen, K. H., Mojica, G., & Myers, M. (2009). Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories. *En Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.), Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*.

Duval, R. (2001). La geometría desde un punto de vista cognitivo. *Boletín de la red en educación matemática*, número 2. Cali. Universidad del Valle.

Duval, R. (2004). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y... una quinta. *M. d. ciencia, Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 159 - 188). Madrid: secretaría general técnica.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales De Didactique Et Sciences Cognitives*. Volume 10 (pp. 5 – 53)

Duval, R. (2010). Los cambios de mirada sobre las figuras. *TEA Tecné, Episteme y Didaxis*. N° 27 (pp. 108 – 129).

Galeano, J. E. (2015). *Diseño de situaciones para el trabajo con figuras geométricas basado en las operaciones cognitivas de construcción, visualización y razonamiento.* Trabajo de Maestría. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias. MEN. Bogotá, Colombia.

O Ensino de Geometria nos Anos Finais do Ensino Fundamental: Uma Análise Epistêmica das Orientações Curriculares Brasileiras

Miriam Ferrazza **Heck**
Doutoranda do Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil
Brasil
miriamfzh@gmail.com
Carmen Teresa **Kaiber**
Docente do Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil
Brasil
carmen_kaiber@hotmail.com

Resumo

Neste trabalho apresenta-se uma análise epistêmica da Base Nacional Comum Curricular brasileira, no que se refere aos conhecimentos geométricos nos anos finais do Ensino Fundamental, parte integrante de uma pesquisa que está sendo desenvolvida em nível de doutorado, que tem como objetivo investigar possibilidades da constituição de um currículo para a Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental, na região da 36ª Coordenadoria Regional de Educação/ RS, tomando como referência o EOS. Teoricamente, a análise proposta se efetivou considerando os constructos advindos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática- EOS. Resultados apontam a presença, de modo equitativo dos componentes situações-problemas, linguagem, regras, argumentos e relações, integrantes da Idoneidade Epistêmica da EOS. Foi possível identificar, também, uma articulação entre as unidades temáticas Geometria e Grandezas e Medidas na indicação do trabalho com situações- problemas.

Palavras chaves: Geometria, Diretrizes Curriculares, Currículo de Matemática, Ensino Fundamental.

Introdução

Os conhecimentos geométricos se constituem em parte importante do currículo da Educação Básica brasileira e estão presentes nas orientações curriculares com espaço e relevância análogos aos demais campos que compõem o currículo da área de Matemática- Aritmética, Álgebra, Estatísitca e Probabilidade- apresentados na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2017). Ainda, aspectos do processo de ensino e aprendizagem da Geometria permanecem no centro de discussões e investigações relacionadas, principalmente, a sua pouca presença como objeto de ensino em sala de aula, suas contribuições ao desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes e a processos de ensino pertinentes, notadamente os que envolvem uma Geometria chamada de experimental e a utilização de recursos advindo das tecnologias digitais. Mais recentemente, pesquisas sobre o trabalho com provas e demonstrações, na Educação Básica, tem recebido atenção.

Nesse contexto, o estudo aqui apresentado é parte de uma pesquisa que está sendo desenvolvida em nível de doutorado e que tem por foco investigar aspectos do desenvolvimento da Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental em escolas públicas da 36ª Coordenadoria Regional de Educação do Estado do Rio Grande do Sul/Brasil tomando como referência os constructos teóricos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática – EOS (Godino, 2011). Particularmente, apresenta-se, aqui, uma análise produzida na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2017) no que se refere a Geometria desenvolvida no nível de ensino mencionado, na perspectiva do enfoque teórico apontado e que vai servir de base para a coleta e análise de dados a ser realizada nas escolas participantes da investigação.

A Base Nacional Comum Curricular foi insituida no ano de 2017 com o objetivo de estabelecer os conteúdos essenciais a serem estudados na Educação Básica brasileira. Trata-se de um documento de caráter normativo, que se estrutura por meio de um conjunto harmônico e progressivo de aprendizagens essenciais a serem desenvolvidos ao longo da escolaridade conforme apontado no documento que a apresenta (Brasil, 2017).

Anteriormente a Base, no período entre os anos de 1998 e 2016, o documento orientador da Educação Básica brasileira eram os Parâmentros Curriculares Nacionais e, de acordo com o documento que apresenta a BNCC do Ensino Fundamental (Brasil, 2017), esses parâmetros e a Lei de Diretrizes e Base- LDB nº 9394/96, serviram de subsídio para a constituição das noções fundantes e estruturantes das orientações curriculares que entraram em vigor no ano de 2017.

Sobre essa questão a BNCC destaca que a orientação para a definição de uma Base Nacional Comum Curricular já estava presente na própria Constituição Federal do Brasil que orientava no seu artigo 210 que “serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar a formação básica comum a respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais” (Brasil *apud* Brasil, 2017 p. 10), apontando para o estabelecimento de um conjunto de ações e conhecimentos básicos a serem desenvolvidos em todo o território brasileiro. Neste sentido, segundo o que consta no documento que apresenta a base é esperado que a BNCC ajude a superar a

> [...] fragmentação das políticas educacionais, enseje o fortalecimento do regime de colaboração entre as três esferas de governo e seja balizadora da qualidade da educação. Assim, para além da garantia de acesso e permanência na escola, é necessário que sistemas, redes e escolas garantam um patamar comum de aprendizagens a todos os estudantes, tarefa para a qual a BNCC é instrumento fundamental. (Brasil, p. 8, 2017)

De acordo com o mencionado documento, dentre as vertentes inovadoras que podem ser observadas na BNCC (Brasil, 2017), é que a mesma refere-se às aprendizagens por competências (definida no documento como a mobilização de conhecimentos, conceitos e procedimentos), habilidades (práticas cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida. Neste sentido, a BNCC indica que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências, possuindo o compromisso com a educação brasileira, com a formação humana integral e com a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, fatores considerados essenciais para serem desenvolvidos no decorrer da Educação Básica.

No que se refere à Matemática do Ensino Fundamental a BNCC (Brasil, 2017) aponta que a mesma precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações, associando essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Desta forma, é esperado que os estudantes desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. Ao mesmo tempo, salienta que é nesta fase que a dedução de algumas propriedades e a elaboração de conjecturas precisa ser estimulada.

Ainda de acordo com o documento, o Ensino Fundamental precisa ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, ou seja, que os alunos precisam ser capazes de desenvolver a capacidade de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma variedade de contextos.

Dentre as competências específicas de Matemática apontadas na BNCC (Brasil, 2017, p.265) para o Ensino Fundamental, destacam-se: a) reconhecer que a Matemática é uma Ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas; b) desenvolver o raciocínio lógico, espírito de investigação e capacidade de produzir argumentos convincentes; c) compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática; d) fazer observações sistemáticas de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes; e) utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais, para modelar e resolver problemas cotidianos, validando estratégias e resultados; f) enfrentar situações-problemas em múltiplos contextos; g) desenvolver e discutir projetos; h) desenvolver trabalhos coletivos no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder questionamentos e na busca de soluções para problemas.

A BNCC apresenta os conhecimentos matemáticos estruturados em cinco unidades temáticas - Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. Em cada unidade temática são apresentados os objetos do conhecimento pertinentes e destacadas as habilidades a serem desenvolvidas. Particularmente, neste trabalho, apresenta-se uma análise produzida em duas unidades temáticas: Geometria e Grandezas e Medidas, considerando que na própria BNCC estas unidades aparecem entrelaçadas ao longo de diferentes situações no decorrer do Ensino Fundamental, embora o foco da análise fosse a Geometria.

Assim, no que se refere a Geometria, a BNCC (Brasil, 2017) enfatiza o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. No caso dos anos finais do Ensino Fundamental, o ensino e aprendizagem envolvem contruções e representações, por meio de indução e o desenvolvimento do raciocínio lógico, intuitivo e hipotético dedutivo, por meio de aplicações e demonstrações, de forma articulada com outros conhecimentos. Neste contexto, destaca-se a importância de representações e comunicação em linguagem matemática (linguagem natural, numérica, simbólica, figural e gráfica), bem como um trabalho que permita desenvolver a capacidade de apresentar justificativas e construir argumentações.

Apresenta-se ainda, a necessidade de desenvolver aprendizagens com o auxílio de diferentes recursos didáticos e materiais, de maneira avdespertar o interesse e apresentar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática integrada a situações que propiciem a reflexão, tomada de decisão e apresentação de justificativas, necessários para a sistematização dos conceitos. Nesse contexto faz-se necessário, também, que os estudantes tenham a oportunidade de desenvolver a capacidade de abstração por meio de reelaboração de situações- problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos.

Já na unidade temática Grandezas e Medidas é proposto o desenvolvimento do estudo de medidas e das suas relações, favorecendo a integração da Matemática com outras áreas do conhecimento. No que se refere aos anos finais do Ensino Fundamental, esta unidade reforça a necessidade de reconhecer comprimento, área, volume, ângulos e as demais grandezas associadas a figuras geométricas de forma a conseguir resolver problemas com o uso das diferentes unidades de medidas.

No que segue, são apresentados considerações sobre EOS, enfoque teórico adotado, com foco na dimensão epistêmica da Idoneidade Didática, os procedimentos metodológicos da investigação e a análise produzida.

Aspectos da Análise Epistêmica no Âmbito do EOS

De acordo com Godino (2011) o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) se propõem analisar as relações entre o pensamento, a linguagem e as situações em que a atividade matemática ocorre. Para o autor, esse processo se constitui como um percurso de reflexão, análise e tentativa de unificar diferentes pressupostos sob aspectos ontológicos, epistemológicos, cognitivos e instrucionais do conhecimento matemático e da instrução matemática essencial para o seu desenvolvimento. Parte de uma visão da Matemática que contempla um triplo aspecto: como atividade de resolução de problemas socialmente compartilhada, como linguagem simbólica e um sistema conceitual logicamente organizado (Godino, 2011).

O EOS é composto por um conjunto de noções teóricas, entre as quais destaca-se, aqui, a Idoneidade Didática, a qual pode ser util na concepção, implementação e avaliação do processo de ensino e aprendizagem da Matemática (Godino, 2011). Ainda, de acordo com o autor, a Idoneidade Didática é definida como a articulação coerente de sistêmica de seis dimensões: epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, emocional e ecológica.

Particulamente a análise aqui apresentada tem como foco a Idoneidade Epistêmica, a qual Godino, Contreras e Font (2006) salientam que está relacioanda, em um processo de estudo, ao grau de representatividade que há, do ponto de vista institucional, entre o significado atribuído a um objeto em relação a sua referência matemática. Refere-se ao conhecimento institucional, o qual é compartilhado dentro das instituições ou comunidades de prática, como se fossem redes de objetos. Orientado pelos pressupostos do EOS a análise epistêmica realizada na BNCC segue as orientações dos componentes da idoneidade epistêmica a qual, de acordo com Godino (2011), propõe cinco elementos advindos das entidades primárias que caracterizam o modelo epistêmico-cognitivo no EOS: situações-problema, linguagem (elementos linguísticos e representacionais), regras (conceitos, definições, procedimentos), argumentos e relações. Tais elementos serão explicitados, na metodologia, a partir de indicadores que são propostos no âmbito do EOS e que foram tomados como referencia para a análise.

Procedimentos Metodológicos

A investigação, na qual a análise aqui apresentada se insere, está sendo conduzida em uma perspectiva qualitativa (Creswell, 2014). Particularmente elementos da análise textual discursiva (Moraes & Galiazzi, 2007), aliados aos constructos teóricos do Enfoque Ontossemiótico, deram o suporte necessário para a mesma. A análise textual discursiva está organizada, de acordo com os autores, em quatro focos, sendo que os três primeiros constituem um ciclo inicial, desmontagem dos textos, estabelecimento de relações, seleção de informações pertinentes e, por fim, o ciclo de análise dos elementos seguindo um processo autorganizado.

No quadro da Figura 1 são colocados em destaque os componentes e indicadores da chamada Ferramenta de Análise Epistêmica, utilizada como referência na análise produzida.

Figura 1- Ferramenta de Análise Epistêmica

Componentes	Indicadores
Situações-problema	a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações; b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).
Linguagem	a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas; b) nível de linguagem adequado aos estudantes; c) propor situações de expressão matemática e interpretação
Regras (definições, proposições, procedimentos)	a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado; c) propõem-se situações onde os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.
Argumentos	a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem; b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que argumentar.
Relações	a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si.

Fonte: Godino (2011, p. 09, traduzido pelos autores).

No que segue são destacados os resultados provenientes da análise produzida no documento que apresenta a Base Nacional Comum Curricular – BNCC no que se refere a Geometria desenvolvida nos anos finais do Ensino Fundamental, como já destacado.

A Geometria nos Anos Finais do Ensino Fundamental: uma Análise Epistêmica da BNCC

Conforme já descrito, a BNCC encontra-se em vigor e estabelece as normativas educativas para as escolas de Educação Básica brasileiras. A análise epistêmica da BNCC apresentada a seguir refere-se aos anos finais do Ensino Fundamental. A Base está organizada por áreas do conhecimento (Aritmética, Álgegra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística), competências específicas das áreas, componentes curriculares e competências específicas de componente. Estas unidades temáticas definem um arranjo dos objetos de conhecimento ao longo do Ensino Fundamental e as habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos dos diferentes contextos escolares.

Segundo o documento que apresenta a BNCC (Brasil, 2017) a mesma estabelece que os conteúdos mínimos apresentados se limitem a 60% dos conteúdos trabalhados em sala de aula, sendo que os outros 40% serão estabelecidos pelos sistemas de ensino estaduais. No que se refere a unidade temática Geometria, a BNCC destaca que a mesma envolve “o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (Brasil, p. 226, 2017). Esse tipo de pensamento, é essencial para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos, sendo que, nessa etapa, a Geometria precisa ser consolidada de forma a promover a ampliação das aprendizagens.

Neste sentido, Fonseca (2009) contribui considerando que o trabalho com a Geometria é uma das melhores oportunidades que existe para aprender a matematizar a realidade, visto que, permite descobertas, construções e manipulações, possibilitando novas investigações. Nessa mesma linha de pensamento, Bulos (2011) enfatiza que a Geometria pode ser o caminho para o desenvolvimento de habilidades e competências necessárias para a resolução dos problemas do nosso cotidiano, visto que o seu entendimento proporciona o desenvolvimento da capacidade de olhar, comparar, medir, predizer, generalizar e abstrair.

No quadro da Figura 2 é apresentada uma síntese da análise produzida nas unidades temáticas Geometria e Grandezas e Medidas dos anos finais do Ensino Fundamental da BNCC, tomando com base os objetos do conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas e apresenta os componentes e indicadores da Análise Epistêmica da Idoneidade Didática. Como já explicitado a unidade temática Grandezas e Medidas foi percebida articulada à Geometria, motivo pelo qual fez parte da análise. No quadro são destacadas evidências da presença, na BNCC, de cada um dos componentes epistêmicos propostos pela Ideoneidade Didática, as quais não são as únicas encontradas ao longo do documento, mas um conjunto que se entendeu representativo dos mesmos.

Figura 2 - Análise Epistêmica da BNCC

Componentes	Evidências- BNCC
Situações-problema	- Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas de comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume. - Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão. - Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas. - Resolver problemas que envolvam objetos equidistantes. - Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ ou triângulos, utilizando a equivalência entre área. - Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas. - Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
Linguagem	- Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono. - Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e a construção de quadriláteros. - Interpretar, descrever e desenhar plantas baixas simples de residências e vistas aéreas. - Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e quadriláteros. - Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro. - Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área.

	- Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
Regras (definições, proposições, procedimentos)	-Reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º. - Reconhecer a rigidez geométrica de triângulos e suas aplicações. - Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos. -Reconhecer, representar e construir, no plano cartesiano, o simétrico de figuras geométricas. - Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.
Argumentos	- Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. - Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos. - Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. - Reconhecer a inclusão e a intersecção de classes.
Relações	- Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides. - Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos e classifica-los em regulares e não regulares. - Identificar características dos quadriláteros e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles. - Verificar relações entre os ângulos formados por retas cortadas por uma transversal. - Estabelecer relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência. - Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. - Identificar características dos triângulos, quadriláteros e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos; - Reconhecer a inclusão e a intersecção de classes.

Fonte: Brasil (2017, p. 299 - 317)

A análise permitiu perceber que as orientações curriculares propostas pela BNCC (Brasil, 2017) apontam para um conjuto significativo de situações-problemas envolvendo diferentes conceitos desenvolvidos ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental. Destaca-se, também, a presença da propostas de situações que articulam diferentes unidades temáticas, no caso a Geometria e Grandezas e Medidas, motivo pelo qual a análise foi realizada contendo essas duas unidades, como já indicado. Fica claro, também, a presença da Aritmética e da Álgebra, uma vez que as situações envolvem tratamentos que, muitas vezes, são de natureza aritmética e algébrica.

No que se refere ao componente epistêmico Linguagem a análise apontou indícios da presença de diversos tipos de expressões matemática manifestadas em linguagem natural, numérica, algébrica, simbólica, figural e gráfica. Destaca-se, ainda, que o componente Regras se faz fortemente presente, sendo que os conteúdos indicados a serem estudados envolvem a construção de conceitos, o desenvolvimento de procedimentos e o entendimento e demonstração de proposições.

O componente epistêmico Argumentos se faz presente, notadamente, nos dois últimos anos do Ensino Fundamental, pois pode-se observar a existência de indicativos para o trabalho com situações que envolvam argumentações, explicações, comprovações e demostrações. Já no que se refere a Relações, a BNCC destaca os objetos geométricos a partir de situações, definições, proposições e procedimentos que se relacionam e se conectam entre si.

Considerações Finais

Embora analisados separadamente, os componentes da Idoneidade Epistêmica, mantêm estreitas relações e articulações o que foi percebido também nas habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental apontadas na BNCC.

A análise permitiu perceber a existência de evidências que apontam para a articulação das unidades temáticas Geometria e Grandezas e Medidas na proposta de situações a serem resolvidas, bem como a presença dos componentes epistêmicos da Idoneidade Didática – situações-problemas, linguagem, regras, argumentos e relações. Considera-se que tais componentes, estão presentes de modo equitativo na BNCC, sendo que argumentações e relações estão mais fortemente presentes nos últimos dois anos do Ensino Fundamental.

Por fim, destaca-se que foi possível perceber um gradual aprofundamento ao longo dos anos, com indicativos de que uma noção que é trabalhada intuitivamente em um ano, nos anos seguintes e retomada e aprofundada buscando uma conceitualização gradual.

Agradecimentos: À Coordenação de Aperfeiçoamento da Pessoal Nível Superior - CAPES que financia a investigação.

Referências

Bulos, A. M. M. *O Ensino de Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.* In: XIII CIAEM-IACME, Recife, 2011.

Brasil. (2017). *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC)- Anos Finais do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

Creswell, J. W. (2014). *Investigação qualitativa e projeto de pesquisa:* escolhendo entre cinco abordagens. Tradução de Sandra Mallmann da Rosa. 3. ed. Porto Alegre: Penso.

Fonseca, M. da C. F. R., et al. (2009). *O ensino da Geometria na Escola Fundamental:* três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica.

Godino, J. D. *Indicadores de la idoneidade didáctica de processos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. In: XIII CIAEM – IACME. **Anais.** Recife, 2011. Disponível em: <https://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf>. Acesso em: 15 out. 2018.

Godino, J. D.; Contreras, Á.; Font, V. *Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática.Universidad de Granada, 2006. Disponível em:<http://www.ugr.es/~jgodino/funcionessemioticas/analisis_procesos_instruccion.pdf>. Acesso em: 25 set. 2018.

Moraes, R. Galiazzi, M. do C. (2007). *Análise Textual Discursiva*. Ijuí, RS: UNIJUI.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Características de la comprensión de niños de 9 años de las relaciones de inclusión entre figuras geométricas

Melania **Bernabeu** Martínez
Facultad de Educación, Universidad de Alicante
España
melania.bernabeu@ua.es
Salvador **Llinares** Ciscar
Facultad de Educación, Universidad de Alicante
España
sllinares@ua.es
Mar **Moreno** Moreno
Facultad de Educación, Universidad de Alicante
España
mmoreno@ua.es

Resumen

Este trabajo pretende identificar características de la relación que los niños/as de 9 años establecen entre la identificación de atributos de una figura y su uso para determinar la pertenencia a una categoría como parte de la comprensión de la clasificación de polígonos. Nos apoyamos en la teoría de los conceptos figurales (Fishbein, 1993), los cambios de anclaje (Duval, 1995) y la coordinación de las aprehensiones (Duval (1998). Participaron 29 alumnos/as de tercero de primaria que respondieron a un cuestionario post experimento de enseñanza. Los resultados indican que la generación de las relaciones de inclusión entre las figuras parece estar vinculada a la habilidad de reconocer el atributo crítico usado para establecer la relación, sin considerar el resto de atributos. Este fenómeno se denomina deconstrucción dimensional (Duval, 2005), el cual se entiende como una manifestación de la aprehensión operativa al ser una forma del procesamiento visual de las figuras geométricas.

Palabras clave: pensamiento geométrico, relaciones de inclusión, atributo crítico, concepto figural, aprehensiones cognitivas, deconstrucción dimensional, cambios de anclaje.

Introducción

En los últimos años se ha empezado a subrayar el papel de los procesos cognitivos en el aprendizaje de la geometría. Este aprendizaje va más allá de la consideración de los contenidos geométricos cómo únicos referentes en la comprensión de las definiciones y de los procesos de clasificación (Sinclair, et al, 2016; Presemeg, 2006). Una aproximación al aprendizaje de la geometría se centra en la construcción gradual de la imagen del concepto basada en el desarrollo de la comprensión y de las formas de razonar con los atributos de las figuras. Esta aproximación asume que los niveles del desarrollo del pensamiento geométrico propuestos por van Hiele admiten grados de razonamiento y diferencias en el discurso de los estudiantes (Clements et al, 1999).

En particular, el foco sobre la relación entre la construcción gradual de la imagen del concepto y la definición del concepto ha puesto de manifiesto cuestiones sobre la relación entre definiciones equivalentes que podemos generar para las figuras geométricas y las relaciones inclusivas que puedan derivarse. Como, por ejemplo, la investigación de Bernabeu, Moreno y Llinares (2017a) sobre la consideración del triángulo equilátero como un tipo de isósceles o la de Popovic (2012) sobre la definición de paralelogramo como un tipo de trapecio (trapezium). Asimismo, el trabajo de Fujita y Jones (2007) explora la relación entre la comprensión de los cuadriláteros y la naturaleza de las clasificaciones inclusivas, mostrando la gran influencia de las figuras prototípicas en el uso de definiciones que generaban relaciones partitivas en el conjunto de figuras (el cuadrado no es un rombo). Estos resultados muestran la relación entre cómo los estudiantes definen y comprenden los polígonos, y la manera en la que pueden generar relaciones de inclusión entre las diferentes clases de figuras geométricas.

Estas investigaciones previas indican que la comprensión del concepto de polígono está vinculada a la manera en la que los estudiantes comprenden las figuras geométricas como elementos de una clase (figuras que comparten un atributo, aunque sean perceptualmente diferentes). En particular, el análisis del papel que desempeña la identificación de algún atributo común para considerar que dos figuras pueden ser parte de un mismo grupo, ha puesto de manifiesto que el control de la componente conceptual sobre la perceptual, en la comprensión de las figuras como elementos de una clase, depende del atributo considerado (Bernabeu, Llinares y Moreno, 2017b).

El objetivo de la investigación es identificar características de la relación que los niños de 9 años establecen entre la identificación de atributos críticos de una figura y su uso para determinar la categoría a la que pertenecen como parte de la comprensión de la clasificación de polígonos.

Marco Teórico

Las referencias teóricas que permiten encuadrar este problema de investigación son la teoría de los conceptos figurales (Fishbein, 1993), los cambios de anclaje (de lo visual a lo discursivo y viceversa) (Duval, 1995) y la coordinación entre la aprehensión perceptual, discursiva y operativa (Duval, 1998). Fischebein (1993) considera que las figuras geométricas tienen simultáneamente propiedades figurales y condiciones conceptuales lógicas. Esto permite observar la influencia de las figuras prototípicas sobre los procesos de razonamiento de los estudiantes, aunque ellos conozcan las definiciones formales de los conceptos. Para caracterizar los procesos de razonamiento de los estudiantes que implican aspectos figurales y conceptuales, Duval (1998, 2018) propone centrar la atención en la coordinación de tipos de aprehensiones: la aprehensión perceptiva (reconocer y nombrar una figura en diferentes formas y orientaciones); la aprehensión discursiva (que permite asociar atributos de las figuras a afirmaciones matemáticas); y la aprehensión operativa (modificaciones de una figura geométrica manteniendo los atributos que la definen). La coordinación entre las aprehensiones nos permite explicar las dificultades de los niños/as en reconocer un atributo común entre dos figuras y que no es compartido por una tercera figura, lo que se considera la base del razonamiento que lleva a la comprensión de los procesos de clasificación. Esta aproximación al análisis de los razonamientos de los niños/as, incide en subrayar la dificultad que tienen algunos de ellos/as en centrarse en alguna subconfiguración o atributo de la figura por el papel predominante de la aprehensión perceptiva. Duval (2005) indica que identificar un atributo de una figura geométrica implica una deconstrucción dimensional, lo que se entiende como un proceso de visualización geométrica que permite el reconocimiento perceptual de una figura en una configuración de unidades figurativas de dimensiones inferiores (lados, vértices, ángulos, …). Por ejemplo, determinar que dos figuras tienen el mismo número de lados supone que el alumno/a centra su atención en el atributo "número de lados", lo que le permitiría descartar los demás atributos.

Reconocer un atributo de una figura geométrica significa determinar las condiciones necesarias para identificar un ejemplo de un concepto geométrico. Al identificar dicho atributo se pone de manifiesto las transformaciones entre las diversas representaciones semióticas (representación visual y verbal) (Duval, 1995). Existen dos tipos de transformaciones: el tratamiento y la conversión (Duval 1995, 2006). Para esta investigación, nos vamos a basar en la conversión, la cual consiste en una transformación de una representación de un registro a otro (cambio de anclaje) sin cambiar los atributos que denota. Este cambio de anclaje puede realizarse bidireccionalmente, de lo discursivo a lo visual (cuando se representa una figura a partir de unas condiciones dadas) o de lo visual a lo discursivo (cuando se reconocen los atributos de una figura y se emiten declaraciones sobre estos) (Duval, 1995). Esta transformación es la que permite considerar una definición dando un conjunto mínimo de atributos.

Por lo tanto, el objetivo de la investigación se concreta en la siguiente pregunta de investigación:

- ¿qué relación existe entre identificar atributos en una figura y usar estos para categorizarla?

Método

Participantes

En esta investigación participaron 29 alumnos/as de tercero de educación primaria (9 años) de una escuela española. Teniendo en cuenta el currículo español de tercero de educación primaria, se diseñó e implementó un experimento de enseñanza de 10 sesiones, cada una de una hora de duración y cuyo objetivo fue desarrollar, entre otros, la capacidad de análisis e identificación de atributos críticos que categorizan a las figuras geométricas (número de lados, concavidad/convexidad, ejes de simetría, etc.). Todos los alumnos contestaron a un cuestionario al finalizar el experimento de enseñanza (post-test).

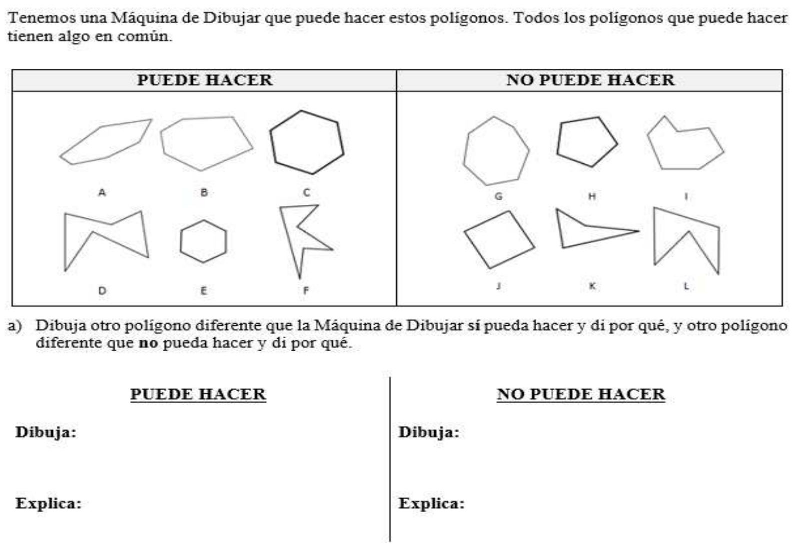
Instrumento

El instrumento de recogida de datos lo constituye el cuestionario diseñado *ad hoc*, formado por 12 ítems, al que respondieron los alumnos al finalizar el experimento de enseñanza. Los ítems (agrupados en 6 tareas) pretendían aportar información sobre la capacidad de:

- Identificación de los atributos críticos de los polígonos (Tarea 1, ítems 1a, 1b, 1c, 1d y 1e). (Figura 1)

Figura 1. Ítem 1.b: identificar atributos críticos de un no-polígono y transformarlo en polígono.

- Identificación del atributo crítico que comparte un grupo de polígonos en relación a otro grupo de polígonos que no lo comparte, y representación de un ejemplo y un no-ejemplo de polígonos del conjunto identificado, tanto a partir de imágenes (registro visual) (Tarea 2: concavidad/convexidad; Tarea 3: número de lados igual a 6/número de lado diferente a 6 (Figura 1); Tarea 4a: polígonos con un eje de simetría/ningún eje de simetría), como a partir de una condición dada (registro verbal) (Tarea 6a: representa tres cuadriláteros con dos lados paralelos/tres cuadriláteros que no cumplan esa condición).


Tenemos una Máquina de Dibujar que puede hacer estos polígonos. Todos los polígonos que puede hacer tienen algo en común.

PUEDE HACER	NO PUEDE HACER
A B C D E F	G H I J K L

a) Dibuja otro polígono diferente que la Máquina de Dibujar sí pueda hacer y di por qué, y otro polígono diferente que **no** pueda hacer y di por qué.

PUEDE HACER	NO PUEDE HACER
Dibuja:	**Dibuja:**
Explica:	**Explica:**

Figura 2. Ítem 3: identificar el atributo crítico de un conjunto de figuras, explicar y representar ejemplos y no-ejemplos.

- Reconocimiento de la relación entre el atributo crítico de un grupo de figuras y una figura dada (Tarea 4b: Si un rombo -2 ejes de simetría-, pertenece al grupo de los polígonos con un eje de simetría o al de los que no tienen eje de simetría; Tarea 5: si un triángulo equilátero -tres lados iguales- pertenece o no al grupo de los triángulos con dos lados iguales, o al de los triángulos sin lados iguales) o un registro verbal y una figura dada (Tarea 6b: si un cuadrado -lados paralelos dos a dos- pertenece al grupo de los cuadriláteros con 2 lados paralelos).

Teniendo en cuenta el objetivo de esta investigación, hemos tenido en cuenta 7 ítems, los correspondientes a las tareas de la 2 a la 6. Todos ellos nos permiten observar la conversión entre el registro visual y verbal que se produce cuando los niños/as tienen que explicar los atributos de una figura, establecer relaciones entre estos o representar una figura a partir de unos criterios dados. Asimismo, la secuencia de tareas del cuestionario permite obtener información sobre el proceso de deconstrucción dimensional (Duval, 2005).

Análisis

Se analizaron un total de 203 respuestas procedentes de los 7 ítems del cuestionario. Poniendo nuestra atención en cómo los niños/as usaban el registro verbal para describir la resolución de la tarea y cómo representaban según las condiciones dadas. A partir del sistema de códigos, construimos categorías para obtener las frecuencias de las tareas e identificar los atributos que generan mayores dificultades. Por lo tanto, conocer cómo es la comprensión de las figuras geométricas y las relaciones que se establecen para categorizar las figuras.

Resultados

Los resultados los presentamos en dos secciones: (i) identificación atributos críticos que comparte un grupo de polígonos y (ii) reconocimiento de la relación entre el atributo crítico de un grupo de figuras/definición y la figura dada.

Identificación atributos críticos que comparte un grupo de polígonos

Los atributos considerados en los ítems 2, 3 y 4a, respectivamente, fueron la concavidad, el número de lados igual a 6, y la simetría de los polígonos (Tabla 1). El atributo más difícil de reconocer fue la simetría de los polígonos (ítem 4a), ya que 21 de los 29 niños/as no identificaron este atributo crítico en el grupo de polígonos. Mientras que el atributo más fácil de reconocer fue la concavidad (Figura 3).

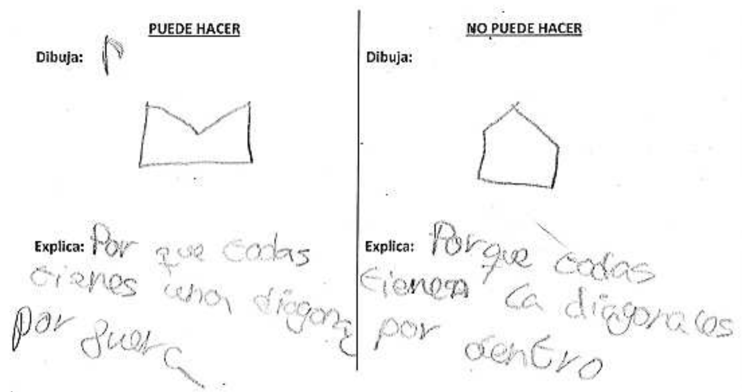


Figura 3. Ítem 2: respuesta G2A4

Tabla 1

Identificación de atributos críticos (n=29).

	No reconocen	Reconocen	TOTAL
Ítem 2: concavidad – convexidad	16	13	29
Ítem 3: número de lados igual a 6	17	12	29
Ítem 4a: Figuras simétricas	21	8	29

En relación a la tarea de identificar atributos críticos de la definición que permitieran representar ejemplos y no-ejemplos (Ítem 6a), tan solo 6 de los 29 alumnos/as fueron capaces de representar correctamente tres ejemplos de cuadriláteros con dos lados paralelos y tres no-ejemplos de cuadriláteros que no cumplieran estos atributos. 11 alumnos/as representaron correctamente tres ejemplos de cuadriláteros con dos lados paralelos, pero incorrectamente los no-ejemplos, pues representaron tres no-polígonos o tres no-cuadriláteros. El resto de los alumnos (n=12) no supieron identificar el atributo crítico que les permitiera representar los ejemplos y no-ejemplos o no representaron nada.

Reconocimiento de la relación entre el atributo crítico de un grupo de figuras/definición y la figura dada

Ningún alumno supo identificar en el ítem 4b la relación entre la simetría de la figura representada (un rombo con dos ejes de simetría) y el conjunto de polígonos con el atributo crítico “tener un eje de simetría” y “no tener ejes de simetría”.

Las frecuencias obtenidas a partir de las relaciones de inclusión, tanto en el conjunto de los triángulos como en el de los cuadriláteros, fueron inferiores a las tareas de identificar el atributo común del conjunto de polígonos (Tabla 2).

Tabla 2

Reconocimiento de relaciones de inclusión

	No reconocen relación de inclusión		Reconocen relación de inclusión	TOTAL
	Explicación no coherente	Reconocen relaciones partitivas		
Ítem 4b: Rombo	29	-	-	29
Ítem 5. Triángulo equilátero	18	5	6	29
Ítem 6b. Cuadrado	19	-	10	29

En el ítem 5, de los 11 niños/as que reconocen relaciones entre los triángulos, 5 de ellos reflejan un conocimiento de la relación partitiva que implica la separación de los triángulos isósceles y de los triángulos equiláteros (Figura 4); mientras que los otros 6 establecieron relaciones de inclusión entre los triángulos, considerando el triángulo de tres lados iguales como perteneciente a la categoría de triángulos con dos lados iguales.

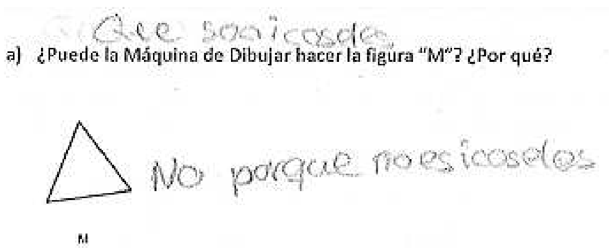


Figura 4. Ítem 5: respuesta de relación partitiva de G2A5

En cambio, en el ítem 6b los 10 alumnos/as que realizaron relaciones entre las figuras fueron de carácter inclusivo, considerando el paralelogramo como un tipo de trapecio (cuadrilátero con dos lados paralelos) (Figura 5).

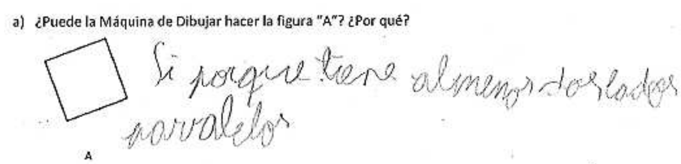


Figura 5. Ítem 6b: respuesta de relación inclusiva de G2A18

Discusión

El objetivo de esta investigación era identificar características de la relación que los niños de 9 años establecían entre la identificación de atributos críticos de una figura y su uso para determinar la categoría a la que pertenecían como parte de la comprensión de la clasificación de polígonos. Las frecuencias obtenidas en los resultados han mostrado que la mayoría de los alumnos/as todavía no han desarrollado las habilidades (aprehensiones) (Duval, 1995) para identificar los atributos críticos de las figuras geométricas (deconstrucción dimensional) (Duval, 2005) que permitan categorizar las figuras y así, establecer relaciones de inclusividad. De esta manera, la relación entre identificar un atributo crítico y usarlo para determinar la relación de inclusividad de las figuras, parece depender de cómo los niños/as comprenden las condiciones conceptuales que componen la imagen del concepto, que Fischbein (1993) denominó el concepto figural, y de cómo combinan las aprehensiones (perceptiva, discursiva y operativa) (Duval, 1998).

Por ejemplo, la mayor dificultad que se presenta en el reconocimiento del atributo común recae sobre el atributo referente a la simetría de las figuras (ítem 4), que implica realizar una aprehensión operativa, aparte de la perceptual y discursiva, imaginándose un eje de simetría y doblando la figura para comprobar que coinciden sus dos mitades. Por otro lado, las dificultades que se presentan en las tareas de relacionar figures geométricas recae sobre la habilidad de centrarse en un atributo crítico (el que establece la relación) sin considerar el resto de los atributos. El desarrollo de esta habilidad que Duval (2005) denomina deconstrucción dimensional parece clave en la generación de las relaciones inclusivas entre las figuras.

Otro aspecto que ha puesto de manifiesto nuestros resultados son el papel de la expresión verbal en describir el proceso de deconstrucción dimensional como paso de la aprehensión perceptiva a la aprehensión operativa. Esta característica se ha puesto de manifiesto cuando algunos estudiantes intentaban explicar por qué un cuadrado puede ser considerado un cuadrilátero con dos lados paralelos generando una explicación en la que no intervenía el atributo crítico (dos lados paralelos). Este resultado muestra en qué medida el desarrollo del lenguaje geométrico puede ayudar al desarrollo del pensamiento geométrico.

El hecho de que durante el módulo de enseñanza se aportara a los alumnos/as definiciones que implicaban relaciones inclusivas entre las figuras favoreció que los alumnos establecieran relaciones inclusivas en los ítems 5 y 6. Otro aspecto clave en los resultados del post-test son las características de las tareas con relación a los cambios de anclaje que se precisan para resolverlas. Por ejemplo, el ítem 5 presenta tres cambios de anclaje: identificar el atributo común que compartía cada grupo de figuras (cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo), establecer la relación entre dicho atributo y la figura mostrada (cambio de anclaje de lo discursivo a lo visual) y finalmente, explicar la relación entre las figuras (cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo); mientras que el ítem 6 solo presenta dos cambios de anclaje: reconocer los atributos de la definición y compararlos con la representación (cambio de anclaje de lo discursivo a lo visual) y explicar la relación entre la definición y el paralelogramo (cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo), que coinciden con los dos últimos del ítem 5. Comparando ambos resultados, parece que el cambio de anclaje más complejo es el primero, pasar de lo visual a lo discursivo: reconocer el atributo crítico del conjunto de figuras y relacionarlo con el concepto figural (Duval, 1995; Fischbein, 1993).

Para finalizar, el hecho que 5 alumnos/as realizaran una relación partitiva en el ítem 5 podría estar relacionado con la influencia de las figuras prototípicas (triángulo equilátero) como ya se ha comprobado en otras investigaciones (Fujita y Jones, 2007). Por lo que intuimos que las figuras prototípicas siguen siendo los ejemplos visuales de los conceptos geométricos, ya que los alumnos/as todavía no comprenden las condiciones conceptuales que forman parte del concepto figural (Fischbein, 1993).

Reconocimiento

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo de la Conselleria d’Educació, Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana) (PROMETEO/2017/135).

Referencias y bibliografía

Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M. (2017a). *Desarrollo de la comprensión del triángulo en Educación Primaria.* Comunicación presentada en el II CEMACYC-Congreso de Educación matemática de América Central y el Caribe, Cali, Colombia, Octubre-Noviembre.

Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M. (2017b). Características de la comprensión de figuras geométricas en estudiantes de 6 a 12 años. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 157-166). Zaragoza: SEIEM.

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2018). Comprensión del concepto de polígono en niños/as de 9 años. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 151-160). Gijón: SEIEM.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 192–212.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century: an ICMI study* (pp. 37–52). Dordrecht: Kluwer

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Duval, R. (2018). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations.* London: Springer.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24,* 139-162

Presmeg, N. (2006). Research on visualisation in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp.205–304). Rotterdam: Sense Publishers.

Popovic, G. (2012). Who is this trapezoid, anyway? *Mathematics Teaching in the Middle School, 18*(4), 196–199.

Sinclair, N., Bartolini-Bussi, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM.Mathematics Education, 48*, 691-719.

Trayectorias de aprendizaje de la visualización espacial con incorporación de hipótesis sobre género

William Andrey **Suárez** Moya
Colegio CAFAM
Colombia
wasuarezm@correo.udistrital.edu.co

Resumen

El género como construcción social, vincula prácticas que posibilitan el aprendizaje del espacio y el desarrollo de habilidades como la visualización espacial. El presente trabajo se constituye a partir de referentes teóricos sobre habilidades de visualización espacial y género en el aula, los cuales son tomados como hipótesis para diseñar una ruta de desarrollo de la visualización espacial en niños y en niñas, denominándose Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, la cual resulta en cinco Trayectorias Reales de Aprendizaje, validando parcialmente las hipótesis formuladas, y destacando el desarrollo de la visualización espacial en los niños y niñas, sujetos de la investigación.

Palabras clave: Visualización espacial, Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje, Investigación de Diseño, Género

Género y visualización espacial

El género ha sido un componente que ha cobrado importancia en el contexto de la educación en Colombia en las dos últimas décadas, el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) y el Ministerio de Educación de Colombia (MEN), (véase ICFES, 2012, 2013; MEN, 1997) documentan y analizan los resultados de desempeños entre niños y niñas en pruebas internacionales como el Estudio Internacional de Progreso en Comprensión Lectora (PIRLS) y el Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS), y pruebas nacionales en Colombia como SABER en el área de matemáticas. En el análisis de TIMSS se identifican diferencias de género en el desempeño en matemáticas de niños y niñas en problemas relacionados con "manejar mentalmente figuras tridimensionales y para reconocer figuras congruentes o semejantes, manejar o utilizar relaciones, en el conocimiento de algunas características de los cuadriláteros, y para manejar rotaciones en el plano" (León, 2012, p. 106).

Linn y Petersen, citados en ICFES (2013) refieren que una de las grandes diferencias de género en el aprendizaje de las matemáticas de niños y niñas, está asociada con la ventaja de los hombres en algunas habilidades espaciales. Otros autores afirman que no hay diferencias significativas en habilidades visuales, pero si diferencias cualitativas en las estrategias de procesamiento y estructuración empleadas por hombres y mujeres durante la resolución de actividades (Fennema, 2000; Gorgorio 1998; Rubio, 2000). Clements y Sarama (2009) mencionan que las niñas se pueden ver marginadas en su progresión en las matemáticas debido a la falta de atención por parte de los docentes en el desarrollo de habilidades espaciales en el área de geometría, apoyando esta tesis, se encuentran los trabajos de Casey, Nuttall y Pezaris (2001). En las investigaciones de Clements y Battista (1992), se estructuran tareas que tienden a disminuir las diferencias de género que los autores vinculan a factores de tipo cultural y/o biológico.

Sin embargo, la caracterización para género en estos trabajos citados y otros revisados en el marco del trabajo de investigación de Suárez (2017), se reduce a un sistema binario de sexo/género, en el que el sexo de la hembra va unido al género mujer, y el sexo del macho al género hombre. Por tanto, este sistema no contempla los cuerpos que no corresponden con estos sexos o los cuerpos que asumen un género no vinculado al sexo, denominándose bajo la categoría de identidad de género. Por cuanto más allá del sistema binario establecido, el género es una construcción social en la que se vinculan los cuerpos que expresan características biológicas, psicológicas, sociales y culturales (Suárez, 2017).

El género en tanto construcción social, vincula prácticas que dan forma a como los estudiantes visualizan los objetos, conceptos y procesos dentro de la actividad cognitiva. Estas prácticas se hacen evidentes en las acciones y producciones de los niños y niñas en el aula, por cuanto el interés por diseñar rutas que contemplen el género de los estudiantes y posibiliten el desarrollo de habilidades como la visualización espacial aprovechando prácticas como juegos y quehaceres. Las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA), son la mejor opción para diseñar estas rutas; como mencionan Clements y Sarama (2009), las THA, "ayudan a los maestros a entender la variedad de niveles de conocimiento y de pensamiento de sus clases y de los individuos dentro de ellas, como fundamentales para satisfacer las necesidades de todos los niños" (p.16).

Por su parte, en la investigación, estudiantes con sexo de hembra se reconocieron como mujeres y estudiantes con sexo de macho se reconocieron como hombres, sin que apareciera otra denominación que no correspondiera a estas identidades.

Procesos que desarrollan la visualización espacial

El desarrollo de la visualización espacial exige que se deba producir un dinamismo en las imágenes mentales. El desarrollo temprano del pensamiento espacial y de la visualización espacial da cuenta que las imágenes mentales de los niños y niñas inicialmente son estáticas; por tanto, el promover tareas que posibiliten el desarrollo del proceso de transformación de imágenes mentales o dinamizar imágenes mentales es fundamental.

Desde el trabajo de la Trayectoria de Aprendizaje de la Visualización Espacial e Imágenes de Clements y Sarama (2009), se determina que los movimientos de deslizar, voltear y girar son los más fáciles para que los niños y niñas comiencen con el desarrollo de la transformación de la imagen mental. La dirección del movimiento incide en la dificultad de transformar la imagen; pero dependiendo de la tarea instruccional esta dificultad podrá solucionarse.

Haciendo énfasis sobre los movimientos de deslizar, voltear y girar, los cuales serán objeto en la THA diseñada, en adelante son considerados procesos condicionados al desarrollo de la transformación de imágenes en la visualización espacial.

La THA permite destacar aspectos en el desarrollo de la visualización espacial como la importancia del cuerpo en actividades que promueven el desarrollo de la visualización espacial en niñas (Clements & Sarama, 2009).

De esta manera, se consolidó la THA de la visualización espacial, que tuvo seis niveles de pensamiento (Figura 1). En cada nivel se vinculó una hipótesis acerca de los procesos que desarrollan la visualización espacial.

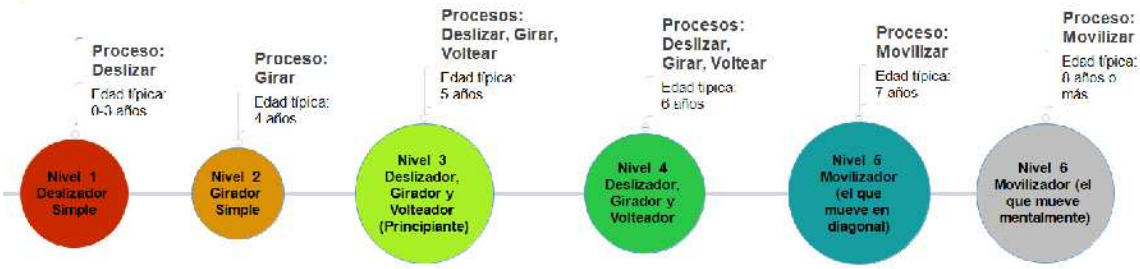


Figura 1. Niveles de pensamiento de la THA de la visualización espacial en niños y en niñas. Fuente propia

Diseño metodológico de la investigación

La metodología de la Investigación de Diseño resultó indicada para este trabajo puesto que al mismo tiempo que se estudia el proceso de aprendizaje, se analizan los modos por los cuales el aprendizaje se sustenta y se organiza (Cobb & Gravemeijer, 2008). Así mismo, la Investigación de Diseño permite la comprobación de los supuestos del modelo teórico, transformados en hipótesis, de acuerdo a la validez que evidencian según el análisis de los datos obtenidos (Confrey, 2006; Steffe & Thompson, 2000). En el marco de la Investigación de Diseño se encuentran los Experimentos de Enseñanza, los cuales permitieron determinar la eficacia del diseño de la THA que vinculó hipótesis sobre bases teóricas que asocian estudios de género en el desarrollo de la visualización espacial de los niños y niñas. Para el diseño de la THA se consideraron tres componentes, a) Las metas de aprendizaje en el desarrollo de la visualización espacial; b) La ruta de desarrollo constituida por los niveles de pensamiento; c) Un conjunto de actividades instruccionales (Clements & Sarama, 2009).

Entre las actividades instruccionales se encuentran las siguientes:

Tabla 1

Actividades instruccionales de la THA.

Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5	Nivel 6
Organización el aula	Pentominós	Doblar, Limpiar y barrer	Teselados	Reflejos	Poleas
Construyendo siluetas con imaginación	Tangram (Tablet)	Logimax	Origami	Mosaicos geométricos	Razonamiento abstracto
El recorrido del orden	Match		Cubos-soma	Los ángulos del reloj	Que ficha le falta al rompecabezas
Camino a la casa					

A partir del ciclo de enseñanza propuesto por Simon y Tzur (2004), se hizo un ajuste para las fases metodológicas de la investigación (Figura 2):

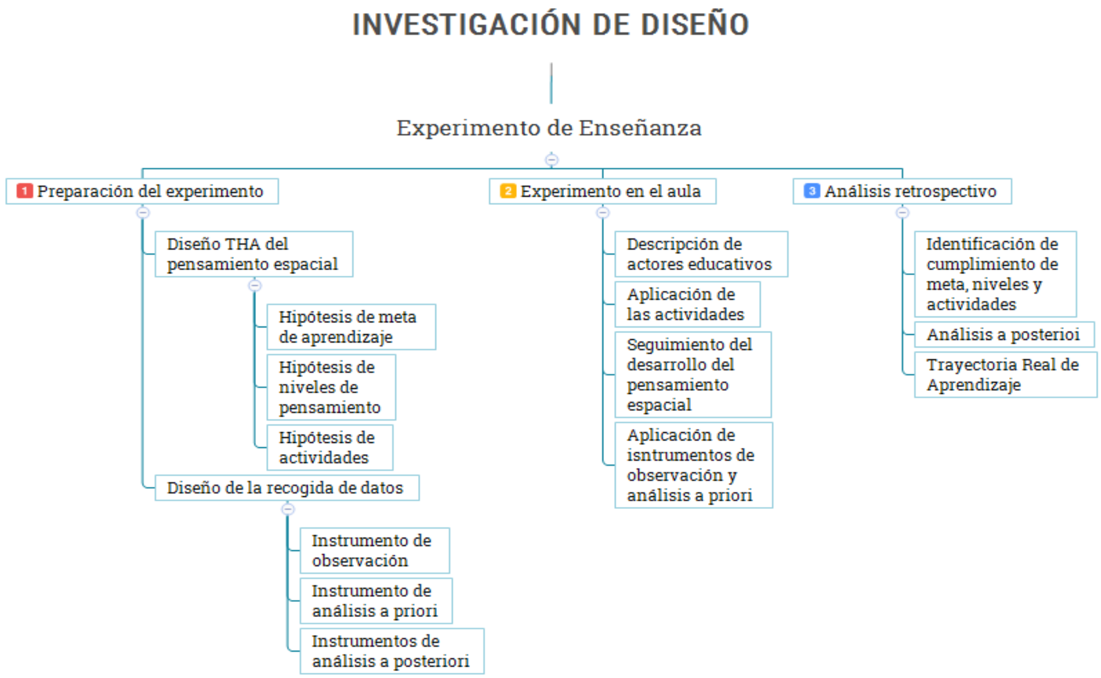


Figura 2. Cuadro metodológico. Fuente propia

Análisis de verificación de hipótesis sobre visualización espacial

Teniendo en cuenta las hipótesis del nivel y el descriptor del nivel, se verificó el cumplimiento de estas hipótesis por medio de los indicadores de nivel. En la Tabla 2 se muestra el ejemplo para el Nivel 2 de pensamiento: Girador Simple, en el que se describen las hipótesis de nivel, el descriptor del nivel y los indicadores del nivel:

Tabla 2.

Hipótesis, descriptor e indicadores del nivel 2 de la visualización espacial.

Hipótesis del nivel	• Los niños de cuatro a cinco años de edad pueden hacer giros si tienen tareas simples y claves, como tener una marca clara en el borde de una figura y no una forma "girada" como distractor (Clements & Sarama, 2009). • Los niños y niñas de entre cuatro a ocho años, no muestran diferencias de género en tareas que involucran movimientos con deslizar y girar (Moyer, 1978).
Descriptor del nivel	Gira objetos en tareas fáciles
Indicadores del nivel	• Replica patrones de bloques. • Arma rompecabezas simples. • Anticipa mentalmente los movimientos.

Para dar cuenta del cumplimiento de la hipótesis de nivel 2, donde el proceso de girar se identifica con la realización de tareas simples y claves, se asocia el descriptor de nivel en estos términos, gira objetos en tareas fáciles. Posteriormente, se asociaron los indicadores de nivel con este descriptor señalando tres tareas simples asociadas a este movimiento. Con ello se verificaron estos indicadores en las actividades, tal y como se muestra en la Tabla 3:

Tabla 3.

Verificación de las hipótesis para el nivel 2 de la visualización espacial.

<table>
<tr><td>Cumplimiento del indicador</td><td>Evidencia</td></tr>
<tr><td>En cuanto al primer indicador del nivel, arma rompecabezas simples.
En la actividad del tangram en la tablet, los estudiantes giran las fichas del juego (1) con el fin de encajarlas en la configuración de la silueta de la figura que muestra la tablet.</td><td> </td></tr>
<tr><td colspan="2">Esta tarea resulta fácil puesto que la silueta de la figura a armar estaba presente para encajar las fichas.</td></tr>
<tr><td>En cuanto al segundo indicador del nivel, replica patrones de bloques.
En la actividad del pentominó, los estudiantes giran las fichas del juego (1) con el fin de encajarlas en la configuración de un rectángulo.</td><td> </td></tr>
<tr><td colspan="2">Esta tarea resulta ser fácil puesto que en la instrucción de la actividad se mencionaba que no se debía utilizar necesariamente todas las fichas del juego para armar el rectángulo.</td></tr>
<tr><td>En cuanto al tercer indicador del nivel, anticipa mentalmente los movimientos.
En la actividad de match, los estudiantes anticipaban sus movimientos mentalmente antes de realizarlos (1), esto se observó al momento en el que se iba a dar giros al hula hula, a la cuerda y sobre la colchoneta.</td><td> </td></tr>
<tr><td colspan="2">En esta actividad se tuvo en cuenta la experiencia previa en el movimiento del cuerpo, particularmente en los juegos del hula hula, lazo, pirinola, yoyo, lanzamiento de disco y botes sobre colchoneta, donde se exigía cierta precisión, fuerza y ángulo en los movimientos.</td></tr>
</table>

Análisis de progresión de niveles de la THA

A partir del cumplimiento parcial y total de las hipótesis formuladas en el diseño de la THA, a continuación, se muestra el progreso de una estudiante en cuatro niveles de la THA tomando el proceso de Girar (Tabla 4). Además, se describen maneras en que los procesos se produjeron a partir de la intervención del cuerpo.

Tabla 4.

Análisis de progresión de niveles de la THA de la visualización espacial.

NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
Se identificaron dos maneras de girar en tres actividades de este nivel: Girando sus manos sobre las fichas del tangram para llevarlas	Se identificaron tres maneras de girar en tres actividades de este nivel: Girando sus manos sobre las fichas del	Se identificaron dos maneras de girar en una actividad de este nivel: Girando sus manos sobre el trapo para	Se identificó una manera de girar en una actividad de este nivel: Girando sus sobre el papel para hacer

NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
de una ubicación a otra (1). Girando la regla con una mano, y girando la mesa con una mano mientras la otra mano está fija (2). (1)  (2) 	pentominó para encajarlas (1). Moviendo el dedo sobre la superficie de la Tablet haciendo arcos para girar las fichas del, y sobre la superficie del hula hula (2). (1)  (2) 	limpiar la superficie de la mesa (1). Dando giros con su cuerpo mientras camina para barrer el piso (2). (1)  (2) 	pliegues sobre la mesa (1). (1) 

A partir de lo anterior, se constituyen los resultados del análisis de la progresión de niveles de la THA con la representación gráfica para los procesos. En el gráfico se presentan las maneras en las que el proceso Girar se dio en cada estudiante, mostrando el número de incidencias que tuvo tal manera en los niveles de la THA (Figura 3).

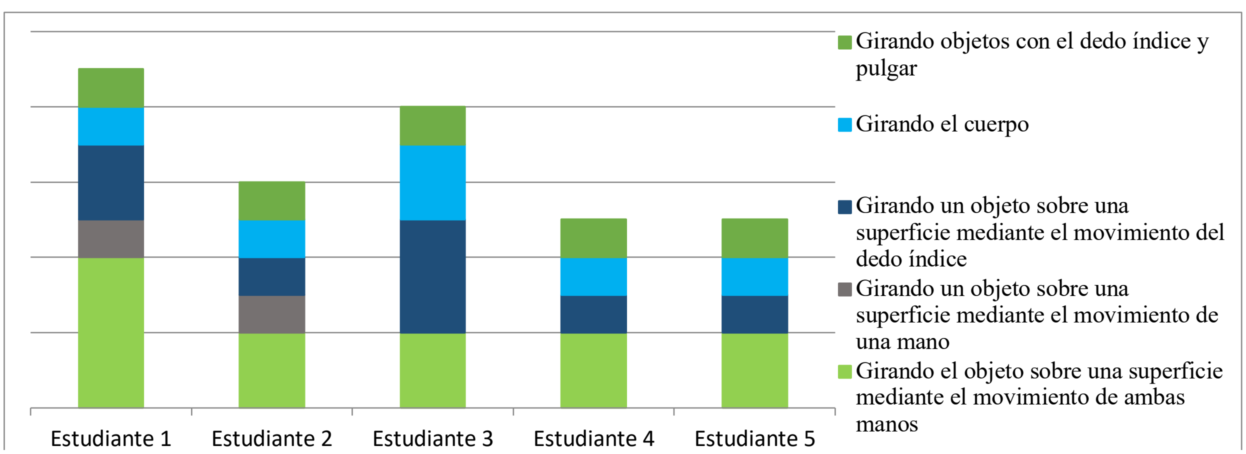


Figura 3. Proceso de girar en los estudiantes durante la THA. Fuente propia

Los resultados de la THA dan cuenta de cinco Trayectorias Reales de Aprendizaje (TRA) (Figura 4), cada una asociada a cada estudiante, y que muestran la ruta que tuvieron los niños y las niñas durante la aplicación de las actividades para el desarrollo de la visualización espacial.

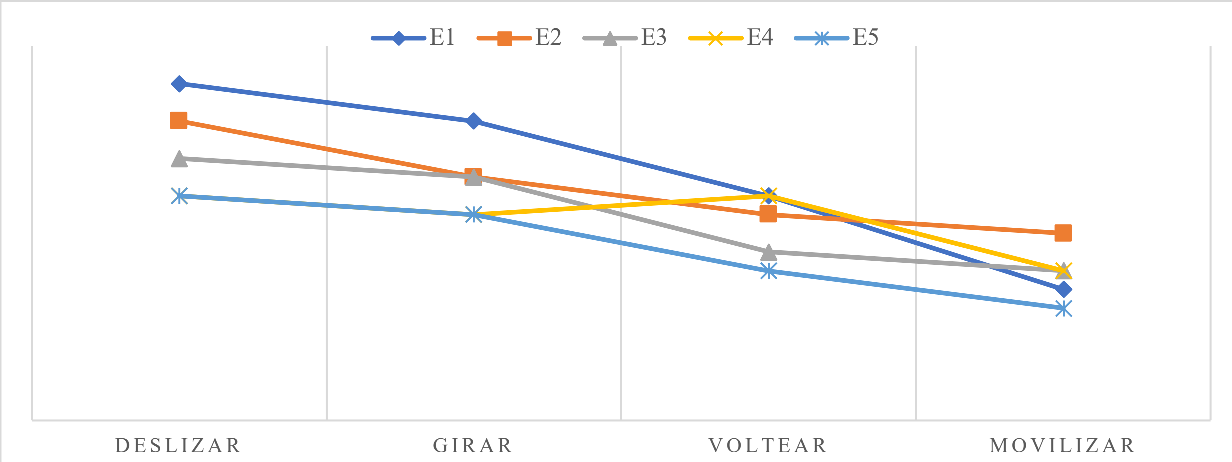


Figura 4. Resultados de las cinco TRA de la visualización espacial vinculadas al género. Fuente propia

Conclusiones

En la revisión de trabajos sobre estudios de género y desarrollo de la visualización espacial, se identificaron hipótesis para la meta de aprendizaje y cuatro niveles de pensamiento en las que se describen diferencias de género en las habilidades espaciales de estudiantes al momento de realizar tareas que involucran rotación mental, por lo que se diseñaron diferentes actividades que promovieron el desarrollo de la visualización espacial en los niños y niñas.

El diseño de varias actividades en cada nivel de pensamiento posibilitó el desarrollo de la visualización espacial por diferentes entradas en los niños y niñas. Evidencia de ello se encuentra en los resultados de la progresión de niveles de pensamiento, en donde los niños y niñas avanzaron en cada nivel a partir de la verificación de los procesos que desarrollan la visualización espacial afianzando diferentes maneras en las que se puede dar determinado proceso. Por cuanto sin importar la favorabilidad de una determinada actividad al género del estudiante, lo fundamental fue posibilitar el progreso de los niños y niñas por los niveles de pensamiento.

Las maneras en las que cada niño y niña desarrollaba la actividad, dan cuenta a un arraigo de prácticas socioculturales en las que los niños y niñas han vivido, por cuanto actividades relacionadas con juegos infantiles y quehaceres de la casa dieron evidencia en la progresión en los procesos de la visualización espacial de manera distinta. Las experiencias previas extraescolares con este tipo de actividades permiten el avance de los estudiantes entre los niveles de pensamiento.

Reconocimiento

Este trabajo hace parte del proyecto de la Maestría en Educación: Un estudio de género en Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje de la Visualización Espacial, el cual está vinculado a AIDETC (Programa Nacional Colciencias código 1419-6614-44765), y al proyecto internacional ACACIA (código 561754-EPP-1-2015-1-COEPPKA2-CBHE-JP) cofinanciado por el Programa Erasmus+ de la Unión Europea.

Referencias bibliográficas

Casey, M., Nutall, R., & Pezaris, E. (2001). Spatial–mechanical reasoning skills versus mathematics self-confidence as mediators of gender differences on mathematics subtests using cross national gender-based items. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(10), 28–57

Clements, D., & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. En D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 34-67). New York: NCTM.

Clements, D., & Sarama, J. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research*. Nueva York: Routledge.

Cobb, P, & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to Support and Understand Learning Processes. (A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek, Edits.) *Handbook of Design Research Methods in Education: Innovations in Science, Technology, Engineering, and Mathematics Learning and Teaching*, 68 - 95.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. (R. K. Sawyer, Ed.) Nueva York: Cambridge University Press.

Fennema, E. (2000). Gender Equity for Mathematics and Science. *Office of Educational Research and Improvement, 12*.

Gorgorió, N. (1998). *Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation.*

ICFES (2012). *Colombia en PIRLS 2011*. Bogotá. ICFES.

ICFES (2013). *Análisis diferencias de género en desempeño de estudiantes colombianos en matemáticas y lenguaje*. Bogotá. ICFES.

León, O. (2012). Cien años de reformas y un problema actual en la enseñanza de la geometría. En L. Camargo (Ed.), *Investigaciones en Educación Geométrica*. Bogotá, D.C.: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 30-40.

MEN (1997). *Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas – TIMSS* – Colombia. Bogotá. MEN.

Moyer, J. C. (1978). The relationship between the mathematical structure of Euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive structures of young children. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*(2), 83-92.

Rubio, M. (2000). Género y diferencias cognitivas en la solución de problemas de razonamiento espacial. *Tecné, Episteme Y Didaxis: Revista de La Facultad de Ciencia Y Tecnología, 8*, 25–30.

Simon, M, & Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91 - 104.

Suárez, W. (2017). *Un estudio género en Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje de la visualización espacial*. Tesis de Maestría. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 267-307.

Sistematizando "La vuelta al mundo con la geometría" hacia el Mnecraft

Camilo **Arévalo** Vanegas
Gimnasio de Los Cerros, Universidad Distrital
Colombia
camiloarevaloul@gmail.com
Oscar Javier **González**
IED Silveria Espinosa de Rendón, Universidad Distrital
Colombia
oscarmateud@gmail.com
Mónica Andrea **Díaz** Guarín
IED Fernando González Ochoa, Universidad Distrital
Colombia
andreadg_323@hotmail.com

Resumen

Se pretende dar a conocer una experiencia de aula realizada en el Gimnasio de los Cerros durante las clases de geometría con miras a fortalecer el pensamiento espacial en estudiantes de tercero de primaria. Para ello se establece una propuesta que está fundamentada desde los aportes teóricos de Dickson (1991), al hablar del estudio de los objetos tridimensionales, analizando sus propiedades y características físico-visuales para proporcionar experiencias tangibles del mundo; reconociendo la representación bidimensional del mundo físico que nos rodea a través de material manipulativo-tangible y grafico-textual Godino (2006). Ésta metodología de enseñanza se enmarca en una situación problema fundamental Brousseau (1986), en donde los estudiantes deberán viajar por cinco países, para reconocer cuatro solidos relacionados con las obras y maravillas de cada país, finalizando con una obra de arte que relaciona los sólidos y a partir de la sistematización de dicha experiencia trabajar con el mundo minecraft

Palabras clave: sistematización, pensamiento espacial, recursos, situaciones didácticas.

Planteamiento del problema

Se establece una propuesta que tiene objetivo reivindicar al aula de matemáticas como un espacio de experiencias significativas para el estudiante, desde el uso de recursos didácticos que faciliten la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la educación primaria desde la propuesta de Godino (2006) y su clasificación de los materiales didácticos en manipulativos tangibles, grafico textuales y ayudas al estudio; por tanto se pretende valorar un análisis sobre las funciones, ayudas y características que brindan dichos materiales en la adquisición de nuevos conocimientos geométricos en los estudiantes, desde el trabajo con su entorno y la manipulación de materiales.

Por tal razón se establece una situación fundamental desde lo planteado por Brousseau (1986) en su teoría de las situaciones didácticas, donde el profesor debe imaginar y proponer a los estudiantes situaciones que motiven el ambiente en el aula escolar y en las cuales los conocimientos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el estudiantes debe descubrir, además por medio del planteamiento y la sistematización de la experiencia lograr construir nuevas experiencias gracias al trabajo de los estudiantes y al reconocimiento de nuevos objetos matemáticos.

Ahora bien, el reto estaba en planear una propuesta de enseñanza de la geometría, enfocada a desarrollar el pensamiento espacial, la enseñanza de los sólidos geométricos y las figuras planas en estudiantes de tercero desde los aportes de Dickson (1991) para soportar la enseñanza de la geometría espacial, empezando desde el estudio de los objetos tridimensionales, analizando sus propiedades y características físicas-visuales para proporcionar el camino hacia el aprendizaje de las representaciones bidimensionales de estos objetos tridimensionales, desarrollando así el pensamiento espacial al reconocer en el contexto del estudiante, el mundo geométrico que lo compone.

Desde los parámetros de calidad en la educación, se proponen los lineamientos curriculares de matemáticas, particularmente los que aluden a las representaciones geométricas, y que promueven la exploración por parte del estudiante, generan la comunicación oral y escrita de ideas matemáticas verificando, negociando y validando las afirmaciones puestas en juego dentro de procesos de socialización MEN (1998); sin embargo, su aprendizaje se ve afectado porque se centra en representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales que se usan ocasionalmente para resolver algunos problemas o situaciones, además no se tienen en cuenta los procesos de argumentación y justificación que se ponen en juego en los espacios de socialización del aula de clase.

Fundamentación teórica

Desde los contenidos planteados en la enseñanza de la geometría, los sólidos y sus propiedades no se ilustran con la profundidad suficiente, Dickson (1991) de este modo se privilegia lo bidimensional sin llegar a comprender y establecer el paso de lo bidimensional a lo tridimensional o viceversa. En los estándares de matemáticas se reconoce esta problemática y la importancia de desarrollar una "geometría activa", en la que se privilegie la exploración de figuras mediante el movimiento, empezando por el propio cuerpo, como cuando el niño recorre la frontera de una figura y pasando por el que se aplica a los objetos físicos MEN (1998).

Las propuestas frente al aprendizaje de la geometría espacial en niños preescolares, puede hacerse partiendo de las figuras tridimensionales y su comparación con los objetos físicos de la realidad, hacia la geometría bidimensional trabajada como atributos de la geometría tridimensional o a lo que Dickson (1991, p. 47), se refiere cuando habla de "la representación bidimensional del espacio tridimensional."

Por tanto, la propuesta centra su fin en que los estudiantes vayan identificando las características bidimensionales que tienen los objetos tridimensionales, empezando por la interacción y percepción del mundo físico que nos rodea, donde "la percepción es el conocimiento de objetos resultante del contacto directo con ellos y la representación es una evocación de los objetos en ausenta de ellos". (Piaget, 2005); de esta manera se genera que ellos construyan esquemas mentales del objeto cuando a este se le hacen transformaciones, es decir, según Dickson (1991) las acciones como rotar, trasladar, girar, ordenar, moldear, cortar, pegar etc. es aquí donde se hace imprescindible el uso de recursos didácticos para el estudiante, que faciliten el desarrollo y afrontamiento de la situación problema planteada.

> A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias que se proporcionan a los estudiantes son bidimensionales, nos valemos de libros matemáticos que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales, tal uso de dichos dibujos le supone al estudiante una dificultad adicional en el proceso de comprensión. (Dickson, 1991, p. 48)

.

Recursos didácticos

Al afrontar la enseñanza en el aula de matemáticas y el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial, es sustancial tener en cuenta los métodos que utilizan los maestros para lograr los propósitos educativos; así como los medios a los que acuden y que confieren a los estudiantes para facilitar el proceso de aprendizaje; por medio de la propuesta se presenta la clasificación que hace Godino (2006), a los recursos didácticos (Ver tabla 1):

Tabla 1

Instrumentos semióticos: **Son los medios por los cuales se mediatiza entre la acción del sujeto ante el intento de resolver una situación-problema y el contexto en el que se desarrolla.**	
Manipulativos tangibles	**Gráfico-textuales-verbales**
Son los objetos físicos que sirvieron para identificar características propias de los sólidos y que ponen en juego la percepción táctil. ➢ *Sólidos construidos por los estudiantes y docentes* ➢ *Materiales para caracterizar propiedades del sólido (Palillos y plastilina)*	Son los recursos en los que se hace presente la percepción visual y/o auditiva. ➢ *Videos e imágenes de los frecuentes viajes alrededor del mundo geométrico* ➢ *Guías e instrumentos:*

Fuente: Clasificación de los recursos didácticos Godino (2006, *Págs. 117-124)*

Metodología de investigación

El reto de la propuesta era diseñar actividades que despertarán el interés y la motivación de adquirir nuevos y útiles conocimientos; aunque no es tarea fácil, "Sistematizando "la vuelta al mundo con la geometría" hacia el minecraft " es la justificación perfecta para cautivar la atención de los estudiantes y proporcionarles experiencias de aula innovadoras en el estudio de las matemáticas, proponiendo el aprendizaje de la geometría espacial desde las figuras tridimensionales y su comparación con los objetos físicos de la realidad, hacia la geometría bidimensional trabajada como propiedades de la geometría tridimensional o a lo que se refieren cuando se habla de la representación bidimensional del espacio tridimensional.

Por tal razón la resolución de problemas es un método de inagotables recursos dado que cada experiencia con problemas matemáticos posibilita la retroalimentación de experiencias pasadas, genera la sistematización de nuevas prácticas dotándolas de creatividad y en espacios de socialización desarrolla una conciencia crítica en los estudiantes.

Se ejecuta una propuesta de enseñanza enfocada a desarrollar el pensamiento espacial, la enseñanza de los sólidos geométricos y las figuras planas; empezando desde el estudio de objetos tridimensionales, analizando sus propiedades y características para proporcionar el camino hacia el aprendizaje de las representaciones bidimensionales de dichos objetos tridimensionales, ya que es común que se utilicen libros matemáticos que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales y usar estos gráficos genera en el estudiante una dificultad adicional en el proceso de comprensión, como lo menciona Dickson (1991).

Desde la propuesta de Brousseau (1986, p. 64), quien propone que *"*el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que ellos puedan vivir y en las cuales los conocimientos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el alumno debe descubrir*"*, se estableció una metodología de enseñanza enmarcada en una situación problema fundamental Brousseau (2007), explícitamente una situación motivacional en la que los estudiantes viajaron por cuatro países y desde allí reconocieron cuatro solidos relacionados con maravillas de un país (Ver figura 1), finalizando con una galería de arte que relaciona los sólidos, sus características y propiedades.

El diseño de la situación y la evaluación del impacto y pertinencia del uso de recursos didácticos se evidenciará a partir de las categorías de análisis del modelo Van Hiele (1984) y Hoffer (1981), que pretende establecer que la geometría es aprendida por una secuencia de niveles de pensamiento, los cuales se caracterizan por ser progresivos y ordenados, donde solo al dominar o alcanzar un nivel se puede pasar al siguiente. Van Hiele (1984), plantea cinco niveles para la enseñanza de la geometría; *Nivel 0,* visualización o reconocimiento, *Nivel 1,* análisis, *Nivel 2,* Ordenación o clasificación, *Nivel 3,* Deducción formal y *Nivel 4,* Rigor.

Atendiendo al intervalo de edad en el que se encuentran los estudiantes (7-8 años), se ubican según el modelo Van hiele en el nivel de reconocimiento, con las cinco habilidades que plantea Hoffer (1981), y que se desarrollan por los niños de esta edad (Ver tabla 2):

Tabla 2

Van Hiele	Habilidades	Características
Visualización o Reconocimiento	***Visual:*** Capacidad de crearse representaciones mentales a través de la visualización de objetos.	• Reconocer figuras de un dibujo • Reconocer información contenida en una figura
	Verbal: Habilidad de comunicación donde se da a conocer la información contenida en los objetos geométricos que ha logrado interiorizar.	• Asociar el nombre correcto con una figura dada • Interpretar frases que describen figuras
	Dibujo: Crea imágenes mentales a partir de la visualización de objetos y las traduce a representaciones externas, a partir de representaciones internas de conceptos matemáticos	• Hacer dibujos de figuras interpretando las partes
	Lógica: Desarrollar el poder de argumentación lógica, sus propias justificaciones y formulaciones.	• Diferencias y similitudes entre figuras • Comprender la conservación de figuras en diferentes situaciones

	Aplicada: Pretende que al enfrentarse a una situación problema, se utilicen estrategias de solución utilizando las demás habilidades	• Identificar formas geométricas bidimensionales en objetos físicos

Fuente: Modelo Van Hiele (1984) con aportes de Hoffer (1981) para la enseñanza de geometría.

Descripción de la experiencia

En cada uno de los países a los que se viajó (Ver figura 1) debería aprenderse algo nuevo referente a la geometría, pues la idea era mostrarles construcciones en diferentes países asociadas a algunos sólidos geométricos, para que finalmente desarrollarán la capacidad al descomponer los sólidos trabajados en su sus propiedades bidimensionales, y desde allí trabajar con sus propiedades y características a través del material proporcionado.

1. Cubo	**2.** Paralelepípedo	**3.** Pirámide	**4.** Esfera	**5.** Galería
 Viaje al Cubo de agua en **China**	 Viaje a la Torre Picasso en **España**	 Viaje a la Piramide de Giza en **Egipto**	 Viaje a la Esfera de piedra en **Costa Rica**	 Viaje a la Galería de arte geométrico en **Colombia**

Figura 1: Viaje por el mundo geométrico

Para simular el viaje se hacía uso de material gráfico-textual Godino (2006) como lo son videos e imágenes de los países y construcciones de cada lugar. Estos recursos grafico-textuales ayudaban a involucrar al estudiante en la situación propuesta, los constantes viajes a países lejanos para mirar las imágenes de construcciones arquitectónicas en forma de sólidos, generaban entusiasmo para el trabajo activo con los recursos tangibles.

Se recurría a recursos tangibles (Ver figura 2) y manipulativos durante todas las sesiones, los cuales correspondían a sólidos construidos, realizados por los mismos estudiantes o construcciones del docente y el objetivo principal era el motivar al estudiante a la exploración táctil y visual de los mismos para que proporcionarán las primeras informaciones sobre las características y algunas de sus propiedades, siguiendo la idea de (Piaget, 1964), quien hace distinguir este proceso y dice: "la percepción es el conocimiento de objetos resultante del contacto directo con ellos, para que posteriormente la representación sea una evocación de los objetos en ausenta de ellos".

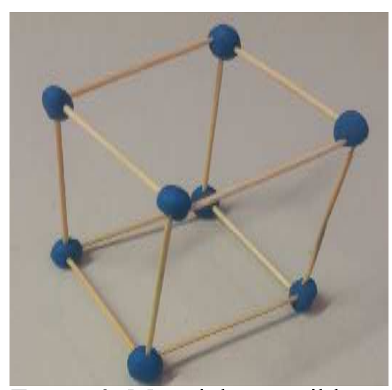


Figura 2: Materiales tangibles

El objetivo después del reconocimiento de sólidos y su caracterización, era que los estudiantes estuvieran en la capacidad de descomponer los sólidos en sus propiedades bidimensionales logrando así evidenciar las formas planas que componían a un sólido.

Esta actividad que corresponde a la última sesión, se desarrolló durante el viaje a Colombia, donde el aula de clase se convirtió en una galería de arte geométrico (Ver figura 3), simulando el arte de Omar Rayo donde se usaban figuras planas para crear valiosas y bonitas obras. En ésta sesión el estudiante debía crear su propia obra pero sin el uso de pincel, sino con los mismos sólidos anteriormente trabajados durante los viajes a los demás países, pues debían usar cada una de las caras planas de los sólidos para simular un sello y plasmarlas sobre una cartulina evidenciando las propiedades bidimensionales de los sólidos que ya habían trabajado, de esta manera creaban sus obras con figuras planas y a la par comprendían la composición bidimensional de objetos tridimensionales.

Figura 3: Arte geométrico

Conclusiones y reflexiones finales

Los materiales manipulativos tangibles ayudan a la compresión de conceptos, generando una conexión con el estudiante, permitiéndole a partir de situaciones nuevas, adquirir conocimientos, donde el material por sí mismo no es nada, lo es cuando el maestro le da un enfoque para tratar conceptos y llegar al objeto la geometría espacial, así la enseñanza y el aprendizaje se dota de un carácter dinámico y comprensible para el estudiante.

Ahora bien, en cuanto a las características físicas de un sólido, ellos empezaban a asociar esas propiedades según lo percibían; por ejemplo al mostrarles los vértices de la pirámide decían que ese nombre "vértice" era muy raro que preferían llamarle "puntas", lo que ayudo a su mejor reconocimiento y saber cuántas poseía cada sólido; a las aristas como los "bordes" que se podían sentir con los dedos y finalmente las caras las reconocían como aquello sobre lo cual la pirámide podía quedar de pie, pues si intentas ponerlo de pie sobre una punta se caía, igualmente si intentas pararla sobre el borde, el único lugar sobre queda de pie es sobre sus caras planas.

Uno de los aspectos que llama la atención, es que la conceptualización planteada por los estudiantes, está acompañadas por gestos y palabras del lenguaje cotidiano del estudiante, hasta que los conceptos sean validados o institucionalizados por los estudiantes, para una futura valoración de definiciones y simbolismos formales.

Es importante hacer mención a la importancia que tienen los recursos gráfico-textuales como los videos y las imágenes interactivas, ya que en la educación matemática actual no se tienen en cuenta y por lo que se logró en esta experiencia de aula, se puede concluir que son recursos agradables e interesantes a la vista del estudiante, porque el estudiante se interesa por los procesos de aprendizaje, motiva el trabajo activo y lo involucra en una situación donde debe acceder a nuevos conocimientos gracias a la propia acción.

Finalmente gracias a estas características que ellos de manera curiosa les atribuían a los sólidos, lograban realizar los conteos de cada uno de los vértices, caras y aristas lo que no se dificultó en ningún sentido. Reconocían igualmente la representación bidimensional de los sólidos, pues identificaban figuras como triángulos, cuadrados y círculos en las pirámides, cilindros y paralelepípedos, dibujándolas de acuerdo a la cantidad.

Ahora bien, se debe mencionar que a partir de la implementación de esta experiencia y gracias al trabajo de los estudiantes al construir los sólidos y establecer sus obras de arte, se generó una nueva experiencia que apunta a trabajar la enseñanza de los sólidos y las figuras planas desde la situación motivacional **"Construyendo un muñeco Minecraft"** (Ver figura 4).

Figura 4: Muñecos Minecraft

Referencias y bibliografía

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Francia. Universidad de Burdeos.

Brousseau, G. (2007). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage (primera edición en francés, 1998).

Dickson, L. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: M.E.C. & Labor.

Godino, J. (2006). *Uso de material tangible y gráfico textual en el estudio de las matemáticas; superando algunas posiciones ingenuas*. Machado y Cois. Guimarães, Portugal.

Hoffer, A. (1981). *La geometría es más que demostración*. En notas de matemática Nº 29, abril de 1990 p 10-24.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área matemáticas.* Áreas obligatorias y fundamentales. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Piaget, J. (2005). *La representación del espacio*. México: Reseña del libro Reflexiones sobre la geometría y su enseñanza. Correo del maestro y ediciones la vasija.

Van Hiele, P.M. (1984). *Estructuras y visiones. Una teoría de la educación matemática*. Londres.

Medida de volume do dodecaedro e do icosaedro: uma visão diferente

Amarildo Aparecido dos **Santos**
Universidade Federal do ABC - UFABC
Brasil
amarildosantos10@gmail.com

A geometria está presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos.

De acordo com PCN+ (BRASIL, 2002) usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão de modelos para resolução de problemas da matemática. Segundo o BNCC (BRASIL, 2017), ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa a capacidade de resolver problemas, comunicar, argumentar e ampliar a capacidade de pensar matematicamente. Além disso, estão preparados para escolher as representações mais convenientes para cada situação, para mobilizar, de modo simultâneo, ao menos dois registros de representação e para, a todo o momento, trocar de registro de representação.

Nesse sentido, exploramos as construções dos poliedros regulares convexos, no Cabri-3D, como uma possível transposição didática interna, no sentido de Chevallard, a partir da construção de superfícies poliédricas desenvolvidas por Euclides (BICUDO, 2009), livro XIII. Em primeiro lugar, buscamos compreender as construções realizadas por Euclides, obter relações matemáticas que favoreçam o cálculo da medida de volume desses poliedros. Em segundo lugar, concentramos no dodecaedro e icosaedro regulares, para determinar relações matemáticas que permitam a decomposição em pirâmides e consequente dedução da fórmula para o cálculo da medida de seus volumes. Em terceiro lugar, utilizar as relações e construções para um caminho inverso, ou seja, relações matemáticas que permitam dizer se uma pirâmide regular, triangular ou pentagonal, pode compor ou não um dodecaedro ou um icosaedro regular. Para isso, utilizamos como referencial teórico a noção de Transposição Didática e a Problemática Ecológica de Yves Chevallard e os Registros de Representação Semiótica de Duval especificamente nas apreensões sequencial, perceptiva, operatória e discursiva. No caso do dodecaedro regular verificamos que o segmento que representa a altura da pirâmide e o segmento que representa o apótema do pentágono da base dessa pirâmide determinam um segmento que foi dividido em média e extrema razão, sendo a altura o maior deles e o apótema da base representa o menor. Com esta constatação, foi possível então construir uma pirâmide regular de base pentagonal, a partir de um segmento qualquer dividido em média e extrema razão e considerar o maior deles como a altura da pirâmide e o menor como o apótema do pentágono regular da base de tal pirâmide. Com essa pirâmide construída pudemos compor o dodecaedro regular. Para o icosaedro regular, notamos que o prolongamento de uma de suas faces permite construir um retângulo, com um de seus lados sendo a aresta do icosaedro e que as duas outras arestas representam metade das diagonais desse retângulo. Constatamos que esse retângulo é um retângulo áureo. Dessa forma foi possível constatar, ainda, como esse retângulo é áureo, a partir da construção de um retângulo áureo, que a metade de suas diagonais corresponde às arestas laterais de uma pirâmide que tem como aresta da base o lado menor desse retângulo áureo. Com essa constatação, foi possível construir uma pirâmide que pode compor um icosaedro regular. A partir de relações e medidas obtidas durante a construção deduzimos fórmulas para o cálculo da medida de volume para cada um dos poliedros regulares, tanto em função da medida da aresta de cada um, quanto em função da medida da diagonal, ou diâmetro da esfera que circunscreve cada um deles. No caso do icosaedro e do dodecaedro, a possibilidade de decompor cada um em pirâmides regulares e de obter a medida da altura de cada uma delas foi o que permitiu a dedução das fórmulas para a medida de seus volumes. Pudemos então, verificar que existem condições necessárias para determinar se uma pirâmide regular de base pentagonal possa ser usada para compor um dodecaedro regular e, de modo análogo, para que um tetraedro regular possa ser usado para compor um icosaedro regular, existem condições necessárias para determinar se um tetraedro regular possa compor um icosaedro regular.

Entendemos que realizamos uma transposição didática interna, segundo os pressupostos teóricos de Chevallard (1998), porque conseguimos estudar didática e matematicamente as construções dos poliedros regulares, de um ponto de vista não encontrado em nossa revisão bibliográfica e estudo de livros didáticos. Construímos um processo para o ensino de poliedros regulares e o cálculo da medida de seus volumes que poderiam, com adaptações, fazer parte da matemática escolar, seu diferencial está tanto nas construções, quanto no desenvolvimento de fórmulas em um ensino mais significativo para os alunos. As apreensões, segundo Duval (2012), podem ser construídas visto que foi desenvolvido um discurso associado à compreensão do desenho que conduziram ao desenvolvimento efetivo de construções geométricas. Esse discurso juntamente com a apreensão sequencial permitiu escrever uma sequência de passos para a construção dos poliedros. A apreensão operatória sobre as figuras, a partir das modificações possíveis, articulada com a apreensão discursiva permitiu justificar e demonstrar matematicamente as construções realizadas e, ainda deduzir outras relações que permitiram estudar pirâmides que possam compor o icosaedro ou o dodecaedro. A visualização também foi desenvolvida com a articulação das apreensões perceptiva e operatória. Foi fundamental a conversão de representações realizadas do registro figural para representações no registro algébrico e tratamentos em cada um deles. No registro figural as modificações nas figuras, permitiram o desenvolvimento da apreensão operatória. Dentre elas, destacamos a modificação mereológica que se faz em função da relação parte todo ocorreu em vários momentos, por exemplo, na divisão de segmentos em média e extrema razão ou na decomposição dos poliedros.

Referencias e bibliografia

Bicudo, I. (2009). *Os Elementos - Euclides*. Livro XIII, Editora Unesp, p.563.

BNCC, *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. (2013). Brasília: MEC; SEB; DICEI.

Brasil, *PCN+ Ensino Médio*. (2002). Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasília: MEC/SE.

Duval, R. (1988). *Approche cognitive des problèmes de geométrie em termes de congruence*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, v.1, p.57-74, IREM de Strasbourg.

Santos, A. A. (2016). *Construção e Medida dos poliedros convexos com o Cabri-3D: uma possível transposição didática*. 167p. Tese (Doutorado em Educação Matemática), PUC, São Paulo.

Jogos educativos como ferramenta no ensino aprendizagem de Geometria

Isadora Freitas **de Oliveira**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
isadora.2017@alunos.utfpr.edu.br
Laura Marco **Reginaldo**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
lauramarco2010@hotmail.com
Giovana Melchiades **Melendi**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
giovanammelendi@gmail.com
Bruna da Cunha **Castilho**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
brunacastilho@alunos.utfpr.edu.br
Danielle Gonçalves de Oliveira **Prado**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
danielle@utfpr.edu.br

A matemática sempre foi uma matéria desafiadora para os alunos, apesar de estar tão presente no cotidiano. Ela exige muita concentração, raciocínio lógico, estudo e dedicação desde o primeiro contado. Porém, muitas vezes, o aluno apresenta dificuldades no seu entendimento e acaba ficando desmotivado, ou seja, perde o interesse pela aprendizagem. Infelizmente, a cada ano isso vai se agravando e contribuindo para o aumento no déficit de conhecimento.

No Brasil, segundo o SAEB (2015), as proficiências médias em Matemática evoluíram nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental I e II, mas caíram no Ensino Médio pela segunda vez consecutiva. Nesse último módulo, o Paraná está 6 pontos acima da média brasileira ocupando a 7ª posição, ficando atrás dos estados de DF, MS, RS, SC, RJ e ES.

Sabendo disso, a estratégia do uso de jogos educativos envolvendo conceitos matemáticos se tornam uma solução para despertar um novo interesse na disciplina pelos estudantes. Através desse tipo de ferramenta, é possível reconhecer as maiores dificuldades de aprendizagem dos alunos, assim o educador pode intervir quando necessário, além de proporcionar um entretenimento agradável entre eles. Para Muniz (2013), esses jogos se tratam de materiais pedagógicos fantasiados de jogos que possuem um professor como juiz.

A Escola de Desenvolvimento Humano Casa do Caminho – EDHUCCA, foi escolhida para realização das atividades propostas. A instituição, que não possui fins lucrativos, foi criada em 2001 na cidade de Apucarana – PR, e sua ideologia é baseada no ECA – Estatuto da Criança e do Adolescente. A escola dá uma atenção especial à família, priorizando os lares que estão em situação de risco e vulnerabilidade social.

Cada jogo educativo apresentado tem sua finalidade e metodologia de desenvolvimento própria, além de apresentar níveis de dificuldade diferentes, podendo ser aplicados a crianças e adolescentes de idades distintas. Santos (2014) afirma que o pensamento geométrico é construído a partir de quatro elementos: o objeto, possibilitando ao aluno o toque; o conceito, através da manipulação do material; o desenho e, por último, a imagem mental, consolidada à medida que os estudantes conseguem descrever as propriedades de uma figura mesmo sem a sua presença.

Nesse trabalho, focamos em jogos que trabalhem com esses elementos e o desenvolvimento do conhecimento da Geometria, conteúdo de suma importância na aprendizagem de matemática. O objetivo tanto do Dominó da Geometria Espacial (Figura 3) quanto do Piff Geométrico (Figura 4) é a identificação e reconhecimento de formas geométricas espaciais no cotidiano.

No dominó, as cartas devem ser divididas igualmente entre todos os jogadores e vence quem acabar primeiro com suas peças. Já no piff, 6 cartas são entregues para cada jogador, que deverá formar 3 pares, sendo que cada par é formado por cartas de características comuns.

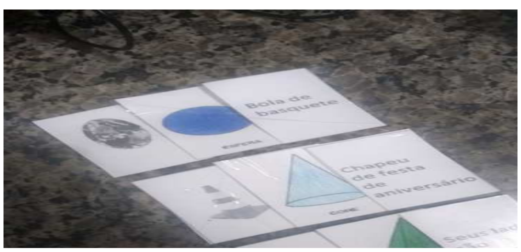


Figura 3. Dominó da Geometria Espacial

Fonte: Autores, 2018.

Figura 4. Piff Geométrico

Fonte: Autores, 2018.

É importante acompanhar o rendimento de cada um dos participantes e fazer avaliações sobre o comportamento deles durante as atividades. Dessa forma, novas propostas, que atendam às demandas e às necessidades da turma podem ser preparadas para os dias que seguem.

No primeiro contato, os alunos apresentaram uma base precária no conhecimento da matemática, mostrando que o cenário da educação pública brasileira realmente deixa a desejar. Além disso, vale ressaltar que, em sua maioria, os participantes apresentam problemas familiares, logo, a oficina de jogos matemáticos faz com que eles se distraiam, divirtam e socializem, tornando assim, a matemática cada vez mais interessante para os mesmos.

Foi observado que, após aplicações dos jogos os alunos começaram a se interessar mais pelo conteúdo, mostrando que esta prática semanal de brincar de maneira educativa despertou nos jovens curiosidade e entusiasmo pela matemática.

A idade dos alunos foi fundamental para a escolha dos jogos, para que a seleção dos mesmos fosse a melhor possível, já que o objetivo era obter um crescimento no conhecimento da matéria. Foi necessário iniciar com jogos mais simples para identificar qual o nível de dificuldade dos adolescentes, assim podendo partir para jogos mais complexos.

Devido a relevância educacional e social do trabalho desenvolvido, pretende-se continuar aplicando os jogos nessa instituição, e ainda, estender as atividades para outros conteúdos importantes da matemática.

Referencias e bibliografia

Almeida, C. S. Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área. Tcc de Licenciatura em Matemática, UCB, 2006.

Santos, C. A. dos; nacarato, A. M. Aprendizagem em Geometria na educação básica: a fotografia e a escrita na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014.

Muniz, C. A. Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. Autêntica, 2013.

Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – SAEB. Resultados do SAEB – 2015. Brasília, 2015.

Relações entre geometria e aritmética: um estudo a partir da experiência

Jhone Caldeira **Silva**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás
Brasil
jhone@ufg.br
Euler José de Assis **Garcia**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás
Brasil
eulerroker@gmail.com
Alexandre de Almeida **Xavier**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás
Brasil
alexandrevps@gmail.com
Renato **Sardinha** de Souza
Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada à Educação, Universidade Federal de Goiás
Brasil
rensardinha@gmail.com

Resumo

Investigamos a percepção de alunos sobre a relação geometria-aritmética e promovemos uma integração de saberes na aprendizagem da matemática, especificamente na primeira fase do Ensino Fundamental. A partir de observações realizadas em nossas experiências pedagógicas com conceitos geométricos, identificamos questionamentos dos próprios alunos se geometria era matemática. Assim, práticas educacionais foram aplicadas a fim de diagnosticar relações que os alunos faziam entre saberes e promover a integração dos conceitos geométricos e aritméticos. Baseamos nossos estudos em Alves (2012), Lorenzato (2008) e Tripp (2005) e os dados foram analisados conforme Fávero & Trajano (1998) e Moro & Soares (2005). Os resultados sugerem que há alunos que não compreendem a relação geometria-aritmética, desassociando uma da outra, e apresentam dificuldades em resolver problemas elementares envolvendo leitura geométrica e escrita aritmética. Ainda, é necessário ampliar a pesquisa no sentido de compreender, também, a percepção dos professores no ensino de geometria na Educação Básica.

Palavras chave: matemática, geometria, aritmética, experiência pedagógica.

Introdução

A presente pesquisa foi realizada em uma escola pública da Rede Federal, localizada na cidade de Goiânia no estado de Goiás, Brasil, em uma turma de 4º ano, primeira fase do Ensino Fundamental. O intuito da pesquisa foi entender quais eram as percepções dos estudantes sobre a relação geometria-aritmética e a integração de conceitos e saberes na aprendizagem da matemática. A motivação desta investigação se deu num processo com abordagens de conceitos geométricos, em que buscávamos relacioná-los com o cotidiano dos alunos. Surgiram questionamentos de alunos que afirmavam que o tema não era de matemática, de onde identificamos que alguns alunos não enxergavam a geometria como ramificação ou parte da matemática. Percebemos que seria importante entender melhor o que aqueles alunos pensavam a respeito de geometria e matemática e suas relações.

Já no início do processo do estudo, dada a fase inicial de formação dos alunos envolvidos, identificamos que a maioria desses considerava como matemática aqueles conceitos da aritmética e, assim, se referiam à matemática (e usavam essa palavra) somente quando a aritmética estava envolvida. Buscamos estabelecer relações mais claras entre geometria e aritmética a fim de que os alunos pudessem chegar à ideia de que a matemática não é um universo segmentado, mesmo sabendo que uma “separação” de conceitos matemáticos é algo considerado natural dentro da disciplina. Lorenzato (2008) afirma que essa divisão de áreas da matemática no Brasil é algo que sempre aconteceu.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997, p.38), a matriz curricular para alunos do Ensino Fundamental deve conter o estudo de números (aritmética e álgebra), bem como o estudo de formas (geometria). Deve, também, apresentar o estudo de grandezas e medidas, esse possibilitando uma interligação dos campos de geometria, aritmética e álgebra, permitindo a consolidação dos conceitos propostos. Entendemos que essa interação dos conceitos entre os diferentes campos pode surtir efeitos em espaços de aprendizagem que levem à apropriação destes. Consequentemente, estimula as funções cognitivas (MAGALHÃES, 2011) essenciais para o desenvolvimento do ser humano.

Miguel, Fiorentini & Miorim (1992) salientam, a respeito da relação geometria-aritmética, que

> Queremos, na verdade, revelar a existência de uma atitude oscilatória e maniqueísta em relação a esses dois campos fundamentais da Matemática que, infelizmente, parecem direcionar os estudos, as reflexões e os debates sobre o ensino da Matemática Elementar, pelo menos a partir da década de 70, quando as primeiras ressonâncias do chamado movimento da matemática moderna se fizeram sentir no interior de nossas escolas (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 39).

A geometria tem um grande papel na aprendizagem de conceitos matemáticos. É por meio dela que podemos visualizar conceitos. E essa importância toma um nível ainda maior quando se trata da aprendizagem infantil. É nessa fase que os primeiros conceitos matemáticos são introduzidos na vida de toda criança. E a geometria, então, tem sua relevância maximizada, pois o exercício deixará de ser apenas teórico e passará a ser também visual. Vieira (1997) diz

> As leituras realizadas sobre o tema de presente pesquisa reforçam o entendimento de que o processo de ensino-aprendizagem da geometria é fundamental para apoiar a construção de conceitos matemáticos científicos. E mais, destacam também que o ensino dos conteúdos de geometria, aritmética e álgebra devem estar entrelaçados, advindo daí o interesse por elaborar um programa voltado para o ensino inter-relacionado dos conteúdos de geometria e álgebra (VIEIRA, 1997, p. 21).

Mas então se tal integração é tão importante e não se dá de maneira natural no ensino da matemática na Educação Básica brasileira, há que pensar em maneiras para que isso aconteça. A alternativa que tem se mostrado mais eficaz é a resolução de problemas. Além de utilizar a aritmética para resolver o que é pedido, a interpretação geométrica dá uma ideia visual do que é o problema.

O grande desafio é mostrar que a matemática é um aglomerado de ideias, conceitos e estruturas muito importantes e que se fazem dependentes entre si. Dessa maneira, para que o aluno compreenda de forma mais natural que estruturas como a geometria e a aritmética fazem parte da mesma matemática, é necessário que desde as séries iniciais o professor saiba organizar as suas aulas com cautela. Ele deve trazer, mesmo que de forma simples, uma matemática que utilize vários conceitos e métodos para sua resolução ou entendimento. Alves (2012) destaca que

> Para Piaget, a percepção não é uma atividade única, fazendo parte, sim, de processos diversos como a exploração, reorganização, esquematização, transporte e antecipação. Além do que, apesar de todas essas atividades estarem possivelmente presentes desde o nascimento, elas não acontecem pelo que parece, no mesmo ritmo (ALVES, 2012, p. 3).

A partir do momento em que o professor conseguir, por meio de seu planejamento e trabalho, desenvolver atividades que tragam uma matemática "completa", ou seja, geometria, aritmética e até mesmo álgebra de formas integradas, ele estará promovendo percepções que acabarão com uma visão fragmentada que essa ciência possui. Com isso, nossa proposta se resumiu em conhecer o que os alunos sabiam a fim de tentar entender todas essas percepções que envolvem a relação geometria-aritmética transversalmente com a experiência.

Método

Participaram desse estudo 31 alunos de uma turma de 4º ano (primeira fase do Ensino Fundamental) de uma escola pública da Rede Federal de Goiânia (Goiás-Brasil). O objeto de investigação nasceu a partir de questionamentos dos próprios alunos. Práticas educacionais foram aplicadas abordando conceitos de geometria e aritmética condizentes com a maturidade escolar dos estudantes a fim de diagnosticar as relações que esses faziam entre saberes matemáticos, além de promover o entendimento da integração dos conceitos geométricos e aritméticos. Foram abordadas desde aulas teóricas à atividades lúdicas em ambientes externos (por exemplo, observações de elementos presentes em uma quadra poliesportiva, em uma roda de bicicleta, em que exploramos os desenhos e formas e algumas medidas). Para o presente estudo trazemos três atividades: a Atividade 1 buscou sistematizar as observações da pesquisa no sentido de identificar as relações que os sujeitos estabelecem entre geometria e matemática, sendo ela composta por perguntas abertas e um problema bastante elementar; ii) as Atividades 2 e 3 exploraram os conceitos de raio, diâmetro, círculo e circunferência, com situações em que os estudantes deveriam vivenciar a geometria e a aritmética conjuntamente. As atividades estão apresentadas no Apêndice A. Os alunos responderam as atividades individualmente, sem ajuda dos pesquisadores. Realizamos uma pesquisa-ação, como sugere Tripp (2005), e as respostas foram analisadas como apontam Fávero & Trajano (1998) e Moro & Soares (2005).

Resultados e discussão de dados

Considerando a Atividade 1, inferimos algumas relações que os alunos fazem com respeito da geometria e da matemática. As respostas refletem que parte dos alunos tinham a percepção de que as aulas/atividades de geometria não necessariamente eram de matemática. Veja:

Tabela 1

Percepções dos alunos sobre a geometria e a matemática, Atividade 1.

Categorias	Número de Alunos
A1. Acreditam que existem diferenças entre a Matemática e a Geometria, mas concordam que Geometria é Matemática e vice-versa.	10
A2. Acreditam que existem diferenças entre a Matemática e a Geometria e que Geometria não é Matemática e vice-versa.	4
A3. Não existem diferenças entre Matemática e Geometria.	14
A4. Não conseguiram articular.	3

Na Categoria A1 incluímos aqueles alunos que conseguiram enxergar uma diferença entre matemática e geometria e concordam que uma faz parte da outra. Pudemos perceber que, mesmo dentre aqueles alunos que entendem que a geometria faz parte da matemática ou vice-versa, há alguns que acreditam que a diferença entre a geometria e matemática é o fato de a geometria se tratar de formas, desenhos e figuras enquanto a matemática está relacionada às contas e aos cálculos (aritmética). As notações da Figura 1 a seguir trazem exemplos.

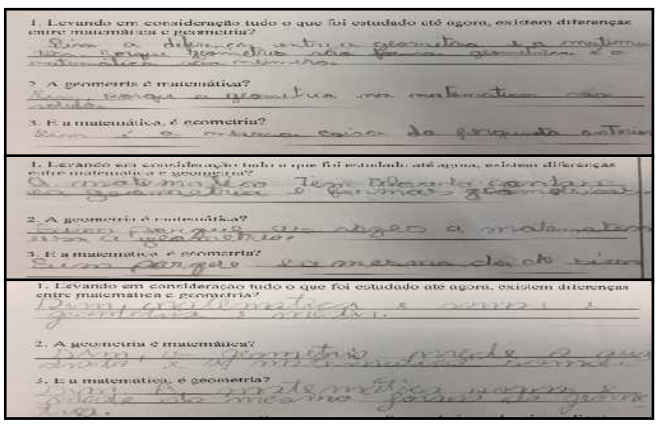


Figura 1. Respostas de alunos, Categoria A1, Atividade 1. Fonte: Acervo Pessoal.

É importante observar também a forma como os alunos fazem relações: "a matemática é responsável por somar e a geometria medir o quadrado". De acordo com nossas experiências, o aluno pode estar relacionando "medir o quadrado" e "somar" com o cálculo do perímetro, pois esse conceito fora abordado. Ou seja, esse aluno provavelmente conseguiu enxergar um elo entre medir e saber quanto vale o lado de um quadrado, por exemplo, e somar estes lados para se chegar a um resultado como um processo completo e não segmentado.

Na Categoria A2 estão os alunos que citam as diferenças entre a matemática e a geometria e afirmam que uma não é a outra.

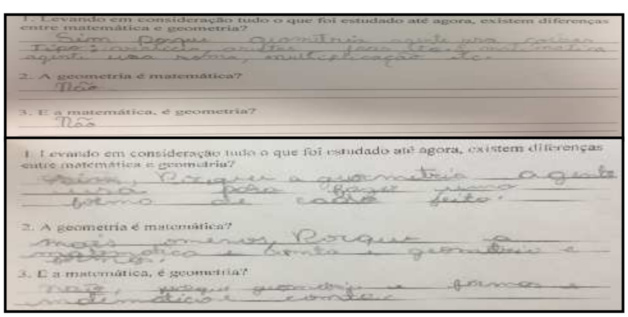


Figura 2. Respostas de alunos, Categoria A2, Atividade 1. Fonte: Acervo Pessoal.

Vemos na Figura 2 que os alunos disseram que existe diferença entre a matemática e a geometria e que há alunos que acreditam que uma não é a outra. Inferimos que um dos alunos tende a entender a matemática como algo mais “amplo” que a geometria, quando usa a expressão “mais ou menos” na resposta à Pergunta 2. Mais uma vez encontramos o argumento em que coloca a matemática como “contas” e a geometria como “formas”.

Na Categoria A3, que equivale a 45% dos alunos (14), temos aqueles que acreditam que não existe nenhuma diferença entre matemática e geometria e entendem que uma faz parte da outra. Vejamos as notações na Figura 3:

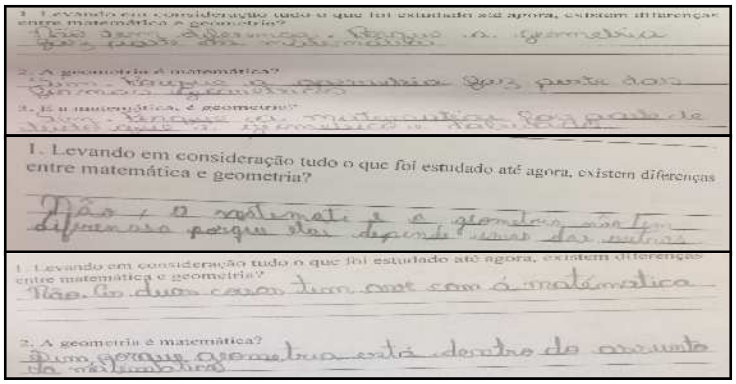


Figura 3. Respostas de alunos, Categoria A3, Atividade 1. Fonte: Acervo Pessoal.

Esses alunos consideram matemática e geometria um mesmo universo, apontam em suas respostas que uma faz parte da outra. Isso nos faz perceber que para eles a ligação entre matemática e geometria é natural. Ainda que saibamos que há inúmeros conceitos de matemática que não se enquadrem em geometria, optamos por não levar a discussão a um tom tão profundo e específico. Levamos em consideração o caminhar escolar dos alunos envolvidos, a faixa etária, a maturidade, a experiência prévia, diante do currículo escolar. Ainda não era o momento das formalidades conceituais, fórmulas, propriedades etc. Estávamos vivenciando as primeiras experiências com diversos conceitos geométricos, que pudessem ser adquiridos pela experiência e observação. Diante disso, valorizamos, sobretudo, que os alunos pudessem perceber a inter-relação entre os conceitos de matemática como um todo, em particular, quando se trata de geometria e aritmética.

Contudo o que pudemos observar a respeito da Atividade 01, vemos que 45% dos alunos (14) conseguem visualizar matemática e geometria como algo único e dependente e 55% dos alunos (17) acreditam na independência das duas áreas, principalmente com a ideia de que somar e medir fazem parte de universos distintos. Ainda, 48% (15 alunos) vê a geometria e a matemática como duas disciplinas que empregam metodologias diferentes: a geometria como estudo das formas e a matemática como estudo dos números e contas. Essas observações são bastante naturais, pois de acordo com Van de Walle (2009), a geometria é o estudo das formas e do espaço com características próprias que auxiliam o processo educacional.

As Atividades 2 e 3 buscaram explorar os conceitos de raio, diâmetro, círculo e circunferência, oportunizando situações que envolvessem a geometria e a aritmética conjuntamente. A Atividade 02 permitia aos estudantes expressarem com palavras as suas constatações, enquanto a Atividade 03 envolvia a interação dos conceitos com pequenos cálculos aritméticos. Confrontando as respostas dessas atividades, pudemos perceber que dos 29 alunos respondentes (02 alunos que responderam à Atividade 1 não participaram das Atividades 2 e 3), apenas 31% deles (9) souberam expressar corretamente o conceito de diâmetro (consideramos a linguagem matemática/materna do aluno) e calculá-lo para uma circunferência com um raio dado. Além disso, cerca de 52% dos alunos (15) não souberam relacionar com aproveitamento o conceito estudado à aritmetização da relação raio-diâmetro. Desses 15 alunos, 9 deles souberam calcular o valor do diâmetro, mas não conseguiram alcançar uma resposta esperada quanto à absorção do conceito em si e os outros 6 alunos o souberam definir, mas não conseguiram calcular de maneira correta. Por fim, cerca de 17% dos alunos (5) não conseguiram expor de maneira correta o conceito de diâmetro nem calcular o diâmetro de uma circunferência com o raio dado. Apresentamos a tabela a seguir.

Tabela 2

Resultados da Análise das Atividades 2 e 3.

Categorias	Número de Alunos
B1. Sabem definir diâmetro e sabem calculá-lo.	9
B2. Sabem definir diâmetro, mas não sabem calculá-lo.	6
B3. Não sabem definir diâmetro, mas sabem calculá-lo.	9
B4. Não sabem definir diâmetro e nem sabem calculá-lo.	5

Vemos que os alunos na Categoria B1 sabem definir o diâmetro e sabem calculá-lo. Eles representam menos de um terço do total de respondentes. Podemos entender que tais alunos souberam enxergar o elo existente entre o conceito apresentado do diâmetro e a relação aritmética usada na multiplicação do valor da medida do raio por dois.

Aqueles na Categoria B2 sabem definir diâmetro, mas não sabem calculá-lo. Cerca de 21% dos alunos (6) estão situados nesse conjunto. Podemos inferir que tais indivíduos, apesar de entender o que o diâmetro significa dentro de uma circunferência, não conseguem visualizar a relação diâmetro-raio de forma aritmética. Já na Categoria B3, os sujeitos não sabem definir diâmetro, mas sabem calculá-lo. Cerca de 31% dos alunos (9) estão inseridos nesse grupo. Apesar de não terem uma ideia corretamente formalizada do conceito de diâmetro, usam a representação geométrica da circunferência e do raio para calcular o valor do diâmetro.

Finalmente, na Categoria B4, encontramos cerca de 17% dos alunos (5). Para esses, que apresentam não saber definir diâmetro e nem calculá-lo, é importante buscar compreender porque não conseguiram internalizar os conceitos, tampouco conectar a representação geométrica da circunferência e do raio para determinar o valor do diâmetro.

Diante do cenário exposto, percebemos que a maioria dos alunos ainda não entende a relação existente entre um conceito geométrico dado e a sua aritmetização. Para esses, os conceitos estão desassociados, como apontam Miguel, Fiorentini & Miorim (1992). Assim, avaliamos a importância de aprofundar as discussões, apresentando novas oportunidades aos alunos a fim de que consigam identificar os saberes geométricos e aritméticos, além de serem capazes de resolver problemas elementares que os envolvam.

Considerações finais

Nossos estudos apontam que é interessante trabalhar geometria e aritmética, buscando integrar os conceitos. Uma vez que identificamos questionamentos entre os alunos da primeira fase do Ensino Fundamental, buscamos investigar se era possível perceber a relação geometria-aritmética nessa fase da Educação Básica. Pudemos perceber que, com o passar do tempo, um número maior de alunos já conseguia enxergar alguma relação entre as "formas" e as "contas". E na medida em que eles conseguiram entender tais relações de forma mais natural, foram amadurecendo matematicamente. Tal movimento é importante, pois como a matemática é uma ciência que se divide em várias subáreas, saber que existe ligação entre todas elas é algo essencial para o desenvolvimento cognitivo do indivíduo.

Talvez a grande dificuldade que o ensino da geometria enfrenta hoje seja a sua independência dentro de uma aula de matemática. Muitos dos livros didáticos colocam os conteúdos de geometria como os últimos tópicos dos conteúdos programáticos. Em muitas ocasiões, por falta de tempo, tais conteúdos não chegam a ser trabalhados em sala de aula. Os alunos envolvidos experimentam exatamente o contrário. Para eles, os temas referentes à geometria são sempre intercalados aos temas referentes à aritmética. Defendemos práticas como essa, pois, na medida em que o aluno internaliza os conteúdos de forma integrada, sua aprendizagem matemática se dará de forma mais efetiva, onde ele saberá usar artifícios geométricos para entender aritmética e vice-versa.

Por fim, entendemos que é necessário ampliar a pesquisa no sentido de compreender, também, a percepção dos professores e futuros professores no ensino de geometria na Educação Básica, uma vez que a visão desses reflete diretamente na percepção formada pelos alunos.

Referências e bibliografia

Alves, M. L. *Percepção*. (2012). 6 p. Artigo (Instituto de Física)- Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP. Disponível em: http://sites.ifi.unicamp.br/laboptica/files/2012/12/Percep%C3%A7%C3%A3o.pdf.

BRASIL. (1997). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (1º e 2º ciclos do ensino fundamental)*. v. 3. Brasília: MEC.

Fávero, M. H. & Trajano, A. A. (1998). *A leitura do adolescente: mediação semiótica e compreensão textual*. Psicologia: Teoria e Pesquisa, n. 1, 131-136.

Lorenzato, S. (2008). *Para aprender matemática*. Campinas, SP: Autores Associados.

Magalhães, R. C. B. P. (2011). *Educação Inclusiva: escolarização, política e formação docente*. Brasília: Liber Livro, 13-31.

Miguel, A., Fiorentini, D. & Miorim, M. A. (1992). Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo?. *Pro-Posições*, Campinas-SP, v. 3, n. 1, 39-54, mar. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644424/11844.

Moro, M. L. F. & Soares, M. T. C. (2005). *Desenhos, palavras e números: as marcas da matemática na escola*. Curitiba: Ed. da UFPR.

Tripp, D. (2005). Pesquisa-Ação: *Uma introdução metodológica. Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 31, n. 3, 433-466. Disponível em: http://pesquisaemeducacaoufrgs.pbworks.com/w/file/fetch/81004715/pesquisa%20a%C3%A7%C3%A3o%20metodologia.pdf.

Van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.* 6. ed. Porto Alegre: Artmed.

Vieira, V. D. (1997). *Geometria e álgebra: uma proposta de ensino*. 1997. 125 p. Dissertação (Mestrado em Educação Escolar Brasileira) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia. Disponível em: https://ppge.fe.ufg.br/up/6/o/Dissert_Vania_Domingos_Vieira.pdf.

Apêndice A
Atividades 1, 2 e 3

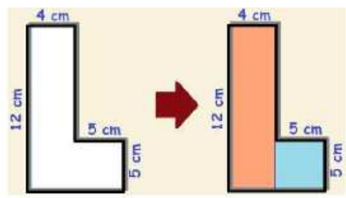
Atividade 1

1. Levando em consideração tudo o que foi estudado até agora, existem diferenças entre matemática e geometria?

2. A geometria é matemática?

3. E a matemática, é geometria?

4. Pinte o balão que você acredita representar a figura abaixo e depois explique porque você escolheu este balão.



Matemática

Matemática e Geometria

Geometria

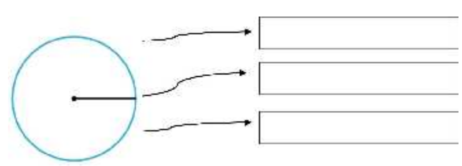
Atividade 2

Considerando a atividade que foi feita fora da sala de aula, responda:

1. Qual é a diferença entre círculo e circunferência?

2. Quando o barbante se tornou maior, o que aconteceu com o círculo e com a circunferência?

3. Observe a figura e indique: o raio (barbante), o círculo e a circunferência.

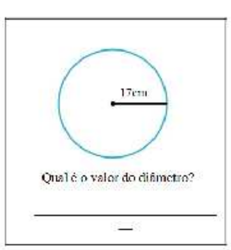


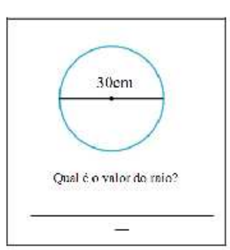
4. Lembrando da atividade que foi feita, qual é a importância de manter o barbante bem esticado na hora de desenhar a circunferência?

5. E o que aprendemos sobre o diâmetro?

Atividade 3

1. De acordo com as circunferências abaixo, calcule o que se pede:





2. Com o auxílio de uma régua, calcule o valor do raio da roda da frente da bicicleta abaixo.

Aprendizagem significativa de conceitos geométricos para a trigonometria no 9º ano do ensino fundamental

Marli Teresinha **Quartieri**
Universidade do Vale do Taquari
Brasil
mtqurtieri@univates.br
Romildo Pereira da **Cruz**
Universidade do Vale do Taquari
Brasil
romildo.cruz@universo.univates.br
Geovana Luiza **Kliemman**
Universidade do Vale do Taquari
Brasil
geovanakliemman@universo.univates

Resumo

Neste trabalho apresenta-se o relato de uma experiência de ensino, que faz parte do projeto da tese de doutorado, em andamento, que nesta etapa teve como objetivo estabelecer indícios de como a articulação entre, aprendizagem significativa e tecnologia de ensino pode favorecer a construção de aprendizagem significativa da trigonometria aos alunos. A proposta está embasada na perspectiva da Teoria de Aprendizagem Significativa (TAS). Neste sentido, a caracterização da (TAS) está alicerçada a partir da visão cognitivista de Ausubel, perpassando pelas concepções críticas de Moreira e, concatenada a visão mais humanista introduzida por Novak. À ação relatada ocorreu com uma turma de 9º do Ensino Fundamental composta por 30 alunos, na disciplina de Matemática, na região do Vale do Taquari, RS, Brasil. Por ser uma atividade de cunho exploratório não se apresentam resultados.

Palabras clave: Aprendizagem Significativa, Geometria, Trigonometria, Triângulo Retângulo, Ensino.

Introdução

Não é difícil identificar alunos desconectados da sua realidade, do meio em que vivem, da situação política, social e humanitária, e porque não salientar a alienação dos próprios princípios de aprendizagem sem nenhum espaço para a criatividade e para a construção do conhecimento de forma significativa. Observando as pesquisas de Pêgo (2013), Leite (2013), Silva (2014) e outras não citadas foi possível observar às dificuldades dos estudantes na transposição dos conceitos de geometria para a trigonometria, abordados no 9º Ano do Ensino Fundamental, em situações reais, do dia a dia.

Tais dificuldades, revelaram-se como causa de desinteresse e desmotivação para aprender. Segundo Ausubel (1982), dois fatores são fundamentais para se estabelecer aprendizagem com significado. Primeiro, o estudante precisa estar motivado para o aprendizado; segundo, o material deve ser potencialmente significativo, isto é, não arbitrário, de tal forma que o estudante possa relacioná-lo com seus subsunçores.

A busca por uma abordagem pedagógica que permita a superação de algumas barreiras para os processos de ensino e de aprendizagem, faz presumir, a necessidade de enunciar o objetivo a partir da leitura dos referenciais teóricos tomados. Assim, neste trabalho, a articulação entre, aprendizagem significativa e tecnologia de ensino é objeto de estudo, com o objetivo de investigar como ambientes de ensino e de aprendizagem que consideram o uso de variadas tecnologias de ensino, podem favorecer a construção de aprendizagem significativa da trigonometria aos alunos.

Com esses pressupostos norteadores, buscou-se planejar e explorar de maneira estratégica atividades com potencial para promover a aquisição de subsunçores e consequentemente, aprendizagem significativa relacionada ao papel dos conceitos geométricos aplicados ao campo da trigonometria. Para tanto, situações encontradas no dia a dia dos alunos (otimização de terrenos, atravessar uma avenida, subir ladeira, telhados de casas, pistas de fluxo invertido e outras) serviram de ponto de partida para a abordagem, visando à contextualização do ensino de trigonometria. Neste sentido, Scheller e Biembengut (2013) concordam que um estudante precisa ir além do domínio de técnicas e estratégias de cálculo; deve desenvolver a iniciativa e o senso criativo, para saber adaptá-lo a diferentes contextos. Desta forma, ele poderá visualizar a aplicação de conceitos abstratos, em situações reais do seu cotidiano.

A trigonometria, bem como a maioria dos conteúdos da matemática que são estudados na Educação Básica, surge em um primeiro momento a partir de necessidades práticas. Neste sentido, busca-se com as atividades desenvolvidas uma aproximação entre as situações reais e teóricas de maneira a colaborar na aquisição e/ou consolidação dos subsunçores dos alunos.

Diante dessas considerações apresenta-se, na seção 2, o referencial teórico, com base no qual o trabalho foi realizado. Na seção 3 é descrita uma das atividades desenvolvidas e considerações acerca da abordagem, seguida pela seção 4, em que é apresentada uma análise dos indícios de aprendizagem obtidos. Na última seção, dedicada às considerações finais, procuramos evidenciar o que já pode ser dito, em termos de ação exploratória que busca apresentar encaminhamentos para aprendizagem significativa da trigonometria no triângulo retângulo.

Referencial

Inclua A falta de noção de geometria pela maioria dos nossos alunos não está apenas imbricada as questões de engessamento do currículo escolar. Para Meneses (2007), o tratamento que se impõe à geometria nas últimas décadas criou uma lacuna que ainda não foi reparada. Os livros didáticos atuais mesclam o ensino da geometria do início ao fim dos mais variados contextos buscando uma aproximação entre tais, mas ainda existe a postura, por parte de alguns profissionais, de sempre deixar de lado seus conteúdos. Neste sentido, Nacarato (2002, p. 85) argumenta que:

> A ausência da geometria na escolarização formal vem formando gerações de profissionais, principalmente professores, que desconhecem os fundamentos desse campo da matemática,

pouco discutido no âmbito da prática pedagógica.

Segundo o autor (2002), a deficiência da formação geométrica é o principal motivo para o surgimento de profissionais despreparados quanto ao desenvolvimento adequado desse conteúdo em sala de aula. "A não compreensão, por partes dos professores, da importância da formação de conceitos geométricos para o desenvolvimento do pensamento matemático" favorece a resistência desses profissionais em relação ao trabalho com geometria (2002, p. 85). De acordo com as concepções de Filho (2002, p. 16):

> A linguagem geométrica está de tal modo inserida no cotidiano, que a consciência desse fato não é explicitamente percebida. É dever da escola explicitar tal fato a fim de mostrar que a Geometria faz parte da vida, pois vivemos num mundo de formas e imagens.

Assim, é necessário possibilitar aos alunos enxergar de forma diferente o ambiente geométrico em que convivem, buscando um novo olhar crítico que o estudo da geometria oferece, criando sentido onde nada se vê. Com o intuito de colaborar na busca de mais uma alternativa para a temática buscamos no campo da trigonometria elaborar uma sequência didática aliada ao uso de tecnologias diversificadas de ensino que favoreça a aprendizagem significativa dos alunos.

Nesta perspectiva e, em consonância com a própria história da Geometria inferimos que a evolução histórica da trigonometria do triângulo retângulo aconteceu a partir das respostas a perguntas contextualizadas em elementos práticos e vinculados a outras ciências, e essas interações motivaram o surgimento dos principais teoremas que constituem a trigonometria. De acordo com Boyer (1996, p. 108),

> A trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem - ou nação. Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido usados pelos antigos egípcios e babilônios. Dada a falta, no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, tal estudo seria melhor chamado "trilaterometria", ou medida de polígonos de três lados (triláteros).

Neste sentido, o conhecimento do como e do porquê do surgimento de um novo conceito e quais as transformações e evoluções por ele sofrido faz-se necessário para o entendimento das suas aplicações moderna. Ademais, acredita-se que o estudo histórico do surgimento de um conceito é importante, pois evidencia os obstáculos epistemológicos do processo de construção do saber matemático. À análise desses obstáculos ajudam a compreender as dificuldades dos alunos de hoje e, por outro lado, o entendimento da própria História e evolução da Matemática pode ser ampliado a partir da análise dos erros e embaraços dos estudantes. (Vergnaud, 1994).

Com a intenção de dar consistência ao embasamento da investigação procurou-se elencar alguns encaminhamentos pertinentes a pesquisa. Neste seguimento destacam-se as tecnologias educacionais (desde as mais tradicionais até as informáticas) que, historicamente são utilizadas como ferramentas de ensino inferindo-se uma ligação entre a palavra e a realidade. Logo, na perspectiva da teoria que suporta esta pesquisa, que está em andamento, o ideal seria que toda aprendizagem se transpusesse para uma situação real de vida do aprendiz/ indivíduo/aluno.

Neste sentido, Ausubel (2003) contextualiza que, o conteúdo deve ser significativo para quem aprende, gerando assim predisposição e curiosidade por parte do aluno. Caso não tenha sido estabelecida uma conexão entre o novo assunto e o que o aluno já sabe (subsunçor), não há aprendizagem.

Como exposto, para Ausubel, o conhecimento prévio, chamado de subsunçor, é fundamental, pois é a partir dele que o novo conhecimento se sustenta e se desenvolve. Neste aspecto, elenca-se como subsunçores para o aprendizado de trigonometria no triângulo retângulo os seguintes tópicos: teorema de Tales, semelhança de triângulos e teorema de Pitágoras. A partir deles, desenvolveu-se o trabalho com as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo.

Os conteúdos explicitados são considerados peças importantes para aquisição dos subsunçores necessários para que o aluno possa engajar os conhecimentos novos aos já ancorados em sua estrutura cognitiva, ou ainda, ampliar os conhecimentos já internalizados. Considerando os principais pressupostos apontados por Ausubel para a ocorrência de aprendizagem significativa destaca-se:

1) Disposição do aprendiz para aprender;

2) Material potencialmente significativo;

3) Existência dos subsunçores na estrutura cognitiva do aprendiz.

A condição referente à disposição do aluno em aprender significativamente requer que ele manifeste uma disposição para relacionar, de forma não-arbitrária e substantiva, o novo material à sua estrutura cognitiva. Para Moreira (1999) a pré-disposição para aprender e a aprendizagem significativa têm uma relação cíclica: "[...] a aprendizagem significativa requer predisposição para aprender e, ao mesmo tempo, gera esse tipo de experiência afetiva". Não basta que o material, ou as atividades de ensino sejam potencialmente significativos se o aluno não estiver motivado ou não dispuser de características cognitivas adequadas, ou ainda, se ele se satisfaz adquirindo conhecimentos vagos ou difusos, sem a significância devida ao adotar estratégias que o levam a internalizar o conteúdo de forma literal e arbitrária.

De acordo com as interpretações de Brum e Silva (2014, p. 76), “a busca de indícios sobre a ocorrência de uma aprendizagem significativa não é uma tarefa simples”. Verificar se uma aprendizagem ocorreu, segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), simplesmente perguntando ao aprendiz os atributos de um conceito ou proposição é arriscado, haja vista a possibilidade da utilização de respostas mecanicamente memorizadas. Os autores entendem que é necessária uma compreensão no domínio dos significados que se apresentam de forma clara, precisa, diferenciados e transferíveis.

Na busca por indícios de uma possível aprendizagem significativa Ausubel (2003) sugere que se busquem evidências que o aprendiz está compreendendo genuinamente um conceito, ou seja, que ele está atribuindo a ele significados claros, precisos, diferenciados e transferíveis. Entretanto, para Moreira (1999), o aluno após uma longa experiência em fazer exames pode se habituar a memorizar não somente proposições e fórmulas, mas também, causas, exemplos, explicações e formas de resolver problemas exemplares. Para os autores Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 137),

> Se tivéssemos que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio diríamos que o fator singular mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe, descubra isso e baseie-se nisso seus ensinamentos.

Nessa perspectiva, Ausubel (2003) afirma que na aprendizagem significativa o aluno é ativo na construção do seu conhecimento e participa do processo educacional. Há diversas alternativas para verificação da ocorrência de aprendizagem significativa, como tarefas de aprendizagem sequencialmente vinculadas, servindo de apoio a etapas posteriores da atividade, a resolução de problemas bem como a utilização de mapas conceituais. Também se podem utilizar classificações consensuais de especialistas de matérias e de professores para se avaliar o grau de proximidade de relevância cognitiva existente para uma determinada tarefa de aprendizagem.

No processo de aprendizagem significativa, a partir de sucessivas interações, conceitos são desenvolvidos, elaborados e diferenciados entre si. De acordo com a concepção de Moreira (1997), a diferenciação progressiva é o princípio pelo qual os conceitos mais gerais e inclusivos do conteúdo de ensino devem ser apresentados no início da instrução e, progressivamente, diferenciados em termos de detalhes e especificidades. Para Ausubel (2003, p. 166),

> [...] quando o conteúdo de uma disciplina é programado de acordo com o princípio da diferenciação progressiva, apresentam-se, inicialmente, as ideias mais gerais e inclusivas da disciplina e depois estas são progressivamente diferenciadas em termos de detalhe e especificidade.

Esta ordem de apresentação do conteúdo corresponde, presumivelmente, à sequência natural de aquisição de consciência cognitiva e de satisfação, quando somos expostos a determinados conhecimentos. Para justificar a abordagem Ausubel se baseia em duas hipóteses:

- ✓ É mais fácil para os seres humanos captar aspectos diferenciados de um todo, anteriormente apreendido e mais inclusivo, do que chegar ao todo a partir de suas partes diferenciadas;
- ✓ A organização do conteúdo de uma determinada disciplina na mente do indivíduo é uma estrutura hierárquica na qual as ideias mais inclusivas estão no topo da estrutura e progressivamente incorporam proposições, conceitos e fatos menos inclusivos e mais diferenciados.

De forma mais explícita, pode-se dizer que novas ideias e informações são aprendidas, e retidas mais eficazmente, quando já estão disponíveis na estrutura cognitiva do aprendiz ideias mais inclusivas e especificamente relevantes, para servir como subsunçores. Neste sentido, a função dos organizadores prévios em relação a qualquer tópico ou subtópico, quando os subsunçores não existem ou quando existem e o aprendiz não percebe sua relacionalidade com o novo material é de reorganizar a estrutura cognitiva.

No seguinte, apontam-se os encaminhamentos que norteiam os primeiros passos da investigação exploratória em andamento.

Procedimentos metodológicos

A bala deve: A fim de contribuir para que o estudante consiga relacionar os conceitos de geometria com a trigonometria com situações do contexto do seu cotidiano, tendo condições de analisar e intervir no mundo real, as ações foram todas planejadas de forma a contemplar o arcabouço apenas do Ano/Curso já abordado. Inicialmente, buscou-se na história da trigonometria, algumas situações-problema que surgiram no passado, cuja importância ainda é reconhecida nos dias de hoje.

Exemplo disso é o estudo das relações existentes nos triângulos que, segundo Souza (2010), surgiu por causa da necessidade de medir distâncias inacessíveis. Os avanços nos conhecimentos da Astronomia, da Agrimensura e da Navegação também impulsionaram a utilização da trigonometria na resolução de situações-problema. Ciente disso, o estudante se apropria de subsídios para a tomada de decisão, visando melhores resultados na atividade a exemplo da jardinagem, medições de terras; cálculo do desnível do solo; alturas inacessíveis e análise de fenômenos periódicos.

Diante dessas considerações, planejou-se a prática de campo, que foi realizada através de visita aos viveiros de plantas, observação de prédios construídos no bairro e de ruas que apresentavam aclives considerados muito íngremes, que se localizam entorno do colégio no subúrbio da cidade de Lajeado, interior do Rio Grande do Sul. As atividades foram desenvolvidas com uma turma de 9º Ano do Ensino Fundamental. A ação teve o apoio do professor da disciplina onde ocorre a pesquisa. Nesta perspectiva, tratou-se a contextualização que nortearam a prática.

Os conceitos usuais de trigonometria, abordados no Ensino Fundamental, ainda não haviam sido tratados, anteriormente, em sala de aula, na forma tradicionalmente utilizada, por meio de aulas expositivas. Com a prática de campo, a intenção era verificar a aprendizagem de tais conceitos e, na medida do possível, validá-la, como uma atividade com potencial para promover aprendizagem significativa. Para esta prática dispomos de duas aulas de 50 minutos cada. A mesma consistiu de duas etapas: 1) discussão entre professor e estudantes, com base na realização de tarefas relacionadas com o tema; 2) resolução, pela turma, dividida em grupos, de duas situações-problema.

A intencionalidade, foi encontrar um caminho para que o aprendizado de conceitos geométricos ocorresse de forma a produzir melhores resultados do que os já tradicionais experenciados em situações pontuais pelo autor. A princípio, quis-se observar os problemas e as dificuldades que ocorrem na evolução deste aprendizado, justificando a necessidade de reconstruir-se o ensino da geometria de 9º Ano por meio de procedimentos que possibilitem uma nova forma de condução destes conteúdos.

Perspectivou-se conduzir as atividades de forma que os alunos sentissem-se à vontade na construção de seus próprios conhecimentos. Desejou-se inicialmente identificar os conhecimentos geométricos apropriados por alunos iniciantes do 9° Ano do Ensino Fundamental participantes da pesquisa. Quis-se observar, no grupo de estudantes, os conhecimentos que estes alunos possuem, comparando com os pré-requisitos geométricos mínimos que deveriam conter para prosseguir seus estudos ou simplesmente para utilizarem na prática real no convívio social.

A turma foi disposta em um círculo e ao centro, com a ajuda de cinco estudantes voluntários, utilizando um esquadro de madeira e uma marreta, foram fixadas ao solo cinco estacas (a orientação era que o triângulo deveria ter um de seus ângulos reto). Com um pequeno prego no topo de cada uma das estacas, passou-se um fio de nylon contornando todos os pontos do triângulo perfazendo o perímetro total deste.

Após ter-se interligado os pontos comuns do triângulo retângulo, em seguida pediu-se para que observassem a disposição das estacas e, a forma como elas estavam organizadas para verificar se conseguiam visualizar os triângulos semelhantes representados. Solicitou-se ainda que, estabelecem letras representativas dos vértices atrelados a cada estaca. Ademais, foram perguntadas questões relativas à classificação dos triângulos quanto às medidas dos lados e dos ângulos correspondentes. Conforme as respostas surgiam, cada estudante fazia anotações. Na sequência, com o auxílio de uma trena e de um transferidor, foram orientados a medir dois ângulos e dois lados do triângulo (maior). De posse dessas medidas foi questionado se, sem utilizar a trena, seria possível determinar as medidas do terceiro segmento do triângulo (maior) dos outros três lados do triângulo (menor). Após alguns olhares e troca de informações, alguém disse: "Sim, pois trata-se de semelhança de triângulos". Como a resposta estava correta, foi solicitado que, em pequenos grupos, calculassem as medidas dos lados do triângulo (menor). Para isso deveriam desenhar o triângulo em seus cadernos e poderiam utilizar à calculadora.

Esgotado o tempo, dos seis grupos formados, apenas dois grupos conseguiram executar o cálculo com êxito. Sendo assim, um dos grupos, utilizando um quadro branco e canetões, demonstrou aos demais como o fizeram. Ao final da demonstração, percebeu-se que nem todos se lembravam das relações existentes em semelhança de triângulos, pois o foco inicial para eles foi apenas a aplicação do teorema de Pitágoras para determinarem a hipotenusa do triângulo (maior). Porém, havia clareza de que a soma dos ângulos internos do triângulo correspondia a 180°.

A turma foi questionada sobre o que aconteceu ao traçar a altura do triângulo e logo alguém respondeu que o triângulo havia sido transformado em dois triângulos retângulos. As estacas foram, então, mudadas de lugar, como forma de modificar as medidas dos lados e dos ângulos do triângulo.

Como um dos objetivos da prática era expandir as possibilidades de resolução, ou seja, o estudante sendo um agente do seu próprio aprendizado, novamente foi perguntado se era possível chegar ao mesmo resultado usando apenas as relações trigonométricas do triângulo retângulo. Como já haviam utilizado o método de traçar a altura do triângulo qualquer, transformando-o em dois triângulos retângulos, os grupos traçaram a altura do triângulo e, trabalhando conjuntamente, todos conseguiram resolver.

Apresentação dos resultados

Segundo Moran (2000), aprende-se quando experiencia-se, relaciona-se, atribui-se sentidos ou novos significados, ao que é apresentado. Aprende-se quando se tem interesse e motivação, desenvolvem-se hábitos que podem facilitar a ação de aprender e sente-se prazer pelo que se estuda e a forma como o faz-se.

Quanto a esse ponto, Ausubel (2003, p. 36) assevera que o estudante assume uma responsabilidade adequada pela própria aprendizagem quando: aceita a tarefa de aprender ativamente, procurando compreender o material de ensino; tenta, de forma genuína, integrá-lo nos conhecimentos que já possui; não evita o esforço por novas aprendizagens difíceis; decide fazer as perguntas necessárias sobre o que não compreende.

Foi nesta atmosfera de envolvimento e empolgação, com a forma como ocorreu a abordagem que os alunos ao que se pôde perceber, deram um passo importante de organização hierárquica dos conceitos discutidos para que a pesquisa possa atingir o objetivo pretendido, que é a transposição dos conceitos geométricos para as relações trigonométricas através do uso de tecnologias de ensino variadas. Esclarece-se que, no trabalho em equipe, o envolvimento com as tarefas propostas, a participação ativa nas discussões que iam surgindo deram-se de maneira espontânea e natural. O manuseio de ferramentas de apoio, interesse e envolvimento nas tarefas apresentadas, elaboração de todos os cálculos atestam indícios de um novo despertar, favorecendo a reconciliação do novo conhecimento aprendido com os seus conhecimentos prévios.

Evidentemente, que a inserção de atividades práticas não garante que as mesmas alavancarão processos que possam desencadear aprendizagem significativa a partir das suas usabilidades. Porém, há que se reconhecer que se trata de tendências apontadas com crescente frequência por um número cada vez maior de pesquisadores, a citar Pereira (2011), Oliveira (2013) e Ocanha (2016) e de instituições setoriais

As argumentações de diferentes autores que subsidiaram o aporte teórico deste trabalho deixam a entender que a tendência da Educação Matemática como construtora de novas possibilidades significativas dos conteúdos matemáticos, é buscar um aluno crítico, questionador e investigativo, a partir desse tripé busca ampliar outras possibilidades de aprendizagem com mais significado. Para Novak e Hanesian (1980, p. 5),

> [...] é essencial levar-se em consideração as complexidades provenientes da situação de classe de aula, estas, por sua vez, incluem a presença de muitos alunos de motivação, prontidão e aptidões desiguais; as dificuldades de comunicação entre professor e aluno; as características particulares de cada disciplina que esta sendo ensinada; e as características das idades dos alunos.

Em outra instância, Ausubel (2003, p. 4) reafirma que,

> O conhecimento é significativo por definição. É o produto significativo de um processo psicológico cognitivo (“saber”) que envolve a interação entre ideias “logicamente” (culturalmente) significativas, ideias anteriores (“ancoradas”) relevantes da estrutura cognitiva particular do aprendiz (ou estrutura dos conhecimentos deste) e o “mecanismo” mental do mesmo para aprender de forma significativa ou para adquirir e reter conhecimentos.

Na busca por indícios de uma possível aprendizagem significativa Ausubel (2003) sugere que se busquem evidências que o aprendiz está compreendendo genuinamente um conceito, ou seja, que ele está atribuindo a ele significados claros, precisos, diferenciados e transferíveis. Uma sugestão de Ausubel e defendida por Moreira e Masini (2011), com objetivo de evitar uma simulação da aprendizagem significativa, é utilizar situações que sejam novas e não familiares, exigindo máxima transformação do conhecimento existente.

Quanto aos aspectos que acrescentaram ao estudante no desenvolvimento da atividade apresentada pode-se elencar: resolução de situações práticas em campo com o emprego da geometria, oportunidade de resolução de problemas simples, desenvolvimento da habilidade do trabalho em grupo, habilidades de investigação e resolução de situações práticas da matemática e o desapego do uso de fórmulas prontas.

Considerações

Retomando a questão que norteou essa etapa da pesquisa, que nesta etapa teve como objetivo estabelecer indícios de como a articulação entre, aprendizagem significativa e tecnologia de ensino pode favorecer a construção de aprendizagem significativa da trigonometria aos alunos. Neste sentido, considera-se que alguns indícios foram atingidos. Com base na descrição da abordagem, pode-se salientar que o ensino através de atividades práticas apresenta-se como uma possibilidade real para que haja a ocorrência de aprendizagem significativa no ensino de trigonometria no triângulo retângulo.

A análise dos contextos explicitados e implícitos nos discursos de Ausubel (2003) deixa evidente que do ponto de vista instrucional, a utilização de organizadores prévios é excepcionalmente recomendável como veículos facilitadores da aprendizagem significativa, sobretudo, quando não existem na estrutura cognitiva os subsunçores adequados. Tais pressupostos corroboraram para a organização da sequência desenvolvida com os alunos pesquisados.

Diante do que se pode constatar, acredita-se que o objetivo foi alcançado, pois a prática pedagógica, desenvolvida em um espaço informal com os estudantes, motivou-os para a realização das atividades, um dos pressupostos apontados por Ausubel. Ademais, destaca-se que tanto os alunos, quanto o professor da disciplina, em suas falas concordaram que houve um ganho em termos de aprendizagem. Isto leva a crer que houve uma contribuição para que o estudante do Ensino Fundamental em questão conseguisse relacionar os conceitos de geometria com a pretendida trigonometria com situações do contexto cotidiano, tendo possível condições para analisar e intervir no mundo real em que vive.

Portanto, acredita-se que através da atividade desenvolvida, possa-se ter proporcionado condições favoráveis para que os alunos envolvidos na prática desempenhassem o papel de agentes do seu próprio aprendizado, o que é uma condição importante para a ocorrência de aprendizagem significativa.

Agradecimento

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Referencias

Ausubel, D. P. *Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva*. Lisboa: Plátano, 2003.

Ausubel, D. P.; Novak, J. D.; Hanesian, H. *Psicologia educacional*. Trad. de Eva Nick. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

Boyer, C. B. *História da Matemática*. 2 ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher/Edusp, 1996.

Brum, W. P.; Silva, S. de C. R. da. A utilização de um recurso tecnológico para apresentação do tema geometria plana analisada a partir da teoria da aprendizagem significativa. Aprendizagem Significativa em *Revista/Meaningful Learning Review* – V4(2), pp. 72-87, 2014.

Filho, D. M. T. O *aprendizado da geometria no ensino médio – origens de dificuldades e propostas alternativas*: [s.n], 2002.

Meneses, R. S. *Uma História da Geometria Escolar no Brasil: de disciplina a conteúdo*. 2007. 172 f. (Mestrado acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia universidade católica, São Paulo: [s.n], 2007.

Moran, José Manuel. et al. *Novas tecnologias e mediação pedagógica*. Campinas/SP: Papirus, 2000.

Moreira, M. A. *Aprendizagem significativa: um conceito subjacente*. In: Encontro Internacional sobre aprendizagem significativa. Espanha, 1997.

Moreira, M. A. e Masini, E. F. S. *Aprendizagem Significativa: a Teoria de David Ausubel*. São Paulo, Centauro, 2011.

Moreira, M. A. *Teorias de aprendizagem*. São Paulo: E.P.U., 1999.

Nacarato, A. M. A Geometria no Ensino Fundamental. In: SISTO, Fermino Fernandes, DOBRANSZKY, Enid Abreu, MONTEIRO, Alexandrina (Orgs.). *Matemática e Aprendizagem*. Petrópolis: Vozes, 2002.

Novak, J.D. e Gowin, D.B.. *Aprender a aprender*. Lisboa. Plátano Edições Técnicas. Tradução ao português, de Carla Valadares, do original Learning how to learn. 212p. 1996.

Scheller, M.; Biembengut, M. S. A utilização de tecnologias digitais nos primeiros passos na arte da pesquisa: uma experiência de modelagem. *Revista Novas Tecnologias na Educação*, v. 11, p. 1-11, 2013.

Souza, L. E. C. *Aprender a aprender e ensinar a aprender: Trigonometria*. 2010. Trabalho de Conclusão do Curso (Licenciatura Plena em Matemática) – Ribeirão Pires, 2010.

Vergnaud, G. *Epistemology and Psicology in Mathematics Education. Mathematics and Cognition*. Nesher, P. e Kilpatrick, J., pp 14 -30, Cambridge University Press, 1994.

Contribuições do uso das Tecnologias Digitais no ensino e aprendizagem de conceitos geométricos espaciais

Danielle dos Santos **Rodrigues**
Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil
Brasil
danielle.sr89@gmail.com

Carmen Teresa **Kaiber**
Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil
Brasil carmen_kaiber@hotmail

Resumo

Este artigo apresenta parte de uma pesquisa que teve como objetivo investigar as possíveis contribuições do uso de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA), com recurso às tecnologias digitais, no desenvolvimento de conceitos da Geometria Espacial, junto a um grupo de estudantes do terceiro ano do Ensino Médio. Particularmente, está sendo aqui apresentado resultados referentes a uma análise qualitativa realizada em uma atividade que envolvia o uso do *software* GeoGebra, tomando como referência aspectos dos constructos do modelo de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico que se buscou adaptar para a Geometria Espacial. Resultados apontam que o recurso as tecnologias digitais, particularmente a utilização do *software* GeoGebra, potencializou o trabalho dos estudantes, uma vez que possibilitou a visualização, construção e movimentação de diferentes objetivos geométricos permitindo os estudantes identificar propriedades, analisar, conjecturar e propor soluções.

Palavras-chave: Currículo de Matemática, Ensino Médio, Temas de interesse.

Introdução

A importância do desenvolvimento dos conceitos geométricos é destacada na Base Nacional Curricular Comum do Ensino Médio[1] - BNCC (Brasil, 2018), considerando que o desenvolvimento do pensamento geométrico propicia ao estudante um tipo de pensamento que lhe permite compreender, de forma organizada, o mundo em que vive. Fainguelernt (1999) pondera que o estudo da Geometria é de fundamental importância, posto que possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento espacial, elementos essenciais no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, segundo a autora. Dreyfus (1991) já apontava, para a necessidade do uso de ferramentas que auxiliassem no desenvolvimento do raciocínio dos estudantes no que se refere a visualização.

Neste contexto, entende-se que as tecnologias digitais podem se constituir em uma potente ferramenta para o ensino e aprendizagem da Geometria Espacial. Particularmente, Santos (2006) destaca que a visualização, na Geometria é de grande relevância para a aprendizagem, uma vez que, não havendo esta habilidade de criação mental, há dificuldades para construção de objetos geométricos, assim como justificar ou validar resultados obtidos.

Fainguelernt (1999), afirma que visualização geralmente se refere à habilidade de perceber, representar, transformar, descobrir, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre as informações visuais. Porém, a autora salienta que só a visualização não proporciona o conhecimento geométrico, uma vez que há pessoas que possuem a habilidade de conceber a imagem mentalmente e que não necessariamente possuem domínio dos conhecimentos geométricos (Fainguernt, 1999). Contudo, Fainguelernt (1999) destaca para a importância de desenvolver uma educação visual adequada, visto que, para o desenvolvimento do pensamento geométrico é de fundamental importância, corroborando com o que Hoffer (1981) aponta, quando destaca que a habilidade visual propicia aos estudantes reconhecer, perceber, identificar e fazer inter-relações entre figuras distintas.

Concorda-se com Santos (2006) quando destaca que as tecnologias digitais possibilitam uma abordagem dinâmica para a investigação matemática, em particular para a Geometria, proporcionando a visualização de objetos geométricos, já que, as imagens fornecidas na tela do computador podem, por exemplo, serem exploradas sob diferentes aspectos, enfatizando a intuição, a percepção e o raciocínio, competências essenciais para a compreensão dos conceitos geométricos. Assim, não se pode ignorar a sua inserção e suas potencialidades em sala de aula, potencialidades estas que também são destacadas na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018).

Em uma perspectiva mais ampla, no âmbito da Educação Matemática, a utilização das tecnologias digitais influencia a forma de ver, utilizar e produzir a Matemática, principalmente em sala de aula, propiciando diferentes fontes de informação e formas de tratamento para o desenvolvimento de conhecimentos que não estão presentes em outros recursos (Kaiber & Conceição, 2007; Gravina & Basso, 2012).

Neste contexto, as tecnologias digitais podem se constituir em um poderoso recurso de suporte para a aprendizagem, com inúmeras possibilidades pedagógicas a serem desenvolvidas. Concorda-se com o que é destacado por Kenski (2015), quando afirma que

[1] A Base Nacional Curricular Comum é uma nova organização curricular no Brasil, a qual já está em vigor no Ensino Fundamental, entretanto, a BNCC do Ensino Médio, ainda não foi homologada, estando disponível uma versão preliminar da mesma (Brasil, 2018).

> Por meio das tecnologias digitais é possível processar e representar qualquer tipo de informação. Nos ambientes digitais reúnem-se a computação (a informática e suas aplicações), as comunicações (transmissão e recepção de dados, imagens, sons etc.) e os mais diversos tipos, formas e suportes em que estão disponíveis os conteúdos (livros, filmes, fotos, músicas e textos). É possível articular telefones celulares, computadores, televisores, satélites etc. E, por eles, fazer circular as mais diferencia das formas de informação (Kenski,2015, p.23).

Os argumentos apresentados deram suporte a um estudo, o qual buscou investigar as potencialidades do uso de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA), com recurso às tecnologias digitais, no desenvolvimento de conceitos da Geometria Espacial de um grupo de estudantes do terceiro ano do Ensino Médio.

Particularmente, neste artigo, serão apresentados resultados no âmbito do estudo

mencionado, os quais se referem a uma atividade da UEA que envolveu o uso do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra para a resolução da mesma. Optou-se por este *software,* por ser uma ferramenta que possibilita a visualização e movimentação dos sólidos geométricos em diferentes perspectivas, auxiliando a compreensão e aprendizagem dos estudantes dos conceitos estudados.

Software de Geometria Dinâmica GeoGebra

O GeoGebra é um *software* de Geometria Dinâmica, livre e gratuito, que pode ser utilizado em todos os níveis de ensino. Alia dinamicamente, Geometria, Álgebra e Cálculo oferecendo esses recursos em um ambiente totalmente conectado. A partir da versão 5.0 do GeoGebra, o mesmo passou a incluir a possibilidade de trabalho com objetos tridimensionais. Aliado ao potencial de ferramentas disponíveis para a construção e visualização de objetos, a movimentação dos mesmos, quer seja utilizando a ferramenta controle deslizante ou movimentando diretamente os objetos construídos, confere ao *software* a característica de um ambiente próprio para a exploração, análise, estabelecimento de conjecturas sobre possíveis propriedades, provas empíricas e soluções a problemas propostos, particularmente no âmbito da Geometria.

Com relação a visualização, Van Hiele (1986) aponta em sua teoria, que o reconhecimento visual é o primeiro nível do pensamento geométrico. A visualização e representação mental dos objetos geométricos, bem como a análise e a organização das propriedades geométricas relativas aos conceitos geométricos, de acordo com o autor, são passos preparatórios para o entendimento e formalização do conceito. Nessa mesma linha de pensamento, Borba (2011) afirma que a visualização condiciona o pensamento matemático, influenciando diretamente na produção do conhecimento. Neste sentido, a visualização possibilita o desenvolvimento de ideias para que o conceito seja compreendido e investigado. No que se refere a movimentação, concorda-se com Gravina (2001), quando pondera que o uso de *softwares* de representação dinâmica propicia aos estudantes a construção de significados por meio da movimentação, a qual possibilita aos mesmos a oportunidade de realizar análises, levantar hipóteses e conjecturas, o que, de acordo com a autora, ocorre de maneira limitada quando as figuras geométricas são estáticas, conforme apresentado em livros ou representações realizadas pelos professores.

Giraldo, Caetano, Mattos (2012) apontam, especialmente, o potencial dos *softwares* de Geometria Dinâmica no processo de ensino e aprendizagem da Geometria.

> Os *softwares* de Geometria Dinâmica permitem a construção de objetos geométricos de acordo com as propriedades ou relações estabelecidas. Eles podem então ser manipulados dinamicamente, de tal maneira que as propriedades e relações sejam preservadas. Esse modo particular de construção geométrica apresenta características especiais, que podem ter consequências importantes para a aprendizagem (Giraldo; Caetano; Mattos, 2012, p.168).

Neste contexto, optou-se pelo uso do *software* GeoGebra por disponibilizar uma tela de trabalho para análise dos objetos em 2D e 3D, em linguagem clássica da Geometria, possuindo recursos para construção de figuras a partir das propriedades que as definem. Zotto (2013) destaca que na janela de visualização 3D, se pode rotacionar a construção realizada considerando as coordenadas.

De acordo com Souza (2014), a utilização do *software* GeoGebra oferece recursos capazes de explorar conceitos matemáticos bem como despertar a capacidade criativa e o engajamento dos alunos na troca de ideias acerca dos conceitos em discussão. Sobre o GeoGebra, Fanti (2010) pondera que:

> [...] é uma importante ferramenta para despertar o interesse pela busca do conhecimento matemático principalmente com os alunos do ensino fundamental e médio. Possibilita trabalhar de forma dinâmica em todos os níveis da educação básica permitindo a abordagem de diversos conteúdos especialmente os relacionados ao estudo da geometria (Fanti, 2010, p.01).

Os argumentos apresentados buscam destacar que as tecnologias digitais exercem um importante papel na busca de novas opções de trabalho para o ensino e a aprendizagem. Concordase com Lorente (2009) quando afirma que, as tecnologias podem e devem fazer parte da vida escolar dos estudantes, tanto que, proporcione o desenvolvimento cognitivo e a aprendizagem Matemática.

Como já destacado, o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele foi tomado como referência para a constituição da UEA, assim como para a análise dos dados advindos da aplicação da mesma, motivo pelo qual aspectos do modelo passam a ser apresentados.

Modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele

O chamado modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele teve origem nas respectivas teses de doutorado de Dina e Pierre van Hiele, e está estruturado em cinco níveis de compreensão, descrevendo características do processo de pensamento, oportunizando avaliar e identificar, por meio desses níveis e das habilidades descritas em cada um, o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico e a aprendizagem adquirida pelo estudante (Crowley, 1994). Além dos níveis, o modelo apresentado indica propriedades e fases de aprendizagem que proporcionam situações que favorecem o avanço de nível dos estudantes.

O modelo de Van Hiele foi concebido para o desenvolvimento do pensamento geométrico considerando a Geometria Plana, no entanto, buscou-se lançar um olhar, a partir do modelo, para a Geometria Espacial (Rodrigues & Kaiber, 2016) o que é apresentado no quadro da figura 1.

Nível/Descritor	**Pensamento Geométrico Espacial/Habilidades**
Visualização Percepção de espaço como algo que existe no entorno; conceitos geométricos vistos como entidades totais, e não como entidades que têm componentes ou atributos; identificação de formas específicas e sua reprodução; aprendizagem de um vocabulário básico.	• Identifica figuras geométricas espaciais em objetos ou construções do seu entorno e em representações. • Identifica figuras geométricas no espaço e planificadas. • Constrói sólidos geométricos em cartolina, canudinhos, ou outros materiais. • Descreve figuras geométricas utilizando linguagem não padronizada (um cubo parece uma caixa), por exemplo.
Análise A partir da observação e experimentação, os alunos começam a perceber as características das figuras geométricas e a identificar as propriedades; reconhecem as figuras por suas partes. Todavia, neste nível, os estudantes ainda não conseguem explicar as relações entre propriedades, e fazer a inclusão de classes.	• Identifica, classifica e compara os sólidos segundo suas características e propriedades. • Identifica e desenha um sólido no espaço, a partir de uma descrição oral ou escrita de suas propriedades. • Identifica o sólido de diferentes vistas. • Faz deduções superficiais a partir de exemplos. • Utiliza vocabulários e símbolos apropriados. • Resolve problemas geométricos que requeiram o conhecimento das propriedades dos sólidos no espaço e das relações geométricas.
Dedução Informal Consegue fazer inter-relações de propriedades entre diferentes figuras; são capazes de deduzir propriedades e reconhecer classes de figuras; fazem inclusão de classes, compreendem o significado das definições; acompanham uma prova informal, mas não tem condições de fazê-la.	• Demonstra compreensão do significado do conceito, definições, propriedades, características de cada figura geométrica espacial. • Desenvolve e usa definições para descrever os sólidos. • Faz inclusão de Classes. • Apresenta argumentos informais, a partir de construções de sólidos ou desenhos. • Resolve problemas considerando as propriedades e inter-relações entre as figuras. • Identifica informações implícitas em determinado sólido espacial ou em alguma informação.

Figura 1. Geometria Espacial na perspectiva dos níveis de compreensão do modelo de van Hiele

A caracterização feita pelas autoras indica os cinco níveis preconizados no modelo, salienta-se, contudo, que neste artigo foram destacados apenas os três primeiros níveis do modelo (nível de visualização, nível de análise e nível de dedução informal) envolvidos nas análises apresentadas.

Metodologia

Os resultados aqui apresentados foram obtidos a partir de uma investigação, de cunho qualitativo, cujo objetivo era investigar as possíveis contribuições do uso de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA), no desenvolvimento de conceitos da Geometria Espacial por um grupo de 40 estudantes do terceiro ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual do Município de Canoas/ RS, Brasil.

A UEA foi constituída por um conjunto de materiais didáticos e de atividades a serem desenvolvidos em sala de aula, com recurso às tecnologias digitais, entre outros. As mencionadas atividades foram organizadas em três eixos: Geometria de Posição, abrangendo relações de posição entre retas, planos e planos e retas; Noções primitivas e Conhecimentos Básicos, retomando conceitos trabalhados ao longo da Educação Básica, como elementos, classificação, nomenclatura de figura e sólidos geométricos; e Poliedros, envolvendo Prismas e Pirâmides.

A investigação ocorreu em 12 encontros de 50 minutos cada, em sala de aula com os estudantes. A professora pesquisadora assumiu a turma neste período, abordando temáticas referente à Geometria Espacial, conforme já estava estabelecido no plano de ensino pela escola.

Os resultados apresentados neste artigo, são oriundos de uma atividade proposta no eixo Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos da Geometria, apresentada no quadro da Figura 2. Os estudantes realizaram a atividade organizados em grupos, entretanto, ao longo da UEA foram propostas atividades as quais foram realizadas tanto em grupo como individualmente.

1. Com auxílio do *software* GeoGebra construa sólidos geométricos, e indique:
   - características observadas no sólido construído;
   - se é convexo ou não convexo;
   - sua nomenclatura, quando possível.

   Utilize-se das ferramentas disponibilizadas pelo *software* para representar seu objeto geométrico.

Figura 2. Atividade do eixo Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos

Após as construções realizadas no *software*, seguido de uma discussão no grande grupo sobre as características dos diferentes sólidos construídos, foi solicitado aos estudantes que dessem continuidade ao que a atividade solicitava. No que segue, serão apresentadas resultados e as análises provenientes da realização da atividade, tomando como referência aspectos do modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele tal como destacado no quadro da Figura 2.

Análise da atividade realizada no *Software* GeoGebra

A utilização do GeoGebra permitiu aos alunos realizarem construções geométricas, que não são feitas usualmente com régua e compasso. Assim, com os recursos disponíveis foi possível lançar diferentes olhares para o mesmo objeto, propiciando experimentar, lançar hipóteses e testá-las, conjecturar, manipular os objetos buscando extrair características, propriedades e relações geométricas.

Destaca-se a construção no *software* GeoGebra realizada pelo grupo de estudantes, denominado grupo A. O grupo realizou a atividade (Figura 3) demonstrando muita habilidade e criatividade no uso do *software,* assim como conhecimento sobre o conceito envolvido.

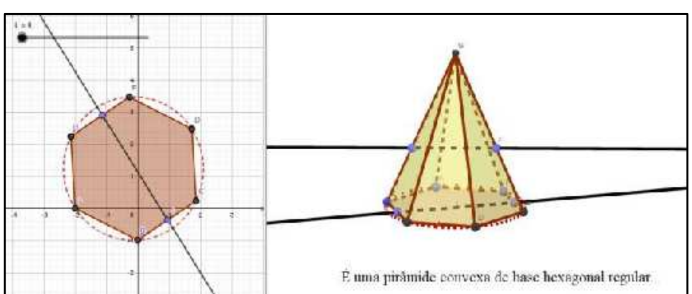
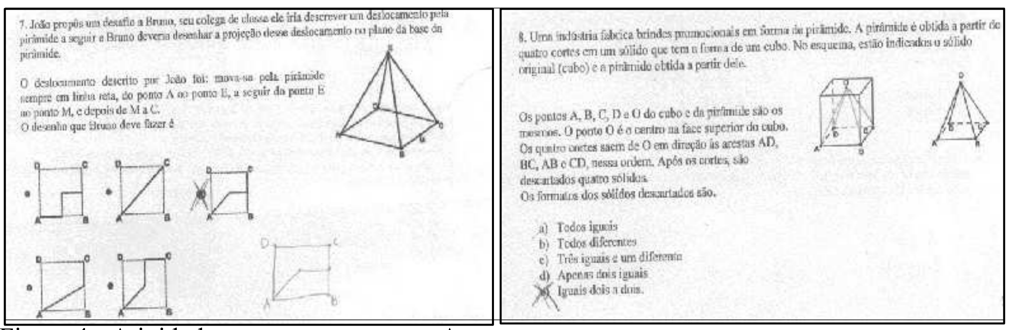


Figura 3. Construção do grupo A

O *software* GeoGebra, oportunizou com que os estudantes trabalhassem a construção, planificação, classificação, reconhecimento de elementos e propriedades. Observando a construção apresentada pelo grupo foi possível identificar que os mesmos, possuíam domínio de definições e propriedades geométricas importantes para o desenvolvimento do pensamento geométrico, como, a construção da circunferência circunscrita ao polígono e também inscrita, constatando, assim, ser um polígono regular, bem como a construção da reta interceptando o mesmo, buscando identificar se o polígono construído era convexo, evidenciando possuir conhecimentos geométricos prévios adequados.

Destaca-se, nesta atividade, que o *software* proporcionou aos estudantes a construção do objeto em um tempo menor do que se o mesmo tivesse sido elaborado com ferramentas tradicionais (régua e compasso). Além disso, propiciou com que os estudantes realizassem conjecturas, levantassem hipóteses e questionamentos partir da observação da movimentação de suas construções efetuadas, simultaneamente, nas janelas de visualização 2D e 3D.

Ressalta-se que as potencialidades do uso do *software* foram evidenciadas ao longo do desenvolvimento da UEA, como por exemplo nas atividades apresentadas na Figura 4, as quais foram realizadas logo em seguida. Em tais atividades, além do conhecimento envolto, buscava-se identificar as estratégias dos estudantes para realização das mesmas.


7. João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.

O deslocamento descrito por João foi: move-se pela pirâmide sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.

O desenho que Bruno deve fazer é

8. Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.

Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é o centro na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas AD, BC, AB e CD, nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

Os formatos dos sólidos descartados são.

a) Todos iguais
b) Todos diferentes
c) Três iguais e um diferente
d) Apenas dois iguais
e) Iguais dois a dois.

Figura 4 - Atividades propostas ao grupo A

Em ambas atividades, os estudantes optaram por representar, no *software*, as informações contidas no enunciado, para então analisar e conjecturar sobre a questão. As soluções apresentadas que envolveram a construção no *software* e sua solução justificada, apontaram para a importância dos aspectos visuais e de movimentação proporcionados pelo *software*, o que, entende-se contribuiu para a solução.

Borba e Villareal (2005) salientam que o uso de ferramentas digitais pode auxiliar na visualização da construção dos objetos, proporcionando que o estudante desenvolva o pensamento geométrico. Nesse sentido e considerando que a visualização na Geometria é de grande relevância para a aprendizagem, uma vez que, não havendo essa habilidade de criação mental a dificuldade para justificar ou validar resultados obtidos é grande, conforme destacado por Santos (2006). Considera-se que o trabalho com o *software* contribuiu significativamente para a apropriação dos conhecimentos pelos estudantes. De acordo com o modelo de van Hiele adaptado, considera-se que os estudantes transitam entre o nível de análise e o nível de dedução informal, visto que, conseguiram realizar as atividades que requeriam conhecimento de propriedade dos sólidos, assim como estabeleceram relações.

Assim como o grupo de estudantes destacado neste artigo, a turma envolvida na investigação apresentou um bom desempenho na realização das atividades no que se refere aos níveis do modelo de Van Hiele. Foi possível identificar que a turma já possuía desenvolvidas as habilidades referentes ao nível de visualização, porém, quanto ao nível de análise, foi constatado um avanço ao longo da aplicação da unidade. Já no nível de dedução informal foi onde ocorreu o maior avanço, visto que, no início da investigação a turma não evidenciava as habilidades necessárias para o trabalho neste nível. Porém, ao longo do desenvolvimento da UEA os conceitos geométricos pertinentes foram sendo trabalhados com foco nas habilidades referentes a esse nível, o que resultam em um avanço significativo no mesmo.

Considerações Finais

A atividade tinha por objetivo analisar as contribuições do uso das tecnologias digitais no desenvolvimento da intuição, da percepção e do raciocínio geométrico, contribuindo, assim para o desenvolvimento da habilidade de visualização, com amparo nos descritores indicados no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele (nível de visualização, nível de análise e nível dedução informal), voltado à Geometria Espacial.

Destaca-se, que os estudantes articulavam muito bem no nível de visualização (nível 1),não apresentando dificuldades na identificação e representação do objeto construído no *software,* nem na atividade proposta posteriormente. Já, com relação às habilidades correspondentes aos níveis de análise (nível 2) e de dedução informal (nível 3), percebeu-se, o progresso dos estudantes do grupo A, visto que, mostraram facilidade em reconhecer características, propriedades dos objetos geométricos propostos, bem como, apropriação das definições e conceitos dos sólidos geométricos.

Agradecimentos: O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e à FULBRA – Fundação Ulbra pelo apoio para a participação do evento.

Referências

Borba, M. C.; VILLARREAL, M. V. *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. v. 39, New York: Springer, 2005.

Brasil. *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular* – Documento preliminar. MEC. Brasília, DF, 2018. Disponível em: <http:// http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf >. Acesso em: 27/05/2018.

Dreyfus, T. H, Nurit. Euclides deve permanecer e até ser ensinado.In: LINDIQUIST, Mary. SHULTE. Albert P. *Aprendendo e ensinando geometria*. Trad. Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1994.p. 50-71.

Fainguelernt, E. K. *Educação Matemática: representação e construção em Geometria*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

Fanti, E. L. C.. *Utilizando o software Geogebra no ensino de certos conteúdos matemáticos*. Disponível em <http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Conferencias%20Apresentadas/C%203.pdf>. Acesso em: 18/06/2016.

Gravina, M. A; Basso, M. V. A. *Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática*. p.180, elaborado, Biblioteca Central da Universidade Federal do Rio grande do Sul. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

Gravina, M. A. *Os ambientes de geometría dinámica e o pensamento hipotético-dedutivo***.** Tese de Doutorado, Porto Alegre: UFRGS, 2001.

Giraldo, V; Caetano, P.; Mattos, F. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT, 06).

Hoffer, A. *Geometry is more than Proof. The Mathematics Teachears*, vol 74, n.1, p.11-18, 1981.

Kaiber, C. T; Conceição, C. P. Software Educativo e o Ensino da Trigonometria**.** In: LEIVAS, J. C. P. Educação Matemática em Revista – RS. p. 37-50, n. 8, ano. 8, 2007

Kenski, V. M.. *Tecnologias e Ensino Presencial e a Distância*. 9. ed. Campinas: Papirus, 2015

Lorente, F. M. P. *Usando a Calculadora nas aulas de Matemática***.** 2009. Disponível em < http:// http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/371-4.pdf f> Acesso em 20 de Janeiro, 2017.

Santos, C. S. *A produção Matemática e um ambiente virtual de aprendizagem: o caso da Geometria Euclidiana Espacial.* 2006, p. 145. Dissertação do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2006.

Souza, L. A. *Uma Proposta pata o Ensino da Geometria Espacial usando o GeoGebra 3D*. 2014, 79p. Mestrado Profissionalizante (Programa de Pós-Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Paraíba, 2014.

Valente, J. A. (org.) *O computador na sociedade do conhecimento*. Campinas, SP:UNICAMP/NIED, 1999. 156p.

Zotto, N. D; Machado. G. M. Z; Mello. K. B; Silva. R. S. *GeoGebra 3D e quadro interativo: uma possibilidade para o ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio.* Anais do VI CIEM – Canoas, Ulbra, 2013. Disponível em <http:// www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/view/778/621> Acessado em 21/03/2016.

Conocimiento geométrico en contextos escolares

Myrian Luz **Ricaldi** Echevarria
Universidad Femenina del Sagrado Corazón
Perú
myrianricaldieb@unife.pe

Resumen

El presente artículo describe los resultados de la aplicación de una prueba diagnóstica para determinar el nivel de conocimiento geométrico de dos grupos de estudiantes del segundo grado de secundaria en la ciudad de Lima. La investigación es de naturaleza cualitativa, toma elementos teóricas del modelo de Van Hiele. El objetivo del estudio fue describir las dificultades asociadas al estudio y comprensión de temas geométricos en estudiantes del nivel de educación secundaria. Los hallazgos más importantes son que los estudiantes pueden relacionar las propiedades de una figura con otras propiedades de la misma figura, pero en diferentes contextos no pueden establecer esa relación; además, no poseen el vocabulario propio al nivel que el programa de estudios que le corresponde.

Palabras clave: evaluación diagnóstica, conocimiento geométrico, modelo de Van Hiele, limitaciones del aprendizaje, educación secundaria.

Introducción

Cuando se analiza un problema didáctico es necesario hacer explícita la concepción del conocimiento que subyace a la intervención de los procesos de construcción, tal concepción enfocará la atención en aspectos del contenido matemático y tecnológico que definirán dichos procesos. En este sentido, la presente investigación pretende realizar un estudio de carácter descriptivo, desde el punto de vista socio-constructivista que describa y analice el nivel de conocimientos geométricos logrado por los estudiantes del segundo grado de secundaria.

Objetivo de la investigación

Describir las dificultades asociadas al estudio y comprensión de temas geométricos vinculados al estudio del triángulo en estudiantes del nivel de educación secundaria.

Marco Teórico

Cuando se incorpora un saber al sistema educativo como objeto de enseñanza se focaliza con una intencionalidad didáctica. Esto tiene que ver con la epistemología del conocimiento para entender la razón de ser de su incorporación al ámbito escolar. En el caso de la Geometría, se inicia el estudio exploratorio en el libro clásico de historia de la matemática de Boyer (1996) que dice:

> La geometría euclidiana plana consiste en el estudio de las figuras del plano, incluidas las áreas y longitudes, que permanecen invariantes bajo el grupo de las transformaciones que se genera por las traslaciones y rotaciones en el plano, llamadas transformaciones rígidas o movimientos. (p. 678)

De lo anterior se podría afirmar que resulta natural reconocer que el ser humano desde su primera infancia experimenta directamente con las formas de juguetes u otros elementos. Al mismo tiempo, cuando se mueve actúa sobre su entorno tomando posesión del espacio. Además, en este proceso se orienta, analiza las formas y establece relaciones espaciales. Por lo tanto, el estudio inicial de la geometría debería estar indisolublemente relacionado con la experiencia a través de los sentidos.

Al mismo tiempo, algunos autores señalan que los docentes tienden a no enseñar contenidos geométricos, a pesar de figurar en los programas, por desconocimiento del área o por no valorar su real importancia (Báez e Iglesias, 2007). En este panorama de necesidades todavía no atendidas se considera que la geometría escolar es importante porque:

- Estimula el razonamiento y posibilita el desarrollo de habilidades como clasificar, definir, particularizar, generalizar, etc. (Pérez y Guillén, 2007).
- Desarrolla la percepción espacial y la visualización. En este proceso la visualización es esencial para lograr una adecuada percepción espacial.
- Forma parte del lenguaje cotidiano, se encuentra presente en la comunicación referida a la ubicación, el tamaño o la forma de objetos.
- Tiene importantes aplicaciones en la vida real, muchas aplicaciones cotidianas involucran una base geométrica.
- Sirve como base para la comprensión de conceptos de otras disciplinas; además, es un recurso para la visualización de diversos conceptos.

Investigaciones más recientes respaldan y justifican la necesidad de incorporar el estudio de la geometría en contextos escolares. Así, tenemos a Sharygin (2004) quien indaga sobre los motivos que justifican el estudio de la geometría en la escuela y argumenta que son varios: valor práctico, conocimiento, desarrollos cultural, espiritual, intelectual, creativo, estético, mental y moral. Particularmente Bartolini (2007) considera a las perspectivas espaciales como objeto de enseñanza por su relevancia: matemática, cultural, cognitiva, social y educativa.

Las investigaciones antes señaladas dan un marco para el estudio de la Geometría a nivel escolar. Por otro lado, es relevante precisar que en su estudio se sugiere dejar de lado el énfasis en los cálculos operativos y en los resultados meramente numéricos centrados en la medición. En contraposición, hay que incidir más en el desarrollo de las nociones geométricas y en el establecimiento de las relaciones entre éstas; en la visualización de elementos, en la representación gráfica de situaciones y figuras, para atender a sus propiedades. Al mismo tiempo, es necesario enfatizar en el uso de la justificación lógica, que considere, al mismo tiempo, el nivel de evolución del pensamiento de los estudiantes según su edad.

Por otro lado, la presente investigación considera como marco teórico de referencia, desde la perspectiva matemática, la teoría de niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. En *The Childs Thought and Geometry*, Pierre Van Hiele (1984), describe la influencia de la evolución del pensamiento geométrico en el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico. De acuerdo a esta teoría, el aprendizaje de la geometría se hace pasando por unos determinados niveles de pensamiento y conocimiento, que no se asocian a la edad y que sólo permiten el tránsito de un nivel a otro superior cuando se ha logrado el dominio de habilidades secuenciales.

Según Van Hiele, en la base del aprendizaje de la geometría hay dos elementos importantes: el lenguaje utilizado y la significatividad de los contenidos. El primero implica que los niveles, y su adquisición, van muy unidos al dominio del lenguaje adecuado y, lo segundo, que sólo van a asimilar aquello que les es presentado a nivel de su razonamiento.

A continuación, se describirán las características de cada uno de los niveles.

Para el nivel 1 (Reconocimiento):

- Percepción de los objetos en su totalidad y como unidades.
- Descripción de los objetos por su aspecto físico, se diferencian o clasifican considerando semejanzas o diferencias físicas entre ellos.
- No se suelen reconocer explícitamente los elementos característicos ni las propiedades de los objetos.

Para el nivel 2 (Análisis):

- Percepción de los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, aunque no se identifican las relaciones entre ellas.
- Descripción de los objetos con listas de propiedades, que puede que no sean suficientes para caracterizar el objeto o que se incluyan más de las necesarias.
- Deducción de nuevas propiedades a partir de la experimentación y posible generalización a todos los objetos de la misma familia.
- La demostración de una propiedad se realiza mediante la comprobación en uno o en pocos casos.

Nivel 3 (Ordenación o clasificación)

- Se pueden realizar clasificaciones lógicas de los objetos considerando propiedades o relaciones ya conocidas.
- Comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos.
- Utilización de razonamientos deductivos informales para demostrar una propiedad. Se detecta la necesidad de justificar de manera general la veracidad de una propiedad.
- Comprensión de los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, pero no del encadenamiento de estos pasos ni de la estructura de una demostración.
- Incapacidad para realizar una demostración completa en la que haya que encadenar varias implicaciones, y tampoco se siente su necesidad. Esto explicaría porque no se comprende la estructura axiomática de las matemáticas.

Nivel 4 (Deducción formal)

- Se realiza, según su necesidad, deducciones y demostraciones lógicas y formales para justificar las proposiciones planteadas.
- Comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos.
- Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas formas de demostraciones para obtener un mismo resultado.

Nivel 5 (Rigor)

- Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías.
- Se puede trabajar la geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático.

Se debe precisar que en las investigaciones reportadas suelen considerarse los tres o cuatro primeros niveles, según el nivel educativo donde se lleven a cabo tales investigaciones.

Participantes e instrumentos

Se recogió información de dos grupos de estudiantes varones del 2do grado de secundaria, cada uno de los grupos estaba formado por 26 estudiantes y sus edades fluctuaban entre 11 y 13 años. En cuanto al tipo de muestra que se usó en el estudio esta fue intencional, lo cual permitió manejar de manera adecuada las características excepcionales; es decir, se buscó una muestra que era comprehensiva y que ponía el énfasis en los casos más representativos. Para la recolección de datos se aplicó una prueba diagnóstica, instrumento que buscó identificar las principales dificultades asociadas al estudio de temas geométricos. Para la elaboración de la prueba se consideraron elementos de la teoría de Van Hiele.

Estrategias para el análisis de los datos

Se establecieron categorías de análisis las mismas que emergieron del estudio de la información que se recogió. Durante los procesos de categorización, contrastación y teorización en función a las respuestas frecuentes de los participantes, se planteó el análisis, relación y comparación de las respuestas. Es decir, las categorías de análisis surgieron por las relaciones que se dieron entre las respuestas. En cuanto a la interpretación de los datos obtenidos estos se hicieron a la luz de los elementos de los niveles de razonamiento geométrico: visualización y reconocimiento, análisis, ordenación o clasificación, deducción formal y rigor. Estas herramientas, también, se usaron para el diseño de las preguntas de la prueba diagnóstica.

Análisis y discusión de los resultados

La prueba contenía 14 ítems de tipo textual y gráfico, algunos del nivel de identificación y otras más complejas donde los estudiantes debían analizar y sintetizar los datos. En la prueba se decidió utilizar ítems de respuesta abierta, ya que éstos permiten que los estudiantes expliquen con detalle su forma de trabajo y sus justificaciones a los procedimientos aplicados; además, su aplicación fue simultánea a los dos grupos durante un tiempo de 40 minutos. Un inconveniente derivado de la aplicación de este instrumento es que para los estudiantes fue más difícil expresarse por escrito que verbalmente, por lo que se evidenció la tendencia a dar respuestas cortas. A priori se consideró que la mayoría de ellos estarían en los niveles 1 y 2, por lo que los ítems se orientaron mayoritariamente a evaluar los niveles 1, 2 y 3.

El diseño de la prueba se centró en los siguientes contenidos: nociones básicas de geometría plana y espacial, propiedades vinculadas al cálculo de áreas y perímetros de cuadrados, rectángulos y triángulos. Estos contenidos fueron seleccionados considerando los programas curriculares de los dos años previos y del presente grado escolar. A continuación, se resume las características de los ítems elaborados considerando: número de ítems, contenido geométrico de los mismos y niveles de razonamiento evaluados por cada ítem. Cada nivel es evaluado por varios ítems, además, el mayor número de preguntas corresponden a los niveles 1 y 2.

Tabla 1
Características de la prueba diagnóstica de dificultades geométricas

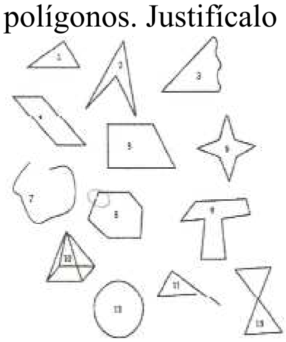
Ítem	*Niveles*			*Contenido geométrico*
	1	2	3	
P- 1	✓	✓		Clasificación de polígonos.
P- 2	✓	✓		Diagonales de un polígono.
P- 3	✓			Ubicación espacio- temporal
P- 4	✓			Polígonos y poliedros.
P- 5		✓	✓	Perímetro y área.
P- 6		✓	✓	Perímetro de un cuadrilátero.
P- 7			✓	Área de un cuadrilátero usando la noción de paralelismo.
P- 8		✓		Distancia entre puntos.
P- 9	✓			Relaciones de perpendicularidad, paralelismo y oblicuas.
P- 10	✓			Ángulos agudo, recto, obtuso y llano.
P- 11		✓	✓	Área y perímetro del triángulo equilátero y cuadrado.
P- 12	✓	✓		Ángulos alrededor de un punto.
P- 13		✓	✓	Relación entre el volumen y áreas.
P- 14		✓	✓	Área de cuadrados y triángulos.
Total	7	9	6	

Fuente: elaboración propia.

Análisis de los resultados teniendo en cuenta las categorías

A continuación, se presenta el análisis cualitativo de algunas de las respuestas:
Problema 1

Observa detenidamente cada una de las siguientes figuras. Indica aquellos que no son polígonos. Justifícalo en cada caso.

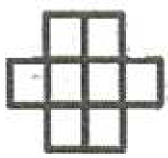


Para los estudiantes los polígonos tienen varios lados que se cierran. En sus argumentos el estudiante 1 escribió: "sólo es un polígono si sus segmentos se cierran" evidenciando con ello un nivel 1 dentro de los niveles de razonamiento geométrico, ya que usa propiedades de las figuras geométricas para describirlas en función al aspecto físico. Este mismo estudiante generó una especie de leyenda O = es un polígono, X = no es un polígono (ver Figura 1). En el caso 12, el estudiante marcó que es un polígono, esto devela que el estudiante no considera que los segmentos tienen que ser rectos. Por otro lado, de la respuesta al caso 13, este estudiante indicó que no veía un polígono porque en un vértice se cruzaban muchos segmentos.

El estudiante 2 confundió términos escribiendo: “polinomio es una figura con varios lados, cerrada y plana”. Esto tal debido a lo reciente del aprendizaje de algunas operaciones con polinomios. Esto devela una confusión semántica; sin embargo, analizando la respuesta del estudiante existe ambigüedad ya que no se especifica el carácter secuencial de los vértices los cuáles se unen con segmentos. La noción aprendida que persiste, pero que debe complementarse con lo anterior es que es una de figura cerrada. Otro estudiante al que llamaremos 3 sólo marcó de manera errónea y no justificó su respuesta. El estudiante 4, sólo escribió: “7 no está cerrado y 11 no está cerrado”. Se podría considerar que la característica cerrada es para él una justificación. Por otro lado, el estudiante 5, escribió: “sólo la 3, 7 y 11 no son polígonos porque sus lados no se cierran”. Todos los estudiantes consideraron de manera errónea a la circunferencia como un polígono, ninguno de ellos preciso la naturaleza recta de los lados como característica de los polígonos.

Problema 5

La siguiente figura formada por cuadrados idénticos tiene perímetro 42 cm. ¿Cuál es el área de la figura?



El problema evaluaba la relación que había entre el área y el perímetro de una figura compuesta de varios cuadrados. En relación a las respuestas de los estudiantes, se detalla lo siguiente: los estudiantes 1 y 2 contestaron correctamente, mostrando los cálculos y relaciones establecidas. Por otro lado, los estudiantes 3, 4 y 5 confundieron la medida de lados con perímetros y no distinguieron la diferencia entre área y perímetro. Esto refleja un análisis inadecuado de las relaciones de estas propiedades.

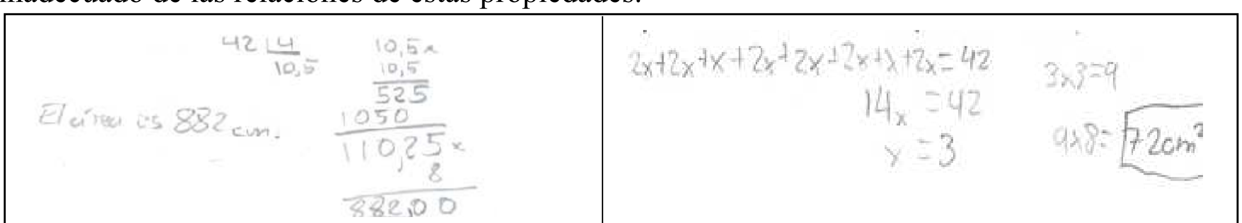
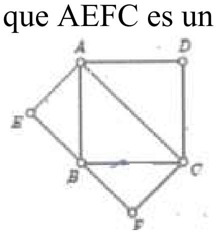


Figura 1. Respuestas de los estudiantes 5 y 1 a la pregunta Nº 5.

Problema 7

La forma de la biblioteca de Alejandría, la más rica de la antigüedad, tenía la forma indicada en la figura: Sabiendo que EF es paralelo a AC, que ABCD es un cuadrado de 40 m de lado y que AEFC es un rectángulo, calcular la medida del área ocupada por la biblioteca.



Este problema demandaba que el estudiante reconozca que algunas propiedades se deducen de otros datos, relacionen y clasifiquen figuras basándose en propiedades. Se comparte algunas de las soluciones presentadas por los estudiantes: Los estudiantes 1 y 5 colocaron en el dibujo la información del lado. Por otro lado, el estudiante 2 señaló algunas operaciones que conducen a la respuesta correcta del problema. El estudiante 3, indicó en el dibujo datos incorrectos y señaló al margen una operación aritmética. El estudiante 4 completó datos en el dibujo en forma incorrecta, además, mostró una adición que arrojaba un resultado incorrecto.

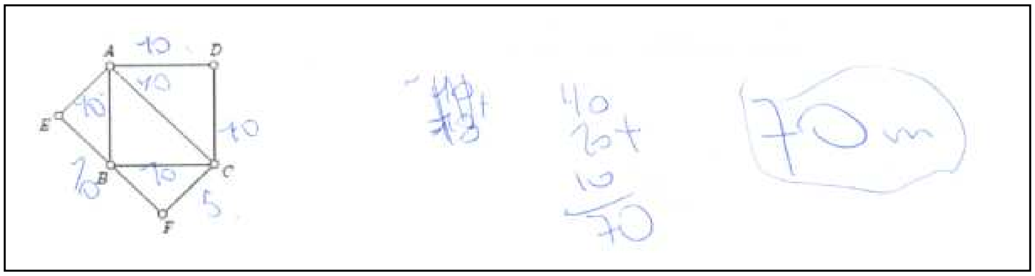


Figura 2. Respuesta del estudiante 4 a la pregunta Nº 7.

Problema 13

José pinta las paredes de un almacén que tiene 6 metros de largo, 4 de ancho y 3 de alto. ¿Qué área pintara, si solo deja de pintar la puerta cuyas medidas son de 1 metro de ancho por 2 de alto?

Los estudiantes 1 y 2 contestaron correctamente. Además, mostraron las operaciones que los llevaron a esos resultados. Además, indicaron correctamente las unidades m^2 que corresponden a las áreas. En contraparte los estudiantes 3,4 y 5 calcularon el volumen del paralelepípedo presentado y luego le restaron 2. Es decir, restaron magnitudes cuadradas de unas magnitudes cúbicas cayendo en el error de operar con magnitudes de unidades diferentes. Además, que mostraron poca comprensión del enunciado propuesto al confundir áreas con volúmenes.

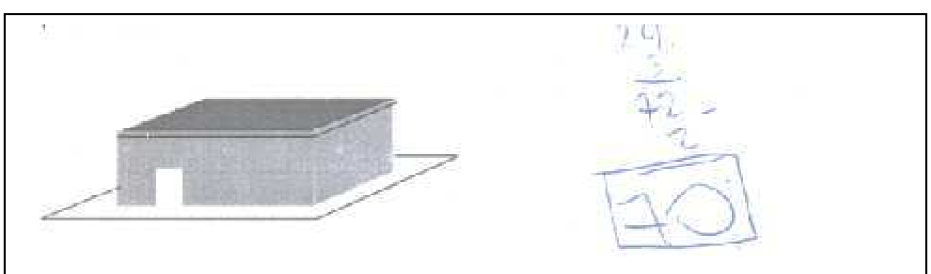


Figura 3. Respuesta del estudiante 4 a la pregunta Nº 13.

Conclusiones

Los estudiantes pueden relacionar las propiedades de una figura con otras propiedades de la misma figura, pero en diferentes contextos no pueden establecer esa relación.
Además, no poseen el vocabulario propio al nivel que el programa de estudios asume que debían tener. Por otro lado, los estudiantes comprenden algunas de las interrelaciones existentes entre diversas propiedades de una figura geométrica cuando se hace que centren su atención en éstos, pero si se les presenta dos situaciones aparentemente diferentes por sí mismos no las clasifican como pertenecientes a la misma familia, por lo que les es difícil resolver problemas distintos a los propuestos. Ante esta situación se recomienda atender las restricciones de origen matemático y didáctico, sobre todo porque algunas respuestas de los estudiantes develan un limitado manejo conceptual, es importante también promover la creación de problemas reales que permitan el tránsito de lo concreto a lo abstracto y cuya conceptualización y solución se de en diferentes registros de representación. En este sentido, sería relevante proponer diferentes puntos de acceso al conocimiento, partiendo del entorno y superando la atomización de los contenidos geométricos; también es aconsejable relacionar la geometría plana con la geometría del espacio, especialmente, para ampliar algunas definiciones en un entorno más real para el estudiante.

Bibliografía y referencias

Báez, R., y Iglesias, M. (2007). Principios Didácticos a Seguir en el Proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría en la UPEL "El Mácaro". *Enseñanza de la Matemática 12 al 16*, 67-88.

Bartolini, M. (2007). Semiotic mediation: fragments from a classroom experiment on the coordination of spatial perspectives. *ZDM Mathematics Education 39*, 63-71.

Boyer, C. (1996). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Pérez, S. y Guillén, G. (2007). Planeamiento de un proyecto de investigación sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la Geometría y su enseñanza. En P. Bolea, M. Camacho, P. Flores, M. Gómez, J. Murillo y M.T. González (Eds.). *Investigación en Educación Matemática.* Comunicación de los grupos de investigación XI Simposio de la SEIME, Octubre, Tenerife.

Sharygin, I. (2004). On the concept of School Geometry. En J. Wang & B. Xu (Eds.). *Trends and challenges in Mathematics Education* (pp. 43-51). Shanghai: East China Normal University Press.

Van Hiele, P. M. (1984). A child's thought and geometry. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina Van Hiele-Geldof and P.M. Van Hiele* (pp. 242-252). Brooklyn: Brooklyn College.

Enseñanza del pensamiento espacial y geométrico mediado por herramientas tecnológicas

Yessica Paola **Díaz** Lugo
Universidad del Cauca
Colombia
ydiazl@unicauca.edu.co
Yeny Leonor **Rosero** Rosero
Universidad del Cauca
Colombia
yrosero@unicauca.edu.co

Resumen

En la actualidad, una de las problemáticas en la enseñanza de la geometría es la falta de dinamismo en los objetos geométricos, para esto una alternativa es la implementación de herramientas tecnológicas que permitan al estudiante descubrir el espacio geométrico y dotarlo de significado; situación que requiere un cambio en las prácticas docentes. En este sentido, se diseña una secuencia didáctica seleccionando actividades mediadas por tecnologías. Los estudiantes se motivan por el uso de software y para proponer diferentes representaciones de objetos geométricos usan las nociones de geometría activa, otorgando un significado a estos objetos; por su parte los docentes se sienten atraídos por resolver situaciones problema con la mediación de software. Esta investigación se debe a una reflexión crítica sobre una búsqueda de fenómenos educativos en la Escuela Normal Superior de Popayán.

Palabras clave: herramientas computacionales, pensamiento espacial, geometría activa, secuencia didáctica, mediación tecnológica

Mediación de herramientas tecnológicas en el aprendizaje de la geometría

En la actualidad, los estudiantes están inundados de herramientas tecnológicas, su cotidianidad se ve afectada de diversas maneras; sin embargo se refleja cierto desinterés e incapacidad para hacer uso de ellas en el ámbito académico. Aspecto que también se evidencia en algunos profesores que enseñan matemáticas, esta situación incide en el aprendizaje de los actuales estudiantes ya que no perciben una relación directa de las matemáticas con las tecnologías que usan diariamente, ni tampoco comprenden el significado de los objetos matemáticos que estudian.

Moreno (2015) expresa, que uno de los problemas en la enseñanza de las matemáticas son las dificultades en la apropiación de fragmentos de conocimiento, en cómo se construye un proceso “dialógico” estable y permanente, entre estudiantes y profesores sobre el significado de los objetos matemáticos.

En consecuencia, el reto para los maestros debe ser dotar de significado a los objetos matemáticos con el apoyo de herramientas computacionales para que, según Moreno (2001) la “sinapsis matemática” (p. 82) (ensamble entre los objetos matemáticos y los recursos computacionales) tenga un sentido.

Otro aspecto del problema es cómo atraer la atención de los estudiantes en el momento de presentarles un nuevo conocimiento matemático, generando la necesidad de incursionar e interponer en el aula de clase una nueva herramienta, ocasionando la producción de un nuevo currículo impulsado por el uso de tecnologías.

Moreno (2001) afirma que “el pensamiento matemático del estudiante queda afectado radicalmente por la presencia de la herramienta” (p. 85), el docente decide presentar un objeto digital al estudiante para ampliar su propio pensamiento y visión matemática. Ante esta situación se hace necesario diseñar estrategias didácticas que ayuden a articular el objeto matemático con las TIC (tecnologías de la información y comunicación), lo que significa cambios en la práctica docente con la introducción generalizada de las TIC, formando adecuadamente al profesorado en el aprovechamiento didáctico de estas (Bracho y Maz, 2013). Esto lleva, a formular la pregunta: ¿Cómo las herramientas tecnológicas, contribuyen al desarrollo de pensamiento espacial y geométrico en estudiantes que inician la secundaria?

Metodología

Esta investigación es cualitativa, el método es investigación acción y la técnica es la observación. La población la conforma un grupo de estudiantes de grado sexto y se indaga por problemáticas educativas existentes en el aula de clase al estudiar la esfera y los poliedros, luego se realiza una reflexión de lo descubierto en la inmersión inicial en el aula, sustentada por algunos referentes teóricos que argumentan las representaciones de los estudiantes. Con ellos, se utiliza los software: SketchUp y Poly Pro, como herramientas mediadoras del conocimiento y, para el trabajo con los docentes, en la modelación de algunos problemas matemáticos, además, se utiliza geogebra y Excel según se requiera.

Resultados

Las evidencias corresponden al trabajo realizado con: estudiantes y profesores. El análisis de los resultados con los estudiantes son divididos en tres categorías; la primera es la categoría discurso natural que interpreta las diferentes evidencias que muestran la visualización de los estudiantes del entorno junto a su lenguaje natural; Alsina (1989) menciona que “la enseñanza de la geometría puede ser caracterizada como el estudio de las experiencias espaciales” (p. 15) en consecuencia, la modulación de conocimientos e intuición geométrica lleva al estudiante a la percepción espacial, un ejemplo de esto es la figura 1, en la cual se observa un representación en la que los estudiantes ponen en manifiesto el concepto de perspectiva reproduciendo, en una superficie plana, la profundidad de la figura tridimensional, generando la identificación de propiedades y el acercamiento de un lenguaje más preciso y estructurado

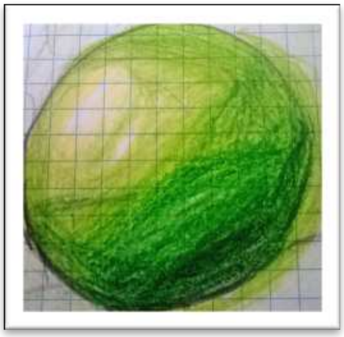


Figura 1 Dibujo de uma pelota

E1: "puede hacer un giro de 360° grados"

E2: "la pelota tiene grosor"

La segunda es la categoría transición de lo bidimensional a tridimensional; se realiza la representación de figuras tridimensionales, en un espacio bidimensional y viceversa, con el objetivo de comunicar y revelar información de un objeto tridimensional partiendo de representaciones y relaciones de figuras planas (MEN, 1998), un ejemplo es la figura 2, en ella se observa la representación de un objeto tridimensional en una pantalla de video, el software utilizado permite que el estudiante transforme la figura, en un objeto dinámico y visualice el espacio tridimensional en el que fue construido observando el objeto en una sola vista

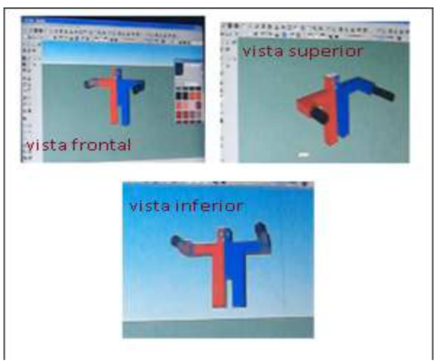


Figura 2 Vistas de un objeto tridimensional

La tercera es la categoría operatoria, aquí se estudia el conjunto de figuras geométricas tridimensionales analizadas desde el punto de vista de unidades figurales que las componen, combinadas con las modificaciones realizadas por los estudiantes, es así como "todas estas transformaciones promueven operaciones específicas y constituyen la heurística de las figuras" (Duval, 1995, p.156), dichas transformaciones se hacen evidentes en el uso de software y la concepción de geometría activa. En la figura 3 el estudiante construye su representación a partir de figuras geométricas "base" sobre las cuales se deducen operaciones, relaciones y nuevos elementos que soportan la construcción de la figura, es así como se logra captar las transformaciones correspondientes para formar en este caso cuerpos redondos como el cilindro y el cono.

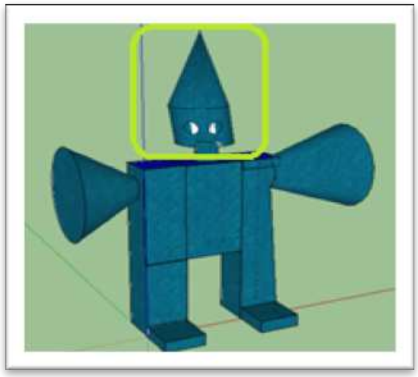


Figura 3 Representación de una figura

Por otro lado, en los docentes, el interés por la articulación de las TIC en la enseñanza de las matemáticas, confiere un espacio de aprendizaje en donde se estudia algunos problemas matemáticos ((Matemático, 2018)), indicando algunos estándares básicos de competencias que se pueden alcanzar en cada uno de los ejercicios propuestos, con el fin de revelar las potencialidades de la articulación entre una herramienta tecnológica y los saberes matemáticos. Uno de los problemas es el siguiente: la figura 4 muestra un pentágono. Se dibujan cinco circunferencias con centros en A, B, C, D y E de tal manera que las circunferencias de centros consecutivos son tangentes entre sí. Las longitudes de los lados del pentágono se dan en la figura. ¿Qué punto es el centro de la circunferencia de mayor radio? A, B, C, D o E. La figura 4 muestra una representación, la visualización del problema realizado en Geogebra. Ante la necesidad de formalizar el resultado se busca un método de solución más preciso, es así como se recurre a plantear un sistema de ecuaciones lineales (figura 5 y 6).

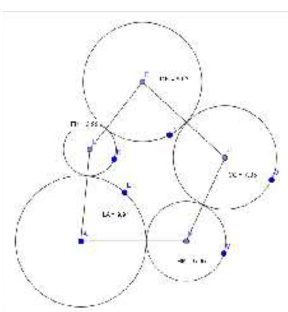


Figura 4 Modelación de un problema matemático en Geogebra

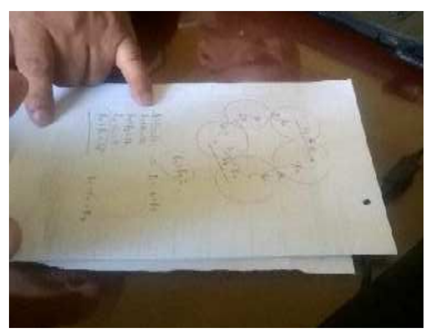


Figura 5 Docent*e* estableciendo las ecuaciones correspondientes con ayuda de un dibujo

$$
\begin{aligned}
r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 &= 16\\
0r_1 + r_2 + r_3 + 0r_4 + 0r_5 &= 14\\
0r_1 + 0r_2 + r_3 + r_4 + 0r_5 &= 17\\
0r_1 + 0r_2 + 0r_3 + r_4 + r_5 &= 13\\
r_1 + 0r_2 + 0r_3 + 0r_4 + r_5 &= 14
\end{aligned}
$$

Figura 6 Sistema de ecuaciones para el problema

Conclusiones

La secuencia didáctica permite que el docente seleccione y diseñe actividades para generar en los estudiantes un aprendizaje significativo.

El diseño curricular es basado en la geometría activa, articulado con herramientas computacionales que actúen como mediadoras del conocimiento; lo que produce un cambio en la presentación de las matemáticas a los estudiantes

La mediación tecnológica junto con el análisis cualitativo y cuantitativo de figuras geométricas, permite dar soporte a la interpretación de objetos matemáticos modelados.

Las herramientas tecnológicas permiten realizar representaciones de un objeto matemático desde diferentes concepciones del pensamiento matemático y se constituyen en mediadoras del conocimiento.

El uso de tecnologías en el aula es un proceso que requiere superar ciertas competencias tecnológicas.

Referencias y bibliografía

Moreno Armella, L. (15 de febrero del 2017). De la geometría a la geometría dinámica.

Moreno Armella, L., Lupiañez, J. L. (2002). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En Ministerio Nacional de Educación. República de Colombia (Ed.), Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas (pp. 248-256). Bogotá, Colombia: Enlace Editores.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf.

Alsina, C., Pérez, R., Fortuny, J, (1997). ¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO. Madrid, España: EDITORIAL SINTESIS

Matemático, A. C. (24 de 10 de 2018). *Canguro Matemático*. Obtenido de http://www.canguromat.org.es/canguro2002/ikg2002.html

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Moreno Armella, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En Ministerio Nacional de Educación. República de Colombia (Ed.), Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas (pp. 81-86). Bogotá, Colombia: Enlace Editores

Apéndice A
Plan de clase: Construcción de pirámide por medio de SketchUp y Poly Pro

Introducción

Se pretende dar impulso al uso e implementación de herramientas tecnológicas en el aula de clase, incentivando a la creación de un nuevo currículo que aborde conceptos geométricos, así mismo el docente debe permitir al estudiante expresar sus representaciones, en diferentes medios. Aunque, ¿se deberían utilizar una o varias herramientas tecnológicas para que el estudiante obtenga y sea dueño de un concepto geométrico?, es difícil dar un número exacto, sin embargo se puede acudir a implementos que el estudiante conoce con anterioridad por ejemplo el lápiz y papel, estos vistos como otro tipo de tecnología (Moreno, 2002). En el siguiente plan de clase se presentan diferentes actividades de abordar el concepto de pirámide.

Propósito

Lograr que los estudiantes construyan la pirámide

Objetivo

Analizar los diferentes procesos utilizados por los estudiantes para la construcción de una pirámide.

Actividades

Con el motivo de descubrir la capacidad de distinguir, caracterizar y construir una pirámide se procede a las siguientes actividades:

- Se le pide al estudiante responder en su cuaderno las siguientes preguntas relacionado con la construcción (casa) realizada anteriormente: ¿Qué figura (sólido) les causó más dificultad? ¿Por qué? Y ¿En dónde se detuvo la construcción de la figura?

Para enfatizar el concepto de construcción de los prismas, en particular de la pirámide con base cuadrada, se procede a mostrar a los estudiantes la figura 4, una pirámide de base cuadrada de Poly Pro

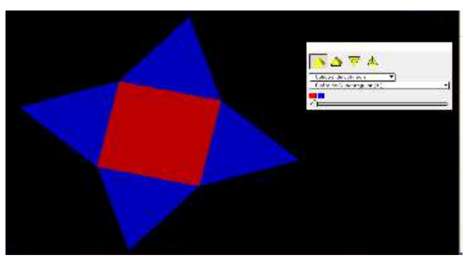


Figura 7 Pirámide triangular en Poly Pro

- Se pide al estudiante dibujar en una hoja de papel un plano de la pirámide triangular como el que se muestra en la figura 4. Pero ¿solo se podrá formar una pirámide con un cuadrado y cuatro triángulos?
- El estudiante debe realizar dos patrones de una pirámide cuadrangular, con las siguientes figuras: cuatro (4) triángulos y un (1) cuadrado, un ejemplo de esto es la figura 5. Finalizada esta actividad, se ha hecho un traslado de una figura tridimensional a un plano bidimensional.
- En otro aspecto, se presenta a los estudiantes la actividad de la figura 6, en este ítem el objetivo es ver el tronco de la pirámide en un plano bidimensional a construirla en el

software tridimensional, además distinguir que está es parte de la pirámide que los estudiantes construyeron.

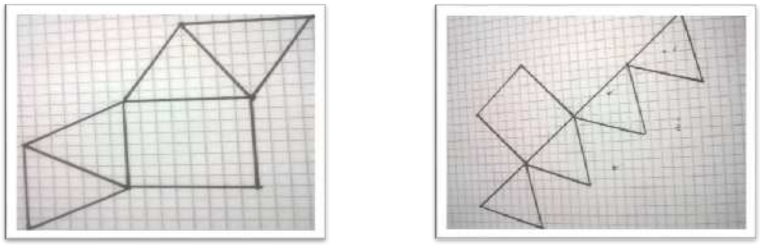


Figura 8 Patrones de pirámide de base cuadrada

En la actividad 4 se busca también, que los estudiantes logren observar la semejanza de los planos paralelos (particularidad del tronco de la pirámide).

- Ahora los estudiantes señalan cuál de las siguientes figuras puede armar la caja que construyen en el software la figura 7. Para estas actividades se destinan 8 horas.

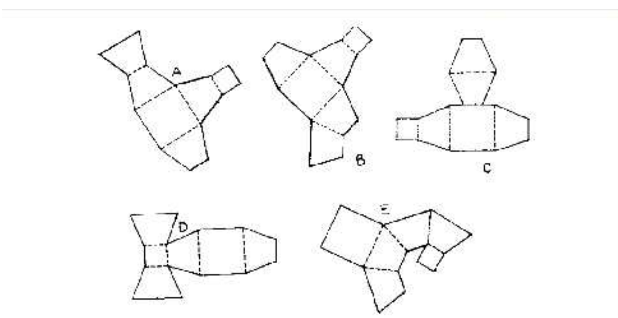


Figura 9 Ejercicio para los estudiantes

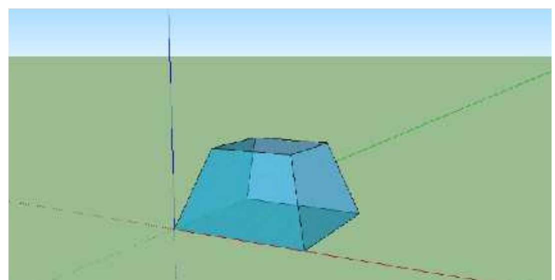


Figura 10 Tronco de una pirámide en SketchUp

Referentes teóricos para institucionalizar el saber

Según Clemens, et al (1989) “una pirámide es un poliedro en el cual todas las caras, menos una, tienen un vértice común. Ese vértice común es el *vértice* de la pirámide, y la cara que no contiene al vértice es la *base* de la pirámide.”

Pero ¿Qué es un poliedro? Giesecke (2006) afirma que “los sólidos delimitados por superficies planas se llaman **poliedros**; las superficies son llamadas *caras* y si las caras son polígonos regulares iguales los sólidos se conocen como *poliedros regulares”*.

Observemos que tipo de figuras están catalogadas como poliedros

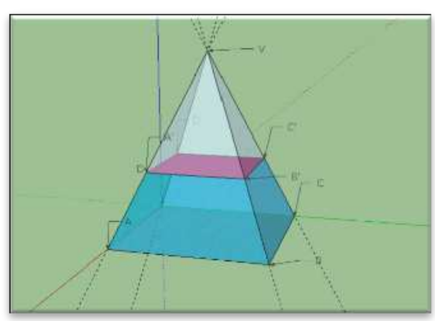


Figura 11 Pirámide en SketchUp

i. Prismas

Definición prisma: es un poliedro que satisface las siguientes condiciones: la primera hay un par de caras congruentes sobre planos paralelos (*bases*), y la segunda todas las demás caras son congruentes. (Clemens, S. R, et al, 1989), en ellos se encuentran los *paralelepípedos*

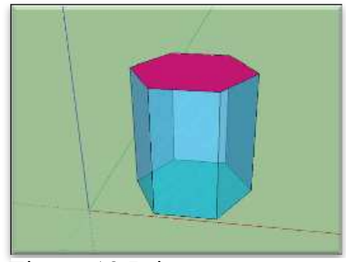


Figura 12 Prisma en SketcUp

ii. Cuerpos redondos

Definición cuerpos redondo (o solidos de revolución): es un sólido en el que por lo menos una de sus caras es una superficie curva, aquí se encuentran: *cono, cilindro, esfera*. (Rojas Álvarez, 2015)

Definición cono: es un sólido engendrado por la revolución completa de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos denominado *eje de revolución* o *eje de giro*. El otro cateto describe un círculo y es el *radio de la base* o *radio del cono.*

Definición cilindro: es un sólido engendrado por la revolución completa de un rectángulo alrededor de uno de sus lados, denominado eje de revolución o eje de giro.

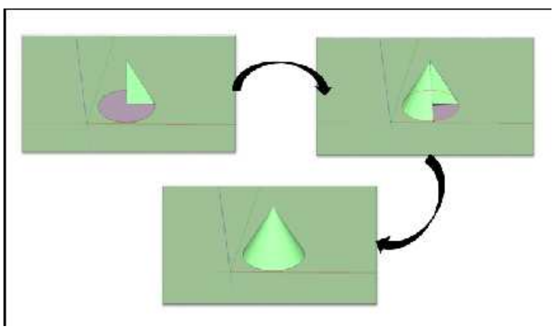


Figura 13 Construcción del cono

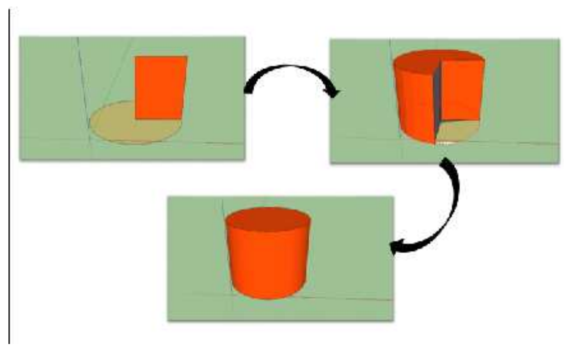


Figura 14 Construcción del cilindro

Poliedros regulares

Definición poliedros regulares: es un poliedro en el que todas sus caras son polígonos regulares con el mismo número de aristas y todos los vértices están rodeados por el mismo número de caras. Solo existen cinco poliedros regulares o solidos platónicos. (Rojas Álvarez, 2015)

Triángulos en el GeoGebra: experiencia en el desarrollo de una unidad didáctica en geometría

Luis Eduardo **Guerra** Betancourt
ASOVEMAT REDUMATE
Venezuela
lewisedward1984@gmail.com

Resumen

Dentro del campo de la Educación Matemática (EM) se han desarrollado diversas propuestas y recursos formativos de cohorte tecnológico. En el área de Geometría, se evidencian diversos software tales como el GeoGebra y el Cabri, los cuales son de gran importancia en la ejecución de las actividades académicas del docente de matemática; por ello, se presenta la siguiente experiencia vinculada al diseño y ejecución de una unidad didáctica en el área de geometría, específicamente en el tema de triángulos. Se señalan los aspectos teóricos y prácticos que fueron tomados en cuenta para la creación de la misma dentro de un curso de Geometría y su didáctica; donde se obtuvo una alternativa didáctica en el camino a la formación inicial de profesores de Matemática en el área de Geometría, la cual fue medianamente implementada con buenos resultados y aceptación por parte de los aprendices.

Palabras clave: Geometría, Formación inicial del profesor de matemáticas, TIC.

Introducción

El uso de las nuevas tecnologías está íntimamente relacionado al conocimiento que se posee de las mismas y a las de su potencial, como tambien en los aspectos educativos y en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Las tecnologías están a la mano y se encuentran presentes en nuestros espacios educativos, pero en la mayoría de los casos no son aprovechadas o se les utiliza para la enseñanza o aprendizaje a través de modelos tradicionales (Gómez y Polania, 2008 y Rodríguez, 1999).

Son diversas las oportunidades que nos proporciona hoy en día el uso de softwares en la educación, y más, si es en asignaturas donde la deserción y desmotivación es el pan de cada día; por ejemplo, en las matemáticas, siendo que esta rama del conocimiento es una de las que más se le ha proporcionado de diversidad de software para mejorar su proceso de enseñanza, como tambien para la adquisición de conocimientos en los estudiantes. Uno de ellos es el software de geometría dinámica GeoGebra para la enseñanza de tópicos matemáticos.

Como el docente es una de las personalidades fundamentales en la planificación y ejecución de procesos de enseñanza y aprendizaje, es necesario que estos conozcan y manejen diversidad de recursos, entre ellos los tecnológicos, y así lograr su adecuación a la actualización y vanguardia educativa, es por esto que en su proceso de formación ha de vincularse a múltiples herramientas que le permitan desarrollar sus habilidades en el campo educativo.

En relación a la disciplina matemática es indispensable el acercamiento de estos docentes desde sus etapas iniciales de formación a la multiplicidad de software educativos que se han creado para la dinamización del proceso académico en las diversas ramas de esta ciencia, pero centrado en temas específicos.

En la presente comunicación, se describe el procedimiento llevado a cabo para el diseño, desarrollo e implementación de una Unidad Didáctica sobre el tema de triángulos mediante el uso del software de Geometría Dinámica GeoGebra, específicamente en docentes de matemáticas de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagogico de Maturin “Antonio Lira Alcalá” (UPEL-IPMALA) de Venezuela.

Unidades Didácticas y su diseño e implementación en el proceso de Enseñanza y Aprendizaje

Son muchos los elementos a tomar en cuenta en la constitución de una unidad didáctica para la misma se tomaron en cuenta ciertos criterios para el diseño de la presente, los mismos son propuestos por Sanmartí (2005; p. 17):

- Definición de finalidades/objetivos: formularlos desde el punto de vista del estudiante, plantearlo como un desarrollo de sus capacidades y especificar la acción que se pretende que los estudiantes apliquen.
- Selección de contenidos: qué tipo de contenidos, relaciones entre la “ciencia de los científicos” y la “ciencia escolar” o la “matemática de los matemáticos” y la “matemática que se enseña en la escuela” y la significatividad social de los contenidos a seleccionar.
- Organizar y secuenciar los contenidos: libros de texto e importancia de aprendizaje.
- Selección y secuenciación de actividades: diferenciar entre actividades de iniciación, actividades para promover la evolución de los modelos iniciales, actividades de síntesis y actividades de aplicación.
- Selección y secuenciación de actividades de evaluación: distinguir las actividades de evaluación; inicial, formativa y sumativa.
- Organización y gestión del aula.

Estos criterios son de gran importancia en el diseño de una unidad didáctica, varios se tomaron en cuenta para el diseño de la unidad didáctica que se presenta en esta investigación, los cuales fueron también organizados e integrados a las orientaciones que del análisis didáctico se sustrajeron.

Para la conformación de la unidad didáctica, también se utilizó el Análisis Didáctico (Gómez, 2007), como estrategia que dio respuesta en el proceso de diseño e implementación de los resultados en términos de procesos formativos en este ámbito de aprendizaje para la Geometría y su Didáctica (Ortiz, Iglesias y Paredes,2013), y para, de una manera más organizada, dar respuesta a la siguiente interrogante: ¿Cuáles son los elementos necesarios para el desarrollo de una unidad didáctica sobre el tema de triángulos tecnológicamente mediada por el GeoGebra?

El análisis didáctico contempla cuatro (4) componentes: análisis del contenido, análisis cognitivo, análisis de la instrucción y análisis evaluativo. Seguidamente, se describen como estos componentes se aplicaron en el diseño de la mencionada propuesta didáctica:

Análisis de contenido: fue útil para propiciar el desarrollo de conocimientos y capacidades que se pretendieron desarrollar o consolidar en los futuros profesores de Matemática, a partir de la evaluación previa de diversos textos de las matemáticas en pro de organizar y presentar el contenido más idóneo dentro de la unidad didáctica.

En el mismo se realizó la selección y alcance de los temas a ser estudiados, en el caso de esta propuesta, los contenidos geométricos que fueron tomados en cuenta, dentro del tema de triángulos, son los que surgieron de las debilidades observadas en los aprendices. La organización de dicho tema se presentó mediante un mapa conceptual, donde se enfatiz en tres de los organizadores del currículo: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología (Ortiz, Iglesias y Paredes; 2013), donde se utilizo el mapa de enseñanza y aprendizaje (Orellana Chacín, 2002). Ver imagen 1.

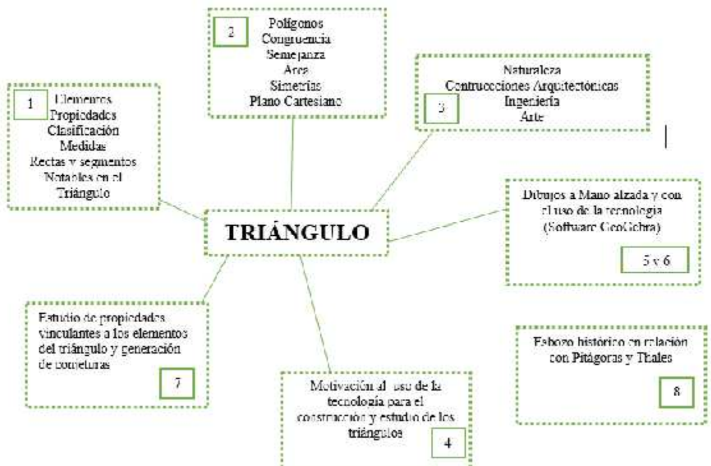


Imagen 1: *Mapa de Enseñanza Aprendizaje del Tópico Triángulo*

Análisis Cognitivo: Este análisis permitió determinar los objetivos de aprendizaje que se procuraron lograr en la unidad didáctica para el aprendizaje de los tópicos relacionados con el tema de triángulos. Se espera que los estudiantes a los cuales va dirigido esta unidad didáctica profundicen en el tema de los triángulos (estudio conceptos y propiedades métricas y generación de conjeturas a partir de problemas diversos), perimitiéndole así conocer más sobre la estructura del tema y lograr que sea capaz de interaccionar los contenidos propuestos en el software de geometría dinámica.

Análisis de la Instrucción: Es aquí donde se seleccionó, diseñó y se secuenció las tareas que se emplearon, como también se visualizaron los materiales y recursos a ser utilizados en el tema tratado hacia el aprendizaje de ese contenido geométrico. También se tomó en cuenta las potencialidades del software de geometría dinámica GeoGebra para el buen fin de los objetivos planteados.

Análisis Evaluativo: se llevó a cabo después de implementar la unidad didáctica y fue útil para recabar información acerca de en qué medida se han logrado las expectativas de aprendizaje establecidas y la funcionalidad de las tareas empleadas, siendo información necesaria para la implementación de la unidad nuevamente. En este caso se tomaron en cuenta los productos de los estudiantes y la actuación de los mismos para determinar el nivel de avance y adquisición de conocimientos en el tema tratado.

El Software de Geometría Dinámica GeoGebra

El GeoGebra, es un programa computarizado compatible con cualquier sistema operativo, el mismo ofrece tres perspectivas diferentes de cada objeto matemático; gráfico, numérico y algebraico y además, un acceso de hoja de cálculo, permitiendo apreciar los objetos matemáticos en tres representaciones diferentes: gráfica (presentación de puntos, gráficos de funciones y de objetos geométricos), algebraica (apreciación de las coordenadas de puntos, expresión de las ecuaciones y de las funciones), y la utilización de las celdas de una hoja de cálculo para las operaciones numéricas.

Este software según Zerpa (2010; p. 132) permite los siguientes usos didácticos:

- Soporte para las explicaciones del profesor.
- Soporte para la resolución de problemas por los alumnos.
- Herramienta para que el alumno realice investigaciones.
- Utilidad para la creación de actividades interactivas.
- Herramienta para realizar construcciones y observar propiedades y características.
- Realización de construcciones geométricas planas complicadas.
- Cálculo y resolución de problemas

Unidad Didáctica Triángulos con el GeoGebra

Para todo el proceso de construcción de la unidad didáctica se tomaron en cuenta las orientaciones de los cuatro análisis del proceso de análisis didáctico (Gómez y Rico, 2002) y las consideraciones de acuerdo a los criterios para la elaboración de unidades didácticas hechas por Sanmartí (2005).

Para la selección y secuenciación de los contenidos, además de tomar en cuenta los resultados de la prueba diagnóstico realizada a los estudiantes, también se consideró la revisión de fuentes documentales tales como: Moise y Downs (1986); Clemens, ODaffer y Cooney (1998); MPPE (2007, 2015); UPEL (1987, 2004a, 2004b).

Para la determinación de los objetivos, se tomaron en cuenta varios documentos (MPPE, 2007, 2015; UPEL 1987, 1996, 2005, 2011, 2004a y 2004b), los mismos son de los niveles de educación media general y educación universitaria del sistema educativo venezolano.

I. Objetivos de la Unidad Didáctica triángulos en el GeoGebra

General: Estudiar los triángulos a través del uso del software de geometría dinámica GeoGebra.
Específicos:

- Conocer las características del GeoGebra.
- Utilizar las herramientas del GeoGebra.
- Saber realizar movimientos en el plano con GeoGebra.
- Identificar los elementos de un triángulo.
- Identificar triángulos.
- Clasificar triángulos.
- Utilizando el software de geometria dinamica GeoGebra: Construir segmentos, ángulos y triangulos
- Verificar propiedades métricas de los triángulos a través del software de geometría dinámica GeoGebra.
- Evaluar mediante el uso del software de geometria dinamica GeoGebra las caracteristicas de las rectas, segmentos y puntos notables de un triángulo.

- Validar teoremas de congruencia y semejanza de triángulos a través del software de geometría dinámica GeoGebra a partir de ciertas condiciones inicales propuesta por los actores.

II. Recursos

Libro de Texto, Sotfware de Geometría Dinámica GeoGebra, Dispositivo computarizado (Tablet u Ordenador), Lápiz y Papel.

III. Duración de la Unidad Didáctica triángulos en el GeoGebra

Semanas: 3 / Total de Horas: 24
Actividades en sesiones presenciales: 3 Semanas - 18 Horas
Actividades en sesiones a distancia: 3 Semanas – 6 Horas

IV. Fundamento Matemático de la Unidad Didáctica triángulos en el GeoGebra

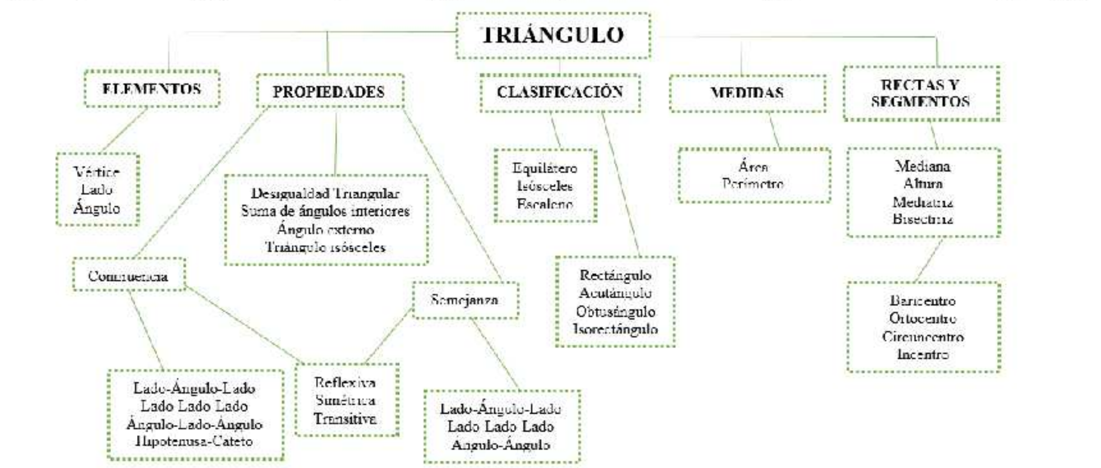


Imagen 2: Mapa Conceptual del Tópico Triángulo

V. Actividades de la Unidad Didáctica triángulos en el GeoGebra

Tabla 1

Actividades de la Unidad Didáctica triángulos en el GeoGebra

Fases	Actividades
Inducción: Conociendo al GeoGebra	- Lectura del manual del GeoGebra. - Instalación del GeoGebra en un dispositivo computarizado (Tablet u Computador) - Familiarización con el software GeoGebra
Construcción de Elementos Geométricos	- Construir: un segmento, una recta, un ángulo y un triángulo. - Construir un triángulo a partir de un ángulo agudo. - Construir un triángulo a partir de un ángulo recto. - Construir un triángulo a partir de un ángulo obtuso. - Determinar las medianas de los lados del triángulo. - Determinar las alturas de un triángulo. - Determinar las mediatrices de los lados del triángulo. - Determinar la bisectrices de los ángulos del triángulo.

Construcción puntos notables	- Determinar el baricentro de un triángulo. - Determinar el ortocentro de un triángulo. - Determinar el circuncentro de un triángulo. - Determinar el incentro de un triángulo. - Realizar análisis métricos de estos puntos con respecto a los ellementos del triángulo.
Construcción a través de los postulados de congruencia	- Construir un triángulo dado la medidas de tres lados – apreciacion de la desigualdad triangular – Criterio LLL - Construir un triángulo dado la medidas de dos lados y el ángulo comprendido – Criterio LAL - Construir un triángulo dado la medidas de dos ángulos y el lado comprendido – Criterio ALA. - Construir un triángulo dado la medidas de la hipotenusa y un cateto. - Construcción de triángulos a partir de otros criterios (AAA-LAA-LLA).
Construcción a través de los postulados de Semejanza	- Construir dos triángulos dado las medidas de dos ángulos – Criterio AA - Construir dos triángulos dado las medidas de dos lados de uno proporcionales a dos lados del otro, siendo proporcionales a razón 2:1 y el ángulo comprendido por dichos lados en ambos triángulos debe ser de igual medida – Criterio LAL. - Construir dos triángulos dado las medidas de los tres lados de uno proporcionales a los tres lados del otro, siendo proporcionales a razón 3:2. Criterio LLL

Fuente: Construccion propia.

Ejecución de la unidad didáctica

Los estudiantes a los cuáles se les aplicó la unidad didáctica sin integrantes del curso Geometría II, asignatura ubicada en el segundo semestre del plan de estudios de la especialidad de matemáticas de la UPEL – IPMALA.

Se pudo observar gran motivación en los estudiantes en cuanto al manejo de este software en conjunto con la temática planteada. Primeramente se decidió formar grupos de 4 estudiantes para asumir la teoría que conforma la unidad didáctica (ver tabla 2):

Tabla 2

División de contenidos en la Unidad *Didáctica triángulos en el GeoGebra*

Grupo	Temática
1	Concepto de Triangulo, Elementos del Triángulo, Clasificación de triángulos, Medidas en el triángulo y Propiedades Básicas del Triángulo.
2	Rectas y Segmentos notables en un Triángulo y Puntos notables de un Triángulo.
3	Congruencia de Triángulos y Criterios de Congruencia de Triángulos.
4	Semejanza de Triángulos, Proporcionalidad, Criterios de Semejanza de Triángulos y Propiedades de la Semejanza de Triángulos.

Luego, se desarrollaron las actividades mediante el uso del GeoGebra, recurso que hizo factible y accesible la determinación de medidas, estudio de los diversos tipos de triángulos y análisis de las propiedades de los diferentes objetos matemáticos inmersos en este tópico. Por lo accesible y lo rápido que es trabajar con el GeoGebra, se propuso una actividad extra para el tema de proporciones, que fue el de tomar una figura del entorno y comprobar sus proporciones con GeoGebra, esto fue asociado a un número característico (áureo, π, etc.).

Reflexiones

En cuanto a la utilización del recurso GeoGebra para el desarrollo de una unidad didáctica en geometría se tiene que: a) Es fácil de manejar puesto que sus instrucciones son comprensibles al público en general; b) Es indispensable la participación de un facilitador como guía en el aprendizaje del tópico de geometría; c) Interés por parte de los estudiantes en abordar las actividades de clase y las de autoaprendizaje en el área de geometría; d) Es adecuado el trabajo de congruencia de triángulos en esta herramienta ya que permite la superposición y verificación de correspondencia entre los pares de elementos correspondientes (criterios de congruencia); e) Se visualizan con facilidad las características y propiedades de los triángulos como de sus elementos; f) permite el análisis de propiedades de los diversos objetos matemáticos que ahí se construyen, en caso específico de los triángulos; g) El diseño de unidades de didácticas con la utilización del software GeoGebra mediante la teoría del análisis didáctico de Gómez y Rico (2002) permite llevar una secuencia organizada de todos los aspectos a tomar en cuenta para el desarrollo de una programación para docentes en formación, y h) La utilización de los criterios a tomar en cuenta para la conformación de unidades didácticas propuesto por Sanmartí (2005) hace viable la construcción de la misma ya que permite: la determinación de objetivos, selección y secuenciación de contenidos y la selección y secuenciación de actividades para la construcción de una forma sistemática, sobre todo en unidades didácticas que vinculan la utilización de las nuevas tecnologías, I) En relación a la vinculación de este recurso tecnológico con temas matemáticos, en opinión de los participantes, les permitió un estudio ameno e interactivo de los diversos conceptos y propiedades que en cuanto a este tema surjan, así como la visualización de variaciones que son a veces imperceptibles en un estudio con papel y lápiz.

Referencias y bibliografía

Clemens, S., ODaffer, P. y Cooney, T. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. México: Editorial Addison Wesley.

Gómez, M. y Polania, N. (2008). *Estilos de enseñanza y modelos pedagógicos*. Tesis de Maestría. Bogotá. Recuperado de http://repository.lasalle.edu.co/bitstream/handle/10185/1667/T85.08%20G586e.pdf.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1335.

Gómez, P. y Rico, L. (2002). Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/376

Ministerio del Poder Popular para la Educación (MPPE). (2007). *Currículo Nacional Bolivariano*. Caracas: Autor.

Ministerio del Poder Popular para la Educación (MPPE). (2015). *Proceso de cambio curricular de educación media*. Caracas: Autor.

Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Delaware: Addison – Wesley Iberoamericana, S.A.

Orellana-Chacín, M. (2002). ¿Qué enseñar de un tópico o un tema?. Enseñanza de la Matemática. 11(2), 21-41.

Ortiz, J., Iglesias, M. y Paredes Z. (2013). El análisis didáctico y el diseño de actividades didácticas en matemáticas. En L. Rico, J.L. Lupiánez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 293 - 308). Granada: Comares.

Rodríguez, N. (1999). *Teorías y modelos de enseñanza: posibilidades y límites*. Milenio Lleida.

Sanmartí N. (2005). La unidad didáctica en el paradigma constructivista. En Couso, D., Badillo, E., Perafán, G. y Adúriz-Bravo, A. (Aut.), *Unidades didácticas en ciencias y matemáticas* (pp. 157-188). Colombia: Editorial Magisterio.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto de Mejoramiento Profesional del Magisterio (UPEL). (1987). Geometría I. Manual del Estudiante. Caracas: Autor.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maturín (UPEL). (2004a). Programa Analítico de la Asignatura de Geometría I. Maturín: Autor.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maturín (UPEL). (2004b). Programa Analítico de la Asignatura de Geometría II. Maturín: Autor.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Vicerrectorado de Docencia (UPEL). (1996). *Diseño Curricular. Documento Base*. Caracas: FEDEUPEL.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Vicerrectorado de Docencia (UPEL). (2011). *Documento Base de Currículo UPEL*. Caracas: FEDEUPEL.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Vicerrectorado de Docencia (UPEL). (2005). *Proyecto de Transformación y Modernización del Currículo para la Formación Docente de Pregrado en la UPEL*. Informe que se presenta ante el Consejo Universitario. Caracas: Autor.

Zerpa, M. (2010). Geometría analítica plana con Geogebra. *Revista Números,* 75, 131-142.

El papel de la refutación en los procesos de argumentación. Una aproximación desde el estudio de las propiedades de los triángulos

Sara Marcela **Henao**
Universidad Icesi
Colombia
saramarcelahenao@gmail.com

Resumen

En esta comunicación se presenta un estudio sobre los argumentos *formales e informales* realizados por estudiantes de quinto de primaria cuando trabajan con actividades que implican analizar algunas propiedades de los triángulos. El objetivo de este estudio fue discutir el papel que cumple la refutación en el proceso de la argumentación *colectiva* cuando las aserciones construidas de manera individual no son válidas. Los resultados obtenidos muestran que la *refutación* ocupa un papel fundamental en la construcción de argumentos colectivos válidos, no solo en estudiantes de educación superior, sino en estudiantes de niveles escolares básicos.

Palabras clave: argumentos formales, argumentos informales, refutación, argumentos colectivos, argumentos.

Introducción

Este trabajo presenta un estudio sobre las refutaciones realizadas por estudiantes de quinto de primaria en la construcción *de argumentos informales* y *formale*s al trabajar con algunas propiedades de los triángulos. Con el propósito de esquematizar los argumentos se adopta el esquema de Toulmin (1958), puesto que el objetivo es analizar el papel que cumple la *refutación* dentro proceso de argumentación colectiva, en particular en aquellos argumentos donde la aserción no es válida. De igual modo, las categorizaciones de *razonamiento, argumentación y argumento* se retoman de Toulmin, Rieke, y Janik (1978) y se asume la categorización de *argumento formal e informal* presentada por Viholainen (2008).

En correspondencia con el objetivo de la propuesta se adaptó el enfoque de estudio cualitativo, particularmente un *estudio de caso descriptivo*, el cual permite analizar en profundidad los fenómenos educativos (Córdoba, 2011). En este sentido, la investigación se realizó en tres momentos, el primero la puesta en escena de la actividad constituida por cuatro tareas, seguidamente la discusión en la que se evidencian las refutaciones, y finalmente los análisis de los datos.

En este estudio mostramos que las *refutaciones* no solo juegan un papel importante en los procesos argumentativo de los matemáticos (Inglis, Mejia, & Simpson, 2007), sino también en la construcción de argumentos colectivos en estudiantes de quinto de primaria.

Contextualización y formulación del problema

Desde hace algunos años el estudio de los argumentos matemáticos producidos por los estudiantes se ha convertido en un tema de interés para investigadores en el campo de la Educación Matemática (Inglis, Mejia, & Simpson, 2007). En particular el modelo de Toulmin (1958) se ha adaptado para analizar y estructurar los diversos argumentos que surgen en las clases de matemáticas. Sin embargo, desde Krummheuer (1995) se usa una versión reducida del esquema original, que omite los respaldos, los cualificadores modales y la refutación, argumentando que estos elementos son irrelevantes para los argumentos matemáticos (Inglis et al., 2007). De igual modo otros investigadores (Knipping, 2003; Mariotti, 2006) han adaptado esta postura centrada en que un argumento matemático consta de tres elementos, datos, garantías y conclusión.

De otra parte, investigadores como Inglis et al. (2007) señalan que es necesario involucrar todos los elementos del esquema argumentativo de Toulmin, particularmente los cualificadores modales y la refutación ocupan un papel importante en la categorización de tipos de garantías que los matemáticos utilizan. Reid, Knipping y Crosby (2008) ponen de manifiesto que las refutaciones que emergen en los procesos argumentativos determinan la lógica de las prácticas de enseñanza, en otras palabras, las refutaciones dejan entrever modelos de enseñanza que se privilegian en la escuela. De esta manera surge un interés por estudiar el papel de la refutación en la validación de *argumentos formales e informales* de estudiantes de quinto de primaria. Dado que diversas investigaciones se han centrado en el análisis de los argumentos sin tener presente todo el esquema de Toulmin, y más aún los elementos como *la refutación* o los *cualificadores* han cobrado sentido en las propuestas para el estudio de la argumentación de los matemáticos expertos y el análisis de la lógica de la práctica, pero pocos estudios centrados en el papel de la *refutación* en estudiantes con escasa experimentación en el campo matemático. De este modo surge la pregunta objeto de investigación.

¿Qué papel cumple la refutación en la validación de los argumentos formales e informales de estudiantes de quinto de primaria?

El enfoque por competencias que actualmente rige los modelos de enseñanza en México deja entrever que es necesario formar ciudadanos críticos frente a las problemáticas sociales, lo cual implica la promoción de espacios en donde se comuniquen ideas matemáticas tanto verbales como escritas, se verifiquen, se validen y se negocien en espacio de socialización. De aquí la importancia de la elaboración de este estudio.

Algunos referentes conceptuales

En este apartado se presenta algunos referentes teóricos que sustentan la propuesta de investigación, en particular se expone lo plantado por Toulmin (1958) en la teoría de la argumentación, y la categorización de *argumentos informales* y *formales* propuesta por Viholainen (2008). A partir de estos referentes teóricos se enmarca la manera en que se realizarán los análisis.

Toulmin (1958) propone una vía para estudiar la estructura de un argumento y su contenido semántico, alejándose de los enfoques tradicionales centrados en la lógica formal deductiva en la que no es posible estudiar el campo de la razón práctica. Desde la perspectiva Toulmin (1958), la *argumentación* es la actividad de plantear aserciones, desafiarlas, apoyarlas con razones, criticar esas razones, y refutar esas críticas. Por su parte, el *razonamiento* se refiere a la actividad central de presentar las razones en apoyo a una aserción, con el objeto de mostrar como esas razones tienen éxito al darle fuerza a la aserción (Toulmin, et. al 1978). Ahora bien, un argumento según Toulmin (secuencia de proposiciones lógicas que requieren el uso de razonamiento) puede esquematizase mediante 6 elementos: las razones, las garantías, los respaldos, la pretensión, los cualificadores modales y las refutaciones.

La pretensión (claim) es el punto de partida y llegada de la argumentación, al comienzo un proponente plantea un problema frente a otro u otros oponentes, quienes cuestionan de alguna forma la pretensión (Gonzales & Arévalo, 2015), en este caso el proponente deberá dar razones (grounds) relevantes y suficientes para apoyar la pretensión inicial. Estas razones no son teorías generales, sino hechos específicos de la situación objeto de discusión. Ahora bien, el oponente puede exigir al proponente justificar la transición entre las razones y la pretensión, para ello, deberá hacer uso de los enunciados generales que autorizan esta transición, las garantías (warrant) del argumento. Estas garantías se caracterizan por ser enunciados generales que posibilitan la conexión entre las razones y la conclusión (pretensión), apelando a reglas, definiciones y analogías. En cualquier caso, las garantías no se sustentan en hechos sino en reglas que permiten el paso de un enunciado a otro. Sin embargo, en ocasiones las garantías no son siempre suficientes para apoyar el argumento, en este caso, el proponente deberá mostrar que las garantías son válidas, relevantes y superior a cualquier otra cosa, sobre todo cuando existen diversos caminos para pasar de las razones a la pretensión. Para esto, el proponente deberá presentar el campo general de información o respaldos (backing) fundamentado en enunciados categóricos de hechos, es decir las teorías generales, creencias y las estrategias que apoyan a las garantías son respaldos que justifican porque la pretensión es aceptada. El proponente califica (apoya) la pretensión con cierto grado de confianza mediante cualificadores modales (qualifiers), algunos de estos son: presumiblemente, con toda probabilidad, plausiblemente, según parece. En algunos casos, los argumentos pueden ser cuestionados por el oponente cuando las garantías presentadas por el proponente dan lugar a una refutación (rebuttals) en la que la conclusión no se cumple en ciertas condiciones, o las garantías no conducen a una pretensión válida. Estas refutaciones debilitan de cierto modo el argumento, obligando al proponente a transformar sus garantías y su esquema argumentativo. A modo de síntesis se presenta el modelo de Toulmin (1958) para el análisis argumentativo.

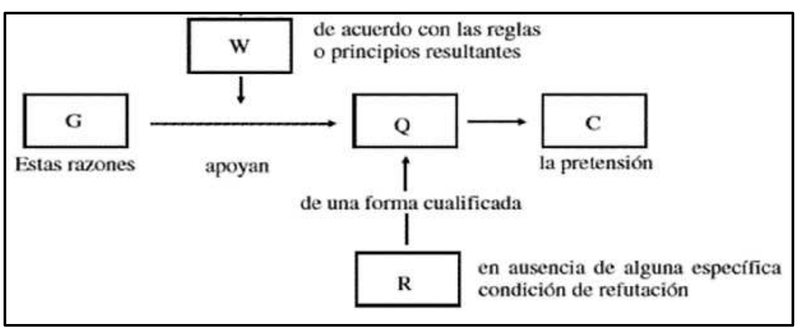


Figura 1: elementos del argumento en el esquema argumentativo de Toulmin (1958)

De otra parte, las garantías determinan según Viholainen (2008) el tipo de argumento que un proponente presenta, en particular se puede distinguir entre un *argumento formal e informal*. Los primeros se vinculan con el hecho de que las garantías están exclusivamente sustentadas en elementos del sistema formal axiomático de las matemáticas. Es decir, un argumento es *forma*l si muestra que la conclusión es consecuencia de definiciones, axiomas y teoremas que provienen de los datos. Ahora bien, un argumento es *informal* si las garantías están sustentadas en interpretaciones informales de conceptos o situaciones, es decir interpretaciones visuales o físicas.

Metodología y Participantes

Con el propósito de estudiar el papel que juega la *refutación* en la validación de *argumentos formales e informales* de los estudiantes de quinto de primaria se adaptó un enfoque de investigación *cualitativa*. Martínez (2006) señala que una investigación *cualitativa* posibilita el estudio de la naturaleza de fenómenos que suceden en la clase de matemáticas, y permite la explicación descriptiva de los comportamientos y manifestaciones que ocurren dentro de dichos fenómenos. De aquí la importancia de adoptar esta postura.

Por su parte, Córdoba (2011) señala que los métodos de investigación *cualitativa* son los que mejor se ajustan para el estudio de los fenómenos educativos, ya que favorecen la exploración del contexto a estudiar, logrando descripciones detalladas del fenómeno. De esta manera, y en correspondencia con los intereses de la propuesta, se adopta un enfoque cualitativo de investigación, donde el método de *estudio de caso descriptivo* se presenta como el más apropiado. Pues bajo esta metodología es posible dar cuenta de cómo y por qué se presentan un fenómeno determinado en la escuela, favoreciendo de este modo un estudio detallado y profundo alrededor del fenómeno objeto de estudio, además permite establecer generalizaciones para una comunidad particular.

Para el caso de este estudio los participantes fueron 4 estudiantes de quinto de primaria (10 años de edad) de una escuela privada de México. En un primer momento los estudiantes resolvieron de manera individual la actividad que contaba con 4 tareas asociadas al estudio de las propiedades de los triángulos. Seguidamente se discutió de manera grupal cada una de las respuestas, fue en esta fase en donde se evidenciaron las *refutaciones* realizadas por cada participante. En un tercer momento se analizaron las producciones de los estudiantes tanto escritas como las verbales que fueron obtenías de las grabaciones, este análisis se elaboró mediante unas categorías que permitieron evidenciar el papel de las refutaciones en la validación de *argumentos informales* y *formales*. Finalmente, se elaboraron las conclusiones entorno a los resultados.

A continuación, se presenta la actividad.

Actividad: explorando los triángulos

Responde las siguientes preguntas

1. ¿Será posible dibujar un triángulo rectángulo equilátero?

De ser posible, describe las condiciones que debe cumplir este tipo triángulos.

Presenta un ejemplo de este tipo de triángulos

2. ¿Será posible dibujar un triángulo acutángulo isósceles?

De ser posible, describe las condiciones que debe cumplir este tipo triángulos

Presenta un ejemplo de este tipo de triángulos

3. ¿Será posible dibujar un triángulo obtusángulo isósceles?

De ser posible, describe las condiciones que debe cumplir este tipo triángulos.

Presenta un ejemplo de este tipo de triángulos

4. ¿Será posible dibujar un triángulo obtusángulo equilátero?

De ser posible, describe las condiciones que debe cumplir este tipo triángulos

Presenta un ejemplo de este tipo de triángulos.

Análisis de los datos

En este apartado se presenta algunos momentos de discusión en los que surgen las *refutaciones* durante la comunicación de los *argumentos formales e informales* de los participantes. A partir del análisis de los datos se evidencian dos papeles fundamentales de la refutación en la validación de *argumentos formales e informales* de los estudiantes de quinto de primaria, a saber: la refutación como medio para la identificación de errores en las garantías y la refutación como un medio para la transición entre argumentos formales e informales. Estos dos papeles se constituyen en las categorías de análisis del estudio; de este modo se logra dar respuesta a la pregunta de investigación.

En la primera categoría de análisis los errores son identificados por el oponente y posteriormente por el proponente, posibilitando de esta manera el cambio del esquema argumentativo del proponente, es decir surge una nueva aserción válida a partir de la refutación. La segunda categoría muestra la importancia de la refutación para transformar argumentos informales sustentados en representaciones visuales no válidas de un objeto matemático en aserciones válidas.

Las convenciones que utilizaremos para la transcripción de las conversaciones son E(n) para los estudiantes T para la docente, así como D par los datos, G para las garantías, R para las refutaciones y C para la aserción. De esta manera se presentan las discusiones con su respectivo esquema de Toulmin.

La refutación como medio para la identificación de errores en las garantías

A continuación, se presentan un momento de discusión en el que se puede evidenciar el papel de la refutación como medio para la identificación de errores en las garantías.

Este primer momento surge de la tarea 1 y muestra que E1 modifica la aserción a partir de la refutación realizada por E2, igualmente se pone de manifiesto que a pesar de que E1 conoce las propiedades de los triángulos las aplica de manera incorrecta.

T: ¿será posible dibujar un triángulo rectángulo equilátero?

E_1: Si es posible porque puedo poner un ángulo de 90 grados, otro de 60 grados y otro de 30 grados.

E_2: No, yo digo que no, porque el equilátero debe tener sus tres lados iguales.

T: y tu como sabes que este no tiene sus tres lados iguales

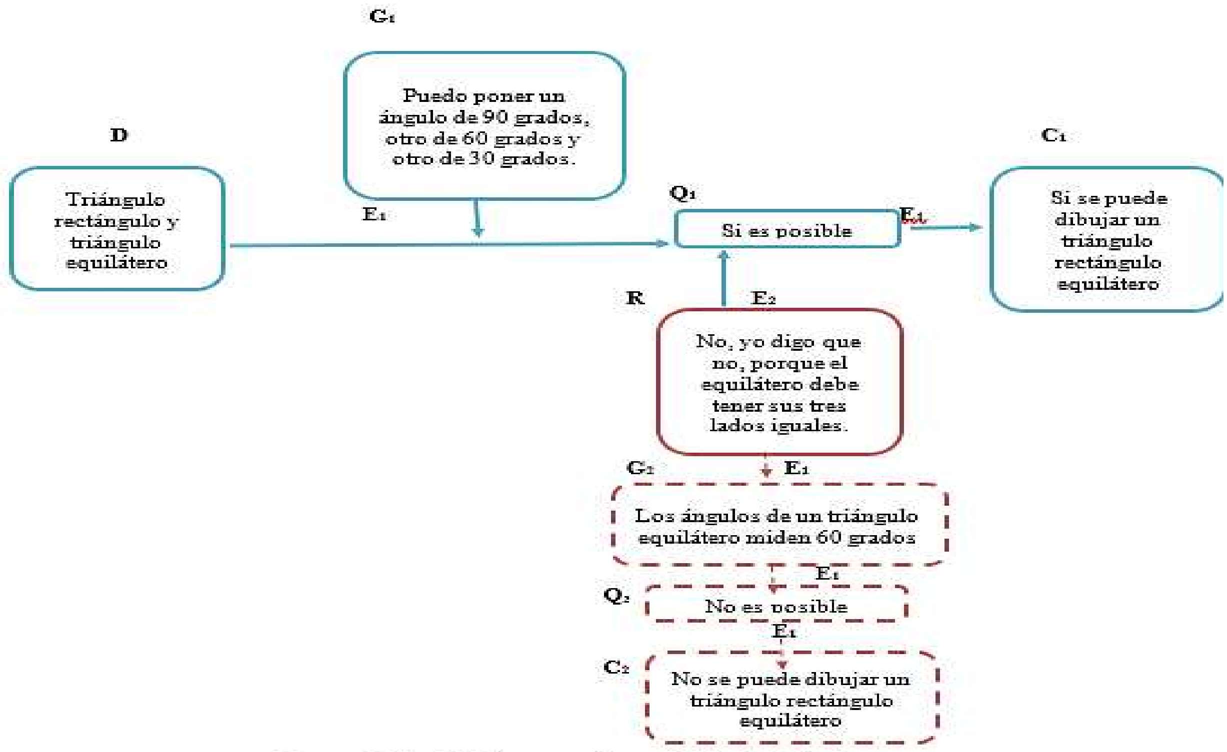
E_2: porque todos sus ángulos deben de medir lo mismo

E_1: ¡Ah ya! todos sus ángulos deben de medir 60, yo no puse los tres lados iguales

En el anterior momento de discusión se pone en evidencia que las garantías utilizadas por uno de los participantes no conducían a la validez de la aserción, a pesar de ser un argumento formal, de aquí que otro participante interviene para aclarar que no estaba tomando en cuenta una de las propiedades de los triángulos equiláteros. Sin embargo, es importante aclarar que el estudiante E1 toma en cuenta que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180 grados y que un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90 grados, el error fue no tener presente la propiedad de los triángulos equiláteros de que sus ángulos deben de medir todos lo mismo. Este error fue identificado por el estudiante E1 luego de la intervención de E2. De este modo, podemos concluir que las refutaciones tienen un papel importante dentro del proceso argumentativo, pues permite el reconocimiento y la identificación de los errores presentes en las garantías.

Un aspecto importante en el argumento de E1 es que conocía que en los triángulos equiláteros la medida de cada ángulo es de 60 grados, de aquí que en su ejemplo explicite un ángulo de 60 grados, sin embargo, obvió el hecho de que deben ser los tres ángulos de 60 grados.

A continuación, se presenta el esquema del proceso argumentativo



Esquema 1: la refutación como médio para la identificación de errores

La refutación como un medio para la transición entre argumentos informales a formales.

En el siguiente momento de discusión se evidencia el papel de la refutación en la transición de argumento informal no válido a un argumento formal válido.

Esta discusión surge en la tarea 3 y pone en evidencia que el estudiante E4 posee una representación que no es coherente con la definición de triángulo obtusángulo, de aquí que E1 presenta una refutación que posibilita el cambio en el esquema argumentativo de E4.

T: ¿será posible dibujar un triángulo obtusángulo isósceles?

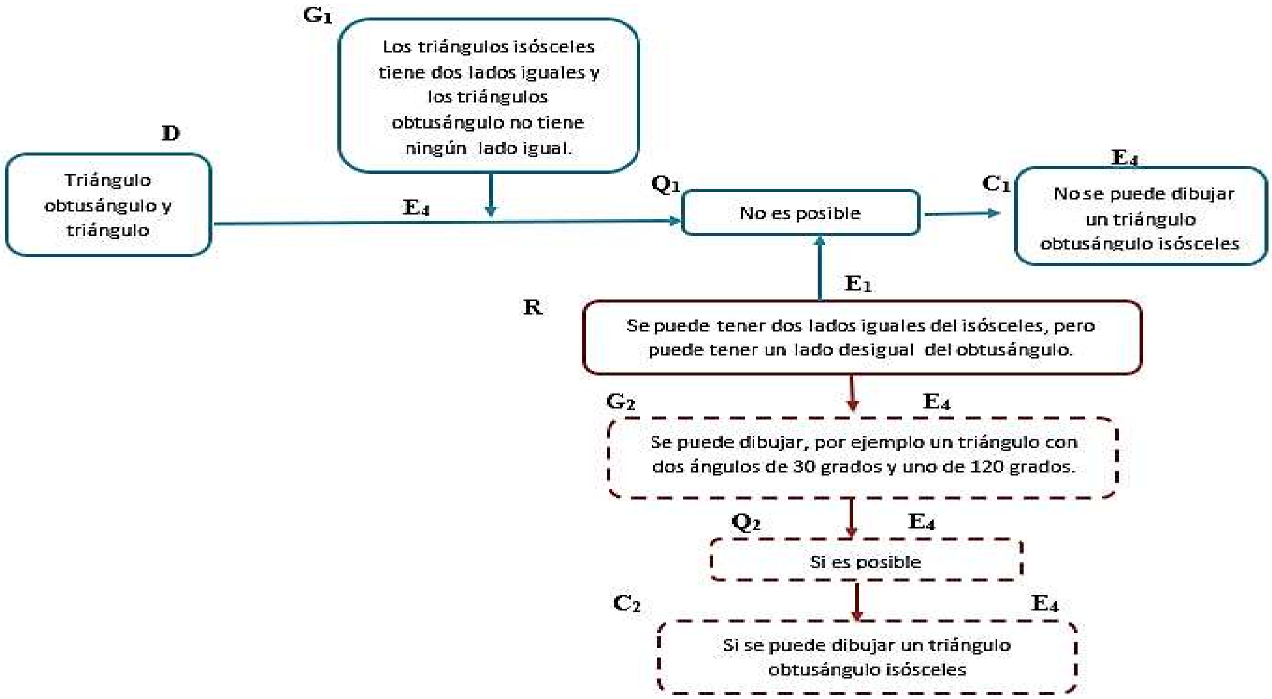
E_4: ..No se puede porque el isósceles tiene dos lados iguales y el obtusángulo no tiene ningún lado igual.

T: ¿El triángulo obtusángulo tiene todos sus lados desiguales?

E_4: Si porque tiene un lado más chiquito otro más largo

E_1: ¡Si se puede! porque si puede tener dos lados iguales del isósceles, pero puede tener un lado desigual del obtusángulo.

E_4: mmmm, por ejemplo 30 más 30 y 120 (refiriéndose a los ángulos)



Esquema 2: la refutación como medio para la transición entre argumento informal al formal

En el anterior momento de discusión se presenta un argumento informal del estudiante E4. Las garantías usadas se fundamentan en la representación visual que tiene del concepto de triángulo obtusángulo y del isósceles. El estudiante E4 representa un triángulo obtusángulo como aquel que tiene todos sus lados desiguales y el triángulo isósceles el que tiene dos lados iguales y uno desigual, de aquí que su aserción no sea válida. Ahora bien, el estudiante E1 presenta una refutación a esta aserción mediante argumentos formales que muestran la posibilidad de dibujar los triángulos obtusángulos isósceles, de esta manera se pone de manifiesto que no todos los lados de un triángulo obtusángulo son desiguales. Esta refutación permitió que el argumento informal presentado por E4 se transforme en un argumento formal en el que se pone en juego las propiedades de los triángulos obtusángulos e isósceles. Es importante señalar que en algunas situaciones los argumentos informales pueden conducir a aserciones válidas, sin embargo, en este caso la representación visual no se correspondía con la definición del triángulo obtusángulo, lo cual lleva a una aserción no válida.

Conclusiones

En esta investigación se encontró que la *refutación* ocupa un papel importante en la construcción de argumentos colectivos de estudiantes de quinto primaria. En este sentido, la *refutación* permite que los estudiantes identifiquen los diferentes errores presentes en las garantías. Estos errores para el caso de este estudio surgen por un mal uso de las propiedades matemáticas, o por tener una representación que no se corresponde con la definición de un concepto. Sin embargo, las causas de los errores pueden ser múltiples entre ellas obstáculos epistemológicos y obstáculos didácticos. Es importante mencionar que el reconocimiento de errores posibilita la construcción de nuevos conocimientos, en este estudio se evidenció que los estudiantes a partir del error elaboraban nuevos significados de los objetos matemáticos. De otra parte, la *refutación* posibilita que los estudiantes transformen sus argumentos informales no válidos por argumentos formales válidos.

Este tipo de estudios deja entrever que el uso del esquema completo de argumentación de Toulmin no solo es importante para analizar los argumentos de los matemáticos expertos, sino para el análisis de los argumentos colectivos en estudiantes de primaria, ya que la *refutación* y los cualificadores modales ocupan un papel importante en la transformación de argumentos no válidos a válidos. Además, esta investigación permite promover procesos argumentativos en el aula, logrando de esta manera favorecer el enfoque por competencia que actualmente rige la enseñanza en México.

Referencias

Córdoba, F. (2011). *La modelación en matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería.* (tesis inédita de maestría). Instituto politécnico nacional: centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada, México.

Gonzales, O., & Arévalo, C. (2015). Caracterización de la actividad argumentativa de estudiantes de educación media cuando trabajan en procesos de matematización de situaciones. *Proceedings of XIV Internamerican Conference on Mathematics Education*. Mexico.

Inglis, M., Mejia, J., Simpson, A. (2007). Modelling Mathematical Argumentation: The Importance of Qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 3-21.

Knipping, C. (2003) Argumentation structures in classroom proving situations. In: M. A. Mariotti (eds.). *Proceedings of the Third Congress of the European Society for Researchin Mathematics Education.* Bellaria, Italy, ERME.

Krummheuer, G. (1995). The ethnology of argumentation. In: P. Cobb and H. Bauersfeld (eds.). *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures.* Hillsdale: Erlbaum, pp. 229–269

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In: A. Gutierrez and P. Boero (eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future.* Rotterdam: Sense, pp. 173–204.

Martínez, M., Da Valle, N., Bressan, A., & Zolkower, B. (2002). La relevancia de los contextos en la resolución de problemas de matemática. *Paradigma, 22* (1), 59-94.

Martínez, P. (2006). *El método de estudio de caso estrategia metodológica de la investigación científica. Pensamiento y gestión*, 20, 165-193.

Reid, D., Knipping, C., & Crosby, D. (2008). Refutations and the logic of practice. In Figueras, O., Cortina, J.L., Alatorre, S., Rojano, T., & Sepúlveda, A. (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*: Vol. 4, (169-176). México: Cinvestav-UMSNH.

Toulmin, S., Rieke, R., & Janik, A. (1978). Reasoning and its goals. *An introduction to reasoning* (pp 3-23). New york: earlier.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. England: Cambridge University Press.

Viholainen, A. (2008). *Prospective mathematics teachers informal and formal reasoning about the concepts of derivative and differentiability*. (Tesis inédita de maestría). University of Jyvaskyla: Faculty of Mathematics and Science, Finland.

Un referente para analizar los campos de conocimiento conceptual y procedimental del teorema de Pitágoras

Nathalia **Valderrama** Ramírez
Docente de Matemáticas – Investigador
Secretaria de Educación Bogotá - Universidad Nacional de Colombia
Colombia
nataliavalderrama@ustadistancia.edu.co

Diana Isabel **Quintero** Suica
Docente de Matematicas - investigador
Secretaria de Educación Cundinamarca - Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
dma_dquintero472@pedagogica.edu.co

Resumen

Al abordar el teorema de Pitágoras en diferentes momentos y trabajos de aula anteriores a este, y al procurar un marco de evaluación de las producciones de los estudiantes frente a dichos trabajos, surge la necesidad de generar un instrumento que permita analizar las producciones realizadas por ellos. El objetivo del presente documento es ilustrar la creación y constitución de dicho instrumento, el cual conforma *un referente para analizar los campos de conocimiento conceptual y procedimental del teorema de Pitágoras*, y es derivado de la integración de dos propuestas: los campos de conocimiento conceptual y procedimental expuestos en Rico (1997), y las etapas de construcción de estructuras descritas en la taxonomía SOLO (*Structure of Observed Learning Outcomes*). Toda vez que esta integración es producida, nutrimos tal referente a partir de unos indicadores de análisis sugeridos que posibilitan un análisis cualitativo de futuras producciones estudiantiles sobre este concepto matemático.

¿Cómo nacen las propuestas Teorema de Pitágoras – Proporcionalidad?

La idea impulsadora del presente documento nace tres años atrás, a partir de nuestro interés en los estudios realizados por Guacaneme (20016) acerca de la nociones de razón y proporción en la geometría euclidiana. Tales nociones, las cuales difieren de las movilizadas tradicionalmente en el aula de la educación básica y media, nos han llevado a explorar nuevos ámbitos de la educación en matemáticas, y a construir una serie de propuestas (Quintero-Suica y Valderrama, 2015-a; Quintero-Suica y Valderrama, 2015-b) que nos permitan comprender algunas de las complejidades de los objetos, y de los procesos de enseñanza y aprendizaje de estos.

Acerca de la propuesta anterior

Para la construcción de la razón de proporcionalidad en nuestras propuestas, nos hemos auxiliado del método de antanairésis. Por medio de este método se busca determinar una medida común a dos magnitudes dadas, cuya naturaleza sea la misma, vía la sustracción reiterada de una de las magnitudes a la otra. Toda vez que se construye la razón de un par de magnitudes, es posible determinar si dos parejas de magnitudes de la misma naturaleza son proporcionales. En este caso basta con comparar la razón construida para cada pareja, verificando que sean las mismas.

Esta concepción de la razón y proporción la exploramos, con relativa facilidad en un curso de grado séptimo, al considerar como magnitudes un par de segmentos o parejas de segmentos. No fue así, al querer explorarla con magnitudes como las superficies, pues requeríamos un algoritmo que nos permitiera adicionar o sustraer cantidades de superficie, obteniendo como resultado una magnitud del mismo tipo.

Articulación con la propuesta actual

La dificultad antes señalada, se convierte en una oportunidad de trabajo al considerar al teorema de Pitágoras como el algoritmo requerido para llevar a cabo tales operaciones en el conjunto de las superficies. Por esta razón, nos interesamos en diseñar una secuencia de aprendizaje para la construcción de una concepción generalizada de este teorema.

Después de diseñada la propuesta, en la misma línea de la primera (antanirésis), se aplicó a estudiantes de grado decimo y con el fin de analizar las producciones al trabajar con tal secuencia, vimos la necesidad de configurar un marco de referencia apropiado, y por tanto una herramienta analítica, con el fin de describir cualitativamente tales producciones.

Acerca de la propuesta "Generalización del teorema de Pitágoras"

El presente artículo tiene como objetivo principal presentar y justificar el marco de referencia que se elaboró a partir de la propuesta de Campos de conocimiento de Rico (1997) integrando a este las taxonomías SOLO (*Structed Observed Learning Outcomes*) por Biggs y Collis (1982), para determinar criterios de clasificación y análisis de las producciones de los estudiantes luego de aplicar la propuesta didáctica denominada "generalización del teorema de Pitágoras" sin embargo, es necesario para el lector hacer una breve síntesis de dicha propuesta , extraída de la propuesta misma la cual se ha socializado anteriormente como parte del trabajo completo que se viene desarrollando desde hace algunos años como investigación de aula inspirada por las propuesta del profesor Edgar Guacaneme en algunos de sus artículos.

Esta propuesta se definió desde dos perspectivas i) la histórico-matemática la cual nos permitió establecer el método de suma tomando como instrumento el teorema de Pitágoras y ii) los aspectos de tipo didáctico y evaluativo que se consideran pertinentes para orientar la propuesta (objetivos, actividades, entre otros). En este sentido se presentara la primera perspectiva para contextualizar al lector.

Histórico - matemática

Guacaneme (2011) citando a Recalde (1994), establece una de las perspectivas del teorema de Pitágoras abordada en *Elementos* la cual se detalla "como [un] algoritmo de la suma de superficies, vía la construcción de lo que hoy se reconoce como una estructura algebraica para las magnitudes geométricas" (p. 663).

Desde esta nueva perspectiva del teorema de Pitágoras se indaga sobre una nueva concepción de esta proposición. Muñoz (2012) hace un análisis minucioso de las superficies, la forma de sumarlas y la estructura algebraica que se plantea en *Elementos* y que representa la adición definida en el conjunto conformado por estas superficies. En su tesis de pregrado Muñoz (2012) presenta las tipologías de magnitudes que Euclides consideró en la geometría. Una de estas tipologías es la magnitud superficial, considerando que "una superficie es lo que solo tiene longitud y anchura" (p.21). Claramente, aunque es posible aplicar esta definición a las superficies sólidas[1], solo se trabajara con la noción de superficie plana.

Luego de definir las superficies planas, Euclides "construye [en] la proposición I.47 […] un algoritmo (Teorema de Pitágoras) para sumar dos cuadrados evidenciando así que la suma de estos cuadrados da como resultado un cuadrado equivalente a los sumados" (Muñoz, 2012, p.45). Dicho algoritmo se describe indicando que "en los triángulos rectilíneos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto" (Muñoz, 2012, p.48).

En otras palabras, el método para sumar superficies consiste *grosso modo* en la disposición de dos figuras semejantes en los catetos de un triángulo rectángulo, para luego obtener el resultado de la suma de estas dos figuras por medio de la representación de la figura dispuesta en la hipotenusa de dicho triángulo que, por su puesto, será semejante también a las dos iniciales.

Si bien Euclides solo consideró a los cuadrados para ser sumados por medio del teorema de Pitágoras, el método expuesto por él se puede aplicar a un par de superficies cualesquiera, aun cuando no fuesen cuadrados. Esto es posible debido a que *la gran mayoría* de las superficies planas se pueden cuadrar[2] (construir un cuadrado con la misma cantidad de superficie que la original) de forma que se puedan operar con el teorema de Pitágoras. Se analizarán, en lo que sigue, dos ejemplos de sumas de superficies con este teorema.

Ejemplo 1: Sean el ⊡ $ABCD$ y el ⊡ $EFGH$. Para obtener la suma de la cantidad de superficie de estos dos cuadrados, primero se disponen los cuadrados en los catetos de un triángulo rectángulo tal que la medida de estos últimos coincidan con la medida de estos catetos.

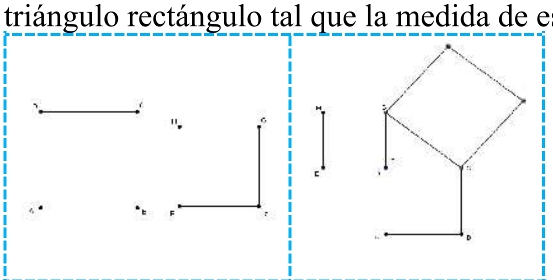


Figura 1: Suma de dos cuadrados

[1] En la sección de magnitudes superficiales (1.4), Muñoz (2012) aclara la distinción que hacían los filósofos griegos de las superficies y por tanto la posibilidad de una superficie sólida.

[2] En este punto cabe aclarar que para la Matemática griega solo era posible cuadrar algunas superficies con regla y compás (rectas y circunferencias). Sin embargo, las herramientas con las que disponemos en la actualidad (software matemático) nos permite cuadrar una cantidad adicional de superficies, como por ejemplo el círculo. Esto último es importante para la introducción de las TIC´s en la propuesta de enseñanza que aquí se presenta.

Luego, se construye a partir de la hipotenusa de ese mismo triángulo rectángulo, un cuadrado tal que la medida de su lado sea la misma que la medida de la hipotenusa. La cantidad de superficie de este cuadrado es la suma de las cantidades de las superficies dispuestas en los catetos.

Ejemplo 2: El presente ejemplo se toma de Muñoz (2012). Si se tienen dos superficies S_1 y S_2

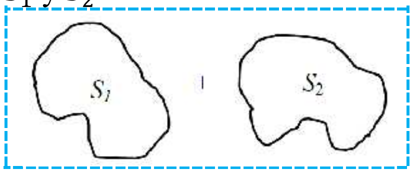


Figura 2: Superficies a sumar

Su suma se puede calcular cuadrando ambas superficies y obteniendo el cuadrado que subtiende la hipotenusa del triángulo rectángulo elegido, de forma que la cantidad de superficie de este es el resultado de la suma como se explicitó en el *Ejemplo 1*.

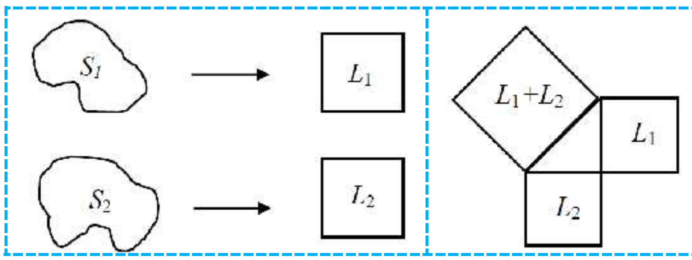


Figura 3: Suma de las superficies

Se puede observar fácilmente que utilizando el mismo método se puede también obtener la diferencia entre dos superficies. En el *Ejemplo 1*, la superficie del $\boxdot\ ABCD$ se puede ver como el resultado de la diferencia entre la cantidad de superficie del cuadrado que subtiende la hipotenusa y la cantidad de superficie del $\boxdot\ EFGH$. En otras palabras, si a la superficie del cuadrado de la hipotenusa se le resta la superficie del $\boxdot\ EFGH$, se obtendrá como resultado la superficie del $\boxdot\ ABCD$. Algo similar se puede realizar con las superficies del *Ejemplo 2*.

Por otro lado, el conjunto G de las superficies con la adición tal que

$$+: G \times G \to G$$

$$(S_1, S_2) \mapsto (S_1 + S_2)$$

Es una estructura algebraica denominada *semigrupo*. Es decir, $+$ es una operación conmutativa y asociativa en el conjunto G de las superficies (Muñoz, 2012). En otras palabras:

$$\forall S_1, S_2, S_3 \in G\ \big((S_1 + S_2) + S_3 = S_1 + (S_2 + S_3)\big)$$

$$\forall S_1, S_2 \in G\ (S_1 + S_2 = S_2 + S_1)$$

Acerca del marco de referencia de análisis de resultados de la puesta en practica

Ahora bien, este artículo pretende ilustrar la propuesta que desarrollaron las autoras al construir el marco de referencia que se usó para analizar los resultados, el cual tomó dos marcos conceptuales, los campos de conocimiento propuestos en Rico (1997) y las taxonomías SOLO de

Biggs y Collis (1982). Las autoras de la propuesta por inclinaciones didácticas eligen estos dos marcos y determinan indicadores para analizar las actuaciones y producciones de los aprendices.

En el primer marco conceptual elegido, Rico (1997) hace una organización cognitiva de los conocimientos y los clasifica en dos campos el campo conceptual y el campo procedimental. En el primero, El campo de conocimiento conceptual establece un conocimiento rico en relaciones, define que una unidad de conocimiento conceptual debe estar relacionada con otras piezas de información (unidades) para ser considerada una pieza del conocimiento conceptual (Hiebert y Lefevre. citados en Rico, 1997). En este campo se identifican los conceptos, los cuales nos permiten pensar y según lo concretos que estos sean se pueden identificar tres niveles: i) los **hechos** son unidades de información para registrar acontecimientos, *ii*) los **conceptos**, los cuales describen relaciones entre un conjunto de hechos y poseen una representación simbólica y, *iii*) las **estructuras conceptuales**, que relacionan conceptos y permiten generar unos de orden superior.

En el segundo campo, el procedimental se establece las formas de ejecutar una tarea a partir de algoritmos, reglas o procedimientos que son secuenciales y organizados linealmente (Hiebert y Lefevre. citados en Rico, 1997). Este conocimiento establece también tres niveles

i) Las **destrezas** las cuales procesan hechos o transforman expresiones simbólicas en otras a partir de una secuencia de reglas y manipulación de símbolos, *ii*) los **razonamientos**, que establecen relaciones de inferencia entre los conceptos y constituyen relaciones entre estos y, *iii*) las **estrategias**, que operan dentro de una estructura conceptual y suponen diferentes tipos de procedimientos a partir de las relaciones y conceptos implicados.

El segundo marco conceptual elegido para el marco de referencia tomado para el análisis son las taxonomías de SOLO (*Structed Observed Learning Outcomes*) Biggs y Collis (1982), estas buscan analizar y describir el nivel de comprensión y razonamiento de un aprendiz cuando se enfrenta a un aprendizaje especifico a través de cinco etapas o niveles que incrementan su complejidad asi: i) **Pre-estructural,** en este nivel se adquieren conceptos e información que no se encuentra relacionada entre sí, que no tiene organización o sentido, ii) **Uni-estructural,** aquí se realizan conexiones simples y obvias, pero la información no adquiere mayor significado respecto a la etapa anterior, iii) **Multi-estructural,** se deben realizar un número considerable de conexiones pero la relación entre ellas aún no se identifica y por lo tanto no se adquiere un sentido global de estas, iv) **Relacional,** en esta se puede apreciar el significado de las partes en relación con el todo y v) **Abstracta,** aquí ya se realizan conexiones no solo entre los objetos dados sino con otros elementos conocidos, generalizando y transfiriendo los principios establecidos en el nuevo conocimiento a algunas otras instancias. Esto en la propuesta y secuencia didáctica no represento de ningún modo indicadores de aprendizaje u objetivos de aprendizaje, por lo tanto no se planifico esperando que el aprendiz alcanzara el ultimo nivel, simplemente represento junto con los campos de conocimiento la estrategia de análisis.

¿Cómo se integran los dos marcos conceptuales?

En este sentido las etapas de la taxonomía SOLO se integran en el nivel de razonamiento del campo de conocimiento procedimental, es decir que el marco conceptual de Rico se toma como eje principal para el marco de referencia y las taxonomías son una integración en uno de los niveles de uno de los campos. Esta integración se logra luego del análisis de las pretensiones del nivel y las taxonomías mismas. De esta forma este marco de referencia permitirá definir los niveles del aprendiz en cada campo (teniendo una extensión en el campo procedimental y específicamente en el nivel de razonamiento).

Resultados

Marco de referencia para análisis de resultados

Como se especificó anteriormente este marco se diseña a partir de dos campos de conocimiento el conceptual y procedimental, los cuales a su vez incluyen tres niveles en uno de los cuales se integran las taxonomías de SOLO. A continuación se presenta cada campo considerado en la propuesta "Generalización del teorema de Pitágoras" y descrito desde el campo de conocimiento conceptual específicamente para el concepto "Teorema de Pitágoras – polígonos" y desde el campo de conocimiento procedimental lo establece desde el hecho que conforma "Teorema de Pitágoras – cuadrados". Es posible que el lector esté interesado en usar el marco de referencia que se va a proponer para definir los criterios en toda la estructura conceptual, es decir para cada concepto allí definido o que en próximos trabajos las autoras lo presenten.

Campo del conocimiento conceptual: la figura presenta las consideraciones de cada uno de los niveles *hechos, conceptos y estructuras conceptuales.*

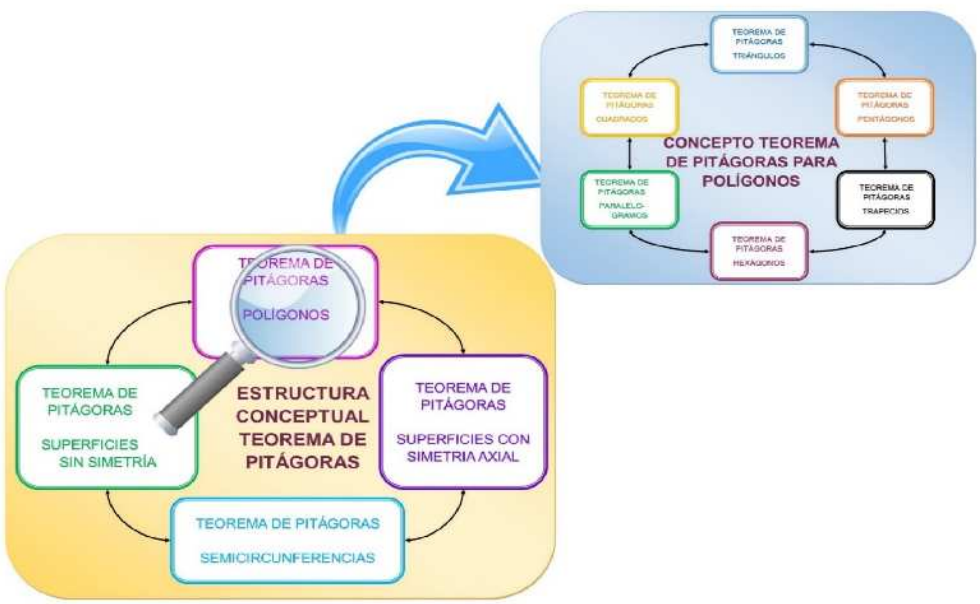


*Figura 1***.** Estructura conceptual para la generalización del **Teorema de Pitágoras**

La figura 1 ilustra una perspectiva global de la estructura conceptual que dentro del análisis se denomina "Teorema de Pitágoras" la cual se forma con los conceptos y las interrelaciones que se establecen entre estos. Cabe resaltar que aunque a dichos conceptos subyace el papel determinado desde la matemática griega, cada uno representa un tipo de superficie específica, por lo que aquí se propone un término concreto para cada uno, a saber: *Teorema de Pitágoras - Polígonos, Teorema de Pitágoras – Superficies sin simetría, Teorema de Pitágoras – Superficies con simetría axial y Teorema de Pitágoras – Semicircunferencia (estos son los* ***conceptos****).* Las autoras consideran que el reconocimiento y tratamiento de cada uno de estos conceptos le permitirán al aprendiz tener una amplia noción acerca de la proposición en estudio.

Tomando uno de los conceptos de la estructura se permite ver en detalle los hechos o unidades que lo conforman, por ejemplo en el concepto definido como "Teorema de Pitágoras – Polígonos" se contemplan las diferentes versiones del teorema de Pitágoras que se abordaron en la propuesta didáctica para superficies poligonales. Cuando se establece el teorema de Pitágoras para cuadrados se dice que este es un **hecho** que requiere ser relacionado con otros para generar dicho concepto. Así mismo, se tienen otros hechos que aluden al teorema para otros cuadriláteros (no cuadrados), los cuales se denominan: *Teorema de Pitágoras – Paralelogramo y Teorema de Pitágoras – Trapecio (estos son los* ***hechos*** *dentro de dicho concepto)*. Igualmente se tienen para otros polígonos, con lo cual surgen los hechos denominados Teorema de Pitágoras - Triángulos, Teorema de Pitágoras – Pentágonos y Teorema de Pitágoras – Hexágonos.

Cabe aclarar que en la ilustración se presenta un número finito de hechos que conforman el concepto, sin embargo, el número es infinito por a la cantidad de polígonos existentes.

Lo anterior describe un concepto de la estructura conceptual propuesto a partir de la relación entre varios hechos, el cual fue necesario abordar desde tareas de aprendizaje que posibilitaran la conceptualización y las relaciones entre la estructura. En la propuesta se abordó con mayor énfasis los hechos del concepto Teorema de Pitágoras con el fin de estudiar propiedades y relaciones geométricas que permitieran interiorizar la estructura en completitud.

Campo del conocimiento procedimental integrando SOLO en uno de sus niveles: Luego de definir las relaciones en el campo de conocimiento conceptual propuesta en la figura 1 se define el campo de conocimiento procedimental estableciendo sus tres niveles *destrezas, razonamientos y estrategias.* En este campo se debería definir los 3 niveles para cada uno de los hechos en cada concepto de la estructura sin embargo, así como en el anterior campo se seleccionó un concepto para ilustrar los hechos y relaciones entre estos que definen el concepto (lo cual deja abierta la posibilidad al lector de proponer para cualquiera de los demás conceptos definidos), en este campo se determinara solo un hecho especifico "Teorema de Pitágoras – Cuadrados". En la tabla 1 se organizaron los indicadores que clasifican las *destrezas, razonamientos (*en cada una de las etapas de SOLO) y las *estrategias.*

Tabla 5

Indicadores para la medición de destrezas, razonamientos y estrategias del hecho Teorema de Pitágoras - Cuadrados

Destrezas	Razonamientos		Estrategias	
	Etapa	Indicador	Etapa	Indicador
I1. Decide la transformación adecuada de dos superficies cuadradas en una tercera, por medio de la selección entre tres opciones	Pre-estructural	Identifica que las figuras involucradas en el trabajo son cuadrados	Abstracta I	Comprueba el Teorema de Pitágoras con superficies no cuadradas (triángulos, paralelogramos, etc)
I2. Explica las razones por la cuales descartar algunas de las opciones presentadas como superficies cuadradas posibles de representar la suma de otras dos del mismo tipo	Uni-estructural	Relaciona una determinada cantidad de superficie con la suma de dos cantidades de superficie adicionales	Relacional I	Generaliza el Teorema de Pitágoras de acuerdo con la comprobación hecha con superficies poligonales alternas

I3. Describe un método para realizar la transformación de dos superficies cuadradas en una tercera superficie del mismo tipo	Multi-estructural	Asocia las medidas de cada uno de los lados de cada cuadrado con las medidas de los lados de un triángulo rectángulo	Abstracta II	Comprueba el teorema de Pitágoras con superficies no poligonales
I4. Identifica la obtención de uno de los tres cuadrados a partir de otros dos dados, acudiendo al Teorema de Pitágoras como instrumento	Relacional	Da significado a la relación entre una terna de cuadrados y un triángulo rectángulo, reconociendo la conjunción de estos elementos como el teorema de Pitágoras	Relacional II	Generaliza el Teorema de Pitágoras de acuerdo con la comprobación hecha en superficies no poligonales.

Teniendo la tabla anterior se completa el marco de referencia que las autoras proponen para revisar las producciones de los estudiantes luego de aplicar la propuesta didáctica "Generalización del Teorema de Pitágoras" con el fin de tener un instrumento para medir los alcances de la misma.

Referencias y bibliografía

Biggs, J. & Collis, K. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: the SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.

Guacaneme, E. (2001). *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas* (Tesis de maestría). Universidad del Valle: Cali, Colombia.

Guacaneme, E. (2011). *Usos de la historia de las matemáticas en la educación matemática. El caso del teorema de Pitágoras*. Quindío: ECEM.

Muñoz, D. (2012). *Análisis histórico y epistemológico de la noción de suma en Euclides* (Tesis de pregrado). Santiago de Cali, Colombia.

Quintero-Suica, D., & Valderrama, N. (2015-a). Antanairesis: un recurso didáctico para la enseñanza de la proporcionalidad. Tuxtla, Chiapas. México: CIAEM.

Quintero-Suica, D., & Valderrama, N. (2015-b). Una concepción del Teorema de Pitágoras y su enseñanza en la educación básica y media. Bogotá. Colombia: ENHEM5.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En Rico, L.; Castro, E.; Castro, E.; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M.M. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Madrid: ice - Horsori.

Comprensión del concepto de área y perímetro de figuras planas, mediadas por las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele en estudiantes de grado tercero

Diana Luz **Arcia**[1]
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
Diana.arcia@udea.edu.co
David Fernando **Méndez** Vargas[2]
Grupo de investigación EDUMATH
Universidad de Antioquia
Colombia
davidmendezvargas@gmail.com
Pedro Vicente **Esteban** Duarte[3]
Grupo de investigación EDUMATH
Universidad de Antioquia
pedrovicente@gmail.com
Colombia

Resumen

La presente investigación se ha diseñado con el objetivo de analizar cómo los estudiantes de grado tercero comprenden el concepto de área y perímetro de figuras planas, mediadas por las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele. Se enmarca en un enfoque cualitativo con un estudio de caso instrumental, mediado por los instrumentos como: la observación, la entrevista y documentos escritos, permitiendo una mejor comprensión y análisis de los datos mediante la triangulación de éstos con los referentes teóricos. Se busca que los participantes logren comprender estos conceptos mediante el desarrollo de situaciones cotidianas que indaguen por el perímetro y el área de figuras planas.

Palabras clave: área, perímetro, comprensión, Van Hiele, aprendizaje, geometría

[1] Estudiante del programa de Maestría en Educación
[2] Asesor 1 de la tesis
[3] Asesor 2 de la tesis

Introducción

La presente investigación se realiza en el marco del programa de Maestría en Educación, Línea de Formación: Educación Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Este se origina a partir de la preocupación del docente de grado tercero de la Institución Educativa San Pedro de Urabá, al observar las dificultades que presentan los estudiantes en relación a la comprensión de los conceptos de área y perímetro, los cuales confunden con facilidad y les cuesta comprender el perímetro como el contorno de la figura y el área como la medida de la superficie limitada por el contorno. San Pedro de Urabá es un municipio que basa su economía en la agricultura y ganadería, por lo que parte de la población se dedica a estos quehaceres, lo que sugiere que los niños desde temprana edad están en contacto con algún tipo de medida. Con el fin de fortalecer este conocimiento y utilizando los medios que brinda el contexto, es oportuno abordar este tipo de investigación ya que pretende analizar como los estudiantes comprenden estos conceptos.

Planteamiento del problema

En el presente apartado se describe el contexto en el cual se realiza la investigación, se aborda la problemática que se espera investigar y su justificación. También se presenta una breve historia de los conceptos de área y perímetro, al igual que un rastreo de los mismos en la legislación colombiana y algunos antecedentes de investigaciones previas del tema en cuestión. Al final del apartado se encuentra la pregunta de investigación.

Contexto de la investigación

La Institución Educativa San Pedro de Urabá se encuentra ubicada en la zona urbana del municipio de San Pedro de Urabá, cuenta con 1997 estudiantes, distribuidos en varias sedes, ofrece servicios educativos de transición, básica primaria, secundaria y media. El grado tercero, en el que se realiza la presente investigación está conformado por 37 estudiantes, los cuales se encuentran entre edades de 8 y 12 años, provenientes de familias monoparentales, en su mayoría víctimas del conflicto armado que ha vivido la zona en los últimos tiempos.

Descripción del problema

Durante los años de experiencia en básica primaria, ha llamado la atención la dificultad que presentan los estudiantes, especialmente los de grado tercero, cuando se enfrentan a situaciones en las que intervienen los conceptos de área y perímetro. Cada vez que se plantean actividades en las que hay que hallar algunas de estas medidas, los estudiantes se confunden con facilidad, por ejemplo, cuando hay que hallar el área (o el perímetro) de una figura plana, colocan es la medida del concepto contrario. Otro razonamiento repetitivo sucede cuando aún estando la figura sobre una cuadrícula, los niños no logran encontrar el área correcta de la figura, a pesar de las repetidas orientaciones que se hacen al abordar el tema. A continuación, se muestran algunas actividades desarrolladas con los estudiantes que evidencian lo dicho hasta el momento.

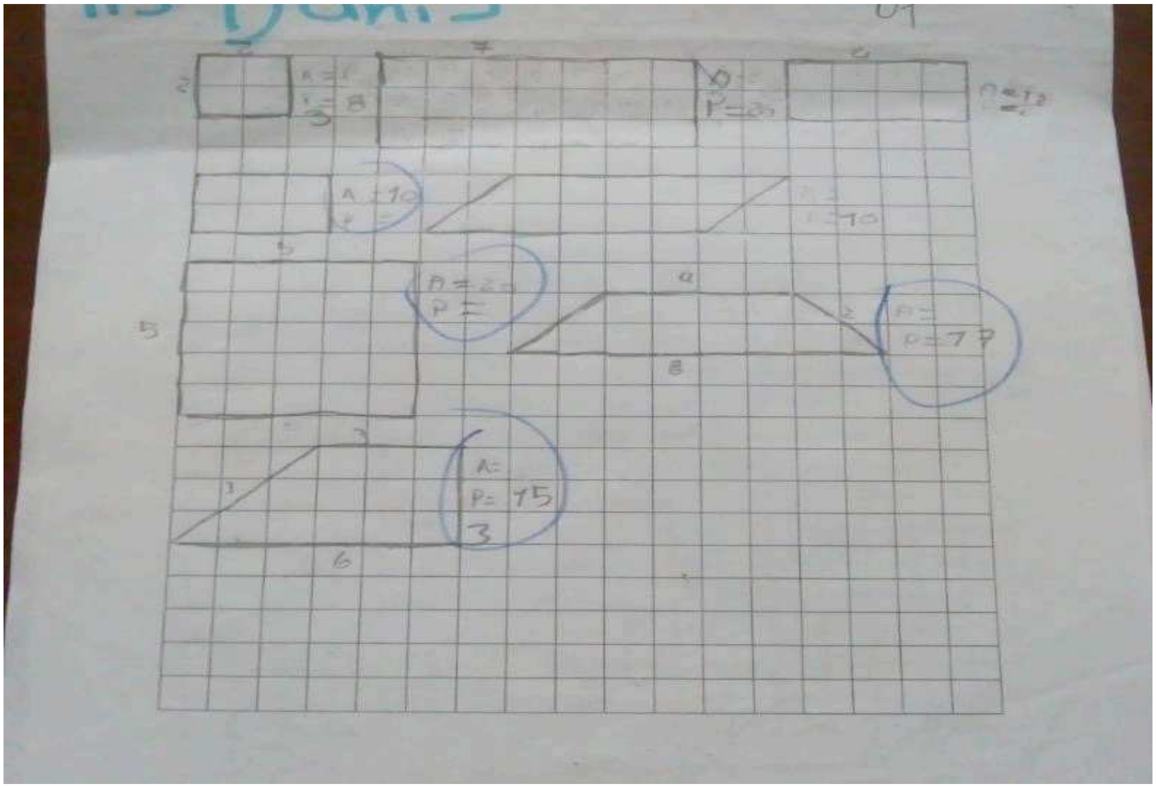


Imagen 1

Fuente: Investigación 2018

A los estudiantes se les indicó inicialmente que para hallar el perímetro se debía contar un lado de las unidades cuadradas del borde que conforman la figura (_), para hallar el área se debe tomar como unidad de medida la cuadrícula □. Como se puede observar en la *Figura 1*, para el rectángulo y el cuadrado cuyas áreas son $6u^2$ y $25u^2$, respectivamente, se evidencia que el estudiante coloca los números 10 y 20. Claramente se puede deducir, en ambos casos que el estudiante coloca el valor correspondiente al perímetro más no el del área, que es por lo que se le está preguntando. Si se profundiza un poco en el análisis se nota que, en ninguno de los ejercicios de la actividad, el estudiante coloca la unidad cuadrada correspondiente a esta medida. Esta dificultad llama la atención y motivan a plantear esto como un problema de investigación, en el que se analice la comprensión de los conceptos de área y perímetro en estudiantes de grado tercero.

Justificación

Los conceptos de área y de perímetro están ligados al diario vivir, en diversas ocasiones se encuentran situaciones como: ¿Cuál es el ancho de la sala?, ¿Cuánto mide esta mesa?, Qué parque tan grande, Qué piscina más pequeña. Para comprender mejor este tipo de cuestionamientos se requieren conocimientos de los conceptos de área y de perímetro y, por ello, es importante involucrar estrategias de enseñanza y de aprendizaje adecuadas, desde los primeros años de escolaridad. Es importante anotar que hay escenarios en los que cobran mayor importancia estos conceptos, como lo puede ser el contexto del campo, donde a diario los estudiantes se ven enfrentados a situaciones como las siguientes: ¿Cuánto mide cada uno de los límites de la finca de mi tío?, ¿Cuántas hectáreas se van a utilizar en el cultivo de maíz este año?, ¿Cuántos instrumentos de madera alargado se necesitan para cercar el terreno?, ¿Cuál es el terreno que se va a rodear para sembrar los vegetales? Escenarios como estos, son en los que viven la mayor parte de los estudiantes con los que se desarrollará el presente proyecto. Esto pone en evidencia la necesidad que desde los primeros años de escolaridad los estudiantes empiecen a razonar adecuadamente sobre los conceptos de área y de perímetro. Por otra parte, varias de las pruebas externas que realiza el estado a los estudiantes y las que se proponen a nivel institucional tienen un componente geométrico relacionado con el área y perímetro de figuras planas. De igual forma, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), a través de los Estándares Básicos de Competencia (2006), proponen que el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes se de en contextos del mundo real y cotidiano, escolar y extraescolar, lo que pone de manifiesto, que la comprensión de los conceptos de área y perímetro requieren un acercamiento con el entorno, permitiendo a los estudiantes relacionar figuras, objetos, formas y mediciones con situaciones de su diario vivir, generando oportunidades de desarrollo eficaz de habilidades matemáticas para resolver problemas en el contexto.

Importancia de la geometría a través de la historia

Para iniciar es pertinente definir la palabra geometría, que según Hemmerling (2005). "La geometría es el estudio de las propiedades y medidas de las figuras compuestas de puntos y líneas, se deriva de las palabras griegas *geo* que significa tierra, y *metrón* que significa medir" (p. 1).

La geometría tuvo sus orígenes con los egipcios, a partir de la necesidad que tenían para medir sus terrenos y delimitar sus cultivos debido a las inundaciones causadas por el rio Nilo.

También, Hemmerling (2005), manifiesta que "la geometría fue utilizada por los egipcios y babilonios aproximadamente en los años (4000 - 3000 a. C)." (p. 1).

Ortiz (2005), plantea que: "… las civilizaciones que lograron significativos progresos matemáticos, como fue el caso de Babilonia y de Egipto, dos legendarias culturas que llegaron a poseer una geometría, una aritmética y un álgebra suficientemente avanzada para lograr significativas aplicaciones (p. 4)." Esto les permitió resolver problemas prácticos relacionados con su entorno.

Concepto de área y perímetro desde los lineamientos

El Ministerio de Educación Nacional, en aras de fortalecer los procesos académicos al interior de las instituciones ha propuesto a lo largo del tiempo lineamientos curriculares que permiten unificar criterios referentes al aprendizaje que los estudiantes deben lograr en los diferentes niveles de educación, transición, básica primaria, secundaria y media. Es así como como en el año 2006 el MEN entrega a las Instituciones Educativas del país los Estándares Básicos de Competencia (EBC), para que tanto docentes como estudiantes tengan una mejor comprensión de los conceptos que se deben desarrollar en el aula y los puedan poner en práctica, de acuerdo a las exigencias de los diferentes contextos.

El MEN (1998) plantea que:

La renovación curricular propuso acercarse a las distintas regiones de las matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica y los conjuntos, desde una perspectiva sistémica que los comprendiera como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones (p. 6).

Para fortalecer la comprensión de los conceptos geométricos de los estudiantes en su paso por la escuela, los Estándares Básicos de Competencias (2006), proponen:

el trabajo con objetos bidimensionales y tridimensionales y sus movimientos y transformaciones permite integrar nociones sobre volumen, área y perímetro, lo cual a su vez posibilita conexiones con los sistemas métricos o de medidas y con las nociones de simetría, semejanza y congruencia, entre otras (pág. 62).

A continuación, se encuentran los EBC de la básica primaria en el área de matemáticas, que guardan relación con los conceptos de área y perímetro:

- Realizo construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales.
- Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se puedan medir (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa) y, en los eventos, su duración.
- Describo y argumento relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas (MEN, 2006 p. 80).

Concepto de área

En el presente trabajo se tomará como definiciones de los conceptos abordados en el estudio los propuestos por Garrido (2005), dado que guardan un acercamiento con el contexto en el que se desenvuelve la investigación y además son citados por el MEN.

"El área de un polígono es la superficie delimitada por las rectas entre sí, y se calcula en unidades cuadras, en otras palabras, se define como el tamaño de una superficie en unidades cuadradas; en el sistema internacional la unidad de medida de longitud es el metro (m)". (Garrido, 2015, p.51).

Concepto de perímetro

"Es la suma de las medidas de todos los segmentos que forman el área de un polígono" (Garrido, 2015, p. 51).

Los conceptos antes mencionados son los que se tendrán en cuenta como objeto de estudio en la presente investigación para el razonamiento de estudiantes de grado tercero.

Antecedentes

Después de realizar una búsqueda relacionada con el objeto de interés en las diferentes bases de datos, se encontraron investigaciones y artículos publicados que enriquecen la presente investigación.

González, (2014), realizó una investigación fundamentada en la comprensión de los conceptos de área y perímetro y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café utilizando como marco conceptual la Enseñanza para la Comprensión. El objetivo general fue analizar el proceso de comprensión de los estudiantes del grado 5º de la Institución Educativa Santa Rita, municipio de Andes, departamento de Antioquia, donde los resultados mostraron que los estudiantes comprendieron los conceptos de área y perímetro a través de diversas asociaciones con el de área.

Manotas y Rojas (2008), publicaron un artículo basado en la conceptualización acerca del perímetro, área y volumen en tres estudiantes universitarios, el objetivo principal fue describir las concepciones que tienen tres alumnos universitarios acerca del perímetro, el área y el volumen, donde una de las conclusiones que se evidencio fue la confusión entre área y perímetro, un problema muy frecuente en la escuela, además el tratamiento no debe ser aritmetizado, sino que debe tomarse como referente las situaciones de la vida cotidiana para que el estudiante asimile de forma directa los conceptos pertinentes.

Selmer, Valentine, Luna, Rummel & Rye (2016), en su publicación: ¿cómo podemos utilizar mejor el espacio de nuestro jardín escolar? Explorando los conceptos de área y el perímetro en un contexto de aprendizaje autentico, este artículo tiene como propósito mostrar como una unidad de ciencias matemáticas y el uso del aprendizaje basado en el jardín, se pueden utilizar para enseñar los conceptos matemáticos de medición de área; el trabajo se realizó dividiendo el jardín en diferentes regiones teniendo en cuenta el tamaño de las plantas elegidas para cada espacio. Al analizar los criterios de la rúbrica y puntuaciones de los estudiantes se evidencio un aumento en el porcentaje de los estudiantes que pueden utilizar con precisión una fórmula para el área, pueden determinar el perímetro, pueden utilizar una estrategia para encontrar el área correcta además se comunican de forma integral y con claridad.

Las investigaciones antes mencionadas se constituyen en referentes para el presente trabajo, dado que aportan elementos que contribuyen a mejorar la comprensión de conceptos matemáticos en niños y niñas desde los grados iniciales, algo similar se pretende con este estudio, que los estudiantes comprendan los conceptos de área y perímetro de figuras planas que se encuentran en su entorno: aula de clase, Colegio, lugar de vivienda, entre otros.

Pregunta de investigación

Esta propuesta se direcciona en la comprensión que deben tener los estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa San pedro de Urabá en el componente geométrico, como es el área y perímetro de figuras planas, para lo cual se diseñó la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo comprenden los estudiantes del grado tercero los conceptos de área y perímetro de figuras planas, mediadas por las fases de aprendizajes del modelo de Van Hiele?

La anterior pregunta se sustenta desde la propia experiencia como profesora del área y desde referentes de la literatura científica, “El análisis obtenido desde la experiencia evidencia que la confusión entre el área y perímetro se muestra persistente” (Corberán, 1996, p. 22).

Objetivo general

Analizar cómo los estudiantes de grado tercero comprenden los conceptos de área y perímetro de figuras planas, mediadas por las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.

Marco teórico

Después de un estudio de varios marcos teóricos con los cuales es posible abordar un trabajo investigativo de este tipo, considerando la naturaleza de la investigación y teniendo en cuenta los aportes realizados por el MEN en relación con el estudio de la geometría, se considera que para la implementación de la presente investigación es pertinente apoyarse en los fundamentos teóricos del modelo de razonamiento de Van Hiele planteado por Jaime y Gutiérrez (1990), y en especial en las fases de aprendizaje del mismo, que permiten organizar de una manera coherente el trabajo que los estudiantes deben realizar a lo largo de un proceso de aprendizaje de conceptos geométricos.

Metodología y diseño

Para orientar el desarrollo de esta propuesta se tendrá en cuenta un enfoque de tipo cualitativo, donde Hernández, Fernández y Baptista (2010) “Postulan que la “realidad” se define a través de las interpretaciones de los participantes en la investigación” (p. 9). Es de gran importancia realizar una interpretación adecuada a los actores en el proceso, en este caso a los estudiantes de grado tercero, los cuales serán los participantes de la investigación y que van a permitir el avance de la misma. Se considera que el enfoque cualitativo es pertinente para el desarrollo de la presente investigación dado que brinda herramientas puntuales para la recolección, procesamiento de los datos y el análisis de la información.

El diseño metodológico es el Estudio de Caso Instrumental planteado por Stake (1999), es un instrumento que permite analizar la comprensión de un individuo o de un grupo de personas, donde la observación juega un papel importante y la información recopilada permite analizar cómo se desarrolla el proceso investigativo planteado. Los instrumentos para recolectar la información son: observación, entrevista y documentos escritos, a través de la recolección de informaciones con los participantes se pueden aplicar actividades de las fases de Van Hiele que conlleven a la comprensión de los conceptos de área y perímetro de figuras planas

Resultados esperados

Se espera que con la presente investigación aportar al estudio de la comprensión de los conceptos de área y de perímetro desde el grado tercero de la Básica Primaria, a partir de situaciones cotidianas que requieran la aplicabilidad de estos conceptos, donde los participantes logren resolver situaciones como; “En la casa de Andrés se necesita embaldosar la habitación de él, ésta mide tres metros de largo y tres de ancho. Andrés necesita la ayuda de los compañeros para saber cuántas baldosas de 30 centímetros de lado se necesitan para cubrir la superficie de la habitación”. Además, se requiere saber su perímetro, porque su madre desea decorar a su alrededor con una cenefa.

La revisión de la literatura se constituye en referente para la presente investigación dado que aportan elementos que contribuyen a mejorar la comprensión de conceptos matemáticos en niños y niñas desde los grados iniciales, por lo que se podría concluir que:

- Los estudiantes comprendan los conceptos de área y perímetro de figuras planas que se encuentran en su entorno: aula de clase, Colegio, lugar de vivienda, entre otros
- Fortalezcan los aprendizajes relacionados con el componente geométrico, y puedan relacionarlo con las prácticas cotidianas
- Los estudiantes de grado tercero resuelvan problemas de la vida diaria relacionados con los conceptos de área y perímetro

Referencias bibliográficas

Corberán, R. (1996) *análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Valencia, España.

Cortez López, R. (2012). *Historia de la geometría euclidiana y sus aplicaciones para la enseñanza.* Recuperado de: file:///C:/Users/Asus/Downloads/TFG-L2.pdf

Garrido, E. (2015) *La enseñanza del concepto de área y perímetro de polígonos a través del Geoplano, para el desarrollo de la competencia matemática en resolución de problemas del grado séptimo en el Colegio María Antonia Cerini.* Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia

González, J. (2014). *Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café.* Tesis de maestría. Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Hemmerling, M. (2005). *“Elementos básicos de la geometría” en Geometría elemental.* México: Limusa, pp. 11-62.

Hernández, R. Fernández, C, Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V. 22

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de la investigación para la enseñanza de la geometría*: El modelo de Van Hiele. Sevilla: Alfar. México.

Manotas, M., & Rojas, C. (2008).

Conceptualización acerca del perímetro, área y volumen en tres alumnos universitarios.

Zona próxima (9). Revista del Instituto de Estudios en Educación. Universidad del Norte

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares.* Bogotá Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias del área de matemáticas.* Bogotá. Colombia. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje del área de matemáticas.* Colombia. Recuperado de: https://es.slideshare.net/sbmalambo/dba-derechos-bsicos-de-aprendizaje-matemticas

Ortiz, A. (2005). *Historia de la Matemática*. Recuperado de: http://textos.pucp.edu.pe/pdf/2389.pdf.

Selmer, S., Valentine, K., Luna, M., Rummel, S., & Rye, J. (2016). *How Can We Best Use Our School Garden Space? Exploring the Concepts of Area and Perimeter in an Authentic* Learning Context. Australian Primary Mathematics Classroom, *21*(4), 3-10.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudios de caso*. Madrid: Morata, S.L.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

La geometría en el salón de clases a través del uso de algunos elementos del arte

Fernando **González** Aldana
Colegio Santa Teresa de Jesús de Ibagué
Colombia
fernalmat@hotmail.com
Osvaldo Jesús **Rojas** Velázquez
Universidad Antonio Nariño
Colombia
orojasv69@uan.edu.co

Resumen

La matemática es una de las áreas del conocimiento que contribuye al desarrollo cognoscitivo en las estudiantes, el teorema de Pitágoras y Tales, las construcciones de figuras geométricas, la perspectiva y la resolución de problemas geométricos, aportan a este fin. Este trabajo se dirige a favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en las estudiantes de grado octavo, a través de actividades que se sustentan en la resolución de problemas, en el uso de algunos elementos del arte, en la visualización y en la Comunidad de Práctica de Wenger. La implementación de las actividades sobre la matemática y arte, sirven como motivación para el estudio de la geometría, constituyendo la base conceptual para el desarrollo de otras temáticas; además, ayuda a fortalecer el pensamiento espacial, mejora la percepción visual y propicia motivación para la resolución de problemas retadores en la Educación Básica.

Palabras clave: resolución de problemas, elementos del arte, visualización, Comunidad de Práctica, enseñanza aprendizaje de la geometría.

Introducción

El contenido geométrico está presente en todos los currículos de los diferentes niveles educativos, por tal motivo es necesario lograr un aprendizaje adecuado de este contenido en cada grado, pues el contenido dado sirve de base para los estudios posteriores.

La matemática y el arte en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en el grado octavo, ha ocupado a los investigadores en diferentes reuniones y congresos, en particular se destacan las investigaciones presentadas en el Congreso Internacional de Educación Matemática

(ICME), en el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), en la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), en las reuniones latinoamericanas de matemática educativa (RELME), entre otros. En el ICMI (2001), se considera a la geometría como una herramienta vital para el entendimiento, y también como una parte intuitiva y concreta de las matemáticas, ligada a la realidad. El ICMI 2008 centra su atención en la enseñanza-aprendizaje de la geometría mediante software de geometría dinámica (SGD). Koyuncu, Akyuz & Cakiroglu (2014) enfatizan que la interacción con los SGD favorece el desarrollo cognitivo y la adquisición de conocimientos. Se considera que para ubicar de nuevo la geometría en un lugar prominente se hace necesario retomar las herramientas con las que se generó la geometría y a su historia.

Por otra parte el uso de los elementos artísticos para el aprendizaje de la geometría, es una propuesta que surge de la experiencia de trabajo en el aula, lo cual ha llevado a observar el limitado desarrollo del componente geométrico en los estudiantes. En este sentido, se pretende retomar, además de materiales manipulables como la regla y el compás, conceptos básicos de geometría, el uso de la tecnología, elementos artísticos y sumados a esto, el ingenio y la creatividad para que haya una apropiación y disfrute de la geometría.

Este trabajo parte de las dificultades que presentan las estudiantes, y se dirige a buscar herramientas que fortalezcan el aprendizaje geométrico, a través de los elementos artísticos. Para ello se diseñan y aplican actividades didácticas y pedagógicas, que favorecen el aprendizaje y razonamiento geométrico en las estudiantes. La investigación tiene como objetivo favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, mediante la implementación de actividades basadas en problemas, que permitan a las estudiantes adquirir habilidades y destrezas creativas que conduzcan a la visualización y apreciación del arte en una demostración o práctica matemática.

Marco teórico

Esta investigación, toma como punto de referencia la historia del arte desde Paolo Ucello (1397-1475), Leon Battista Alberty (1404-1472), Piero de la Francesca (1416-1492), Leonardo Davinci (1452-1519), cuando tuvieron que resolver el problema de como plasmar un objeto tridimensional en un plano, problema matemático que fue resuelto por estos matemáticos artistas, con el concepto de perspectiva. Para Platón, la importancia y el valor de una obra de arte residen en la asimilación de la belleza absoluta, por ello, una obra de arte es bella si contiene orden y armonía. Por otro lado Kant contrapone lo bello y lo sublime en términos de forma y contenido, aunque no necesariamente como unidad dialéctica; Para los pitagóricos, la armonía, uno de los ingredientes de la belleza, va unida al número en la constitución ontológica de todo el universo, Aristóteles por su parte, en su Metafísica enuncia que las formas expresan la belleza desde el orden, la simetría, la precisión y las matemáticas se ocupan de estudiarlas. Esta es la base de esta investigación como herramientas pedagógicas en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Las matemáticas y el arte han estado siempre estrechamente vinculadas: el número de oro, las simetrías, las proporciones, la geometría, son elementos presentes en el arte; no en vano muchos grandes artistas de la historia han sido grandes matemáticos; se han apoyado en la matemática para expresar la realidad con un lenguaje artístico. Euclides, en el siglo III a. de C. condensó todo el conocimiento matemático de la antigüedad en los trece volúmenes de los “Elementos”. En la escuela Platónica, consideraban la geometría como una ciencia pura que existía por derecho propio. Era inevitable que otras ciencias y el arte, adoptaran sus descubrimientos.

Según De Guzmán (2013) ésta temática ha sido abordada por diferentes investigadores, donde plantean sus ideas y características importantes. La relación entre la geometría, la matemática, el arte y el diseño es bastante obvia. La belleza de muchos objetos de la geometría es inspiración para los artistas. Comúnmente se ve la matemática como una ciencia; pero la matemática es un lenguaje de la ciencia. Muchos matemáticos ven también a la matemática como un arte; un artista crea cosas que considera bellas pero para un matemático un teorema es bello y algunos teoremas son más bellos que otros, lo cual un artista lo trasforma en obra de arte.

La naturaleza por sí sola tiene un diseño único artístico-matemático. Cada uno de los objetos naturales tiene una armonía, un juego de colores que contrastan todo tipo de sensación y es allí, donde se encuentra implícita la matemática porque esto hace que sea perfecto, que sea irrepetible. Cada fenómeno natural funciona gracias a su matemática. Falk de Losada (2013), precisa que los griegos no fijaron su atención en la simetría sino en la proporcionalidad y terminaron por estudiar temas relacionados con construcciones de regla y compás.

En una demostración matemática se despiertan sentimientos y cambios de estado de ánimo que también se encuentran al realizar una obra de arte, siendo éste, el verdadero valor de motivación. Esto implica que podemos incluir la técnica de Omar Rayo (1928-2010), artista colombiano considerado geométrico-óptico, que aprovecha los cuadrados, los rectángulos y las líneas en zig zag y se expresa con el blanco, el negro y el rojo; Víctor Vasarely (1906-1997) artista Húngaro, considerado como el padre del op art o modelo propio de arte abstracto geométrico, con efectos ópticos de movimiento, ambigüedad de formas y perspectivas, e imágenes inestables. Emmer, Michelle (2005) “Un hecho matemático debe ser, ante todo bello. Un teorema puede y debe ser bello, como lo es, por ejemplo, una poesía...”. Es allí donde se puede encontrar la relación matemática y arte.

Además la investigación se sustenta en la teoría de la resolución de problemas y en la visualización. Con respecto a la teoría de la resolución de problemas se destacan los aportes de Polya (1973), Krulik y Rudnik (1980), Pochulu y Rodríguez (2012), Sigarreta, Rodríguez y Ruesga (2006); Santos-Trigo, Moreno y Camacho-Machín (2016), entre otros. Se asume que un problema “... es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para el cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma” (Krulik y Rudnik, 1980: 4). Para el momento de resolución de los problemas en el aula se consideran las fases “… comprender el problema, diseñar un plan, llevar a cabo el plan y mirar hacia atrás…” (Polya, 1973: 5-16).

En el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría a través de algunos elementos del arte se hace necesario un constante apoyo en el aula y en el trabajo extraescolar, para dotar a los estudiantes de herramientas y estímulos para hacer descubrimientos visuales. Por su parte, Arcavi (2003, p. 216) aduce que "La visualización ofrece un método de ver lo invisible", criterios que se consideran útiles para las clases de matemática. Con respecto a la visualización, se asume en esta investigación la definición dada por Arcavi (2003, p. 217), pues se ajusta al propósito del trabajo, pues expresa que:

> … es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas.

Metodología

La población objeto de investigación son las estudiantes del grado octavo del colegio Santa teresa de Jesús de Ibagué, de carácter estatal, nivel muy superior, ubicado en el departamento del Tolima, país Colombia y como muestra 37 estudiantes del grado octavo C.

La investigación se lleva a cabo bajo el paradigma cualitativo, con un enfoque de investigación cualitativo y un diseño de investigación acción. Este enfoque en el área de la matemática y el arte permite transformar, mejorar y enriquecer el quehacer docente, dirigido a despertar la motivación y el interés para lograr un aprendizaje significativo en las estudiantes de grado octavo del colegio Santa teresa de Jesús de Ibagué.

Durante la investigación se utilizan elementos del arte y de la geometría, imágenes pictóricas de los artistas Omar Rayo y Víctor Vasarely, software de geometría dinámica (GeoGebra), materiales visuales manipulables de geometría y dibujo como la regla, compás, escuadras, colores, borrador, lápices, entre otros. El instrumento de contenido se dirige a constatar cómo se manifiesta el proceso de diseño y reproducción de ejercicios pictóricos (representación visual), como resultado de una práctica o de una demostración geométrica, importante en la resolución de problemas.

La investigación se orienta a encontrar la relación entre matemática y arte en el aula, con una metodología que propicia "conocer y actuar" en el contexto de un proceso de apropiación y aplicación del conocimiento geométrico. Para ello, en el grupo seleccionado se realizan talleres sobre dominio de herramientas físicas y tecnológicas. La observación participante, los instrumentos de geometría, de dibujo y el uso de la tecnología a través de GeoGebra, conducen a encontrar la relación entre matemáticas y el arte.

Se realiza una implementación en la práctica con estudiantes de grado octavo y se muestran los resultados alcanzados, los cuales se contrastan con una encuesta de satisfacción aplicada a las estudiantes para valorar el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría con ayuda de la relación que existe entre las matemáticas y el arte, una vez terminada la aplicación de la práctica pedagógica.

Resultados

Las actividades diseñadas para la clase de geometría, donde se integra el arte y la matemática, están orientadas hacia el aprendizaje de las construcciones geométricas, Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales, perspectivas en el op art y solución de problemas geométricos. Este proceso se lleva a cabo a través de la resolución de problemas geométricos retadores.

Las actividades propuestas propician la manipulación y exploración de los objetos artísticos y geométricos, para lograr el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en el grado octavo, a través de la relación arte y matemática.

Para la búsqueda de la relación entre matemática y arte, en la investigación se desarrollan seis actividades basadas en problemas retadores. Estas actividades son:

- Construcción de figuras geométricas con regla y compás.
- Teorema de Pitágoras y su aplicación a los números irracionales.
- Aplicación del Teorema de Tales para la resolución de problemas.
- Perspectiva en el arte óptico.
- Problemas geométricos.
- Exposición concurso intercolegiado "Matemáticamente" 2017.

Resultados de la encuesta de satisfacción aplicada a los estudiantes y discusión

Al realizar el análisis respectivo de la encuesta de satisfacción, aplicada a 33 estudiantes presentes del grado octavo C, del colegio Santa Teresa de Jesús de Ibagué, acerca de la percepción que tienen las niñas involucradas en la práctica pedagógica, se evidencia en alto porcentaje de favorabilidad el cumplimiento de los objetivos planteados en la tesis (ver gráfico 2), tabla de datos de la encuesta de satisfacción.

Preg \ Valor	1	2	3	4	5
1			1	2	30
2				8	25
3	1	1	1	6	24
4	1		2	7	23
5			2	3	28
6			2	10	21
7				12	21
8			1	7	25

Gráfico 1. Tabla de datos de la encuesta de satisfacción.

Fuente: Elaboración propia.

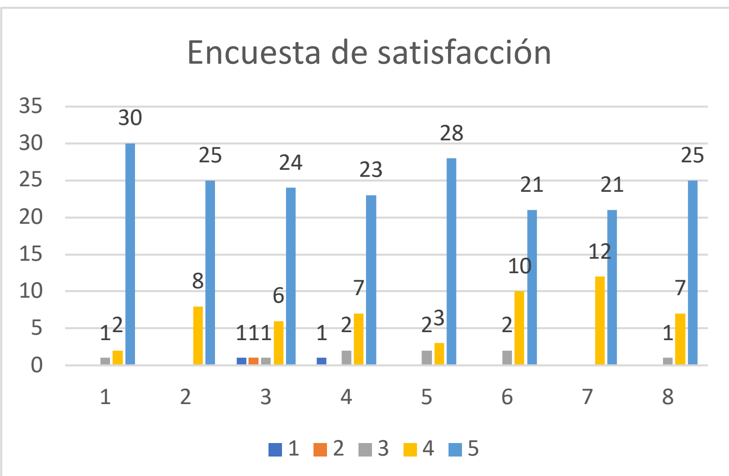


Gráfico 2. Análisis estadístico de la encuesta de satisfacción

Fuente: Elaboración propia.

El anterior gráfico de barras (gráfico 2), análisis estadístico de la encuesta de satisfacción, en donde participaron 33 estudiantes de las 37 de la muestra, se evidencia la calificación más alta de uno a cinco, la tienen un gran número de estudiantes en cada una de las ocho preguntas realizadas, en la pregunta uno, 30 estudiantes manifestaron 5, dos en 4 y una en 3; en la segunda pregunta, 25 en 5 y ocho en 4; en la tercera pregunta 24 en 5, seis en 4 y una estudiante en el 1, 2 y 3; en la cuarta pregunta 23 en 5, siete en 4, dos en 3 y una en 1; la quinta pregunta 28 en 5, tres en 4, dos en tres; en la sexta pregunta 21 en 5, diez en 4 y dos en 3; en la pregunta 7, 21 estudiantes 5, y doce estudiantes en 4 y en la octava pregunta 25 en el 5, siete estudiantes en 4 y una en 1.

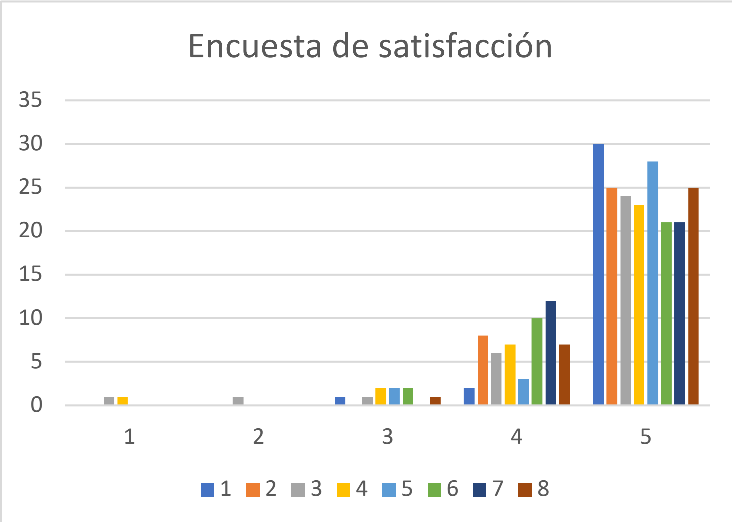


Gráfico 3. Análisis de datos por valoración

Fuente: Elaboración propia.

El gráfico 3, análisis de datos por valoración, nos muestra que de las 33 estudiantes encuestadas, se concentra en la valoración de 5 en cada una de las preguntas así; la 1 en un 91%, la 2 en un 76%, la 3 en un 73%, la 4 en un 70%, la 5 en un 85%, la 6 y la 7 en un 64% y la 8 en un 76%; en la valoración 4, el porcentaje es en la pregunta 1 es de 6%, la 2 de 24%, la 3 de 18%, la 4 de 21%, la 5 de 9%, la 6 de 30%, la 7 de 36% y la 8 es de 21%; la valoración de 3 en un porcentaje en la preguntas 1, 3 y 8 de un 3% y las pregunta 4, 5 y 6 en un 6%, las preguntas 2 y 7 0%; la valoración de 2, la pregunta 3 un 3% las demás preguntas 0%, en la valoración de 1, sólo las preguntas 3 y 4 con un 3%, las preguntas 0%. Las estudiantes hicieron valoración de la pregunta 3 y 4 de 1 porque no consideraron un reto las actividades y tienen ciertas dificultades en el manejo de los elementos artísticos y geométricos.

Conclusiones

El proceso de investigación sobre matemática y arte, en el grado octavo de la Educación Básica, permitió dar respuesta al objetivo. Los resultados obtenidos permiten destacar algunos elementos en éste trabajo, ellos son:

- La teoria de la resolución de problema es fundamental para el trabajo en el aula con la solución de problemas de matemática y arte. En la investigación se retoman las ideas de especialistas en Educación Matemática, los cuales aportan definiciones sobre problemas, resolución de problemas y estrategias para la resolución, que constituyen elementos básicos en la propuesta de actividades, basada en problemas retadores.
- La resolución de problemas aporta a la construcción de ejercicios artísticos con contenido matemático, a través del uso de algunos elementos del arte, pues las estudiantes aprenden a pensar y a razonar de manera geométrica abstracta, a explorar y a crear sus representaciones y modelos mentales. Mediante este proceso se propicia resolver situaciones de la matemática, del arte y de la vida real.
- La visualización favorece la construcción de ejercicios artísticos, a través del uso de elementos de geometría como la regla y el compás. En este proceso se considera que la visualización es una habilidad, que permite formar imágenes y representaciones, para la

búsqueda de una interpretación geométrica de las obras de arte y de utilizar las técnicas artísticas como el op art y geometría abstracta en una gráfica geométrica o en un teorema.

- La comunidad de práctica para el trabajo de la matemática y arte en el aula, transitó durante su desarrollo por las fases: potencial, coalescencia, madurez, gestión y transformación. El tránsito por estas fases permite su consolidación como comunidad y favorece la construcción del conocimiento, donde es esencial la participación, la imaginación de las estudiantes, para la búsqueda de su propia identidad. El trabajo en comunidades de práctica permite la comprensión y socialización en el salón de clases de la construcción y apropiación de conocimientos geométricos.
- Como resultado de la implementación de las actividades en la práctica escolar, se constata:

✓ Comprensión por las estudiantes acerca del proceso de relacionar imágenes de obras de arte con sus respectivas soluciones geométricas y viceversa.

✓ El diseño de las actividades, la heurística utilizada en los problemas, el estilo de trabajo en grupo, la relación entre matemática y arte, motivaron a las estudiantes en querer socializar sus ideas y mostrar sus experiencias pictóricas.

✓ Se interpretan y analizan los Teoremas de Pitágoras y Tales y, se fortalecen otros conceptos matemáticos y geométricos que implican estas demostraciones.

✓ El uso de los materiales didácticos en la clase, genera mayor motivación en las estudiantes para la resolución de los problemas geométricos que relacionen la matemática y el arte.

✓ Los diferentes procedimientos que utilizaron las estudiantes para la resolución de los problemas se constatan en la socialización de las actividades, tanto en los grupos de comunidades de práctica, como en el debate con todas las estudiantes del aula.

✓ Se fortalece el sentido de cooperación, responsabilidad y compañerismo y la participación entre las estudiantes, lográndose su satisfacción al notar avances en el desarrollo de sus procesos matemáticos.

✓ En las actividades participaron 10 grupos de trabajo, para un total de 37 estudiantes, de ellos un 90% responde de forma correcta cada una de las actividades.

✓ La exposición de sus trabajos sobre matemática y arte en el concurso intercolegiado "Matemáticamente 2017", a diez delegaciones de instituciones privadas y públicas de Ibagué, fortalecen su motivación y autoestima.

Referencias y bibliografía

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

De Guzmán, M. (2013) *Polivalencia de las matemáticas: Ciencia, técnica, arte, juego, filosofía*. Real Academia de Ciencias. Recuperado de www.rac.es/ficheros/doc/00337.pdf, p.243

De Losada, M. (2013). *Corrientes de pensamiento matemático del siglo XX*. Segunda parte: Estructuralismo. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Emmer, M. (2005). La perfezione visibile: matematica ed arte. *Arnodes, 1-9.* Recuperado de https://www.sectormatematica.cl/arte/emmer0505.pdf.

González, A. F. (2017). La matemática como arte en el desarrollo del pensamiento espacial, sistema geométrico. En O. Pérez (presidencia), Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme 31), Lima, Perú.

Koyuncu, I. Akyuz, D & Cakiroglu E. (2014) investigating plane geometry problem-solving strategies of prospective mathematics teachers in technology and paper-and-pencil environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*. Recuperado http://link.springer.com/article/10.1007/s10763-014-9510-8.

Krulik, S., y Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers*. Boston: Allyn and Bacon.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Buenos Aires: Eduvim.

Polya, G. (1973). *How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Stanford University, Second Edition, New Jersey: Princeton University Press.

Santos-Trigo, M., Moreno, L. y Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM Mathematics Education*, Spriger.

Sigarreta, J., Rodríguez, J. y Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* (Venezuela), vol. 13, núm. 1, pp.53-66.

Perspectivas para a formação inicial de professores de matemática a partir de um projeto de monitoria em geometria

Andriceli **Richit**
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia
Brasil
andriceli.richit@ifc.edu.br
Cleiton **Fornari**
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia
Brasil
cleiton_fornari@yahoo.com.br
Eliane Suely Everling **Paim**
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia
Brasil
eliane.paim@ifc.edu.br
Felipe Junior **Crozetta**
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia
Brasil
felipecrozetta@outlook.com
Mariane de Lima **Bissolotti**
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia
Brasil
mariane.bissolotti@gmail.com

Resumo

Este artigo traz considerações acerca do Projeto “Ampliando compreensões e atenuando dificuldades em Geometria Plana, Espacial e Analítica por meio de Projeto de Monitoria” desenvolvido no IFC - *Campus* Concórdia. Objetivou ampliar e diversificar estudos de Geometria Plana, Espacial e Analítica, fomentar a melhoria dos processos de ensino-aprendizagem, incentivar a formação docente, promover articulações entre docentes e discentes bem como estimular práticas que possibilitem o desenvolvimento de inovações metodológicas pautadas na construção de itinerários formativos articulando conteúdos disciplinares. No desenvolvimento da monitoria, destacamos reconstruções conceituais a partir de representações com softwares e a necessidade de reflexão sobre as contribuições da monitoria, no sentido de que não pode ser vista apenas como um apêndice que visa abordar/tratar aspectos mais imediatos relacionados aos processos de aprendizagem, mas que de fato contribua e ultrapasse dinâmicas de sala de aula e desenvolva um acadêmico autônomo, enriquecendo a formação do monitor, docente e demais envolvidos.

Palavras Chave: Ensino e Aprendizagem, Geometria, Formação de Professores, Monitoria, Prática Docente.

Introdução

A Geometria pode ser compreendida como um corpo de conhecimentos fundamental para que possamos compreender o mundo além de propiciar a participação ativa do homem na sociedade, pois está presente em todas as instâncias de nossas vidas (Fillos, 2006). Corroboramos ao autor supracitado de que a Geometria tem papel preponderante no ensino, uma vez que ativa estruturas mentais no movimento que perpassa dados concretos e experimentais para processos que envolvem abstração e generalização. Ademais, a Geometria configura-se como um tema integrador entre diversos ramos da Matemática, "sendo a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituintes de sua essência" (Fillos, 2006, p. 2).

Embora historicamente o desenvolvimento da Geometria tenha sido impulsionado por necesidades práticas e cotidianas, sua axiomatização e relevância alcançada no meio científico, vem configurando-a como uma disciplina complicada, uma vez que se desdobrou em outras áreas como a Geometria Plana, Espacial e Analítica e uma algebrização foi se instaurando em sua essência. Por outro lado, reconhecemos que sem uma articulação dos aspectos algébricos do Ensino da Matemática aos geométricos, obstáculos acabam de criando e privando os estudantes de um desenvolvimento integral dos processos de pensamento (Rosa, 2009).

Nesse sentido, discussões que envolvem as problemáticas dos processos de ensinar e aprender Geometria, assumem várias orientações que transitam entre questões pedagógicas e metodológicas. Nesse movimento, vem se desenvolvendo investigações que tomam as tecnologias como possibilidades de promover compreensões "[...] de relações geométricas sem a necessidade de memorização e utilização de estratégias rigorosamente elaboradas, ou técnicas de resolução analítica e, com as TI a experimentação passa a obter um papel importante na produção matemática (Santos, 2006, p. 24)".

Ainda nesta perspectiva, Pavanello (2001, p. 183) chama a atenção a postura do professor ao trabalhar com a Geometria, assinalando que este não trabalha "[...] as relações existentes entre as figuras, fato esse que não auxilia o aluno a progredir para um nível superior de compreensão de conceitos". Neste sentido, destacamos que ao longo da instituição desta área da Matemática no contexto escolar, a Geometria não tem sido abordada ou abordada de maneira superficial devido as dificuldades inerentes aos seus processos de ensino e aprendizagem. Para Rosa (2009, p.24) "O ensino da Geometria no enfoque tradicional enfrenta grandes problemas, seja com relação à formação e conhecimento do professor, aos métodos utilizados, ou ainda as dificuldades encontradas em relacionar a abordagem axiomática e a Geometria prática [...]".

Considerando as problemáticas relacionadas aos processos de aprender e ensinar Geometria, apresentamos, neste artigo, algumas considerações a partir do desenvolvimento de um Projeto de Monitoria em Geometria (Plana, Espacial e Analítica) no contexto da formação inicial de professores de Matemática. Para tanto, o presente texto, assim está estruturado: primeiramente, apresentamos alguns elementos introdutórios. Em um segundo momento, trazemos reflexões no que concerne ao Ensino de Geometria. Na sequência, apresentamos alguns aspectos referentes a história das monitorias e sua institucionalização no contexto da Educação

Superior, a processualidade metodológica e encerrando o texto, apresentamos algumas compreensões a partir do Projeto desenvolvido.

Geometria: Elementos históricos e de ensino e aprendizagem

Pavanello (1993, p. 8) pontua que o ensino de Matemática no início do século passado buscava "O domínio das técnicas operatórias necessárias á vida prática e às atividades comerciais. Com a mesma orientação, eram trabalhadas algumas noções de geometria". No tocante aos professores de Matemática desta época Pavanello (1993) menciona que estes não apresentavam formação específica em licenciatura, mas eram profissionais liberais que, muitas vezes, haviam aprendido sozinhos. Por outro lado, as aulas de Matemática eram, conforme Silva (2010, p. 69)

> [...] expositivas, sendo que nem sequer a resolução de exercícios pelos alunos em sala de aula era uma prática generalizada. Quando era feita, o que se apresentava aos alunos eram exercícios padronizados, que deveriam ser resolvidos do mesmo modo que um "problema modelo", com ênfase nos cálculos volumosos. As demonstrações dos teoremas eram expostas pelo professor e decoradas pelos alunos, para apresentação nas provas. Os recursos utilizados não iam além do giz, quadro-negro e livro-texto, se houvesse.

Ponderamos que não houveram mudanças substanciais fazendo uma comparação com os dias de hoje, e, diariamente, alguns estudantes tem aulas com professores não formados em Matemática ou com profissionais não capacitados, os quais desenvolvem uma prática pedagógica que enfatiza a memorização de fórmulas, exercícios repetitivos que são seguidos de Provas. Ademais, alguns desses profissionais capacitados ou não acabam desenvolvendo um ensino superficial em Geometria, conforme evidencia Lorenzato (1995, p. 3):

> São inúmeras causas, porém, duas delas estão atuando forte e diretamente em sala de aula: a primeira é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas. [...] A segunda causa da omissão geométrica deve-se à exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático, quer devido à má formação de nossos professores, quer devido à estafante jornada de trabalho que estão submetidos.

Dessa maneira fica evidente que as causas levantadas por Lorenzato fazem parte do cotidiano da escola e do professor, onde se estabelece uma dependência sobre o livro didático, onde o professor ensina Geometria como ela é apresentada nos livros, ou seja, como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, sem nenhuma contextualização com a vida cotidiana do aluno. Compreendemos, que para que o ensino de Geometria seja realmente eficaz e significativo, o professor deve lançar mão de diferentes recursos e metodologias, com destaque no contexto atual, para a utilização das Tecnologias Digitais. Um dos documentos mais importantes do contexto brasileiro, os PCN, que propõe diretrizes para o Ensino de Matemática na escola básica, salienta que:

> É importante destacar que a Matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua capacidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação. E também, o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a

> iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios (BRASIL, 1998, p. 26).

Sendo assim, tendo em suas mãos alguns recursos diferenciados daqueles comumente presentes em sala de aula, o professor pode desenvolver um ensino eficaz e significativo, fazendo com que os estudantes passem a buscar pelo novo, e não apenas esperar, reduzindo indagações rotineiras como: Mas por que estudar Geometria? Ela é tão necessária em nosso dia a dia? Assim, tais indagações podem serem substituídas e a importância do estudo da Geometria pode ser finalmente compreendido pelos estudantes. Sobre isso, Lorenzato (1995, p.5) pontua que:

> A necessidade do ensino de geometria, pelo fato de que um indivíduo sem este conteúdo, nunca poderia desenvolver o pensar geométrico, ou ainda, o raciocínio visual, além de não conseguir resolver situações da vida que forem geometrizadas. E ainda não se pode utilizar a geometria como facilitadora para compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das idéias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.

É preciso ressaltar que a Geometria está presente de alguma forma em todos os lugares do nosso cotidiano, quer seja por por visualização de formas geométricas ou até mesmo por idéias de paralelismo e entre outras definições inerentes a disciplina, o que justifica sua importância. No IFC – Campus Concórdia, há um índice elevado de reprovação nas disciplinas de Geometria Plana, Espacial e Analítica no contexto da Licenciatura em Matemática bem como em outros Cursos, e na tentativa de construir novos itinerários formativos é que o projeto foi proposto e desenvolvido e cujas reflexões são aqui apresentadas. No que segue, expomos algumas considerações teórico-metodológicas relacionadas a monitoria.

Aspectos teórico-metodológicos do trabalho de Monitoria

O Ensino Superior é uma realidade de 14% da população adulta brasileira, onde apenas 16% dos egressos completaram a graduação (OCDE, 2016). Frente a isto, Instituições de Ensino Superior (IES) investem em estratégias e práticas que propiciem alcançar melhores resultados, tanto na avaliação do Ministério da Educação quanto no prestígio reverberado pelos egressos. Isso já constitui, por si só, um motivo para investir em formas alternativas de trabalho que estimulem e efetivem o processo de aprendizagem, como é o caso das monitorias (Frison, 2016).

O papel de monitor na antiguidade clássica era exercido pelo pedagogo, através de atividades diferentes e auxiliares às do professor, ora com o objetivo didático de explicar, ora buscando disciplinar, através do controle comportamental dos estudantes (Monroe, 1974).

No século XVIII, o inglês Joseph Lancaster criou o método de ensino Lancaster, também denominado ensino mútuo ou monitorial, que tem por objetivo ensinar um maior número de alunos usando poucos recursos, em pouco tempo e com qualidade. O monitor, aluno mais adiantado, recebia separadamente orientação do professor para depois replicar aos outros. No Brasil, ele fora implantado ainda no império sob a indicação de Dom Pedro I, em 1823, a partir da iniciativa de uma escola de ensino mútuo (Dantas, 2014). A monitoria, no Brasil, foi instituída oficialmente apenas no século XX, através da Lei de Reformulação do Ensino Superior (Lei BR nº 5540/68), cujo artigo 41 dispõe o seguinte:

> As universidades deverão criar as funções de monitor para alunos do curso de graduação que se submeterem a provas específicas, nas quais demonstrem capacidade de desempenho em atividades técnico-didáticas de determinada disciplina. As funções de monitor deverão ser remuneradas e consideradas título para posterior ingresso em carreira de magistério superior.

Mais tarde, em 1994, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei BR nº 9.394/94) revoga a anterior e, no artigo 84, estabelece a orientação atual: "Os discentes da educação superior poderão ser aproveitados em tarefas de ensino e pesquisa pelas respectivas instituições, exercendo funções de monitoria, de acordo com seu rendimento e seu plano de estudos". Portanto, a monitoria trata-se de uma estratégia de ensino respaldada em lei, que pode efetivar o aprendizado na graduação, por meio da atuação de monitores em práticas e experiências pedagógicas. Permite também oportunizar ao graduando atitudes autônomas perante o conhecimento, assumindo, com maior responsabilidade, o compromisso de investir em sua formação além de estimular a docência (Voos, 2009).

No entanto, mesmo com todas as contribuições que as atividades de monitoria oferecem ao Ensino Superior, as vezes é pouco aproveitada pelos acadêmicos. Sendo assim, neste trabalho buscamos apresentar algumas discussões sobre o ensino e aprendizagem de Geometria no âmbito de um Curso de Matemática - Licenciatura, vinculada ao referido programa.

Metodologia

O Programa de Monitoria mencionado teve seu início em agosto de 2017 e término em julho de 2018. Durante este período, vários acadêmicos tiveram a oportunidade de fazer acompanhamento semanal com o monitor, em que eram supridas algumas dificuldades básicas e imediatas. A medida em que o projeto e suas atividades foram se desenvolvendo, percebemos em algumas oportunidades, dificuldade dos alunos em relação à conceitos básicos da Geometria. Tais dificuldades relacionavam-se a necessidade de utilização de softwares específicos para compreender melhor situações apresentadas ou até mesmo a visualização de sólidos geométricos, no caso da Geometria Espacial. Assim, para avaliar a qualidade do ensino e aprendizagem de Geometria dos estudantes, monitores e coordenadora do Projeto, elaboraram um questionário semiaberto, composto por 24 perguntas subdivididas em seis subtítulos referentes a cada etapa do processo de ensino e aprendizagem de Geometria ao longo da vida acadêmica dos alunos. Participaram da pesquisa onze alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IFC- Campus Concórdia. Os dados foram coletados nas dependências do Campus em Novembro de 2017, por meio de formulário online. Assim, os dados tomados para análise são oriundos de questionários aplicados e de observações e notas de campo do monitor do Projeto. A pesquisa segue os pressupostos da pesquisa qualitativa, com análise interpretativa (Bogdan; Biklen, 1994).

Resultados e Discussões

O Programa de monitoria iniciou em agosto de 2017, abrangendo a disciplina de Geometria Espacial. De início houve pouca participação dos acadêmicos, contudo logo começaram a sugir dúvidas no contexto da disciplina, e estes recorreram aos monitores. Assim, o primeiro atendimento realizado destinou-se a esclarecer dúvidas de natureza conceitual de polígono, poliedro, prisma e etc. Neste sentido as dúvidas não estavam relacionadas a resolução de exercícios, evidenciando assim algumas lacunas conceituais no que tangem ao ensino e aprendizagem de Geometria. Nesse sentido, compreendemos que estas lacunas conceituais podem ter raízes em um aprendizado limitado no Ensino Fundamental e Médio aliado as metodologias adotadas pelo professor. Portanto, são várias os motivos que levam os alunos a não se apropriarem de conceitos básicos de Geometria.

Apesar de termos mudanças nas leis que definem o que ensinar e novas metodologias que escancaram as portas para novos conhecimentos, hoje em dia a forma de ensinar continua a mesma, baseadas em métodos em que os alunos são submetidos a aulas expositivas e métodos de repetição para fixação. Ao serem questionados sobre "Como foi a aprendizagem da Geometria no Ensino Fundamental e Médio?", 18,2% dos alunos disseram que não lembravam, 9, 10% disseram que foi regular, 63,60% disseram que foi pouco trabalhada e apenas 9,10% disseram que foi ótima.

Observemos que grande parte dos alunos ingressantes da Licenciatura em Matemática do IFC – Campus Concórdia não construíram conhecimentos em Geometria na educação básica. Uma pequena minoria disse que o ensino foi ótimo, mas não apresentaram elementos que nos possibilitassem avaliar a qualidade deste ensino. Apesar da fragmentação do processo de ensino e aprendizagem de Geometria na escola básica, acreditamos que para suprimir estas dificuldades, sua abordagem em sala de aula deve ser amparada por diversos materiais didáticos, incluindo o uso de softwares. No Projeto de Monitoria, a participação dos acadêmicos foi muito importante para a construção do conhecimento de conteúdo específico necessário a sua futura formação docente e articulou materiais concretos e softwares.

Outro questionamento que integrava o questionário online buscava aspectos relacionados ao conhecimento tecnológico dos alunos e assim estava definido "Você já conhecia ou conhece algum software para estudar Geometria? Como conheceu?" Dos respondentes, 9, 10% disseram que tinham conhecimento em autocad, outros 9,10% disseram que não. Por outro lado, não cabia a resposta do questionário, mas 81,80% disseram que tinham algum conhecimento e que este era oriundo de atividades e aulas que tiveram no âmbito da graduação.

Outra perspectiva das Monitorias, reside na construção de itinerários formativos, o que ocorreu no âmbito do Projeto, uma vez que os alunos puderam utilizar-se de outros recursos para subsidiar suas aprendizagens. Em específico, durante a monitoria, os alunos puderam experimentar abordagens que fugiam do clássico giz e lousa, as quais estavam alicerçadas na utilização das Tecnologias Digitais. Conforme quadro 2, podemos observar que grande parte dos acadêmicos não haviam estudado conceitos de Geometria por meio de softwares. Entretranto, a partir do projeto, esta prática não só foi incentivada como também foi materializada.

Ademais, no decorrer do projeto destacamos o Facebook como um importante aliado dos monitores, que quando necessário publicavam algumas atividades referente as geometrias.

Figura 1:

Publicações realizadas no facebook, no grupo Monitoria de Geometria.

Fonte: Autores (2018).

Ainda, em termos de construção do conhecimento em Geometria e sua importância na formação do futuro professor, mais de 50% dos alunos que responderam o questionário destacaram a importância do mesmo para sua futura atuação docente. Uma pequena porcentagem, representando 27,30 % justificou, dizendo que "Sim, pois a Geometria em si faz o aluno ter um senso crítico para observar objetos reais como exemplos. Além de resolverem problemas em nosso cotidiano". Outros 18,20% dos respondentes destacaram que "Com certeza, é o assunto mais 'palpável' que se pode ter dentro da Matemática".

Fillos (2006) *apud* Fainguelernt (1995), explicita que a Geometria tem um papel predominante na aprendizagem de conceitos matemáticos na medida em que ativa estruturas mentais no movimento que perpassa dados concretos e experimentais e caminha para os processos que envolvem abstração e generalização. Assim, nesta perspectiva, tem-se a necessidade de articulação dos aspectos algébricos aos geométricos, para poder suprimir ou até mesmo poder impedir que obstáculos se criem, e impedir os estudantes de um desenvolvimento integral dos processos de pensamento.

Considerações Finais

Apesar das dificuldades no processo de ensino de Geometria, consideramos que os alunos por si só podem construir seu próprio conhecimento a partir de estudos mais aprofundados e na utilização das TICs para que possam compreender aspectos e propriedadades mais abstratos.

Percebemos que o Projeto de Monitoria por vezes assumiu a característica de um Projeto de Mentoria, no sentido de que relações de confiança e entendimento entre os sujeitos se construíram. Ademais, o monitor "Ao compartilhar as histórias de vida e as experiências vivenciadas, os envolvidos se inserem em um movimento que permite olhar as diferentes situações e ações de vários ângulos, podendo desencadear processos reflexivos a cerda das vivencias que possibilitem o desenvolvimento dos sujeitos"(Oliveira; Guimarães; Andrade, 2016, p. 50). Ademais, o desenvolvimento do Projeto trouxe importantes contribuições em termos de formação inicial de professores, pois possibilitou a construção de conhecimento não só matemático, mas também pedagógico e tecnológico.

Referências

Bogdan, R. C.; Biklen, S. K. *Investigação qualitativa em educação:uma introdução as teorias e aos métodos.* Porto: Porto Editora, 1994.

Brasil. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Lei nº. 9.394/94, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Seção 1, p. 27.833 - 27.841.

Brasil. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

Brasil. Senado Federal, Lei Federal n.º 5540, de 28 de novembro de 1968.

Dantas, O. M. *Monitoria: fonte de saberes à docência superior*. Rev. Bras. Estud. Pedagog. (online), Brasília; 95(241):567-589; set./dez. 2014.

Fillos, L.M. *O Ensino da Geometria: Depoimentos de Professores que fizeram História.* In: ANAIS DO X ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Belo Horizonte, Minas Gerais, 2006. p. 01-07.

Frison L.M.B. *Monitoria: uma modalidade de ensino que potencializa a aprendizagem colaborativa e autorregulada*. Pro-Posições; 27(1):133-153;jan./abr. 2016.

Lorenzato, S. *Por que ensinar geometria?* Educação Matemática em Revista, SBEM, São Paulo, v. 3, n. 4, p. 1-64, 1995.

Monroe, P. *História da Educação*. 10. ed. São Paulo: Nacional; 1974.

Oliveira, I. L. L.; Guimarães, S. U.; Andrade, J. A. A. *A Aprendizagem dos Calouros da Licenciatura em Matemática: a experiência de um programa de mentoria*. 1 ed. Curitiba: Editora Appris. 2016.

Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Education at a Glance (EAG); 2016. [acesso em 16 nov. 2017]. Disponível em:<http://www.oecd.org>.

Pavanello, R. M. *O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências*. Zetetiké. Campinas, v. 1, n. 1, mar. 1993.

Pavanello, R. M. *Geometria: atuação de professores e aprendizagem nas séries iniciais*. In: Anais do I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática. Curitiba: 2001, p. 172-183.

Rosa, K. C. *Ambientes computacionais no contexto da Geometria: Panorama das teses e dissertações do Programa de Educação Matemática da PUC-SP de 1994 a 2007*. 106f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

Santos, S.C. *A Produção Matemática em um Ambiente Virtual de Aprendizagem: o caso da Geometria Euclidiana Espacial.* 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

Silva, M. C. L. *A geometria escolar e o Movimento da Matemática Moderna*: *em busca de uma nova representação.* In: FLORES, C.; ARRUDA, J. P. (Org.). A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: contribuição para a história da educação matemática. São Paulo: Annablume, 2010, v. 1, p. 65- 88.

Voos, D.; Batista J.B. *Sphaera: sobre o ensino de matemática e de ciências*. Porto Alegre: Premier, 2009, p. 232-247.