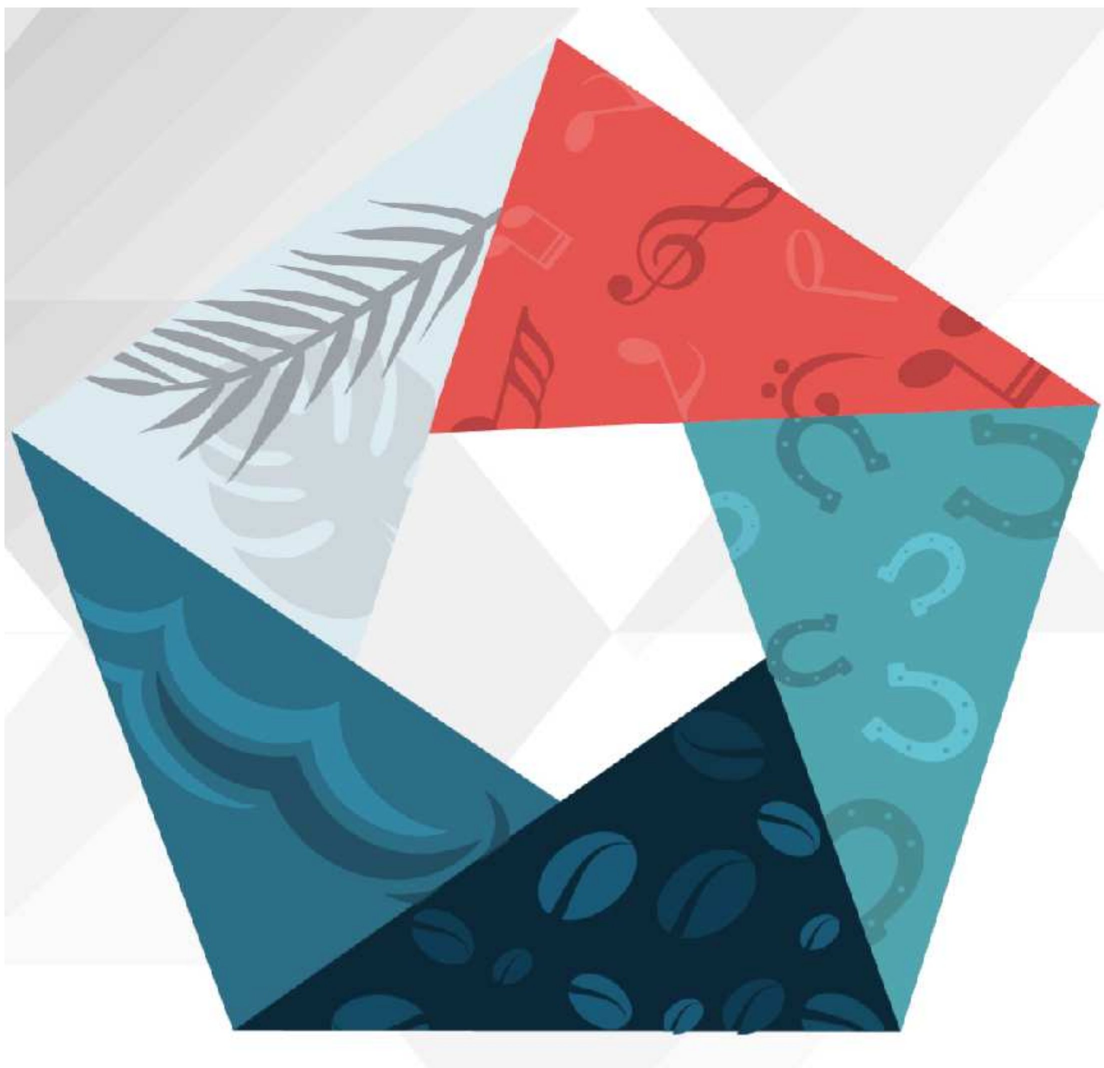
Educación Matemática en las Américas 2019

Volumen 1: Conferencias plenarias



CIAEM
IACME
desde - since 1961

Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO
www.ciaem-iacme.org

Educación Matemática en las Américas 2019
Volumen 1: Formación inicial de profesores
Editado por Yuri Morales-López y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN: 978-9945-09-413-8

El *Comité Interamericano de Educación Matemática* (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la *International Commission on Mathematical Instruction*. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera al CIAEM y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no fue previamente publicado en otro medio; y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Se respetaron los metadatos (nombres, apellidos, títulos, entre otros) que los autores proporcionaron cuando postularon su trabajo en la plataforma del evento.

Para citar este libro:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2020). *Educación Matemática en las Américas 2019.* Editores: Yuri Morales-López y Ángel Ruíz. República Dominicana: Autor.

ISBN: 978-9945-09-413-8

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LAS AMÉRICAS 2019

Presentación

Para el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es un placer y un honor ofrecer a la comunidad educativa este Volumen de *Educación Matemática en las Américas 2019*, en donde se pueden encontrar muy importantes insumos para comprender el momento histórico que atraviesa la Educación Matemática desde la perspectiva de las Américas.

La *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática* se realizó entre el 5 y 10 de mayo del 2019 en Medellín, Colombia. La Universidad de Medellín y la Universidad de Antioquia fueron las organizaciones académicas anfitrionas del evento. Las sesiones fueron realizadas en el campus de la Universidad de Medellín. Participaron 700 personas provenientes de 25 países de cuatro continentes: Europa, Asia, África y las Américas. Participaron centenares de docentes en servicio de la ciudad de Medellín y del Departamento de Antioquia.

Alrededor de 400 trabajos fueron presentados: conferencias plenarias y paralelas, mesas plenarias, minicursos, sesiones temáticas, comunicaciones cortas, talleres y posters. Unas 50 personalidades del mayor nivel en la comunidad internacional de Educación Matemática expusieron sobre sus investigaciones. Entre ellas Jill Adler (Suráfrica), Ferdinando Arzarello (Italia), Salvador Llinares (España), Yoshinori Shimizu (Japón), Michael Shaughnessy (EUA), Luis Rico (España), Fidel Oteiza (Chile), Carlos Vasco (Colombia), Carlos Sánchez (Cuba), Luis Carlos Arboleda (Colombia), Edwin Chaves (Costa Rica), Nelly León (Venezuela), Vilma Mesa (EUA). Aunque físicamente no pudo estar presente envió su contribución en forma de video Ubiratan D'Ambrosio (Brasil). Los trabajos dentro de la plataforma del congreso se pueden consultar en https://ciaem-redumate.org/conferencia/index.php/xvciaem/xv/schedConf/presentations

La revisión científica de todos los trabajos fue responsabilidad de un Comité Asesor Internacional, un Comité Internacional del Programa y el Comité Ejecutivo del CIAEM. Se contó con la coordinación central de Directores de tema y la Dirección de la plataforma científica realizada por el académico Yuri Morales con el apoyo de la profesora Johanna Mena (ambos de Costa Rica) y con la participación voluntaria de muchísimos revisores científicos de muchos países.

Este volumen incluye trabajos que fueron efectivamente presentados en ese congreso.

Expreso mi agradecimiento a todos los miembros de los comités científicos, directores de tema, revisores científicos, y directores de la plataforma científica. También deseo agradecer por su apoyo en el registro de este libro a Sarah González y a la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra en República Dominicana. Agradezco mucho a todos los autores que decidieron compartir su trabajo en las instancias que abrimos mediante la XV CIAEM. También a Yuri Morales quien técnica y formalmente generó este volumen para su registro.

En las diversas dimensiones del congreso, de cuya realización este libro es producto, quiero aprovechar esta ocasión para reconocer la valiosa contribución de las Universidades de Medellín y de Antioquia y al Comité Organizador Local de la XV CIAEM, y, además, agradecer al equipo humano del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* que ha sido durante muchos años un sostén crucial en la organización de todos los eventos del CIAEM y de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*; y en particular de este libro que hoy sacamos a la luz pública.

Este volumen es una parte del libro de *Memorias* completo (son 15 volúmenes que se pueden ver/descargar). Se ha respetado aquí la paginación del libro completo. Y las referencias *deben hacerse con base en el libro y su paginación*. No es necesario indicar el volumen específico donde se cita pues esta es una versión funcional al servicio de una mejor visualización o descarga de este valioso material.

Invitamos a los lectores de este libro a promoverlo en sus diversas actividades de docencia, investigación, extensión y divulgación en todos sus países.

Con afecto

Ángel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática
Presentación del 17 de julio de 2024
Costa Rica

Índice

Basado en la información suministrada durante la postulación de cada trabajo

Conferencias plenarias

Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes

Salvador **Llinares**
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España
sllinares@ua.es

Resumen

La enseñanza de las matemáticas se articula a través de diferentes tareas profesionales que ponen de relieve la influencia del contexto en cómo el profesor de matemáticas usa el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas. Esta situación introduce la idea de competencia docente del profesor como usar el conocimiento de manera pertinente en el desarrollo de las tareas profesionales vinculadas a la enseñanza de las matemáticas. Desde esta perspectiva, la competencia docente “mirar de manera profesional” la enseñanza de las matemáticas como una componente de la práctica profesional del profesor de matemáticas se entiende cómo interpretar las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en las que el profesor se encuentra para apoyar las decisiones de acción según los objetivos de aprendizaje planteados. Esta perspectiva deriva desafíos para los formadores de profesores de matemáticas.

Palabras clave: enseñanza de las matemáticas, competencia docente, conocimiento de matemáticas para enseñar, formación de profesores de matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas como un sistema de actividades prácticas

Desde hace algunos años se insiste en la necesidad de que los profesores de matemáticas tengan en cuenta la forma de pensar matemáticamente de los niños para ayudarles en su aprendizaje de las matemáticas. Ayudar a los estudiantes a razonar matemáticamente implica que los profesores deben elegir tareas matemáticamente relevantes para sus estudiantes e identificar oportunidades durante la enseñanza para que los estudiantes se impliquen en procesos matemáticos como particularizar y generalizar, conjeturar y argumentar/probar y así. Desde esta perspectiva, la práctica de enseñar matemáticas se puede entender como un sistema de actividades del profesor que en un contexto de aula podemos identificar como (i) seleccionar y diseñar tareas matemáticamente relevantes para los objetivos de aprendizaje, (ii) gestionar las diferentes fases de una lección y en particular la gestión de las discusiones matemáticas en el aula, e (iii) interpretar y analizar el pensamiento matemático de los estudiantes (Figura 1). Este sistema de actividades del profesor que articulan la práctica de enseñar matemáticas se puede concretar en actividades particulares. Por ejemplo, la selección o diseño de tareas matemáticamente relevantes implica la necesidad de anticipar respuestas probables de los estudiantes a dichas tareas. La gestión de las discusiones matemáticas en el aula implica la posibilidad de seleccionar estudiantes particulares para presentar sus respuestas e ideas durante la puesta en común, secuenciando con un propósito explicito el orden en el que los estudiantes se les da la oportunidad de discutir sus resoluciones y reconocer la posibilidad de hacer conexiones entre las respuestas de los diferentes estudiantes y entre estas y las ideas matemáticas clave que son el objetivo de la lección (Stein, Engle, Smith, y Hughes, 2008).

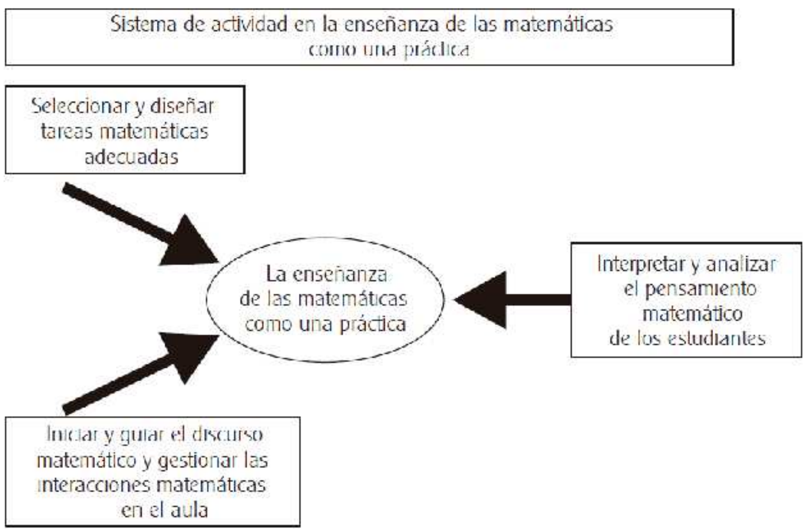


Figura 1. Sistema de actividad en la enseñanza de las matemáticas como una práctica en Llinares, Valls, y Roig (2008), pag. 34.

Estas actividades pueden contextualizarse desde los momentos en los que el profesor piensa sobre la enseñanza (planificación), hasta momentos imprevistos durante la enseñanza. Entre los primeros, están los momentos en los que el profesor tiene que planificar las lecciones, y tiene que pensar cómo secuenciar actividades con diferente demanda cognitiva teniendo en cuenta la diversidad de los alumnos en su clase. Entre las segundas, podemos encontrar el aprovechamiento de situaciones imprevistas durante la enseñanza que pueden ser usadas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, reconocer alguna cuestión planteada por los estudiantes y generada durante las discusiones matemáticas en el aula a partir de la cual el profesor puede decidir una determinada dirección de la clase para apoyar el aprendizaje de sus estudiantes.

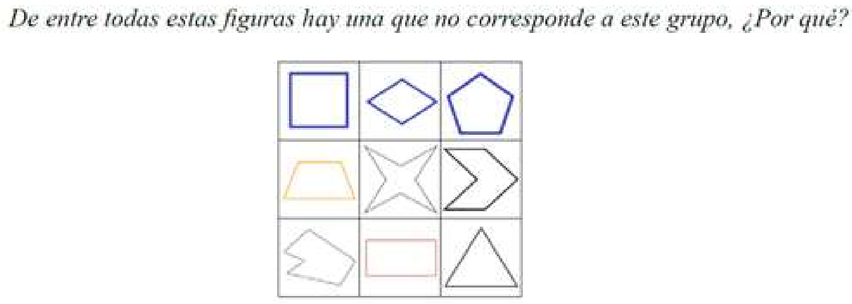
Esta variedad amplia de situaciones y con características tan diversas en las que los profesores deben responder en y durante la enseñanza de las matemáticas ha puesto de manifiesto la relevancia del conocimiento de matemáticas para la enseñanza (Ball & Bass, 2000; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Davis, & Renert 2013; Rowland, et al. 2009). Desde esta perspectiva se asume la influencia del conocimiento del profesor en determinar la calidad de la enseñanza. Ya que, en particular, la falta de este conocimiento limita la competencia del profesor para elegir o diseñar tareas matemáticas con alta demanda cognitiva para los estudiantes de su clase, en reconocer oportunidades matemáticamente relevantes durante la lección, en observar y analizar el pensamiento matemático de los estudiantes y para generar un discurso profesional sobre lo que sucede en el aula de matemáticas.

Diferentes estudios han estado caracterizando los dominios de conocimiento del profesor necesario para enseñar matemáticas y que resultan relevantes para la realización de estas actividades (Davis & Renert, 2013; Scheiner, Montes, Godino, Carrillo, Pino-Fan, 2019). Una de las características que han revelado estos estudios es la compleja relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento que es movilizado en las diferentes actividades que estructuran la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, un aspecto común en esta aproximación a la caracterización del conocimiento necesario para enseñar es el reconocimiento de la importancia de las actividades que articulan la práctica y el uso que el profesor hace de su conocimiento en la resolución de dichas actividades. Relacionar la práctica de enseñar matemáticas con resolver problemas profesionales subraya la idea de la competencia del profesor. En particular, cuando hay que considerar tareas relevantes según el nivel de sus estudiantes, y para realizar inferencias sobe el pensamiento matemático de los estudiantes basados en las evidencias dadas por lo que los estudiantes dicen, hacen o escriben.

Por ejemplo, el reconocimiento por parte del profesor de oportunidades durante la enseñanza aprovechándolas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes es una manifestación de la manera en la que el profesor usa diferentes dominios de conocimiento para realizar inferencias basadas en las evidencias para tomar decisiones de enseñanza (Stockero, Van Zoest, 2013; Van Zoest Stockero, Leatham, Peterson Atanga y Ochieng, 2017). De esta manera, apoyar la enseñanza de las matemáticas en el pensamiento matemático de los estudiantes está vinculado a la competencia del profesor para realizar inferencias sobre el pensamiento de los estudiantes. En este sentido, para ayudar a los estudiantes a progresar en su aprendizaje, los profesores deben diseñar, adaptar o seleccionar tareas matemáticas relevantes, interpretar lo que dicen y hacen sus estudiantes al resolverlas, para poder decidir cómo continuar la enseñanza. Estas actividades (prácticas profesionales) – diseñar/adaptar/seleccionar, interpretar y tomar decisiones requieren conocimiento especializado. En particular en relación a los estudiantes como aprendices, sobre el currículo y sobre estrategias instruccionales.

Competencia docente: uso del conocimiento para resolver actividades en la enseñanza

La especificidad del conocimiento del profesor en la realización de las actividades vinculadas a la práctica de enseñar matemáticas conlleva el reconocimiento del papel de diferentes dominios de conocimiento. Por ejemplo, un contenido curricular en la educación primaria son las figuras geométricas y los polígonos. Este contenido define como objetivo el desarrollar en los estudiantes formas de razonar con las figuras geométricas y sus atributos. Este objetivo implica ayudar a los estudiantes a comprender los procesos de clasificación de las figuras geométricas que se apoyan en el reconocimiento de atributos comunes a grupos de figuras. En este contexto ante una tarea como la que aparece en la Figura 2, cuando el profesor anticipa posibles respuestas de los estudiantes para justificar su introducción en la planificación de la lección debe movilizar conocimiento desde diferentes dominios.



1a-cuadrado; 1b-rombo; 1c-pentagono regular

2a- trapecio isósceles; 2b- octógono cóncavo simétrico; 2c-hexágono cóncavo simétrico

3a- hexágono no simétrico cóncavo; 3b-rectángulo; 3c- triángulo equilátero

Figura 2. Actividad de reconocer semejanzas y diferencias entre figuras geométricas. (Bernabéu, Moreno y Llinares, 2018)

La selección de esta tarea (Figura 2) refleja el conocimiento del objetivo curricular (aprender a identificar y razonar con los atributos de las figuras). La tarea implica reconocer un atributo común a un grupo de figuras, lo que permite agruparlas en relación a otras, y poder justificar por qué una figura no tiene el atributo identificado. Además, la tarea tiene en cuenta que los estudiantes de educación primaria pueden desarrollar una comprensión amplia sobre las figuras geométricas si tienen la posibilidad de analizar múltiples ejemplos de figuras y discutir sobre sus semejanzas y diferencias. Desde este punto vista introducir ejemplos de figuras que cumplan ciertos requisitos junto con figuras que no los cumplan es clave. Esta tarea refleja aspectos del currículo (tipo de figuras y atributos) y de los procesos cognitivos que se tiene que desarrollar en los estudiantes (reconocer atributos, y semejanzas y diferencias entre las figuras). En este sentido, preguntas que pueden ayudar a movilizar el conocimiento del profesor sobre estos aspectos son ¿las actividades previstas en el plan de la lección presentan variedad de ejemplos y contraejemplos? En este ejemplo, la tarea tiene como objetivo que los niños/as reconozcan atributos de las figuras geométricas y que sean capaces de establecer listas de estos atributos vinculados a diferentes figuras para poder establecer diferencias entre las figuras (regularidad, cóncavo /convexo, numero de lados, simetría, paralelismo, diagonales, etc.). En la tarea propuesta, los atributos que permiten diferenciar una figura de las otras pueden ser (i) la simetría que permite diferenciar hexágono cóncavo que no tiene ejes de simetría del resto de figuras, (ii) el tener más de un ángulo mayor de 180º, que permite diferenciar el octógono cóncavo (la estrella) del resto de las figuras, y (iii) no tener diagonales, que permite diferenciar al triángulo equilátero del resto de las figuras.

Desde el punto de vista del conocimiento del profesor sobre los estudiantes y el aprendizaje matemático, el profesor debería reconocer que cuando se da la oportunidad a los estudiantes de generar diferentes aproximaciones a la resolución de las tareas pueden generarse diferentes soluciones. En este tipo de situaciones los profesores deben anticipar posibles respuestas de los estudiantes, aunque algunas veces se tiene que asumir que las respuestas de los estudiantes pueden ser imprevisibles. Es, en este contexto, en el que la capacidad del profesor de pensar sobre su enseñanza a lo largo del tiempo genera la posibilidad de incrementar su conocimiento sobre cómo los estudiantes aprenden, además del conocimiento reunido por las investigaciones en Didáctica de la Matemática. Por ejemplo, en relación a la tarea anterior

(Figura 2), una referencia puede ser las características de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico proporcionada por el modelo de van Hiele relativos a la capacidad de reconocer atributos de las figuras (Figura 3).

Durante muchos años la investigación en Didáctica de las Matemáticas ha estado proporcionando información sobre características de cómo los estudiantes aprenden contenidos matemáticos y desarrollan procesos matemáticos. Esta información es la que los profesores pueden usar para realizar inferencias sobre qué y cómo los estudiantes están aprendiendo desde lo que los estudiantes dicen o hacen cuando resuelven problemas y justificar, como consecuencia, las direcciones de la enseñanza generadas.

NIVEL	RECONOCER
1. Los estudiantes reconocen las figuras **como un todo.**	• Asocian las figuras a objetos conocidos. "*Esta se parece a un reloj de arena*". • Hacen uso de artículos demostrativos para indicar las diferencias de las figuras. Usan los demostrativos "eso" o "esto" para indicar las diferencias de las figuras. • Tienen dificultades para reconocer los atributos de las figuras. • Usan términos perceptuales para nombrar algunos atributos aunque estén descontextualizados (no conocen los términos o no los usan adecuadamente).
2. Los estudiantes describen **las partes y los atributos** de las figuras.	• Los estudiantes reconocen de manera progresiva los atributos de las figuras: Figuras cerradas/abiertas, Lados rectos/curvos, Lados no-cruzados/cruzados. Aunque inicialmente pueden tener dificultades en reconocer algunos atributos, (Cóncavo/convexo, Número de lados elevado, Altura triángulos,….) finalmente los reconocen de manera sistemática. • Empiezan a incorporar los nombres de las figuras para diferenciarlas (rombo, cuadrado, triangulo rectángulo, cuadriláteros, … • Finalmente, reconocen los atributos de las figuras, y los usan para diferenciarlas entre sí. –Diagonales (tamaño, perpendicularidad). –Ejes de simetría. –Paralelismo, perpendicularidad de los lados (ángulos rectos) • Usan un vocabulario adecuado, incorporando los términos adecuados de los atributos para explicar las diferencias entre las figuras (figuras cerradas/abiertas, lados curvos/rectos, triángulos rectángulos/acutángulos/obtusángulos,…).

Figura 3. Características de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico en relación a la actividad de Reconocer (Bernabéu, Moreno, y Llinares, 2018, Pag. 63)

En relación al conocimiento de las estrategias instruccionales en este tipo de tareas el profesor puede ayudar a los estudiantes a realizar comparaciones y conexiones. En el ejemplo propuesto indicando a los estudiantes que generen listas de atributos que cumplan las diferentes figuras y comparando las diferencias y semejanzas entre ellas. Facilitar la discusión en clase sobre los atributos reconocidos en las figuras y sobre las diferencias y semejanzas es una estrategia instruccional que facilita la generación de ideas. Además, otra estrategia instruccional es permitir a los estudiantes comparar las respuestas de sus compañeros con las suyas propias para generar la oportunidad de justificar y explicar sus propias resoluciones. La implementación de todas estas estrategias instruccionales en el aula por parte del profesor está relacionada con el conocimiento movilizado en relación al currículum (¿qué deben conocer los estudiantes?) y en relación al aprendizaje (¿cómo aprenden los estudiantes?) lo que subraya las fuertes relaciones entre los diferentes dominios de conocimiento relevante para la enseñanza de las matemáticas.

Desarrollando competencias docentes para aprender una profesión

La caracterización de la enseñanza de las matemáticas realizada en las secciones anteriores a través de la identificación de diferentes tareas profesionales pone de relieve la influencia del contexto en cómo el profesor de matemáticas usa el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas. Esta caracterización nos ha permitido introducir la idea de competencia docente del profesor como usar el conocimiento de manera pertinente en el desarrollo de las actividades profesionales vinculadas a la enseñanza de las matemáticas. La consideración de la idea de la competencia docente como un proceso basado en el conocimiento lo hemos caracterizado mediante un ejemplo vinculado a la elección de tareas matemáticas con alta demanda cognitiva para ejemplificar el uso de diferentes dominios de conocimiento. Esta caracterización de la enseñanza de las matemáticas como una práctica en la que se movilizan diferentes dominios de conocimiento (competencia docente) tiene reflejos en las propuestas de formación de profesores (Llinares, 2012).

En particular, en propuestas basadas en la práctica que inciden en maximizar la relación entre la teoría y la práctica en contextos que favorezcan el uso del conocimiento teórico en el análisis de las situaciones prácticas (Fernández, Callejo & Márquez, 2014; Oonk, Verloop, Gravemeijer, 2015). En particular, en el sentido de proporcionar a los estudiantes para profesor con oportunidades de analizar la práctica como un contexto para el desarrollo de competencias docentes. Uno de los objetivos en esta aproximación a la formación de profesores es ayudar a los estudiantes para profesor a desarrollar un discurso profesional vinculado a la práctica (Ivars, Fernández y Llinares, & Choy, 2018). Es decir, favorecer el desarrollo de argumentos prácticos como una elaboración formal de formas de razonar sobre la práctica. En el desarrollo de los argumentos prácticos de los estudiantes para profesor se pretende que estos establezcan razones de sus decisiones vinculando las evidencias proporcionadas por los registros de la práctica con principios más generales procedentes de la teoría (Fenstermacher y Richardson, 1993; Roig, Llinares, & Penalva, 2011).

En este contexto se ha empezado a subrayar en los últimos años el papel que puede desempeñar el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza (Llinares, 2013, 2015; Seibert y Groenwald, 2013). Mirar de manera estructurada "las situaciones de enseñanza para generar información sobre lo que está sucediendo y proponer nuevas tareas se considera un proceso basado en el conocimiento (Mason, 2002; Llinares, Ivars, Buforn y Groenwald, 2019). Desde la perspectiva de la formación de profesores se plantea la necesidad de caracterizar cómo se va a entender el desarrollo de esta competencia, y cuáles pueden ser las características de los contextos de aprendizaje que apoyen dicho desarrollo. Estas dos cuestiones generan desafíos a los formadores de profesores en el sentido de tener que conceptualizar modelos de desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" (Sánchez-Matamoros, Moreno, Perez-Tyteca & Callejo, 2018) y maneras de pensar sobre el diseño de intervenciones en los programas de formación (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls, & Callejo, 2018; Ivars, Buforn, & Llinares, 2017; Llinares, 2016; Llinares, Valls, &, Roig, 2008).

Una línea de actuación que intenta aportar información a estas cuestiones enfatiza el uso de diferentes tipos de registros de la práctica para crear los contextos de desarrollo de la competencia docente. Un registro de la práctica puede ser un video de una lección en una clase, las respuestas escritas de los estudiantes a uno o varios problemas, una planificación de una lección o grupos de planificaciones de una lección. A partir de estos registros de la práctica es posible generar tareas para los estudiantes para profesor en el sentido de ayudarles a estructurar su mirada: qué aspectos mirar del registro de la práctica, que conocimiento es pertinente para analizar estos aspectos, cómo justificar las decisiones de enseñanza considerando las interpretaciones realizadas, etc. En el apéndice de este texto se muestra un ejemplo de este tipo de tareas en un programa de formación de maestros (Educación Primaria).

Este tipo de tareas mantienen una estructura similar. En primer lugar, se contextualiza el registro de la práctica y luego se introducen las evidencias, en este caso, el texto escrito de la interacción entre una maestra y un alumno motivada por la resolución de una actividad centrada en el desarrollo de la comprensión de los números de tres cifras. Finalmente, se presentan una serie de cuestiones para el estudiante para profesor para organizar su aproximación al análisis de la situación. Esta estructura del diseño de las tareas en el programa de formación permite tener la oportunidad de desarrollar diferentes aspectos de lo que constituye la competencia docente “mirar profesionalmente” las situaciones de enseñanza de las matemáticas. Mason (2002) concreta estos aspectos como: (i) desarrollar la sensibilidad y mirar con sentido que se vincula a la identificación de lo que puede ser considerado relevante, teniendo en cuenta un cierto objetivo que guía la observación (*intentional noticing*), (ii) describir los aspectos observados manteniendo registros de lo observado, separando la descripción de los juicios (*marking and recording*), (iii) reconocer posibles alternativas de acción (*recognizing choices*), y validar lo observado intentando que los otros reconozcan lo que ha sido descrito o sugerido (*validating with others*).

La secuencia de este tipo de actividades en el programa de formación (Figura, 4) crea el contexto para favorecer el desarrollo de un discurso profesional vinculado a la acción sobre la enseñanza de las matemáticas de los estudiantes para profesor (Ivars, et al. 2018). El desarrollo de este discurso profesional es el que puede evidenciar la relación entre (i) identificar los aspectos relevantes en una situación de enseñanza, (ii) usar el conocimiento sobre el contexto para razonar sobre las evidencias proporcionadas, y (iii) realizar conexiones entre los sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales sobre la enseñanza-aprendizaje (Van Es y Sherin 2002).

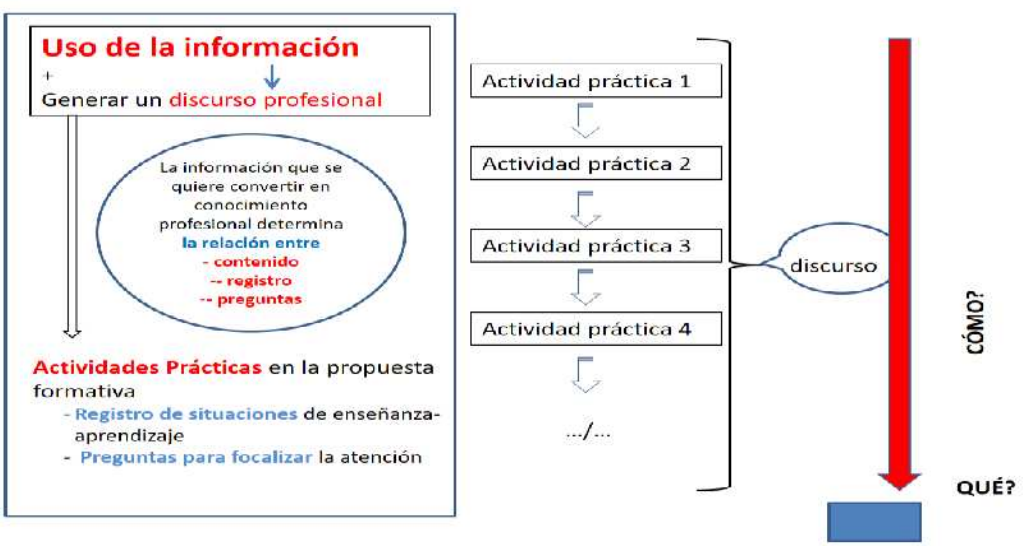


Figura 4. Interacción del análisis de la práctica y conocimiento teórico en el desarrollo de un discurso profesional vinculado a la competencia docente “mirar profesionalmente” (Ivars,

Buforn, y Llinares, 2017; pag. 77).

A modo de conclusión: Desafíos en aprender la práctica de enseñar matemáticas

Desde la perspectiva de la formación de profesores de matemáticas, reconocer que el proceso de llegar a ser profesor significa aprender una práctica basada en el conocimiento, genera desafíos para los formadores de profesores. En primer lugar, por la necesidad de identificar sistemas de actividad que articulan la práctica de enseñar matemáticas (Lampert, 2001). La descomposición de la práctica en sus aspectos constituyentes permite a los estudiantes para profesor tener la oportunidad de estudiar componentes separados pero relevantes de la práctica (Figura 1). En segundo lugar, por la posibilidad de asumir diferentes representaciones de la práctica de enseñar que puedan ayudar a determinar qué tipo de registros de la práctica y qué tipo de actividades con ellos deben insertarse en los programas de formación *(core practices*) de manera que los estudiantes para profesor puedan aprenderlas (Grossman, 2018). En este aprendizaje resulta relevante la manera en la que los estudiantes para profesor se apropian de instrumentos conceptuales para guiar sus decisiones sobre la enseñanza (Ivars, Buforn y Llinares, 2016). En tercer lugar, la necesidad de hacer explícito cómo los formadores de profesores conceptualizan el desarrollo de las competencias docentes (Sánchez-Matamoros et al, 2018). Los diferentes modelos a través de los cuales los formadores caracterizan el aprendizaje de los estudiantes para profesor permiten justificar las decisiones sobre cómo organizar los entornos de aprendizaje en el programa de formación.

Las ideas y principios que ayudan a dar respuesta a estos desafíos (identificar sistemas de actividad relevantes, determinar diferentes registros de la práctica, y el modelo de desarrollo de las competencias adoptado) se están considerando como referentes para articular los programas de formación reconociendo la dificultad de aprender la práctica de enseñar matemáticas.

La posibilidad de descomponer la práctica de enseñar matemáticas en actividades relevantes puede verse como una simplificación de la práctica, pero permite a los formadores de profesores generar entornos de aprendizaje en el programa de formación centrados sobre aspectos específicos sin perder de vista la mayor complejidad que se genera en situaciones reales de clase. Por ejemplo, el poder analizar aspectos particulares de la interacción entre un alumno y su maestra (ver el apéndice) puede ayudar a los estudiantes para maestro a detenerse e interpretar aspectos particulares de la interacción que sería más complicado en una situación de clase real. En el desarrollo de este tipo de actividades de análisis de registros de la práctica los estudiantes para profesor pueden empezar a identificar aspectos relevantes, nombrarlos de manera que facilite la comunicación con otros y a interpretarlos. En este proceso resulta clave los instrumentos conceptuales que el formador de profesores puede ponerle a su alcance de manera que puedan ser usados para identificar, nombrar e interpretar los aspectos de la práctica que centran su atención. Estos instrumentos conceptuales, como esquemas para analizar la interacción en el aula o trayectorias de aprendizaje de las nociones matemáticas, proporcionan a los estudiantes para profesor el lenguaje para describir e interpretar los aspectos de la práctica y formas de ver y comprender la práctica de enseñar matemáticas (Llinares, 2015).

Finalmente indicar que, la identificación de desafíos en la formación de profesores de matemáticas al adoptar la perspectiva de que llegar a ser profesor implica aprender una práctica, se apoya en el trabajo, reflexión sobre la práctica e investigación de los formadores de profesores en sus intentos de mejorar su propia práctica.

Reconocimiento. La investigación mencionada en este trabajo ha sido realizada con el apoyo del Ministerio de Economía y Competitividad –MINECO - a través de la Agencia Estatal de Investigación- AEI, España mediante el proyecto nº EDU2017-87411-R; y de la Generalitat Valenciana- GVA- a través del grupo de Excelencia PROMETEO2017/135.

Referencias

Ball, D., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics (pp. 83–104). Westport: Ablex.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59, 389–407.

Bernabéu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2018). ¿Cómo estudiantes para maestro/a anticipan posibles respuestas de niños/as en actividades de reconocimiento de figuras geométrica? En Roig-Vila, R. (ed.), El compromiso académico y social a través de la investigación e innovación educativas en la Enseñanza superior. Barcelona: Octaedro.

Davis, B. & Renert M. (2013). The Math Teachers Know. Profound Understanding of Emergent Mathematics. London: Routledge

Fernández, C., Callejo, M.L., & Márquez, M. (2014). Conocimiento de los estudiantes para maestro cuando interpretan respuestas de estudiantes de primaria a problemas de división medida. Enseñanza de las Ciencias, 32(3), 407-424.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., & Callejo, M.L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and contexts. Avances de Investigación en Educación Matemática, nº 13, 39-61.

Fenstermacher, G. & Richardson, V. (1993). The elicitation and reconstruction of practical arguments in teaching. Journal of Curriculum Studies, 25(2), 101-114.

Grossman, P. (2018). Teaching core practices in teacher education. Harvard Education Press: Cambridge, MA.

Ivars, P., Buforn, A. & Llinares, S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente. Acta Scientiae, 18(4), 48-66.

Ivars, P., Buforn, A., & Llinares, S. (2017). Diseño de tareas y desarrollo de una Mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas de estudiantes para maestro. En A. Salcedo (ed). Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI (pp. 65-88). Caracas, Venezuela: CIES.

Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S., & Choy, B.H. (2018). Enhancing Noticing: Using a Hypothetical Learning Trajectory to Improve Pre-service Primary Teachers' Professional Discourse. EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14(11), em1599.

Lampert, M. (2001). Teaching problems and the problems of teaching. New York: Yale University Press

Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 7, nº 10, 53-62.

Llinares, S. (2015). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente el aprendizaje de las matemáticas". Algunas características en la formación inicial de profesores de matemáticas. En B.

D'Amore & M.I. Fandiño (Comp.), Didáctica de la matemática. Una mirada internacional, empírica y teórica. Bogotá, Colombia: Ediciones Universidad de la Sabana

Llinares, S. (2016). Enseñar matemáticas y aprender a mirar de forma profesional la enseñanza (Del análisis del conocimiento y práctica del profesor al desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente. En G.A. Perafan, E. Badillo, & A. Aduriz (eds.), Conocimiento y emociones del profesorado para su desarrollo e implicaciones didácticas (pp. 211-236). Bogotá: Colombia: Editorial Aula de Humanidades.

Llinares, S., Ivars, P., Buforn, A. & Groenwald, C. (2019). "Mirar Profesionalmente" las situaciones de enseñanza: Una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, & M.T. González (eds.), Investigación sobre el profesor de Matemáticas: Formación, Práctica de aula, conocimiento y competencia profesional. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Llinares, S., Valls, J. &, Roig, A.I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. Educación Matemática, 20(3), 31-54

Mason, J. (2002). Researching your own practice. The discipline of noticing. London: Routledge-Falmer.

Oonk, W.; Verloop, N., & Gravemeijer, K. (2015). Enriching Practical Knowledge: Exploring Student Teachers' Competence in Integrating Theory and Practice of Mathematics Teaching. Journal for Research in Mathematics Education, 46(5), 559-598.

Roig, A.I., Llinares, S. & Penalva, M.C. (2011). Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea. Educación Matemática, 23(3), 39-65.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). Developing primary mathematics teaching. Reflecting on practice with the Knowledge Quartet. Londres: SAGE

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Perez-Tyteca, P., Callejo, M.L. (2018). Trayectorias de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21(2), 203-228.

Scheiner, Th., Montes, M., Godino, J.D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. (2018). What makes mathematics Teachers Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. International Journal of Science and Mathematics, 17(1), 153-172.

Seibert, L.G., Groenwald, Cl. (2013). Observar com Sentido: una competencia importante na vida professional do professor de Matemática. Acta Scientiae, 15(1), 133-152.

Stein, M.K., Engle, R.A.; Smith, M.S.; Hughes, E.K. (2008). Orchestrating Productive mathematical Discussions: five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. Mathematical Thinking and Learning, 10(4), 313-340.

Stockero, S. L., & Van Zoest, L. R. (2013). Characterizing pivotal teaching moments in beginning mathematics teachers' practice. Journal of Mathematics Teacher Educators, 16, 125–147.

Van Zoest, L., Stockero, Sh., Leatham, K., Peterson, B., Atanga, N. & Ochieng, M. (2017). Attributes of Instances of Student Mathematical Thinking that Are Worth Building on in Whole-Class Discussion. Mathematical Thinking and Learning, 19(1), 33-54.

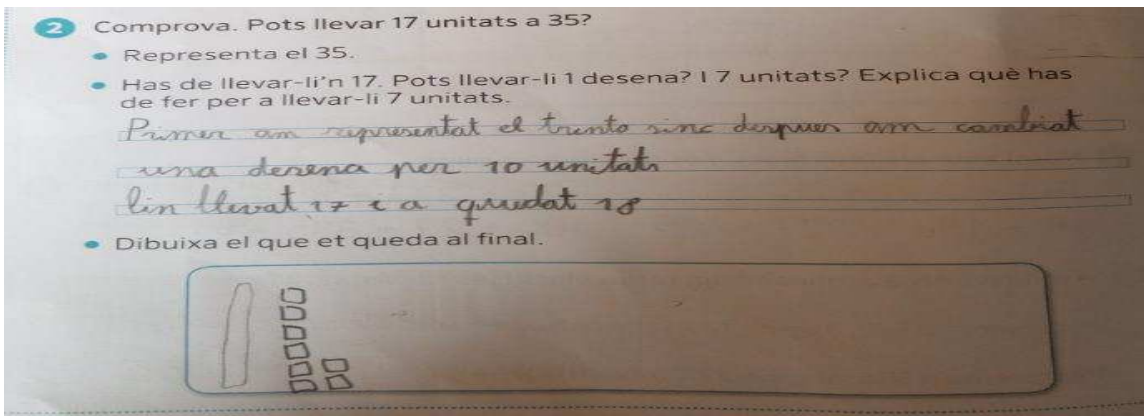
Van Es, E. & Sherin, M. (2002). Learning to Notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. Journal of Information Technology for Teacher Education, 10(4), 571-596.

Apendice- El caso de Mikel y el significado de los números de tres cifras

Mikel tiene 7 años y 7 meses. Está en 2º Educación primaria. Estamos en enero. Texto: *Taller de Matemàtiques Manipulatives. Matemàtiques 2º de Primaria.* Edt. SM-arrels	

Contexto: Mikel está en el tema de la resta llevando con números de dos cifras. Él usa bloques multibase en cartulina (los lleva en una bolsita a clase) para realizar las actividades. Representa los números con los bloques, dibuja los bloques en el cuaderno/libro y escribe los números –símbolos- que representan las cantidades que tiene con los bloques multibase.

Lo que sigue es una de las actividades que ha realizado en su libro unos días antes[1]:


2 Comprova. Pots llevar 17 unitats a 35?

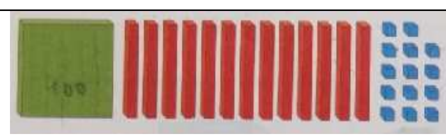
- Representa el 35.
- Has de llevar-li'n 17. Pots llevar-li 1 desena? I 7 unitats? Explica què has de fer per a llevar-li 7 unitats.

Primer am representat el trento sinc despues am canbiat
una desena per 10 unitats
lin llevat 17 i a quedat 18

- Dibuixa el que et queda al final.

Unos días después se plantea la siguiente tarea que tiene

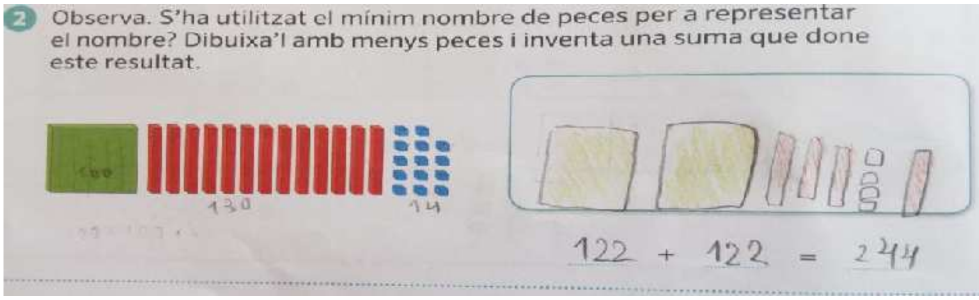
La tarea

Observa, s'ha utilitzat el mínim nombre de peces per a representar el nombre? Dibuixa'l amb menys peces i inventa una suma que done este resultat.	

La respuesta de Mikel y la interacción con la maestra

Mikel proporciona como respuesta 122 +122

[1] El idioma del texto usado y las respuestas de Mikel es el valenciano, lengua vernácula del contexto de donde procede el registro de la práctica



La maestra al ver la respuesta de Mikel, comprueba que está bien, pero le gustaría averiguar cómo está pensando y qué **comprensión tiene de los números de tres cifras y de la relación entre las diferentes unidades**. Para ello le pide a ver si puede darle otra solución

> **Maestra:** ¿puedes encontrar otros números que sumados den 244?
> **Mikel:** Sí. [Piensa un momento, levanta una mano con sus dedos extendidos, y escribe]
> **113 + 131**
> **Maestra:** ¿Cómo lo sabes?
> **Mikel:** Porque, tres y uno son cuatro (señalando el 4 de las unidades). Uno y tres son cuatro (señalando el 4 de las decenas), y uno y uno son dos (señalando el dos de las centenas).
> **Maestra:** ¿puedes encontrar otros números?
> **Mikel:** [Piensa un momento]. Sí, (y escribe)
> **121 + 123**
> **Maestra:** ¡Muy bien Mikel!

Aunque Mikel ha resuelto bien las tres tareas, la maestra se da cuenta de que ella no tiene evidencias de la comprensión de Mikel de las relaciones entre las diferentes unidades en el número de tres cifras, y por tanto de su comprensión del número. Es decir, ella cree que la resolución correcta de la tarea del libro de texto y de las tareas adicionales que le había pedido, no le dan información sobre la comprensión de Mikel de los números de tres cifras que es el objetivo de la tarea. Por ello, le plantea la siguiente tarea:

> **Maestra:** Bien Mikel, vamos a hacer otro problema igual. ¿Puedes encontrar dos números que sumados den 210?
> Mikel se pone a pensar un rato más largo que en las actividades anteriores. Aunque tiene los bloques multibase encima de la mesa, no los utiliza. Después de un rato escribe lo siguiente, pero dudando
> **15 + 15 = 210**
> **Maestra**: ¿cómo lo has hecho?
> **Mikel:** Pues, …, como cinco y cinco son diez (señalando al 10 del número), y uno y uno son dos (señalando al 2).
> [Mikel mira dudando lo que ha escrito]
> **Maestra:** ¿Estás seguro?
> **Mikel**: No.

CUESTIONES

a) Sobre la tarea. Características

¿Qué elementos matemáticos deben usarse para resolver la actividad? Tras la respuesta de Mikel, la maestra le pide que encuentre la suma de otros dos números ¿qué pretendía conseguir la maestra? ¿Por qué finalmente le plantea una tarea similar, pero cambiando el número a 210? ¿Cuál era el objetivo de esta nueva tarea?

b) Sobre la comprensión de Mikel

¿Qué elemento matemático debe mejorar en su comprensión? ¿Por qué la tarea del libro de texto no era suficiente para determinar la comprensión de Mikel de los números de tres cifras?

c) Sobre lo que hacer a continuación

¿Cómo ayudarías a Mikel? ¿Qué tarea (y qué números usarías) para ello?

Lo que sigue es una actividad que propone el libro de texto. Diseña una actividad anterior y una posterior a la dada que podrías utilizar para apoyar a Mikel en la comprensión de los números de tres cifras. Justifica tu decisión en función del elemento matemático que debe consolidar y los números que usas en las tareas.

Com lleves 4 unitats a una placa de 100? Comprova i explica pas a pas el procés seguit.

Dibuixa el que queda al final.

The why, what and how of working with exemplification in mathematics teacher education[1]

Jill **Adler** and Craig Pournara

University of the Witwatersrand

South Africa

jill.adler@wits.ac.za; craig.pournara@wits.ac.za

Summary

This paper focuses on working deliberately with secondary mathematics teachers on exemplification. The context is the Wits Maths Connect Secondary (WMCS) longitudinal research and professional development project in South Africa, where exemplification, specifically example sets informed by principles of variation, is a key focus in our work with teachers. We describe *why* we have come to focus on exemplification. We illustrate the *what and how* of this work through a selection of tasks where teachers are offered opportunity to learn about variance amidst invariance in example sets and what they afford.

Key Words: mathematics, teacher professional development, exemplification, secondary

Introduction

Theoretical and empirically supported arguments have been made for the centrality of examples in mathematics teaching and learning (e.g. Bills & Watson, 2008; Zaslavsky, online first) and how such learning is made possible by 'careful and knowledgeable' use of examples in mathematics teaching (Watson & Chick, 2011), and in mathematics teacher education (e.g. Peled & Balacheff, 2011). Building on this domain of work, this paper focuses on the *why, what and how* of working deliberately with secondary mathematics teachers on their use of examples in their teaching, or what we refer to more simply as *exemplification*. The context of our work is the Wits Maths Connect Secondary (WMCS) project where *exemplification*, and more specifically example sets informed by principles of variation, is a key element of our professional development work with teachers. We distinguish between the *modelling* of exemplification and *mediating* exemplification with teachers. Modelling takes place in our mathematics-focused professional development work. Mediation, on the other hand, is central to the teaching-focused

[1] An substantially extended version of this paper will appear in the forthcoming *Handbook on Mathematics Teacher Education, Volume 1.*

aspects of our work. We will illustrate this distinction as we describe opportunities for teachers to learn about exemplification, and how the notion of variation provides a means for teachers to construct, critique and revise examples sets for use with their learners[2].

Why exemplification? The WMCS theory of teaching and initial research

The WMCS is a longitudinal research-linked professional development project aimed at improving mathematics teaching in socio-economically disadvantaged schools in one province in South Africa. Our work is shaped, on the one hand, by on-the-ground realities of mathematics teaching and learning, and on the other, by an orientation to the activity of teaching as 'social'. We draw from key tenets of sociocultural theory, where *mathematics* is viewed as an inter-connected network of scientific concepts, and *mathematics teaching* therefore as geared towards the mediation and appropriation of the increasingly sophisticated and increasingly general ways of thinking that constitute progression in the discipline (Vygotsky, 1978). Teaching as an activity is not only goal-directed but also always about *something* (Alexander, 2000). Bringing what students are to know and be able to do into focus – its mediation - is the teacher's work. We call this 'something' the *object of learning*. In practical terms, it is akin to a lesson goal, but worded so that the mathematics of the goal is made clear. In line with previous research, mediational means are understood as cultural tools and/or resources in the practice of teaching (Adler, 2001).

Traditional forms of teaching are common across the world (Nachlieli & Tabach, online first), and unsurprisingly were the dominant forms observed in initial observations in our project schools and classrooms. Our analysis of video-records of lessons showed that they were characteristically incoherent. While teachers were following high levels of curriculum prescription, and learners were attentive and 'working', the intended mathematical message in a lesson was often not clear leading us to wonder how specific mathematical goals influenced lesson development activity for teachers. In our terms, the mathematical object of learning was out of focus. There was no apparent mathematical 'story' linking what learners were to know and be able to do. For example, in a four-part lesson ostensibly on multiplying algebraic expressions, each part offered a different rule, thus presenting an incoherent and fragmented notion of the products (Adler & Venkat, 2014).

In the context described above, and a principle that good professional development begins with what teachers bring and so who and where they are, it made sense that our professional development work should attend to strengthening teachers' exemplification and the quality of their explanations. From a Vygostkian perspective, examples are *symbolic mediators* of mathematics. Symbolic mediators include different signs, symbols, writing, formulae and graphic organisers – all possible elements of mathematical examples. As Kozulin (2003) explains, one cannot take for granted that learners will detect symbolic relations, no matter how obvious they might seem to the teacher.

> Symbols may remain useless unless their meaning as cognitive tools is properly mediated … the mere availability of signs or texts does not imply that they will be used by students as psychological tools … (Kozulin, 2003 p.24)

The implications for teaching and learning follow. Appropriation of psychological tools and more connected scientific mathematical concepts requires deliberate teaching of symbolic tools. This includes their systematic organisation and an emphasis on their generality and

[2] We use the terms learner/s and student/s interchangeably.

application.

Symbolic tools (e.g. letters, codes, mathematical signs) have no meaning whatsoever outside the cultural convention that infuses them with meaning and purpose. (Kozulin, op cit p.26).

Indeed, instructional examples are just such cultural conventions. Examples and exemplification thus form part of a framework we have developed over time that informs both our research and development work. This framing, named *Mathematical Discourse in Instruction* (MDI), enables us to describe and analyse what it is teachers do, and then to work with them developmentally on the mathematical quality of their teaching.

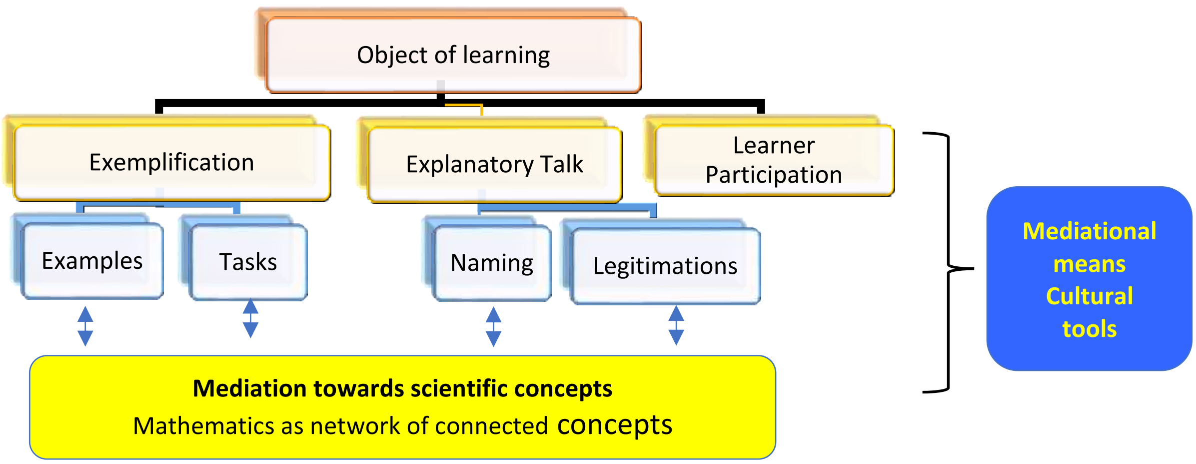


Fig.1: Constitutive elements of MDI (Adapted from Adler & Ronda, 2015)

As represented in figure 1, MDI focuses on four key elements of mathematics teaching, with *a lesson* as our *unit of analysis*: the *object of learning*, or lesson goal, and three mediational means, or cultural tools, *exemplification*, *explanatory talk* and *learner participation*. The *object of learning* in any lesson could be a concept, a procedure or mathematical practice, together with the relevant capability. This leads to *exemplification* and more specifically to examples and associated tasks that can be used to bring the object of learning into focus with learners. With respect to examples, we are interested in their selection and sequencing and how these accumulate within and across lessons. We draw on the work of Watson & Mason (2006), who in turn draw on Marton & Tsui (2004), to describe key features of a mathematical object and/or movement towards generality across a sequence of examples. An example set that brings attention to *similarity* across examples, and so to that which is invariant, offers opportunity to identify key features and/or to generalise. If a set of examples brings attention to *contrast*, and so to what something *is* in relation to what it *is not*, or to a different class, opportunities are made available to recognise boundaries between classes of examples. This provides further opportunity to generalise but not overgeneralise. When two examples that are carefully varied are *juxtaposed*, they can draw quite specific attention to a key feature of an object.

We note the third and fourth elements of MDI, though they are not in focus here. *Explanatory communication*, includes attention to naming/word use (what is said and what is written) and substantiations of mathematics as specialised knowledge (what counts as mathematical knowledge). *Learner participation* focuses on what learners do and say with regards to the mathematics they are learning. We consider whether and how learner talk moves beyond the very prevalent but limited offering of single words in chorus, to responding to and asking questions, and to more open dialogue with the teacher and/or other learners.

The overarching importance of the framework is the emphasis on the coherence of a lesson and thus how all elements interact, how they link back to the object of learning and open opportunities to learn mathematics. The constitutive elements of MDI apply to any mathematics classroom, whatever the pedagogy.

Why exemplification? Mathematics education research

Interest in exemplification as a research field in mathematics education goes back many years. For example, Mason and Pimm (1984) explored the role of generic examples in mathematics education. Dahlberg and Housman (1997) investigated the generation of examples in learning advanced mathematics. It is fair to say that interest in examples in mathematics and mathematics education follows from a basic maxim that initial experiences of mathematical concepts and procedures, given their abstract nature, will be through some exemplification: through examples and the tasks in which they are embedded. Goldenberg & Mason (2008) described examples as cultural mediating tools, and linked examples with the notion of variation:

> Examples can … usefully be seen as *cultural mediating tools* between learners and mathematical concepts, theorems, and techniques. They are a major means for 'making contact' with abstract ideas and a major means of mathematical communication, whether 'with oneself', or with others. Examples can also provide context, while *the variation in examples* can help learners distinguish essential from incidental features and, if well selected, the range over which that variation is permitted. (Goldenberg & Mason, 2008 p. 184, *our emphasis*).

The resonance with our theoretical orientation to examples as symbolic tools, and to our work on and with exemplification in the WMCS project is apparent.

A 2006 PME Research Forum on exemplification culminated in a special issue of *Educational Studies in Mathematics* in 2008 (Bills & Watson 2008) and was a catalyst for a follow-on conference focused on the role of examples in argumentation and proof, and a related special issue of the *Journal of Mathematical Behavior* (JMB) in 2011 (Antonini, Presmeg, Mariotti, & Zaslavsky, 2011). Both issues provide reviews of research in the field. Here we zoom in on the papers focused on the role of examples in *teachers' learning of mathematics in teacher educatio*n, or *teachers' use and awareness of examples in their te*aching. In this way, the crucial role in teaching of choosing and using (instructional) examples becomes evident. The value of a deliberate focus on exemplification in mathematics teacher education follows.

Studies of the forms and functions of teachers' example-use have extended to both elementary and secondary mathematics teaching, and to pre-service and experienced teachers. Rowland (2008) explored example-use across 24 lessons taught by pre-service elementary teachers. He identified four categories of example-use: variability, sequencing, representations, and lesson objectives. These analytic distinctions in turn provided insight into aspects of teachers' mathematical knowledge-in-use in teaching: that this entails variation across a set of examples, their sequencing and link with lesson goals. Each of these aspects features in MDI.

Using their own experience of example-use when working on a task about polynomial functions, and example-use in the lessons of an experienced secondary teacher teaching decimals, fractions and percentages, Watson & Chick (2011) reinforce "how careful and knowledgeable teachers need to be" to bring about "alignment between the learners' engagement and teacher's intentions" (p.294). Put differently, the affordances of an example or an example set are not self-evident to learners. It takes a knowledgeable teacher, with some fluency in example-use to draw learners' attention to, and engage them with what is significant for their mathematics learning.

In an earlier study of example-use by experienced secondary teachers, Zodik & Zaslavsky's (2008) illuminated that teachers were not necessarily aware of their example-use and related rationales. From their observations and analysis of teaching, they distinguished between teachers' pre-planned use of examples, and their spontaneous use as these arose in the course of teaching. They also revealed that example choices can either facilitate or impede students' learning, and consequently the choice of examples in teachers' work is not trivial. They went on to lament the lack of deliberate attention to exemplification in mathematics teacher education.

> … numerous mathematics teacher education programmes do not explicitly address this issue and do not systematically prepare prospective teachers to deal with the choice and use of instructional examples in an educated way. (p.166)

Zodik & Zaslavsky have argued further for its place as part of specialised knowledge for teaching (Ball, Thames, & Phelps, 2008):

> The knowledge teachers need for meeting the challenge of judiciously constructing and selecting mathematical examples is a special kind of knowledge. It can be seen as core knowledge needed for teaching mathematics. … engaging teachers in generating or choosing instructional examples can be a driving force for enhancing these elements of their knowledge (Zodik & Zaslavsky, 2009).

Zazkis & Leikin's (2008) study of the role of examples in defining and definitions also argues for the development of this specialized content knowledge for teaching mathematics. They presented a group of 40 pre-service secondary teachers with the task of giving "as many examples as possible for a definition of a square" (p. 134). They were interested in the prospective teachers' concepts of a square in the first instance, and then their meta-mathematical concept of a definition. An additional research question related to the usefulness of a three-dimensional framework for analysing examples: accessibility and correctness, richness, and generality. The student teachers' definitions and related example-use generated a large number of examples of definitions, including more and less rigorous definitions, as well as some incorrect ones. Of interest to us in Zazkis & Leikin's study was the follow-on task given to the same group of prospective teachers later in the year. They presented the prospective teachers with 24 examples of definitions, most of which were selected from their teacher-generated examples of definitions and with additions of some produced by 'experts'. The task for the prospective teachers was to evaluate the validity of each of the definitions provided. The discussion amongst the teachers about the validity of the various definitions revealed movement between mathematical validations and pedagogical ones. Some teachers evaluated validity in terms of what they thought would be appropriate for school teachers, without attention to related mathematical rigour. Zazkis & Leikin concluded by suggesting that the tasks offered "a valuable activity, both mathematical and pedagogical, to promote a deeper conceptual understanding of mathematics in general and of the nature and role of definitions in particular" (p.147). The critical point here is that these tasks in a teacher education setting were mathematical and meta-mathematical, intended to strengthen teachers' knowledge of examples of definitions and defining. The tasks were not designed for explicit attention to choosing and using instructional examples. The value of this study is that it points to the value of such activities in mathematics teacher education, and the specialized knowledge these can lever up for teachers.

There is thus a considerable literature foregrounding the significance exemplification as specialised knowledge for teaching. This leads to the question of what and how this is attended to in mathematics teacher education, and hence the focus of this paper. Such attention, we will argue can be fostered through the use of variation. The importance of variation in mathematics teaching has a long history, dating back to Dienes' (1960) work on perceptual variation. In mathematics education variation has come back into focus in more recent years through the work of Watson & Mason (2006), particularly through their vivid illustration of variance amidst invariance as a tool for engaging with generality and with mathematical structure, and through carefully structured example sets.

More generally, application of Variation Theory (Marton & Tsui, 2004) to mathematics education has ranged from studies of variation in textbook example sets (e.g. Sun, 2011) to teachers' learning through lesson study informed by variation theory (e.g. Runesson, 2008) and to learners' learning (e.g. Kullberg, Runesson Kempe & Marton, 2017). Kullberg et al (op cit) emphasise how attention to variation can enable critical features of the object of learning to come into focus. They make the important observation that multiple examples are not simply cumulative. The ordering of examples, their simultaneous presentation, and the teacher drawing attention to similarities and differences are critical. We agree, and we have argued previously that research related to an entire lesson needs to attend to the accumulating example space.

> The research on examples, [however,] while illuminating of what teachers do and why, does not enable a view of whether and how examples accumulate to bring the object of learning into focus for learners, and whether there is movement towards generality (Adler & Ronda, 2017, p. 68).

In Variation Theory terms, learners' attention needs to be drawn to key features of a mathematical object such as aspects of mathematical structure the teacher wishes to make visible. This is a function of a set of examples, how they are organized to illuminate variance amidst invariance and thus possibilities made available for generalizing, and/or recognizing structure or key features.

Of course, examples are always embedded in a task. Thus while examples are selected as particular instances of the general case in focus, and for drawing attention to relevant features, generality and/or structure, tasks are designed to bring particular capabilities to the fore (Marton & Pang, 2006). For example, expanding $a(b+c)$ and factoring $ab+ac$ are different tasks. Different tasks require different actions, at different levels of complexity, and so make available different opportunities for mathematics learning. In our work, we link examples and tasks in our consideration of exemplification, since an example or an example set is always embedded in a task. Indeed, it is this that makes an example 'instructional'.

Exemplification: the what and how

As we noted earlier, the MDI framework informs our teaching of our mathematics-for-teaching course called Transition Maths 1. We focus on the course since it is the major context in which we deliberately "teach" exemplifying/exemplification as a key mathematics teaching practice. TM1 is structured so that approximately two-thirds of the time teachers focus on their own learning of mathematics. In these mathematics sessions, we *model* exemplification as a mathematics teaching practice. Teachers work on mathematical tasks where the objects of learning are key mathematical concepts, procedures and/or practices, the selection of which has been influenced by the South African school curriculum. In general, these tasks and activities provide opportunities to revisit and deepen their knowledge of the mathematics they teach (Zazkis, 2011), as well as activities that extend their knowledge of school mathematics. From this activity they build generality, focus on mathematical structure and engage with mathematical procedures and their rationales. The tasks and example sets offered to teachers are carefully selected to model and illustrate the forms of variation described earlier. For example, the task in figure 2 deals with informal methods of finding solutions to quadratic equations in factorised form. We ask teachers to find numerical values without using formal procedures. We also ask them to reflect on "what changes" and "what stays the same" and to consider the impact of this variation on how they approached each example. All this work has a mathematical focus.

Give values for x to make the statements true:

a) $x(x-2)=8$
b) $x(x-2)=0$
c) $x(x-2)=x$
d) $(x-1)(x+2)=4$
e) $(x-1)(x+2)=0$

Fig. 2: Mathematics tasks for quadratic equations

While the course presenter frequently points to the variance amidst invariance in the example sets, this is to mediate the mathematics in play and only an implicit form of drawing attention to exemplification with variation. It is in the teaching sessions that we deliberately *mediate exemplification* as a teaching practice.

The remaining one-third of the course, and our particular interest in this paper, focuses on mathematics teaching. These teaching-focused sessions are structured to mediate all the components of the MDI framework. We work from the assumption that better teaching is characterised by more thoughtful selections of examples and tasks, and by mathematical explanations that focus explicitly on the mathematics the teacher intends the learners to learn. With respect to exemplification, we work with teachers on articulating the mathematical goals for a lesson (objects of learning), and then on choosing and using examples. Using principles of variation, we examine sets of examples that either we have constructed, or are available in textbooks or in a prescribed lesson plan, to ascertain what is possible to come into focus. A key strength here is that our focus is on issues that are sufficiently close to teachers' current practice, and to curriculum demands, as to be possible to implement. In the remainder of this paper, we elaborate our attention to exemplification as a key focus in our work and specifically how we mediate this with teachers.

Mediating exemplification in mathematics teacher education

We provide two illustrative cases of how we work with exemplification using variation in professional development. The cases involve algebra and function both of which are given substantial attention in the course. We distinguish between the learner task and the teacher education task, and hence make explicit what it is about exemplification that we intend teachers to learn. Case 1 illustrates how we introduce teachers to ideas of variation in an example set. Case 2 extends ideas of variation in an example set to focus on connections between representations, leading to generalisation. Our work with teachers extends beyond this to having teachers apply ideas of variation to produce a new example set, as well as reflect and critique such, but space restrictions preclude a third case here. In the presentation, I will include a third case to illustrate more adequately, the progression in our mediation of exemplification.

Case 1 – Introducing teachers to variation in an example set to address learner error

Our first case has its roots in lesson study work with teachers (see Adler & Alshwaikh, in press) who had already completed the course and so had been introduced to variation. Case 1 connects directly into teachers' practices in two ways: (1) it deals with a prevalent and persistent error in the application of the distributive law and the use of brackets; and (2) it deals with meaning of algebraic forms. We have drawn on this very specific problem of practice to construct a learning opportunity in teacher education for the introduction of ideas of variation.

The **learner task** is framed by the following object of learning: "learners must be able to simplify expressions with brackets that appear in different positions" and contains the example set in figure 3. Teachers would typically ask learners to attempt the task individually and may then invite learners to work in pairs to compare their answers. Thereafter the answers might be discussed in a whole-class setting. The teacher would then draw attention to what is the same and different about each of the expressions and so the application of the distributive law.

Learner task

Simplify the following expressions:

a) $x + 3(x + 5)$
b) $(x + 3)x + 5$
c) $x - 3(x + 5)$
d) $(x + 3)(x + 5)$
e) $(x + 3) - (x + 5)$

Fig. 3: Learner example set involving application of the distributive law

Invariance here lies in the selection and order of symbols (numeric and algebraic). Variance is introduced in how the symbols are combined through operations and the position of brackets.

In the **teacher education task,** the five examples are set up as a collection of pairs of expressions, numbered 1-8, and with answers provided for convenience (see figure 4). These pairs are carefully juxtaposed to focus on particular learner errors. In this way teachers are invited to compare the following pairs from the learner task: (a)-(b), (a)-(c), (a)-(d) and (d)-(e). In comparing (a) and (b), we address the common error where learners do not consider a letter to the right of the bracket to be an instance of the distributive law. By contrast, in comparing (d) and (e) we address the overgeneralisation "brackets mean multiply".

Teacher task

Look at each pair of expressions:

1) $x + 3(x + 5) = 4x + 15$
2) $(x + 3)x + 5 = x^2 + 3x + 5$

3) $x + 3(x + 5) = 4x + 15$
4) $x - 3(x + 5) = -2x - 15$

5) $x + 3(x + 5) = 4x + 15$
6) $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 8x + 15$

7) $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 8x + 15$
8) $(x + 3) - (x + 5) = -2$

What varies?

What is invariant?

What mathematics is possible to learn through the variation?

Fig. 4: Teacher example set for application of the distributive law

When the task is presented as pairs of expressions, the contrast is more explicit because of the juxtaposition of items with minor visual differences. We ask teachers three key questions which we ask of all example sets: “what varies?”, “what is invariant”? and “what mathematics is possible to learn from this variation?” This teacher education task provides several learning opportunities for teachers. Firstly, teachers see that working with variance amidst invariance provides a teaching strategy for choosing and/or designing example sets to focus on particular learner errors. Secondly, by focusing on pairs of examples, it is easier for teachers to identify variance amidst invariance. This shows how juxtaposition with minor variation has the potential to bring the object of learning more clearly into focus than it might in the original learner task.

Having identified variance amidst invariance, the next step is for teachers to produce a similar pairing and then a full example set related to the distributive law. The extent to which teachers can do this successfully gives us some insight into the sense they have made of this introduction to the principles of variation as well as their grasp of the structural aspects of the mathematics in focus. In figure 5 we illustrate two typical pairings that teachers propose:

$x + 3(x + 5) = 4x + 15$	$x + 3(x + 5) = 4x + 15$
$(x + 3x) + 5 = 4x + 5$	$x(+3x) + 5 = 3x^2 + 5$
Fig. 5a	*Fig. 5b*

Fig. 5: Teachers’ extensions of the given example set

In figure 5a, the pairing draws attention to the matter of “do the brackets first”. This new addition will provide the only instance in the example set where the bracket can first be simplified. Thereafter it is similar to example (2) in figure 4, where the 5 is then added. There is thus further potential for juxtaposition with another example in the set. In figure 5b the pairing draws attention to the distinction between sign and operation. The bracket in the new expression shifts the meaning from “add 3” to “positive 3”. This inevitably leads to some discussion about whether the new example maintains the focus on the distributive law or whether the focus on sign versus operation diverts attention away from the intended object of learning.

We have learnt that teachers are easily able to identify the surface features of the variation and to produce their own examples of variation. However, in doing so, they may lose focus on the object of learning. Consequently, their suggested changes may simply generate an expression that varies rather than maintaining focus on the intended object of learning. So we recognise this as part of the journey of learning to work with principles of variation.

Case 2: Extending ideas of variation in an example set to attend to connections between representations and to generalise

This case is similar to the first in that it is drawn and adapted from lesson study work (see Adler & Ronda, 2017), and also close to teachers’ practice. Here the example set (figure 6) is constructed to lead learners to generalise the impact of parameters on the graph of the quadratic function $y = ax^2 + q$ and hence to make connections between the equation and the graph.

The **learner task** involved a card matching activity where learners were given an example set containing six equations and six graphs on separate cards. They were required to match each graph with an equation. As the lesson progressed, the teacher worked with learners to generalise the impact of a change in the sign of a and the value of q on the graph.

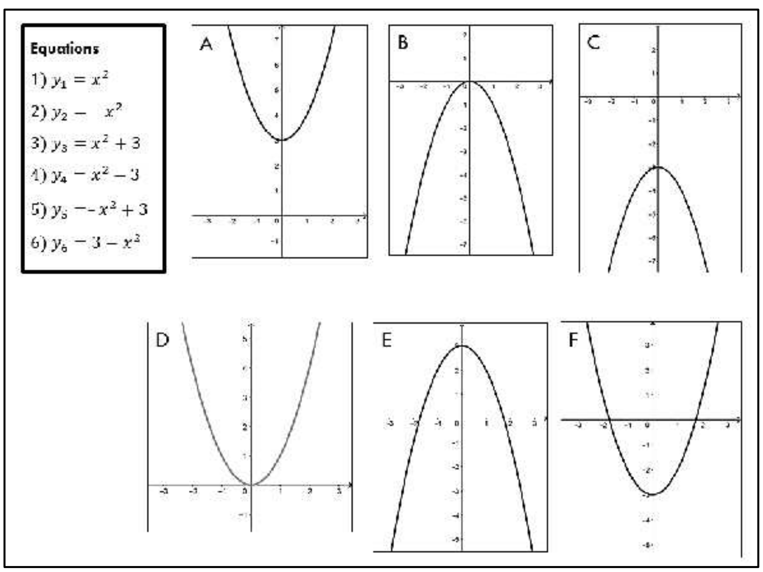


Fig. 6: Example set for learner task to match equations and graphs

In the session, teachers were first required to complete the card matching task. They spotted the “twist” designed into the original example set by the teacher in the lesson study: that equations 5 and 6 are the same and therefore there is no corresponding equation for graph C. Hence the learner task also involved producing an equation for graph C.

The **teacher education task** required teachers to compare the pairs of equations and graphs shown in figure 7, and to identify what varies, what is invariant and what mathematics is possible to learn through the variation.

Teacher task

Look at the following pairs of equations and graphs:

a) equation 1/graph D and equation 3/graph A
b) equation 1/graph D and equation 4/graph F
c) equation 1/graph D and equation 2/graph B

What varies?

What is invariant?

What mathematics is possible to learn through the variation?

Fig. 7: Teacher task for function matching task

As can be seen in the example set for the teacher education task, equation 1/graph D is held constant and the other member of the pair changes. This is intended to draw teachers' attention to how one might structure an investigation of the impact of two parameters across two different representations. Teachers were able to identify that in (a) and (b) the focus was the impact of q on the vertical position of the graph, and in (c) attention moves to the impact of the sign of a on the orientation of the graph. We then invited teachers to choose their own pair of equations/graphs to compare and to identify what mathematics was possible to learn from the pairing. As expected, a common pairing was equation 2/ graph B and equation 5/graph E which drew attention to the effect of q. We were encouraged that many groups also selected pairs that led to the following generalisations: "if a and q have the same sign, then the graph has no roots", and conversely, "if a and q have opposite signs, then the graph has two roots".

The use of juxtaposition in the teacher education task provides a structure for introducing variation in task design when more than one representation and more than one feature are in focus. In other words, the prompts for teachers provide a scaffold to think about which elements to attend to when designing future card matching tasks, and how to vary these features. At the same time, the design of the teacher education task suggests a possible teaching strategy for making the learner task more accessible to learners who may have difficulty in dealing with twelve different cards all at once.

Cases 1 and 2 provide some evidence of teachers' take up of the principles of variation in extending example sets during the course. As noted, we have additional cases that point to the range of issues that need attention when constructing a carefully designed and focused example set, for examplepaying attention to juxtaposition and what be generalised from the combination of pairs of examples. We are reminded here of Kullberg et al's warning that collections of examples are not necessarily cumulative.

Discussion and conclusion

Teaching, whatever its context and/or pedagogy, is purposive work. At the heart of this paper is how we work with teachers to develop their purposive and deliberate choice and use of examples in their teaching. We have argued both from the growing literature base and from our own research with teachers in the project, that focusing on exemplification in conjunction with principles of variation, and in particular attention to variance amidst invariance, is an important and necessary component of secondary mathematics professional development.

Through the cases above we have illustrated three important features of this work. Firstly, separating the learner and teacher education task is critical for being able to focus teachers' attention on what it is they are to be coming to know and be able to do: principles of variation and how to apply these to structure focused example sets. Secondly, the mathematical task for the learners needs to be familiar to teachers so that their attention is on the learning of exemplification. Thirdly, it is important to organise the teacher education tasks so that there is progression from becoming familiar with principles of variation at work in an example set, to being able to work with these when there are two (and possibly more) representational forms. As noted, applying these principles to constructing such sets will be illustrated in the presentation of this paper.

In conclusion, we reflect first on the nature of the tasks we use, and then on some of the challenges we have faced in our work. We have indicated how our tasks for mediating aspects of mathematics teaching remain close to teachers' 'predominantly traditional' practices. Much of the literature on exemplification tends to be related to teaching with rich tasks and inquiry-based pedagogies. We hope we have shown the importance of explicit attention to exemplification in relation to more traditional tasks focusing on key concepts and procedures in school mathematics. We have also hinted at point some challenges as teachers engage with exemplification informed by principles of variation. Teachers easily notice variation at a visual level such as changes in numbers, letters, orders of symbols, etc. While this is an important first step, it is insufficient to engage only with the visual features of an example in its particular representation. For example, example sets of algebraic equations do not immediately reveal the nature of their solutions. Drawing teachers' attention to variance amidst invariance is not trivial if it is to move them beyond superficial use of such in their teaching. We are cognisant that there is much still to explore in working with mathematics teachers on examples and example sets.

Acknowledgement

This work is based on the research supported by the South African Research Chairs Initiative of the Department of Science and Technology and National Research Foundation (Grant No. 71218). Any opinion, finding and conclusion or recommendation expressed in this material is that of the author(s) and the NRF does not accept any liability in this regard.

References

Adler, J. (2001). Teaching mathematics in multilingual classrooms. Dordrecht: Kluwer.

Adler, J., & Alshwaikh, J. (in press). A Case of Lesson Study in South Africa. In R. Huang, A. Takahashi & J. da Ponte (Eds.), Theory and practices of lesson study in mathematics: An international perspective. Dordrecht: Springer.

Adler, J., & Ronda, E. (2015). A framework for describing mathematics discourse in instruction and interpreting differences in teaching. African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education. doi: 10.1080/10288457.2015.1089677

Adler, J., & Ronda, E. (2017). Mathematical discourse in instruction matters. In J. Adler & A. Sfard (Eds.), Research for educational change: Transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning (pp. 64-81). Abingdon: Routledge

Adler, J., & Venkat, H. (2014). Teachers' mathematical discourse in instruction: Focus on examples and explanations. In H. Venkat, M. Rollnick, J. Loughran & M. Askew (Eds.), Exploring mathematics and science teachers' knowledge: Windows into teacher thinking (pp. 132-146). Abingdon, Oxon: Routledge.

Alexander, R. (2000). Culture and pedagogy: International comparisons in primary education. Oxford: Blackwell.

Antonini, S., Presmeg, N., Mariotti, M. A., & Zaslavsky, O. (2011). On examples in mathematical thinking and learning. ZDM: Mathematics Education, 43(2), 191-194. doi: doi:10.1007/s11858-011-0334-5

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59, 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Bills, L., & Watson, A. (2008). Editorial introduction, Editorial, Educational Studies in Mathematics, pp. 77-79. Retrieved from http://search.ebscohost.com/login.aspx?

direct=true&db=ehh&AN=34227504&site=ehost-live

Dahlberg, R. P., & Housman, D. L. (1997). Facilitating learning events through example generation. Educational Studies in Mathematics, 33, 283-299. doi: doi:10.1023/A:1002999415887

Dienes, Z. (1960). Building up mathematics. London: Hutchinson Educational Ltd.

Goldenberg, P., & Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. [Article]. Educational Studies in Mathematics, 69(2), 183-194. doi: 10.1007/s10649-008-9143-3

Kozulin, A. (2003). Psychological tools and mediated learning. In A. Kozulin, B. Gindis, V. Ageyev & s. Miller (Eds.), Vygotsky's educational theory in cultural context (pp. 15-38). New York: Cambridge University Press.

Kullberg, A., Runesson, K. & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics? ZDM Mathematics Education, 49, 559–569. DOI 10.1007/s11858-017-0858-4

Marton, F., & Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. The Journal of the Learning Sciences, 15(2), 193–220.

Marton, F., & Tsui, A. B. M. (2004). Classroom discourse and the space of learning. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. Educational Studies in Mathematics, 15(3), 277-289.

Nachlieli, T., & Tabach, M. (online first). Ritual-enabling opportunities to learn in mathematics classrooms. Educational Studies in Mathematics.

Peled, I., & Balacheff, N. (2011). Beyond realistic considerations: modeling conceptions and controls in task examples with simple word problems. ZDM Mathematics Education, 43, 307-315. doi: DOI 10.1007/s11858-011-0310-0

Pournara, C., Hodgen, J., Adler, J., & Pillay, V. (2015). Can improving teachers' knowledge of mathematics lead to gains in learners' attainment in mathematics? South African Journal of Education, 35(3), 1-10. doi: 10.15700/saje.v35n3a1083

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. Educational Studies in Mathematics, 69(2), 149-163.

Runesson, U. (2008). Learning to design for learning. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teacher development (pp. 153-172). Leiden: Sense.

Sun, X. (2011). "Variation problems" and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples. Educational Studies in Mathematics, 76(1), 65-85. doi:10.1007/s10649-010-9263-4

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society : the development of higher psychological processes. Cambridge: Harvard University Press.

Watson, A., & Chick, H. (2011). Qualities of examples in learning and teaching. ZDM, 43(2), 283-294. doi: 10.1007/s11858-010-0301-6

Watson, A., & Mason, J. (2005). Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Watson, A., & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. Mathematical Thinking and Learning, 8(2), 91-111.

Zaslavsky, O. (online first). There is more to examples than meets the eye: Thinking with and through mathematical examples in different settings. The Journal of Mathematical Behavior.

Zazkis, R. (2011). Relearning mathematics: A challenge for prospective elementary school teachers. Charlotte, NC: Information Age Publishing

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. Educational Studies in Mathematics, 69(2), 131-148. doi: DOI: 10.1007/s10649-008-9131-7

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics, 69(2), 165-182. doi: DOI: 10.1007/s10649-008-9140-6

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2009). Teachers' treatment of examples as learning opportunities. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis (Eds.), Proceedings of the 33rd conference of the International Group of the Psychology of mathematics education (Vol. 5, pp. 425-432). Thessaloniki, Greece: PME.

La Resolución de Problemas Matemáticos: Conectando el trabajo de Polya con el desarrollo del razonamiento digital

Manuel Santos Trigo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Cinvestav-IPN
Mexico
msantos@cinvestav.mx

Resumen

La resolución de problemas como campo de investigación y práctica se ha desarrollado y continúa avanzando a partir de las contribuciones de los matemáticos, los educadores matemáticos y de los profesores de la disciplina. ¿Cuáles son los resultados más importantes de los programas de investigación sobre la resolución de problemas y cómo han contribuido en la comprensión y construcción de conocimiento matemático de los profesores/estudiantes? ¿Cómo o qué cambios han mostrado la agenda de investigación y práctica en la resolución de problemas en los últimos 30 años? En la discusión de estas preguntas se destaca el trabajo de la comunidad matemática que identifica a la resolución de problemas como una actividad crucial en el quehacer matemático; los desarrollos y contribuciones de la educación matemática que analizan los procesos cognitivos, metacognitivos y afectivos que muestra el individuo al resolver problemas; y la presencia y uso sistemático de tecnologías digitales en las tareas que involucran la formulación y resolución de problemas.

Palabras clave: resolución de problemas, marcos conceptuales, tecnologías digitales y razonamiento.

Introducción

El planteamiento de preguntas o problemas y la búsqueda de respuestas o soluciones son actividades fundamentales que permean el comportamiento de los individuos. Las preguntas son una forma importante de expresar la curiosidad por conocer y entender fenómenos y el mundo que nos rodea. En las matemáticas, la formulación de problemas y la búsqueda de diversas maneras de cómo resolverlos son aspectos esenciales del quehacer y desarrollo de la disciplina. En la educación matemática el estudio sistemático de los procesos que se involucran en la formulación y resolución de problemas aportan información importante sobre cómo organizar actividades de aprendizaje que guíen a los estudiantes en el desarrollo de competencias de resolución de problemas. ¿Cuáles han sido los resultados más importantes de los programas de investigación en el campo de la resolución de problemas? ¿Qué cambios ha mostrado la agenda de investigación y práctica en la resolución de problemas en los últimos 30 años? Tres elementos importantes han contribuido al desarrollo de la investigación en la resolución de problemas: (a) el trabajo de la comunidad matemática que identifica a la resolución de problemas como una actividad crucial en el quehacer matemático; (b) los desarrollos en la educación matemática, que enfocan la atención en el estudio de los procesos cognitivos de los estudiantes; y (c) la presencia y uso sistemático de las tecnologías digitales en los procesos de formular y resolver problemas.

Se presenta una revisión de algunos trabajos que reconocen a la actividad de resolver problemas como la esencia del quehacer matemático. El método introspectivo fue el medio para que algunos matemáticos comunicaran sus experiencias y analizaran sus modos de formular y resolver problemas. Posteriormente se analiza el programa de Schoenfeld, identificando resultados y cambios importantes en la agenda de investigación. Al final, se destaca cómo el desarrollo de tecnologías digitales (Sistemas de Geometría Dinámica) ha influido en las formas de razonar y trabajar los problemas matemáticos, y también cómo las tecnologías o aplicaciones de comunicación han ampliado las oportunidades para que los estudiantes compartan sus ideas y extiendan sus discusiones más allá de los ambientes formales de enseñanza.

Los matemáticos y la resolución de problemas

¿Cómo se desarrolla el conocimiento matemático? ¿Qué es lo esencial en el quehacer de la disciplina? En la resolución de problemas matemáticos como área de estudio, interesa analizar cómo se construye el conocimiento disciplinario, cómo se formulan los problemas y las formas de caracterizar y explicar el proceso de construcción de conceptos y la resolución de los problemas. Se sostiene que el análisis y la explicación del proceso que se involucra en la resolución de problemas proporciona información importante sobre el diseño de ambientes de aprendizaje que estructuren y promuevan actividades para la construcción de conocimiento matemático de los estudiantes. Así, en la comunidad matemática se han generado desarrollos relevantes relacionados con la resolución de problemas. Cantor (1845-1918) reconoció la importancia de formular preguntas en el estudio de las matemáticas y enfatiza esta posición en el título de su tesis doctoral "en matemáticas el arte de plantear preguntas es de más valor que resolver problemas". Pólya (1945) analiza su propia actividad y quehacer matemático vía el método introspectivo, que lo conduce a plantear un modelo que identifica las fases fundamentales que aparecen durante el proceso de resolver problemas.

La comprensión del problema se relaciona con la importancia de analizar el enunciado del problema como punto de partida para buscar formas o métodos de solución. En esta fase, el individuo o estudiante problematiza el enunciado con la intención de identificar los conceptos y datos relevantes, y se analizan pertinencia, consistencia y sentido del enunciado (¿qué se pide?, ¿qué datos se tienen, son suficientes?, ¿qué conceptos son importantes?, etcétera).

El diseño de un plan de solución se refiere a encontrar relaciones entre los datos del enunciado y lo que se pide encontrar, con la idea de formular un plan de solución. ¿Conoces algún problema relacionado?, ¿puedes replantear el enunciado?, ¿identificas alguna estrategia que puedas aplicar para resolver el problema?, ¿estás usando todos los datos o condiciones del problema?, ¿se puede representar el problema dinámicamente?

La siguiente fase involucra *llevar a cabo el plan* y verificar que los pasos y operaciones realizadas sean correctas. Aquí es significativo que el individuo revise la consistencia de las unidades de los datos en las soluciones, y las diferentes representaciones que sean relevantes en el proceso de solución.

Finalmente, la fase *visión retrospectiva* implica considerar otros caminos para resolver el problema y analizar si los métodos de solución pueden aplicarse en la solución de otros problemas. Además, aquí resulta valioso transformar el enunciado inicial del problema en casos más generales y proponer nuevos problemas.

Pólya (1945) también aborda la importancia de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas. Las heurísticas son patrones de un razonamiento productivo que resultan trascendentes para lograr avances en la comprensión y solución de problemas no rutinarios. Algunos ejemplos de estrategias heurísticas que Pólya ilustra en la resolución de problemas son el uso de tablas o diagramas, resolver problemas más simples, establecer sub-metas, relajar condiciones iniciales, asumir el problema como resuelto y buscar relaciones, etcétera.

Hadamard (1945) contribuye también al entendimiento del proceso de resolver problemas y presenta un ensayo sobre cómo los matemáticos inventan o generan nuevas ideas. Su método consiste en analizar respuestas que recibe de matemáticos y científicos distinguidos de su época (Pólya, Einstein, Levi-Strauss, etc.) a un cuestionario con preguntas sobre sus experiencias al trabajar o desarrollar conocimiento en sus áreas o disciplinas. También recoge testimonios de matemáticos, revisa el trabajo de psicólogos, filósofos y científicos, e incorpora la introspección de su propio quehacer como elementos para explicar la invención de resultados matemáticos. En términos generales, el modelo que reporta Hadamard distingue un patrón que identifica tres elementos alrededor del proceso de invención: el estudio consciente del tema o problema (revisión), seguido por un proceso de madurez inconsciente (incubación), lo que conduce a un momento de inspiración o iluminación (*insight*) (la invención, revelación de la solución).

Tanto el trabajo de Pólya como el de Hadamard intentan caracterizar el proceso de resolver problemas o de generar conocimiento matemático. Pólya describe el proceso de trabajar los problemas y señala preguntas importantes asociadas con cada fase involucrada en la resolución de problemas. Por su parte, Hadamard centra más la atención en explicar cómo se genera una idea novedosa o resultado importante en el quehacer disciplinario. Este modelo comparte los desarrollos con la psicología de la Gestalt[1] que identifica cuatro fases en la resolución de problemas: a) el individuo se prepara para resolver un problema (revisa información, representa el problema, busca problemas relacionados); b) se involucra en el proceso de incubación del problema, que incluye pruebas de ensayo y error para resolverlo; c) se ilumina y el *insight* ocurre y resuelve el problema y, d) verifica la solución del problema.

La comunidad matemática reconoce que la resolución de problemas es una actividad crucial en el desarrollo del quehacer de la disciplina y varios autores han publicado libros que incluyen el análisis de problemas situados en diversas áreas (Dörrie, 1965; Hilbert, 1902; Steinhaus, 1964). Halmos (1980) expresa que los axiomas, teoremas, pruebas, conceptos, definiciones, fórmulas y métodos son ingredientes esenciales de las matemáticas, pero la principal razón del quehacer matemático es resolver problemas.

> Yo creo que los problemas son el corazón de las matemáticas, y espero que, como maestros, en el salón de clase, seminarios, y en los libros y artículos que escribimos, los enfaticemos más y más, y que entrenemos a nuestros estudiantes a ser mejores formuladores y resolutores de problemas que nosotros. (Halmos, 1980, p. 524)

[1] Ver: Wertheimer, https://es.wikipedia.org/wiki/Max_Wertheimer

> Para Halmos, el mejor camino para aprender matemáticas es resolver problemas y describe cómo él usa el método Moore2 en sus cursos universitarios, "método para crear una actitud para resolver problemas en los estudiantes, es una mezcla de método socrático y el espíritu competitivo de los juegos olímpicos" (Halmos, Moise y Piranian, 1975, p. 468). [Traducción propia]
> Durante su curso de álgebra lineal, en la primera clase les dio una lista de 50 teoremas, sin definiciones, sin explicaciones, sin pruebas. La tarea de los estudiantes fue entenderlos y explicarlos, mostrar ejemplos y contraejemplos, y finalmente demostrarlos. El método Moore ha sido usado en cursos universitarios con estudiantes que muestran interés y motivación en el estudio de las matemáticas (Santos-Trigo, 2014a).

La educación matemática, los educadores y la resolución de problemas

Un trabajo notable que influye en el desarrollo de la resolución de problemas como dominio de investigación es el estudio sobre las habilidades matemáticas de los niños con capacidades sobresalientes o tendencias hacia el estudio de la disciplina (Krutetskii, 1976). En particular, el estudio de Krutestkii no solo caracteriza un conjunto de habilidades matemáticas en los niños dotados o sobresalientes, sino que también contribuye al desarrollo metodológico de estudios de naturaleza cualitativa en la resolución de problemas.

> Analizamos el proceso natural de pensar mientras los problemas experimentales eran resueltos: por un registro de solución, la naturaleza de las operaciones, los diagramas y dibujos hechos por los participantes; por el registro del proceso verbal de reflexión durante el camino de solución; por el material desde la discusión acerca de la solución después de su obtención. (Krutetskii, 1976, p. 94)

Krutetskii analiza las habilidades matemáticas de niños de quinto y sexto grado de primaria usando problemas de aritmética ("para numerar el número de páginas de una enciclopedia se necesitan 6869 dígitos, ¿cuántas páginas contiene?"), geometría y razonamiento lógico. El método de aplicar los problemas también fue novedoso en esa época; al niño se le presentaba un problema difícil, si no lo resolvía se le proporcionaba otro fácil y después otra vez el difícil, etcétera. El propósito era determinar qué tan rápido el niño podía encontrar una generalidad y así observar la habilidad matemática como un proceso, y no solo como un resultado. Entre las habilidades matemáticas que mostraron los niños con talento matemático se destacan: la habilidad para hacer y usar generalizaciones; una habilidad para ofrecer y usar representaciones múltiples del mismo objeto matemático; una tendencia para pensar diferentes maneras de resolver un problema; una habilidad para usar analogías y establecer conexiones; una tendencia para abreviar acercamientos y buscar atajos en la resolución de problemas, etcétera.

Newell y Simon (1972) desarrollan, desde el campo de la inteligencia artificial, un programa "General Problem Solver" para resolver problemas de criptoaritmética, jugar ajedrez y probar teoremas. La estructura del algoritmo del programa para resolver los problemas se diseñó a partir de analizar y simular cómo los expertos en esos dominios resolvían los problemas. Así, el estudio del proceso cognitivo del individuo llegó a ser un área de interés y de investigación. En esta perspectiva, el dominio de la inteligencia artificial ofreció o aportó a la educación matemática herramientas como el análisis de protocolos de expertos o individuos resolviendo problemas para categorizar los patrones de comportamiento que mostraban durante el proceso de resolución.

---

[2] Ver: https://en.wikipedia.org/wiki/Moore_method

El trabajo de Schoenfeld (1985) retoma métodos como el análisis de protocolos, y lanza un programa de investigación que lo lleva a implementar las heurísticas mencionadas por Pólya (1945) en un curso de resolución de problemas. Santos (1992) destaca los resultados importantes del trabajo de Schoenfeld, quien enfoca la atención sobre las siguientes preguntas: ¿qué hacen los individuos que resuelven problemas de manera eficiente y qué es lo que les permite resolver problemas difíciles? ¿Qué dificultades muestran y cómo se comportan aquellos que no son efectivos en la resolución de problemas? ¿Qué pueden hacer los profesores para ayudar a los estudiantes a ser exitosos en la resolución de problemas?

Para responder estas preguntas, Schoenfeld (1985) presenta un marco conceptual que explica el éxito o fracaso de un individuo o estudiante al resolver problemas en términos de cuatro dimensiones (Santos-Trigo, 2014a):

1. *El conocimiento o recursos básicos*. Es decir, el conocimiento de hechos y conceptos básicos que el estudiante tiene potencialmente a su disposición resulta esencial durante el proceso de solución de un problema.

2. *Las heurísticas* o reglas generales que ayudan al estudiante a avanzar o progresar en el proceso de solución cuando no encuentra un camino directo para resolver el problema.

3. *Las estrategias metacognitivas* o el monitoreo o autorregulación del proceso de solución. Los que resuelven problemas de manera exitosa planean y monitorean la forma y el proceso de solución. Si observan que van progresando, entonces continúan; si encuentran dificultades, revalúan lo que están haciendo y consideran alternativas.

4. *Las creencias*. Lo que los estudiantes creen acerca de ellos mismos, de la naturaleza del quehacer matemático que se deriva de sus experiencias de aprendizaje, moldea y permea lo que hacen durante sus intentos de solución.

Por ejemplo, aquellos estudiantes que creen que los problemas matemáticos se resuelven en menos de cinco minutos abandonarán sus intentos después de agotar ese tiempo, aun cuando pudieran haber resuelto el problema si hubiesen perseverado en resolverlo. De manera similar, aquellos estudiantes que creen que las pruebas no tienen nada que ver con el desarrollo de alguna relación matemática, muchas veces plantean conjeturas o resultados que se contradicen o no toman en cuenta lo que antes habían probado.

Otro resultado importante del programa de Schoenfeld se relaciona con el uso de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas (Santos-Trigo, 2014b). Schoenfeld (2010b) reportó que los métodos heurísticos identificados por Pólya son complejos y los estudiantes experimentan serias dificultades para aprenderlos y aplicarlos en la resolución de problemas. Schoenfeld señala que cada heurística no se reduce a una sola estrategia que se aplica en la resolución de un problema, sino que representa una colección o familia de estrategias. Así, para que un estudiante identifique lo que una heurística involucra y cómo usarla, debe pensar y experimentar lo que esa estrategia significa en un dominio particular (geometría/triángulos, álgebra/raíces, cálculo/sucesiones, etc.) y ensayar su aplicación o uso en una variedad de casos.

> …Por ejemplo, en el uso de la estrategia "buscar el sentido o pertinencia del problema y sentido del problema a través de ejemplos particulares", uno debe (a) pensar en el uso de la estrategia, (b) saber qué versión de la estrategia usar, (c) generar y examinar los ejemplos apropiados, (d) analizar los resultados obtenidos, y (d) usarlos para resolver el problema. (Schoenfeld, 2010b, p. 106)

Schoenfeld (2015) afirma que el programa que desarrolló sobre la resolución de problemas le proporcionó bases para ayudar a los estudiantes a ser más efectivos al resolver problemas. Su agenda de investigación posterior se enfocó en cómo ayudar a los maestros en la construcción e implementación de ambientes de aprendizaje que facilitaran a los estudiantes incrementar una comprensión profunda de la disciplina. Su agenda se centró en el área relacionada con la toma de decisiones e incluyó las siguientes interrogantes:

> ¿Puedo desarrollar una comprensión y sustento teórico de la enseñanza que permita entender cómo y por qué los maestros toman las decisiones que toman cuando enseñan? ¿Pueden los maestros usar esos desarrollos teóricos y ayudarles a ser más efectivos? Además, ¿puede la descripción teórica de la enseñanza ser usada para caracterizar el proceso de tomar decisiones en otras áreas? (Schoenfeld, 2015, p. 230)

También, Schoenfeld (2010a) expresa que una actividad con una meta orientada, como la resolución de problemas, la enseñanza o una cirugía de cerebro, puede ser explicada y modelada a través de una arquitectura teórica en términos de: los *recursos* (conocimiento específico), las *metas*; *orientaciones* (una abstracción de creencias, incluyendo valores, preferencias, etc.) y una *toma de decisiones*. La estructura básica de esta teoría es recursiva: Los individuos se orientan hacia situaciones y deciden (a partir de creencias y recursos disponibles) cómo lograr sus metas. Si la situación es familiar, implementan rutinas familiares; si son problemáticas, reconsideran sus caminos.

En este contexto, el conocimiento acumulado en el campo de la resolución de problemas ha aportado información relevante sobre lo que significa e involucra pensar matemáticamente, y también ha identificado diversas maneras para que los estudiantes construyan conocimiento matemático vía la resolución de problemas (Santos-Trigo, 2014b). ¿Qué tipo de innovaciones debe incorporarse en los ambientes de aprendizaje para que los estudiantes tomen en cuenta los recursos y desarrollos tecnológicos para generar competencias en la resolución de problemas? En la discusión de esta pregunta resulta importante caracterizar las formas de representar y explorar los problemas con el uso de tecnologías digitales. En particular, el uso de un sistema de geometría dinámica (SGD) en la construcción de modelos dinámicos de los problemas ofrece al estudiante explorar el comportamiento de algunos atributos de los objetos matemáticos que resultan al mover algunos elementos dentro del mismo modelo. Se argumenta que el uso de la tecnología digital amplía las formas de representar, explorar, resolver los problemas y por lo tanto demanda una revisión de los marcos conceptuales que se generaron a partir de analizar procesos de resolución que esencialmente involucran el uso de lápiz y papel (Santos-Trigo, 2014b; Liljedahl et al., 2016).

La resolución de problemas y el uso de tecnología digital

¿Qué ofrece la tecnología digital al estudiante, en términos de formas de razonamiento en la resolución de problemas? ¿Qué información del proceso de resolución resulta importante en la discusión de los marcos conceptuales que explican cómo los estudiantes usan la tecnología en la resolución de problemas? En la discusión de estas preguntas (Santos-Trigo, 2019) se presenta un ejemplo que destaca el uso de la herramienta en la aplicación de algunas estrategias heurísticas y la búsqueda de propiedades y relaciones que resultan esenciales en el proceso de resolución del problema. El punto de partida es buscar el significado geométrico o propiedades de los conceptos involucrados en el enunciado del problema, y construir un modelo dinámico que permita explorar y encontrar relaciones. El uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) como

GeoGebra genera una oportunidad para que el estudiante se involucre en un proceso de formulación de conjeturas y formas de exploración y validación de resultados. Una estrategia importante de resolución de problemas es la heurística de relajar las condiciones de un problema para plantear problemas más simples que ayuden a resolverlo. Esta estrategia se relaciona con el proceso de formular problemas por parte del individuo. ¿Cómo se puede implementar esta estrategia con el uso de GeoGebra? Se muestra un ejemplo de la implementación de esta heurística con ayuda de un SGD para resolver un problema que involucra el trazo de una circunferencia tangente a dos rectas (Figura 1):

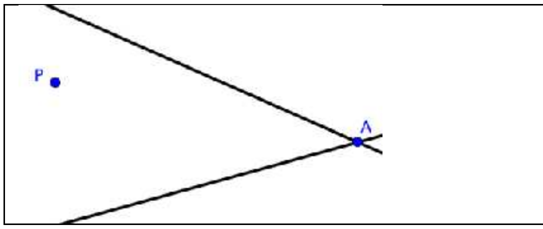
	Problema 3. Dadas dos rectas y un punto P que no pertenece a ellas, trazar una circunferencia que pase por el punto P y sea tangente a las rectas.

Figura 1. Problema que involucra el trazo de una circunferencia tangente a dos rectas.

Aplicando la heurística de relajar las condiciones del problema inicial para formular un problema más simple, se podría plantear el siguiente problema:

Problema 3.1. Dada una recta y un punto P, trazar una circunferencia que sea tangente a la recta y que pase por el punto P.

Así, el Problema 3 se puede descomponer en dos problemas análogos al considerar solo una de las rectas. Una solución dinámica al Problema 3.1 se muestra en la (figura 2).

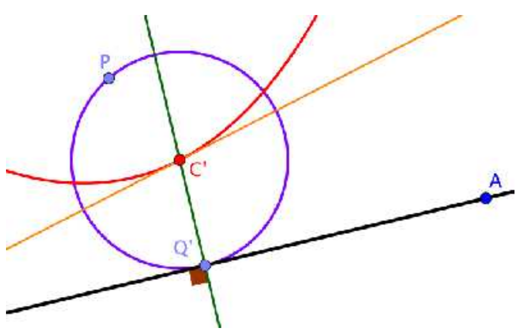
Solución	***Análisis***
Problema 3.1. Dada una recta y un punto P, trazar una circunferencia que sea tangente a la recta y que pase por el punto P.  *Descripción.* Q' es un punto móvil sobre la recta. Se traza la recta perpendicular a la recta dada que pasa por el punto Q' y la mediatriz del segmento PQ'. Se identifica la intersección C' de la mediatriz y la recta perpendicular. Se traza el lugar geométrico del punto C' al mover el punto Q'.	*Recursos.* El centro de una circunferencia tangente a una recta se ubica en la perpendicular a la recta que pasa por el punto de tangencia. Cualquier punto de la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos. Lugar geométrico. *Heurísticas.* Relajar las condiciones del problema y formular un problema más simple. Analizar patrones. *Estrategias dinámicas.* Se traza la familia de circunferencias que pasan por el punto P a partir de un punto de tangencia Q' móvil. *Resultado importante.* El lugar geométrico descrito por el centro C' de la familia de circunferencias tangentes a una recta dada que pasan por un punto P dado es una parábola. El foco y directriz de la parábola son el punto P y la recta dada.

Figura 2. Solución dinámica del Problema 3.1

¿Por qué el centro de las circunferencias tangentes a una recta que pasan por un punto describe una parábola? Así, se puede argumentar que el punto C' siempre está a la misma distancia del punto P y de la recta dada (definición de parábola); por ser el punto de intersección de la mediatriz de PQ' y la perpendicular a la recta por Q'. Por lo tanto, la recta y el punto serían la directriz y el foco de la parábola, respectivamente.

Para este enfoque dinámico, la mediatriz y la parábola son algunos recursos fundamentales. Un aspecto importante en este acercamiento es el movimiento de elementos dentro de la configuración; el movimiento del punto Q' sobre la recta, permite generar una familia de circunferencias tangentes a dicha recta y que pasan por el punto P. Posteriormente, se pueden analizar patrones en términos del lugar geométrico descrito por puntos móviles; el lugar geométrico descrito por el centro C' en función del movimiento del punto Q' es una parábola. Así, la visualización de lugares geométricos se convierte en una estrategia que permite resolver problemas. Luego, otra fase del proceso de solución de problemas con ayuda del SGD consiste en analizar los lugares geométricos; se argumentó que el lugar geométrico descrito por el punto C' es una parábola.

Finalmente, el Problema 3 (uno de los problemas de Apolonio) se puede resolver mediante la transferencia de los resultados del Problema 3.1. Si se omite o se considera solo una de las rectas, sabemos que el centro de la familia de circunferencias tangentes a una recta y que pasan por un punto está sobre una parábola que tiene como foco y directriz el punto y la recta dados. Así, para resolver el Problema 3 basta con aplicar el resultado del Problema 3.1 para cada recta. La solución quedará en términos del punto de intersección de dos parábolas (figura 3). La parábola c está determinada por los centros de las circunferencias que pasan por el punto P y son tangentes a la recta a y la parábola f está determinada por los centros de las circunferencias que pasan por el punto P y son tangentes a la recta b. Así, los puntos de intersección de las parábolas c y f determinan los centros de las circunferencias que pasan por el punto P y son tangentes a ambas rectas.

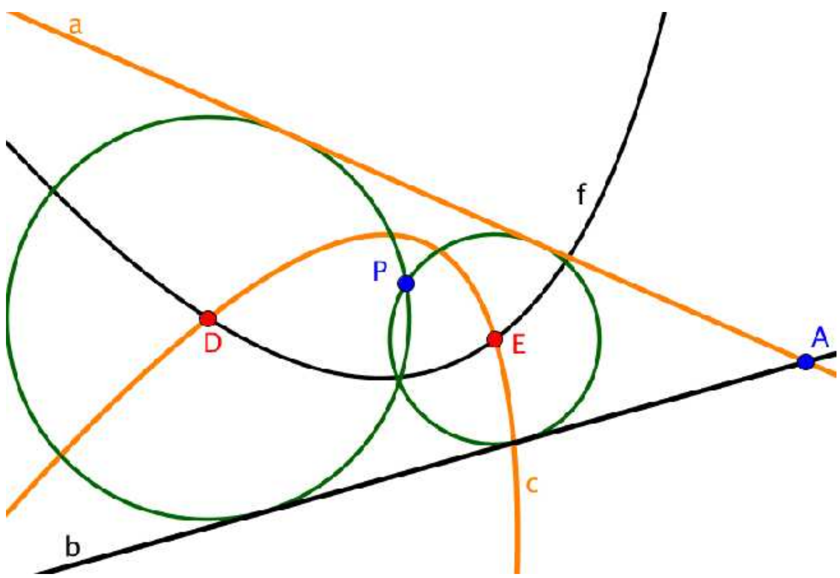


Figura 3. Solución al problema de Apolonio mediante la transferencia de los resultados del Problema 3.1

Una variante de este problema es cuando el punto P se encuentra en una de las rectas, y otra vez el mismo método que involucra el trazo de la parábola ayuda a resolver el problema (figura 4).

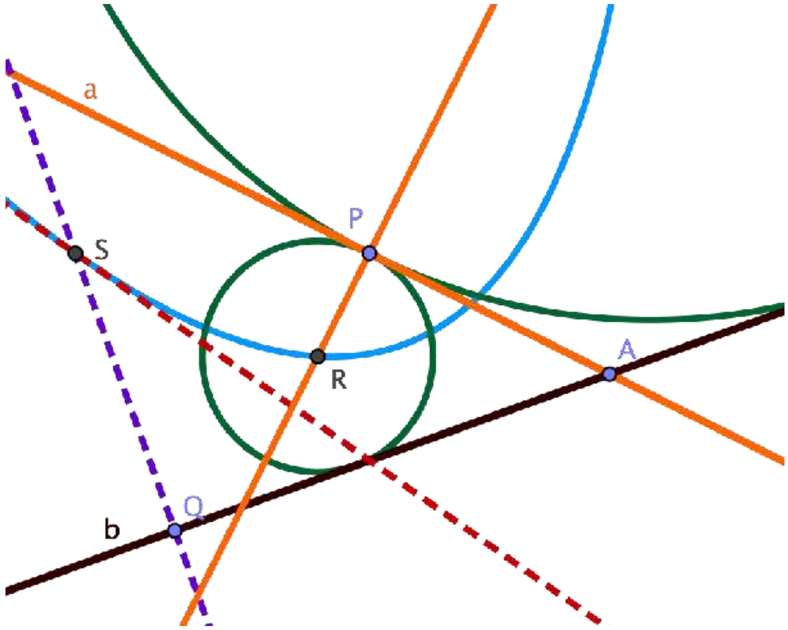


Figura 4. Trazo de circunferencias tangentes a dos rectas en el punto P que pertenece a una recta.

Comentario: Las estrategias heurísticas son esenciales en todas las fases de resolución de problemas y con el uso de tecnología digital algunas de ellas se potencian; en el proceso de implementarlas también se generan nuevas heurísticas. La aplicación de la heurística que implica *reducir o relajar* las condiciones del problema inicial proporciona al estudiante una oportunidad para involucrarse en un proceso de formulación de problemas que es una actividad esencial en el quehacer de la disciplina. ¿Cómo trazo una circunferencia tangente a una recta? Es una pregunta que se aborda desde la educación básica y se asocia con el trazo de la perpendicular a la recta que pasa por el punto de tangencia y que luego se conecta con el trazo de la mediatriz. El movimiento de puntos y objetos es otra estrategia fundamental que se robustece con el trazo de lugares geométricos. Así, el lugar geométrico de la intersección de la recta perpendicular y la mediatriz representa una parábola y se convierte en un objeto importante para resolver el problema. Es decir, la estrategia de enfocar la atención hacia un caso particular de trazar la circunferencia tangente a una recta y que pase por el punto dado P no solo proporcionó recursos e información significativa para resolver el problema, sino que también emergieron nuevos conceptos o relaciones que extienden el enunciado inicial del problema.

Discusión y reflexiones

Tres temas relacionados se identifican en la estructura y desarrollo de la resolución de problemas como un dominio de investigación y un modelo de enseñanza:

1. La contribución y el reconocimiento de la comunidad matemática hacia la actividad de resolver problemas como un elemento esencial del quehacer de la disciplina.

2. El trabajo desde la educación matemática como disciplina que provee bases metodológicas para estudiar sistemáticamente el comportamiento de los estudiantes o individuos

durante la resolución de problemas. Así, los aportes y reflexiones de los matemáticos influyen en la construcción y desarrollo de la agenda de investigación en el área de la resolución de problemas. Schoenfeld (1992) menciona que una caracterización robusta de lo que significa e involucra el pensar matemáticamente resulta fundamental en los temas de estudio de la resolución de problemas. En este contexto, el quehacer de la disciplina que muestran los expertos contribuye a la discusión sobre lo que caracteriza el pensamiento matemático.

3. Un tema transversal en la agenda académica del campo de la resolución de problemas es el uso de distintas herramientas en las distintas fases que se involucran en el proceso de búsqueda de soluciones de los problemas. Camacho y Santos-Trigo (2015) presentan aportes importantes y resultados en un programa de investigación relacionado con la formación de profesores.

Recientemente, los desarrollos y disponibilidad de tecnologías digitales (de usos múltiples como Internet o aplicaciones de comunicación y de acción matemática como GeoGebra) están influyendo y ampliando no solo las formas de representar y explorar los problemas o contenidos matemáticos, sino también las dinámicas que se generan en los ambientes de enseñanza (Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Aguilar-Magallón, 2016).

En la incorporación o uso sistemático y coordinado de tecnologías digitales en la representación y exploración de los problemas y en los escenarios de enseñanza, resulta importante que los mismos profesores inicialmente se involucren en actividades que los lleven a analizar los recursos y estrategias que caractericen las formas de razonamiento que emergen con el uso de las tecnologías (Santos-Trigo, Moreno-Armella y Camacho-Machín, 2016). Es decir, un ambiente de enseñanza basado en la resolución de problemas debe incorporar ya como un elemento esencial el uso de las tecnologías digitales en las formas de representar y de explorar las tareas o problemas matemáticos. Además, los desarrollos en línea o plataformas *ad hoc*[3] ofrecen recursos que los estudiantes pueden consultar y discutir en el estudio de los conceptos como parte de una comunidad de aprendizaje que promueva el intercambio de ideas y la formulación de nuevos problemas.

En el ejemplo aquí presentado, se involucra y destaca la construcción de modelos dinámicos de los problemas; se observa que el movimiento de algunos elementos (movimiento ordenado) dentro del modelo resulta central en la formulación de conjeturas y de nuevos problemas (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2016). Además, la misma exploración dinámica del modelo genera información relacionada con las propiedades de algunos objetos o de sus atributos. En términos de los marcos conceptuales que explican el proceso de resolución de problemas (Schoenfeld, 1985; 1992) existe evidencia del surgimiento de una dimensión importante en el proceso de resolución de los problemas, que se relaciona con la importancia de que el individuo o estudiante se involucre en actividades o en un proceso de apropiación de diversas herramientas (Santos-Trigo y Moreno-Armella, 2016). Además, con el uso de la tecnología digital se amplía el conjunto de estrategias heurísticas disponibles durante todas las fases de resolución de los problemas.

El movimiento ordenado, la cuantificación y medición de atributos (medida de ángulos, longitud de segmentos, perímetro, área, etc.), la generación y visualización de lugares geométricos y el uso de deslizadores son algunas heurísticas propias de un sistema de geometría dinámica. Estas estrategias son vitales en el análisis y la caracterización de las formas de

[3] Por ejemplo, ver: https://www.khanacademy.org/coach/dashboard

razonamiento que muestra el individuo durante el proceso de resolución de las tareas o problemas.

Finalmente, el uso de tecnologías de usos múltiples como Internet o aplicaciones de comunicación (Skype, FaceTime, Padlet) permiten a los estudiantes y profesores extender las discusiones matemáticas más allá del salón de clase. Es decir, los acercamientos o ideas individuales se pueden compartir en un muro digital (Padlet) y el grupo o la comunidad de aprendizaje le puede dar seguimiento a esas contribuciones individuales para compartir otras ideas, proporcionar retroalimentación o proponer extensiones del problema inicial. En esta perspectiva, el estudiante o profesor se involucra en una discusión continua como parte de un grupo (incluyendo expertos o pares), que puede ser sincronizada (directa, vía alguna aplicación) o a través del uso de correo electrónico, con el objetivo de defender, contrastar y refinar sus ideas y acercamientos a los problemas. Además, el uso de tabletas o teléfonos móviles facilita la interacción entre estudiantes y promueve el intercambio de ideas y la búsqueda de distintos acercamientos o métodos de resolución de los problemas.

Agradecimientos:

Se agradece el apoyo parcial recibido del proyecto SEP-Cinvestav12 durante el desarrollo del presente trabajo.

Referencias

Camacho, M. y Santos-Trigo, M. (2015). Aportes sobre la resolución de problemas, tecnología digital y formación de profesores de matemáticas. En N. Planas (Coord.), *Avances y Realidades de la Educación Matemática* (pp. 113-131). Barcelona, España: GRAO.

Dörrie, H. (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. New York, USA: Dover.

Hadamard, J. (1945). *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York, USA: Dover Publications.

Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *87*(7), 519-524.

Halmos, P. R., Moise, E. E. y Piranian, G. (1975). The problem of learning to teach. *The American Mathematical Monthly, 82*(5), 466-577.

Hilbert, D. (1902). Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *8*, 437-479.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children* (J. Teller, Trad.). Chicago, USA: The University of Chicago Press.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U. y Bruder, R. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education*. ICME-13 Topical Surveys. Doi: 10.1007/978-3-319-40730-2_1

Newell, A. y Simon, H. A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice Hall.

Pólya, G. (1945). *How to Solve It*. *A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, New Jersey, USA: Princeton University Press.

Santos-Trigo, M. (2019). Mathematical problem solving and the use of digital technologies. En P. Liljedahl & M. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving*, ICME-13 Monographs, https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_4. Switzerland: Springer.

Santos-Trigo, M. (2014a). *La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos* (2da. ed.). México: Trillas - Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas.

Santos-Trigo, M. (2014b). Problem solving in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 496-501). New York, USA: Springer.

Santos-Trigo, M. y Camacho-Machín, M. (2016). Digital technologies and mathematical problem solving: Redesigning resources, materials, and extending learning environments. En K. Newton (Ed.), *Problem-Solving: Strategies, Challenges and Outcomes* (pp. 31-50). New York, USA: Nova Science Publishers.

Santos-Trigo, M. y Moreno-Armella, L. (2016). The use of digital technologies to frame and foster learners' problem-solving experiences. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives* (pp. 189-207). Cham, Switzerland: Springer.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L. y Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 827-842.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I. y Aguilar-Magallón, D. (2016). Digital technologies and a modelling approach to learn mathematics and develop problem solving competencies. En L. Uden, D. Liberona, y B. Feldmann (Eds.), *Learning Technology for Education in Cloud - The Changing Face of Education* (pp. 193-206). Cham, Switzerland: Springer. Doi: 10.1007/978-3-319-42147-6_17

Santos, L. M. (1992). Resolución de problemas; el trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. *Educación Matemática*, *4*(2), 16-24.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, Florida, USA: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York, USA: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (2010a). *How We think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and Its Educational Applications*. New York, USA: Routledge.

Schoenfeld, A. H. (2010b). Reflections of an accidental theorist. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 104-116.

Schoenfeld, A. H. (2015). How we think: A theory of human decision-making, with a focus on teaching. En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 229-243). Cham, Switzerland: Springer. Doi: 10.1007/978-3-319-12688-3_16

Semanišinová, I., Harminc, M. y Jesenská, M. (2017). Competition aims to develop flexibility in the classroom. En A. Soifer (Ed.), *Competitions for Young Mathematicians, ICME-13 Monographs* (pp. 171-185). Cham, Switzerland: Springer. Doi: 10.1007/978-3-319-56585-9_7

Steinhaus, H. (1964). *One Hundred Problems in Elementary Mathematics*. New York, USA: Basic Books.

La covariación instrumentada: un fenómeno de mediación semiótica y epistemológica

Ferdinando **Arzarello**
Dipartimento di Matematica, Università di Torino
Italia
ferdinando.arzarello@unito.it

Resumen

El artículo describe la *covariación* como un aspecto importante y teóricamente ubicuo del pensamiento matemático, pero no tanto en términos de enseñanza. Se enfoca en la forma multimodal en la cual los procesos de aprendizaje relativo ocurren y se desarrollan en la clase de matemáticas y como recursos semióticos son cruciales para este desarrollo. El artículo se centra en la génesis dinámica de una variedad de signos, cuando se utilizan artefactos para instruir los procesos de aprendizaje. Más precisamente, en la segunda parte se introduce la noción de *covariación instrumentada*. La instrumentación coordinada con múltiples artefactos puede ayudar al aprendizaje a través de una cuidadosa planificación didáctica. Esto se ilustra con ejemplos que muestran la sinergia positiva producida por su potencial semiótico utilizado en el aula en diferentes niveles de grado.

Palabras clave: covariación, instrumentación, haz semiótico, problema abierto, sinergia de artefactos.

Introducción

Una excelente profesora de matemáticas del Liceo Classico italiano (secundaria superior: grados 9-12), que participó en un experimento de enseñanza sobre el uso de las matemáticas para modelar fenómenos físicos me dijo un día: "Esta mañana hicimos una actividad sobre la ley de Hook [...] En mi opinión, hubo un malentendido muy importante entre el sentido del estiramiento y el de la longitud [allungamento - lunghezza en italiano] del resorte. Esto les impidió encontrar las respuestas correctas. ¡Y mis alumnos están en Liceo Classico! ". Los malentendidos similares son comunes y difusos y se refieren a un gran fenómeno, que tiene profundas raíces cognitivas y epistemológicas, y destaca un importante problema didáctico. Su conciencia tiene consecuencias relevantes para el diseño de la enseñanza.

El propósito de esta contribución es enmarcar teóricamente estos problemas y discutir estrategias de enseñanza apropiadas para superarlos. Compartiré algunas ideas sobre un campo de investigación con fundamento semiótico y epistemológico, que yo y otros hemos desarrollado en los últimos años.

Estos problemas me llevan a centrarme en una raíz común a los diferentes fenómenos semióticos descritos en la literatura, que pueden servir como base para la concepción de tareas matemáticas en la escuela: la noción de covariación, ampliamente estudiada (para un excelente resumen, vea Thompson y Carlson, 2017). Basándome en esta noción y utilizando un punto de vista semiótico, he desarrollado una herramienta de análisis más compleja, que tiene una contraparte didáctica, a la que llamo covariación instrumentada (CI).

En esta contribución, definiré la CI como una posible metodología didáctica que puede desencadenar y apoyar un enfoque covariante de las matemáticas.

Covariación en matemática.

Muchos estudios muestran la relevancia del razonamiento covariante en matemáticas desde un punto de vista epistemológico: de hecho, la covarianza es crucial para comprender la noción de función, una herramienta indispensable para modelar el mundo (físico, económico, etc.) y para ingresar a las matemáticas modernas: todo el Análisis depende de esta noción. Correctamente, muchos currículos matemáticos lo ponen como el principal objetivo de enseñanza.

> Enfatizamos que el razonamiento covariante continuo, o el razonamiento acerca de los valores de dos o más cantidades que varían simultáneamente, desempeñó un papel crucial en la invención de los matemáticos de los conceptos que llevaron a la definición moderna de la función, el uso de ecuaciones para representar una variación restringida a representaciones explícitas de relaciones deterministas entre cantidades. (Thompson & M.P. Carlson, 2017, pp. 423, traducido por el autor)

El razonamiento covariante apareció dramáticamente en las matemáticas con el nacimiento y el desarrollo del álgebra moderna gracias a los trabajos de Viète, Descartes y otros. Los métodos de análisis y síntesis en álgebra, tomados de la geometría de los Griegos, introducen una forma revolucionaria de abordar los problemas de las matemáticas, que Lagrange a principios del siglo XIX podría resumir de la siguiente manera:

> El álgebra, tomado en el sentido más amplio, es el arte de determinar las incógnitas por funciones de las cantidades conocidas, o lo que consideramos conocido. (Lagrange, 1806, pp. vii; traducido por el autor).

La ruptura del nuevo paradigma con la idea de un álgebra elemental como aritmética generalizada, de acuerdo con una imagen a menudo presente en los libros de texto (pero no solo), fue discutida en un artículo muy importante de Chevallard (1989), donde destaca el papel crucial que desempeñan las variables y los parámetros en el nuevo álgebra, tanto desde un punto de vista epistemológico como didáctico. Por ejemplo, la solución "aritmética" (verbal) de un problema básico como el siguiente *“Divida un número dado en dos partes, de manera que la primera exceda la segunda en un exceso dado”,* se puede traducir a términos algebraicos solo si uno hace un razonamiento covariante, utilizando parámetros para representar (y manipular) los números (supuestos) dados.

De hecho, el nuevo método de razonamiento covariante con cantidades físicas fue una de las raíces que hizo posible el nacimiento de la ciencia moderna con los experimentos sensibles y las demostraciones matemáticas (le sensate esperienze e le dimostrazioni matematiche) de G. Galilei. Este tipo de razonamiento se desarrolló como una búsqueda de relaciones entre variables concretas, dinámicas y continuas, para expresar la idea de cambio y los fenómenos del movimiento.

Esta es una historia muy antigua: los antiguos eruditos carecían de una descripción matemática del movimiento; vieron la distancia y el tiempo como cantidades medibles, pero no como velocidad. De hecho, la noción de cambio, según la filosofía de Aristóteles, era solo de naturaleza cualitativa y tenía un significado muy amplio (Generación y Corrupción, Alteración, Aumento y Disminución, Movimiento Local). Las ideas cambiaron desde la Edad Media y fue en el siglo XIV cuando las nuevas ideas revolucionarias maduraron en Oxford al Merton College, y en París con Nicole Oresme (1325-1380). Los filósofos de la Edad Media se dieron cuenta de que las cualidades también tienen una intensidad (Arzarello, 2008). Las leyes matemáticas de la nueva ciencia se pueden expresar porque comenzamos a razonar de manera covariante. El álgebra, sin embargo, ya no es suficiente y es necesario un nuevo cálculo. Desafortunadamente, esta forma fundamental de razonamiento se ha descuidado en las escuelas: como el álgebra se enseña como una aritmética generalizada, las funciones también se enseñan a menudo de acuerdo con la definición estática de Bourbaki, que congela su naturaleza dinámica en el lenguaje estático de la teoría de conjuntos.

Esta declaración sobre la conveniencia de apoyar el razonamiento covariable en la escuela también se menciona en el documento citado por P.W. Thompson y M.P. Carlson (2017), con muchas referencias:

> [Argumentamos] que la variante y el razonamiento covariante son fundamentales para el desarrollo matemático de los estudiantes. Basamos esta afirmación en investigaciones que resaltan las dificultades experimentadas por los estudiantes con respecto a las relaciones funcionales, porque carecen de la capacidad de razonar de forma alternativa o covariante, y en investigaciones que muestran cambios productivos en sus relaciones. Concepciones y usos de las funciones por parte de profesores y alumnos, cuando utilizan el razonamiento covariante. (*ibid.*, traducción del autor)

La misma pregunta fue analizada desde un punto de vista diferente en psicología por J. Piaget (1950) y en matemáticas por W. Lawvere (1991): el primero definiendo la noción de operador multiplicativo; el último al discutir la noción de productos, coproductos y adiciones dentro de la teoría de las categorías.

Saldanha y Thompson (1998) repiten el trabajo de Piaget:

> La idea de Saldanha y Thompson de un objeto multiplicativo se deriva de la noción de Piaget de 'y' [conjunción] como un operador multiplicativo, una operación que Piaget describió como una clasificación operativa subyacente y seriación en el pensamiento de los niños. (Thompson & Carlson, 2017, 433, traducción del autor)

Este trabajo ilustra la covariación desde dos puntos de vista competidores, epistemológicos y cognitivos.

Para el primero: en su libro introductorio sobre la teoría de categorías, Lawvere (1991) también introduce el fenómeno de la covariación con la noción de objeto multiplicativo basado en un ejemplo histórico, que muestra tanto su relación directa con la noción de Piaget (de hecho, él usa la misma terminología), y su relevancia para la revolución científica:

> Comencemos con Galileo, hace cuatro siglos, que cuestiona el problema del movimiento. Quería entender el movimiento preciso de una piedra lanzada o un chorro de agua de una fuente. Todos han observado los graciosos arcos parabólicos que producen; pero el movimiento de una roca significa más que su trayectoria. El movimiento implica, para cada momento, la posición de la roca en este momento; para grabarlo requiere una imagen animada en lugar de una exposición temporal. Decimos que el movimiento es un "mapa" (o función) del tiempo en el espacio. [...]

Estos dos mapas, sombra y nivel, parecen reducir cada problema de espacio a dos problemas más simples, uno para el plano y otro para la línea. Por ejemplo, si hay un ave en su espacio y solo conoce la sombra y la altitud del ave, puede reconstruir la posición del ave. Hay más, sin embargo. Supongamos que tiene una película que muestra la sombra del ave mientras vuela, y una película de su altitud […] A partir de estas dos películas, ¡podrás reconstruir todo el vuelo del ave! Por lo tanto, no solo se reduce una posición en el espacio a una posición en el plano y otra a la línea, sino que también se reduce el movimiento en el espacio al movimiento en el plano y otra en la línea. [...]

El descubrimiento de Galileo es que, de estos dos movimientos más simples, en el plano y en la línea, pudo encontrar completamente el complejo movimiento en el espacio.

(Lawvere, 1991, pp. 3-6, traducido por el autor).

Para el segundo: una persona forma un objeto multiplicativo a partir de dos cantidades cuando mentalmente une sus atributos para crear un nuevo objeto conceptual que es simultáneamente uno y el otro. Saldanha y Thompson (1998) ilustran esto considerando la participación de los estudiantes en tareas basadas en actividades para rastrear y describir el comportamiento de las distancias entre un automóvil y dos aldeas a medida que el automóvil avanza por una carretera.

Presento aquí un ejemplo que ilustra este punto: es sustancialmente tomado de la obra citada de Saldanha y Thompson.

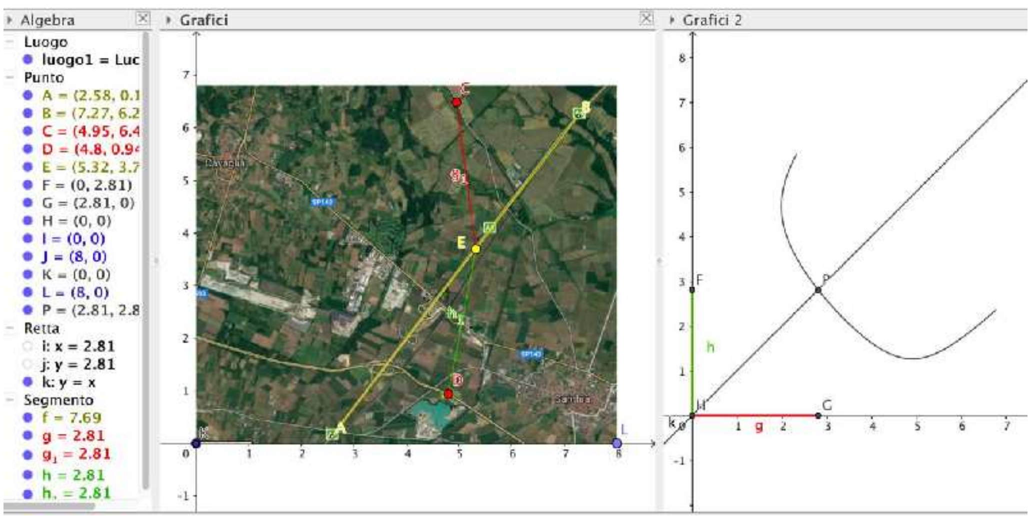


Figura 1.

La Figura 1 (construida con Geogebra) representa el movimiento de un automóvil (E) que recorre la autopista de A a B; en D y C hay dos repetidores para teléfonos móviles y es necesario identificar cuándo el teléfono móvil en el automóvil pasa de la celda C a la de D. En el gráfico cartesiano la abscisa representa la distancia EC, mientras que la ordenada representa la distancia ED. Se deduce que el punto P identifica la posición en la que las dos distancias son iguales y, por lo tanto, el punto en el que comienza la transición de una celda a la otra.

Detrás de este problema encontramos un importante fenómeno didáctico, la *covariación instrumentada*: puede ayudar a los profesores a diseñar situaciones didácticas apropiadas, cuyo propósito es introducir a los estudiantes al razonamiento covariante en entornos de geometría dinámica.

Un enfoque covariante es un fenómeno profundo que no está ni epistemológica ni didácticamente presente, por ejemplo, en la formulación didáctica habitual de la Geometría Euclidiana (GE). Por eso los hábitos escolares van en la dirección opuesta. Por lo tanto, un enfoque covariante:

- implica un cambio epistemológico con respecto a GE;
- tiene consecuencias cognitivas (razonamiento "hacia atrás");
- puede tener consecuencias didácticas en el aula.

Esto demuestra una discontinuidad epistemológica entre la formulación habitual de problemas tales como "demuestra que ..." y en el que, en cambio, se pide explorar una situación abierta (Arsac, Germain y Mante, 1991). Cognitivamente, la discontinuidad es particularmente marcada cuando el problema se aborda en entorno de geometría dinámica (EGD). El valor agregado en este caso viene dado por el enfoque covariante, que está ausente en el entorno de GE. Muchas diferencias cognitivas entre los dos entornos son solo la contrapartida cognitiva de esta discontinuidad.

La investigación / descubrimiento de la covarianza, a la que apuntan los problemas abiertos, es el pegamento que une los pasos de los argumentos. El trabajo con el software constituye una "instrumentación" de este proceso de búsqueda covariante. También puede tener lugar en el entorno de papel y lápiz, pero por lo general requiere más solucionadores expertos. El entorno de geometría dinámica es un artefacto que amplifica los fenómenos que dependen de la formulación del problema y permite su instrumentación. Una lente semiótica puede ayudarnos a describir adecuadamente estos fenómenos de covariación instrumentada producidos por la ingeniería didáctica apropiada con los artefactos.

Por supuesto, la palabra instrumentación deriva del enfoque instrumental de Verillon y Rabardel (1995), que enfatiza la distinción entre un artefacto (un objeto material o abstracto, ya producido por la actividad humana) y un instrumento (una entidad mixta con un componente de artefacto y un componente cognitivo, representado por patrones de uso).

Ahora presento los extractos de una discusión en el noven grado (primera clase de escuela secundaria), donde hay ejemplos de covariación instrumentada.

La covariación instrumentada en la escuela secundaria

Discutiré brevemente un ejemplo de un experimento didáctico realizado en 2017 en una escuela secundaria (estudiantes de grado 9) con la profesora S. Beltramino y la colaboración del profesor O. Swidan, de la Universidad Ben Gurion del Negev (Israel). Se verá, así como la covariación instrumental puede ser una consecuencia de un método basado en la investigación en un contexto tecnológico (Fibonacci 2012); más precisamente, cómo los estudiantes pueden comprender el complejo proceso de covariación de cantidades involucradas en un fenómeno físico (el movimiento de una bola a lo largo de un plano inclinado), gracias a sus investigaciones en un entorno donde hay dos artefactos tecnológicos presentes. El primer artefacto es un video profesional (producido por el museo Galilei en Florencia), que retoma el famoso experimento de Galilei (descrito en Galilei, 1638), en el que se introduce y subraya la covariación entre las cantidades en juego (Fig. 2a); el segundo es una simulación en Geogebra del mismo fenómeno, en el que los estudiantes pueden variar la inclinación del plano inclinado: los datos relativos al tiempo y al espacio se representan en el plano cartesiano y en la hoja de cálculo del software (Fig. 2b).

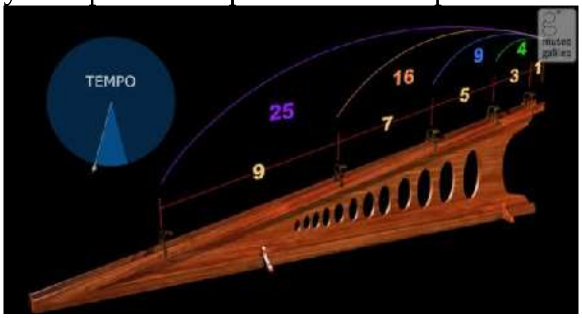


Figura 2a. Video (Museo Galilei, Florencia)

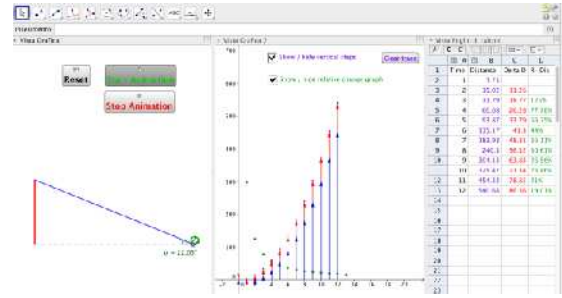


Figura 2b. Applet en Geogebra

En este proceso, tanto las intervenciones de la profesora como los signos producidos por los estudiantes o a las que los estudiantes están expuestos, juegan gradualmente un papel esencial.

Los dos artefactos son de una naturaleza diferente: el video reproduce un experimento real, el segundo lo simula. Por tanto, podemos hablar de un dúo de artefactos en el sentido de Maschietto y Soury-Lavergne (2013), incluso si se trata de una situación diferente, ya que aquí los dos artefactos reproducen o simulan un fenómeno adicional, mientras que en su caso un artefacto digital simula un artefacto físico. Sin embargo, también podemos considerar el posible "valor agregado" (*ibid.*, p.969) proporcionado por los dos artefactos - es decir, cómo la interacción con ambos ayuda los estudiantes a comprender el fenómeno físico examinado-, y cuánto se produce esta interacción de manera consonante o disonante entre los dos artefactos: hablaremos respectivamente de continuidad o discontinuidad entre los efectos de tal interacción.

Nos limitaremos aquí a esbozar los puntos cruciales en este proceso de aprendizaje, enfatizando las dificultades y el progreso del proceso de comprensión de las covariancias entre las cantidades involucradas en el experimento y el papel desempeñado por el maestro, por los dos artefactos y por los signos en él ([1]).

Dividimos este proceso en cuatro pasos, que corresponden a cuatro episodios en el transcurso de una discusión matemática de 40' con la profesora, que tuvo lugar después de que los estudiantes, trabajando en grupos pequeños, habían visto el video, usado el applet de Geogebra, contestado algunas preguntas que les hicieron para describir las características sobresalientes del experimento. En la discusión los estudiantes todavía están divididos en grupos (A, B, C, D, E) de 4-5 personas; las respuestas son a menudo "grupo" y por esta razón generalmente solo indicamos el grupo (a veces indicamos con Xi un alumno / alumna del grupo X).

El magma inicial de las magnitudes en juego

22.37 I (profesora). ¿Qué podemos ver mientras vemos el video?
22:50 A: La velocidad aumenta a medida que baja
Al principio es más lento luego más tarde ...

[1] En otro experimento didáctico, construimos físicamente el plano inclinado con los estudiantes e hicimos el experimento de manera concreta con ellos, con las mismas modalidades que las del video, y luego utilizamos la simulación en Geogebra. Sin embargo, los resultados de aprendizaje parecen ser más bajos que los descritos en este artículo. Estamos tratando de entender estas diferencias, pero está más allá de esta exposición para discutir este importante problema.

23:30 B: el tiempo es siempre el mismo, la velocidad cambia
23:50 C: la distancia entre las puertas [en el video] siempre fue dos
Yo: ¿era?
C: aumentado
24:15 B: 1, 3, 5, 7 [son los números que en el video indican el espacio cubierto gradualmente]
24:23 I: ¿Entre una puerta y otra aumentó la distancia o el tiempo?
24:39 C: El mismo tiempo para correr más rápido
24: 52 I: ¿Y variando la inclinación del plan?
25:00 C: Cuanto más se inclina, más rápida será la velocidad.

Aquí se resaltan muchas variables por lo que dicen los estudiantes: velocidad, distancia entre puertas, tiempo, inclinación. La relación más obvia para ellos es el aumento, incluso si no está tan claro qué aumenta y qué no. Las variables siguen constituyendo un revoltijo indistinto, en el que comenzamos a captar de una manera no tan clara rastros de encubrimiento. El lenguaje es el de todos los días, aún no científico, según la distinción de Vygotski (1985). También existe una confusión entre el valor de una cantidad (la distancia) y el valor de su incremento (23:50). En un cierto punto (24:39), un primer boceto de covariación, atrapado entre el momento en que un aumento constante corresponde a un aumento creciente de la velocidad (pero el lenguaje aplasta estas variaciones en las variaciones en los valores de las mismas cantidades). La covariación es más evidente entre el cambio de inclinación y el aumento de velocidad (25:00). Como resultado de una petición de la profesora (24:52), el lenguaje cotidiano de C es capaz de apoyar el discurso sobre las diferencias entre las diferencias sin tener que aplastar esto en los valores de las cantidades. El artefacto video es lo que más influye en este episodio: las referencias son numerosas y obvias.

Desajuste entre trayectoria y movimiento

27:00 Vosotros están atrapados con la pregunta: "¿Puedes encontrar una ecuación, una fórmula que describa el movimiento de la pelota?"
27:27 A1: Necesitamos encontrar la x, y la y; para el eje x algo que aumenta y para el eje y algo que disminuye.
27:46 I: ¿Qué es la línea decreciente?
27:55 A1: la línea rosa [en el applet es el color de la trayectoria de la bola] ... debe haber algo
28:17 I repite las palabras de A1: Necesitamos encontrar una x que crezca y una y que disminuya porque la línea rosa representa el movimiento de la pelota.
[A los estudiantes les resulta difícil encontrar las cantidades para poner en los dos ejes]
28:42 I: ¿Cuál es el algo, las variables que nos ayudan a describir el movimiento?
Voces diversas: tiempo y espacio; alguien dice: la inclinación
29:04 I: Mantengamos la inclinación fija; Más adelante veremos qué pasa variándola.
29:38 I: ¿Qué elementos debemos considerar para poder describir el movimiento?
29: 47 I: A1 dice tiempo y espacio.
30:00 I: algo que aumenta y algo que disminuye.
30: 05 E1: creo que su idea está mal:
30:08 I: ¡según E1, su idea está mal!
30:10 E1: ¡sí, ambos aumentan!
30:15 I: ¡según E1, ambos aumentan!
30:20 B1: la línea rosa es el plano en el que corre la bola,
30:30 I: la línea rosa es el plano en el que corre la bola, pero ¿cómo podría describirse el movimiento?

Una confusión típica entre la trayectoria y el movimiento de un cuerpo es evidente aquí, bien conocida en la literatura (Clement, 1985). Aquí es importante la intervención de la profesora, quien "refuerza" la discusión para evitar por ahora la superposición de la variable de inclinación y de tiempo (29:04), concentrando así a los estudiantes en las relaciones espacio - tiempo insiste en buscar dos variables que crezcan / disminuir juntos, hasta que un alumno (E1) diga que las dos variables aumentan (30:10). El artefacto Geogebra es lo que más influye en este episodio: la referencia a la línea rosa se deriva de esto, así como la variación de la inclinación (ya presente, sin embargo, en el primer episodio).

Discontinuidad entre tres artefactos (Video-Geogebra-Tabla)

30:58 I: ¿Por qué ambos [tiempo y espacio] aumentan?
31.05 E1: cuando aumentas la longitud, la bola tarda más en hacerlo, entonces, si inclinas el piano, la bola es más rápida ...
31:11 I: no entendí
31:21 E1: según la inclinación del plano, aumenta el tiempo y ... toma menos tiempo ... la bola tarda menos en recorrer esa distancia ...
31:29 I: la pelota tarda menos tiempo en recorrer esa distancia.
31: 35 E1: la misma distancia, pero como el plano está más inclinado, la bola tiene más velocidad, es más rápida. [E1 con gestos imita el plano y el exceso de velocidad de la bola]
31:41 I: a la misma distancia ...
31: 45 E1: menor tiempo
31:48 yo: ¿y al mismo tiempo?
31:49 E1: mayor distancia.
...
32:27 C: la relación entre el espacio y el tiempo no aumentaba constantemente
32:42 I: ¿Qué aparece en el applet?
[La respuesta es que hay una tabla en la que el tiempo está en la primera columna, el espacio en la segunda, las primeras diferencias en el espacio en la tercera]
33:12 I: ¿Cómo leer la tabla?
33:20 más voces: basado en un cierto tiempo, la bola corre a través de un espacio determinado.
33:45 C: el espacio aumenta cada vez más; el tiempo es constante: 1, 2, 3
33:51 I: el espacio siempre aumenta como sucedió en el video: las puertas estaban más distantes porque el tiempo era el mismo y el espacio aumentó.
34:02 I: ¿Cómo escribo una relación entre este espacio y este tiempo?
[con preguntas oportunas, I indica a los alumnos a descartar que es una línea recta; el grupo E trabaja con Geogebra y encuentra que una parábola sale usando el comando cónico por 5 puntos, pero no pueden explicarlo]
37:00 B: si es una parábola, ¿hay algo en la segunda?
37:05 I repite las palabras de B.
37:10 A: en el video de arriba está escrito s: t ^ 2
37:15 I escribe la fórmula del video en el tablero.
37:34 I: ¿entonces?
... [rumor]
38:10 B1: en el video había las sumas de todas las rutas y, por ejemplo, cuando s tenía 16, el tiempo era 4
38:15 I dibuja un boceto de plano inclinado en la pizarra.
38:26 B1: si contamos el tiempo, vemos que s es t ^ 2: 4 ^ 2 = 16
39:13 B1: en el video hacia el final había sumas de todas las diferentes piezas ... las dos primeras ... las tres primeras ... y las diferentes piezas se dividieron según el tiempo que tomaron ... por ejemplo, las dos primeras piezas tomaron dos como tiempo y valieron 4 juntas ... así que si uno mira esa división e indica el espacio como **y** y el tiempo como **x** ... el tiempo en ese caso valió 2 y el espacio 4 ... Entonces, como dice allí, el tiempo para el segundo hace espacio porque 2 para el segundo es igual a 4 ... entonces y = x ^ 2
40:11 E1: es correcto, pero aquí es diferente si hacemos 2 ^ 2 no nos llega a nosotros ...
[el maestro repite lo que dijo B1 y acompaña las palabras que los ilustran en el dibujo del plano inclinado y finalmente escribe y = x ^ 2]

41:15 I: Pero E1 dice "está bien" aunque ...
E1: pero no viene.
41:19 I. Es correcto, sin embargo, no es tan correcto según E1, porque en los ejemplos no vino de esta manera.

En esta parte, además de los dos artefactos, Video y Geogebra, aparece un tercer artefacto, la tabla escrita en la pizarra por la profesora, bajo el dictado de un grupo de estudiantes. La discusión, apoyada por las intervenciones oportunas de la profesora, hace que los procesos de los estudiantes evolucionen hacia una primera formulación de la ley del movimiento, es decir, s = t ^ 2. Se alcanza a través de tres episodios, al final de los cuales, en un cuarto episodio breve pero importante, la ley es impugnada por un estudiante. En los cuatro episodios, los tres artefactos (indicados con V = video, G = Geogebra, T = tabla) están presentes en distintos momentos y se utilizan, a veces espontáneamente por los alumnos, a petición del profesor, para llevar a cabo investigaciones y verificaciones de tesis. Para explicar racionalmente el movimiento de la pelota (llamaremos a estos comportamientos de los estudiantes acciones epistémicas y semióticas[2]). Por lo tanto, un hilo de relaciones entre V, G, T, que va de una a otra y que generalmente son de discontinuidad, se crea a través de la discusión y las acciones epistémicas ([3]).

Es decir, el valor epistémico de las acciones que los estudiantes realizan con tales artefactos a menudo es inconsistente. Esta discontinuidad culmina en el cuarto episodio, en el que E1 (40:11) hace explícito un conflicto entre lo que se dijo anteriormente y los resultados obtenidos en G por su grupo (E).

En lo que sigue usaremos dos tipos de notación, que indican dos formas opuestas en las que un artefacto X ingresa en los procesos de los estudiantes. Por un lado, se puede realizar una acción epistémica para investigar / descubrir qué sucede en una situación dada utilizando el artefacto, sin tener en cuenta ninguna hipótesis al respecto; vamos a escribir: X→. Por otro lado, el artefacto se puede usar con un objetivo específico, por ejemplo, para probar una hipótesis; vamos a escribir: →X. De manera análoga, indicaremos con I→ las intervenciones específicas de

[2] Los signos siempre están involucrados en las acciones epistémicas que veremos, en un sentido amplio de la palabra signo. Por eso prefiero hablar de acciones epistémicas y semióticas. Para una discusión sobre las relaciones entre los dos aspectos, vea los capítulos 9 y 11 de Bikner y Prediger (2014).

[3] *Acción epistémica*. El término fue introducido en las ciencias cognitivas por Kirsch & Maglio (1994) para designar “acciones que los humanos (u otros agentes) toman para alterar su entorno físico con la intención de recopilar información y facilitar la cognición”. Las acciones epistémicas pueden descubrir información que está oculta, o reducir la memoria requerida en la computación mental, o reducir el número de pasos involucrados en el cálculo mental, o reducir la probabilidad de error en el cálculo mental. Para la enseñanza de las matemáticas, el término fue utilizado por Hershkowitz, Schwarz y Dreyfus, T. (2001), quienes a su vez lo derivaron de Pontecorvo & Girardet (1993), quienes las definieron como "acciones mentales por las cuales uno usa o construye conocimiento ". Dreyfus & Kydron (2014), usar la noción de acción epistémica para definir los micro procesos de abstracción como Acciones en Contexto (AiC): esto constructo teórico central de AiC es un modelo teórico-metodológico, según el cual se describe y analiza el surgimiento de un nuevo constructo “por medio de tres acciones epistémicas observables: reconocer (R), construir con (B) y construir (C). Reconocer se refiere a que el alumno vea la relevancia de un conocimiento específico anterior para el problema en cuestión. Construir-con comprende la combinación de constructos reconocidos, para lograr un objetivo localizado, como la actualización de una estrategia, una justificación o la solución de un problema. El modelo sugiere construir como la acción epistémica central de la abstracción matemática” (Dreyfus & Kydron, p.89 ss).
Aquí usaremos este marco sin entrar en detalles por razones de espacio.

la profesora, mientras que lo indicaremos con I⇓ cuando la profesora repite (resuena) una oración pronunciada por un alumno para subrayar la importancia o la corrección, posiblemente incluso recurriendo a gestos.

El primer episodio va de 32:27 a 33:51. E1 (de 31:05 a 31:30) en una modalidad predominantemente G→, y posteriormente (31: 41-31: 49) producido después de la intervención de la profesora (I→). Aquí hay una primera forma de covariación (32:27), formulada exclusivamente con lenguaje natural, posiblemente junto con la producción de gestos icónicos o metafóricos ([4]).

En *el segundo episodio* (32: 27-33: 51), C primero describe la covariación (32:27) de manera diferente que antes, nuevamente en lenguaje natural. I (32:42) empuja a los estudiantes (I→) a usar G y subraya la tabla numérica contenida en ellos, invitándolos a leerla, es decir, a experimentar una modalidad T→.

Las intervenciones de los estudiantes (33: 20-33: 45) explican lo que se informa en T con referencia al video visto (V→), una referencia que se hace explícita en (33:51).

El tercer episodio (34: 02-33: 45) es decisivo. I pides a los alumnos (34:02: I→) que escriban una fórmula que exprese la relación entre *t* y *s* en el movimiento de la pelota. Así evoca un cuarto artefacto: la fórmula (F) con sus varias representaciones (algebraica, cartesiana): →F. Una vez que se ha descartado la línea, para los estudiantes, dado su conocimiento, la parábola comparece, evocada primero por ellos como "algo al cuadrado" (37:00). La evocación se ve nuevamente reforzada por la referencia a V (37:10: V→) y la acción de I (37:15: I→). Aún con referencia al video, B1 es capaz de evocar la fórmula (38:26: V→) y explicarla (39:13: V→).

En *el cuarto episodio*, E1 socava la fórmula de B1 basándose en su investigación en G (G→).

Aquí surge un conflicto entre lo que se vio en V y las experiencias realizadas en G: lo indicaremos con V←→G. Está subrayado por I (I→) y se pasará en episodios posteriores.

Tabla 1

Datos escritos en la pizarra

t (sec)	1	2	3	4
s (cm)	2.13	6.51	19.15	36.64

Continuidad entre cuatro artefactos: Video-Geogebra-Tabla-Formula

[El grupo D mira el video nuevamente en el punto citado. Hay zumbido en el aula. El grupo B finalmente interviene]

43:00 B: Hemos hecho con Geogebra y el ángulo de 25 ° y estos resultados vienen [I escribe en la pizarra: Tabla 1]

43:53 B: hicimos 19.15 / 3 ^ 2 y es 2.13

44:04 B: tratamos de hacerlo con otros y siempre hay el mismo resultado [2.13]

[4] En la clasificación de Mc Neill (1992) los gestos se definen como *icónicos*, si tienen una relación de similitud con el contenido semántico del discurso que lo acompaña y *metafóricos* si son similar a los gestos icónicos, pero el contenido semántico es una idea abstracta.

44:12 I repite las palabras de B y escribe los cálculos en la pizarra.
44:47 I: ¿y qué?
44:50 B: siempre tienes un valor constante ... No creo que sea algo aleatorio.
…
45:25 I: ¿por qué dijiste "entonces esa es la fórmula escrita allí"?
[la fórmula, en el video, es s: t ^ 2; hasta ahora el signo: tal vez ha sido posiblemente interpretado como un signo de puntuación. Ahora I escribe en la pizarra el signo / en lugar de: subrayando lo que sugiere B]
...
45:55 I: entonces, ¿qué podemos concluir?
46:04 B: que la relación entre el espacio recorrido y el tiempo hasta el segundo da una constante.
[I resume lo que se ha hecho hasta ahora; señala que en lugar de escribir **y** y **x** escribimos s para el espacio y t para el tiempo]
47:14 E2: en este caso podría ser y = 2.13 * x ^ 2, en este caso con 25 °, porque es en este caso que viene un valor constante de 2.13 ... El valor puede variar.
...
47: 45 I: ¿si el ángulo varía?
47:48 E2: el valor constante puede variar
[I sugiere probar con diferentes valores de inclinación y los estudiantes intentan usar Geogebra]
…
48:20 B: [ininteligible] el número constante también depende del ángulo
48:28 I: Repito porque habla en voz baja; dijo: si cambiamos el ángulo de 28 ° [con los dedos índice y medio simula una ampliación de un ángulo], la constante cambia y se convierte en 2.36, pero siempre es 2.36.
48:45 E2: Podría ser y = kx ^ 2, donde k es la constante que varía con la inclinación.
[I escribe la fórmula en la pizarra]
48:53 I: B1 dice que podría ser una cosa así, ¿donde k varía? ... [girando a E2]
49:00 E2: basado en inclinación
[I repite sus palabras]
49:12 E2: en consecuencia, el espacio varía.
[I repite sus palabras]
49:19 E2: cambiando todos los coeficientes
49:26 I: podría ser correcto
[invita a todos a consultar con Geogebra si la fórmula es correcta]
...
[en los últimos 10 minutos, los alumnos: comprueban la fórmula con varios ángulos y observan que k crece mientras el ángulo crece; observan que se puede encontrar k considerando el valor de s para t = 1, o dividiendo por 2 las segundas diferencias de s con la variación de t, segundas diferencias que asumen un valor constante igual a 2k; el grupo C considera las parábolas de la gráfica s = s (t) que se obtienen con dos valores de k vecinos: parecen superponerse, pero al usar el zoom se dan cuenta de que las curvas son distintas; lo describen diciendo que "la pelota siempre baja a la misma velocidad" y alguien señala que "tiene la misma tendencia"].

En esta parte tenemos la evolución positiva del conflicto V←→G, que concluyó la parte anterior. Su superación tiene tres aspectos:

(i) el entretejido sinérgico (en el sentido descrito para el tercer ejemplo) entre G y V, y de estos a su vez con T, cuya introducción ha sido solicitada por I varias veces;

(ii) una comprensión más profunda de la covariación *s-t* a través de la construcción de una nueva fórmula que surge de las acciones epistémicas y semióticas generadas por la sinergia V-G-T;

(iii) la generación (y comprensión) de una nueva covariación de segundo nivel más compleja, en la que también entra un parámetro, que depende de la inclinación del plano inclinado.

Esta parte tiene tres episodios.

En *el primer episodio* (43: 00-45: 25), un grupo describe el resultado de sus exploraciones de la tabla en G y explica cómo puede aparecer una constante en la fórmula, que en su lugar no se mostró en el video y que E1 había resaltado (43: 00-44: 04: G→). Evidentemente, este resultado es el resultado de una investigación dirigida con G (→G). En 44:50 el estudiante asume la no aleatoriedad del valor constante. En este punto (45:25) llega una nueva lectura de lo que apareció en V (→V), subrayada por la reescritura con un nuevo signo de la fórmula del video.

En *el segundo episodio* (45: 55-49: 26) llegamos a la covariación descrita en (iii). Varios estudiantes encuentran que la constante depende del valor del ángulo de inclinación del plano (46: 04-47: 48). La propiedad se experimenta en G con diferentes valores del ángulo (→G). La covariación de segundo nivel se explica en 48:28 y 48:45 con contribuciones de diferentes estudiantes. Se dan cuenta de que k es un parámetro (“la constante cambia [con el ángulo], pero siempre es 2.36”). Estas últimas intervenciones expresan la capacidad de los estudiantes para leer la fórmula $s = kt^2$ en un "nivel doble": al primero nivel la covariación s, t; al segundo nivel la covariación de (s,t) y k.

El tercer episodio contiene varios refinamientos del resultado anterior esencialmente debido a las re-lecturas de la fórmula F y a varias exploraciones en G, en las cuales tenemos ambos modalidades en ambos casos: G→, →G, F→, →F.

El progreso de las distintas modalidades en los episodios de continuidad y discontinuidad se resume en la Tabla 2.

Tabla 2

Continuidad y discontinuidad entre artefactos en los diversos episodios

Discontinuidad	G→	I→	T→	F→	V→	V ←→ G
	2	5	1	1	3	1
Continuidad	G→	→ G	→V	F→	→ F	
	2	3	1	1	1	

Discusión

Donde llegamos

En este artículo, presentamos una introducción didáctica a la covariación en matemáticas. Este objetivo planteó inmediatamente cuatro tipos de problemas:

a) la conveniencia de un cuidadoso análisis epistemológico y cognitivo del concepto de covariación;
b) la necesidad de desarrollar situaciones didácticas (en el sentido de Brousseau) que permitan a los estudiantes desarrollar problemas de covariación, definidos de acuerdo con el estado analizado en a);
c) la importancia de definir el papel de las tecnologías en estas situaciones;

d) la necesidad de contar con herramientas para observar los fenómenos didácticos que ocurren en clase con la propuesta de tales situaciones.

El artículo responde a estos cuatro puntos ilustrando las respuestas con un ejemplo, tanto por razones de espacio como para no sobrecargar el hilo del discurso.

Para a): la covariación es una idea que está presente en el pensamiento matemático moderno, el nacimiento del álgebra moderna y el pensamiento funcional relacionado con la revolución científica, un aspecto paralelo del cual es el análisis elemental del Cálculo, y específicamente del concepto de función. Como lo han demostrado varios estudios, este aspecto, con pocas excepciones, está apenas presente en los libros de texto de matemáticas, que dan una definición de función abstracta y estática, o en el mejor de los casos se refieren a la metáfora de entrada-salida de las máquinas. No es una coincidencia que este enfoque esté más presente en los textos que tratan sobre problemas físicos, biológicos, económicos, etc. en el que es necesario modelar fenómenos que evolucionan con el tiempo. Así que preferimos considerar la covariación como una forma más amplia de pensamiento, razonamiento covariante, que considera los objetos matemáticos considerando y buscando sus relaciones mutuas.

Para b) A diferencia de otras obras, el razonamiento covariante no se considera aquí como limitado a la introducción de funciones. Como se señala en a), tiene un valor epistemológico y cognitivo mucho más amplio: su contraparte didáctica está constituida por la forma covariante que se esconde detrás de la formulación abierta de los problemas, que contrasta la forma estándar generalmente presente en los libros de texto ("muestra que" en lugar de "explora"). La referencia a los objetos multiplicativos de Piaget y Lawvere ilustró los significados cognitivos y epistemológicos de esta elección didáctica, que reestructura las situaciones didácticas para poner en juego el razonamiento covariante en general, incluido, por supuesto, un enfoque no estático de las funciones conjunto.

Para c): tratar con la covariación en un entorno de papel y lápiz es muy abstracto y puede ser difícil de entender: por ejemplo, las barreras cognitivas pueden atribuirse a lo que algunas personas llaman confusión entre vías y trayectorias en el caso de que se consideran cronogramas (pero esto también puede aparecer en otras situaciones). La tesis del artículo es que la covariación se puede abordar con cierto éxito desde los primeros años de la escuela utilizando herramientas tecnológicas. De este modo se ha introducido la covariación instrumentada. De hecho, es posible concebir situaciones educativas en las que el razonamiento covariante se produce mediante una mediación adecuada de herramientas tecnológicas en las que se explota su potencial semiótico para producir una forma de covariación instrumentada.

Para d). Los diversos ejemplos ilustran la complejidad de los fenómenos de enseñanza / aprendizaje relacionados con la covariación instrumentada. No solo las herramientas tecnológicas desempeñan un papel esencial en esto, sino todos los recursos semióticos utilizados: desde el discurso verbal hasta inscripciones (esbozos, fórmulas), gestos, etc. Hemos visto cómo es la competencia entrelazada, a veces conflictiva, a veces sinérgica, de todos estos recursos, la que estimula y apoya los procesos de aprendizaje de los estudiantes. También hemos visto que el papel del profesor es crucial para estimular, apoyar y guiar estos procesos. En otros trabajos, el autor ha introducido una herramienta de análisis semiótico adecuada para leer la estructura y dinámica de este complejo entrelazamiento de recursos semióticos presentes en el aula: el haz semiótico ("semiotic bundle" en inglés: Arzarello, 2006). Esto amplía la noción del sistema semiótico clásico para sistemas de signos como gestos e inscripciones, todos presentes en los procesos observados en el aula, como lo ilustra abundantemente la literatura. El haz semiótico es una estructura dinámica que integra todos estos recursos semióticos en un solo todo, considerando tanto las relaciones mutuas entre ellos como su evolución en el tiempo. En este sentido, es una generalización del estudio por parte del sistema de gestos y discursos de McNeill (1992) y otros, porque por un lado integra en el modelo no solo el habla y los gestos, sino también las inscripciones (de fórmulas a las gráficas) en las que se basa el pensamiento matemático. Por otro lado, presenta un modelo que evoluciona con el tiempo: debido a su estructura rica, el modelo de haz semiótico permite capturar la dinámica compleja del pensamiento matemático en variables observables cuando ocurren en una situación de interacción, y así hacerlas accesibles a la investigación científica. Naturalmente, para lograr esto, también es necesario filmar con varias cámaras lo que sucede en las interacciones en clase entre los estudiantes y entre los estudiantes y los profesores, mientras se mantiene un registro de sus producciones escritas. En el análisis final de estos documentos, también utilizamos el modelo de microgénesis de un problema adaptado de las investigaciónes de Saada-Robert (1989). Desafortunadamente, el espacio permitido no nos permite ilustrar este aspecto aquí.

A donde nos gustaría llegar

Hay diferentes problemas que deja abierta esta investigación. Por un lado, necesitamos una mayor colección de datos sobre el trabajo en el aula, que se centre en la introducción del razonamiento covariante para proporcionar más información sobre la dinámica de su aprendizaje, especialmente sobre las dificultades de los estudiantes, y posiblemente en ingeniería didáctica apropiada para superarlos. Por otro lado, es importante desarrollar una profundización cognitiva y epistemológica de la noción de covariación: por ejemplo, las ideas de Piaget y Lawvere sobre los objetos multiplicativos deben estudiarse en relación con los procesos de resolución específicos de problemas abiertos y los fenómenos de la microgénesis de la representación de un problema, discutidos por Saada—Robert (1989).

Reconocimiento. Agradezco al Dr. Eduardo Basurto, quien ha revisado pacientemente el texto en español de mi artículo.

Referencias y bibliografía

Arsac, G. & Mante, M. (2007), Les pratiques du problème ouvert, IREM de Lyon, CRDP, Villeurbanne.

Arsac, G., German, G., & Mante, M. (1991). Problème ouvert et situation-problème, IREM de Lyon.

Arzarello F., (2006). Semiosis as a multimodal process. Revista Latino Americana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. Especial, 267-299.

Arzarello F., (2008). Mathematical landscapes and their inhabitants: Perceptions, languages, theories. 10th International Congress on Mathematical Education, Plenary lecture (Editor: M. Niss). IMFUFA, Roskilde University: Copenhagen, Denmark. 158-181.

Bikner-Ahsbahs, A., y Prediger, S. (2014). Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education. Heidelberg: Springer.

Chevallard, Y. (1989). Arithmétique, algèbre, modélisation. Etapes d'une recherche, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 16.

Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. The Netherlands. (http://people.umass.edu/~clement/pdf/Misconceptions%20in%20Graphing.pdf)

Dreyfus, T. y Kydron. I. (2014). Introduction to Abstraction in Context (AiC). In: Bikner-Ahsbahs, A., y Prediger, S. (Editors). Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education.

Heidelberg: Springer. Cap. 6, pp. 85-96.

Fibonacci (2012) Inquiry in Mathematics Education, (http://fibonacci.uni-bayreuth.de/resources/resources-for-implementing-inquiry.html).

Galilei, G. (1615), Lettera a Madama Cristina di Lorena Granduchessa di Toscana. In: Opere, Edizione Nazionale a cura di Antonio Favaro, Giunti-Barbera, Firenze 1968, vol. V, pp. 309-348. (https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k94893t/f16.image)

Galilei, G. (1638), Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali. Leyden: Ludovico Elzeviro. (https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k94893t/f16.image)

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. Journal for Research in Mathematics Education. 32, 195-222.

Kirsh, D., Maglio, P. (1994). On distinguishing epistemic from pragmatic action. Cognitive Science 18, 513-549.

Lawvere, F.W. & Shanuel, S.H. (1991). Conceptual Mathematics, Buffalo Workshop Press. Published by Cambridge University Press in 1997.

Maschietto, M., & Soury-Lavergne S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 45(7). 959-971.

McNeill, D. (1992). *Hand and mind: what gestures reveal about thought*. Chicago: University of Chicago Press.

Piaget, J. (1950). *Introduction à l'épistémologie génétique*. Tome I: La pensée mathématique. Presses universitaires de France.

Plano inclinado. Vídeo del Museo Galilei (Florencia) https://catalogo.museogalileo.it/multimedia/PianoInclinato.html

Pontecorvo and Girardet (1993): Arguing and reasoning in understanding historical topics. *Cognition and Instruction*, 11, 365-395.

Saada-Robert, M. (1989). La microgenèse de la représentation d'un problème. Psychologie française, 34(2-3), 193-206.

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In: Berenson, S.B. & Coulombe, W.N. (Editors), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education* - North America Vol 1. Raleigh, NC: North Carolina State University. 298-304.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1). 77–101.

Vygotsky L.S. (1985). *Thought and Language*. Second revised and expanded edition, edited and translated by E. Hanfmann, G. Vakar, and A. Kozulin. Cambridge, MA: MIT Press.

Lesson Study as a vehicle for the Synergy of Research and Practices: A Japanese Perspective

Yoshinori **Shimizu**
University of Tsukuba
Japan
yshimizu@human.tsukuba.ac.jp

Summary

Given the distinctive characteristics of Japanese mathematics lessons found by the international studies and the subsequent focus of the attention to Lesson Study originated in Japan in education community, the author discusses the relationships between the scientific studies and endeavour for the improvement of teaching and learning from an insider's perspective. Reflecting on how mathematics educators have been struggling with studying the complex phenomena called "lesson" in the Japanese context, it is argued that orchestrating the scientific goal of building theories and the goal of improving teaching and learning of mathematics is the key to a synergy between research and the more practical knowledge of the craft of teaching.

Key Words: Lesson study, mathematics, international comparisons, LPS

Introduction

The findings of large-scale international studies of classroom practices in mathematics include aspects of instruction as identified among participating countries while instruction in Japan is seemingly unique (Hiebert, et al., 2003; Stigler & Hiebert, 1999). Japanese mathematics teachers, for example, appeared to spend more time on the same task in one lesson than their counterparts in other countries (Hiebert et al., 2003, p.46), maybe because they have students work on a challenging problem and discuss alternative solutions to it. Also, experienced teachers in Japan tend to highlight and summarise the main points at particular phases of their lesson to have their students reflect on what they have learned (Shimizu, 2006). These striking characteristics can be regarded as indicating some indispensable elements of "structured problem-solving" in classroom that are valued and emphasized by Japanese teachers.

While much has been documented and analysed about mathematics classrooms in Japan, after the publication of The Teaching Gap (Stigler & Hiebert, 1999), in particular, Lesson Study became one of the notable topics in the mathematics education community (e.g. Huang & Shimizu, 2016). Lesson Study, 'jugyo kenkyu' in Japanese, is a common element in Japanese approach to improving teaching and learning in classroom whereby a group of teachers collaborate to study the subject matter, students' thinking and learning in the classroom, and how classroom instruction can be improved (Fernandez & Yoshida, 2004; Lewis & Tsuchida, 1998; Shimizu, 2014). Two major functions of Lesson Study are as a way of doing research with a hypothesis in the form of conducting lesson and as a place for presenting and discussing new findings based on classroom practice (Hirabayashi, 2002). These functions are related to the rationale for conducting Lesson Study as an opportunity of professional development for teachers to study the effectiveness of mathematics teaching and learning in their own classrooms. Also, practical knowledge related to the improvement of classroom instruction is accumulated as 'research' findings tested against the classroom practices of many teachers for many years.

Given the tradition of Lesson Study in more than a century, Japanese mathematics educators have often been challenged by teachers who have been engaged in Lesson Study whether results of "scientific" studies would or would not be usefully applicable to the improvement of teaching and learning in the classroom (Sekiguchi, 1994). The expectations by teachers for mathematics education research are high because they have their own problems to be resolved in their own contexts. How can a researcher productively and collaboratively work with teachers who have an access to the accumulation of practical knowledge tested against the classroom practices of many teachers for many years? How can research influence on classroom practices in such contexts?

An essential characteristic of the field of mathematics education is that its questions and concerns are deeply tied to matters related to the teaching and learning of mathematics (Silver & Herbst, 2007). Research in mathematics education has not only scientific goal of building theories but also the goal of improving of teaching and learning of mathematics. Then, examining the connections between 'scientific' study of a lesson and Lesson Study can shed light on a long-standing issue of the separation between research and practice in the education community, in general, and mathematics education community, in particular.

Educational Research as Socially and Culturally Situated

International Comparative Studies on Classroom Practices

Research in mathematics education that crosses national boundaries provides new insights into the development and improvement of the teaching and learning of mathematics (Shimizu & Kaur, 2013). In the course of discussing the characteristics of teaching and learning in classrooms by cross-national comparisons, researchers have gained more explicit understanding of their own implicit theories about how teachers teach and how children learn mathematics in their local contexts as well as what is going on in school mathematics in other countries (Stigler, Gallimore, & Hiebert, 2000). This is the key driving force to conduct international comparative studies in classroom practices.

The TIMSS 1995 Video Study of mathematics teachers' practices, a video component of the Third International Mathematics and Science Study, was the first attempt to collect and analyse videotapes from the classrooms of national probability samples of teacher at work (Stigler & Hiebert, 1999). Focusing on the actions of teachers, it has provided a rich source of information regarding what goes on inside eighth-grade mathematics classes in Germany, Japan and the United States with certain contrasts among three countries. One of the sharp contrasts between the lessons in Japan and those in the other two countries relates to how lessons were structured and delivered by the teacher. The structure of Japanese lessons was characterized as ‘structured problem solving’, while a focus was on procedures in the characterisations of lessons in the other two countries. The following sequence of five activities was described as the ‘Japanese pattern’: reviewing the previous lesson; presenting the problems for the day; students working individually or in groups; discussing solution methods; and highlighting and summarizing the main point.

The ‘Japanese pattern’ seems to naturally fit within the teacher’s planning of mathematics lessons. Japanese teachers, in elementary and junior high schools, in particular, often organise an entire mathematics lesson around the multiple solutions to a single problem in a whole-class instructional mode (Shimizu, 1999a). This organization is particularly useful when a new concept or a new procedure is going to be introduced during the initial phase of a teaching unit. Even during the middle or final phases of the teaching unit, teachers often organize lessons by posing a few problems with a focus on the various solutions students come up with. Also, the characterisation of Japanese lessons as ‘structured problem solving’ seems to be consistent with what teachers typically discuss in the post-lesson discussion in Lesson Study (Takahashi, 2008).

Characterization of the practices of a nation’s or a culture’s mathematics classrooms with a single lesson pattern was, however, problematised by the results of the Learner’s Perspective Study (Clarke, Mesiti, O’Keefe, Jablonka, Mok & Shimizu, 2007). The analysis suggested that, in particular, the process of mathematics teaching and learning in Japanese classrooms could not be adequately represented by a single lesson pattern by, at least, the following two reasons. First, lesson pattern differs considerably within one teaching unit, which can be a topic or a series of topics, depending on the teacher’s intentions throughout the sequence of lessons. Second, elements in the pattern themselves can have different meanings and functions in the sequence of multiple lessons. Needless to say, it is an important aspect of teacher’s work not only to implement a single lesson but also to weave multiple lessons that can stretch out over several days, or even a few weeks, into a coherent body of the unit. It would not be possible for us to capture the dynamic nature of activities in teaching and learning process if each lesson was analysed as isolated.

An alternative approach was proposed to the international comparisons of lessons by the researchers in LPS team. That is, a postulated ‘lesson event’ was regarded to serve as the basis for comparisons of classroom practice internationally. In LPS, an analytical approach was taken to explore the form and functions of the particular lesson events such as ‘between desk instruction’, ‘students at the front’, and ‘highlighting and summarizing the main point’ (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006).

In particular, the form and functions of the particular lesson event ‘highlighting and summarizing the main point’, or ‘Matome’ in Japanese, were analysed in eighth-grade ‘well-taught’ mathematics classrooms in Australia, Germany, Hong Kong, Japan, Mainland China (Shanghai), and the USA (Shimizu, 2006). For the Japanese teachers, the event ‘Matome’ appeared to have the following principal functions: (i) highlighting and summarizing the main point, (ii) promote students’ reflection on what they have done, (iii) setting the context for introducing a new mathematical concept or term based on the previous experiences, and (iv) making connections between the current topic and previous one. For the teachers to be successful in maintaining these functions, the goals of lesson should be very clear to themselves, activities in the lesson as a whole need to be coherent, and students need to be involved deeply in the process of teaching and learning. The results suggest that clear goals of the lesson, a coherence of activities in the entire lesson, active students' involvement into the lesson, are all to be noted for the quality instruction in Japanese classrooms.

Mathematics Education Research as Socially and Culturally Situated

In the Japanese contexts, the activity of Lesson Study includes careful planning and implementing the research lesson as a core of the whole activity, followed by post-lesson discussion and reflection by participants. In the discourse of teachers in planning, implementing, and reflecting on lessons, particular pedagogical terms are often shared and used in the contexts of examining classroom instruction (Shimizu, 1999). Through the participation in lesson study, beginning teachers learn these terms together with values attached to them. These terms reflect what Japanese teachers value in planning and implementing lesson within Japanese culture. 'Matome' as a category of 'lesson event', as was mentioned in the previous section, is one of such pedagogical terms often used by teachers. "Hatsumon" is another example of shared term that means asking a key question to provoke and facilitate students' thinking at a particular point of the lesson. The teacher may ask a question for probing students' understanding of the topic at the beginning of the lesson or for facilitating students' thinking on the specific aspect of the problem.

"Yamaba", on the other hand, means a highlight or climax of a lesson. Japanese teachers think that any lesson should include at least one "Yamaba" and the term often appears in planning a lesson and the post-lesson discussion in Lesson Study. This climax usually appears as a highlight during the whole-class discussion. The point here is that all the activities, or some variations of them, constitute a coherent system called a lesson that hopefully include a climax. Further, among Japanese teachers, a lesson is often regarded as a drama, which has a beginning, leads to a climax, and then invites a conclusion. The idea of "ki-sho-ten-ketsu" which was originated in the Chinese poem, is often referred by Japanese teachers in their planning and implementation of a lesson. It is suggested that Japanese lessons have a particular structure or a flow, moving from the beginning ("ki", a starting point) toward the end ("ketsu", summary of the whole story).

As teaching is a cultural activity and is socially and culturally situated, research is also socially and culturally situated. Sekiguchi (2015) argues that there are at least three major sources of Japanese mathematics education research; lesson study tradition, influence from Western countries, and existence of national syllabus. Then, in addition to focus on pedagogical terms shared and used in Lesson Study by teachers with values and beliefs on lessons, it would be productive for researchers to take into account the following contexts to have better understanding of classroom practices. First, in Japan we have national curriculum standards, which have been revised roughly every 10 years. In order to examine the trends and issues in most areas of mathematics research in Japan, we cannot neglect their connections with the goals and emphases described in the national curriculum standards. Second, the mathematics education community in Japan has a long tradition of lesson study by teachers as practical research methodologies in the form of action research. Researchers and teachers work closely within the community with local theories of students' learning in their perspective. Then, to grasp the ongoing research agendas, we also need to pay careful attention to their accumulated findings with respect to teaching materials and ways of teaching and learning in each research area. Third, developments of mathematics education research in Japan have been influenced by Western educational theories in various areas of inquiry, while educational activities themselves are rooted in East Asian cultural tradition.

Lesson Study as Embedded in Cultural Contexts

The ultimate goal of any study of classroom practice is to improve teaching for the purpose of enhancing students' learning, even if its major focus would be on, for example, constructing a theoretical model of teaching or comparing teaching methods among countries. For this goal, various approaches and methodologies can be adapted. The TIMSS Video Study was a breakthrough as a scientific exploration into the classroom, showing the feasibility of applying videotape methodology in a wide-scale national and international survey of classroom instructional practice. It has provided a rich source of information regarding what goes on inside eighth-grade mathematics classes in the three countries. Also, objective observational measures of classroom instruction were developed to serve as valid quantitative indicators, at a national level, of teaching practices in the three countries.

There are opportunities for Japanese teachers to learn with and from their experienced colleagues to pursue an excellent lesson with a focus on students' thinking in classrooms. "Lesson study" is an approach to develop and maintain quality mathematics instruction through a particular form of activity (Fernandez & Yoshida, 2004; Shimizu, 2002). Valuing students' thinking as necessary elements to be incorporated into the development of a lesson is a key to the approach taken by Japanese teachers.

Another type of approach to improve teaching practice has traditionally been taken by Japanese teachers in a practical way. In Japanese schools, workshops of particular style, "Jugyo Kenkyu-kai" ("lesson study meeting"), are regularly held at each school level or at the other levels. This opportunity has a strong impact on teacher development (Shimizu, 1999). These workshops include an actual lesson (a "research lesson") observed by many teachers as well as an extended discussion after the lesson (Lewis & Tsuchida, 1998; Shimizu, 2014). Teachers exchange ideas about the lesson they have just observed focusing on the task on which students worked, the content taught, students' responses to the problem, and the teacher's roles. Experienced teachers or mathematics educators are often invited to comment on the development of the lesson observed, interpretations of the topic taught, and how the lesson could be improved. By observing and discussing an actual lesson, aspects of lessons are examined and explored.

The Origin and the Development of Lesson Study

Although Fernandez and Yoshida (2004) mention that the origin of lesson study can be traced back to the early 1890s, it seems to have appeared earlier. At the beginning of the modern era, the Japanese government established normal schools, where teachers set the goals of the lesson, prepared experimental lessons, and conducted those lessons in actual classrooms while other teachers were observing them. In the late 1890s, teachers at elementary schools affiliated to the normal schools started to study lessons by observing and examining them critically. Makinae (2010) argues that the origin of Japanese lesson study was influenced during the late 1880's by U.S. books for educators that introduced new approaches to teach. He points out that a book by Sheldon (1862) describes methods to learn about new teaching approaches, called 'criticism lesson' and 'model lesson'. This may be the beginning of Japanese lesson study. In fact, Inagaki (1995) argues that 'criticism lesson' was already practiced among elementary schools affiliated to the normal schools in Japan as early as the late 1890s. Teacher conferences utilising criticism lessons were conducted by local school districts in the early 1900s. Some of these conferences were already called 'lesson study conferences', or jugyo-kenkyu-kai in Japanese (Makinae, 2010). In this sense, lesson study has a history of more than a century.

In the early stages of development of Japanese lesson study, 'criticism lesson' (Sheldon, 1862) included a particular function of studying lessons, carefully examining the effectiveness of teaching, and publicly discussing ways to improve teaching and learning. The term 'research lesson', or kenkyu-jugyo, might come from this particular function of lesson study with its major focus on producing a new idea, or testing a hypothesis in the form of an operationalized teaching method or teaching materials. On the other hand, 'model lesson' (Sheldon, 1862) included another function of studying lessons; demonstrating or showcasing exemplary lessons, or presenting new approaches for teaching. For this purpose, the lesson should be carefully planned and based on research conducted by a teacher or a group of teachers. Participants can observe and discuss actual lessons with a hypothesis, instead of simply reading papers or hand-outs that describe the results of the study. The two different functions of lesson study – 'criticism lesson' and 'model lesson' – can be the original model of a variety of lesson study practiced around the country.

Despite the long history of lesson study in their own country, Japanese mathematics educators and researchers in other areas have not been much interested in studying lesson study itself until recently. After the publication of The Teaching Gap (Stigler & Hiebert, 1999), and of a Japanese translation of the book (Minato, 2002), Japanese educators, who often deeply involved in lesson study, have "found" the importance of this particular cultural activity.

Today, lesson study takes place in various institutions and contexts (Lewis & Tsuchida, 1998; Shimizu, 2002). Pre-service teacher training programs at universities and colleges, for example, include lesson study as a crucial and challenging part in the final week of student teaching practice, which usually lasts three or four weeks. In-service teachers also have opportunities to participate, held within their school (konai-kenshu), outside their school but in the same school district or city, at the level of prefecture, and even at the national level for several objectives. Teachers at public schools may just participate in lesson study in their school to develop their teaching skills, since the school is their working place. Other teachers may play the major roles in planning and conducting research lesson, for testing critically their hypothesis in the use of particular method for teaching mathematics. Teachers at university-affiliated schools that have a mission to developing a new approach to teaching, often open their lesson study meeting for demonstrating an approach or new teaching materials they have developed. Thus, we can still see two major functions of lesson study that seems to have arisen from the original form of it.

The Role of Outside Expert in Lesson Study

In lesson study, an outside expert is often invited as an advisor who facilitates the post-lesson discussion and/or makes comments on the possible improvement of lesson from a broader viewpoint (Fernandez and Yoshida, 2004; Shimizu, 2008). The expert may be an experienced teacher, a supervisor at local board of education, a principal of a different school, or a professor from the nearby university. In some cases, not only inviting an expert as a commentator in the post-lesson discussion, the group of teachers may meet with him/her several times prior to conducting the research lesson to discuss issues such as reshaping the objective of the lesson, clarifying the rationale of a particular task to be presented in the classroom, a range of anticipatory student responses to the task, and so on. In this context, an outside expert can be a collaborator who shares responsibility for the quality of a lesson with the teachers, not just an outside authority which directs the team of teachers.

As for the university professor invited as an outside expert, he or she is expected as a researcher to provide new visions on curriculum reform and teaching practices, trends and issues in local and national educational policies, and also some concrete suggestions for improving daily classroom practices, as well as commenting on what was observed in research lesson. Given the tradition of lesson study, mathematics educators have often been challenged by school teachers who deeply engaged in lesson study whether "research results" provided by researchers are useful for improving classroom practices.

There is another role of an outside expert. Namely, the expert can be as a collaborator and a contributor who joins the process of planning, implementing, and reflecting on a research lesson together with the group of teachers. In this case, an outside expert can be seen as a part of the community of practice, not an authority that has come from outside the school.

Studying and Improving of Teaching and Learning of Mathematics

Working with and Learning from Teachers

There has been a concern in mathematics education community, at least in Japan, with the relevance and usefulness of the results of research. Also, it is often argued that there is a long-standing issue of the separation between research and practice in education community, in general, and mathematics education community, in particular. Given the tradition of lesson study, it is very important for Japanese mathematics educators to work with and to learn from teachers. The relationship between research and practice may be seen differently in other countries.

Among five crucial relationships in research in mathematics education that he identified as important, Bishop (1992) lists the relationship between the teacher and the researcher as a particularly significant one. He characterizes three theoretical traditions, pedagogue, empirical scientist, and scholastic philosopher, and each tradition has the goal of enquiry, role of evidence, and role of theory in different ways. If the goal of study is direct improvement of teaching, and role of theory is accumulated and sharable wisdom of expert teachers, the study is in the pedagogue tradition. The evidence presented is usually highly selective and exemplary here. He noted that in both empirical scientist and scholastic philosopher traditions, the roles of teacher and researcher are incompatible. He wrote:

> The teacher is the practitioner whose practice, it is felt, needs to be informed by the research of the researcher. So, we have a clear hierarchy involved, with the researcher informing the teacher, but not necessary vice versa (p.717).

Bishop (1992) noted that the analysis and study of mathematics teaching from both these perspectives can make the teacher an object – not a subject – in the research. The role of outside expert who is invited to Lesson Study as an advisor can be considered in light of this hierarchy. The expert can facilitate the post-lesson discussion and/or makes comments on the possible improvement of lesson from a broader viewpoint. Or, being involved in Lesson Study can invite the consequence for the researcher being just an outside authority coming into the classroom to direct the group of teachers and develop theories for them, if the researcher is not aware of their role and does not understand the significance of working with and learning from teachers.

There is a possibility that the gap may become larger between the efforts in mathematics education research and the problems tackled by the teachers. Lerman (1990) noted that to make separation between those who practice, and those who develop theories for the practitioners, is not an adequate characterization of the business of good teaching. Also, Wiliam & Lester (2008) wrote as follows.

> We promote a renewal of a sense of purpose for our research activity that seems to be disappearing, namely, a concern for making real, positive, lasting changes in what goes on in classrooms. We suggest that such changes will occur only when we become more aware of and concerned with sharing of meaning across researchers and practitioners. (p. 38)

One of the major characteristics of Lesson Study is that, as the historical development illustrates, the approach was initiated by a group of teachers to improve teaching and learning in classrooms. The problem tackled by teachers has rooted in the reality of the school and the classroom. Research questions can be posed in responding to problems derived from teachers' works. In working with teachers and learning from teachers in Lesson Study, mathematics educators can have an opportunity for identifying implicit wisdom and accommodating craft knowledge to scholarly knowledge. Ellerton & Clement (1994) raised the issues to be confronted by the international mathematics education research community and noted the need to demonstrate a greater respect for the wisdom of practice deriving from the classroom knowledge and the action-oriented theories of practicing teachers of mathematics in different countries around the world. As Lesson Study has become a focus of attention in countries including Australia, Malaysia, and the United States, for example, we have more chances to learn from the voice of teachers.

Studying One Lesson Intensively

Lesson study usually is conducted in a few classrooms and then its results have very limited validity in the beginning. If those results are shared among other teachers, and replicated in many other classrooms in different schools, they could increasingly obtain higher validity and relevance. Therefore, a larger community of teachers who wish to learn from other teachers are key for the success of lesson study with certain generalizability. The key is a particular focus on aspects of developing a lesson. Participating in lesson study provides opportunities for teachers to learn shared values of teaching mathematics as a school subject, with and from experienced colleagues. Such values are related to teachers' views on a 'good' lesson and an 'excellent' teacher.

Ruthven & Goodchild (2008) discuss the significant of craft knowledge, the professional knowledge used by teachers in their day-to-day classroom teaching; action-oriented knowledge which is not generally made explicit by teachers, which they may indeed find difficult to articulate, or which they may even be unaware of using. Orchestrating scientific goal of building theories and the goal of improving of teaching and learning of mathematics is the key to a synergy between research and the more practical knowledge of the craft of teaching. Lewis et al. (2006) argues that development of a descriptive knowledge base, explication of an innovation's mechanism, and iterative cycles of improvement research. By studying a good lesson continuously, practical knowledge tested against the classroom practices of many teachers for many years is accumulated. Here research can inform practice by providing a tool for explaining in broader views or providing teachers categories for describing the meaning of their vocabulary.

To develop better understandings of educational activities in local contexts, researchers need to consider the underlying values and beliefs shared by that local community (Shimizu & Williams, 2012). It should be noted, for instance, that valuing students' thinking as necessary elements to be incorporated into the development of a lesson is key to the approach taken by Japanese teachers (Shimizu, 2009). Describing anticipated students' responses, is, amongst other activities, key to lesson planning because the whole-class discussion depends on the solution methods the students actually come up with. Having a very clear sense of the ways students are likely to think about and solve a problem prior to the start of a lesson makes it easier for teachers to know what to look for when they are observing students work on the problem.

Mary Hesse (1980) pointed out that any theory is value-laden, and that an awareness of the value behind a theory is crucial, in social science, in particular. In any science, criteria for theory choices contain value judgments, but those values tend to be filtered out as theories are developed. We need to be conscious that educational theories are value-laden and that those values derived in part from our experience with educational practices in a broader sense. Japanese mathematics educators who are engaged in Lesson Study are interested in "good" or "successful" classroom practice. The tendency is derived from their experiences with Lesson Study that has the goal of building theories and the goal of improving teaching and learning of mathematics at the same time.

Studying Values Attached to Teachers' Behavior

The countries in East Asia in the Confucian Heritage Culture certainly share commonalities, and mathematics classroom practices in this region exhibit similarities in various aspects of teaching and learning (Leung, Park, Shimizu, & Xu, 2015). However, classroom practices are embedded in their particular cultural and historical backgrounds. Thus, when we look into mathematics classrooms in different countries, even within East Asia, we immediately realize the diversity of practices in teaching and learning. Teachers in different countries or regions behave differently when teaching the same mathematical content, and consequently students in each country learn the topic differently. The key to understand the similarities and differences are the values attached to teaching and learning in classrooms.

When we compare teachers' behavior in classrooms between Tokyo and Shanghai, significant differences appeared (Shimizu, 2017). While teachers from both countries highlighted and summarized the main points of the lesson, the Japanese teacher summed things up even in the middle of the lesson, while the Shanghai teachers mainly focused on mathematical content taught in their lessons. Japanese mathematics teachers often organize an entire lesson around the multiple solutions to a single problem, in a whole-class instruction mode. Since the teachers emphasize finding alternative ways to solve a problem, Japanese classes often consider several strategies. It would be natural, then, for the classes to discuss problem-solving strategies from various viewpoints, such as mathematical correctness, brevity, efficiency, and so on. A teaching style with an emphasis on finding many ways to solve a problem naturally invites certain summarizing behaviors. If the whole-class discussion reaches a point of thinking retrospectively about what they have considered, even in the middle of the lesson, a teacher may have Matome.

There seem to be supporting conditions and shared beliefs among the Japanese teachers that justify often having Matome at the end of the lessons or at the end of sub-units. Every lesson has an opening, a core, and a closing. This is particularly the case for Japanese lessons, which begin and end with the students bowing. Teachers regard their lessons as dramas, which have a beginning and leads to a climax. In fact, one of the characteristics of Japanese teachers' lesson planning is the deliberate structuring of the lesson around a climax, "Yamaba" in Japanese (Shimizu, 2006, p. 143). Most teachers think that a lesson should have a highlight. The essential point is that Japanese mathematics teachers have access to a sophisticated and coherent vocabulary that allows them to discuss the components of the mathematics lesson, reflect on their teaching, and offer and receive advice. This structure provides a powerful tool for pre-service and in-service teacher education. These pedagogical terms are learned by teachers through participation in Lesson Study, which is a Japanese approach to improving teaching and learning mathematics through a particular form of activities by a group of teachers, including planning, implementing, and discussing actual lessons (Shimizu, 1999). It is important to note that these pedagogical terms are used in the discourse of particular contexts embedded in a whole system, to describe a particular style of teaching. Japanese mathematics teachers often organize an entire lesson by posing just a few problems, and focus on students' various solutions to them. Educating teachers about lesson plans includes helping them with key pedagogical terms.

Given the tradition of lesson study, it is very important for Japanese mathematics educators to work with and to learn from teachers. With the study of classroom instruction researchers can have a manifestation of values attached to teaching and learning in classroom, as well as elements and structure of classroom practices. The manifestation in turn can provide an endorsement to the practical approaches taken by teachers to the improvement of classroom instruction. By participating in Lesson Study, mathematics educators can have a window through which researchers can “touch” the issues in the practices rooted in the contexts where teachers working.

Concluding Remarks

For more than a decade, educators and researchers in the field of mathematics education have been interested in Lesson Study as a promising source of ideas for improving education. For a Japanese mathematics educator who has been deeply involved in lesson study for more than two decades, this ‘movement’ has provided an opportunity for reflecting on how Lesson Study as a cultural activity works as a system embedded in the entire society as well as local community of teachers with shared values and beliefs. It is argued that orchestrating the scientific goal of building theories and the goal of improving of teaching and learning of mathematics is the key to a synergy between research and the more practical knowledge of the craft of teaching.

International comparative studies have started to recognize the need to focus more on existing diverse voices and perspectives among members of the local communities. As the globalization and internationalization of research activities has continued to expand, the field of mathematics education research has clearly shown the diversification of perspectives on teaching and learning in classrooms embedded in local contexts. As the classroom practices are socially and culturally situated, and shared values and beliefs by teachers are key for continuous development and of the quality teaching, research in mathematics education is socially and culturally situated. Continuous working with, and learning from, teachers raises the issues and shapes the research questions originated in the efforts of improvement of teaching and learning mathematics in the classroom.

References

Bishop, A. (1992). International perspectives on research in mathematics education. In D. A. Grouws (ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clarke, D. J., Keitel, C. & Shimizu, Y. (Eds.) (2006). *Mathematics classrooms in twelve countries: The insider’s perspective*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Clarke, D. Mesiti, C., O'Keefe, C. Jablonka, E. Mok, I.A.C. & Shimizu, Y. (2007) Addressing the challenge of legitimate international comparisons of classroom practice. *International Journal of Educational Research.46*, 280-293.

Ellerton, N. F. & Clement, M.A. (1994). Transforming the international mathematics education research agenda. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (eds.) *Mathematics education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fernandez, C. & Yoshida, M (2004). *Lesson Study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates,

Hesse, M. B. [1980]: *Revolutions and Reconstruction in the Philosophy of Science*, Brighton: Harvester Press.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K.B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chiu, A.M.-Y., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., Manaster, C., Gonzales, P., and Stigler, J. (2003*). Teaching mathematics in seven countries ： Results from the TIMSS 1999 Video Study*. U.S. Department of Education. Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Hirabayashi, I. (2002). Lesson as a drama and lesson as another form of thesis presentation. In H. Bass, Z. P. Usiskin & G. Burrill (Eds.), *Studying classroom teaching as a medium for professional development. Proceedings of a U.S. - Japan workshop*. Washington, DC: National Academy Press.

Huang, R. & Shimizu,Y. (2016). Improving teaching, developing teachers and teacher developers, and linking theory and practice through lesson study in mathematics: An international perspective. *ZDM- Mathematics Education, Vol.48(4)*

Japan Society of Mathematical Education (2010). *The handbook of research in mathematics education*. Tokyo: Toyokan (in Japanese).

Leung, F.K.S., Park, K., Shimizu, Y., & Xu, B. (2015). Mathematics education in east Asia. In S.J. **Cho** (ed.) *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Challenges* (pp.123-143). New York, NY: Springer.Lewis, C., & Tsuchida, I. (1998). A lesson like a swiftly flowing river: Research lessons and the improvement of Japanese education. *American Educator, 22*(4).

Lewis, C., Perry, R., & Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of lesson study. *Educational Researcher, 35(3),* 3-14.

Li, Y., & Shimizu, Y. (eds.). (2009). Exemplary mathematics instruction and its development in East Asia. ZDM—The International Journal of Mathematics Education 41(3), (Special Issue).

Makinae, N. (2010). The Origin of Lesson Study in Japan. Y. Shimizu, Y. Sekiguchi & K. Hino (eds.) The proceedings of the 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education: In search of excellence in mathematics education, Tokyo: Japan Society of Mathematical Education.

Malara, N.A. & Zan, R. (2008) The complex interplay between theory in mathematics education and teachers' practice. In L.D. English (ed). *Handbook of international research in mathematics education (second edition).* New York, NY: Routledge.

Minato, S. (2002). Learn from Japanese mathematics education: Jugyou-kenkyuu as becoming the focus in the United States. A translation with annotations of The teaching gap (Stigler & Hiebert, 1999). Tokyo: Kyoiku Shuppan.

Ruthven, K. & Goodchild, S. (2008) Linking researching with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowledge. In L.D. English (ed). *Handbook of international research in mathematics education (second edition). New York, NY. Routledge*.

Sekiguchi, Y. (1994). Mathematics education research as socially and culturally situated. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (eds.) *Mathematics education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sekiguchi, Y. (2015). The development of mathematics education as a research field in Japan. In B. Sriraman, J. Cai, K-H. Lee, L. Fan, Y. Shimizu, C.S Lim & K. Subramaniam (eds.) *The first sourcebook on Asian research in mathematics education: China, Korea, Singapore, Japan, Malaysia and India*. Information Age Publishing.

Shimizu, Y. (1999). Aspects of mathematics teacher education in Japan: Focusing on teachers' role. *Journal of Mathematics Teacher Education. 2(1)*, 107-116.

Shimizu, Y. (2002) Lesson study: what, why, and how? In H. Bass, Z. P. Usiskin & G. Burrill (eds.) *Studying classroom teaching as a medium for professional development: Proceedings of a U.S.-Japan workshop*. Washington DC: National Academy Press, 53-57, 154-156.

Shimizu, Y. (2006) How do you conclude today's lesson? The form and functions of "Matome" in mathematics lessons. In D. Clarke, J. Emanuelsson, E. Jablonka & I. Ah Chee Mok (eds.) *Making connections: Comparing mathematics classrooms around the world*. Rotterdam: Sense Publishers.

Shimizu, Y. (2008). The role of outside expert in lesson study in Japan. Paper presented at the interactive symposium, "Teacher-Academic partnerships: International approaches to teacher professional development", Annual Meeting of the American Educational Research Association (New York) March 27.

Shimizu, Y. (2014). Lesson study in mathematics education. In S. Lerman (ed.) *Encyclopedia of mathematics education*. New York, NY: Springer

Shimizu, Y. (2017). Uncovering the label "Asian" in international comparative studies of mathematics education. In Ji-Won Son, Tad Watanabe and Jane-Jane Lo (eds). *What matters? Research trends in international comparative studies in mathematics education.* (pp. 83-94), Springer.

Shimizu, Y. & Kaur, B. (2013) Learning from similarities and differences: a reflection on the potentials and constraints of cross-national studies in mathematics. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, Vol.45(1), 1-5.*

Shimizu, Y., Kaur, B., Huang, R., & Clarke, D. J. (eds.). (2010). *Mathematical tasks in classrooms around the world.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Shimizu, Y. & Williams, G. (2012). Studying learners in intercultural contexts. In M. A. (Ken) Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, and F. Leung (eds.) *Third international handbook of mathematics education*, New York, NY: Springer.

Sliver, E.A. & Herbst, P. G. Theory in mathematics education scholarship. In F. K. Lester (ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics & Information Age Publishing.

Stigler, J. W., Gallimore, R., & Hiebert, J. (2000). Using video surveys to compare classrooms and teaching across cultures: Examples and lessons from the TIMSS and TIMSS-R video studies. *Educational Psychologist, 35(*2), 87–100.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York, NY: Free Press.

Takahashi, A. (2008). Beyond show and tell: Neriage for teaching through problem-solving: Ideas from Japanese problem-solving approaches for teaching mathematics. *Paper presented at TSG 19: Research and Development in Problem Solving in Mathematics Education*, 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Mexico.

Wiliam, D. & Lester, F. K. (2008). On the purpose of mathematics education research: Making productive contributions to policy and practice. In L. English (ed.) *Handbook of international research in mathematics education (second edition)* (pp. 32-48). New York, NY: Routledge.