Educación Matemática en las Américas VII

Enseñanza Científica y Tecnológica Colección de Documentos (ECTCD)

N.° 1 Glossary of Terms used in Science and Technology Education. 1981 (English)

N.° 2 Methodologies for Relevant Skill Development in Biology Education. 1982 (English)

N.° 3 Nutrition Education: Curriculum Planning and Selected Case Studies. 1982 (English) (Reprint in Nutrition Education Series N.° 4)

N.° 4 Technology Education as part of General Education. 1983 (English and French)

N.° 5 Nutrition Education: Relevance and Future. 1982 (English) (Reprint in Nutrition Education Series, N.° 5)

N.° 6 Chemistry Teaching and the Environment. 1983 (English)

N.° 7 Encouraging Girls into Science and Technology Education: Some European Initiatives. 1984 (English)

N.° 8 Genetically-Based Biological Technologies. 1984 (English)

N.° 9 Biological Systems, Energy Sources and Biology Teaching. 1984 (English)

N.° 10 Ecology, Ecosystem Management and Biology Teaching. 1984 (Reprint 1986) (English)

N.° 11 Agriculture and Biology Teaching. 1984 (English)

N.° 12 Health Education and Biology Teaching. 1984 (English)

N.° 13 The Training of Primary Science Educators - A Workshop Approach. 1985 (English)

N.° 14 L'Économie sociale familiale dans le développement rural. 1985 (French)

N.° 15 Human Development and Evolution and Biology Teaching. 1985 (English)

N.° 16 Assessment: A Practical Guide to Improving the Quality and Scope of Assessment Instruments. 1986 (English)

N.° 17 Practical Activities for Out-of-School Science and Technology Education. 1986 (English)

N.° 18 The Social Relevance of Science and Technology Education. 1986 (English)

N.° 19 The Teaching of Science and Technology in an Interdisciplinary Contex. 1986 (English)

N.° 20 Mathematics for All. 1986 (English, French in press)

N.° 21 Science and Mathematics in the General Secondary School in the Soviet Union. 1986 (English)

N.° 22 Leisure, Values & Biology Teaching. 1987 (English and French)

N.° 23 Use of Sea and its Organisms. 1987 (English)

N.° 24 Innovations in Science and Mathematics Education in the Soviet Union. 1987 (English)

N.° 25 Biology and Human Welfare. Case Studies in Teaching Applied Biology. 1988 (English)

N.° 26 Sourcebook of Science Education Research in the Caribbean. 1988 (English)

N.° 27 Pour un enseignement intégré de la science et de la technologie : trois modules. 1988 (French)

N.° 28 Microbiological Techniques in School. 1988 (English)

N.° 29 Games and Toys in the Teaching of Science and Technology. 1988 (English and French)

N.° 30 Field Work in Ecology for Secondary Schools in Tropical Countries. 1988 (English)

N.° 31 Educational Materials Linking Technology Teaching with Science Education: Technology in Life. 1988 (English)

N.° 32 Evaluation and Assessment in Mathematics Education. 1989 (English)

N.° 33 Systems Thinking in Biology Education. 1989 (English)

N.° 34 Base physique de l'électronique dans l'enseignement secondaire : module méthodologique. 1989 (French)

N.° 35 Mathematics, Education and Society. 1989 (English)

N.° 36 Bibliography in Integrated Science Teaching. 1990 (English)

1 | 2

3 | 4

Fotografías de la cubierta

1. Foto Unesco/Paul Almasy
2. Foto UNATIONS
3. Foto Unesco/D. Bahrman
4. Derechos reservados de la fotografía

Enseñanza Científica y Tecnológica
Colección de Documentos, N.° 37

Educación Matemática en las Américas VII

Educación Matemática en las Américas VII

Actas de la Séptima Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática

CIAEM
Comité Interamericano para la Enseñanza de la Matemática

División de Enseñanza de las Ciencias, Enseñanza Técnica y Educación Ambiental

UNESCO

ED-90/WS-17

París, 1990

PROLOGO

El presente volumen constituye las Actas de la Séptima Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática, realizada en Santo Domingo (República Dominicana) del 12 al 16 de julio de 1987.

Las Conferencias anteriores tuvieron lugar en Bogotá (1961), Lima (1966), Bahía Blanca (1972), Caracas (1975), Campinas (1979) y Guadalajara (1985). Estas Conferencias fueron organizadas por el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM). Han sido publicadas cinco Actas correspondientes a las cinco primeras Conferencias con el título de Educación Matemática en las Américas I, II, III, IV y V. Los dos primeros volúmenes fueron publicados por el Teachers College of Columbia University (New York). Los volúmenes III, IV y V fueron publicados por la Unesco a través de su Oficina Regional para América Latina y El Caribe. Este volumen ha sido publicado por la Unesco.

Los idiomas oficiales de la VII CIAEM fueron el español, el portugués y el inglés. Se ofreció traducción simultánea durante las sesiones de apertura y clausura, las conferencias generales, los paneles y algunas sesiones de comunicaciones orales. En esta publicación se ha mantenido el idioma original en que cada participante presentó su trabajo.

La publicación de las Actas de la Conferencia es tan importante como la Conferencia misma de manera que las ideas expresadas allí no se circunscriban a los distinguidos participantes de la VII CIAEM sino que alcancen a un mayor número de Educadores Matemáticos de todos los niveles.

Es por esto que en nombre del Comité Interamericano de Educación Matemática expresamos a la Unesco nuestro mayor agradecimiento.

Eduardo Luna y Sarah González
Editores

PREFACIO

La Unesco se complace en proseguir su cooperación con el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM), iniciada hace tres decenios. La Unesco ha prestado un modesto respaldo financiero a todos los congresos del CIAEM, aunque en cuantías inversamente proporcionales a las fechas en que se han celebrado. Con todo, la impresión y distribución gratuita por la Unesco de las actas de cuatro de esos congresos han constituido probablemente su aportación más importante a la educación matemática en América Latina.

La Unesco considera altamente prioritario el intercambio de informaciones sobre educación matemática. Los siete volúmenes de Estudios en educación matemática y la obra Educación matemática en las Américas han sido redactados para facilitar materiales informativos a las personas encargadas de la enseñanza de las matemáticas.

En 1989 falleció el Presidente honorario del CIAEM, profesor Marshall Stone, cuyo recuerdo deseamos conmemorar en esta ocasión. El profesor Stone fue asimismo Presidente del Comité Internacional de Educação Mathemática de 1959 a 1962, años muy fructuosos para la educación matemática, y desempeñó un papel destacado en la creación de los comités regionales del CIEM, entre ellos el CIAEM. Profesor de matemáticas de la Universidad de Chicago, fue también el primer presidente del CIAEM. Deseamos reconocer y agradecer su contribución a la educación matemática en todo el mundo.

La Unesco desea expresar su agradecimiento a Eduardo Luna y Sarah González, organizadores de la Séptima Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática y editores de estas actas, así como a los muchos profesores de matemáticas que presentaron ponencias en la reunión. Las opiniones que a continuación se expresan son, desde luego, las de sus autores y no representan forzosamente una toma de posición por parte de la Unesco ni de los editores.

CONTENIDO

PARTE I DISCURSOS DE APERTURA. 1

1. Palabras de Bienvenida, por Monseñor Agripino Núñez Collado, Rector de la Universidad Católica Madre y Maestra. 1

2. Palabras de Apertura, por el Doctor Ubiratán D'Ambrosio, Presidente del Comité Interamericano de Educación Matemática. 3

3. Palabras del Doctor Eduardo Luna, Presidente del Comité Organizador Local. 6

PARTE II CONFERENCIAS GENERALES. 9

1. Aprendizaje Experimental de las Matemáticas, por Enrique Calderón. (Fundación Arturo Rosenblueth). 9

2. Viejos Problemas, Nuevas Realidades, por Lelis Páez. (Universidad Central de Venezuela). 19

3. Estudios Comparativos de la Enseñanza de Matemática a Nivel Medio: Un Aporte al Caribe, por Pedro Suárez. (Universidad Autónoma de Santo Domingo). 33

PARTE III PANELES. 82

PANEL A: *Integración del Contexto Sociocultural en la Enseñanza de la Matemática.* 82

1. Luis Carlos Arboleda: Historia Social y Formación de Cultura Científica. (Universidad Del Valle). 82

2. Roberto Ribeiro Baldino: Assimilação Solidária no 3° Grau: Por uma Universidade sem Provas. (Instituto de Matemática-Universidade Federal do Rio de Janeiro e G-RIO). 96

3. Angel Ruíz Zúñiga: Matemáticas: Una Reconstrucción Histórico-Filosófica para una Nueva Enseñanza. (Universidad de Costa Rica). 111

4. Martha Villavicencio: Integración del Contexto Socio Cultural para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en Poblaciones Indígenas: Experiencia Peruana. (Instituto Nacional de Investigación y Desarrollo de la Educación (INIDE)). 122

PANEL B: *Cómo Desarrollar en los Estudiantes Habilidades para Resolver Problemas.* 130

1. Rodney C. Bassanezi: Modelagem como Metodologia de Ensino de Matemática. (Universidade Estadual de Campinas). 130

2. Cipriano A. Cruz G.: Cómo Desarrollar en los Estudiantes Habilidades para Resolver Problemas. (Universidad Central de Venezuela). 156

3. Antonio José Lopes: Desmi(s)tificação do Conhecimento Matemático pela Construção de Linguagem e Modelos Matemáticos-Experiência e Produção de Matemática en Sala de Aula. (Sociedade de Educação Matemática / Grupo de Pesquisa em Resolução de Problemas). 169

4. Sesión de Preguntas y Respuestas. 182

PANEL C: *Usos Innovadores de las Calculadoras y las Computadoras en la Enseñanza de la Matemática.* 191

1. Jorge López: Usos Innovadores de las Calculadoras y las Computadoras en la Enseñanza Matemática. (Universidad de Puerto Rico). 191

2. Carlos A. Mansilla: Computadoras y Resolución de Problemas Matemáticos. (Facultad Regional de Resistencia, Universidad Tecnológica Nacional). 196

3. Fidel Oteiza M.: El Aprendizaje Matemático y la Programación en Lógica. (Universidad de Santiago de Chile). 201

4. Richard Wolfe: Learning Mathematics Using Computers Outside the Mathematics Classroom. (The Ontario Institute for Studies in Education). 222

5. Sesión de Preguntas y Respuestas. 226

PANEL D: *Cómo Mejorar la Enseñanza de la Geometría en las Escuelas Primarias y Secundarias.* 230

1. Emma Castelnuovo: La Enseñanza de la Geometría. (Primer Ciclo Secundario 11 - 14 años). 230

2. Luiz Roberto Dante: Cómo Mejorar la Enseñanza de la Geometría en las Escuelas Primarias y Secundarias. (Universidade Estadual de São Paulo). 234

3. Alan Hoffer: Geometría, Investigación y Computadores. (Boston University). 243

PARTE IV GRUPOS DE TRABAJO. 254

1. Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática y Realidad Sociocultural, coordinado por (Genamares). 254

2. Enseñanza a través de Resolución de Problemas, coordinado por Antonio José Lopes y Pilar Martínez. 255

3. Formación de Profesores de Matemática en Servicio y Factibilidad de Cooperación Regional, coordinado por Lelis Páez. 258

4. Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), coordinado por Lilia del Riego y Gontran Ervynck. 260

PARTE V COMUNICACIONES ORALES. 268

1. Alberto Alonzo, et al.: Libros de Texto para Escuelas Secundarias del Estado de México. 268

2. Daniel Báez, Felix Lara : Método para Explicar los Gráficos de Funciones Trigonométricas y los Gráficos de las Superficies Cilíndricas y Cuádricas. 269

3. Roberto Ribeiro Baldino: Asimilación Solidaria en 3° Grado: Por una Universidad sin Pruebas. 269

4. Ary Vieira Barradas: Analise de Erros e Habilidades nas Soluções de Problemas. 270

5. Rodney Carlos Bassanezi: Modelagem Matemática como Estrategia de Ensino num Curso de Reciclagem de Professores. 271

6. Lucilia Bechara Sanchez: Enseñanza y Aprendizaje del Concepto de Semejanza. 271

7. Ana Maria Beltrame, Marli Basso: Da Universidade a Escola: Relato de uma Experiência. 273

8. Eleni Bisognin,Vanilde Bisognin: Analise de uma Proposta Interdisciplinar de Ciências e Matemática para as Escolas de 1° Grau de Santa Maria-Rio Grande do Sul-Brasil. 273

9. Vanilde Bisognin, Eleni Bisognin: Vivendo e Compreendendo a Realidade- uma Experiência Concreta. 274

10. Henry Borenson: The Teaching of Algebraic Concepts to Elementary School Students. 274

11. Diva Maria Brêtas de Noronha: Implantação de uma Metodologia Ativa nas Escolas Oficiais do Ensino Regular do 1° Grau do Estado do Rio de Janeiro. 275

12. Aristides Camargos Barreto: Em Busca de uma Educação Matemática Transformadora. 276

13. Rómulo Campos: La Transformación de Problemas y la Construcción de Conocimientos Matemáticos por los Alumnos. 279

14. Rafael Cardona Oviedo, et al. : Proyecto 30-ST. Una Acción Capacitadora. Departamento del Quindio. República de Colombia. 280

15. Emma Castelnuovo: Matemática y Realidad: Unos Ejemplos. ...280

16 Fernando Castro Gutiérrez: Aproximación y Linealidad: Un Primer Enfoque a través del Laboratorio de Matemáticas. 282

17. Fernando Cerdán, Luis Puig: La Resolución de Problemas en el Currículum de Formación de Profesores. 282

18. Alberto Correa: Matefobias. 283

19. Cipriano Cruz, María Itriago: Conceptos, Resultados y Técnicas. Un Recurso para Mejorar la Comprensión en Matemáticas. 284

20. Linda Davenport: Communicating About Mathematics: Language Proficiency, Language Use, and Mathematical Understanding. 285

21. Vânia Maria Pereira dos Santos, e outros: Matemática e Realidade do Aluno. 285

22. Beatriz S. D'Ambrosio: The Dynamics and Consequences of the Modern Mathematics Reform Movement for Brazilian Mathematics Education. 286

23. Gontran Ervynck: Injective and Surjective Maps: Cognitive Acquisition of Some Aspects of the Function Concept. 287

24. Manuel Fernández Reyes: Análisis de Algunas de las Causas del Fracaso en Matemáticas. 287

25. John A. Fossa: Informal Analysis of Techniques of Demonstration for Students of Formal Disciplines. 288

26. John A. Fossa, Manuel Claudemir S. Caldas: An Integrated Workshop for Primary School Teachers of Mathematics. 288

27. José M. Galdón, y otros: Uso Sistemático de Tecnología Educativa Audiovisual en la Enseñanza de las Matemáticas. 289

28. Claude Gaulin: Perfeccionamiento a Distancia de Docentes de Matemática de la Escuela Primaria: Un Programa Exitoso Iniciado en 1978 en Canada. 290

29. Joaquín Giménez: Influencias Mutuas entre: Estudio de las Fracciones, Lenguaje Algebraico y Geometría. 290

30. Janice M. Green: Mathematics for the Linguistic Learner. 291

31. Clara Lucía Higuera Acevedo: La Yupana Incaica en la Escuela Elemental. 292

32. Antonio José Lopes: Una Propuesta de Desmi(s)tificación del Conocimiento Matemático por la Construcción de Lenguaje y Modelos Matemáticos-Experiencia y Producción de Matemática en el Aula. 292

33. Antonio José Lopes: La Experiencia Matemática en el Aula, una Propuesta para la Enseñanza-Aprendizaje de Algebra. 293

34. Jorge M. López: Demostraciones Matemáticas con la Ayuda del Computador: Un Ejemplo Elemental. 293

35. Jorge M. López: La Enseñanza de la Matemática: Un Punto de Vista Pragmático. 294

36. Eduardo Luna, Sarah González de Lora: Estudio sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática en la República Dominicana. 294

37 Fernando Manzano: Aplicaciones del Cálculo Variacional de Euler en la Solución de Problemas de Bernoulli. 297

38. Charles J. Martin: Educational Activities for High School Mathematics Teachers and Students at Western Carolina University. 298

39. Charles J. Martin : A Developmental Mathematics Program at Western Carolina University. 298

40. Charles J. Martin: Computer Competencies for Teachers in North Carolina. 299

41. Maria do Carmo D. Mendonça: Formulação e Resolução de Problemas: Uma Contribuição para a Pedagogia da Matemática. 299

42. Michael H. Millar: Geometric Transformations: A Powerful Tool for Understanding and Applying School Geometry. 301

43. Philip R. Montgomery: Grade Success for Students in a Keller-Type Program. 301

44. Julio Mosquera: El Ordenador en la Escuela. 302

45. José Luis Muñiz, Julio César Silvera: Secciones Planas de un Cono (Cónicas). 303

46. Lilian Nasser (Projeto Fundão): Resolução de Problemas--Uma Análise de Fatores Envolvidos. 303

47. Teresa Navarro de Mendecuti: Nuevo Plan de Estudios para Escuelas Normales. 304

48. José Ambrosio Ochoa Olvera: La Abstracción-Generalización en el Proceso Matemático. 304

49. Arthur B. Powell, Martin R. Hoffman: Working with Underprepared Post-Secondary Students in a University Setting. 305

50 Israel Quiñones Santiago: Evaluación: Pruebas de Criterio y Normalizadas. 306

51. Ana Helvia Quintero: El Rol del Conocimiento Semántico en el Desarrollo de la Demostración Matemática. 306

52. Nicolás Ramos Gandía: Cómo Enseñar los Sistemas Numéricos. 308

53. Boris D. Rakover: The Functional Approach in Mathematical Thinking. 308

54. Carlos Rondero Guerrero, y otros: Implicaciones de la Dependencia Tecnológica en la Enseñanza de la Matemática y la Informática en el Instituto Politécnico Nacional. 309

55. Delia Norma Sanguinetti de Saggese, Alicia Torelli de Nocera: Acciones Desarrolladas en el Subprograma de Actualización de la Enseñanza de la Matemática. 309

56. Maria de Fátima Saraceno e outros : A Geometria na Escola Primaria. 310

57. Analúcia Dias Schliemann, y otros: Constructing Written Algorithms a case study. 310

58. Patrick B. Scott: La Elaboración de Pruebas de Matemáticas para el Nivel Primario Rural de Guatemala: Desafíos, Exitos, Fracasos, Resultados. 311

59. Patrick B. Scott: La Etnomatemática: Un Resumen de la Literatura, Ejemplos de su Práctica, Direcciones para el Futuro. 312

60. Eduardo Sebastiani Ferreira: Construcción de una Casa Indígena-Una Propuesta de Enseñanza de Matemática. 313

61. Myriam Steinback: El Uso de Calculadoras para Universitarios con Deficiencias Matemáticas. 314

62. Lucia Tinoco: La Enseñanza de los Números Decimales. 315

63. Lucia Tinoco: Avaliação de Proposta Didática para o Ensino de Frações. 316

64. Lucia Tinoco/Vânia Santos: Proyecto Fundão-Desafío para la Universidad. 317

65. Irvin E. Vanco: Some Results on Iterated Sums of the Digits of Multiples of Seven. 318

66. Nelly Vázquez de Tapia: Relación, Integración y Síntesis, Factores Determinantes de una Mejor Comprensión en Matemática. 318

67. Alicia Villar: La Matemática y el Mundial. 319

68. Alicia Villar, y otros: Polígonos. 319

PARTE VI EXPOSICIONES Y POSTERS. 320

PARTE VII COMITE INTERAMERICANO DE EDUCACION MATEMATICA. 322

COMITE ORGANIZADOR LOCAL DE LA VII CIAEM. 323

PARTE I
DISCURSOS DE APERTURA

PALABRAS DE BIENVENIDA POR MONSEÑOR AGRIPINO NUÑEZ COLLADO, RECTOR DE LA UNIVERSIDAD CATOLICA MADRE Y MAESTRA

En nombre de la Universidad Católica Madre y Maestra y mío personal, me es muy grato dar la más cordial bienvenida a los distinguidos participantes en esta VII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, que por primera vez se celebra en el Caribe, particularmente a los directivos del Comité Interamericano de Educación Matemática, en la persona de su Presidente, el ilustre académico Ubiratán D'Ambrosio y a los distinguidos delegados de países hermanos que acuden a esta Ciudad Primada de América a ofrecernos lo mejor de su saber y a enriquecernos con sus experiencias.

Agradecemos la honradora presencia del señor Secretario de Estado de Educación, Bellas Artes y Cultos, de los distinguidos invitados, de los representantes de las universidades nacionales y de cuántos han acudido a esta convocatoria que, estamos seguros, servirá para un mejor conocimiento respecto a la realidad de la enseñanza de la matemática en nuestro Continente.

Y, ¡qué bueno y auspicioso que este encuentro se realice en el mismo solar en donde se fundó la primera escuela del Nuevo Mundo, la primera universidad y donde se alabara a Dios, también por primera vez, ante los ojos atónitos de los moradores de estas tierras! Tierra que fue cuna para la difusión de la luz del Evangelio y que a causa de la actividad cultural que en ella se vivió, fue llamada con justeza la "Atenas del Nuevo Mundo".

Pero de aquella Atenas bucólica a la realidad de hoy, encontraremos hechos y circunstancias preocupantes, particularmente, en el campo de la educación y a otros niveles.

En el caso específico de la matemática, el Segundo Estudio Internacional de Matemática en el que nuestra Universidad tuvo el privilegio de participar como contrapartida nacional, reveló grandes deficiencias en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la República Dominicana. Con pena nos enteramos de que el rendimiento de nuestros niños en el octavo grado fue menor que el de todos los países que participaron en ese estudio. Aun en nuestras mejores escuelas, el promedio no llegó al rendimiento nacional de los países desarrollados.

La situación es, a todas luces, preocupante porque no se puede pensar en el desarrollo de una nación sin un desenvolvimiento equilibrado de los aspectos económicos, políticos, culturales y educacionales. Un sistema de enseñanza y aprendizaje deficiente de la matemática hace difícil, por no decir imposible, que se pueda contar con los científicos requeridos para un desarrollo acorde con las realidades propias. No es de extrañar, en este sentido, que Japón, cuyo progreso está a la vista de todos, tuviera el rendimiento más alto en matemática en el estudio anteriormente citado.

Estoy seguro de que todos estamos conscientes de que a pesar de contar con una tierra pródiga, de gran potencial, el desarrollo del país no será posible sin recursos humanos de alta calidad, pues, como ha dicho un ilustre profesor, "para el bienestar de sus pueblos, en el mundo competitivo actual, las naciones deben explotar todos sus recursos, desde los hidrocarburos y minerales de su subsuelo, la agricultura y la ganadería de sus campos y la energía de sus ríos, de sus vientos o de su sol, hasta la inteligencia de sus habitantes. Esto último en grado superlativo. La inteligencia se encuentra repartida entre todos los habitantes pero necesita ser cuidada y protegida para que se desarrolle plenamente... La educación es, precísamente, el arte de cuidar el desarrollo de la inteligencia y los pueblos de hoy, si no tienen la inteligencia desarrollada y preparada para aprovechar la moderna tecnología y no están capacitados para absorber las novedades que en este aspecto surgen diariamente, quedarán cada vez más retrasados, por más riquezas naturales que contengan su suelo o por más energía que puedan sacar de sus ríos".

Nos sentimos muy esperanzados de los resultados de este encuentro, especialmente, para nuestros profesores, pues contamos con la presencia de un centenar de expertos en la enseñanza de la matemática provenientes de Latinoamérica, de los Estados Unidos, de Canadá y de Europa. Su presencia ofrece a nuestros profesores de matemática a los niveles primario, secundario y universitario, así como al personal técnico de la Secretaría de Estado de Educación, la oportunidad de conocer experiencias exitosas en otros países de esta área, así como los nuevos conocimientos que han surgido en este campo y que incidirán en la enseñanza de la matemática en el futuro. Esta oportunidad de intercambio personal con expertos reconocidos internacionalmente, es uno de los aspectos más importantes y provechosos de esta Conferencia para los dominicanos que se dedican a la enseñanza de esta importante rama de las ciencias.

La Universidad Católica Madre y Maestra ha venido laborando, desde hace varios años, en la búsqueda de soluciones realistas, viables y acordes con nuestra realidad nacional, al problema de los bajos niveles de conocimientos matemáticos con que llegan los estudiantes a la Universidad y en la promoción y difusión de los estudios matemáticos.

La Universidad ha publicado libros, frutos de los esfuerzos de sus profesores del Departamento de Matemática, edita revistas especializadas y cada año celebra competencias nacionales estudiantiles de matemática. Al mismo tiempo, patrocina investigaciones en el área en las que participan algunos de sus más distinguidos profesores. En particular, merece citarse el estudio de rendimiento en matemática llevado a cabo por un equipo bajo la dirección del profesor Dr. Eduardo Luna que fue catalogado por un conocido educador dominicano como "la obra de investigación más importante que se ha realizado en nuestro país".

La UCMM otorga, dentro del pensum de cada carrera una importancia de primer orden al conocimiento matemático, y el ofrecimiento de un programa en Maestría en Física-Matemática, que se viene desarrollando con gran éxito en el Campus de Santiago, confiamos que va a ser una contribución significativa, especialmente en la formación de profesores de alto nivel.

Nos sentimos muy complacidos de copatrocinar esta Conferencia, que acogimos con gran simpatía desde que se anunció, por el impacto que de seguro tendrá sobre la educación dominicana en esta importante área y como parte de los esfuerzos de la Universidad a que hemos hecho referencia.

Al reiterarles la bienvenida a ésta que es, desde hoy, su casa en la República Dominicana, formulo votos por el mayor éxito de las deliberaciones de esta Conferencia, en la seguridad de que a la América Latina y a nuestro país, en particular, se le abrirán nuevos horizontes en este fascinante campo de la educación.

La presencia de ustedes entre nosotros en torno a una área de tanta importancia en el edificio educativo, en un momento en que nuestros países se preparan para la conmemoración del Quinto Centenario del encuentro del mundo europeo con el Americano y del Medio Milenio de la Evangelización, estamos seguros que constituirá un estímulo al compromiso y a la solidaridad en la tarea común de preparar los hombres y mujeres que harán posible la superación de la ignorancia y la creación de una sociedad en la cual los bienes materiales y espirituales sean patrimonio de todos.

PALABRAS DE APERTURA POR EL DR. UBIRATAN D'AMBROSIO, PRESIDENTE DEL COMITE INTERAMERICANO DE EDUCACION MATEMATICA

Saludações

A realização da 7ª CIAEM na República Dominicana tem um grande significado. As seis primeiras, que se realizaram no Perú, Colombia, Argentina, Venezuela, Brasil e México, países grandes, com grande diversidade cultural e regional, evidenciaram a identificação de uma problemática nossa, latinoamericana, no ensino de Matemática. O contraste que existe em nossos países entre populações muito pobres, para quem é necessário uma educação matemática moderna para que possam efetivamente competir num mercado de trabalho que é cada vez mais sofisticado, e os grupos mais privilegiados de nossas sociedades, que tiveram os maiores recursos educativos, sempre tem sido uma grande preocupação para os nossos educadores. Sempre se tem sentido esses problemas, porém jamais tivemos em nossos países dados globais comprovados, sobre a situação real do ensino de matemática em nossos países. No final dos anos 60 um importante estudo global, internacional, sobre os logros acadêmicos em matemática, nos indica que uma metodologia de investigação em grande escala é necessária para que o enfoque se transfira do "eu acredito que" - tão comum entre nossos investigadores - para o "é provado que".

A necessidade de um enfoque científico sobre nossa visão global de qual é a situação real do ensino de matemática em nossos países se evidencia a partir das primeiras conferências interamericanas. No final dos anos 70 teve início um 2° Estudo Internacional de Educação Matemática e cerca de 30 países, do chamado mundo desenvolvido, se incorporaram ao Estudo. Tambén nós, do Terceiro Mundo, temos necessidade de conhecer nossa realidade educativa e evitar cópias e adoções simplistas de soluções que nos são propostas e muitas vezes impostas pelos países desenvolvidos. O Comitê Interamericano de Educação Matemática fez muitos esforços, em colaboração com a direção do 2° Estudo Internacional, localizado na Universidade de Illinois e sob a direção do Professor Kenneth Travers para iniciar estudos do gênero na América Latina. A respota positiva, segura e decidida, veio da República Dominicana, da Universidade Madre y Maestra. O Dr. Eduardo Luna, com total apoio do Reitor da Universidade e um substancial suporte financeiro e técnico do International Development and Research Centre do Canada, particularmente com a dedicação do Professor Richard Wolfe, permitiu que, na América Latina, se possa apresentar um estudo global de todo um país, com resultados cientificamente válidos, com dados de inestimável valor sobre a situação atual do ensino de matemática no país. A importância disso transcende a República Dominicana. Uma relativa homogeneidade cultural, social, política e econômica de todos os nossos países nos faz como que um único grande país, a América Latina, com estados irmanados pela mesma ansiedade de um presente duro e de esperança no futuro. Os resultados e as interpretações do Estudio sobre Logros Acadêmicos em Matemática obtidos pela República Dominicana são para nós a mais importante fonte de informações sobre a real situação do ensino de Matemática em nossos países.

Justo e benvindo foi pois o convite da República Dominicana, feito através da Universidade Madre y Maestra e por intermédio do Dr. Eduardo Luna, para que o país sediasse esta 7ª Conferência Interamericana de Educação Matemática. As condições que nos foram oferecidas tinham a garantia do sucesso. O sucesso alcançado em organizar em Santiago de los Caballeros, o mais importante centro de investigações educativas em larga escala da América Latina, nos deu a garantia de que a 7ª Conferência terá nesse país um local ideal. O apoio decisivo do Reitor da Universidade, de algumas entidades particulares e com o trabalho infatigável e gigantesco do Dr. Eduardo Luna e sua equipe de colaboradores, nos trazem a este país. Participaram cerca de 25 países representados por suas maiores capacidades em Educação Matemática. Desde os do Norte, do Canadá e Estados Unidos, até o Cone Sul, estamos todos juntos na busca de soluções comuns. A crescente população hispânica, hoje com cerca de 16 milhões nos Estados Unidos e Canadá, nos trazem desses países uma problemática nova que encontra eco em nossos problemas tradicionais. A participação européia, sempre presente nas Conferências Interamericanas, não nos permite esquecer os laços culturais tão profundos com o Velho Mundo.

Ao nos aproximarmos do 5° centenário da chegada de Colombo a esta parte do mundo, então muito desenvolvida, com um enfoque próprio às relações sociais, ao relacionamento com a natureza, não devemos nos esquecer que naquele momento deuse um inevitável choque cultural, que favoreceu largamente aos recém-chegados e, a partir de então, um outro modelo cultural se imprimiu a esta parte do mundo, tão velha e tão desenvolvida quanto a europeía, mas que estranhamente passou a chamar-se "Novo Mundo". Quase 500 anos se passaram e agora não somos mais um mundo novo, somos o "Terceiro Mundo". Talvez nos fosse possível assumir no contexto social e cultural, uma posição ao menos de adolescentes. E assim propor, com a criatividade e originalidade típica dos jovens, soluções própias a nossos problemas. Sabemos que o custo disso é muito alto, como alguns de nossos países irmãos nos mostram ao tentar criar suas próprias opções no campo político e econômico.

Talvez a maneira mais eficaz de escapar da situação de "niñez tutelada" relativa ao mundo chamado desenvolvido, seja proporcionando uma nova visão educativa. Nada melhor para iniciar essa reflexão do que no país onde o grande choque começou e através da disciplina com que começou o grande processo de subordinação cultural. Não nos esqueçamos que o primeiro livro publicado na América foi o Tratado Compendioso de las Cuentas, de Juan Diez Freyle, em 1575. Esse é um livro que trata da aritmética dos Aztecas. A complexidade deste ensino para os europeus serviu de base para se impor às populações nativas uma nova aritmética, um novo modelo de comércio e de produção e a partir daí o domínio político e econômico. Talvez ao reconhecer a cultura matemática nativa estejamos dando o primeriro passo para nossa redenção total da "niñez" de Terceiro Mundo.

Os restos mortais de Colombo, que estão na Catedral, se sentirão honrados com a redenção dos povos que ele introduziu ao Velho Mundo.

PALABRAS DEL DR. EDUARDO LUNA PRESIDENTE DEL COMITE ORGANIZADOR LOCAL

Con la celebración de esta Séptima Conferencia Interamericana de Educación Matemática le damos continuidad a una tradición de 26 años de reuniones sobre el tema.

Con el fin de compensar en promedio desviaciones involuntarias en torno al período cuadrienal de las mismas, ocurridas en el pasado, y de preceder el Sexto Congreso Internacional de Educación Matemática que tendrá lugar en Budapest, en agosto del próximo año, hace apenas 18 meses que se colocó sobre los hombros del Comité Organizador de esta Séptima Conferencia la ingente responsabilidad de su organización.

Es de suponer que en un tiempo tan corto, la densidad del esfuerzo desplegado en tal sentido haya resultado muy alta, y arribamos a la ceremonia inaugural de la Conferencia con la honda satisfacción interior de agregar un término más a la serie iniciada en 1961 en Bogotá gracias al espíritu tenaz y emprendedor del Dr. Marshall H. Stone, nuestro Presidente Honorario Vitalicio desde 1972.

Como siempre ocurre, por ventura, con estos eventos, hemos contado también esta vez con la ayuda de entidades mundiales, regionales y locales. Deseo destacar aquí el apoyo decidido de la UNESCO, del Centro Internacional de Investigación y Desarrollo (Canada) IDRC, de la Universidad Católica Madre y Maestra y de algunas empresas comerciales locales. Los generosos aportes económicos, los servicios logísticos, los incentivos, buena voluntad y cooperación tanto de ellas como de muchas personas han contribuido de modo significativo a hacer realidad esta Conferencia. Les quedamos profundamente agradecidos.

Queremos agradecer también la auspiciosa presencia aquí del Lic. Pedro Pichardo, distinguido Secretario de Estado de Educación, Bellas Artes y Cultos; y de Monseñor Agripino Núñez Collado, rector de la Universidad Católica Madre y Maestra (UCMM).

Les extiendo además una salutación muy efusiva y cordial a los participantes, tanto extranjeros como nacionales, que han venido a esta convivencia educativa hemisférica a intercambiar y asimilar experiencias y conocimientos de inestimable valor para la enseñanza de la matemática. La altura y seriedad de su participación será la mejor recompensa a los no pocos sacrificios que ha costado la configuración concreta de esta Conferencia. Así será, de eso estamos seguros. Tal como en las anteriores, según la evidencia de sus resultados. Además, ¿cómo explicar, sin la seriedad, la altura de miras, el buen deseo y una firme voluntad superadora de inevitables obstáculos, cómo explicar, decía, la continuidad a lo largo de esos 26 años mencionada al principio de estas palabras y que constituye un timbre de orgullo moral e intelectual para los educadores matemáticos de nuestro hemisferio?

Todos estamos conscientes de la importancia que para el desarrollo de nuestros pueblos tiene la educación matemática; se ha repetido muchas veces. La realidad insoslayable consiste en que el nervio funcional operatorio del progreso científico-tecnológico es la Matemática. Su papel, sin embargo, no se limita únicamente a ese sector. Va más allá, invade todo el campo del intelecto humano. El hecho fundamental, señores, es éste: la Matemática contribuye a desarrollar la capacidad de saber pensar con rigor lógico, y esta destreza del espíritu, el saber razonar lógicamente, transferida a los estudiantes de un país, colocan a éste en condiciones mucho más favorables para comprender, asimilar y aprovechar las fuerzas directrices de la civilización moderna, de caracteres estructurales preponderantemente científicos.

En el segundo boletín del año pasado de Novedades Científicas Alemanas, aparece la reseña de un interesantísimo estudio sobre la eficacia de los métodos de pensamiento y de trabajo de la Matemática. Sus resultados son altamente halagadores. Los estudiantes alemanes ganadores del concurso federal de matemática obtenían notas muy buenas no sólo en Física, Química y Biología, sino también en asignaturas humanísticas que requieren operaciones lógicas como Latín y Música, y en aquellas como la Historia, donde es necesario recurrir a asociaciones sistemáticas.

La Matemática facilita, pues, la captación intelectual de la realidad, mediante el aguzamiento de la inteligencia. Y esta inteligencia es uno de los tantos recursos de desarrollo de un país, como bien lo ha señalado el Dr. Luis Santaló en su transparente librito La Enseñanza de la Matemática en la Escuela Media. "La inteligencia -agrega el doctor Santaló- se encuentra repartida entre todos los habitantes, pero necesita ser cuidada y protegida para que se desarrolle plenamente. Hay que preparar el terreno para que no se pierda como semilla entre abrojos. La educación es el arte de cuidar el desarrollo de la inteligencia y los pueblos de hoy, si no tienen la inteligencia desarrollada y preparada para aprovechar la moderna tecnología y no están capacitados para absorber las novedades que en este aspecto surgen diariamente, quedarán cada vez más retrasados, por más riquezas naturales que contenga su suelo o por más energía que pueda sacar de sus ríos y represas" (p. 10).

Las instituciones educativas estatales y privadas latinoamericanas disponen de un precioso y enorme material de base, para la planificación de la enseñanza de la matemática, en las Actas de estas Conferencias.

¿En qué medida han sido éstas provechosamente utilizadas? ¿Podríamos decir que en un lapso de 26 años de Conferencias su influencia ha sido significativa en muchos de nuestros países?

Carecemos de un estudio evaluativo riguroso para dar respuestas satisfactorias. Sólo podemos afirmar que ciertamente estas Conferencias han sido muy útiles aquí y allá en el radio de acción de muchos participantes, los cuales han constituido los centros difusores principales de las ideas y recomendaciones que salen de las mismas. Hace falta, sin embargo, a mi entender, canalizarlas regularmente a través de los organismos educativos del Estado para darles una amplia cobertura nacional.

En esta Séptima Conferencia Interamericana de Educación Matemática, tendremos tres conferencias plenarias a cargo de distinguidos educadores matemáticos de la región, como es ya una costumbre desde la Quinta Conferencia, la de Campinas, Brasil. Son especies de ventanas a través de las cuales podemos contemplar novedosos panoramas de vanguardia.

Importantes temas de vigencia actual y de interés permanente se plantearán y discutirán en los Paneles y los Grupos de Discusión.

Las experiencias personales o grupales se expondrán en sesiones de comunicación oral o gráficas, sin que falte, además, la exhibición de materiales de apoyo creados para la enseñanza de la Matemática.

El Comité Organizador se sentirá muy satisfecho si la estructura organizativa y el ambiente general logran que los trabajos se desarrollen adecuadamente y faciliten - propósito conscientemente perseguido - las interacciones y vínculos interpersonales.

Sólo me resta desearles que disfruten mucho durante esta semana en Santo Domingo, tanto en el plano académico como en los demás. Muchas gracias.

PARTE II

CONFERENCIAS GENERALES

APRENDIZAJE EXPERIMENTAL DE LAS MATEMATICAS

Enrique Calderón
Fundación Arturo Rosenblueth
México, D. F., México

Las matemáticas constituyen una forma de pensamiento que parece ser innata a los seres humanos; en mayor o menor grado todos los hombres y mujeres han disfrutado de alguna manera el hacer algún tipo de matemáticas, ya sea cosas tan simples como contar los vehículos que pasan cerca de nosotros para ver cuáles son los más populares, o participar en algún juego con transfondo matemático como el dominó o las cartas.

Los niños pequeños cuentan y comparan lo que observan a su alrededor, estimar las dimensiones de los objetos suele ser divertido y hasta emocionante, pero su pensamiento y sus actividades no se quedan ahí, ni en el uso de la habilidad de contar para hacer trueques y competencias; su inquietud les lleva más lejos, a crear modelos y abstracciones de lo que sucede en su alrededor tal como los matemáticos hacen con conceptos sólo un poco más complejos.

Esto no es nuevo, desde tiempos antiguos los seres humanos han tenido una extraña atracción por los números y por los símbolos en general, como entes que les permitían representar abstracciones del mundo en el que vivían, dándoles en muchos casos propiedades mágicas y misteriosas. A lo largo de su historia los hombres han hallado placer y aventura en las matemáticas; desafortunadamente no todos.

Es triste reconocer y esto es harto conocido, que las matemáticas son socialmente rechazadas; (y no me refiero a las mujeres que se dedican a esta disciplina) se les trata con respeto en muchos casos y abundan los que no saben ni siquiera un ápice de matemáticas; algunos de ellos quizás sean buenos jugadores de dominó o de naipes. Considero este rechazo más un problema de desinformación y de actitudes prefabricadas, que de incapacidad para entender y usar las matemáticas.

¿A qué se debe todo esto? Personalmente considero que las fallas están ubicadas en el sistema educativo, razones de peso existen para ello.

Aunados a actitudes de los profesores y de los adultos en general que no entienden ni el rol ni la esencia de las matemáticas, porque a su tiempo sus maestros tampoco les transmitieron ideas correctas, el estudiante se ve respaldado a hacer las matemáticas a un lado ante las primeras dificultades, dejando la actividad matemática a unos cuantos que forman una especie de élite, a la que se señala y distingue para su bien o para su mal como individuos de una categoría distinta.

Pero por otra parte subsisten y se han transmitido de una generación a otra dos ideas bastante nocivas y erróneas, cuando lo que se trata es de facilitar e incluso hacer agradable el desarrollo de las matemáticas.

La primera de ellas estriba en disasociar las matemáticas de todo lo que sucede alrededor del niño, presentándolas entonces como algo que nada tiene que ver con la realidad y que para nada sirve. Siendo las matemáticas una ciencia creada por el hombre para describir y explicar el universo, poco interés ofrecen cuando son privadas de esa posibilidad; sin embargo, la frase típica: "No se distraigan en nada, no piensen en otra cosa mientras estén trabajando con las tablas de multiplicar" parece ser la favorita del profesor durante la clase de matemáticas.

Un segundo problema, tan importante como el primero, está en la pretensión de presentarnos las matemáticas, como un campo de conocimiento formal, sujeto a formalismos y más formalismos; algo así como si las matemáticas hubieran existido siempre con su liturgia y excelencia, comprendida por los hombres, en base a formalizaciones, desarrollos y demostraciones formales, construcciones y deducciones formales, algo así como un eterno baile de etiqueta, buenos modales y cuello duro.

Para bien de la humanidad y de las matemáticas las cosas no han sido así, sino que han resultado de largos y emocionantes procesos de prueba y error, de partir con ideas equivocadas, de experimentar y tratar de resolver un problema varias veces antes de tener los primeros éxitos; toda una serie de aventuras, con algunos desenlaces previsibles, otros cómicos y algunos más increíbles.

En más de una ocasión se han realizado esfuerzos por cambiar las formas, los procedimientos y los esquemas de la enseñanza de las matemáticas, y se ha avanzado, sin embargo las dificultades básicas subsisten.

Con la irrupción que las computadoras han hecho en las escuelas, existe la posibilidad y quizás también la conveniencia de estudiar formas nuevas de aplicación a los procesos de aprendizaje de las matemáticas, nuestra organización se ha venido dedicando a ello, y el trabajo ha resultado apasionante, la experimentación nos abre cada día nuevas perspectivas.

A través de este documento preparado para la VII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, quisiera describir y comentar los trabajos y los resultados logrados en el proyecto Galileo, utilizando para ello computadoras de bajo costo.

Las Construcciones Geométricas

Nuestro primer trabajo estuvo orientado a la geometría, concretamente el objetivo era la motivación de niños de entre ocho y doce años para trabajar en geometría. La idea central del programa que construímos era darle al estudiante la posibilidad de operar con puntos, segmentos de recta y arcos, para formar figuras planas que luego podían ser "prismadas" o "revolucionadas".

En la figura siguiente aparece una sucesión de gráficas que muestran la síntesis de una figura de revolución, realizada con el programa por un estudiante de sexto año.

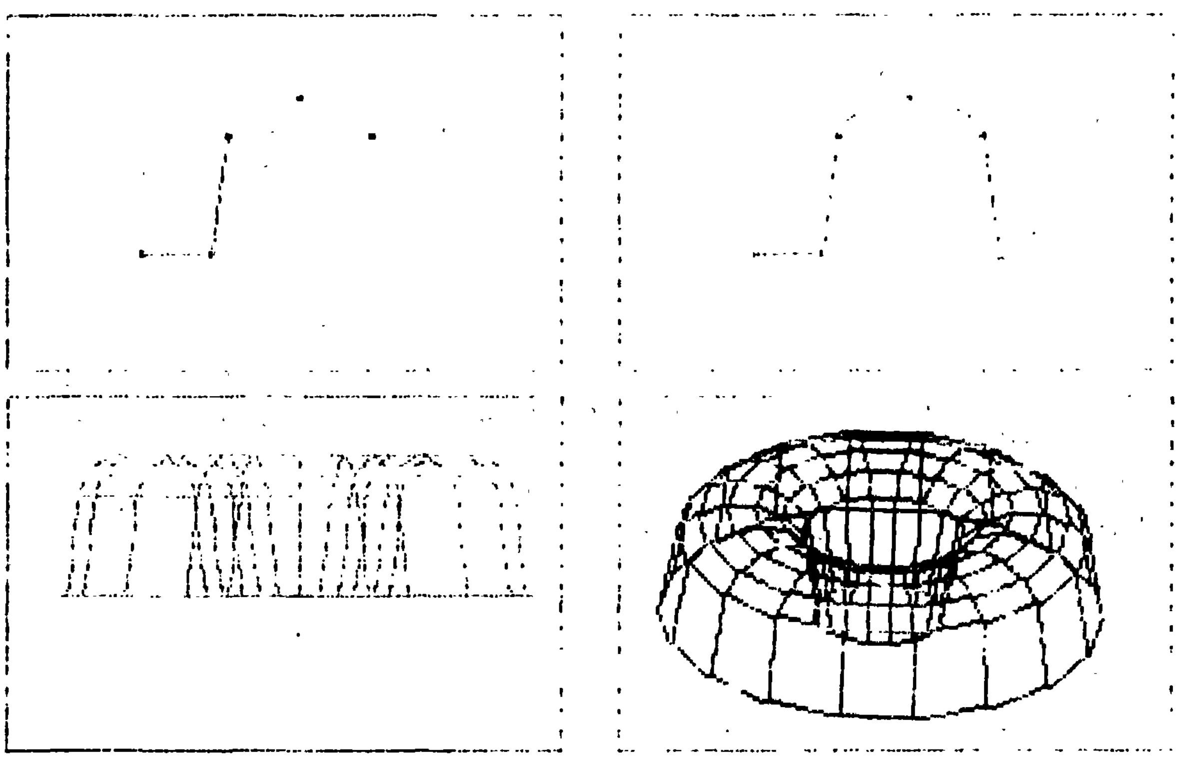


FIGURA 1

Dos hechos son importantes de remarcar sobre este programa que opera en forma similar a algunos programas de diseño asistido por computadoras.

El primero de ellos radica en que para su uso el estudiante no requiere conocimiento alguno de computación, por lo que puede abstraerse en su trabajo centrado en la geometría. El segundo estriba en que el programa le libera de los requerimientos de habilidad manual, facilitando su trabajo y dándole seguridad sobre su capacidad para crear, manejar e interpretar correctamente las estructuras geométricas.

Aunque no contamos con evaluaciones sistemáticas y objetivas del programa y sus efectos en los estudiantes, las observaciones del comportamiento de éstos, están caracterizadas por la presentación de grandes períodos de concentración e interés, lo cual nos lleva a concluir que el efecto que se logra con este tipo de programas es importante.

Los Estuches de Matemáticas

Recientemente hemos empezado a operar algunos nuevos desarrollos a lo largo de una idea que tiene su origen en otras ideas no tan nuevas, la de los estuches de geometría.

Estos estuches constituídos por un juego de escuadras, una regla graduada o escala, un compás, un instrumento para medir ángulos (transportador), lápices, cuaderno y goma de borrar, han jugado un papel central en el aprendizaje de las matemáticas para un buen número de generaciones de hombres y mujeres.

Muchos libros han sido escritos sobre el uso de los estuches de matemáticas, no tanto sobre cómo se operan, sino sobre los problemas que pueden ser resueltos. Otros libros, quizás los más importantes, presentan los descubrimientos y resultados logrados, a través de su uso y de la experimentación, aunque seguramente tales resultados se presenten como desarrollos formales; tal es el caso del teorema sobre la invariabilidad del ángulo interno que se establece entre las rectas que se intersectan en un punto A de un círculo y que pasan por los extremos de la secante de ese mismo círculo, como se observa en la figura 2.

FIGURA 2

La importancia de los estuches de geometría ha radicado en el apoyo que dan al estudiante y al investigador, para hacer figuras y trazos lo suficientemente exactos, como para "dejar ver" la ocurrencia de ciertos hechos que pueden ser de interés y que invitan de inmediato al estudiante, a investigar si se trata de simples coincidencias o si se trata de algo con fondo, de un hecho matemático.

En los nuevos estuches de matemáticas operados en computadoras, ésta es una de las ideas centrales, aunque sus posibilidades no están limitadas al manejo de segmentos de rectas y de arcos de círculo. Otras formas pueden ser elipses, hipérbolas, parábolas, senoides y en general diferentes tipos de funciones que pueden ser trazadas con la misma facilidad y exactitud con la que se traza un círculo.

Facilidades adicionales para cambiar de escala, para ver con detalles de acercamiento controlado, una cierta región de una curva o una intersección entre varias curvas, para hacer transformaciones del espacio y observar su impacto en las curvas trazadas, y sobre todo, la vinculación entre las formas simbólicas y las representaciones gráficas de curvas y funciones brindan una capacidad difícil de explicar, dando al estudiante de matemáticas un ambiente de exploración y una sensación de seguridad que invita a hacer experimentos, a familiarizarse con los conceptos de las matemáticas y a comprobar que nada hay de misterioso ni de terrorífico en esta ciencia. ¿Cúal habrá de ser el impacto de estos instrumentos en la enseñanza de las matemáticas?

En la siguiente sucesión de figuras se observa un proceso de construcciones de dos círculos, uno que pasa por los vértices de un triángulo, y el otro, que es tangente a los tres lados del mismo.

El instrumento utilizado es el estuche básico de matemáticas desarrollado dentro del proyecto Galileo, para los estudiantes de educación media y media superior.

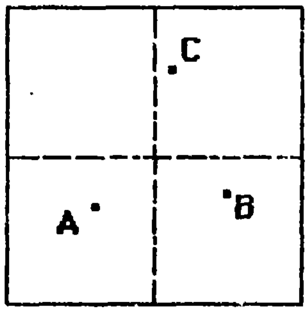
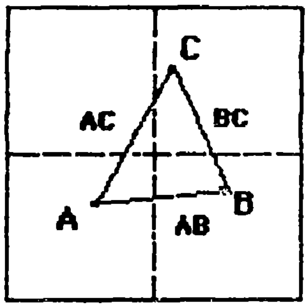
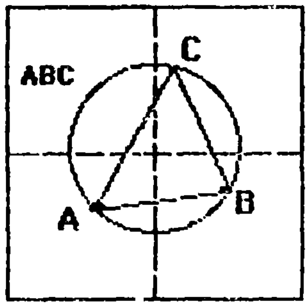
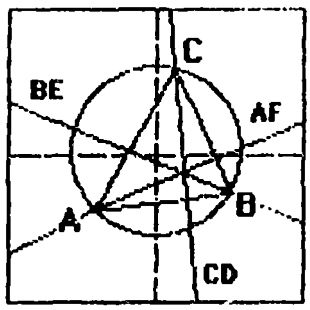
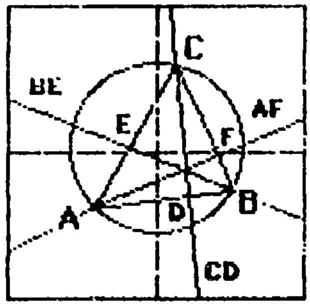
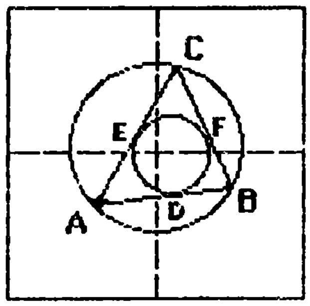
INSTRUCCIONES	EFECTO
Punto A (-9,-7) Punto B (10,-5) Punto C (3,10)	
SEGMENTO AB entre A y B SEGMENTO BC entre B y C SEGMENTO AC entre A y C	
CIRCULO ABC que pasa por A, B y C	
RECTA CD perpendicular a AB que pasa por C RECTA BE perpendicular a AC que pasa por B RECTA AF perpendicular a BC que pasa por A	

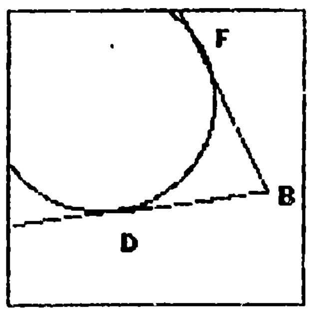
FIGURA 3

<table>
<tr><th>INSTRUCCION</th><th>EFECTO</th></tr>
<tr><td>PUNTO D es intersección de AB y CD

PUNTO E es intersección de AC y BE

PUNTO F es intersección de BC y AF</td><td>


</td></tr>
<tr><td>CIRCULO Tang ABC que pasa por D E y F</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Cambio de Escala y Origen</td><td>


</td></tr>
</table>

FIGURA 3

La Experimentación con Funciones

El concepto de función es sin lugar a dudas uno de los elementos centrales de las matemáticas. Su utilización y familiaridad como herramienta de trabajo, son decisivas en la actitud de cada estudiante hacia las matemáticas y el beneficio que él pueda tomar de éstas.

Para manejar las funciones con fluidez es necesario que el estudiante se familiarice, tanto con su representación simbólica, como con su forma gráfica en el espacio. Si además está sensibilizado con las relaciones que existen entre formas y expresiones simbólicas, su desarrollo académico y profesional habrá logrado un avance substancial.

Como en otros casos ya discutidos, el estudio de las funciones es un proceso de experimentación que requiere tiempo y esfuerzo y que es abandonado en un buen número de casos con la consiguiente sensación de fracaso, por falta de disciplina y paciencia cuando no se cuenta con instrumentos adecuados.

Dos esquemas de experimentación con funciones pueden ser pensados de inmediato. En el primero de ellos, la experimentación radica en obtener la "forma" de una función a partir de su definición simbólica. Tradicionalmente la fórmula es aplicada a diferentes juegos de valores (datos) obteniendo en cada caso un valor resultante. Cuando todos estos resultados han sido registrados en una tabla se procede a elaborar la gráfica, con la que el trabajo queda concluido y el estudiante ha logrado un nuevo conocimiento.

El proceso no está exento de problemas, el estudiante puede encontrarse con discontinuidades, con puntos y con intervalos que en algunos casos son demasiado amplios y crean dudas con lo que pasa entre dos valores. Aún así se trata de un proceso valioso que enriquece el conocimiento del estudiante.

El problema inverso de encontrar la expresión simbólica de una función a partir de su forma gráfica es más complejo aún, su solución requiere de un mayor nivel de conocimiento y experiencia por parte del estudiante, e implica generalmente del conocimiento de técnicas más o menos difíciles y de realizar una serie de exploraciones antes de lograr el éxito.

Otros problemas adicionales asociados con funciones, que también implican procesos de "experimentación" y que se presentan en niveles más complejos de la actividad matemática, incluyen la realización de operaciones con funciones tales como suma, multiplicación de funciones, la determinación de "raíces" o ceros de funciones y la aproximación de funciones mediante series y polinomios.

La posibilidad de construir herramientas computacionales para trabajar en estos campos es hoy muy alta, gracias a los avances continuos de la tecnología y al desarrollo de software cada vez más flexible y útil de manejar.

El programa "polinomios", con el que el Dr. Rafael Soto ganó recientemente un certamen nacional (en México) de Software Educativo es un ejemplo claro de lo que hoy es posible realizar aún con equipos tan pequeños como el COMMODORE 64.

En una de sus opciones el programa muestra la gráfica de un polinomio (hasta de grado 12) en una ventana que cubre la parte izquierda de la pantalla.

El estudiante es invitado a dar valores a los diferentes coeficientes del polinomio y observar su comportamiento directamente en la parte derecha de la pantalla, hasta lograr mediante modificaciones sucesivas que ambas gráficas coincidan, se trata de todo un proceso de experimentación típica en pos de un objetivo.

En las figuras siguientes se observa el proceso de ajuste para la obtención de una parábola.

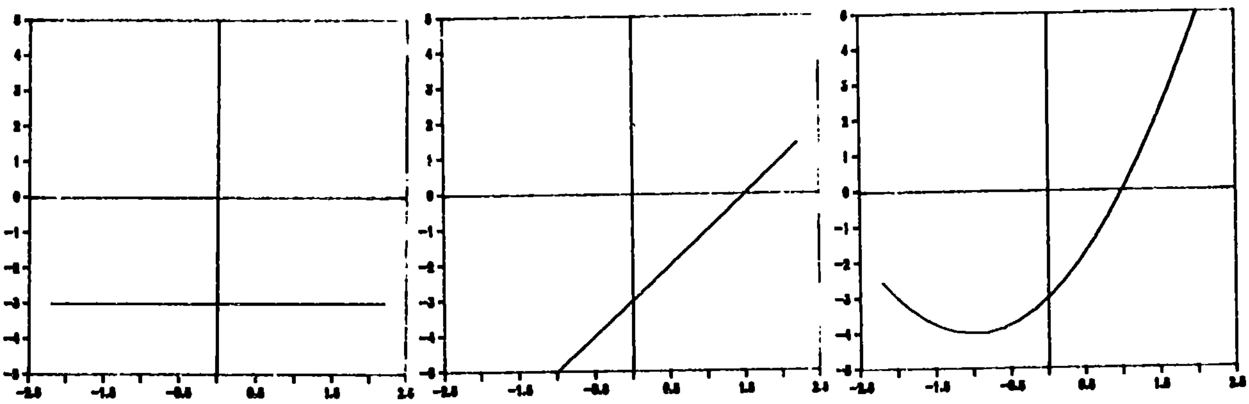
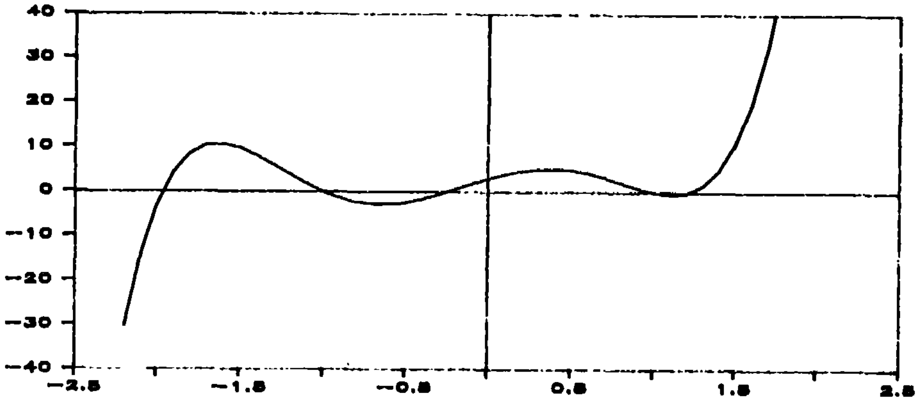


FIGURA 4

Un aspecto realmente asombroso del programa es la velocidad con la que calcula y grafica, los puntos de la gráfica, dando la impresión de que se trata de un proceso instantáneo.

En la gráfica siguiente se observa un polinomio de quinto grado generado con el programa.



$$\boxed{Y = 3 + 11x - 8x^2 - 16x^3 + 5x^4 + 5x^5}$$

FIGURA 5

Existen otras formas de hacer matemáticas y de usar las matemáticas, en muchas de éstas se requiere de procesos de manipulación simbólica que nos libera de los esfuerzos de abstracción para entender situaciones intermedias, y que nos llevan a la obtención de formas finales a cuya interpretación debemos avocarnos.

Tales son los casos del álgebra, del cálculo diferencial y de la lógica matemática o simbólica; también en estos casos la existencia de programas capaces de "derivar", "integrar", "simplificar" o "deducir" simbólicamente se constituyen en herramientas experimentales de gran valor para el estudio de estas áreas de la matemática.

En particular los lenguajes LISP, y PROLOG utilizados en el campo de la Inteligencia Artificial han resultado extraordinariamente prácticos para la construcción de programas de este tipo, su disponibilidad en computadoras personales nos lleva a pensar en las posibilidades de utilización en cursos de iniciación universitaria.

Conclusiones

Nos ha tocado vivir una época de la historia realmente fascinante, no existen ya dragones que cazar ni nuevos continentes por explorar, no al menos en nuestro planeta, pero a cambio contamos con instrumentos capaces de amplificar nuestros conocimientos, nuestra capacidad de razonar, de crear y de percibir lo que nos rodea.

El conocimiento es una de las grandes aspiraciones de la humanidad, y es hoy quizás el más grande de sus logros ¿qué tanto el conocimiento "de lo que es esencial" está ligado a las matemáticas? Yo creo que mucho. Por esto pienso que lo que hoy hagamos y podamos hacer por acercar las matemáticas al hombre común y corriente representa un gran avance social, y es a nosotros, a los profesores, a los matemáticos y a los computólogos de esta generación, a los que ha tocado la gran posibilidad y también la gran responsabilidad de revolucionar la enseñanza de las matemáticas y de abrir para siempre su acceso a quienes tradicionalmente no lo han tenido.

VIEJOS PROBLEMAS, NUEVAS REALIDADES

Lelis Páez Sánchez
Universidad Central de Venezuela
Caracas, Venezuela

INTRODUCCION

Permítaseme ante todo agradecer la invitación que me ha hecho el Comité Interamericano de Educación Matemática para participar en este evento de tanta importancia para todos aquellos que trabajamos por un mejor destino educativo para nuestros pueblos. En particular, una felicitación calurosa para los colegas dominicanos que de manera tan eficiente han conducido la organización de esta Conferencia; su atenta y siempre eficaz labor han asegurado sin duda alguna el éxito de este encuentro.

Hemos dudado mucho al seleccionar el tema sobre el cual centraríamos la presente exposición. Sumergidos en el mar tormentoso de nuestros problemas locales, se nos hace difícil tomar una perspectiva regional o continental para abordar los problemas de la enseñanza de la Matemática. A esta dificultad de orden psicológico se agrega la barrera de la desinformación: a menos que se forme parte muy activa de organismos internacionales y que se tenga la oportunidad de asistir con regularidad o cierta frecuencia a eventos como el que hoy nos convoca, los educadores de casi todos los países latinoamericanos enfrentamos barreras severas para tener acceso a la información de lo que sucede en las otras naciones hermanas del continente. Pareciera que los puntos y rayas que conforman esos límites formales con los cuales se intenta quebrar nuestra identidad común, hubiesen sido cohesionados en una línea contínua por la presión de los intereses contrarios al ideal de una América Latina unida y por nuestras propias debilidades, incoherencias y contradicciones. En cierto sentido, nos desconocemos a nosotros mismos.

Hay muchos temas que son perfectamente válidos a ser tratados en una conferencia sobre la enseñanza de la Matemática: planteamientos sobre los nuevos o viejos contenidos a ser enseñados, las justificaciones de orden matemático, psicológico o didáctico que puedan sustentar una u otra proposición curricular, análisis de experiencias concretas de enseñanza-aprendizaje, la formación de profesores, los media y la enseñanza de la Matemática, la informatización de la educación, etc. Todos son temas de gran interés y muy pertinentes a nuestro interés como educadores. Pero hemos preferido asumir, en relación a este evento que hoy nos reune y a los problemas que en él se discuten, una modesta aproximación socio-política. Ustedes sabrán perdonarnos la pretensión del término. Intentaremos, pues, hacer un balance de la situación 26 años después de iniciadas estas Conferencias Interamericanas.

LAS PRIMERAS CONFERENCIAS INTERAMERICANAS

La primera Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática se realizó en Bogotá, Colombia, en 1961, con 50 participantes de 20 países. Eran los tiempos del inicio de la Reforma, así, con mayúscula, ese movimiento que sacudió las estructuras curriculares de Matemática en casi todo el mundo y en cuyo desarrollo a nivel de la región jugó un papel muy importante esta primera CIAEM. En ella tuvieron papel destacado eminentes matemáticos de fama internacional, tales como Gustave Choquet, Howard Fher, Laurent Schwartz y Marshall Stone, éste último generador, en el seno de la Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas (International Commission on Mathematical Instruction, ICMI), de la creación del Comité Interamericano de Educación Matemática y quien ha sido puntal importantísimo en el desarrollo de las primeras conferencias interamericanas. En esos tiempos se contaba con apoyo decidido de varias organizaciones, fundamentalmente norteamericanas, quienes patrocinaron esos primeros encuentros. La primera Conferencia Interamericana fue copatrocinada por las siguientes instituciones: OEA, UNESCO, Fundación Ford, Fundación Rockefeller, Fundación Nacional de Ciencias de los EE.UU. y la Asociación Colombiana de Universidades. Eran también los tiempos de la "Alianza para el Progreso", esa política que quiso ser alternativa para capotear los tiempos que, para la esperanza de unos y los temores de otros, lucían borrascosos y preñados de cambios revolucionarios.

Luego de ese primer encuentro en Colombia, se han realizado hasta el presente cinco (5) conferencias más, con un número de participantes casi siempre creciente: Lima, 1966 (84 participantes y 24 países); Bahía Blanca, 1972, 212 participantes y 22 países; Caracas, 1975, 292 participantes y 22 países; Campinas, 1979, 569 participantes y 28 países; Guadalajara, 1985, con cerca de 180 participantes y 24 países y ahora ésta de Santo Domingo.

Un primer hecho a resaltar: la no periodicidad como expresión de las dificultades organizativas y fundamentalmente económicas a las que deben enfrentarse los diferentes Comités Nacionales. Intervalos de 5, 6, 3, 4, 6, 2 años entre una y otra son reveladores de tales dificultades. La Conferencia de Caracas se produce cuando aún Venezuela disfruta de una bonanza espectacular en sus ingresos petroleros. Pero ya para 1972, en Bahía Blanca, el mismo profesor Marshall Stone se quejaba con profunda preocupación de la falta de apoyo económico. Decía entonces el profesor Marshall:

"El futuro de la cooperación interamericana en el campo de la educación matemática, se puede decir sin exageración, que corre grave peligro. A menos que se encuentre rápidamente una solución para nuestras actuales dificultades, esta tercera conferencia quizás sea la última. Ha sido muy difícil organizar este congreso e imposible de poner en práctica el primer programa bosquejado. La razón, en una palabra es el dinero. La escasez de fondos reveló que no interesaba ya el tipo de cooperación que representaba el Comité Interamericano de Educación Matemática. Las sociedades matemáticas, las asociaciones de profesores, los ministerios de educación, otras dependencias nacionales, fundaciones y organizaciones internacionales tales como la Comisión Internacional para la Enseñanza de la Matemática, OEA y UNESCO no han demostrado interés en apoyar el trabajo de CIAEM como debieran hacerlo para que éste rindiera a la altura de su material humano. Algunas de estas organizaciones muestran algún interés, aunque en forma esporádica e improvisada, cuando se está por realizar una conferencia después de un período de cinco o seis años. Otras no se interesan nunca.

La mayor contribución a esta conferencia ha sido por parte del gobierno argentino. Por contraste, es vergonzoso informar que el gobierno de los Estados Unidos no ha realizado ninguna contribución directa. La colaboración de la OEA y de la UNESCO, en ese orden, han agregado lo suficiente a nuestros fondos para garantizar su realización."

El hecho objetivo de haber realizado cuatro conferencias posteriores a la de Bahía Blanca son evidencia de que se han resuelto al menos en parte, y no sin muchísimas dificultades, los problemas financieros que permiten el encuentro, pero ello ha sido posible fundamentalmente gracias al esfuerzo titanesco de los Comités Organizadores locales, que han sabido mover montañas y encontrar patrocinantes para completar el aporte al parecer siempre insuficiente de las organizaciones internacionales y han podido así asegurar el desarrollo de esta importante actividad académica. Pero aún quedan por resolver muchos problemas en este plano y a ellos volveremos posteriormente.

Los tiempos no han hecho sino agudizar estas dificultades económicas. La Conferencia de México encuentra un subcontinente entero estremecido por el terremoto de la deuda externa, y el cual encuentra su metáfora física en la terrible catástrofe natural que por esos días asoló al hermano pueblo mexicano. Valga aquí nuestra admiración y reconocimiento a los amigos mexicanos que, en medio de tanta angustia colectiva e individual y tantas limitaciones de diverso orden, pudieron finalmente cumplir con el compromiso contraído con sus colegas del resto de América. La disminución de participantes a esa Conferencia de México y a la que hoy aquí nos reúne tiene como causa fundamental (nos atreveríamos a decir que única), las dificultades económicas por las que atraviesan todos los países de la región. En particular, los venezolanos, esa delegación siempre bulliciosa y cordial que solía asistir a estos eventos, hoy se ve reducida casi exclusivamente a los invitados por el Comité. Signo de estos tiempos difíciles, en los que la escasa voluntad política existente en nuestros diferentes países para impulsar el desarrollo de la ciencia se ve disminuida gravemente por los ingentes problemas económicos. Y lo afirmamos así, en ese orden, pues pensamos que hay que tener claro que los problemas económicos no son la explicación única o principal a nuestras dificultades actuales. Hay una causa más profunda y dolorosa: en la mayoría de nuestros países, la ciencia no es aún un valor cultural y las clases dirigentes no tienen interés real en su desarrollo. Y en época de crisis, la ciencia resulta siempre para estas clases el "lujo" primero a ser eliminado. Ese es, por lo menos, el caso concreto de mi país, Venezuela. Nuestra diaria lucha por lograr incrementar la calidad de la educación matemática encuentra escenarios cada día más difíciles. Mi país había logrado desarrollar una incipiente infraestructura de investigación científica en los últimos treinta años; esta estructura se encuentra hoy al borde del colapso total debido a los grotescos cortes presupuestarios a que ha sido sometida. Simplemente, no hay plazas para la generación de relevo. Y es demasiado frecuente ya encontrarse con científicos jóvenes desempleados u ocupados en oficios de minúscula calificación. No hay dinero, simplemente. No hay dinero para comprar reactivos, para comprar equipos de investigación, para repararlos, para comprar libros y revistas, en fin, para hacer ciencia. No hay dinero, hay que pagar la deuda externa, dicen. En los últimos tres años, 16,400 millones de dólares han salido del Banco Central de Venezuela hacia las arcas de la banca internacional para pagar los intereses de préstamos pedidos y otorgados irresponsablemente. El 34% de nuestro presupuesto nacional, el 56% de nuestros ingresos petroleros, se nos va hacia las manos ávidas de los otrora "generosos" prestamistas. Ello equivale cada año a más de dos veces el presupuesto nacional para la educación.

Así, en pagos de un dinero que el pueblo no vio nunca, se van buena parte de las posibilidades de mejoras sociales y educativas para nuestros países. Esas son cuentas simples, muy simples, pero injusticias enormes, realidades complejas ante las que no podemos, como educadores, cerrar los ojos. En días pasados, decía un colega brasileño en esta Conferencia Interamericana algo que comparto plenamente. Este colega, de apellido Baldino, hablaba de ese militante comprometido socialmente que no puede dejar de serlo cuando asume su papel de docente en el aula. Este activista de la calle tiene que ser coherente en todas sus acciones y por lo tanto, en el aula debe asumir una conducta cónsona con sus principios en cuanto a las relaciones de poder que se dan en la misma, en particular en lo que concierne a una auténtica democratización del saber. Pero, quisiéramos ahora agregar nosotros, en el camino inverso, ese que va de la escuela a la calle, también es muy válido y pertinente, hoy más que nunca, el siguiente planteamiento simétrico: sumergidos como estamos en una situación de crisis económica y social tan extremas en nuestra América Latina, el educador no puede asumir una dualidad esquizoide, dejando de ser el docente preocupado por el destino educativo de los niños y jóvenes de su país para transformarse, al salir de la escuela, en un ciudadano neutro, inconmovible ante el conflicto social. Hoy, más que nunca, nuestro empeño por una mejor educación, y en particular por una mejor educación matemática, tiene su escenario ampliado obligatoriamente más allá de los cortos límites del aula escolar. En particular, la lucha por el mantenimiento de eventos científicos como el que nos ocupa, pasa necesaria e inevitablemente a inscribirse en una lucha por la sobrevivencia de la ciencia en nuestro subcontinente. Pero no la ciencia con un fin aséptico y cerrado sobre sí misma, sino como un instrumento para mejorar la condición del hombre sobre este continente. Pero volvamos de nuevo nuestra vista más localmente sobre estos interesantes eventos de educación matemática.

Pensamos que es instructivo dar un vistazo a los temas discutidos en las diversas Conferencias, y tener así un punto de referencia histórico para evaluar los logros alcanzados, evidenciar la persistencia de determinados problemas, constatar los avances de la Didáctica de la Matemática en América Latina y de esta manera lograr quizás una mejor comprensión de la situación actual y de las posibilidades de superación que la misma ofrece.

No es nuestra intención fatigarlos con una especie de acta resumida de las seis conferencias anteriores. Nos limitaremos a las grandes líneas, a la aparición de nuevos temas y a la persistencia de otros y lo que ello revela.

Hemos contado, para el análisis que haremos ahora, con las actas de sólo 4 Conferencias Interamericanas: Bogotá (1961), Bahía Blanca (1972), Caracas (1975) y Campinas (1979) y con algunos documentos de la Conferencia de Guadalajara (1985). Las inexactitudes del análisis pueden encontrar en esta falta de documentación excusa parcial válida.

LA DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS EN AMERICA LATINA

Lo primero que intentaremos desprender de nuestro análisis es una conclusión que pudiera lucir un poco chocante, pero que tiene la sana intención de aclarar términos y señalar avances, como veremos luego. Esa primera conclusión es la siguiente: en las cuatro primeras Conferencias Interamericanas se habló muy poco de Didáctica de la Matemática. Ello no niega ni disminuye el valor que tuvieron estos eventos y el papel que tuvieron justamente en la divulgación del interés por esta naciente ciencia. Para explicar esa afirmación nos es necesario tratar de precisar algunas ideas previas.

La Didáctica de la Matemática es una ciencia experimental en proceso de formación. Su incipiente desarrollo data de fecha muy reciente (segunda mitad de este siglo) y su existencia ha debido esperar por el desarrollo previo de otras disciplinas que le son hoy día auxiliares valiosos, tales como la Estadística y la Psicología. Una definición acertada de esta disciplina ha sido dada por David Wheeler, quien la caracteriza como una "indagación disciplinada" sobre los fenómenos que constituyen una situación didáctica en Matemática. De esta definición admirablemente sencilla, se derivan fácilmente algunas caracterizaciones de nuestra disciplina. El término "indagación" conlleva en sí mismo la existencia de un objetivo preciso, de una pregunta claramente formulada, de un problema bien delimitado. Al quererla "disciplinada", la indagación debe realizarse necesariamente con un cierto grado de rigor. Pero tal exigencia de rigor no nos compromete con un método particular, dándonos así la libertad de adecuar nuestros métodos a nuestro objetivo de investigación. A final de cuentas, y contrariamente a lo que frecuentemente se afirma, debemos reconocer que no es el método el que hace a la ciencia, sino la ciencia la que hace al método. Son nuestros propósitos, nuestros conocimientos, nuestras teorías, lo que en verdad definen nuestro comportamiento metodológico. Cada vez que abordamos un sujeto de investigación lo hacemos en el marco de una teoría, sea ésta o no formalizada y tengamos o no conciencia de su existencia, y es esa teoría, explícita o no, la que modela nuestro modo de observar, de recoger datos, de analizar los resultados, etc.

Decíamos que el desarrollo de la Didáctica de la Matemática es muy reciente y ello obedece, entre otras causas, a un hecho histórico evidente: la enseñanza masiva de la Matemática es un fenómeno totalmente nuevo, más reciente aún en nuestro subcontinente. En mi país, por lo menos, es un hecho totalmente reciente. Basta saber que, por ejemplo, en 1936, a la muerte del dictador Gómez, sólo había cerca de 3,000 alumnos de educación secundaria para alrededor de tres millones y medio de habitantes. Si la Didáctica de la Matemática se plantea como objeto de estudio ese complejo de relaciones y hechos diversos que se producen cuando interactúan el alumno y la disciplina matemática, actuando como sujeto intermediario un agente externo (llámese maestro, profesor, texto, video, programa, etc.), mal podría haberse desarrollado esta ciencia si el fenómeno que constituye su objeto de estudio no se daba en forma extensa y real. Estamos hablando de Didáctica de la Matemática cuando nos referimos a alumnos reales puestos en situación de aprendizaje de la disciplina matemática, bajo la acción de un agente educativo. Estamos hablando de esta disciplina cuando nos referimos a la enseñanza dada a estudiantes concretos. A nuestro juicio, hablar de Didáctica General no tiene mucho sentido: una ciencia que pretenda darnos soluciones a la enseñanza de cualquier disciplina, llámese esta Gimnasia, Arte, Matemáticas o Literatura no puede sino proveernos de algunas orientaciones generales para organizar el trabajo escolar pero nunca podrá aportarnos respuestas válidas para responder a nuestros planteamientos sobre cómo enseñar mejor los contenidos matemáticos.

Definidos así esos términos, se entiende por qué decimos que es sólo en Bahía Blanca y en Caracas, con los trabajos (entre otros) de Fedérique Papy y de Emma Castelnuovo, que comenzamos a enfrentar el problema de la Didáctica de la Matemática. Allí se habló por primera vez de niños y jóvenes reales, con nombres propios. Las Conferencias de Campinas, Guadalajara y ésta de Santo Domingo, ponen en evidencia un cambio cualitativo significativo. En estos 26 años, hemos ya pasado de esos informes tipo "ministerio" a estas numerosas comunicaciones en las que mostramos experiencias reales con alumnos de este continente, conducidas con métodos diversos, unas más ortodoxas que otras, con grados diversos de interés y profundidad, pero que muestran ya un camino inicial andado.

Queda sin embargo un punto pendiente sobre el cual les invitamos a reflexionar: ¿Cómo surgen nuestros temas de investigación? ¿Acaso ellos responden siempre a nuestras propias necesidades educativas? ¿Qué influencia tienen en su génesis modas provenientes de países más desarrollados? Son éstas preguntas necesarias para seguir avanzando en el camino de una Didáctica socialmente más válida.

Antes del surgimiento de este movimiento latinoamericano en Didáctica, las Conferencias Interamericanas habían sido el escenario de una "pedagogía de las opiniones", para usar un término de George Glaeser. Como bien lo señala este autor francés, en los inicios de toda ciencia corresponde a los especialistas de las ciencias vecinas abrir el debate, pues éstos tienen ya una visión parcial de los problemas que tratará la nueva ciencia. Los matemáticos cumplieron ese importantísimo papel en el desarrollo de la Didáctica, dando sus opiniones muy interesantes y respetables sobre la mejor manera de enseñar la Matemática. Sólo que hoy día ya hemos aprendido a escucharlos de otra manera, distinguiendo entre sus opiniones indiscutiblemente autorizadas sobre la Matemática y sus puntos de vistas sobre temas en los que ellos mismos declaran su inexperiencia o su falta de familiaridad. A estas alturas del debate, ha quedado muy claro que los métodos de análisis y de demostración en Didáctica de la Matemática difieren de los de la disciplina Matemática, pues la primera es una ciencia social que integra conocimientos provenientes de las más diversas ramas: Psicología, Tecnología Educativa, Epistemología, Lingüística, Sociología, Historia de la Ciencia y por supuesto, la Matemática misma. Hoy día, y los hechos nos han conducido a ello (pensemos, por ejemplo, en la famosa Reforma de la Matemática Moderna), hemos aprendido a diferenciar entre elegancia y sencillez matemáticas y pertinencia pedagógica, entre orden y belleza de contenidos matemáticos y valor didáctico de los mismos. Ya no se habla de "el alumno" como ente abstracto y genérico, ahora hablamos de alumnos bien reales que con su comportamiento y sus conocimientos validan las proposiciones didácticas que formulamos. Ahora, los que enseñamos Matemáticas, sabemos que nuestra labor está mas cercana del artesano y del poeta. Artesanos que debemos construir cada día, en la fragua de la acción concreta, nuestras proposiciones didácticas. Poetas a los que corresponde la difícil tarea de convertir los conocimientos matemáticos en alimento real para la inteligencia de niños y jóvenes, de efecturar la transferencia didáctica que hace accesible el conocimiento matemático. Suele pasar desapercibido un hecho fundamental: hay una diferencia importante entre el saber matemático que queremos enseñar y la versión de ese conocimiento que presentamos a nuestros alumnos, especie de metáforas exige una buena dosis de imaginación, de creatividad, en fin, de poesía en su sentido más amplio.

Las dos últimas conferencias muy especialmente la de Campinas, ponen en evidencia un adelanto significativo de la Didáctica de la Matemática en América Latina. En particular, el Coloso hermano, el Coloso del Sur, Brasil, nos muestra el camino con un particular dinamismo. Se tiene la impresión de que este "desenvolvimiento" brasileño tiene mucho que ver con la creación de grupos de trabajo en instituciones universitarias, con la organización de grupos de reflexión y creación didáctica que, en conexión directa con la realidad educativa, exigen de ésta respuesta a sus inquietudes.

NUESTRA DIVERSIDAD CULTURAL

Las cuatro primeras Conferencias Interamericanas fueron la ocasión para el conocimiento mutuo de nuestros respectivos sistemas educativos. Hasta la Conferencia de Caracas fue usual presentar los informes nacionales sobre la enseñanza de la Matemática de los países americanos. Un análisis somero de esos informes nos permite constatar ciertos avances y ciertas constantes críticas. Una primera sorpresa nos espera al hacer una lectura rápida de esos informes: no se trasluce a través de los mismos la rica diversidad etnocultural de nuestros pueblos, de manera tal que lucen como socialmente idénticas naciones con diferencias profundas en su composición étnica, como lo son, para no dar más que un ejemplo, Bolivia y Argentina. No hay en ninguno de esos informes una referencia al problema del bilingüismo, y el cual es de amplia significación en algunos países latinoamericanos. La situación en este sentido comienza a mejorar sensiblemente, sobre todo con el surgimiento de esta nueva corriente de la Etnomatemática que, teniendo como pioneros a colegas de la valía y talla de un Ubiratán D'Ambrosio, da sus primeros e interesantes pasos en el descubrimiento de esa manera particular que cada pueblo pudiera tener de hacer su Matemática cotidiana. Con gran satisfacción y optimismo, descubrimos el primer boletín del Grupo de Estudios Internacional sobre Etnomatemática, repartido en la Conferencia de Guadalajara, y en él encontramos, entre otros muy interesantes, un título prometedor: "Elementos de Analisis de Matemáticas Quichúa y Castellano" (Consuelo Yánez Cossío, Pontificia Universidad Católica, Quito, 1984). Igualmente hemos tenido oportunidad de escuchar en esta Conferencia trabajos en esa línea, tales como los relativos al uso de la yupana incaica, de Clara Higuera, de Colombia, y la interesante exposición que sobre educación bilingüe peruana nos hiciese la investigadora Martha Villavicencio en uno de los paneles de este evento. Hemos estado tanto tiempo negándonos a nosotros mismos, que aún se nos hace difícil el redescubrimiento propio. Pero hoy día, sin embargo, ya podemos encontrar, por ejemplo, en nuestro rico legado artístico indígena, una hermosa motivación para enseñar simultáneamente transformaciones en el plano y algo de historia, tal y como nos lo mostrara ayer un colega brasileño con su gramática de ornamentos aricas.

¿CUANTOS ENSEÑAMOS, QUIENES SOMOS?

Continuando con el análisis de esos primeros informes nacionales diremos que ellos nos dieron la oportunidad de conocer cuán comunes eran algunos de nuestros problemas. Uno muy significativo: la pobreza o inexistencia de nuestras estadísticas educativas. En la Conferencia de Bogotá se pidió a los países responder al "Survey of current practices in mathematical education", encuesta de 18 preguntas mediante las cuales se perseguía tener un panorama bastante amplio y a la vez preciso sobre la situación de la enseñanza de la Matemática en el continente. Argentina, Brasil, Ecuador, Honduras, Bolivia, Panamá, Venezuela, Chile, Uruguay y Nicaragua respondieron a la misma. La lectura de cada uno de estos interesantes informes-respuestas deja la impresión de inexistencia o precariedad de las estadísticas educativas oficiales. En perfecto paralelo se observa la débil presencia o más bien ausencia de la Estadística en los respectivos programas instruccionales. Ello nos parece expresar la necesaria corespondencia entre la respuesta a la pregunta "¿Qué enseñar?" y los propósitos y objetivos que persigue el Estado como expresión que es de la voluntad política de la sociedad entera. La buena voluntad de docentes esclarecidos que comprendan el papel que pueden jugar los conocimientos de Estadística en la educación de un individuo no será suficiente para impulsar un cambio real en la enseñanza de esta disciplina. Debe existir la voluntad política consciente de dotar a la sociedad de un instrumento técnico básico para calcular sus recursos y planificar en función de ellos. Será sólo en el momento en que la Estadística pase a jugar un papel clave en la marcha de esa sociedad cuando dicha disciplina pase a tener un peso específico significativo real en la formación de los futuros ciudadanos.

Evidentemente la situación debe haber cambiado en estos 26 años que han transcurrido desde la Conferencia de Bogotá; muy posiblemente, los contenidos programáticos de todos esos países incluyen hoy día temas de Estadística y Probabilidades. Así es en el caso de Venezuela, aunque con esta inclusión en los programas no está aún resuelto el problema de la enseñanza de estas disciplinas. Está el problema clave aún pendiente: la formación de los docentes, generalmente sin el conocimiento suficiente en estas áreas totalmente nuevas para la mayoría de ellos. La inexistencia, en nuestro caso, de una fuerte voluntad de dotar al Estado de una eficiente maquinaria estadística, se expresa en la ausencia de acciones concretas para hacer eficaz la labor del docente en estas áreas del conocimiento. Esa correspondencia entre necesidades, propósitos y objetivos que se plantea una sociedad dada y las transformaciones a sus diseños curriculares, programas instruccionales, etc., es un punto clave sobre el cual volveremos al hablar de las nuevas realidades que se nos ofrecen a la discusión hoy día.

VIEJOS PROBLEMAS

Otra constante que surge en casi todos esos informes nacionales a los que hacemos referencia es la relativa a la formación de los docentes. El acelerado proceso de democratización de la educación, que en algunos casos (por ejemplo, Venezuela) se llevó a cabo en apenas una treintena de años, arrastró consigo un mal que minaba y sigue minando las bases del sistema educativo: la insuficiente formación de los docentes y la inexistencia de planes de formación para educadores en servicio. Este sigue siendo, cuan eco de aquel primer encuentro continental, un grito colectivo de angustia y esperanza. Maestros mal pagados, extenuados muchos de ellos por dobles jornadas de trabajo a las que se ven obligados para superar salarios de hambre, se encuentran enfrentados a un medio social en el que cada día la figura del maestro incrementa su minusvalía. Pensamos que una de las razones que justifica la continuación de un esfuerzo sostenido y mancomunado para realizar este evento sobre la enseñanza de la Matemática es justamente la posibilidad de hacer de ella un aula itinerante para el docente latinoamericano. En buena parte ya lo ha sido, y así lo atestiguan los que en ellas han participado a lo largo de estos 26 años. Pero habría que democratizar aún más su acción, intensificando las labores de divulgación de lo aquí discutido y fomentando intensamente actividades pre-conferencias tales como talleres, cursos, etc. Esta formación del docente en servicio, hecha en el marco de estas conferencias interamericanas, sería una forma bien directa e inmediata de revertir sobre un conglomerado social que nos brinda su caluroso apoyo, los beneficios de la tarea que desarrollamos como especialistas en nuestra disciplina.

En los países que participaron en estas primeras conferencias interamericanas no existían programas masivos de actualización y/o mejoramiento del profesorado de Matemáticas. El desarrollo de planes de este tipo está indisolublemente ligado a dos hechos de diferente orden. El primero ya lo hemos mencionado en repetidas ocasiones: la decisión política a nivel del Estado. Pero hay un hecho que también condiciona la posibilidad de mejorar la calidad de los docentes en Matemática y es el desarrollo mismo de la Didáctica de la Matemática. Han existido en el pasado y seguramente existen hoy día programas de actualización, perfeccionamiento o mejoramiento de los docentes centrados casi exclusivamente en el dictado de cursos de disciplinas matemáticas. Claro que es menester conocer la Matemática para aspirar a enseñarla. Sólo que suele confundirse la necesidad con una suficiencia que no es cierta. La transferencia didáctica no es automática ni sencilla, y muchas veces los docentes permanecemos, luego de estos cursos, mejorados en nuestra cultura matemática pero igualmente impotentes para abordar nuestra diaria tarea de enseñanza.

Hoy día, la situación de desatención a la formación académica de los docentes se mantiene en muchas de nuestras naciones. Se suele afirmar que en América Latina se han logrado niveles significativos en los que concierne al disfrute por parte de la población del derecho a la educación. Pero la insuficiente preparación del personal docente, junto a otras crónicas deficiencias de aspectos académicos y materiales, plantea la necesidad de aclarar algunos términos y replantear algunos derechos básicos del individuo en palabras nuevas. No hemos consquistado todavía el derecho a la educación, sólo hemos logrado un acceso significativo pero aún parcial a las aulas escolares (en Venezuela, éste se representa actualemente por un 28.8% de la población total y casi un 50% de la población en edad escolar). La calidad de la enseñanza que reciben en ellas nuestros niños y jóvenes es aún muy precaria y para elevarla se necesita de una decisión política ausente aún en la mayoría de nuestras élites dirigentes. No basta con incrementar la matrícula y poder así mostrar un aumento en los índices de escolaridad de la población. Aún queda pendiente el cómo lograr una enseñanza decente. Hacer realidad el derecho básico de todo ser inteligente: el derecho a comprender. La calidad de la enseñanza matemática de nuestros pueblos no variará significativamente con la sola apertura de aulas (en demasiados casos, aulas-ranchos). La inteligencia de nuestros niños y jóvenes (en Venezuela, éstos conforman el 60% de la población) exige más y mejores docentes, textos correctos, materiales didácticos, etc. O para ser menos exigentes y bien realistas: aulas adecuadamente ventiladas e iluminadas, con pupitres decentes y un pizarrón donde se pueda en verdad escribir, y docentes mejor pagados, tratados de manera más digna. Esa es la realidad latinoamericana, con honrosas excepciones entre las que destaca notablemente nuestra hermana Cuba, la única en haber resuelto ampliamente estas elementales necesidades educativas.

Estos son pues algunos de los viejos problemas que arrastramos: tasas de escolaridad no satisfactorias, carencia de recursos de todo orden, insuficiente formación de los profesores, docentes mal asistidos y peor pagados, etc. Algunos de los respectivos índices han mejorado, pero aún es largo y difícil el camino por recorrer.

NUEVAS REALIDADES

En ese camino aparecen nuevos escollos a superar: no hemos logrado aún alfabetizar a la población latinoamericana cuando ya se nos habla de la alfabetización informática. La Informática, esa nueva tecnología que tiene capacidad para transformar el proceso mismo del trabajo, la producción, la comunicación y manejo de la información, la conducción de los asuntos administrativos y gerenciales, nos ha llegado cual figura mitológica portadora de enormes promesas de bienestar social. Nos ha llegado todo junto, potencialidades reales y sueños. Es cierto que si de revoluciones e invenciones se trata, la Informática posee una fuerza de transformación avasalladora y cautivante. Pero también otras cosas son ciertas: junto a sus innegables ventajas, están los excesos propagandísticos de los interesados en su producción y venta. Junto a sus posibilidades reales, están también los difíciles problemas de su inserción en sociedades poco avanzadas tecnológicamente. Se suele hablar de la Informática como si el principal problema fuese el de la adquisición de equipos, obviando un hecho fundamental: la introducción de la Informática en un contexto dado es un problema no sólo técnico y económico, es fundamentalmente un problema de orden social y cultural. No puede hablarse de informatizar a la educación si no se plantea previamente el problema de lo que significa informatizar la sociedad, si no se tiene de este proceso una visión integral. Es difícil hacerse a ella bajo la presión abrumadora de los negociantes de toda estirpe. Todo cuestionamiento puede lucir como simple oposición al progreso, demostración de mentalidad subdesarrollada, etc. Pero no se trata ni de oposición ni de ciega aceptación. Se trata de comprender, de reflexionar en función de nuestras realidades y nuestras necesidades. Comencemos por aquello de lo que más se nos habla en tanto que educadores: se nos dice que la Informática incrementa la calidad de la educación, permite personalizar y profundizar la instrucción, hace más interactivo el aprendizaje, desarrolla la lógica, la creatividad, la independencia, etc., etc. Nuestra reacción ante tales afirmaciones no puede ser ni la aceptación acrítica ni el rechazo irresponsable. La verdad es que hasta el momento están poco estudiados los efectos que pueda tener la Informática en el proceso general de aprendizaje y desarrollo intelectual. Por otra parte, sus posibles ventajas educativas (y sin duda, pueden ser muchas) dependen de la concepción pedagógica que sustente su aplicación. No todo programa, por el solo hecho de serlo, puede hacer el aprendizaje más activo, más creativo, más rico. Y los hay que, en lugar de contribuir a la formación de individuos más autónomos o más sociables, lo que hacen es reforzar en ellos la dependencia y la subordinación. Es un hecho bien conocido el que los especialistas estiman que tan solo alrededor de un 10 ó 15% de los programas educativos producidos ("software") son realmente interesantes. ¿Cúal puede ser el camino a seguir ante una nueva situación como la que nos plantea la irrupción de la Informática en el mundo actual, ese fuego-rueda-vapor-energía atómica-vuelos espaciales, que nos llega bajo la inocente apariencia de una máquina de escribir y un televisor? Pensamos que no puede ser otra, para los educadores de Latinoamerica, que la de hacerse preguntas pertinentes y tratar de contribuir en dar respuestas a las mismas. Intentar aprovecharse de toda la tecnología informática para nuestra tarea educativa debe comenzar no con la exigencia (irrealizable en nuestros contextos nacionales actuales) de microcomputadoras a las escuelas ya, sino con un proceso de observación juiciosa de experiencias ajenas, realizadas en contextos diferentes al nuestro y que, al contrario de los que afirman irresponsablemente unos cuantos vendedores, no han resultado siempre exitosas. Hay que hacer un serio intento por conocer esas experiencias de otros países, tanto las exitosas como las fallidas. Aprender de los aciertos de otros pero también de sus fracasos. Es indispensable también comenzar con un proceso propio y serio de experimentación, a la vez que se intenta precisar fines y objetivos de la presencia de la Informática en el campo educativo. Estudiar la íntima relación de un posible proceso de informatización de la educación (sea cual sea la forma que el mismo adquiera) con el desarrollo industrial del país. No tiene sentido para nuestros pueblos, sometidos durante tanto tiempo por los poderosos intereses extranjeros, desperdiciar la oportunidad que le brinda un posible proceso de informatización de la educación para desarrollar su industria nacional. Ahí tenemos el ejemplo de Brasil, dando ejemplos de dignidad y coraje frente a la presión agobiante a que se le somete como reacción a su política de protección a su naciente industria informática. Informatizar la sociedad significa tener esa visión de futuro que impide repetir los viejos esquemas que han mantenido sometido a nuestro subcontinente. Por ello decimos que el problema de la Informática y su presencia en el campo educativo no es un simple asunto de cuál compañía resulta mejor vendedor. Es un problema de soberanía, es un problema de desarrollo de nuestros pueblos. Para que una sociedad se apropie de una tecnología no basta con la posesión física de las máquinas que la ejecutan. Esa apropiación será posible sólo si la sociedad responde al enorme reto educativo que la misma le plantea; educar para informatizar la sociedad no se limita a diseñar los programas para enseñar tal o cual materia usando el microcomputador y a preparar docentes capaces de emplearlos acertadamente (y ya estas dos tareas son un enorme reto). Significa, entre otras cosas, preparar la fuerza de trabajo que empleará en las fábricas, en las empresas, etc., esta tecnología informática, producir en el aparato de producción nacional los cambios que hagan posible este proceso de cambio tecnológico. Y educar a la sociedad para este cambio, lograr que ésta vea en la Informática un nuevo elemento productor de cultura. A propósito, ¿tenemos claridad sobre cuál sería esa nueva cultura? ¿Sabemos, y no me refiero solamente a los países a los eufemísticamente se les llama "en vías de desarrollo", hacia donde nos conduce la revolución informática?

En todo caso, el problema no es simple y no se resuelve en la simple adquisición de equipos más o menos llamativos. Es algo mucho más complejo. La informática es por ahora más reto que solución a nuestros problemas. Se puede intentar dominarla, pero con autonomía y cierta audacia. Aprovecharla como oportunidad para ampliar nuestra capacidad tecnológica e industrial. No basta manejar la informática en el simple nivel operativo. Habría que producir también tecnólogos y científicos capaces de enriquecer el caudal de conocimientos que se posea sobre la ciencia y la tecnología informáticas, obreros, técnicos e ingenieros capaces de producir esta tecnología, administradores y gerentes capaces de organizar el uso y la producción de esta tecnología.

En lo que concierne al campo educativo, dado que no existe en la mayoría de nuestros países una experiencia previa que garantice resultados positivos, es lógico que procedamos con prudencia. Una primera fase se impone como estrictamente necesaria: la experimentación educativa. Pero no olvidemos que de la habilidad que tengamos para diseñar, controlar y evaluar este tipo de experiencias dependerá el éxito de un posible proceso de introducción de la informática en la educación. Esta primera etapa de experimentación necesita de un fuerte estímulo político y financiero que garantice la producción nacional de "Software" educativo. En este campo no podemos en absoluto seguir con los nefastos hábitos del trasplante mecánico. Sin programas educativos diseñados de acuerdo a las características culturales de cada conglomerado social, no hay informatización posible de la educación.

Pero hay motivos serios para preocuparse y para dudar. La pregunta clave sería: ¿Tendrán respuestas claras y coherentes a este tipo de planteamientos nuestros respectivos grupos gobernantes? Si aún los que conducen actualmente nuestros destinos como pueblos no han logrado que podamos dominar tecnologías más elementales aún que la tecnología informática, ¿podrán estos mismos grupos responder integralmente y con propiedad a los nuevos retos que la informática nos plantea? Si no son capaces aún de limpiar nuestras calles, reparar nuestras carreteras, mantener nuestros equipos, sembrar nuestras tierras, dotar nuestras escuelas, ¿sabrán informatizarnos? Si no han logrado aún vencer el hambre de nuestra gente, ¿serán ellos capaces de introducirnos exitosamente en ese nuevo mundo de la informática?

En todo caso nos toca, como educadores, subir la guardia. La falta de dominio de una tecnología de tanto alcance y trascendencia como lo es la informática puede llegar a poner en peligro nuestras soberanías nacionales, pero ceder acríticamente a cualquier posible modalidad de implantación de la informática en nuestros sistemas educativos es también atentatoria de nuestros intereses más preciados.

Pero ¡atención! para poder asumir una posición crítica hay que conocer esa nueva tecnología, sus alcances, sus maravillosas potencialidades, sus peligros y limitaciones. Hoy día, los docentes tenemos una reivindicación más que anexar a nuestra ya extensa lista, un combate más a agregar a nuestra vieja lucha por nuestro mejoramiento académico. Hoy día tenemos que exigir una oportunidad para que el docente se entere y conozca de esa nueva tecnología que le ofrecen como panacea a tantos males. Hay que evitar, a toda costa, el peligro de confundir una actitud constructiva, vigilante y crítica ante la Informática, con una actitud de indiferencia o ignorancia ante la misma que resultaría irresponsable. Luchemos pues por el derecho a informarnos mejor y a experimentar, que a fin de cuentas es nuestro derecho a comprender, tantas veces alienado.

Los diversos problemas que plantea la presencia de la Informática y las posibilidades que ella ofrece nos proponen, a los especialistas en la enseñanza de una disciplina determinada, interesantes retos e insospechadas posibilidades de desarrollo. Es más, se puede afirmar que el éxito mismo de la introduccción de la Informática en un sistema educativo depende estrechamente del desarrollo de las didácticas especiales. Por ejemplo, hacer mejores programas para enseñar Matemática con el computador significa necesariamente haber avanzado en el entendimiento de los procesos cognitivos de nuestros alumnos, significa conocer mejor los obstáculos que se oponen a la comprensión de nuestra disciplina, evidencia una mejor interpretación o explicación de los errores y a las dificultades de nuestros alumnos. Hacer un programa para enseñar cualquier tema o concepto matemático exige como condición indispensable la realización de un análisis didáctico del mismo. Los problemas de diseño o programación vienen después de ese análisis. La inexistencia de esta reflexión didáctica atenta contra la calidad y pertinencia pedagógica del programa producido. Así que hay motivos para preocuparse, pero también en cierto sentido, motivos para alegrarse.

Señoras, señores. Ya es mucho tiempo el que llevo aquí explotando vuestra paciencia. A los colegas organizadores del evento, nuestras efusivas felicitaciones y agradecimiento por las atenciones recibidas. En nombre de los colegas venezolanos aquí presentes, transmito a ustedes un cordial saludo y una invitación a que democraticemos aún más este evento, haciendo todos los esfuerzos a nuestro alcance para divulgar lo aquí discutido entre todos los educadores de nuestro continente, muy en particular hacia su vertiente sur y central. Que esta aula itinerante continúe abierta a todos aquellos que anhelamos mejores tiempos para contar, para cantar y para soñar.

Gracias. Muchísimas gracias.

ESTUDIOS COMPARATIVOS DE LA ENSEÑANZA MATEMATICA A NIVEL MEDIO: UN APORTE PARA EL CARIBE

Pedro A. Suárez
Universidad Autónoma de Santo Domingo
Santo Domingo, República Dominicana

Introducción

Desde hace unos cuantos años el tema de la educación ha ido adquiriendo nueva actualidad. Hasta hace unos 25 ó 30 años las naciones iban desarrollando sus programas y planes educativos con relativa independencia, en forma casi paralela y, hasta cierto punto, en aislamiento unas de otras, sin conocer qué hacían las demás naciones. Todos sabían, por lo menos en Latinoamérica, que para estudiar Leyes en profundidad había que hacer estudios en Francia o España... Para Medicina o Ciencias se iba a Alemania. Para las Artes, Italia... Cada país tenía noticias lejanas de lo que otras naciones llamadas "adelantadas" podían ofrecer de bueno. Pero no se hacían comparaciones ni grandes análisis internacionales para ver quién realmente estaba a la cabeza o en la cola del desarrollo científico, literario o artístico. Mucho menos se conocía en un país sobre el estado de la enseñanza elemental o secundaria en otro país, aunque a veces éste fuera un vecino.

Pero un día, hace unos veinticinco años, el hombre se lanzó al espacio dominando las leyes de la gravedad y contempló desde el cielo la redondez de la Tierra. "Un pequeño paso para el hombre, un gran paso para la humanidad", exclamó el primer cosmonauta norteamericano al poner su planta en la Luna. "No he visto a Dios por ninguna parte", comentó el soviético desde su nave espacial.

Parece que, al vernos así, en conjunto y desde lejos, la humanidad entera cayó en la cuenta de una manera espectacular y como nunca antes en la historia, de que las fronteras, los ríos y los mares no eran más que artificiales accidentes geográficos que en realidad no nos separan tanto como parecen. Y caímos todos en la cuenta de que tenemos, como raza pensante sobre el planeta Tierra, un destino común y una meta única, como los viajeros de un inmenso barco que navega a través del espacio con un único puerto como término de su viaje.

Comenzaron las naciones a medir sus talentos para conocer mejor a los compañeros de viaje. Surgió la curiosidad de los unos acerca de los otros y de sí mismos. Hoy tenemos una pléyade de estudios recientes e investigaciones internacionales, de estadísticas sobre los avances de la ciencia, sobre la salud y la economía, sobre el consumo per cápita y sobre la tenebrosa deuda externa... y sobre la educación. Todos deseamos conocer y comparar. Unas veces, las menos, por una sana curiosidad intelectual. Otras veces para calibrar nuestras fuerzas, conocer nuestras debilidades y poner remedio para poder competir en un mundo en el que no solamente es importante el conocimiento mutuo, sino también la competencia comercial, política y militar. En todo caso, ya pasó la época feliz del aislamiento y la ignorancia, en que cada país, como metido en su concha, trataba de resolver sus problemas sin conocer a fondo los vasos comunicantes que existen entre las naciones de la Tierra. Gracias al Sputnik y al Apolo, que nos retrataron de frente, como somos, se ha despertado la inquietud por saber y por compararnos a los demás compañeros de viaje.

En estos últimos veinticinco años otro fenómeno ha venido a cambiar la faz de nuestro planeta: la computadora. Las implicaciones de esta nueva arma de la ciencia y de la tecnología no se pueden todavía calcular. Estamos en medio de la revolución tecnológica, que se ha comparado con la esencial transformación de la sociedad en el siglo XIX que trajo consigo la revolución industrial, y esta es la hora en que no vemos todavía el final del proceso. La rapidez de la computadora ha traído transformaciones radicales en la manera de llevar las cuentas de los bancos, de fabricar automóviles, de realizar análisis médicos y operaciones quirúrgicas, de almacenar y analizar toda clase de datos, de volar en avión y de lanzarnos al espacio exterior. La computadora ha hecho posible que nos conozcamos desde el nuevo ángulo de los viajes espaciales y ha permitido que los servicios lleguen a más hombres en más países, transformando sociedades primitivas e impactándolas dramáticamente. Esta revolución tecnológica es a todas luces irreversible. Nos arrastra a todas las naciones, ricas o pobres, en su torbellino, que podrá tener un final feliz, o podrá ser catastrófico.

Es a la sombra de esta gran invención del genio humano que queremos tratar hoy el tema de la educación, comparando niveles y situaciones en diversos países.

Dividiremos nuestro trabajo en dos partes: en la primera presentaremos los resultados de algunas investigaciones recientes en las que se compara la educación primaria y secundaria o media de diversos países del mundo. En la segunda parte presentaremos los datos obtenidos en una investigación propia realizada entre los estudiantes de primero y segundo años en un "college" norteamericano, el Miami-Dade Community College, en que se incluyen estudiantes nativos del área del Caribe.

Primera Parte: Estudios Internacionales

En enero del presente año se celebró en Washington, D. C. un simposio titulado "Comparaciones internacionales de la educación matemática: implicaciones para una política de los Estados Unidos". Este encuentro fue patrocinado por un prestigioso órgano de investigación e información, el "Mathematical Sciences Education Board" afiliado a la Secretaría norteamericana de Educación, la Fundación Nacional para las Ciencias y la Academia de Ciencias de los Estados Unidos. De este simposio trataremos solamente, por razón de tiempo, dos de los trabajos presentados. El primero es "The Underachieving Curriculum". En este estudio se analiza la enseñanza matemática en dos niveles: octavo curso y último de Bachillerato o "high school" en veinte países de Europa, América, Asia, Africa y Oceanía.

Usando los mismos parámetros de este estudio un equipo de República Dominicana encabezado por el Dr. Eduardo Luna y la Prof. Sarah González ha analizado el estado de nuestra enseñanza matemática a nivel de octavo curso.

El segundo trabajo, "Mathematical Achievement of Chinese, Japanese and American Children", fue realizado por tres investigadores: H. W. Stevenson y Shin-Ying Lee, de la Universidad de Michigan, y J. W. Stigler, de la Universidad de Chicago. Su investigación utilizó una muestra aleatoria de más de tres mil niños en las ciudades de Minneapolis, Estados Unidos; Taipei, Taiwan y Sendai, Japón, de Kindergarten o pre-escolar, primero y quinto cursos de primaria, y sus madres. En este estudio se mide no solamente la cantidad de matemática aprendida por los niños, sino también las actitudes de los niños y de sus madres hacia la escuela y hacia la educación matemática que reciben.

Seguidamente, analizaremos Japanese Education Today (La Educación Japonesa Hoy). Este es el resultado de un extenso estudio que nació de un encuentro entre el Primer Ministro japonés Yasuhiro Nakasone y el Presidente norteamericano Ronald Reagan en 1983. Ambas naciones se comprometieron a estudiar mutuamente sus sistemas educativos, desde el pre-escolar hasta el universitario y el post-grado. El presente trabajo es el resultado de la parte norteamericana y vio la luz en enero 1987.

Finalmente, "The Search for Successful Secondary Schools: The First Three Years of the Secondary School Recognition Program" es publicado por la Oficina de Investigaciones y Mejoramiento Educativo de la Secretaría de Educación de los Estados Unidos. Desde hace cinco años, a través del Programa de Reconocimiento a la Escuela Secundaria, se trata de identificar las escuelas secundarias públicas que se consideran exitosas en su labor educativa. Hasta 1986 se habían señalado unas 571 escuelas (el 2% del total en EE.UU) que reúnen los requisitos propuestos por la Secretaría de Educación. Más adelante veremos cuáles son estos criterios.

Segunda Parte: Estudio sobre la preparación matemática de estudiantes de un college norteamericano.

En la segunda parte de nuestra presentación haremos un primer informe sobre el estudio acerca de la preparación matemática (background) que traen a la universidad los estudiantes de un típico "college" norteamericano de dos años. Dada la enorme variedad de razas y nacionalidades del Miami-Dade Community College de la ciudad de Miami, Florida, este estudio permite atisbar por lo menos posibles diferencias, tanto de formación académica como de actitudes hacia la matemática, que traen los alumnos, no pocos de los cuales provienen de países del área del Caribe, especialmente Cuba, Nicaragua y Haití. Se encuestaron 576 estudiantes de los tres recintos del Miami-Dade (norte, sur y centro de la ciudad). Comparando las respuestas por a) país donde se ha hecho la secundaria y b) tipo de escuela en que se han realizado esos estudios, podemos contribuir a la mejor comprensión del problema educativo en general y de la formación académica en particular, de los estudiantes de varios países.

Llamará quizás la atención que no hayamos incluido como grupo aparte en este estudio a los dominicanos. La razón es que el número presente de estudiantes dominicanos en Miami es muy pequeño y una muestra de ellos no sería realmente representativa. Por otra parte, siendo la población dominicana en Miami compuesta en su mayoría de residentes de Nueva York que tras varios años allí se han trasladado al sur de Estados Unidos, la mayoría de los jóvenes de origen dominicano no han realizado sus estudios secundarios en su patria, sino en norteamérica, con lo cual sus respuestas no reflejarían adecuadamente la situación de la escuela dominicana.

1.1 THE UNDERACHIEVING CURRICULUM

El Segundo Estudio Internacional de Matemáticas fue un análisis detallado de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en veinte países, o mejor aún, veinte sistemas educativos. El primero de estos estudios fue realizado en 1964. Los sistemas educativos analizados en este Segundo Estudio fueron los siguientes: Bélgica (Flamenca), Bélgica (Francesa), Canadá (Columbia Británica), Canadá (Ontario), Escocia, Estados Unidos, Inglaterra (Gales), Finlandia, Francia (*), Holanda, Hong Kong, Hungría, Israel, Japón, Luxemburgo (*), Nigeria (*), Nueva Zelandia, Swazilandia (*), Suecia y Tailandia. Se realizó la investigación a dos niveles: en octavo curso (población A) y en último año de secundaria (población B). Los países marcados con un asterisco (*) solamente participaron en el primer nivel. La población A consistió de muchachos de 13 años (excepto en Hong Kong y Japón, donde eran de 12 años). La población B consistió de jóvenes que estaban tomando Matemática "avanzada" en su último curso de la escuela secundaria, que los prepararía para entrar en la Universidad.

Los tests o pruebas que se aplicaron eran básicamente las mismas en todos los países, con adaptaciones menores. También se estudiaron las condiciones de enseñanza en cuanto a currículo, calendario escolar, tiempo dedicado a las matemáticas y la formación de los profesores.

Utilizando los mismos parámetros que este estudio, un equipo de la Universidad Católica Madre y Maestra dirigido por los profesores Eduardo Luna y Sarah González, aplicó esta investigación a la realidad dominicana. Sus resultados serán presentados junto con los de los veinte países.

En Aritmética de octavo curso la mediana en aprovechamiento escolar fue de 51% de respuestas correctas (ver gráfica 1). Japón fue el líder con un promedio de 60%. Los Estados Unidos con un promedio igual a la mediana (51%) quedó en décimo lugar. Sorpresivamente

Escocia, Israel, Inglaterra, Finlandia y Suecia quedaron por debajo de la mediana. Para República Dominicana el promedio de 27.1% estuvo por debajo del promedio de Swazilandia, que quedó en último lugar entre los veinte países del estudio.

En el área de Mediciones la mediana fue nuevamente 51% de respuestas correctas (gráfica 2). Japón es otra vez el país más aventajado con un promedio cercano al 70% de respuestas correctas. Estados Unidos cae en el lugar número 18, con un promedio de solamente 42%, muy por debajo de Tailandia y solamente por delante de dos países de Africa: Swazilandia y Nigeria. En el tema de Mediciones se incluían preguntas tanto en el sistema métrico decimal como en el sistema inglés. En ambos tópicos los investigadores encontraron que los niños norteamericanos obtuvieron resultados desalentadores. Para la República Dominicana se obtuvo un promedio de 22.4%, el cual nos sitúa por debajo del vigésimo país del estudio, Nigeria.

En Algebra de octavo curso vuelve Japón a quedar en primer lugar con 60% de respuestas correctas (gráfica 3). Varios países están muy cerca de la mediana (43%): Israel, Finlandia, Hong Kong, Escocia, Estados Unidos y Ontario (Canada). Nuevamente los resultados obtenidos para la República Dominicana fueron desalentadores (27.5%) por debajo de Luxemburgo, pero ligeramente superior al vigésimo país del estudio (Swazilandia).

En Geometría de octavo curso Japón es nuevamente el número uno, con un 58% de respuestas correctas, seguido por Hungría, Holanda, Escocia e Inglaterra (gráfica 4). La mediana fue 43%. Estados Unidos quedó en 16° lugar, con un promedio de 38%, detrás de Suecia, Tailandia y Francia. La versión dominicana de este estudio arrojó un promedio de 24.7%, muy cerca de Luxemburgo, que quedó en último lugar.

Pasemos a los resultados del estudio con la población B, en el cual participaron solamente 15 países. En Algebra Avanzada Japón y Hong Kong se disputan el primer lugar, con casi un 80% de respuestas correctas sobre una mediana de 57% (gráfica 5). Estados Unidos quedó en penúltimo lugar con 43 puntos, solamente por delante de Tailandia que no llega a 40 puntos.

En Cálculo y Teoría de Funciones los resultados son parecidos (gráfica 6). Hong Kong se separa un poco del resto, con más de 70% de respuestas correctas, sobre una mediana de 46 puntos. Estados Unidos apenas alcanza 29%, quedando en duodécimo lugar, por delante de Tailandia, Hungría y Columbia Británica (Canada).

Finalmente, en Geometría se obtuvo una mediana de 42% (gráfica 7). Hong Kong sobresale nuevamente, com más de 62% de respuestas correctas. Japón, en segundo lugar, obtuvo un 60%. Estados Unidos, nuevamente en duodécimo lugar, alcanzó un promedio de 31%, por delante de Hungría, Columbia Británica (Canada) y Tailandia. En esta parte del estudio el tópico fue principalmente Geometría Analítica.

En Estados Unidos se preguntan los investigadores: ¿A qué pueden deberse los promedios tan bajos obtenidos por su país?

Se mencionan varias posibles explicaciones: ¿Será qué la formación de los maestros es deficiente? ¿No se le da suficiente tiempo a la Matemática? ¿Es la Matemática más difícil de enseñar para el maestro norteamericano? ¿Hay demasiado estudiantes por aula?

Una comparación de la formación de los maestros de octavo curso en cinco países (Gráfica 8) muestra que en Japón un maestro típico ha tomado cuatro cursos de Pedagogía o Didáctica de las Matemáticas y seis cursos propiamente de contenido de Matemática durante su formación académica superior. En Hungría los maestros reciben solamente dos cursos de Didáctica, igual que en Estados Unidos, y ocho cursos de contenido matemático (dos más que en Japón y uno menos que en Estados Unidos). En este último país el maestro típico ha tomado igual número de cursos de Didáctica que los húngaros y nueve (más que ninguno) en su área de especialización, Matemática. No se puede explicar el bajo rendimiento de la enseñanza matemática en Estados Unidos mirando solamente al factor formación de los maestros.

Pasando a los profesores de secundaria, en el país número uno, Hong Kong, un profesor típico de último año de escuela superior recibe un tercio de los cursos de Pedagogía y de Matemáticas que su homónimo norteamericano (gráfica 9). El profesor estadounidense está mucho mejor equipado para producir mejores resultados. Más aún, por encima de un 56% de los profesores secundarios en Estados Unidos posee una Maestría. En Japón y Hong Kong solamente un 4% del total la tienen. Tampoco la formación de los profesores de escuela superior explica los desniveles ni el bajo rendimiento académico en Matemática en Estados Unidos, a nivel secundario.

En cuanto a la dificultad de la enseñanza de la Matemática, un 24% de los maestros norteamericanos de octavo curso dijeron que enseñar Matemática es "muy fácil" (gráfica 10). Ninguno de los japoneses dijo tal cosa. Un 42% de los norteamericanos afirmaron que "era fácil" enseñar Matemáticas, contra sólo un 10% de los japoneses. Un 32% de los maestros de Japón dijeron que para ellos enseñar Matemáticas era "duro" o "muy duro". Sólo un 14% de los norteamericanos lo dijeron. Por este camino, tampoco encontramos explicación al desnivel de efectividad educativa entre los dos países.

Pasando al número de estudiantes por aula encontramos que en Japón hay un promedio de 41 estudiantes por cada clase en octavo curso, en Hong Kong hay 44, en Suecia solamente 20 y en Estados Unidos, 26. Sin embargo, Japón y Hong Kong obtienen un alto rendimiento, mientras Suecia y Estados Unidos ocupan los lugares 17 y 14, respectivamente (ver gráfica 11). Como se ve, no parece haber relación alguna entre tener pocos estudiantes por aula y la eficiencia en la enseñanza.

Por otra parte, en un estudio independiente realizado por la revista U. S. News and World Report publicado el 19 de enero de 1987 se citan datos del Departamento de Educación de Estados Unidos y del Anuario de Hechos y Cifras de la Unión Soviética sobre el número de alumnos por profesor entre todas las escuelas primarias y secundarias de los cinco grandes países industrializados del mundo. Nuevamente, Japón aparece con el mayor número de alumnos (21 por cada maestro) (gráfica 12). Este reporte confirma la falta de correlación entre el número de estudiantes por aula y el rendimiento académico.

En cuanto al tiempo dedicado a la enseñanza, la gráfica 13 nos muestra los días de clase al año en los 20 países del estudio. Japón es el que tiene más días de clase al año (243) y Bélgica el que menos (160 días en la parte flamenca y 175 en la parte francesa). Estados Unidos tiene 180. Pero aún aquí no se ve una clara correlación, ya que Israel y Luxemburgo, ambas por debajo de Estados Unidos en rendimiento académico, tienen calendarios de 216 días, un 20% más largos que el norteamericano. El trabajo realizado por U. S. News and World Report confirma este dato (gráfica 14). De las grandes naciones industrializadas del mundo, Japón es, con mucho, la que tiene un calendario escolar más largo, seguido de lejos por Alemania Occidental y la Unión Soviética. Francia y Estados Unidos, con 185 y 180 días, respectivamente, tienen los calendarios más cortos.

¿Será entonces que en Japón dedican anualmente más horas a la matemática? Nuevamente la respuesta aquí es desconcertante. En Estados Unidos se dedica al año más tiempo a la matemática (144 horas) que en Japón (101 horas) (gráfica 15). Mas aún, en Nigeria, país que quedó en penúltimo lugar en rendimiento académico entre los 20 países que participaron en el estudio, se dedican más horas a la matemática anualmente (158) que en ningún otro. Curiosamente Holanda, que sólo dedica 112 horas de clase al año a la matemática, está en segundo lugar en cuanto a su rendimiento y Hungría, con solo 96 horas anuales de Matemática, quedó en tercer lugar.

El estudio The Underachieving Curriculum, finalmente, hace una serie de recomendaciones para el cambio profundo en la enseñanza, y en la enseñanza de la matemática en particular. En primer lugar, se culpa al tipo de curriculum "circular" o "en espiral" por el bajo rendimiento en Estados Unidos. En este tipo de programa se ven los mismos tópicos año tras año, supuestamente con mayor profundidad cada vez. Las recomendaciones incluyen estudiar la factibilidad de un curriculum más lineal y que se revisen los contenidos de la educación matemática secundaria, incluyendo temas poco visitados hoy día en Algebra, Geometría, Probabilidad, Estadística, solución de problemas orales y estimación de medidas.

Sugieren, asimismo, extender la educación matemática a más individuos. Como los programas de la escuela secundaria en Estados Unidos no vienen determinados verticalmente por el Departamento de Educación, sino que quedan al arbitrio de las autoridades locales y, en último término de la elección del estudiante, es fácil que una gran masa salga deficientemente formada en Matemáticas de la escuela secundaria. No se debe caer en la trampa, según los autores del estudio, de dividir prematuramente a los estudiantes en "capaces" e "incapaces", quitándoles a estos últimos la oportunidad de aprender una matemática necesaria para la vida y para su profesión futura.

I.2 MATHEMATICAL ACHIEVEMENT OF CHINESE, JAPANESE AND AMERICAN CHILDREN

El segundo estudio internacional que consideraremos es el de los profesores Harold W. Stevenson, Shing-Ying Lee y James W. Stigler "Aprovechamiento matemático de niños chinos, japoneses y americanos". No nos fijaremos en todos los detalles interesantísimos de este estudio, sino solamente en los datos que iluminan aspectos nuevos del proceso enseñanza-aprendizaje, sobre todo en lo referente al papel de la familia.

Este trabajo incluyó unos 2,300 niños escogidos aleatoriamente en tres ciudades: Taipei (Taiwan), Sendai (Japón) y Minneapolis, Minnesota (Estados Unidos) de pre-escolar, primer curso y quinto curso de Primaria (gráfica 16). Se dedicaron 4,153 horas a la observación directa de los niños, aproximadamente igualmente distribuidas entre las tres ciudades. Se entrevistaron también a las madres de estos niños. Fue imposible -aducen los investigadores- concertar entrevistas con los padres de los niños, especialmente en Japón, debido a los largos horarios de trabajo de los mismos que los mantienen alejados del hogar la mayor parte del tiempo.

En conjunto, esta investigación encontró que en los tres niveles estudiados los niños norteamericanos alcanzaban un rendimiento escolar menor que los niños japoneses o chinos. Asimismo, era inferior su aprecio por la escuela y por las tareas escolares. Sin embargo, las madres americanas se mostraron más entusiastas que las orientales con respecto a la calidad de la escuela (gráfica 17). Un 91% de las madres norteamericanas dijeron que la escuela era "excelente" o "buena", mientras que las japoneseas decían lo mismo solamente en un 39%.

El porcentaje del tiempo de clase dedicado a las actividades académicas varía en los tres países. En las escuelas de Minneapolis, en el pimer curso se pasa más de un 30% en actividades no directamente académicas (gráfica 18), y en el quinto curso es todavía peor: se pierde más de un 35% del tiempo. Las proporciones del tiempo empleado en Japón y Taiwan en actividades propias del aprendizaje son mucho más altas y en quinto curso se trabaja más arduamente que en el primero.

Otro punto interesante es la tarea asignada para la casa. A los maestros se les pidió jerarquizar en orden de importancia dieciséis actividades escolares. Los maestros de Minnesota pusieron la tarea en penúltimo lugar, seguida solamente por el castigo corporal. En una escala de 1 a 9, donde 9 es la máxima importancia, los maestros norteamericanos dieron a la tarea un promedio de 4.4 (gráfica 19), mientras los japoneses le dieron 7.3 y los taiwaneses 5.8.

Aunque, como promedio, la tarea en la escuela americana era muy poca, las mamás juzgaron que era adecuada en un 69%. A pesar de que los niños chinos y japoneses tienen que pasar muchas horas en casa haciendo la tarea, las madres de Taiwan aprobaban esto en un 82% (gráfica 20). Las japonesas sólo le daban un 67%, probablemente creían que la cantidad asignada no era suficiente.

Las madres norteamericanas aparecen en este estudio más conformes y satisfechas con sus hijos, en una actitud de mayor aceptación, que las madres orientales. Estas dan más valor al esfuerzo, aquellas a la habilidad natural y la inteligencia. Cuando se les pide opinar sobre la capacidad intelectual de sus hijos, en una escala de 0 a 10 donde 5 corresponde a la inteligencia "promedio", las americanas dan a sus hijos un 6.3 (Gráfica 21), un promedio más alto que las madres taiwanesas o japonesas.

De manera similar, en una escala de 1 a 9 las madres de Minneapolis opinaron que sus hijos tenían más habilidad matemática que las madres de Taiwan o Japón. (Gráfica 22).

Resumiendo, el problema no radica en determinar si los niños taiwaneses o japoneses o norteamericanos son más o menos inteligentes o tienen más o menos habilidad para la Matemática. Lo que aparece claro en este estudio es el importante papel que juegan las madres orientales en el desarrollo de hábitos de esfuerzo y estudio para conseguir una sólida educación. Este papel está dolorosamente ausente en las madres de niños de Minneapolis entrevistadas en este trabajo. Los autores terminan con una conclusión que resume la importancia de la familia en el proceso educativo:

"Parece obvio que el éxito de los niños en Matemáticas y en otras áreas dependerá de una mayor consciencia y de una voluntad incrementada de los padres norteamericanos de ayudar directamente a sus hijos. Las escuelas pueden ser mejoradas, pero la tarea de ayudar a sus hijos a alcanzar niveles más altos de aprovechamiento no puede realizarse sin una mayor cooperación y comunicación entre la escuela y el hogar. Más aún, sin darnos cuenta en mayor medida de la importancia de los años de la escuela elemental para la educación de los niños en Matemáticas y en Ciencias, una legislación para mejorar la instrucción en las escuelas secundarias puede resultar en poco más que unos ejercicios remediales para la mayor parte de los estudiantes".

I.3 JAPANESE EDUCATION TODAY

El tercer estudio, La Educación Japonesa Hoy, es el resultado de una exhaustiva investigación patrocinada por la Secretaría de Educación de los Estados Unidos, en colaboración con el gobierno japonés. Consiste en un completo análisis de la educación en Japón, desde el maternal o pre-escolar hasta la Universidad, incluyendo también un interesante estudio sobre la sociedad japonesa, las relaciones entre la escuela y la industria, el mercado de trabajo en Japón, la investigación científica, etc. El conocimiento de los datos aportados por este estudio han servido para crear un ambiente de emulación en los medios educativos de Estados Unidos, que ya trasciende a la opinión pública norteamericana.

Aunque el estudio nos presenta datos objetivos que resaltan la excelencia del sistema educativo japonés, especialmente a nivel primario y secundario, se señalan también algunas críticas que aun dentro de Japón se ventilan contra el sistema, y que constituyen la espina dorsal de un movimiento de "reforma" educativa. Entre estas críticas se pueden apuntar:

a) La primaria se orienta casi exclusivamente al examen de ingreso a la secundaria, y ésta se orienta al examen de ingreso a la universidad.

b) Durante los años de primaria y secundaria se crean tremendas presiones entre los jóvenes que junto con el rígido y tradicional código de honor japonés llevan a la frustración y hasta al suicidio a muchos jóvenes.

c) La universidad japonesa es más laxa que la norteamericana: cesan las presiones y el estudiante universitario tiene la virtual seguridad de que se graduará sin mayor esfuerzo. Un investigador llega a decir: "En Estados Unidos se toman los exámenes para salir de la universidad; en Japón se toman para entrar...".

d) El sistema educativo japonés insiste en un igualitarismo y una rigidez que entorpece el desarrollo individual y la creatividad. No se toman en cuenta de manera suficiente a los estudiantes más brillantes, que podrían avanzar a un paso más acelerado, ni a los más lentos, que necesitarían más tiempo y otro tipo de estudios más adecuados a su paso, para poder vencerlos.

e) Insistencia en la memorización y almacenamiento de gran número de datos. Menos énfasis en la originalidad y creatividad.

f) La investigación se realiza más a nivel de industria y menos en la universidad. Por tanto, se enfatiza más la investigación aplicada que la investigación pura o básica.

Analicemos brevemente el extraño tema de los suicidios. Dadas las altas expectativas del medio social y familiar sobre los jóvenes japoneses, muchos no pueden soportar la presión ante el fracaso escolar o una mala nota en un examen de ingreso a la secundaria o la universidad. En el sistema japonés el joven queda prácticamente marcado desde temprano en el nivel de vida que habrá de llevar por el resto de su vida: si pasa exitosamente el examen de ingreso a la secundaria su probabilidad de prepararse bien académicamente en una prestigiosa escuela para luego poder entrar (mediante otro exitoso examen de ingreso) en una de la mejores universidades es mucho mayor. La entrada en una buena universidad le garantiza un mejor empleo en el futuro y un "status" social más elevado. Al joven se le inculca el valor de estos exámenes de ingreso y las consecuencias para el buen nombre de su familia. El fracaso significa el deshonor al romper las esperanzas depositadas en él. Esto explica el alto índice tradicional de suicidios entre la juventud japonesa.

Sin embargo, la gráfica 23, tomada del estudio que analizamos, indica que, a pesar de estas presiones reales, la realidad va cambiando en el Japón y también en los Estados Unidos. En las tres categorías por edades (10-14 años, 15-19 años y 20-24 años) hoy día hay menos suicidios por cada 100,000 habitantes en Japón que en Estados Unidos. Las causas del alarmente aumento de suicidios en Norteamérica pueden ser múltiples y un análisis detallado de las mismas se escapa a nuestro tema, pero se sabe que un importante factor es el problema de las drogas.

¿Qué ha hecho Japón para lograr su impresionante éxito en educación desde la Segunda Guerra Mundial? Resaltan varios factores:

a) Una sociedad homogénea con un elevado sentido de nación y una excelente organización administrativa,

b) Una filosofía de <u>educación para todos</u>, implementada rígidamente por un fuerte gobierno central, con una eficiente Secretaría de Educación,

c) Una familia de valores tradicionales que apoya el valor de la educación y que exige de sus hijos gran esfuerzo y una conducta irreprochable.

Por parte del Estado, hay una decidida política educativa que ha quedado plasmada desde hace cuarenta años en la Ley Fundamental de Educación, una especie de Carta Magna Educativa, de la cual extraemos estas líneas que ilustran por sí solas la voluntad de este gran pueblo:

"Habiendo establecido la Constitución de Japón hemos mostrado nuestra resolución de contribuir a la paz del mundo y al bienestar de la humanidad construyendo un estado democrático y culto. La realización de este ideal dependerá fundamentalmente del poder de la educación. (Ley Fundamental de Educación, 1947).

I.4 THE SEARCH FOR SUCCESSFUL SECONDARY SCHOOLS: THE FIRST THREE YEARS OF THE SECONDARY SCHOOL RECONGNITION PROGRAM.

El cuarto y último estudio que queremos analizar es La Búsqueda de Escuelas Secundarias Exitosas: los primeros tres años del programa de reconocimiento de escuelas secundarias.

Conscientes de la necesidad de mejorar su sistema escolar la Secretaría de Educación de Estados Unidos ha establecido un programa para identificar y estimular la calidad educativa en las escuelas secundarias. El presente trabajo es un reporte de la Oficina de Investigación y Mejoramiento Educativo de la misma Secretaría, que nos informa el resultado de los tres primeros años del programa, que funciona desde 1982.

Alrededor de 500 escuelas secundarias han sido nominadas en esos tres primeros años de todos los cincuenta estados y el Distrito de Columbia. De las nominadas fueron "visitadas" y estudiadas por comisiones la mitad de ellas. De éstas fueron "reconocidas" como excelentes menos de la mitad de las visitadas. ¿Qué buscan los investigadores en esas escuelas?

Se han identificado catorce áreas o "indicadores" que pueden señalar la calidad escolar de una institución educativa:

1. Que la escuela tenga objetivos académicos claramente definidos, incluso por escrito (en forma de Reglamento o Manual) y que los conozcan bien y los pongan en práctica todos los componentes de la comunidad educativa, incluyendo los padres de los alumnos.

2. Que haya elevadas expectativas sobre los estudiantes: la firme convicción de que todos los estudiantes pueden aprender algo, de acuerdo con sus capacidades.

3. Orden y disciplina escolar, sin las cuales no puede ocurrir debidamente el proceso enseñanza-aprendizaje.

4. Que haya premios e incentivos para los estudiantes que sobresalen en el aspecto académico, deportivo o de contribución al espíritu de la escuela en algún sentido.

5. Control regular y frecuente del progreso académico de los estudiantes.

6. Oportunidades para que exista una participación responsable y significativa de los estudiantes en los asuntos escolares.

7. Eficacia de los profesores, tanto por la calidad de su docencia como por su contribución al buen espíritu escolar, como consecuencia de sentirse bien en su trabajo.

8. Premios e incentivos para los profesores, materializados en forma de promociones, menciones honoríficas a los más destacados, aumentos salariales, etc.

9. Concentración en el tiempo dedicado al aprendizaje: que este tiempo sea lo prioritario en la escuela, por encima de otras actividades.

10. Clima escolar positivo, para lo cual contribuye el respeto a las autoridades de la escuela y de éstas a sus subordinados, ausencia de "chismes" de pasillo, trato afectuoso y respetuoso entre alumnos y profesores, etc.

11. Liderazgo de la administración de la escuela. Es clave el papel del Director o Principal en la marcha diaria, y en todo lo concerniente al buen mantenimiento del clima que se respira en la escuela.

12. Currículum bien articulado: esto es muy importante en un país como Estados Unidos, donde no hay "planes de estudio" prefijados, sino que los mismos dependen de las autoridades educativas locales.

13. Evaluación en orden a mejorar la instrucción. Esto implica reuniones frecuentes y decisiones basadas en la consulta de las bases, mecanismos de evaluación eficientes sobre la marcha del curso, el progreso de los estudiantes, etc.

14. Apoyo e integración de la comunidad: la comunidad educativa, especialmente los padres, deben estar integrados a la marcha de la escuela. Deben tenerse con ellos reuniones informativas, actos a los cuales se les invita y deberán existir mecanismos mediante los cuales se puedan recibir ideas y sugerencias de la comunidad donde está situada la escuela. Hacer que la comunidad se sienta parte del proceso educativo de sus hijos.

De estos indicadores se ha encontrado que las escuelas que alcanzan el reconocimiento por su excelencia tienen en grado superior estas nueve características:

1. Un claro sentido de un propósito común que no se queda a nivel de documento en el papel, sino que es compartido por los profesores, los estudiantes, los padres y la comunidad alrededor de la escuela.

2. El liderazgo del director es fundamental: que tenga visión y energía suficiente para crear y mantener las condiciones que hacen posible el éxito.

3. Discreto control: ni tanto que sea dictatorial e imponga miedo, ni tan poco que ya no haya control. Que se experimente un balance entre una supervisión adecuada y la necesaria autonomía de los profesores y del personal auxiliar para realizar bien sus funciones. A este estilo se le llama "colegialidad".

4. Efectividad en reclutar y retener buenos profesores y administradores.

5. Reconocimiento y recompensa de los logros del profesorado (por ejemplo, el mejor maestro del año en cada rama, la celebración y premiación de graduaciones entre el profesorado, estímulo por cursos que hayan realizado, etc.).

6. Una sana relación entre profesores y alumnos que excluya antipatías personales mutuas, faltas de respeto, exceso de confianza o de temor, etc.

7. Convicción de que todos los estudiantes pueden ser motivados a aprender. Expectativas elevadas acerca de la capacidad de producir de los estudiantes.

8. Capacidad para encontrar respuestas creativas a los problemas que se presenten. En todas las escuelas, buenas, mediocres o malas, se presentan problemas tales como: necesidades físicas de la planta del edificio escolar, descenso o exceso del número de estudiantes, deficiencias económicas, relaciones con la comunidad, disciplina escolar, faltas de asistencia de estudiantes o profesores, descenso en el buen clima o en el espíritu de la escuela, problemas de alcohol o drogas entre los estudiantes, etc.

9. Alto grado de participación de los padres y de la comunidad en los asuntos de la escuela. Esto se manifiesta en la asistencia a reuniones de padres y maestros, en los eventos socioculturales patrocinados por la escuela, lo que la prensa local escribe sobre la escuela, etc.

De todo esto, con las convenientes adaptaciones a nuestros ambientes y situaciones concretas, quizás podríamos sacar algunas buenas lecciones...

SEGUNDA PARTE:

ESTUDIO SOBRE LA EDUCACION MATEMATICA SECUNDARIA ENTRE LOS ESTUDIANTES DE MIAMI-DADE COMMUNITY COLLEGE: UNA COMPARACION ENTRE ESTUDIANTES DE ORIGEN NORTEAMERICANO, CUBANO, HAITIANO Y NICARAGUENSE.

Contra el telón de fondo que nos dan los cuatro estudios presentados en la primera parte se nos ocurrieron varias preguntas: ¿Cómo se aplican estos resultados a nuestro medio latinoamericano, y más en concreto al área del Caribe? ¿Cómo vienen formados matemáticamente nuestros estudiantes latinos al entrar en la Universidad? ¿Qué cursos han tomado? ¿Qué actitud traen hacia la Matemática desde la secundaria?

Por otra parte, ¿hay alguna diferencia entre estudiantes que terminan la secundaria en Estados Unidos y en Latinoamérica? ¿Qué lecciones podemos sacar nosotros, en nuestros países de América Latina, de los análisis internacionales considerados en la primera parte?

El Miami-Dade Community College es uno de los veintiocho "colleges" de dos años del sistema de enseñanza superior estatal de la Florida, con política de matriculación abierta (sin examen de admisión), muy barato, con cuatro grandes recintos en el área metropolitana de Miami: Norte, Sur, Centro de la Ciudad y Centro Médico. Tiene una población escolar de unos 60,000 estudiantes de todas las nacionalidades y orígenes étnicos. Es el más grande centro universitario de su tipo en Estados Unidos. Dado el carácter popular de esta institución dentro del medio norteamericano, pareció el mejor laboratorio para, sin salir de Miami, tratar de hallar respuesta a nuestras preguntas.

Se preparó un cuestionario, en cuya elaboración participaron varios profesores del Miami-Dade, muy especialmente la Dra. María Maspons y el Prof. René García del "Testing Center". Se distribuyeron unas mil copias entre profesores de matemáticas de los distintos recintos del College. El servicio de "Testing" del Miami-Dade se encargó de procesar y tabular por computadoras las respuestas. He aquí algunos de los resultados obtenidos.

Contestaron el cuestionario 576 estudiantes, de los cuales un 53% eran hembras y un 47% eran varones. Un 65.1% provenían del recinto "Centro de la Ciudad" o de su filial, el Centro Interamericano, un 13.9% del recinto norte y 17.2% del recinto sur. En términos del origen de nuestra población se dividió el estudio de acuerdo al país donde se hubiera realizado la mayor parte de la educación secundaria, tomando en cuenta la población inmigrante del área de Miami. De acuerdo con esta clasificación se obtuvieron los resultados siguientes: hicieron su enseñanza secundaria en Estados Unidos 365 estudiantes, en Cuba 83, en Haití 18, en Nicaragua 16 y en otros países 92. No respondieron esta pregunta solamente dos personas. Aunque se hicieron esfuerzos por incluir en la muestra un número apreciable de estudiantes nicaragüenses y haitianos no se logró contar con un gran número de estos. Por ello, serán incluidos para efectos estadísticos, entre los estudiantes provenientes de "otros países", aunque se indique frecuentemente cuáles fueron sus respuestas.

Se debe observar también que entre los "otros países" aparecen estudiantes no solamente de Latinoamérica, sino también, aunque en menor proporción, jóvenes provenientes de países no latinos como Irán, Líbano, España, Inglaterra, etc.

Resulta grato encontrar que a la pregunta "Un buen conocimiento de Matemáticas es importante para mi éxito profesional" un 87% de los estudiantes responde "Fuertemente de acuerdo" o "De acuerdo". Esto indica una valoración positiva de la Matemática por casi todos los estudiantes. Hay muy poca diferencia en la forma en que estudiantes de Estados Unidos, Cuba y de otros países responden a esta pregunta.

Una pregunta en la que empieza a notarse variación es: "Comparada con otras materias, encuentro la Matemática fácil". Un promedio de 60% responde que está "Fuertemente de acuerdo" o "de acuerdo" con la afirmación. Pero entre los cubanos el porciento de los que responden afirmativamente es 71, los nicaragüenses responden positivamente en un 75% y los haitianos en un 78%. De los que han hecho su secundaria en Estados Unidos, solamente un 58% encuentra fácil la Matemática.

Se investigaron los cursos que han tomado los estudiantes de diversas procedencias antes de llegar a la universidad. Se debe tener en cuenta que no todos los estudiantes han hecho un Bachillerato preparatorio a la Universidad, sino que entre ellos los hay que han estudiado la secundaria comercial o vocacional, etc. Asimismo, en Estados Unidos hay una gran variedad de secundarias y cada estudiante decide, con su consejero, los cursos que habrá de tomar. Primeramente se pregunta si se ha tomado Algebra I. Básicamente, la gran mayoría responde positivamente. En Geometría y Trigonometría la historia es bien distinta. Uno de cada tres estudiantes que ha realizado su secundaria en Estados Unidos nunca tomó Geometría y solamente uno de cada cuatro ha tomado Trigonometría. Entre los que vienen de Cuba un 83% ha tomado Geometría y un 60% ha tomado Trigonometría. Los provenientes de otros países contestaron que un 88% tomó Geometría y un 59% tomó Trigonometría en la escuela secundaria (ver gráfica 24).

Las diferencias se hacen aún más dramáticas cuando se pregunta sobre la Geometría Analítica, el Análisis Matemático y el Cálculo (ver gráfica 25). Solamente un 11% de los norteamericanos ha tomado Geometría Analítica en secundaria. Un 32% y un 33% de los cubanos y haitianos, respectivamente, la han tomado. El 61% de los haitianos dicen haber tomado Análisis Matemático. Probablemente en otros países no se da el curso con ese nombre y de ahí los bajos porcentajes observados.

Un 33% de haitianos y de cubanos dice haber tomado Cálculo en secundaria (gráfica 26), así como un 25% de otros países. Solamente un 4% de los estudiantes encuestados cuya secundaria fue realizada en Estados Unidos tomaron Cálculo. Se sabe que a nivel nacional en este país un 6% de los estudiantes toman Cálculo. Por tanto, el número de alumnos que toma Cálculo en nuestra muestra es ligeramente menor que la media nacional.

Pasamos a estudiar el número de años de Matemática que los estudiantes reciben en la secundaria. Mientras un 94% de origen haitiano, un 50% de los cubanos y un 69% de otros países dice haber estudiado Matemática por cuatro o más años, solamente un 36% de los norteamericanos afirman tal cosa. Un 6% de los norteamericanos dice haber recibido cursos de Matemática solamente por un año o menos (gráfica 27).

Una comparación entre el número de años que el estudiante pasa en Norteamérica y el número de años de Matemática que se estudia como promedio arroja una interesante correlación negativa: un 68% de los que han estado en Estados Unidos solamente tres años o menos han estudiado cuatro o más años de Matemática; un 50% de los que llevan entre 3 y 8 años en USA han estudiado Matemática por cuatro años y solamente un 39% de los que llevan 9 o más años en el país han tenido esa preparación (gráfica 28).

Comparando la escuela privada y la pública se ve que en aquella se estudia Matemática por más años que en la última: mientras solamente un 39% de los graduados de secundaria pública han tomado cursos de Matemática por cuatro años, un 60% de los egresados de escuelas privadas religiosas y un 75% de los graduados de escuelas privadas no religiosas lo han hecho (gráfica 29).

De aquí pasamos a una pregunta apreciativa: ¿Cómo estimas tú que los cursos de Matemática que tomaste en la secundaria te prepararon para el nivel universitario? Mientras aproximadamente uno de cada cuatro norteamericanos dijeron que esa preparación era indadecuada, sólo uno de cada diez cubanos, nicaragüenses o de otros países dijo tal cosa. Ninguno de los estudiantes haitianos se sintió inadecuadamente preparado (gráfica 30). Por otra parte, un 45% de los cubanos opinó que estaba "muy bien preparado", así como un 50% de los haitianos, un 19% de los nicaragüenses y un 38% de otros países. Entre los norteamericanos, la proporción de los "muy bien preparados" fue de 25%.

Preguntados sobre la habilidad de los profesores de Matemática en secundaria para "estimular el interés por la Matemática", un 77% de los cubanos dijo que era "muy buena" o "buena", así como un 67% de los provenientes de otros países y solamente un 46% de los norteamericanos. Por contraste, un 23% de estos últimos dicen que era "muy mala" o "mala", así como un 4% de los cubanos, y un 12% de los de otros países (gráfica 31). Una pregunta similar fue: ¿Cómo dirías tú que fue la habilidad de tus profesores de Matemática en secundaria para enseñar su materia a los estudiantes? Aquí los maestros salen mejor parados: la gran mayoría de los cubanos y los de otros países dicen que fue "buena" o "muy buena", mientras un 55% de los norteamericanos afirma lo mismo. Pero un 13% de los estadounidenses contestó que era "mala" o "muy mala" y solamente un 4% de cubanos y un 6% de otros países afirmó esto último (gráfica 32).

Pasando al tipo de escuela de donde provienen los estudiantes notamos que 391 hicieron el bachillerato o secundaria preparatorio a la universidad, 94 provienen de una secundaria técnico-vocacional, 31 de una escuela comercial y 38 de una escuela general. Un 87% de los graduados de secundaria pre-universitaria afirma tener una preparación matemática muy buena o adecuada. Un 62% de los egresados de escuelas técnico- vocacionales, un 63% de los graduados en escuela de comercio y un 53% de los provenientes de secundarias generales están igualmente satisfechos de su preparación matemática. De manera similar, mientras un 63% de egresados de escuelas pre-universitarias afirma que sus profesores tuvieron una habilidad "buena" o "muy buena" para estimular su interés por la Matemática, solamente un 39% de los egresados de escuelas técnicas y un 29% de los provenientes de escuelas generales lo afirman. Curiosamente, las proporciones no difieren mucho en las preguntas sobre la facilidad para la Matemática, el interés por la Matemática y la valoración positiva de la matemática para el éxito profesional en las distintas categorías por escuelas (gráfica 33).

Finalmente, la gráfica 34 ilustra la preparación matemática de los estudiantes frente al número de años que llevan en Estados Unidos. Los que llevan tres años o menos en Norteamérica contestan en un 55% que se sienten muy bien preparados para la universidad (y esto, a pesar de las barreras lingüísticas y culturales), mientras solamente un 23% de los que llevan 9 o más años en USA afirman que se sienten matemáticamente bien educados frente a las demandas de la universidad. En contraste, mientras solamente un 9% de los recién llegados dicen sentirse inadecuadamente formados en Matemática, un 28% de los que llevan 9 o más años en USA lo afirman.

CONCLUSIONES

¿Qué hemos aprendido de todo esto? Aunque reconocemos lo preliminar del estudio que hemos presentado en esta segunda parte podemos apreciar en él algunas tendencias que nos parecen dignas de explorar en investigaciones futuras.

Primeramente, en casi todas las áreas investigadas se han podido calcular diferencias significativas entre los estudiantes que han hecho su secundaria en Estados Unidos y los que provienen de otros países, concretamente del Caribe. Esto podría indicar una confirmación de los resultados de los estudios presentados en la primera parte de nuestro trabajo en cuanto a la crisis de la educación secundaria en Estados Unidos, en particular en el área matemática.

En segundo lugar, surge la inquietud acerca de la naturaleza de la secundaria en los diversos países de donde provienen los estudiantes de esta muestra. ¿Se deben las diferencias observadas a la naturaleza más "elitista" de nuestros bachilleratos latinoamericanos, más selectivos académicamente, frente a la masiva y desigual educación secundaria norteamericana? ¿Es la población latinoamericana de Miami representativa de la población de sus respectivos países? Creemos que estas preguntas no pueden responderse adecuadamente sin hacer un estudio más profundo en los países de origen de los estudiantes encuestados y tratar de analizar los mismos parámetros con la población estudiantil de esos países que no ha emigrado.

Salta a la vista, no solamente en nuestro estudio de la segunda parte sino en los trabajos presentados en la primera parte de esta ponencia, que a pesar de los avances tecnológicos, el alto nivel de vida, el excelente material educativo (libros de texto, computadoras, material audiovisual, etc.) - y, en fin, la abundancia de recursos económicos con que cuenta la escuela norteamericana, ésta no alcanza a producir proporcionalmente a la inversión. Esto nos cuestiona: ¿Qué es, en fin, la educación? ¿Qué hace falta para producir buenos resultados, tangibles y medibles por el aprovechamiento de los estudiantes?

En el trabajo The Underachieving Curriculum vimos que la calidad de la enseñanza no radica solamente en el número de horas dedicadas a la matemática ni en el número de días del calendario escolar ni en la buena preparación de los profesores. La búsqueda de escuelas secundarias exitosas ha encontrado que la calidad de un centro de educación secundaria no depende solamente del alto nivel socioeconómico ni de la composición social del estudiantado, ya que se han reconocido escuelas excelentes tanto en las áreas residenciales suburbanas como en los barrios tipo "ghetto" de las grandes ciudades norteamericanas. El estudio con niños japonenes, taiwaneses y norteamericanos arroja luz sobre el importante papel de la familia, especialmente de la madre, y de los valores familiares, en la educación de los niños.

Cabe entonces preguntarse: ¿Puede un país latinoamericano, a pesar de los problemas sociales, políticos y económicos que enfrente, alcanzar resultados satisfactorios o superiores en sus escuelas, si en la educación se dan factores compensatorios como son: un arraigado sistema de valores culturales, una influencia positiva del hogar, un currículo inteligentemente confeccionado y pedagógicamente balanceado, y unos maestros bien formados y verdaderamente consagrados a la tarea de forjar una generación culta y trabajadora, dispuesta a colaborar para elevar el nivel de vida de la nación?

Parece evidente que el proceso educativo queda engarzado en una problemática más amplia, la del entorno social que respira la escuela. El ejemplo de Japón nos impresiona, pero no es perfecto: aún en Japón hay un movimiento de reforma educativa que intenta corregir las críticas que se hacen desde dentro y desde fuera. Parece que el hombre nunca está satisfecho de lo que alcanza y busca siempre algo infinitamente mejor. Por otra parte, no es fácil imitar el modelo japonés: nuestros países no son el Japón ni nosotros los latinoamericanos somos como los japoneses.

Finalmente, no se pueden analizar estas comparaciones internacionales como una simple carrera de caballos o un concurso de belleza. Cada nación debería producir, dentro de su contexto histórico, de su idiosincrasia y de sus propios valores, el sistema educativo que sirva mejor a los intereses de su pueblo. ¿Cómo lograr esto?

Esta es la gran pregunta. Ojalá que esta ponencia haya servido para dejar al lector con esta inquietud.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece primeramente a los 576 estudiantes del Miami-Dade Community College que participaron en la encuesta sobre la educación matemática secundaria. Sin ellos este trabajo no hubiera sido posible.

La Dra. María M. Maspons ofreció sus sabias orientaciones en el área de Educación Matemática y en la confección del cuestionario. El Prof. René García, con pericia y optimismo incansable, dio los toques finales al cuestionario y facilitó las tarjetas para la computadora, el trabajo de los programadores y toda la colaboración del departamento de "Testing" del Miami-Dade. Los siguientes profesores participaron entusiastamente en este estudio, administrando el cuestionario a sus estudiantes: Jorge F. Cossío, Juan Luis García, Julio García-Gómez, Dr. Benito González Quevedo, Dale Grussing, John Lester, Dr. Gerald Mason, Dr. Ram Krishna Raichoudhary, Cándido Sánchez y Arturo Sosa.

A todos ellos va nuestra más sincera gratitud.

BIBLIOGRAFIA

1. Curtis C. McKnight, F. J. Crosswhite, J. A. Dossey, E. Kifer, J. O. Swafford, K. J. Travers y T. J. Cooney, The Underachieving Curriculum: Assessing U. S. School Mathematics from an International Perspective, Stipes Publishing Co., Champaign (Illinois): Enero 1987.

2. Harold W. Stevenson, Shin-Ying Lee y James W. Stigler, "Mathematics Achievement of Chinese, Japanese and American Children", Mathematical Sciences Education Board, ARTICLES, 14 de febrero 1986, p. 693-698.

3. OERI Japan Study Team, Japanese Education Today, U. S. Government Printing Office, Washington, D. C.: Enero 1987.

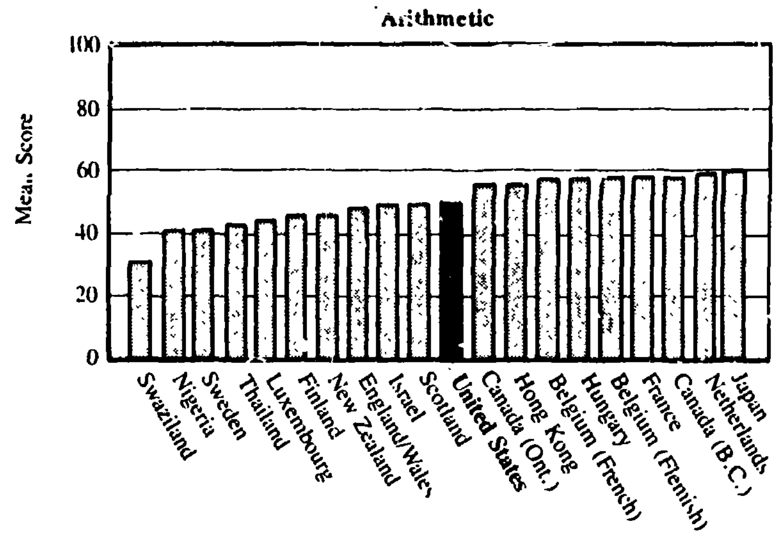
4. OERI, Michelle A. Woods (editora), The Search for Successful Secondary Schools: The First Three Years of the Secondary School Recognition Program, Research for Better Schools, Philadelphia: Octubre 1986.

5. Lewis J. Lord, Mary Lord, Miriam Horn, Richard Z. Chesnoff, Pamela Sherrid, Douglas Stanglin, Jeff Trimble, Elizabeth Blaug, Sharon F. Golden y Maureen Walsh, "The Brain Battle", U. S. News and World Report, enero 19, 1987, p. 58-65.

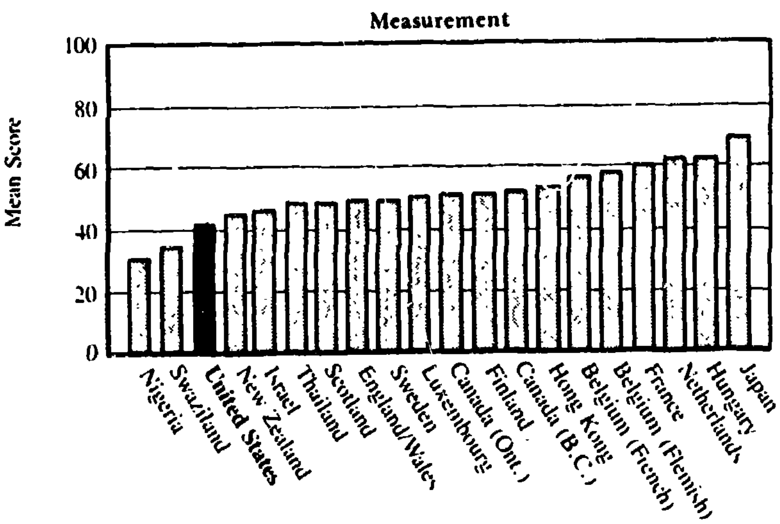
6. Jean Seligmann, Pat Wingert y Frank Baldwin, "Memorizing vs. Trinking", Newsweek, enero 12, 1987, p. 60-61.

ANEXOS

Gráfica 1: Aritmética Octavo Curso (Grupo A)

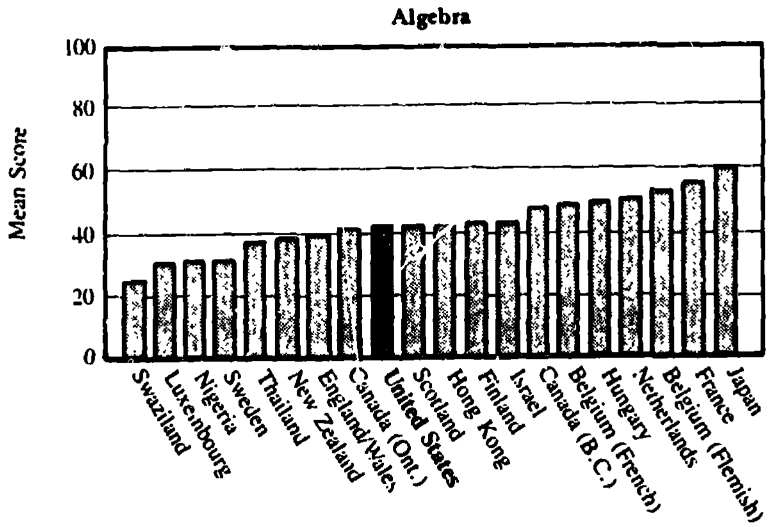


Gráfica 2: Tema de Medidas, Octavo Curso

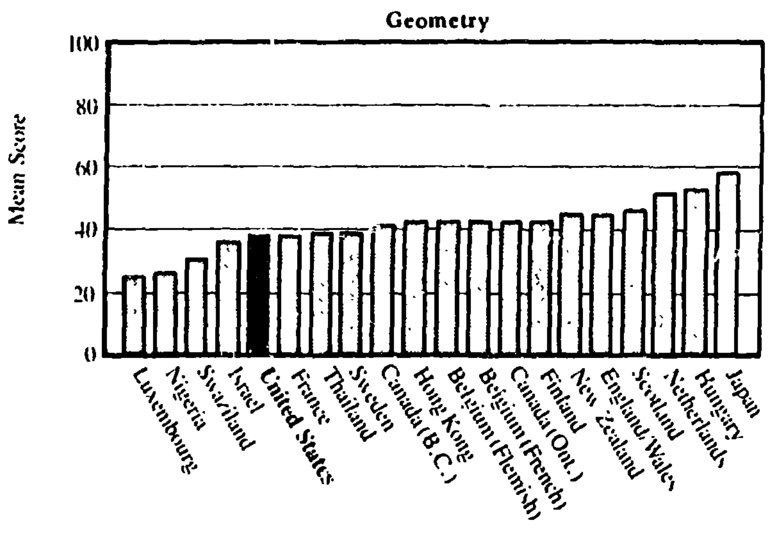


(Tomado de The Underachieving curriculum)

Gráfica 3: Algebra (Octavo Curso)

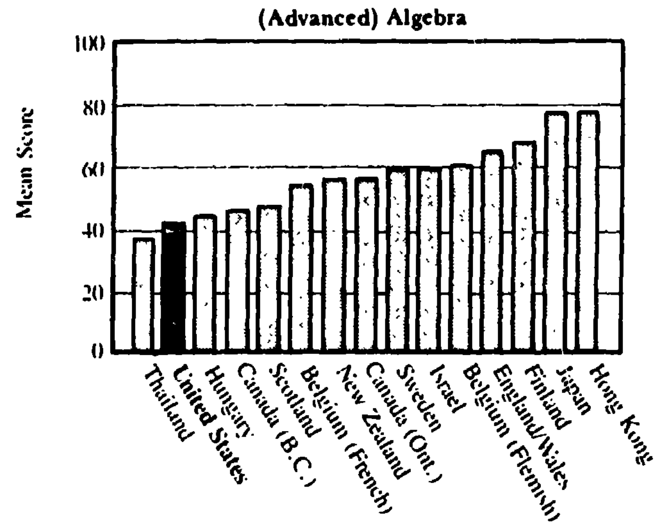


Gráfica 4: Geometría Octavo Curso

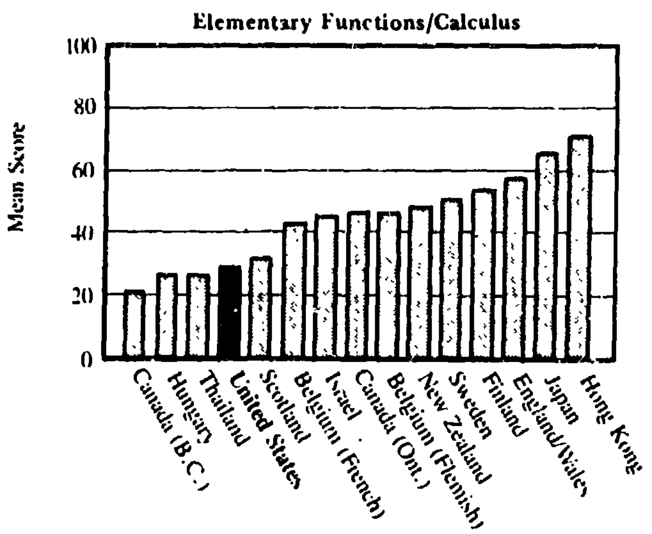


(Tomado de The Underachieving curriculum)

Gráfica 5: Algebra del grado 12 (Grupo B)

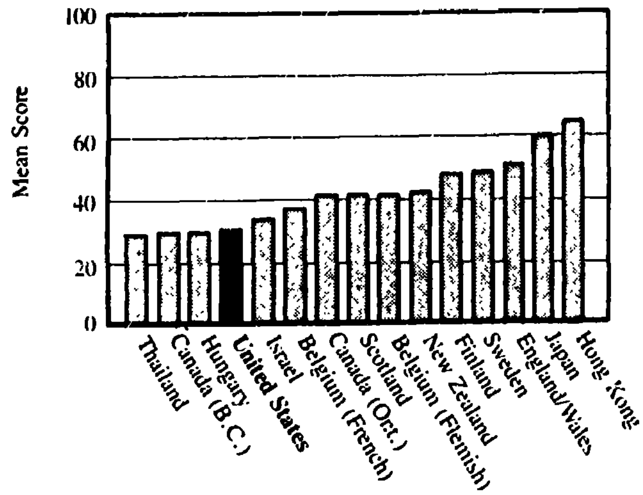


Gráfica 6: Teoría de Funciones y Cálculo (grado 12)

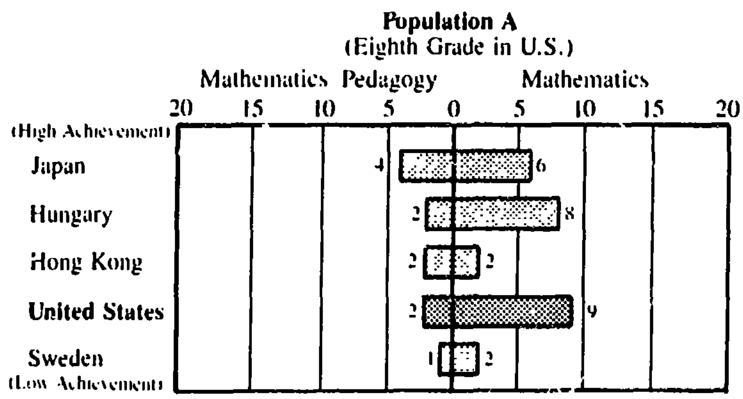


(Tomado de The Underachieving curriculum)

Gráfica 7: Geometría (grado 12)

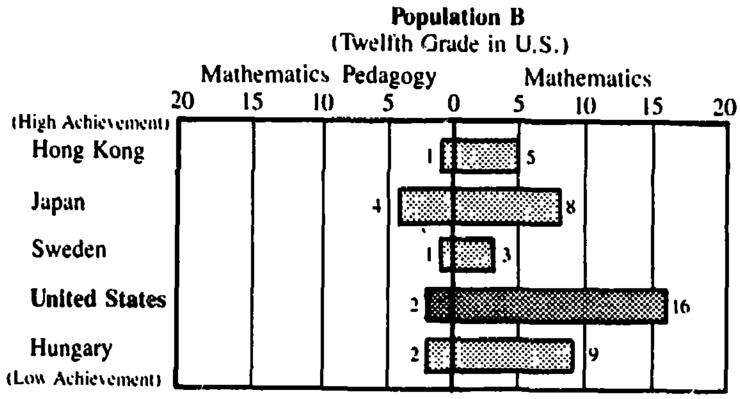


Gráfica 8: Formación de maestros de Octavo Curso en Japón y E.U.

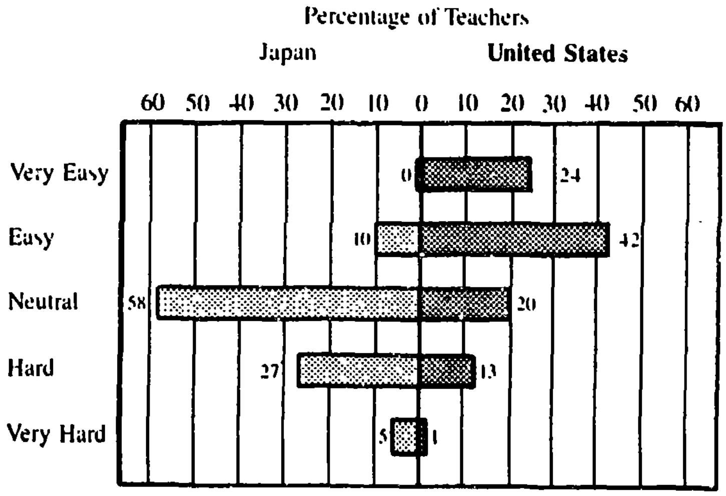


(Tomado de The Underachieving curriculum)

Gráfica 9: Formación de profesores de grado 12.

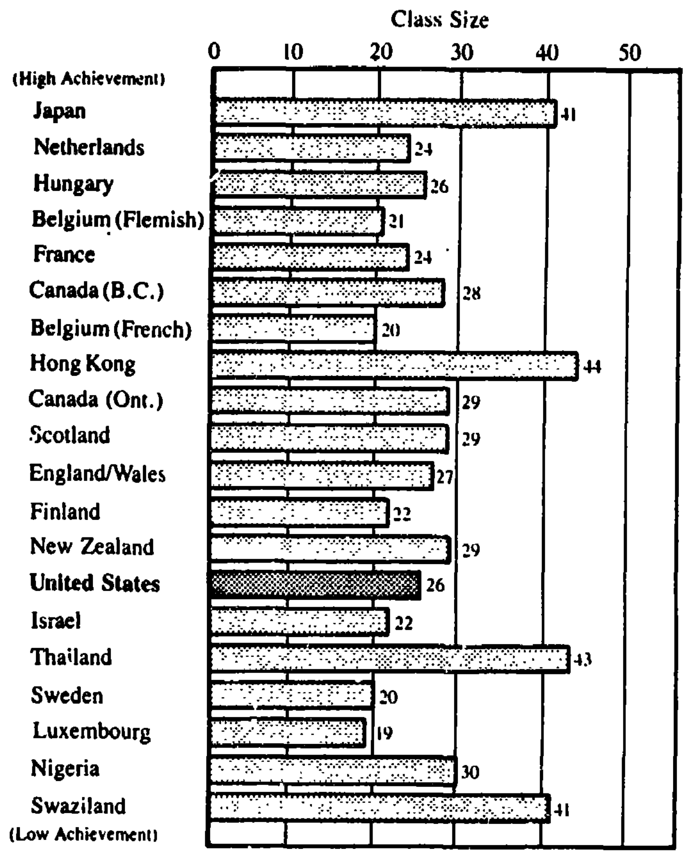


Gráfica 10: Dificultad o facilidad para enseñar Matemáticas en Octavo Curso



(Tomado de The Underachieving curriculum)

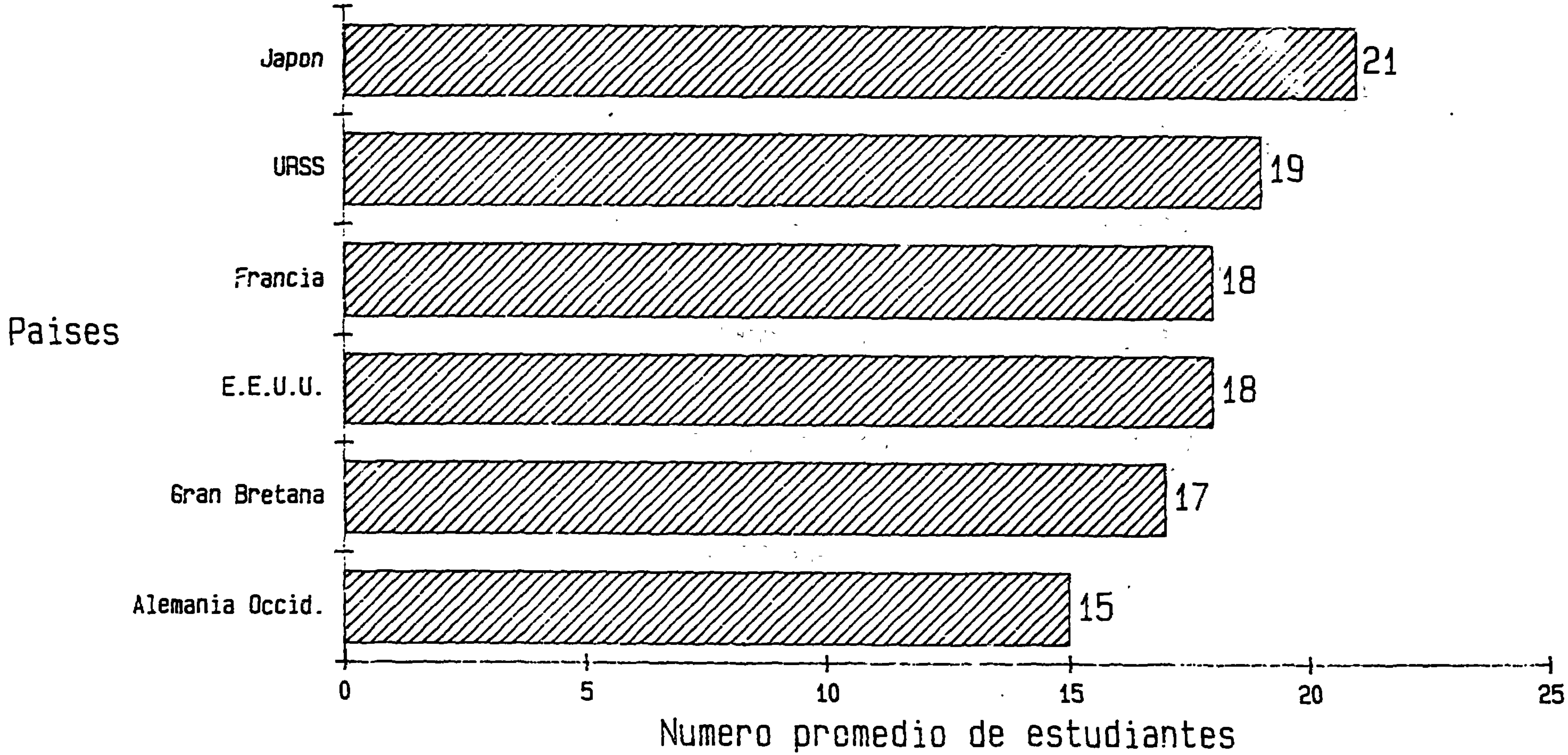
Gráfica 11: Número de estudiantes por aula



(Tomado de The Underachieving curriculum)

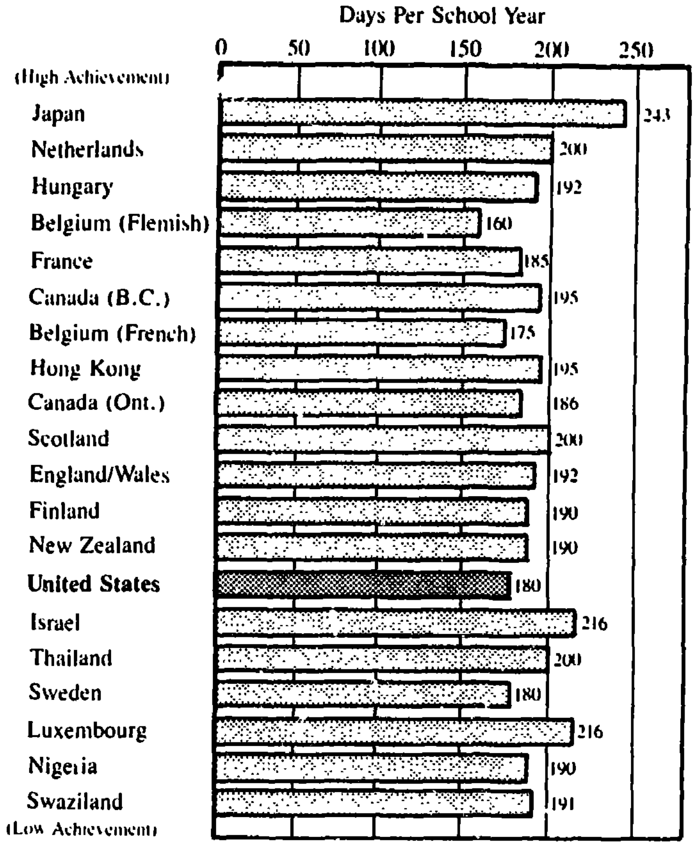
GRAFICO 12

RELACION NUMERICA MAESTRO-ESTUDIANTE
Numero promedio de estudiantes por cada maestro de ensenanza primaria y secundaria en la educacion publica y privada



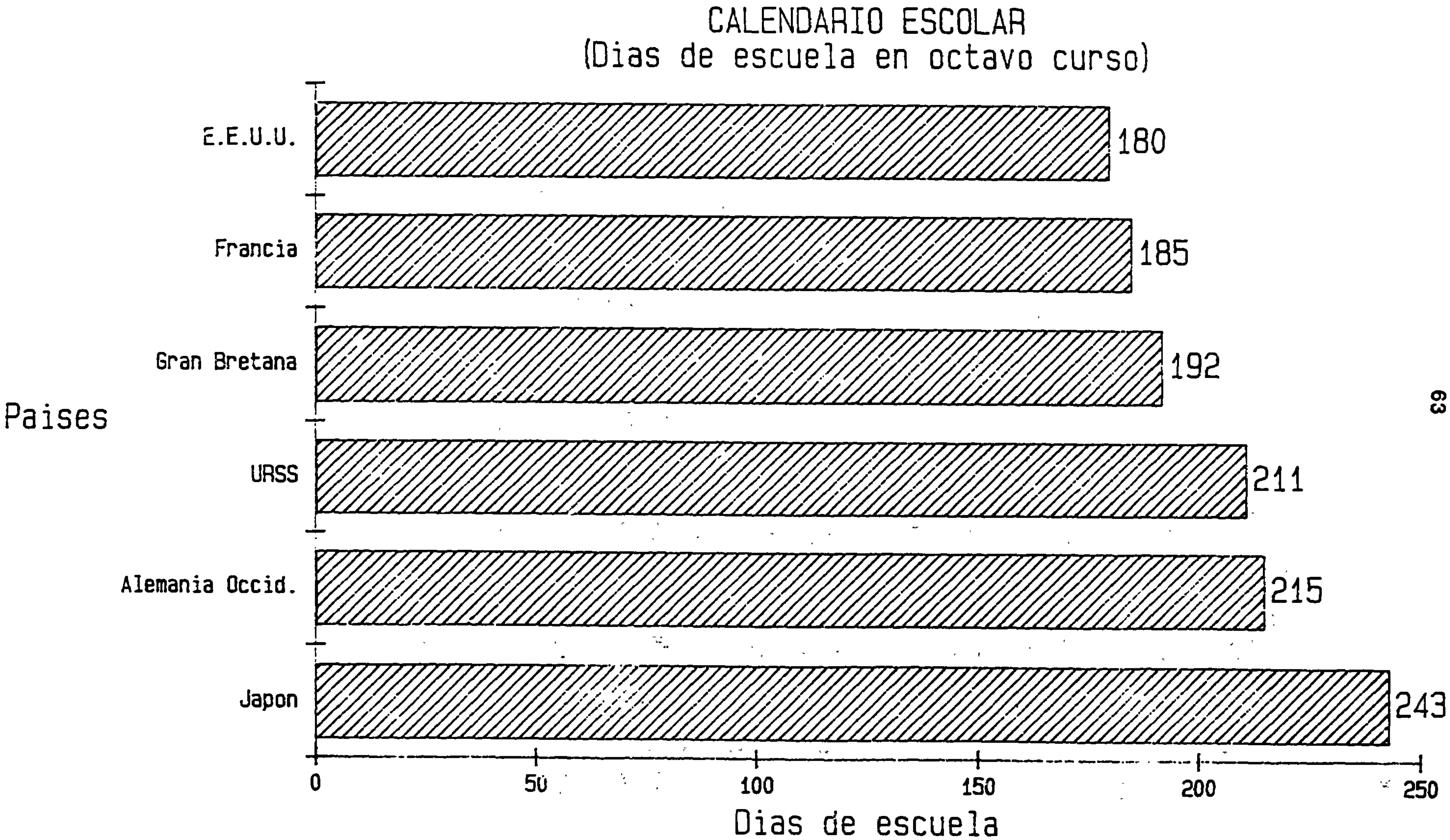
(U. S. News and World Report)

<u>Gráfica 13:</u> Longitud del calendario escolar (días de clase al año)



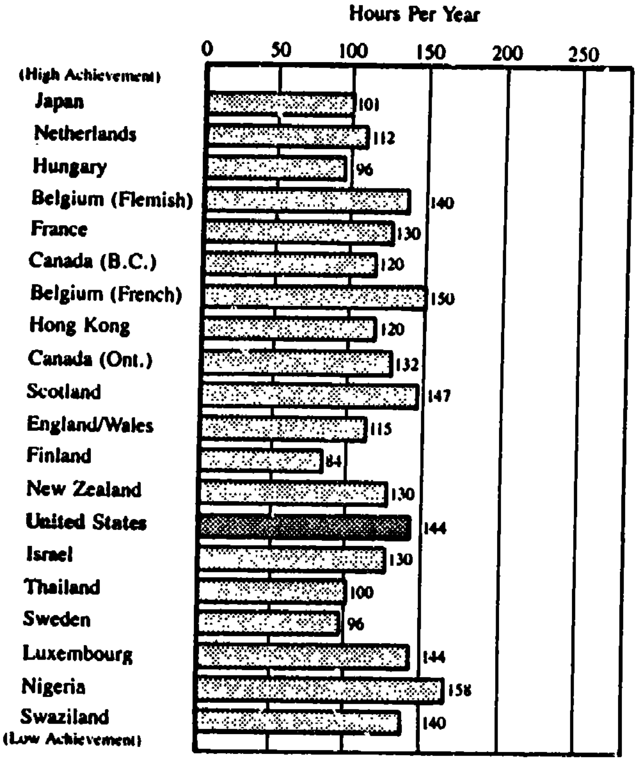
(Tomado de <u>The Underachieving curriculum</u>)

GRAFICO 14



(U. S. News and World Report)

Gráfica 15: Horas de clase dedicadas anualmente a la Matemática



Gráfica 16: "Rendimiento matemático de niños chinos, japoneses y americanos" Estudio realizado por Harold W. Stevenson, Shin-Ying Lee y James W. Stigler

Tamaño de las muestras

	Kindergarten	Primer curso	Quinto curso	Total
U. S. A.	288	237	238	763
TAIWAN	286	241	241	768
JAPON	280	240	239	759
				2290

(Tomado de The Underachieving curriculum)

GRAFICO 17

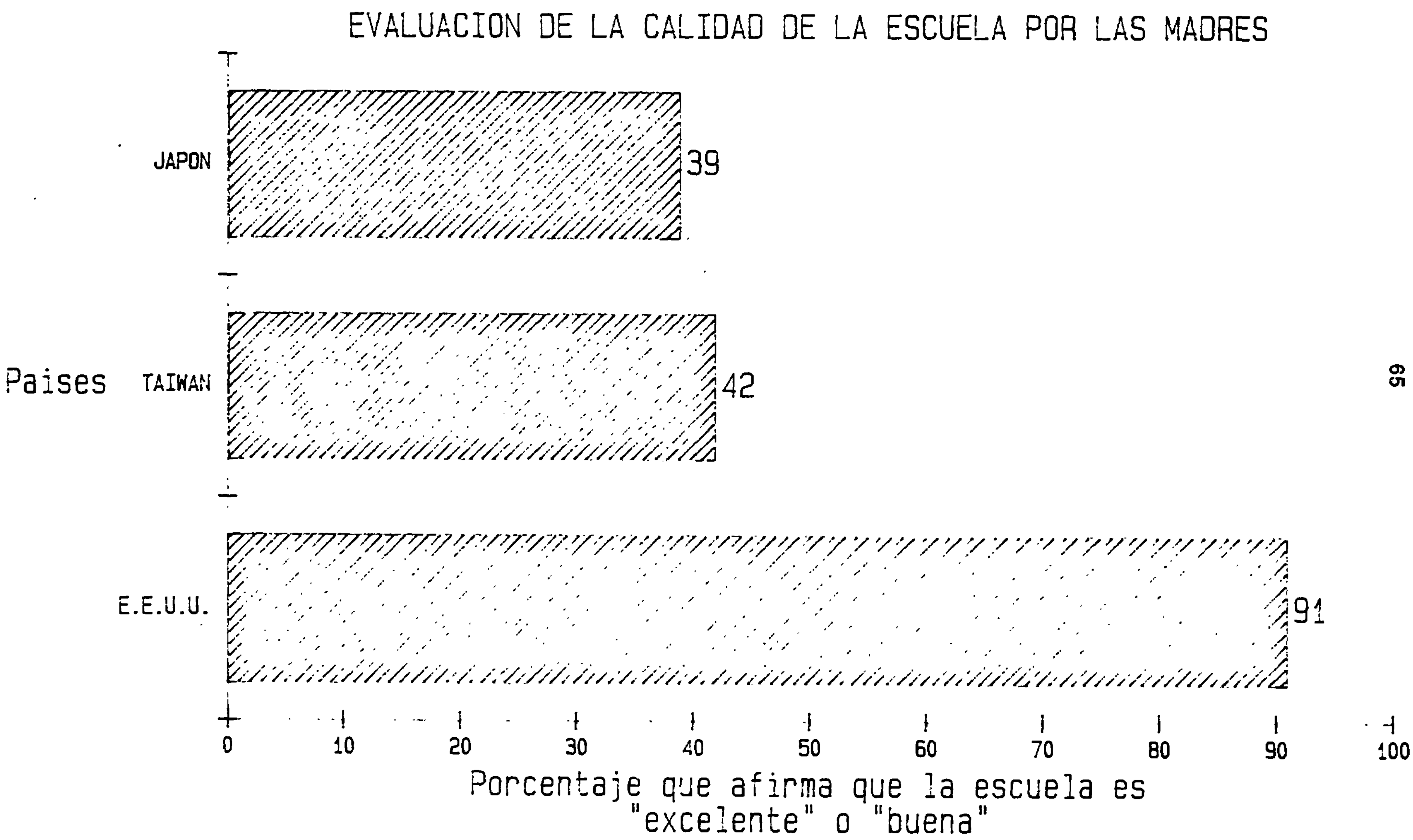

EVALUACION DE LA CALIDAD DE LA ESCUELA POR LAS MADRES
Paises
JAPON
39
TAIWAN
42
E.E.U.U.
91
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Porcentaje que afirma que la escuela es "excelente" o "buena"

GRAFICO 18

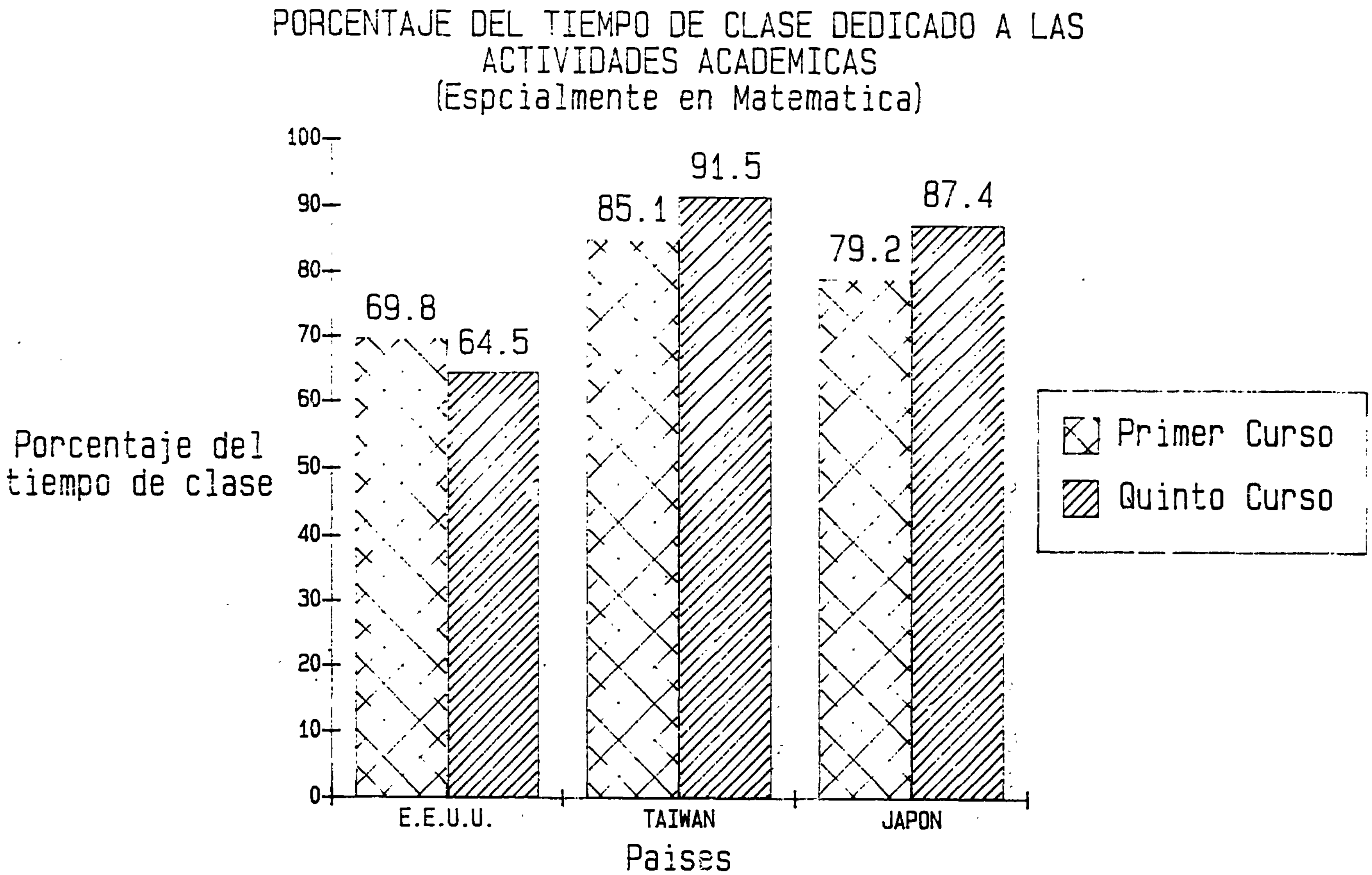

PORCENTAJE DEL TIEMPO DE CLASE DEDICADO A LAS ACTIVIDADES ACADEMICAS
(Espcialmente en Matematica)
Porcentaje del tiempo de clase
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
69.8
64.5
85.1
91.5
79.2
87.4
E.E.U.U.
TAIWAN
JAPON
Paises
Primer Curso
Quinto Curso

GRAFICO 19

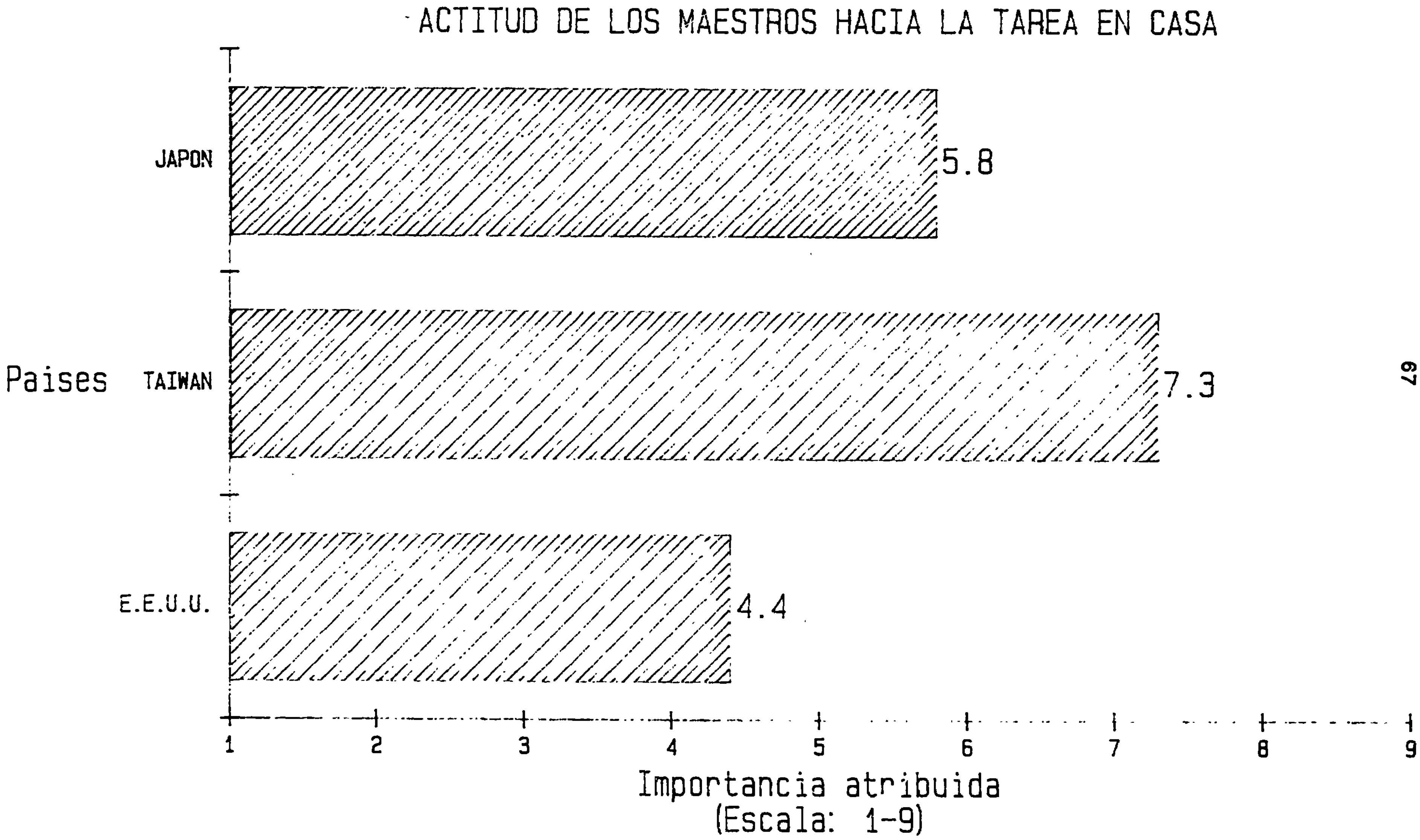

ACTITUD DE LOS MAESTROS HACIA LA TAREA EN CASA
Paises
JAPON
TAIWAN
E.E.U.U.
5.8
7.3
4.4
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Importancia atribuida
(Escala: 1-9)

GRAFICO 20

ACTITUD DE LAS MADRES HACIA LAS TAREAS EN CASA

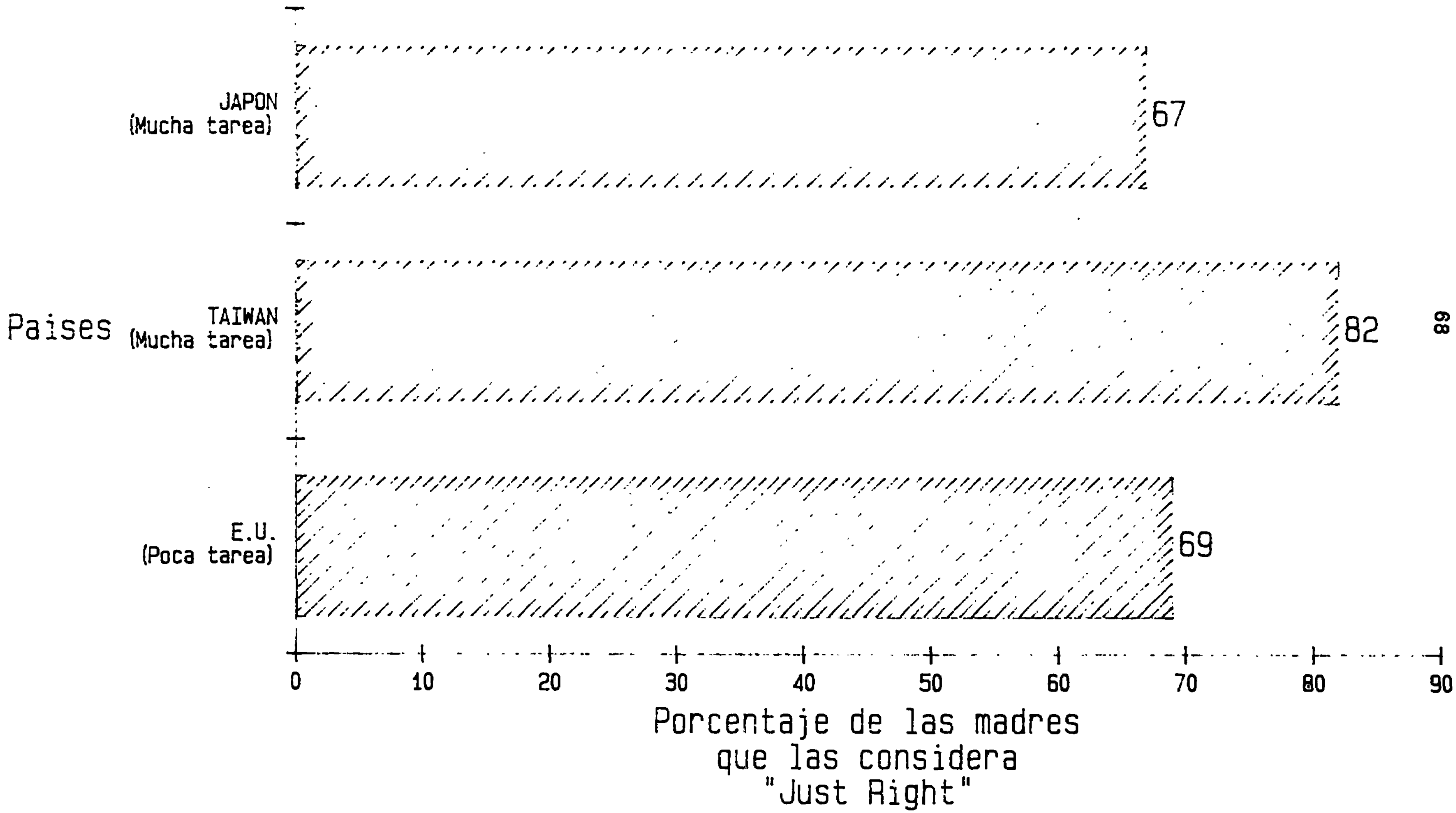


GRAFICO 21

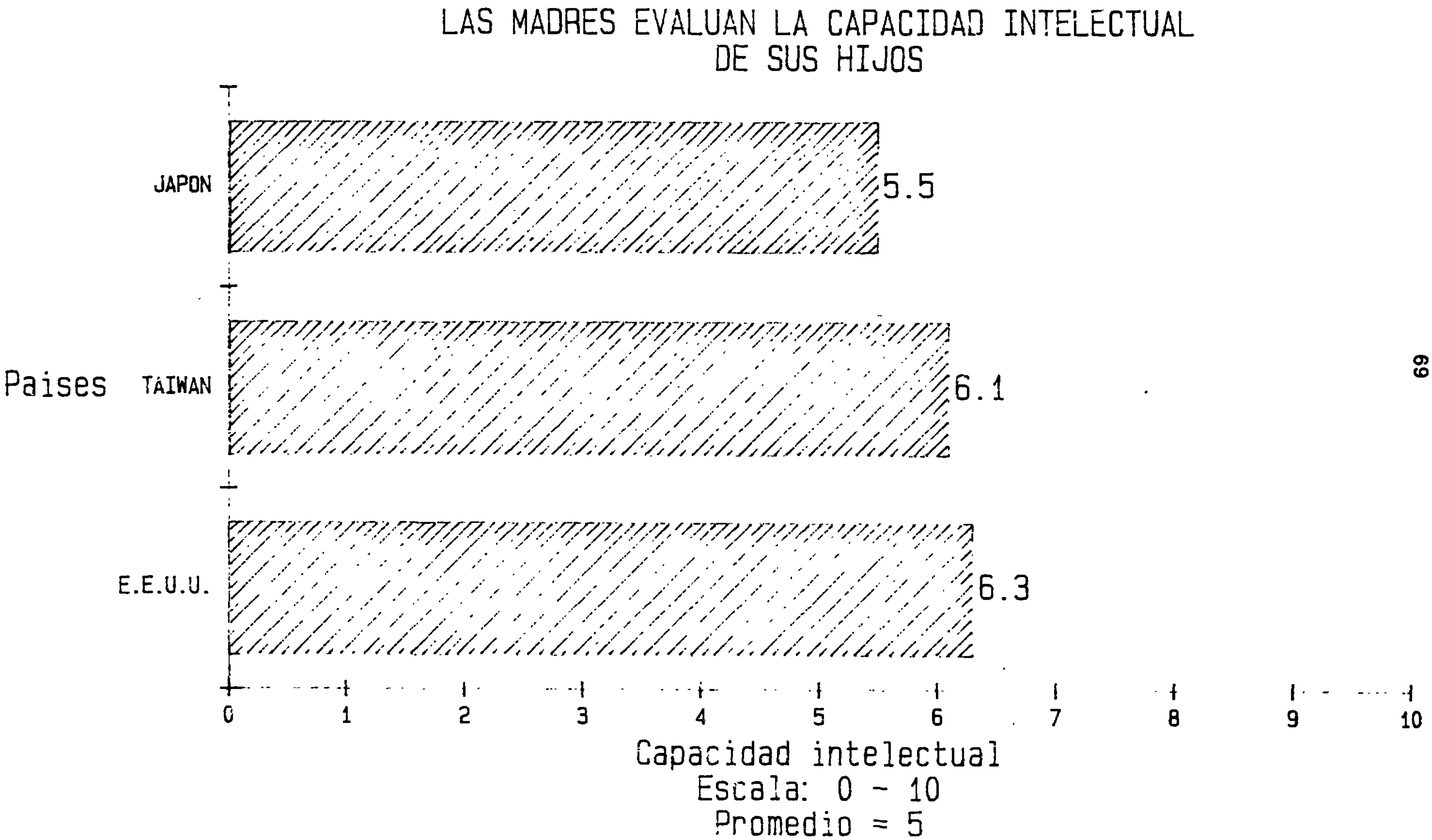
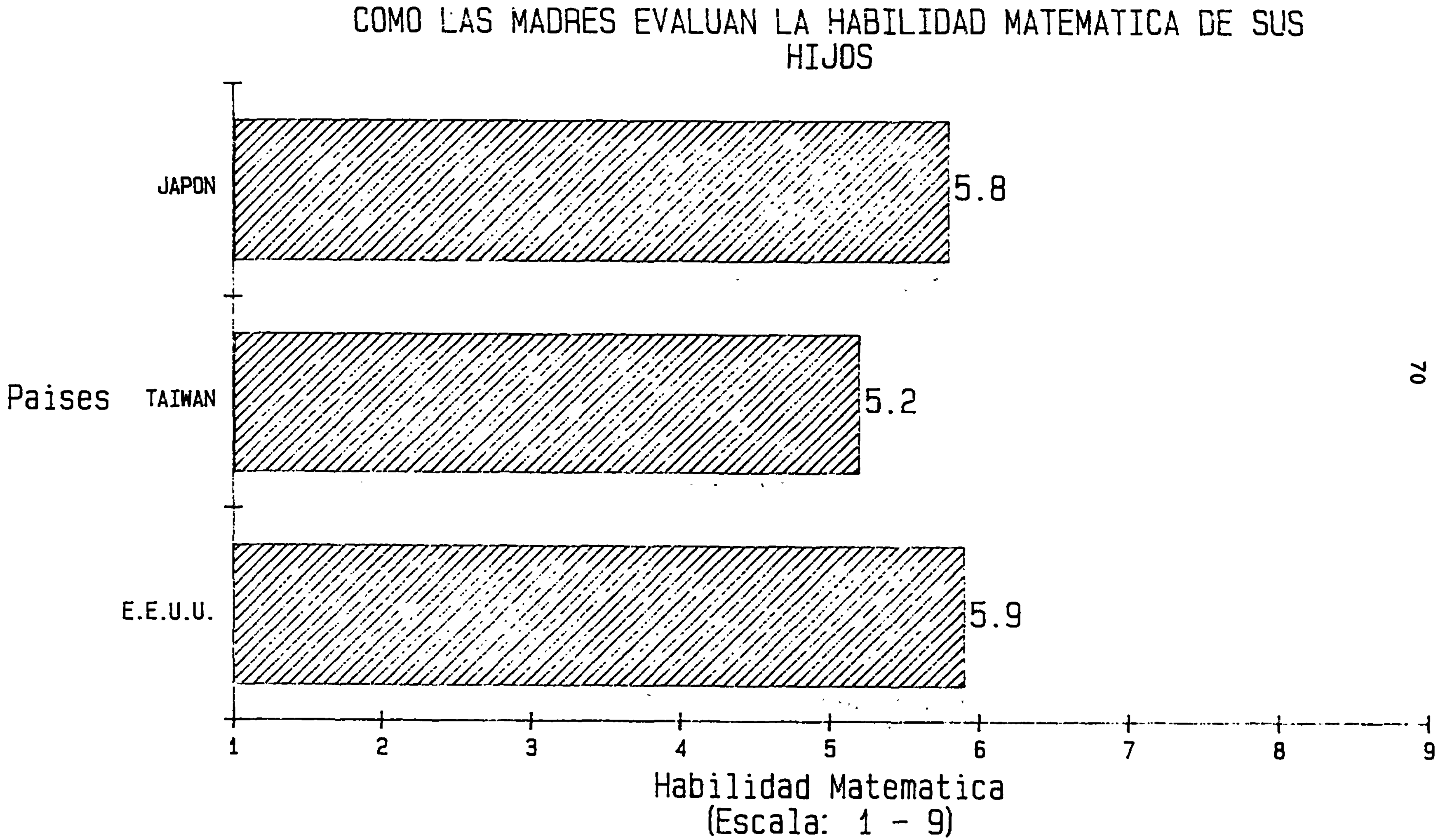

LAS MADRES EVALUAN LA CAPACIDAD INTELECTUAL
DE SUS HIJOS
Paises
JAPON
TAIWAN
E.E.U.U.
5.5
6.1
6.3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Capacidad intelectual
Escala: 0 - 10
Promedio = 5

GRAFICO 22


COMO LAS MADRES EVALUAN LA HABILIDAD MATEMATICA DE SUS HIJOS
Paises
JAPON
TAIWAN
E.E.U.U.
5.8
5.2
5.9
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Habilidad Matematica
(Escala: 1 - 9)

Gráfica 23: SUICIDIOS

NUMERO DE SUICIDIOS POR CADA 100,000 HABITANTES, POR EDADES

	10-14 AÑOS		15-19 AÑOS		20-24 AÑOS	
	JAP.	E.U.	JAP.	E.U.	JAP.	E.U.
1965	0.5	0.5	7.4	4.0	20.8	8.9
1975	1.1	0.8	9.7	7.5	21.5	16.3
1984	0.7	1.3	5.5	9.0	15.5	15.6

GRAFICO 24

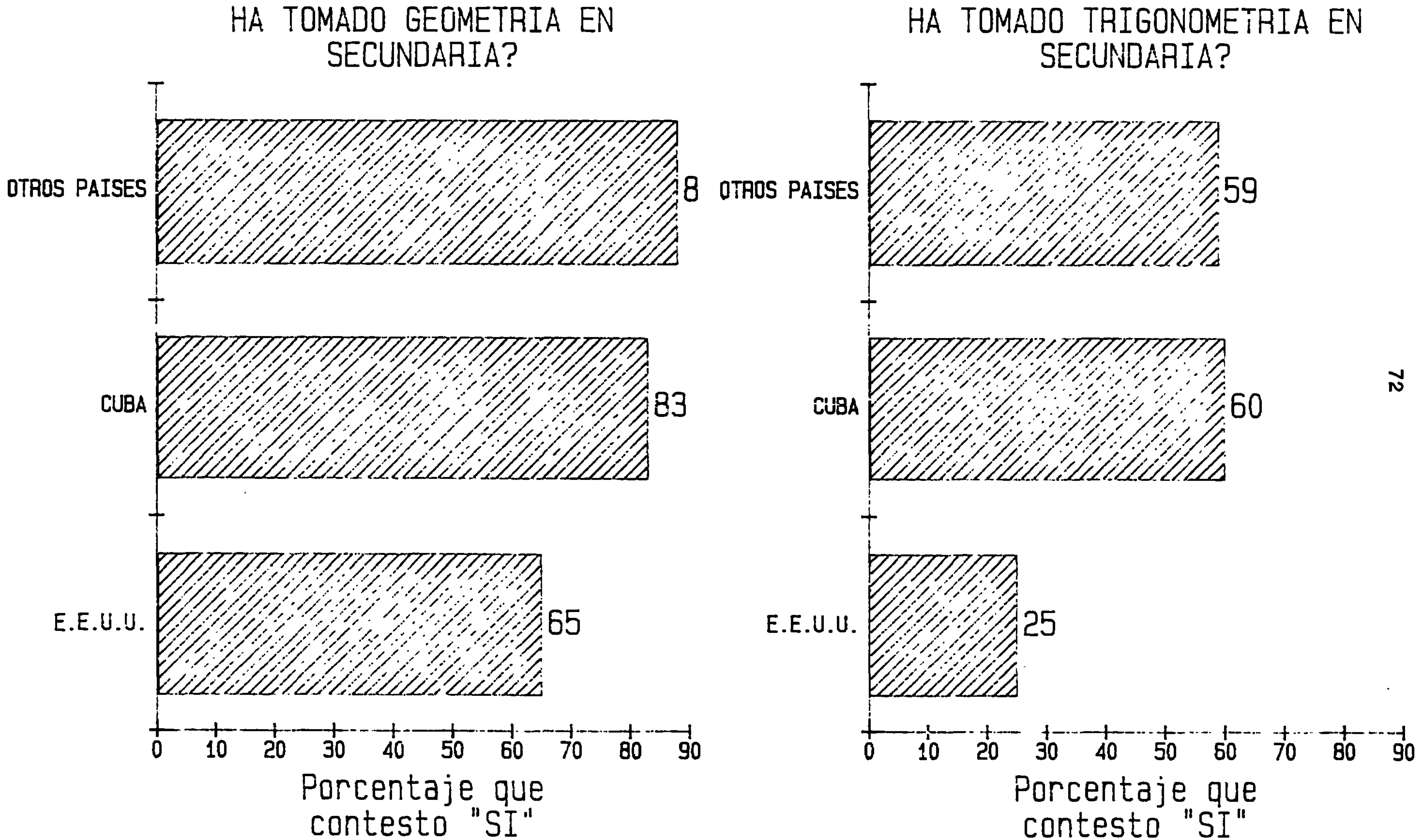
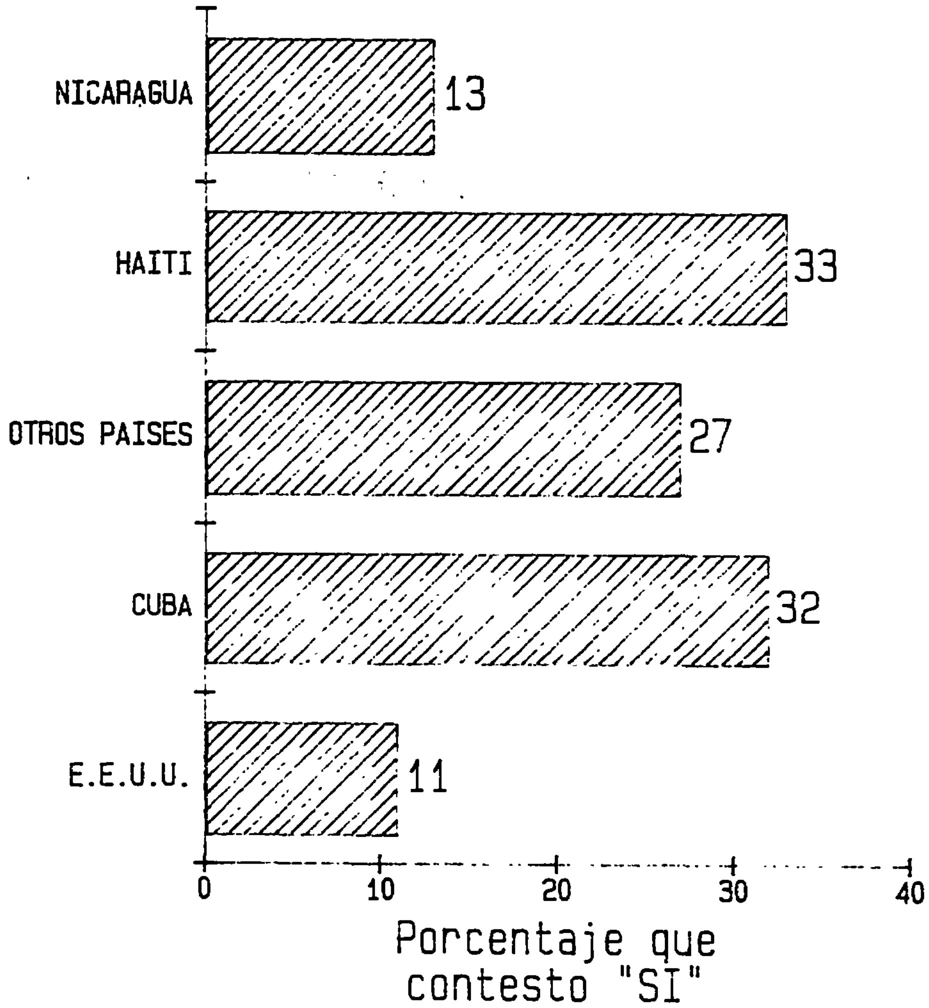

HA TOMADO GEOMETRIA EN SECUNDARIA?
OTROS PAISES
8
CUBA
83
E.E.U.U.
65
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90
Porcentaje que contesto "SI"
HA TOMADO TRIGONOMETRIA EN SECUNDARIA?
OTROS PAISES
59
CUBA
60
E.E.U.U.
25
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90
Porcentaje que contesto "SI"

GRAFICO 25

HA TOMADO GEOMETRIA ANALITICA EN SECUNDARIA?



HA TOMADO ANALISIS MATEMATICO EN SECUNDARIA?

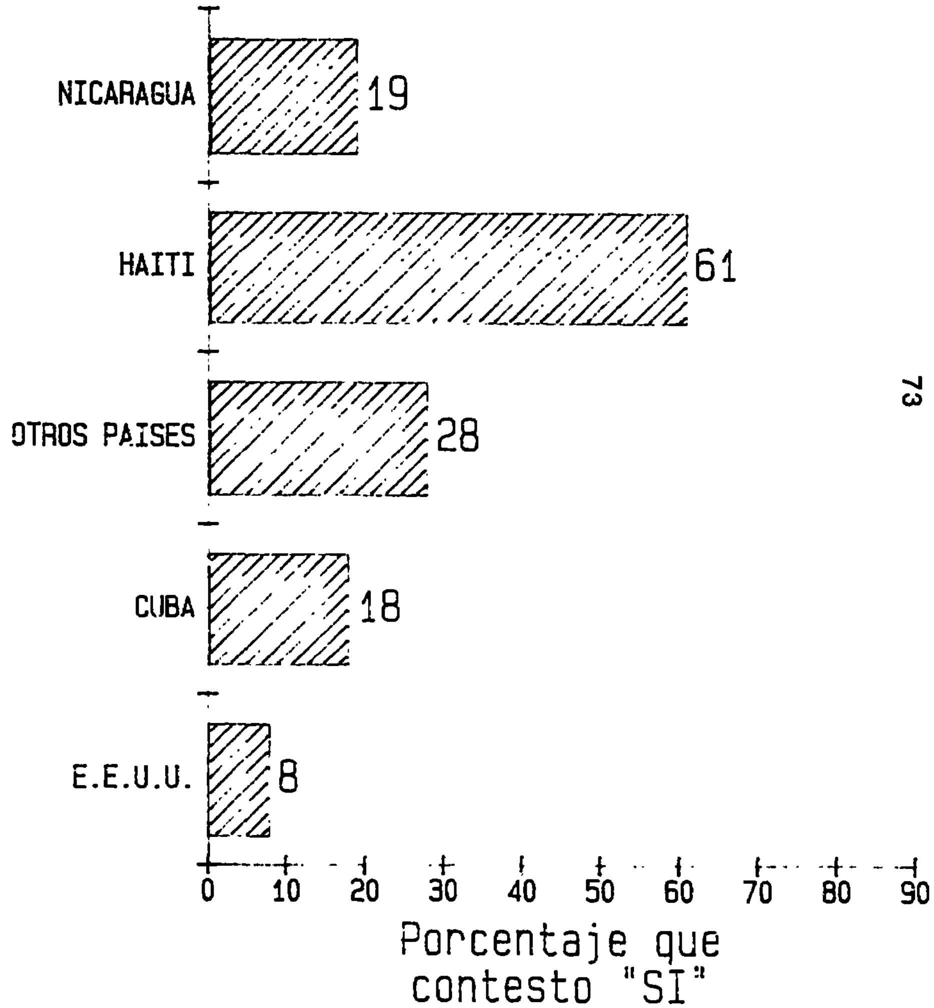


GRAFICO 26

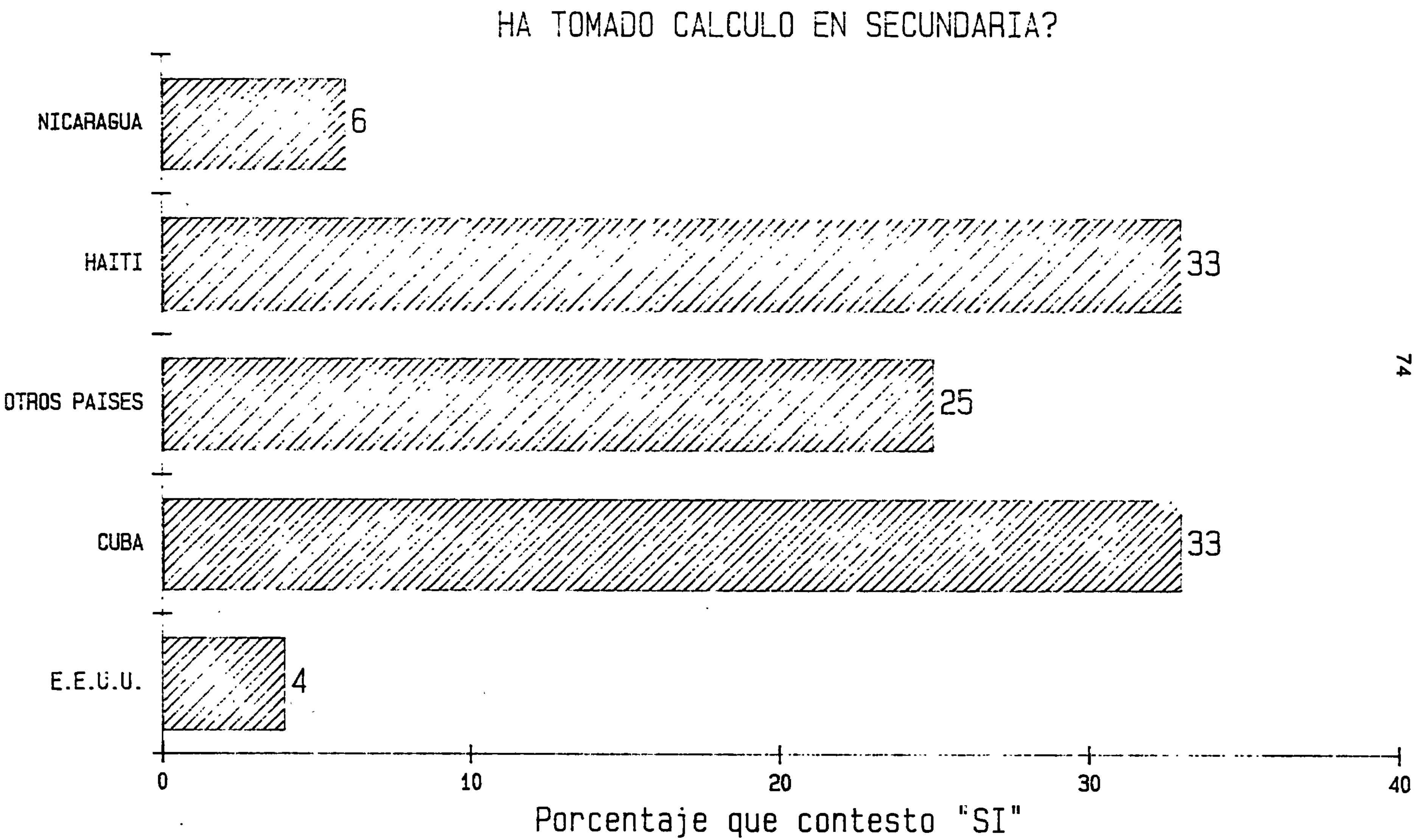
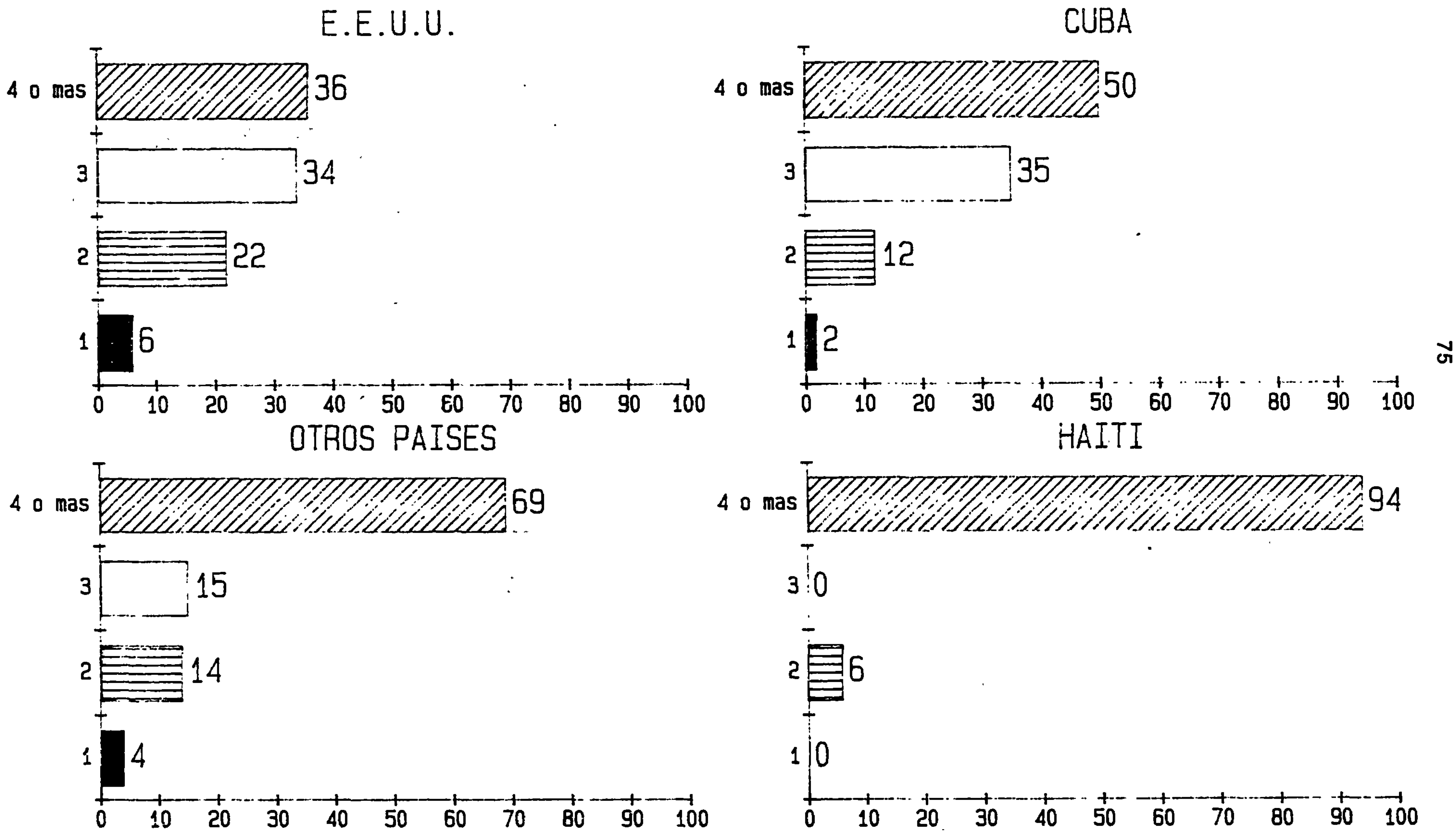

HA TOMADO CALCULO EN SECUNDARIA?
NICARAGUA
6
HAITI
33
OTROS PAISES
25
CUBA
33
E.E.U.U.
4
0
10
20
30
40
Porcentaje que contesto "SI"

GRAFICO 27



E.E.U.U.
4 o mas
36
3
34
2
22
1
6
CUBA
4 o mas
50
3
35
2
12
1
2
OTROS PAISES
4 o mas
69
3
15
2
14
1
4
HAITI
4 o mas
94
3
0
2
6
1
0
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

Gráfica 28:

AÑOS EN ESTADOS UNIDOS VS. AÑOS DE MATEMATICA SECUNDARIA

	UN AÑO O MENOS	DOS AÑOS	TRES AÑOS	CUATRO O MAS
MENOS DE 3 AÑOS EN E.U. (59)	3 (5%)	3 (5%)	13 (22%)	40 (5%)
ENTRE 3 Y 8 AÑOS EN E.U. (199)	9 (5%)	28 (14%)	62 (31%)	100 (50%)
9 O MAS AÑOS EN E.U. (309)	18 (6%)	69 (22%)	120 (33%)	129 (39%)

TOTAL: 567

Gráfica 29:

NUMERO DE AÑOS DE MATEMATICA SECUNDARIA

	1 o 2	3	4 o más
ESCUELA PUBLICA	25.65%	35.29%	39.06%
ESCUELA PRIVADA RELIGIOSA	18.95%	21.05%	60.00%
ESCUELA PRIVADA NO RELIGIOSA	10.42%	14.58%	75.00%

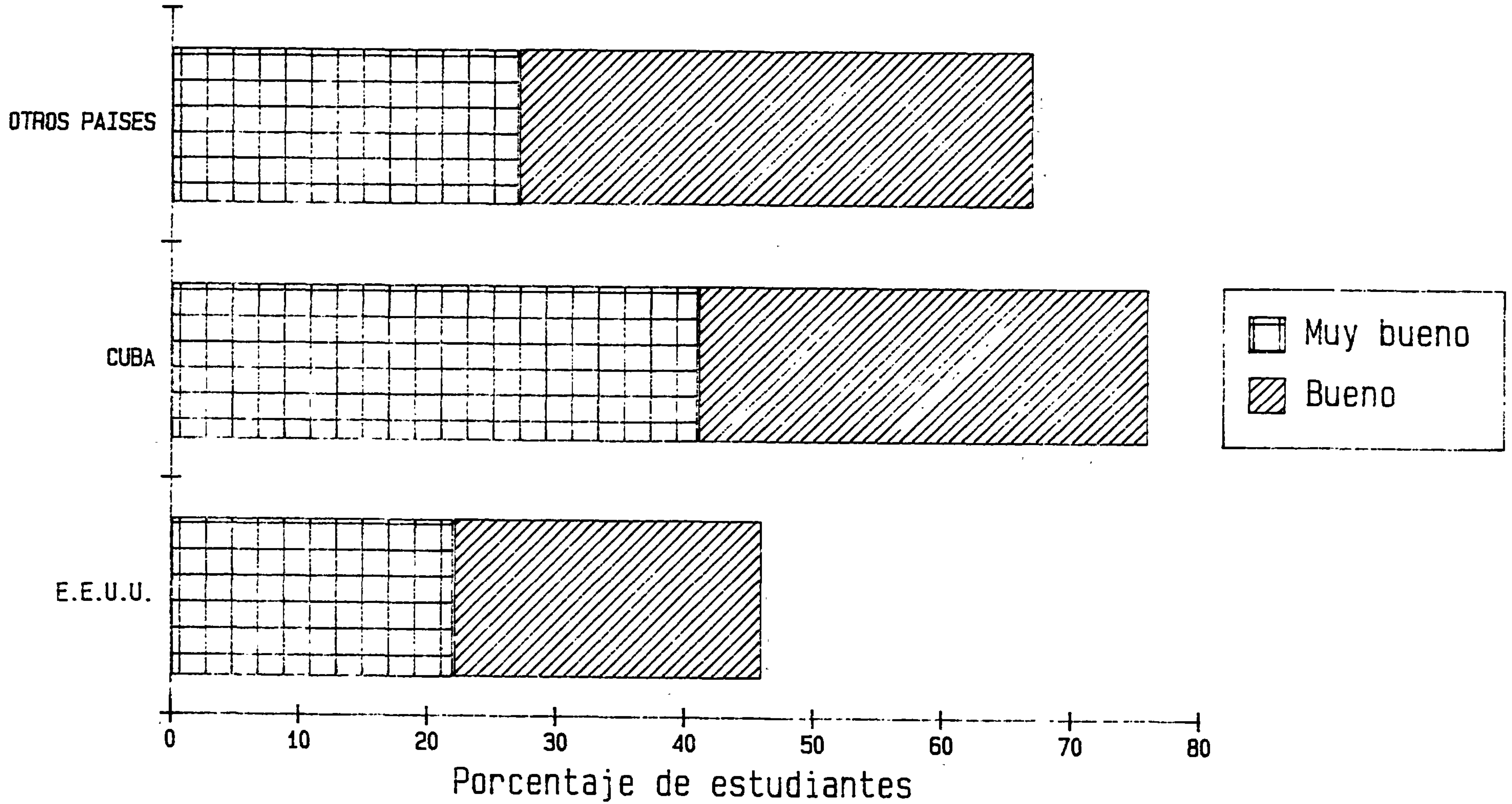
Gráfica 30:

¿COMO CONSIDERAS QUE TE PREPARO MATEMATICAMENTE LA ESCUELA SECUNDARIA?

	MUY BIEN	ADECUADAMENTE	INADECUA-DAMENTE
ESTADOS UNIDOS (357)	25%	49%	26%
CUBA (82)	45%	45%	10%
OTROS PAISES (125)	38%	49%	14%
HAITI (18)	50%	69%	0%
NICARAGUA (16)	19%	50%	12%
PROMEDIO (564)	30%	49%	21%

GRAFICO 31

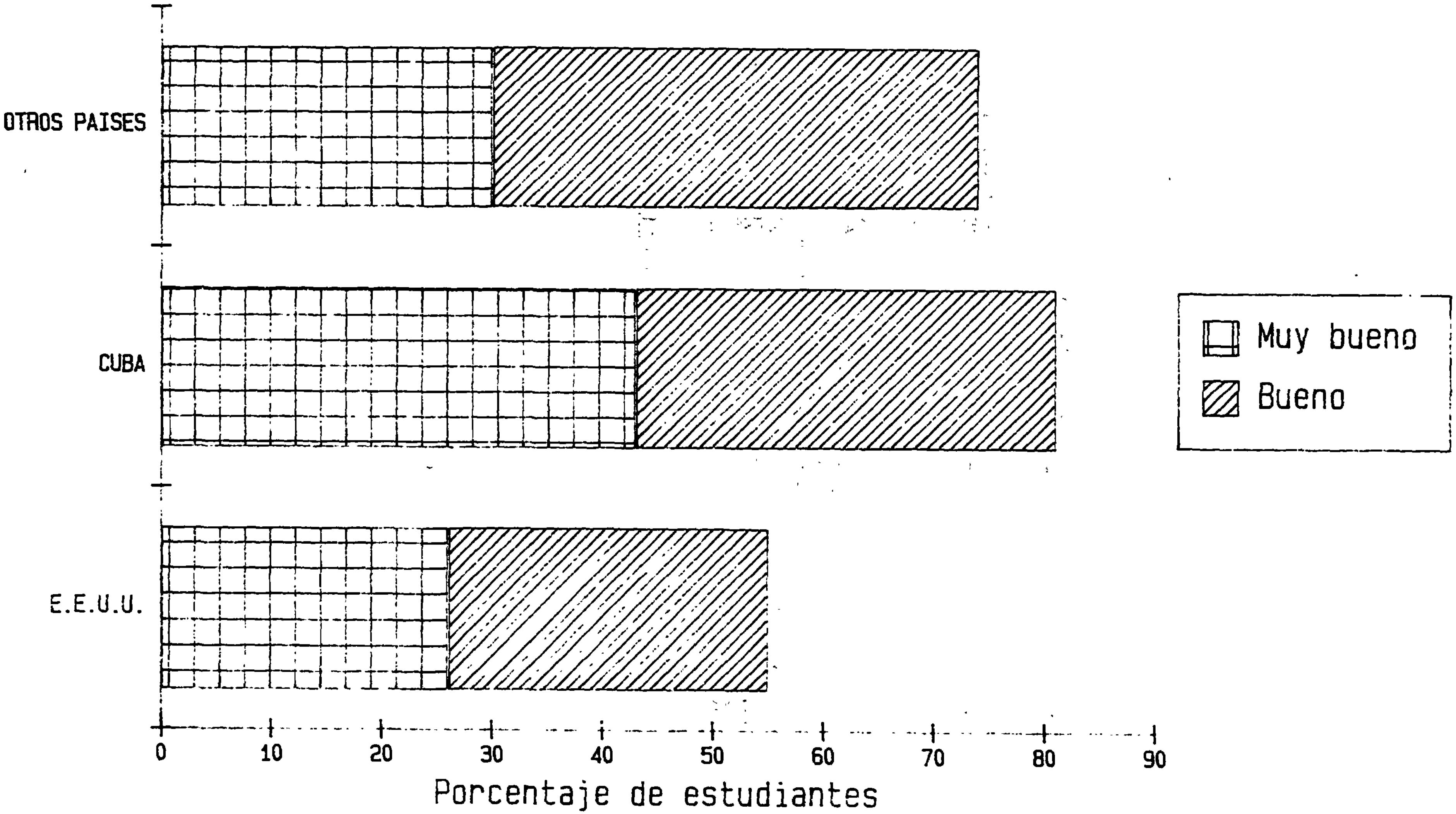
HABILIDAD DE LOS MAESTROS PARA ESTIMULAR EL INTERES POR LA MATEMATICA



UN 23% DE E. U. DICEN "MUY MALO" O "MALO"
UN 4% DE CUBA DICEN "MUY MALO" O "MALO"
UN 12% DE "OTROS PAISES" DICEN "MUY MALO" O "MALO"

GRAFICO 32

HABILIDAD DE LOS MAESTROS PARA ENSENAR MATEMATICA



UN 13% DE E. U. CONTESTARON "MALO" O "MUY MALO"
UN 4% DE CUBA CONTESTARON "MALO" O "MUY MALO"
UN 6% DE OTROS PAISES CONTESTARON "MALO" O "MUY MALO"
NINGUN NICARAGUENSE O HAITIANO CONTESTO "MALO" O "MUY MALO"

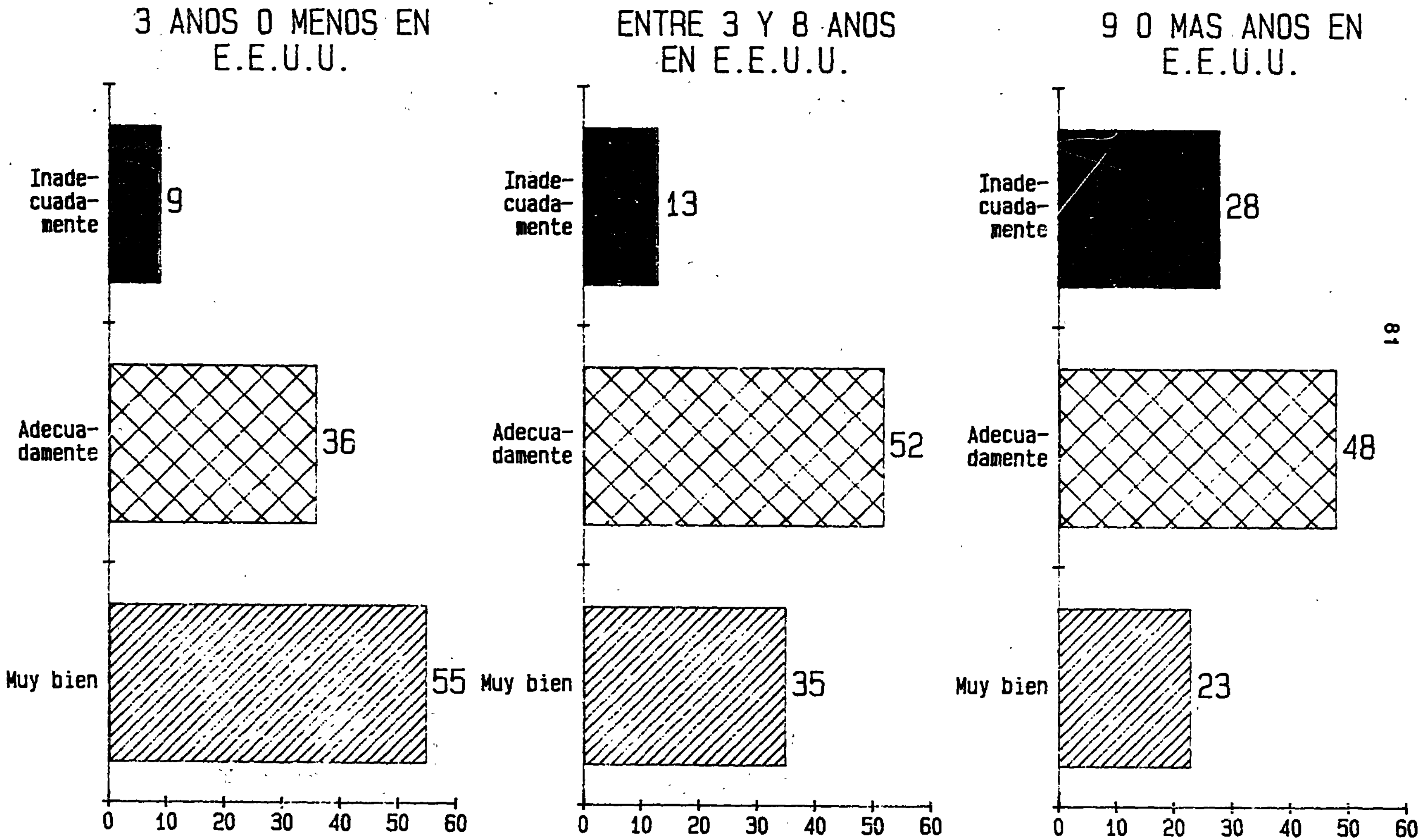
Gráfica 33:

Tipo de Escuela	PREPARACION MATEMATICA MUY BUENA O ADECUADA	HABILIDAD PARA ESTIMULAR INTERES EN MATEMATICAS BUENA O MUY BUENA	HABILIDAD PARA ENSEÑAR MATEMATICAS BUENA O MUY BUENA	"ENCUENTRO LA MATEMATICA FACIL"	"ENCUNTRO LA MATEMATICA INTERESANTE"	"LA MATEMATICA ES IMPORTANTE PARA MI EXITO PROFESIONAL"
BACH. UNIVER-SITARIO (391)	87%	63%	71%	62%	81%	88%
TECNICO-VOCACIONAL (94)	62%	39%	45%	56%	70%	83%
ORIENTADAS A COMERCIO/ADM. DE EMPRESAS (31)	63%	42%	45%	55%	65%	77%
ORIENTADAS AL MERCADO DE TRABAJO (38)	53%	29%	38%	58%	76%	82%

RESPUESTAS DE ACUERDO AL TIPO DE ESCUELA SECUNDARIA

GRAFICO 34

¿COMO CREE QUE LA ESCUELA SECUNDARIA LO PREPARO EN MATEMATICA PARA LA UNIVERSIDAD? VS. NUMERO DE AÑOS EN ESTADOS UNIDOS



PARTE III
PANELES

PANEL A: *Integración del Contexto Sociocultural en la Enseñanza de la Matemática*
Coordinador: *Angel Ruíz Zúñiga*

HISTORIA SOCIAL Y FORMACION DE CULTURA CIENTIFICA[1]

Luis Carlos Arboleda
Universidad Del Valle
Cali, Colombia

En la historia y en la enseñanza, tal vez el tema de mayor actualidad es cómo integrar la dimensión del sujeto en los respectivos trabajos. En uno y otro campo se adelantan esfuerzos con resultados cada vez más provechosos, tendentes a restablecer la función del individuo frente al conocimiento. Para el historiador, se trata de aclarar no tanto el proceso lógico de creación de nuevas teorías, cuanto descifrar el proceso mundano de innovación o de difusión, realizado por individuos y comunidades. Para el educador, la preocupación apremiante es cómo diseñar y aplicar estrategias que comprometan realmente al individuo en actividades intelectuales creadoras. En nuestra doble condición de profesores e historiadores de las ciencias, podríamos beneficiarnos de esta tensión paralela que representamos si atináramos a encontrar mecanismos adecuados para "cortocircuitar" las dos líneas. En teoría, el proyecto es plausible: con razón ha servido y continúa sirviendo para cautivar importantes expectativas reformistas en la enseñanza. En efecto, una pedagogía que se proponga involucrar al individuo en una práctica autorreflexiva y autocrítica del saber, tiene en principio mucho que aprender del análisis histórico, cultural y social de la producción del conocimiento. Pero, como siempre las dificultades surgen en el momento de convertir el proyecto en experiencias concretas. No me refiero tanto a las dificultades técnicas y operativas de cómo materializar el proyecto histórico-pedagógico en cursos, cómo seleccionar los materiales, cómo planificar actividades y controlar el aprovechamiento de los alumnos, etc., etc. Estas continúan siendo copiosas, aunque cada vez contamos con mejores condiciones materiales para aproximarnos a soluciones realistas. El intercambio de nuestras respectivas experiencias pedagógicas de estos días, seguramente confirmará mi opinión más bien optimista.

Por mi parte, he llegado a la convicción íntima de que la realización práctica del mencionado proyecto, depende de otro género de dificultades. Principalmente, de cómo nosotros mismos, científicos y profesores de ciencias, encaremos la evaluación del sentido de nuestra propia actividad disciplinar, de acuerdo a las "señales" que nos ofrece la reflexión crítica de la historia. Casi que podría afirmar en términos radicales que es inútil pretender adelantar una historia socio-cultural de las ciencias, y menos aún aprovechar sus resultados en la educación

[1] Versión corregida y ampliada del texto presentado en el 2do Seminario Latinoamericano sobre Alternativas para la Enseñanza de Historia de las Ciencias y la Tecnología. (Sao Paulo, Brasil, febrero 24-27, 1987)

si, en el mismo movimiento, no se opera una voluntad por alterar ciertos valores culturales arraigados en nuestra práctica científica y educativa de todos los días. He ahí el reto de la indagación crítica de la historia: lo que empieza siendo un atractivo señuelo intelectual con efectos plausibles en el campo de la pedagogía, puede llegar a convertirse en una empresa de crítica y refundición del sentido mismo de la ciencia que practicamos aquí y ahora. En lo que sigue, me propongo examinar tan interesante fenómeno a partir de algunas situaciones históricas y otras más actuales, sobre las que he venido trabajando recientemente.

Como ustedes saben perfectamente estamos en un año muy significativo para la historia de la ciencia moderna e inclusive podríamos decirlo con claridad, para la historia de la cultura científica de Occidente: celebramos el tricentenario de la publicación por vez primera de los Principios de Newton. No hay tal vez otro campo de estudios más diversos y eruditos en donde se compruebe más fehacientemente el éxito con que la buena urbanidad de las conmemoraciones ritualiza las investigaciones utilizando la ocasión para actualizar y reforzar antiguos mitos. Ante todo, la imagen autoritaria y prestigiosa de la historia del precursor, y la mitología del progreso soberano de la razón científica. Pero al mismo tiempo, la vastedad de enfoques utilizados para analizar la llamada "revolución newtoniana", al convertir a éste en uno de los temas investigativos más fecundos en la disciplina, también ha permitido comprobar hasta qué punto son dudosas y problemáticas las metodologías que se reclaman de la lógica interna del progreso del conocimiento. Entre más se penetra en el estudio de la cuestión, más se concluye qué tan difícil es trazar las hasta hace pocos años famosas líneas divisorias entre los fenómenos racionales e irracionales, científicos e ideológicos, progresivos y regresivos. Y, sin embargo, esta relativización de método de ninguna manera parece estar oscureciendo la comprensión de la historia de la física newtoniana, por lo menos no a aquellos que no se conforman con la comodidad de las interpretaciones supersimplificadoras.

Personalmente he tenido ocasión de confirmar estas ideas revisando la literatura sobre la institucionalización del newtonismo, vía la física experimental, en el continente europeo y en el siglo XVIII. Debería advertir que mis lecturas han estado motivadas por el interés del historiador de la cultura científica de la periferia que trata de determinar las fuerzas intelectuales y sociales en juego en la evolución de la teoría metropolitana, para poder así explicarse el fenómeno de su incorporación en una realidad de características sui generis. (1)

Les estoy hablando de la Nueva Granada, o más precisamente, de lo que hoy es el territorio de Colombia, en el período entre 1740 y 1820. Dos fechas que marcan, la primera, el comienzo de la inscripción conflictual de unos saberes llenos de autoridad y prestigio dentro de una cosmovisión sistemática y cualitativista del mundo. La segunda fecha representa la adopción definitiva de un pensamiento promedio que se reclamaba enteramente de la nueva racionalidad de la física experimental, aunque opere de hecho en una cultura que porta las huellas peculiares del proceso azaroso sufrido por la recepción de la teoría metropolitana y su lenta institucionalización. Pues bien, desde la lejanía de la recepción transcultural, parecería que el historiador estuviera mejor colocado para valorar en su conjunto el juego de las fuerzas socio-culturales en la evolución del experimentalismo en el centro, al no verse tan afectado por las tentaciones del punto de vista genealógico. En particular, sin que el análisis histórico esté sesgado en todo momento por la búsqueda, que tanta tinta ha hecho correr, de esa supuesta reproducción de los principios fundamentales de la axiomática newtoniana, con su función legitimadora de los discursos de la "nueva física".

Refiriéndose a esta cuestión, J. L. Heilbron ha puesto en duda la validez del empeño tendente a descubir en qué medida los fundamentos del "paradigma" newtoniano, o de su "programa de investigación", o de su "diccionario" (o como quiera que se le llame), guiaron la actividad de 'sGravesande, Musschenbroek, Nollet, Franklin, Sigorgne, Sigaud de la Fond, o de cualquiera de los experimentalistas notables del siglo XVIII. Si es tan difícil como vano el proyecto de determinar las pretendidas unidad y distinción que subyacerían al progreso de las ideas en los diversos autores, es porque la dirección de la física en la época estuvo continuamente alterada, no solamente por la producción de los más variados discursos, sino también por las disímiles circunstancias en las que se presentaba la actividad profesional. En una palabra, lo distintivo de esta etapa es el proceso de redefinición y de cambios de enfoque y técnicas de trabajo científico. Convendría pues, concentrar el interés histórico más bien en aquel enfoque común de la física experimental más compartido por el promedio de los practicantes, en el período del último tercio del siglo, cuando la disciplina ya ha conseguido un nivel promedio de institucionalización que le permite proyectar en forma realista las proclamadas virtudes del método newtoniano con su eficacia creadora, a distintos niveles: la reflexión teórica, la experiencia, la construcción y manipulación de instrumentos, etc. (2).

Es curioso cómo la fina erudición de los estudios historiográficos sobre el newtonismo ha conducido a algunos autores a actualizar un punto de vista que uno encuentra vertebrando los trabajos de algunos de los precursores de este género como Daniel Mornet y Pierre Brunet. En efecto, en sus dos obras remarcables de los años 1930, éste último criticaba el método histórico de consagrarse exclusivamente a reconstruir en la evolución de las ciencias la parte de las adquisiciones. Abogando por el estudio de la interrelación entre los diferentes niveles que se expresan en un problema en un época determinada, Brunet escribía que "no nos podemos contentar con establecer una continuidad en la sucesión de los conocimientos: en cada momento hay que observar el conjunto del pensamiento científico como una verdadera red, en la que todos los hilos en alguna forma son solidarios". De allí concluía que "el historiador de las ciencias debe tener en consideración todo el ambiente en el que se desarrolla tal o cual pensamiento, como no puede desinteresarse del état d' esprit, aferrado al establecimiento más o menos firme de la opinión de los savants en tal o cual doctrina" (3). Retomando la metodología que desde 1911 había aplicado Mornet a su estudio de las ciencias naturales en Francia en el siglo XVIII, Brunet se manifiesta partidario del enfoque que aquél llamaba de la historia social. Es decir, aquella que estudia "cómo se establece en las ciencias, y para el promedio de quienes las cultivan, un nivel de equilibrio. La que muestra cómo el descubrimiento aislado, aventurado o contestado, poco a poco llega a estabilizarse. Así nos permite comprender lo que es la vida orgánica de la ciencia... Sobre todo, mezclando sin cesar la especulación científica a la vida, de la que la ciencia no se separa en sus fuentes, y a la que en todos los casos tiende por sus consecuencias, ella relaciona la historia de las ciencias a la historia de los destinos humanos; vinculando, como conviene, a la historia social lo que después de cien años ha transformado las sociedades. De esta manera muchos problemas pueden aclararse o resolverse... Sabremos cómo los pensamientos de excepción, aquellos que descubren, conquistan los pensamientos promedios, cómo en las luchas de métodos y de principios poco a poco se llega al acuerdo y se establece el progreso". (4)

Para ambos autores, la historia social debe analizar la interpretación y la interacción entre el círculo reducido de los grandes savants, entre el de los savants de segundo orden y el de la masa ilustrada y cultivada, curiosa de estudios científicos. Los conductos sociales por medio de los cuales se realiza esta triple integración son la enseñanza y la difusión científica, como lo prueban en sus respectivos estudios de la física experimental en Europa en el siglo XVIII, especialmente en Holanda y en Francia.

Recuerda Brunet que, por ejemplo, en el caso francés "no fue sino hasta cuando se enseñó [el newtonismo mediante los cursos de Nollet, de Paulian, de Pézenas, etc.] que se dió su repercusión sobre el ambiente general científico". La enseñanza es, pues, esa instancia privilegiada de la historia social de las ciencias que ofrece: a) fuentes de información sobre los movimientos de formación y reproducción del pensamiento científico, b) casos históricos significativos en que se amplifica una teoría mediante una práctica ordenada y sistematizadora de saberes, en las condiciones de un ambiente intelectual y de una cultura dominante. (5)

Si la propuesta de la historia social estuvo presente prácticamente desde el principio de los modernos estudios newtonianos, cabría preguntarse por qué primaron durante tantas décadas (y priman aún, aunque en forma matizada), las opciones interpretativas de reconstrucción de la lógica de los contenidos de los discursos.[2]

---

2 Sin ánimo de entrar de lleno en el análisis de una cuestión que siendo importante para las búsquedas metodológicas en la historia de la cultura científica, no lo es tanto para los temas educativos que aquí nos interesan, quisiera al menos destacar dos posibles respuestas a este interrogante. Veremos que una y otra explicación de un problema estrictamente histórico nos remiten a aspectos relacionados con la enseñanza científica. Se trata de dos situaciones típicas en las que no se tiene debidamente en cuenta la influencia del contexto en acontecimientos decisivos de la historia de las ciencias. Una es la crítica racionalista de los obstáculos al conocimiento, y la otra es la metodología dominada por ideologías del progreso inmanente de las ideas científicas.

Tanto en la Formación del espíritu científico como en el Psicoanálisis del fuego, Bachelard estudia numerosos casos de acontecimientos históricos de la física del siglo XVIII en los que el pragmatismo, el utilitarismo, el realismo o el animismo interponían obstáculos epistemológicos al espíritu científico. Su aporte indiscutible consiste en mostrar que la filosofía natural constituía un discurso con una gramática no solamente distinta sino contradictoria con la gramática de la física racionalista. Por otra parte, Bachelard no desconoce la influencia del contexto social en el que se constituye y opera esta articulación epistemológica de los discursos. Sin embargo, como advierte Schaffer (6), el hecho de que el análisis bachelardiano distinga los discursos de la filosofía natural y de la física racional por la vía negativa, no deja de tener consecuencias para la comprensión histórica. En los casos estudiados por Bachelard el contexto casi siempre cumple la función de condicionamiento negativo del estado pre-racional del concepto. Schaffer comenta que si bien Bachelard no oculta que la transformación de una mentalidad pre-racional a una racional está determinada por cambios sociales, institucionales y culturales, sí elude el análisis histórico de esta interrelación y se contenta con condenas a priori y descalificaciones morales.

Examinando el caso histórico, tan caro a Bachelard, del análisis del paso de la mentalidad cualitativista sobre las propiedades del fuego al nivel en que alcanza un estatuto racional en la teoría de la materia, Schaffer recuerda que el fuego y sus propiedades no eran solamente categorías conceptuales pertenecientes a un discurso filosófico. Las características siempre dramáticas del fuego en la preservación y transformación de la naturaleza, le imprimían un estatuto contradictorio en la teoría de la materia del siglo XVIII. Sus efectos sobre la materia y sobre la experiencia lo convertían en algo más que un objeto "científico". También fundamentaba toda una cosmovisión de la naturaleza y de la práctica, cuyas trazas, dice Schaffer, se encuentran presentes en formas de vocabulario, de analogías y metáforas con las que los físicos de fines de siglo siguen relacionando leyes y propiedades de la mecánica racional con propiedades del fuego.

Este tipo de análisis conflictual de la estructuración y evolución social y cultural del saber, no se encuentra en la epistemología negativista del obstáculo. Inclusive, esta obsesión por considerar algunos casos históricos sólo desde el punto de vista de las limitaciones del espíritu precientífico, bien pudo haber alimentado, dada la autoridad e influencia intelectual de Bachelard, la prevalencia de enfoques simplistas y estereotipados sobre la historia de la física newtoniana del siglo XVIII. Un ejemplo de lo anterior es la desvalorización, que se encuentra sobre todo en la Formación del espíritu científico, del rol difusor de la física newtoniana y, por consiguiente, de su impacto renovador en la cultura científica del período de la Ilustración, que cumplieron algunas obras científicas como las de Voltaire y de Mme du Chastellet. Leyendo la Formación, se descubre, en algunas referencias muy críticas y negativas, que en las Obras completas de Voltaire se encuentra un cierto volumen de "Física" plagado de errores en donde se revelan la ingenuidad, la incoherencia y la ignorancia de un espíritu pre-científico que se oponía estructuralmente a la racionalidad científica de la época.

El contundente ataque a algunos de sus flancos débiles hace aparentemente superfluo el análisis del discurso de los Elementos de la filosofía de Newton escritos por Voltaire, y absolutamente innecesaria la interpretación socio-cultural de la cosmovisión desde donde se explican sus ambigüedades. No obstante, contemporáneos de Bachelard como Mornet y Brunet, especialmente el primero, destacaron en algunas obras suyas la significación de las Cartas Inglesas y de los Elementos de Voltaire en la formación del espíritu científico de la Ilustración francesa y europea, particularmente en lo que se refiere a la física de Newton. En efecto, junto con Pemberton y Maclaurin, Voltaire fue de los primeros vulgarizadores del pensamiento y de la obra científica de Newton para el público culto que no estaba en condiciones de hacerlo a través de la lectura directa de la Optica y de los Principia. Tanto menos en un momento en el que las instituciones académicas y educativas, al menos en lo que respecta a Francia, proclamaban por todos los medios a su alcance las virtudes del sistema cartesiano frente a la mecánica racional newtoniana. Como recordaba Condorcet, cuando aparecieron los Elementos de Voltaire el cartesianismo todavía dominaba en la Academia de Ciencias de París.

Así pues, el sólo análisis epistemológico del discurso voltaireano sobre la física, a condición desde luego que se hiciese de manera sistemática y no por los flancos débiles de uno que otro error ostensible, no permite apreciar el impacto difusor y la importancia social de la obra en su momento. Como tampoco nos descubre la influencia del contexto social y la del medio cultural en que se produjeron los Elementos. Cualquiera podría pensar, contrariamente a la realidad de los hechos, que esta es una obra elaborada por un espíritu literario con una cultura muy superficial en los principios de la óptica y del sistema del mundo. Sin embargo, la literatura científica de los últimos cuarenta años en el campo de los estudios newtonianos contiene cientos de páginas de trabajos documentados consagrados a la cultura científica y a las relaciones académicas de Voltaire con Mme du Chastellet y con los más destacados físicos y matemáticos newtonianos de su época, entre ellos Maupertuis y Clairaut. Como ha señalado I. B. Cohen en la introducción a la edición de la obra de Pemberton (7), "(...) cuando consideremos los destacados aportes de Pemberton, Maclaurin y Voltaire al presentar e interpretar la ciencia de Isaac Newton, debemos tener en cuenta que no sólo fueron expositores geniales, sino que cumplieron su cometido con una comprensión excepcional de la materia tratada".

Una segunda característica de esta tendencia frecuente a escamotear en los análisis históricos la influencia de los contextos, habría tomado cuerpo por el influjo de creencias genealógicas y platónicas sobre el progreso inmamente de las ideas científicas. La acogida dominante de este enfoque probablemente se encuentra en el renombre que alcanzaron las ideologías ilustradas del progreso inmanente de las ideas científicas. Desde fines de los años 1750, con el inicio de la Enciclopédie, se da curso a lo que será la empresa moderna de divulgación científica, innovadores, difusores y opinión pública, se informarán por el Discurso preliminar de d'Alembert que el método histórico consistía en "examinar... la genealogía y la filiación de nuestros conocimientos, las causas a que se deben su nacimiento y los caracteres que las distinguen; en una palabra, el de remontarse hasta el origen y la generación de nuestra ideas". (8)

Una obra típica de la adopción de esta concepción en el movimiento difusor, es la muy influyente Historia de los progresos del entendimiento humano en las ciencias exactas de A. Savérien. Permítanme que cite in extenso un texto del prólogo: "Subo pués hasta el origen de cada ciencia o de cada arte en particular, y voy siguiendo sus progresos, sin abandonar el orden de los tiempos. De este modo formo unas descripciones separadas, que representan todos los esfuerzos que el entendimiento humano ha hecho, para producir los objetos que las componen, haciendo ver en estas descripciones el estado de cada ciencia, su origen, su aumento, y grado de perfección. En la composición de mi obra he procurado apartarme de las sendas erradas en que se han perdido muchos sabios, y si su extravío puede servirme alguna vez para aclarar más alguna verdad, les hago entrar en el camino que han seguido aquellos que verdaderamente contribuyeron a los progresos de la ciencia de que trato. De esta suerte conservo la unidad, sin romper el hilo de los descubrimientos. El lector los ve casi de una ojeada, y puede retenerlos todos fácilmente, y formar juicio de ellos. Este es acaso el espectáculo más hermoso que puede proponerse a un entendimiento filosófico. En efecto, ¿qué cosa puede haber más agradable, que una cadena de verdades infalibles y eternas? ¿Qué mayor satisfacción, que recorrer esta cadena, que desde las proposiciones más simples guía a las más sublimes? Se puede decir, que esta es aquella verdadera escala del entendimiento, que deseaba el Canciller Bacon, para ascender por grados a la cumbre de las ciencias. Su origen hasta el punto de perfección, en que las han puesto los hombres de ingenio con sus estudios, es uno de los medios más sencillos y más seguros para inspirar el gusto de ellas a los jóvenes, y a las gentes del mundo. Se manifiestan estas ciencias en la historia sin aquel aparato espantoso, que las rodea en los tratados. Aquí se muestran desde luego en su sencillez original, y poco a poco e insensiblemente van adquiriendo este esplendor, que lastimaría sin duda la vista de los que no están acostumbrados a sufrir la brillantez de la luz de las ciencias... No debe pues extrañarse, que algunos sujetos que han adquirido reputación en el estudio de las ciencias exactas, no se hallen en esta historia, porque mi intento sólo ha sido tratar de los inventores y de sus descubrimientos, y si alguna vez el asunto o la ocasión me obligan a hablar de los otros, me contento con alabar sus esfuerzos; y a esto está reducido todo el plan de esta obra". (9)

Observen ustedes la forma directa y acabada como define la obra de Savérien el programa de la historia del progreso. Es sorprendente la lucidez con que se presenta la estrategia epistémica de teleología, hagiografía y platonismo, del error como extravío, del saber como descubrimiento y de la evolución como flujo continuo del devenir. La elegancia y el lirismo de la explicación de la función pedagógica de esta historia, es también remarcable: la simplificación y el gradualismo inductivo del proceso cognitivo y, por supuesto, la emulación a través del resultado: la luz de la verdad. Es fácil comprender por qué este programa y su materialización en una obra histórica en las ciencias exactas y naturales (además de un diccionario de términos y la biografía de los hombres ilustres), pudo conquistar tantas simpatías y convertirse con el paso de los años en una visión coherente de la actividad científica. La función principal de esta mitohistoria, como lo ha recontado P. Forman en un artículo reciente, es reforzar la solidaridad social "mediante una celebración casi ritual del nacimiento de la ciencia" (10). Empezando por los propios científicos que se ven fuertemente estimulados e integrados en su quehacer, por los valores idílicos del método científico. Pero también ha facilitado las "negociaciones" sobre el apoyo externo necesario para cubrir las ingentes demandas que plantea a las sociedades el adelantamiento de la empresa moderna del saber. Así, pues, al considerar críticamente la "mitohistoria" deberían tenerse en cuenta las dificultades epistémicas que comporta, y las funciones sociales que ha cumplido y cumple todavía en la actividad científica. Sin entender las bases sociales y culturales de esta mitología del progreso, no sería posible explicarse la fuerza ideológica con la que se ha proyectado a través de los siglos.

Muchos de los aquí presentes habrán experimentado las enormes dificultades que encontramos en nuestras actividades pedagógicas (o en nuestra relación con nuestros colegas científicos) al proponernos trascender las creencias genealógicas y platónicas sobre la evolución y la estructura de nuestras disciplinas. Nuestros interlocutores de espíritu refractario aceptan gustosamente las explicaciones sobre la filiación lógica de las teorías y conceptos, e inclusive nos acompañan en el esfuerzo por reconstruir la función dialéctica del contraejemplo y del error. Pero se sienten menos confortables cuando empezamos a explorar cualquiera de los case studies bien documentados que afortunadamente empiezan a ser cada vez más frecuentes, sobre las influencias del contexto socio-cultural en la constitución y transformación de los contenidos de verdad de las teorías. No nos resulta de ninguna manera fácil hacer comprender que creencias consideradas en la actividad científica como "bien fundadas", se basan en última instancia en criterios convencionales. En otras palabras, que su aceptación depende de su acuerdo con nociones corrientes de la cultura científica en general, y de la cultura local de la teoría concreta. En fin, que una y otra cultura están influídas, en un sentido amplio, por la estructura y los valores sociales.

A pesar de todo, no me parece que ello pueda conducirnos a un estado de ánimo pesimista sobre las posibilidades pedagógicas de la historia social de las ciencias o, si se quiere, de la sociología histórica "constructivista". Mi confianza se apoya en dos consideraciones sobre la tendencia al cambio de estado en las actitudes de las comunidades científicas. De una parte se observa una creciente inconformidad de los científicos con una práctica regida por valores tradicionales que la vida actual hace rápidamente anacrónicos e ineficaces. Como cualquier ciudadano, el científico reconoce que estamos atravesando una época en que se desmoronan muchas expectativas, forjadas en décadas anteriores, sobre las posibilidades de un crecimiento ilimitado de los recursos y oportunidades que abriría a todos la nueva revolución tecnológica. Aún más que cualquier ciudadano, los científicos tienen razones para cuestionarse sobre el carácter contradictorio de este famoso progreso. ¿Qué duda cabe que su inconformidad está en relación con el sometimiento descarado de su trabajo especializado a las leyes del mercado controladas mayoritariamente (en particular en las sociedades postindustriales) por los complejos sistemas de financiación del sector militar de la economía?

Refiriéndose a esta misma problemática, uno de los más célebres pedagogos vivos, el profesor Bogdan Suchodolski comentaba, en un homenaje que se el hizo recientemente en Barcelona, que hasta ahora el principal objetivo de la educación había consistido en "adaptar a los jóvenes al desarrollo de la civilización, pues se creía... que el futuro significaba siempre progreso". Sin embargo, la encrucijada por la que se debate esta civilización exige una modificación total del papel tradicionalmente optimista de la educación: "la idea de que la evolución dará por sí misma cosas buenas es falsa. Hace falta dirigir racionalmente la evolución y la juventud no debe estar adaptada a la civilización actual, porque esto quiere decir que hay que adaptarlos a la guerra, a la miseria, a la catástrofe ecológica, a la injusticia social... Por el contrario, hace falta educarlos para que dirijan la civilización moderna, lo que indudablemente significa un cambio de base en la educación". La tarea más apremiante en el actual período consistiría en promover por todos los medios un pensamiento alternativo que aliente "la libertad de imaginar que las cosas pueden funcionar de otra manera, que no estamos determinados, que la realidad existente no es la única posible y que la situación puede cambiar, que se puede actuar alternativamente. Es necesario un cambio de actitud". (11)

Tengo la impresión que esta filosofía de "cambio de actitud pedagógica" se encuentra presente en otras esferas de preocupaciones sobre las actividades científicas en el momento actual. Con ella se podría relacionar precisamente la franja creciente de estudios sobre las ciencias que han venido poniendo fuertemente en duda las ideas tradicionales sobre una lógica interna del desarrollo científico, independiente del contexto social.

Podría mencionar, entre los angloparlantes, los trabajos de autores tan conocidos como Forman, Barnes, Bloor, Mackenzie, y Sal Restivo, cuya obra reciente es, en buena medida, una síntesis de las tesis de esta corriente de "constructivistas" (12). Naturalmente, la opinión favorable a este punto de vista en los medios académicos, se expresa todavía en forma contradictoria. Ello está en relación con la situación de desarrollo incipiente de los estudios concretos en este dominio. También se expresa en un movimiento de las ideologías platónicas a adaptarse al "espíritu de la época" sin desnaturalizar su estructura y función. En adelante estudiaremos cómo se manifiesta este adaptacionismo en una retórica sobre la influencia "externalista" y psicológica del entorno social de la ciencia. Espero mostrar la gran significación que una crítica a estas tentativas tiene para nuestros intereses histórico-pedagógicos.

Uno de los sociólogos de la ciencia que con excelentes resultados se ha preocupado por abordar el rompecabezas de las relaciones de la actividad científica con el medio intelectual y social es, a mi modo de ver, Donald A. Mackenzie. Su obra Statistics in Britain: 1865-1930, ha influido notablemente desde su aparición en 1981, en la apertura del interés de científicos y de matemáticos sobre este género de problemas. En este libro Mackenzie observa que una vez aceptada la influencia social, es menester quitarle al término la connotación de exterioridad a la que se tiende a reducir su significado. Fundamentalmente se superará esta primera actitud espontánea, mediante estudios de casos en los que se ponga en evidencia que lo social se encuentra interviniendo, tanto en los procesos de evaluación de los resultados como en los mismos procesos de innovación. (13) Esta es precisamente la tarea emprendida por Mackenzie en su obra, al proponerse restablecer las relaciones que vincularon los trabajos capitales de Francis Galton, Karl Pearson y Ronald A. Fischer, con los presupuestos científicos, filosóficos y políticos del movimiento de la Eugenesia en Inglaterra, al final de la era victoriana y edwardiana. En una de las reseñas de este libro aparecida en Educational Studies in Mathematics, se empieza por reconocer que la obra no es una mera descripción de los métodos y técnicas estadísticas escrita por un sociólogo con buenos conocimientos en la materia. Se trata, opinan los comentaristas, de un intento de "desarrollar una teoría cualitativa de las interrelaciones entre el contexto social y el contenido del desarrollo de la teoría estadística, lo que permite una mejor comprensión de los conceptos, y de las posibilidades y limitaciones de la teoría en sí misma". (14)

La teorización de Mackenzie ha podido encontrar interlocutores en los medios científicos, venciendo la exterioridad de los estudios sociológicos. Al contrario, mientras no nos apoyemos en evidencias documentadas, los científicos seguirán argumentando, como diría Lakatos, que la "historia externa" explica sólo aquellos avances intelectuales que no pueden ser analizados en términos de "reconstrucciones racionales" de la historia interna. (15)

Desde el punto de vista histórico, es indiscutible la importancia de los trabajos de Lakatos sobre la fiabilidad de las matemáticas, su discontinuidad, la función del error, etc. Ellos han criticado implacablemente las visiones filosóficas de la matemática "formal" y "rigurosa". También en el campo de la pedagogía todos hemos encontrado estimulantes e inspiradoras sus críticas al uso predominante del estilo deductivo y a la influencia hegemónica de la creencia en las matemáticas acabadas en la enseñanza. Ningún pedagogo de buena fe podrá dejar pasar de lado el desafío contenido en la siguiente frase de Lakatos: "El estilo deductivo elimina el combate, elimina la aventura; toda historia desaparece, los propósitos de formulaciones sucesivas de los teoremas en los momentos de pruebas tentativas son condenados a la ablación, mientras que los resultados finales son exaltados como infalibles y sagrados...". "Todavía no hemos comprendido suficientemente que la actual educación científica y matemática engrendra el autoritarismo y es el peor enemigo de la independencia y del espíritu crítico" (16). Sin embargo, la concepción de Lakatos sobre la cultura científica se refiere fundamentalmente al contenido científico de la misma, y a la lógica conflictual de la producción y validación de los conocimientos. Siendo un aporte crucial a la historia de la dinámica interna de las teorías matemáticas, aún habría que penetrar agudamente en la interpretación del trasfondo socio-cultural de esta historia de ejemplos vs. contraejemplos, verdades infalibles vs. verdades falibles, pruebas formales vs. pruebas informales.

Es sabido que Lakatos y otros autores han estudiado el caso del origen de la noción de convergencia uniforme a través de la historia del célebre teorema falso de Cauchy, a saber: si una serie de funciones continuas es convergente en la vecindad de un punto, su suma es una función continua. Se han examinado abundantemente las fallas técnicas y conceptuales del error desde la perspectiva del teorema correcto de Weierstrass en términos de la noción de convergencia uniforme. Es bien conocida la historia de los contraejemplos de Abel en 1826 y de Dedekind en 1829, y los aportes a la cuestión en los trabajos de Seidel y de Stokes de 1847 (17). Finalmente, se sabe que el análisis no-estandar explica lo que tradicionalmente fue visto como la obstinación de Cauchy al no aceptar consecuentemente su error, como un prejuicio de los seguidores del análisis weierstrassiano. Efectivamente, su teorema era correcto desde el punto de vista de las nociones leibnizianas de infinitésimo y de continuo, las cuales fueron abandonadas al orientarse la institucionalización del análisis dentro de la concepción rival de Weierstrass del continuo. Pero hay una parte de la historia que aquí no interviene. ¿En qué medida se corresponden los conflictos del movimiento de fundamentación del análisis con una sociedad civil que en Francia y en Alemania remodelaba sus estructuras socio-económicas y sus regímenes políticos en función de los intereses de la burguesía? La ausencia de verdaderos estudios analíticos, y el autoritarismo ideológico de la ciencia pura, nos han habituado a considerar casi extravagante una indagación que es legítima y necesaria por muchas razones.

Sin que, a mi entender, tengamos aún respuestas convincentes en la materia, al menos empezamos a conocer que la fundamentación y la sistematización teórica estuvieron influídas efectivamente por las características peculiares de moderna institucionalización y profesionalización, adquiridas por la ciencia y las matemáticas en particular, a lo largo del siglo XIX. Los protagonistas del movimiento de "rigor" en el análisis realizaban actividades políticas y militares; eran fervorosos practicantes de principios ascéticos, ideológicos, religiosos y filosóficos; todos estuvieron comprometidos en actividades organizativas en su campo y principalmente, en la construcción de escuelas; todos profesaron la docencia como forma de garantizar un status, y todos se vieron entremezclados en el cumplimiento de estos roles y actividades, en querellas apasionantes de virulentos conflictos y rivalidades que, a diferencia o más todavía que en otras épocas, resultaban decisivos para la orientación de las investigaciones. En este sentido, la ciencia era para ellos algo más que un "affaire" intelectual rodeado de incidentes externos. Un buen número de historiadores con inclinación socio-cultural se han visto conducidos en sus estudios a reconocer la influencia de factores no-científicos en la actividad matemática del siglo XIX, si bien casi todos mantienen posiciones ambiguas. En un interesante trabajo de 1981, Judith Grabiner ha explorado los intereses sociales y los valores culturales que habrían motivado la búsqueda del rigor del análisis, particularmente en la obra de uno de sus iniciadores, Lagrange (18). Su concepción es que lo externo, en lo cual ella engloba todo lo que no es "idea matemática", opera sobre los individuos a nivel de cambio de actitudes y de estímulo intelectual. Así, por ejemplo, el problema de los fundamentos del análisis no habría podido plantearse si no hubiese habido la conciencia de su necesidad, al mismo tiempo que un cambio de actitud frente a la cuestión. El agente de este proceso fue Lagrange. De acuerdo a Grabiner, los factores sociales, económicos, políticos, culturales, y filosóficos, influyen solamente en las creencias que motivan al individuo, sin actuar directamente sobre el proceso de innovación. Sirven para explicar cuándo y por cuáles razones históricas adquiere relevancia la cuestión de los fundamentos. Pero no explican cómo tal cuestión fue abordada matemáticamente hasta convertirse propiamente en problema matemático. No hay tiempo para extender este análisis. Pero ya sospecharán ustedes que la crítica central a la posición de Grabiner se orienta a su toma de partido por la dicotomía excluyente sujeto-objeto, a la que me referí al comienzo. ¿Hacia dónde apunta casi siempre esta dicotomía? A la reinserción del análisis histórico en el platonismo. Es el problema del adaptacionismo que he evocado anteriormente. Júzguenlo ustedes mismos en la siguiente frase con la que Grabiner concluye su artículo (19): "Ciertamente las ideas matemáticas tienen vida propia y la influencia de las fuerzas externas en las matemáticas es a lo más sutil y ocasionalmente sin importancia. Pero como se demuestra en el caso de los fundamentos entre los siglos XVIII y XIX, aún la historia técnica de las matemáticas no puede ser comprendida integralmente sin considerar las condiciones no-matemáticas".

No quisiera que mis comentarios apareciesen como una crítica negativa a las muy importantes y originales interpretaciones de historiadores como Judith Grabiner. Por el contrario, afirmo que solamente en la medida que penetremos en el contenido de las actividades matemáticas, los historiadores de la cultura científica podremos construir una disciplina totalmente liberada de la visión parnasiana de la ciencia. (20)

Por supuesto la tarea no es fácil, al menos en el estado actual de las investigaciones. Como bien lo ha señalado H. J. M. Bos, "Lo que hace difícil el estudio de estas cuestiones es que requieren métodos muy distintos de los que comúnmente se utilizan en el estudio de la historia de las matemáticas. Concentrarse en las mismas matemáticas, en los conceptos, problemas, teorías, no permite responder a estas preguntas. Se requieren otros métodos, por ejemplo, métodos sociológicos y de biografías colectivas. Para ello, los historiadores de las matemáticas deben contactar a sus colegas en historia de la ciencia que ya disponen de una experiencia un poco más amplia en el tratamiento de tales cuestiones". (21)

Yo me permitiría agregar, retomando las ideas del comienzo de esta conferencia, que requerimos estrechar muy especialmente los contactos con los especialistas en la educación matemática. Al menos con quienes se interesan seriamente en la contextualización de las investigaciones didácticas. En general con quienes tienen claro que, en el cumplimiento de su principal propósito, el estudio del proceso de transmisión y de adquisición de los diferentes contendidos de esta ciencia, la didáctica de las matemáticas no puede dejar de considerar las determinaciones y las exigencias que provienen del medio cultural y social.

NOTAS BIBLIOGRAFICAS

1. Arboleda, L. C. y Lafuente, A. (1987): "Acerca del problema de la difusión científica en la periferia: el caso de la física newtoniana en la Nueva Granada (1740-1820)". Manuscrito.

2. Heilbron, J. L. (1980): "Experimental Natural Philosophy". In Rousseau, G. S. y Porter, R. (eds.), The Ferment of Knowledge. Studies in the Historiography of Eighteenth-Centry Science, New York, Cambridge Univ. Press; pp. 361-362. Ver también en este volumen el trabajo de Schaffer, S., "Natural Philosophy", pp. 55-91.

3. Brunet, P. (1926): Les physiciens hollandais et la méthode expérimentale en France au XVIII^{e} siècle. Paris; pp. 15-17. Consultar también al respecto, del mismo autor: L'introduction des théories de Newton en France au XVIII^{e} siècle; Paris, 1930.

4. Mornet, D. (1911): Les sciences de la nature en France au XVIII^{e} siecle, Paris, A. Colin; pp. v-viii.

5. Brunett (1926), op. cit., pp. 30-31.

6. Schaffer, Simon (1980). "Natural Philosophy", Cit. en nota (*); pp. 76-91.

7. Pemberton, Henry (1972). A View of Sir Issac Newton's Philosophy, with an Introduction to the Reprint Edition by I. Bernard Cohen..., Johnson Reprint Co., New York; 1° ed. de 1728.

8. d'Alembert, J. (1920): Discurso Preliminar de la Enciclopedia, Madrid, Col. Universal, No. 263-264; p. 25.

9. Rubín de Celis, M. (trad.) (1775): Historia de los progresos del entendimiento humano en las ciencias exactas y en las artes que dependen de ellas... Con un compendio de la vida de los autores más célebres que han escrito estas ciencias. Compuesta en francés por monsieur Savérien, y traducida..., Madrid, Imp. Sancha; pp. xx-xxii.

10. Forman, P. (1986): "Los propósitos de la historia de la ciencia", Revista de Occidente, Madrid, No. 64; pp. 51-62.

11. Suchodolski, Bogdan (1987). "Bogdan Sudrodolski - Un Clásico de la Pedagogía Socialista Preocupado por la Paz". Diario El País, Madrid, Junio 23 de 1987.

12. Restivo, S. (1985): The social relations of physicis, mysticism, and mathematics. Studies in social structure, interests, and ideas, D. Reidel Publ. Co, Dordrecht.

13. Mackenzie, D. A. (1981): Statistics in Britain: 1865-1930. The social construction of scientific knowledge, Edimburgh University Press, Edimburgh.

14. Borovcnic, M. y Fischer, R. (1983): Reseña de la obra de Mackenzie, op. cit., Educational studies in mathematics, pp. 101-103.

15. Lakatos, I. (1974): "History of science and its rational reconstructions". IN: Elkana, Y. (ed.): The interaction between science and philosophy, Atl. Highlands, Humanity Press; 195-241.

16. Citado en: Bouvier, A. (1981): La mystification mathématique, Hermann, París.

17. Ver en particular: Dugac, P. (1978): "Sur les théories des séries au XIX^{e} siécle", Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, No. 6, CNRS, Paris.

18. Grabiner, J. V. (1981): "Changing attitudes toward mathematical rigor: Lagrange and Analysis in the eighteenth and nineteenth centuries", IN: Jahnke, H. N. and Otte, M. (eds.), Epistemological and Social problems of the sciences in the early nineteenth century, Reidel, Dordrecht; pp. 311-330.

19. Grabiner, op. cit., p. 325.

20. Forman, op. cit., p. 59.

21. Bos, H. J. M. (1980). "Mathematics and Rational Mechanics", In: Roussean & Porter, op. cit., nota (2); pp. 327-355.

ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA NO 3° GRAU: POR UMA UNIVERSIDADE SEM PROVAS

Roberto Ribeiro Baldino
Instituto de Matemática-Universidade Federal do Rio de Janeiro e G-RIO
Rio de Janeiro, Brasil

O aspecto paradoxal da Educação é que a sala de aula, principalmente a de Matemática, tem atravessado incólume a avalancha de críticas e inovações didático-pedagógicas. Dir-se-ia que a escola deve continuar cumprindo um papel que ninguém quer, apenas para comprovar tudo o que se tem dito dela e fornecer material para outras tantas teses e propostas. Os agentes sociais encarregados, tanto de operá-la quanto de criticá-la, falam dela mas nela nada falam que possa comprometê-los além da conveniência. Situam-se como não-bservávels que observam estruturas (estáticas ou dinâmicas) mas não intervem em seu movimento, mesmo que seja para descobrir a enormidade da massa inercial. Suas experiências são feitas em condições ideais de "pressão e temperatura".

A proposta da ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA, ao contrário, nasce no próprio dia a dia de salas de aula reais, procurando implementar medidas para resolver a tríplice contradição entre o aluno, o programa e as condições de ensino, tanto internas quanto externas à escola. As medidas adotadas foram evidenciando novas contradições e obrigando a reflexões até entendermos que o problema da tríplice contradição não só não tem solução mas é colocado para, que ao tentar resolvê-lo, as pessoas continuem fazendo o necessário para que o ensino da Matemática seja o que é.

A partir daí procuramos caracterizar e resolver outra contradição que nos levou à proposta coerente, consistente e abrangente da ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA e que se põe nos seguintes termos:

De um lado, reconhece-se que:

1. A escola existente desempenha o papel de reprodutora da ideologia dominante através de um processo de seleção fundado na ideologia da "competência";

2. Esse papel se cumpre a partir dos efeitos de dominação e hegemonia inerentes às práticas vigentes no aparelho escolar, entre as quais a do ensino da Matemática tem papel dominante.

3. Nessa conjuntura, o professor não é neutro em sua sala de aula, principalmente quando pretende sê-lo.

Por outro lado, **não se abre mão de ensinar Matemática.**

Como resultado desse processo de ação e reflexão, a ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA propõe **intervir na escola** a partir da sala de aula, introduzindo o trabalho como valor ideológico, em substituição á "competência", na seleção e promoção das formas de consciência.

O convite a participação na ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA é colocado aos alunos, no início de cada semestre, nos seguintes termos.

Vivemos numa Universidade que nos impõe a realização de três provas escritas, decidindo-se a aprovação pelo critério de média 5. A freqüência em 75% das aulas é obrigatória, mas há muito ninguém liga para isso. Tradicionalmente, não interessa como nem onde o aluno aprende, se em aula, em casa, com professor particular, etc. Nem interessa se ele aprende ou decora. Diz-se-lhe apenas: "Apresente-se aqui em dia, hora e sala marcados e defenda seu 5 que você passa. O diploma é conseqüência de sua persistência nesse comportamento".

Quando propomos a avaliação da AS, não estamos suprimindo qualquer direito adquirido por tal tradição, por nefasta que seja. Estamos apenas propondo que ***aqueles que quiserem e puderem colaborar para a construção de um certo ambiente de trabalho NA SALA, DURANTE a hora da aula, segundo as normas da AS, tenham um bonus por êsse esfôrço. Os que não quiserem ou não puderem vir e os que preferirem outro tipo de trabalho durante o tempo da aula, poderão ficar com as notas obtidas nas provas, sem serem prejudicados pela nota baixa em AS.***

Não estamos propondo outra coisa. Lembramos que não se trata nem de utopia, nem de experiência. Não estamos propondo nada que não tenha dado certo antes. Tudo isso já foi feito no ano passado.

Os três parágrafos acima realizam a junção de vários planos reais.

1. O plano indeológico, na medida em que atingiram os presentes ao Painel da CIAEM e atingem o leitor através destas atas, levando-lhes um apelo típico das práticas educativas gerais, constitutivas de sujeitos (Althusser).

2. O plano teórico (científico e filosófico) na medida em que recortam a sala de aula em espaço e tempo caracterizando um sistema complexo e seus fluxos, que inclui o observador (Rolando Garcia).

3. O plano político, na medida em que lançam os limites da sala de aula como parâmetros da proposta de avaliação, inserindo-se definitivamente no real, como intervenção diferencialou perturbação no regime permanente do sistema de nível superior que, no caso, é o ensino tradicional vigente. (Rolando Garcia).

A prática política que consiste na proposta de avaliação pela medida da duração de um certo trabalho, por um lado é democrática, porque as modificações no sistema de aliciamento vigente são discutidas com as turmas ao longo dos anos e por outro, é autoritária, porque as regras da ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA, produto histórico dos anos anteriores, são apresentadas prontas, tal como as regras do ensino tradicional vigente, cuja historicidade fica evidente, no mesmo movimento; são "iluministas" e "românticas" (H. Lovisolo).

Portanto, assume-se que não só os esquemas interpretativos do investigador influirão na busca dos dados, na seleção de observáveis e no registro dos fatos mas assume-se que o próprio investigador funde-se ao real que ele observa e anuncia e modifica. Em vez de procurar menter-se à sombra durante o processo, justificando, ao final, não tê-lo conseguido porque "a organização dos observáveis exige prévia construção de instrumentos assimiladores da experiência" (R. Garcia) o investigador participa como agente do processo e seus instrumentos assimiladores da experiência tornam-se, da saída, observáveis.

Não só se reconhece que não há leitura pura dos dados e que "toda experiência está cheia de teoria", mas também que toda experiência está cheia de intenções. A autoridade pedagógica, como poder explicitamente fundado na história, será a articulação principal do sistema complexo que é a ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA.

A "integração do sujeito em seus respectivos trabalhos, tema maior da história e do ensino" (L.C. Arboleda) implica, em nos situarmos, sob o ponto de vista episemológico, nem no plano das estruturas nem no plano de seus movimentos mas no plano de suas perturbações, isto é, no plano das forças e das acelerações. O primado da contradição sobre o processo desdobra-se em primado do movimento sobre o móvel no plano do real e primado da relação sobre seus termos no plano da posição. (Ruy Fausto). Assim como na mecânica só se conhece a massa quando se aplica uma fôrça, o real da Educação Matemática só se conhece quando se tenta modificá-lo.

No plano da luta teórica, a sala de aula, modificada pela inclusão da ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA vai se tornar um significante do discurso que propõe/enuncia essa modificação. Além disso, a ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA é uma **ideologia diferencial**, não um valor absoluto, ou seja, só se justifica nos termos da conjuntura que quer modificar: destrói-se em sua própria construção.

Dos "pressupostos teóricos" da proposta, o dominante é a Teoria da Equilibração de Piaget (processos de assimilação-acomodação, abstração reflexiva e (generalização completiva) como modelo adequado à compreensão dos mecanismos da ontogênese, cujo paralelismo com os da filogênese são pensados sob os conceitos de "intra-inter-trans" (Rolando Garcia) e de "obstáculo" (Bachelard, B. Cornu e G. Brousseau).

Quanto ao MOTOR do processo de aprendizagem, que intervém nele mas não o regula e ao qual Piaget se refere em rápidas passagens sob a noção de "necessidade", vamos precisá-lo como parte do motor da história, a luta de classes, em dois planos: no da filogênese, nas conjunturas das formações sociais em que os conhecimentos foram sendo produzidos e organizados (Marx) e no da ontogênese, na constituição da ideologia do sujeito (Althusser e R. Barthes).

O papel que a escola, onde se trata de intervir com a posição da ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA, tem cumprido nessa formação social pode ser bem caracterizado a partir de inúmeros autores (Bourdieu & Passeron, Foucault, S. Baruk).

Embora com risco de deixar de lado aspectos importantes diremos, como principais características, que a ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA:

- acena com a concessão de certificados escolares por tempo de trabalho e não por seriação de conteúdos.

- Propõe que a escola se responsabilize pela aquisação de conhecimentos dos alunos, exigindo de cada um o trabalho mais adequado a seu aprendizado.

- Não propõe um modelo de escola nem de sociedade; não diz como elas deveriam ser.

- Não postula metas em função das quais procurar os meios mas postula os meios e aceita os fins a que levarem.

- Não "objetiva" uma "transformação social" mas executa-a desde logo.

- Não propõe "transformar pela escola" mas transforma a escola.

- Aceita os conteúdos vigentes na escola e os insere em situações-problema sobre o temário da conjuntura social atual e profissional futura dos alunos, procurando evidenciar as condições de exploração, dominação e hegemonia, inclusive na escola.

- Subordina a organização dos conteúdos programáticos ao objetivo nominal de cada prática de ensino.

- Trabalha os conteúdos por extratos de iguais pressupostos psicogenéticos, portanto em trajetória espiral, garantindo, desde o início, o "cumprimento do (objetivo nominal do) programa".

- Cumpre e recumpre o programa no mesmo período letivo, a partir do concreto e em níveis crescentes de abstração.

- Em vez de "conteúdos bem ensinados", conteúdos bem trabalhados durante todo o tempo disponível.

- Põe ênfase no processo de trabalho que ocorre nas seguintes circunstâncias, com regras e controles bem definidos:

  a) dominantemente em grupos de 4: só são atendidas solicitações coletivas;

  b) trahalho individual livre ("para casa") e dirigido ("entrevistas psico-pedagógicas");

  c) exposições sobre conteúdos já trabalhados;

  d) assembléias para avaliação do trabalho dos alunos e do professor.

- Os alunos avaliam a qualidade do trabalho, não a "competência" adquirida, nem a "meta" atingida.

- Ensino através de problemas: desafios ao grupo.

- Monitoria obrigatória com controles definidos.

- O professor é um desequilibrador: não explica, pergunta.

- Exposições a partir das dificuldades dos alunos.

- O profesor não abre mão da autoridade pedagógica.

- O professor acata os controles do ensino vigente mas age dentro de sua margem natural de liberdade.

- O professor instala um processo democraticamente dirigido de modificações diferenciais que deixam um resíduo histórico, isto é, introduz pequenas mudanças no sistema de premiações e sanções, refletidas, modificadas e aceitas pelos alunos, na medida em que se organizam.

- As relações professor-aluno são condicionadas aos papéis bem definidos que cada um desempenha no trabalho coletivo.

- A educação é centrada no grupo.

- O professor é um organizador, proponente das tarefas, instigador do debate, desafiador, desequilibrador e peturbador.

- O professor deve conhecer a epistemologia (filogênese e ontogênese) dos conteudos a trabalhar, a dinâmica de grupos pequenos e grandes e deve ser capaz de organizar assembléias e de colocar seus pontos de vista democraticamente dentro delas.

- A supremacia dos grupos sobre os indivíduos inclui a da assembléia sobre o mestre, onde ele é só mais um participante, embora com papel diferenciado.

- O professor conserva-se como a instancia decisoria dominante no planodidático e como a última instancia decisoria no plano pedagógico.

- O aluno participa não só do trabalho, mas da reflexão sobre ele e de sua e avaliação.

- Os grupos gozam de autonomia relativa: todo individualismo explicativo é ameaçador e inibidor da aprendizagem.

- Aprender se torna uma atividade de enfrentar o desafio de resolver a situação-problema posta ao grupo.

- A motivação do aluno depende principalemnte de como ele imagina a relação entre a tarefa na qual se engaja e:

  a) sua vida profissional futura;
  b) as condições de aprovação;
  c) as condições de integração do grupo;
  d) o grau de dificuldade da própria tarefa.

Vemos pois que a ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA, como de resto a Educação Matemática, que hoje se tenta implantar por toda parte e mesmo a Didática da Matemática, com seu estatuto de ciência, chama a atenção para a existência de variáveis presentes nos ensino da Matemática que as práticas vigentes teimam em desconsiderar. A inauguração dessa nova área de saber vai depender, então, de um trabalho inicial que evidencie e mostre a especificidade dos problemas a resolver. Para isso será preciso um trabalho teórico capaz de transformar o real em fato social ou ainda, nos termos precisos de Ruy Fausto, vai ser preciso passar da **determinação a posição**. Tentamos isso em O Aluno Real.

Como o que se quer mostrar vai alterar relações há muito estabelecidas, reações são inevitáveis. Além de "mostrar", vai ser preciso "obrigar a ver". Será preciso travar verdadeiras batalhas, algumas bem concretas, como aquela contra os critérios dos editores que não se interessam pelo que não tem "valor comercial". Outras serão batalhas teóricas, tão ou mais decisivas, como se pode prever a partir da recente afirmação de un professor do IMUFRJ: *"A Matemática é a Matemática e quem entende dela sao os matemáticos"*.

Ordem, dificultando o pronto e rápido acesso ao material já trabalhado. Caso um elemento não tenha o material, isso deve ser comunicado ao professor em seu primeiro contato com o grupo, para a correspondente anotação na ficha de avaliação. A falta dessa comunicacao faz a responsabilidade da falta recair sobre o grupo todo.

B) DESCONHECIMENTO DAS REGRAS. Revelar desconhecimiento dessas regras e dos principios gerais delas decorrentes, constitui falta grave que exclui o elemento ou o grupo da participação nas avaliações da Assimilação Solidária PASSADA.

V. Sobre o grupão

A plenária da turma, chamada grupão, reúne-se nos últimos dez minutos de cada aula. Contando com os 20 minutos de intervalo e com os atrasos crônicos das aulas seguintes, o tempo de reunião pode se estender a mais de meia hora. A missão específica do grupão é avaliar tudo o que possa ter contribuído para facilitar ou dificultar a formação de um ambiente geral de ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA na turma toda, neste dia, incluindo aí a avaliação de sua própria organização. Além de sua missão específica o grupão é soberano para escolher os temas que quiser abordar.

Tendo sido notada falha na ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA, pelo professor ou pelo grupo, deve-se marcar AS "imperfeita" na papeleta de controle; nesse caso o grupo perde os tres pontos do dia. O foro para decidir sobre eventuais divergências no julgamento de ocorrências da AS é o grupão.

Cada avaliação deve conduzir a um número que representará a contribuição do trabalho do dia ao peso percentual da nota da AS da turma toda diante da nota da prova. A média de essas percentagens tribuídas pelo grupao a cada aula, será o peso final da AS diante da prova, válido para turma toda. Esta percentagem geral está limitada em 30% mas, individualmente, o peso da AS pode atingir 100%.

Na atribuição do percentual do dia o grupão levará em conta:

- Prioritariamente as ocorrências de quebra de AS nos grupos, conforme relato dos fatos feito pelo professor e pelos membros desses grupos.

- A avaliação do professor sobre o trabalho do dia e sobre o desempenho comparativo de grupões anteriores.

- A existência de elementos que trabalharam individualmente ou que chegaram muito atrasados ou que estavam muito defasados, a observância dos grupos à ordem das solicitações de antendimento.

- A actuação do professor: a adequação e dificuldade das tarefas propostas, a clareza e objetividade da exposição, se for o caso, a presteza no entendimento às solicitações dos grupos, etc.

- A atuação dos monitores: principalmente sua participação como integradores ou como explicadores, etc.

- A atuação do próprio grupão: sua observância a decisões anteriores como por exemplo a atenção a exposição do professor, a atuação da mesa na distribuição da palavra e condução da reunião, o respeito de cada um a sua vez de falar, etc.

Busca-se a autonomia do grupão diante de um objetivo definido de intervenção diferencial eficaz no ensino vigente na direção da implantação dos valores da ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA. Na organização progressiva dos grupões, temos observado 4 fases.

<u>1ª fase: INORGANICIDADE</u>.

A turma se distribui espontaneamente em filas de cadeiras, de preferência bloqueando a passagem do professor, quando isso já não é assegurado pela própria estrutura do anfiteatro. Os da frente, de lápis e papel na mão, estão prontos a copiar até os suspiros do mestre; os de trás, na mais absoluta indiferenca e total descomprometimento com o que se passa, como se estivessem diante de um aparelho de TV. Os de cursos mais elitizados costumam gritar, para se assegurarem de que são donos o espaço e da palavra.

Entrar e sair da sala a qualquer hora, falar com o colega do lado sobre qualquer assunto, em qualquer tom de voz e a qualquer momento, gargalhar à vontade, são direitos assegurados. A preocupação dominante é com os vacilos do mestre que são acompanhados de comentários mais ou menos sarcásticos e da indefectível pergunta: "Isso cai em prova?". Na medida em que os de trás percebem que os da frente estão entendendo menos que de costume, aumentam as demonstrações de desinteresse, falando mais alto, assobiando, jogando bolinhas de giz ou mesmo vaiando abertamente. Em cursos menos valorizados socialmente, essas manifestações cedem lugar a maciço abandono da aula e trancamento da disciplina.

A contradição principal passa claramente entre o tablado e a platéia. As lideranças da turma vão para as mãos dos mais barulhentos e das meninas menos tímidas e de melhor visual. O discurso, essencialmente, não ocorre através da língua mas num misto muito eficaz de "oba-oba" e "como é que é?" O objetivo é facilitar a prova, fazendo recair sobre o mestre a maior responsabilidade possível. A grande vitória é mantê-lo sempre a ponto de sair de sala, impotente... e incompetente.

Só quando nos dispomos realmente a introduzir outros valores nesse sistema é que a insuspeitada envergadura das reações nos indicam que essa inorganicidade é índice de uma ordem muito determinada, cujo papel não cabe analisar aqui. (Ver O ALUNO REAL).

<u>2ª fase: ESTRUTURAÇÃO</u>

Quando se introduzem os valores expressos nos princípios gerais da ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA e a turma começa a perceber que assim pode entender e que termina aprendendo mais, vai se fechando o espaço de colocação das antigas lideranças da inorganicidade. Não há espaço para elas porque todos estão trabalhando o tempo todo ou estão ligadíssimos numa exposição relâmpago que vem fornecer uma informação esperada. Nos pequenos grupos não há lugar para contestações do método. Surgem apenas reivindicações específicas isoladas.

Com os resultados obtidos, a AS começa a encontrar seus defensores que naturalmente se reúnen em grupos, trabalham melhor e aprendem mais, aumentando a diferença em relação aos que não se engajam. No entanto, as antigas lideranças guardam o poder de seu discurso, ainda não derrotado na luta teórica e agem por fora, cada vez mais preocupadas com seu atraso relativo.

O discurso dominante, nessa fase, ainda é o da velha competência: para a universidade um projeto com provas, para garantir os "mínimos necessários ao exercício da profissão", com muitos reprovados para garantir a excelência dos aprovados, etc. Simultaneamente esse discurso tolera a ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA para a turma porque ela facilita a aprovação mas a entende como o "jeito do Baldino dar aula". "Até se aceita, porque ele é esforçado". Não entende a AS como um método, capaz de ser aprendido e adotado em outras disciplinas.

<u>3ª fase: AUTONOMIA</u>

Quando o grupão recebe o mandato da avaliação do processo de trabalho coletivo, a construção de sua autoridade sobre os pequenos grupos se faz na luta contra as lideranças da primeira fase que tentam conservar os privilégios individualistas em detrimento do aproveitamento coletivo. Finalmente passa a predominar o discurso das lideranças que emergiram dessa luta, englobando agora a AS como método, não mais como estilo de aula, entendendo-a como avaliação do trabalho, não do produto.

Em suas plenárias a turma vai assumindo o controle do curso: decide a duração da exposição do professor, se no início, meio ou fim da aula, decide sobre a necessidade de monitores, avalia a atuação deles e do professor, decide o número de horas para cada tópico do programa, decide sobre a conveniência de revisões, confere o trabalho feito durante a aula, decide quem deve trabalhar mais em casa, quem deve atuar como monitor, quando fazer revisões, e acima de tudo, cobra o cumprimento das decisões tomadas.

O professor é mais uma voz, privilegiada, é verdade, porque continua detendo a autoridade pedagógica, mas subordinada às regras impostas pelo próprio grupão. Cabe-lhe relatar as ocorrências de quebra da AS durante a aula, opinar sobre e criticar a organização do grupão, propor as atividades, etc.

4ª fase: LIDERANÇA

O grupo passa a se responsabilizar pela execução, avaliação controle do processo de ensino, formulando soluções de criatividade imprevisível. A defesa da AS como método toma vulto para além da própria disciplina funcionando como proposta alternativa diante da qual critica-se o método do "cuspe-e-giz", adotado em outras, onde a farsa é evidente e só uns poucos aprendem. (Ver O ALUNO REAL). A ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA adquire o caráter de projeto a ser levado adiante, uma bandeira do grupo para a Universidade toda. O grupão que adquiriu autonomia vai ocupar de maneira indelével um lugar pioneiro na política universitária, como turma a ser lembrada por muito tempo.

VI. Demais condições

1. Livro texto e fichas de trabalho

O livro texto tem sido HOFFMANN, para a Faculdade de Farmácia e LEIGTHOLD ou AL SHENK para a Escola de Química. Na verdade qualquer livro serve, visto que suas semelhanças superam em grande parte as aparentes diferenças. Comprovamos experimentalmente, numa turma especial, que para passar das primeiras páginas, o aluno já deveria contar exatamente com os esquemas de assimilação que constituíam o projeto didático do livro todo: só entendia "números reais" quem podia operar com limites; só entendia "limites" quem podia pensar em termos de continuidade; só entendia "continuidade" quem usava derivadas e só entendiam "derivadas" os alunos que podiam integrar taxas de variação, o que, enfim, era o "teorema fundamental do cálculo", objeto do livro todo!

Numa palavra, os livros-textos de cálculo, obedecendo á ordem axiomático da prática científica de seus autores (em geral matemáticos de projeção, muito procurados pelos editores) estão escritos do abstrato para o concreto e se constituem em estruturas a prova de ensino, porém muito eficazes para separar, sem possibilidade de desculpas, quem adquiriu de quem não adquiriu, em sua escolaridade anterior, um certo nível de abstração, que vulgarmente se chama de "base". O livro texto é o instrumento primordial para o jôgo com cartas marcadas a serviço da segregação social que são as práticas de ensino da Matemática.

Rompendo, não com o livro-texto mas com o uso que dele é feito, cada FT contém material sob forma de problemas para serem trabalhados durante, aproximadamente, três aulas de 100 minutos, ao final das quais fazemos uma exposição em retrospectiva, partindo das dificuldades encontradas pelos alunos. Nesta ocasião distribuímos a folha de soluções (FS) dos problemas da FT.

2. Objetivo nominal e programa

O objetivo nominal de todo curso de Cálculo é ensinar duas novas operações, além das 4 conhecidas anteriormente: são a derivação e a integração. Será preciso então mostrar quais problemas se podem resolver com estas novas operações e que não poderiam ser resolvidos apenas com as operações aritméticas. Portanto, ao final do curso, espera-se que os alunos saibam, pelo menos, formular, equacionar, resolver e interpretar a solução de problemas que recaiam em equações diferenciais elementares.

Do ponto de vista das disciplinas que seguem aos Cálculos, parecé ser mais importante saber se o professor "deu ou não deu" esse ou aquele tópico que saber se os alunos aprenderam ou não o que foi "dado". No ensino tradicional vigente, o objetivo nominal costuma ficar em segundo plano em relação ao controle burocrático que consiste no "cumprimento do programa". Nossa estratégia em relação á crítica proveniente desse tipo de controle tem sido a de cumprir o programa em poucas aulas e depois voltar a compri-lo em níveis cada vez mais profundos de abstração. Desde as primeiras FT fica evidente a presença de raciocínios de derivação e de integração, geradores de necessidades teóricas que vão sendo supridas ao longo do curso, de maneira que todo tópico do "programa" tenha sido abordado, pelo menos uma vez. Alguns pontos são abordados de passagem, outros com mais profundidade, segundo o permita o "pique" da turma.

3. Avaliação

O curso é dividido em 4 módulos, cada um com duração aproximada de 4 semanas. A média das notas dos dois primeiros módulos e a média dos dois últimos, fornecem as notas do semestre, exigidas pela Universidade. Se a média dessas duas notas for igual ou superior a 6, o aluno está aprovado. Se for maior ou igual a 5 e inferior a 6 o aluno faz um exame, precisando de 3. Se for inferior a 5, depreza-se a menor e o aluno faz o exame para completar média 5 com a maior. Na nota do exame não intervém a AS.

A avaliação obedece a um critério misto: uma parte da nota é obtida em provas escritas, conforme manda o regulamento da Universidade. Outra parte é obtida pela avaliação da ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA que consiste na medida do tempo de trabalho produtivo nas atividades em aula e em atividades individuais complementares. A AS tem contribuído com 30% da nota e as provas com 70%. Nosso projeto é elevar gradualmente o peso da AS, até poder dispensar as provas como critério de aprovação. A primeira experiência nesse sentido foi feita na turma de Cálculo II da Faculdade de Farmácia no 2° semestre de 1987.

Até o momento, a avaliação da AS só acrescenta a nota de prova. Em termos matemáticos:

nota = máximo entre: (0, 3 AS + 0,7 nota da prova) e (nota da prova)

Vale dizer, pois, que a participação na avaliação da AS é facultativa.

4. Trabalho individual dirigido

Uma nota de AS muito superior a da prova, 9 para 2, por exemplo, evidencia que o processo de trabalho adotado está conduzindo a uma premiação que não corresponde a "competência" adquirida, pelo menos enquanto avaliado pela prova. Tres ordens de fatores podem ser invocadas para explicar o fato: o trabalho em aula, o trabalho individual e a "falta de base".

E possível que o trabalho em aula seja defeituoso, por exemplo que o aluno esteja trabalhando com colegas que avançam mais rapidamente que ele e estejam fazendo o papel do "piedoso" em relação a ele (III.2 das NORMAS da AS) e ele pode estar criando a ilusão de que entendeu mas não tem realmente com quem dialogar para formar suas certezas. Também pode acontecer que o aluno não esteja encarando a aula como lugar para aprender e sim tentando descobrir maneiras de passar o tempo dando a impressão de que trabalha ("cola" na AS). Ou pode ser algun outro defeito da pedagogia. Por isso, a partir do 2° módulo, adota-se um critério de formação de grupos que leva em conta o CI.

Pode ocorrer que o aluno não esteja fazendo o trabalho individual recomendado para preencher as defasagens de andamento a cada aula ou pode ser que este trabalho individual esteja sendo feito de forma errada. Finalmente pode ocorrer que, apesar do vestibular ou precisamente por causa do vestibular, o aluno não conte com esquemas de assimilação necessários para o curso de Cálculo, o que se costuma designar como "falta de base".

Em todos esses casos, o aluno precisa da ajuda especial, até que possa enfrentar sozinho suas próprias dúvidas e formar suas própias certezas. Prevendo a existência desses casos, o curso de Cálculo em ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA é acompanhado de un horário extra de trabalho individual dirigido, chamado "as aulas da tarde", ás 3as e 5as-feiras, de 13 as 16 horas, aberto a todos os interessados. Nele os participantes receben uma nota obtida pela simples medida do tempo de trabalho.

As "aulas da tarde" constituem um ponto que tem sido muito mal entendido. As reprovações nesta Universidade e, em especial nas turmas de Cálculo e Física têm sido elevadas. Oferecemos aqui ao aluno em rota de reprovação, a oportunidade de um atendimento eficaz, individualizado, com garantia de nota, mesmo que ele termine não se saindo tão bem na prova. Não estamos "obrigando" quem quer que seja a vir á tarde, apenas estamos oferecendo esta oportunidade aos que puderem realizar tal tipo de trabalho.

5. Cálculo das notas

Resta, agora, explicar como se obtém a nota de um módulo. Cada módulo termina com uma prova individual escrita, realizada no horário da aula, com correção graduada entre 0 e 10. A "matéria que entra" é determinada pelo andamento médio da turma e discutida no grupão anterior ao do dia da prova. Na aula seguinte a da prova, esta é trazida, já corrijida, para funcionar como ficha de trabalho. Além da nota da prova, cada aluno obtém también uma nota da AS no módulo. Toma-se então média das percentagens atribuídas pelo grupão nas aulas do módulo e usa-se a fórmula:

nota do módulo = máximo entre: (0,3 AS + 0,7 nota da prova) e (nota da prova)

Resta então explicar como se obtém a nota da AS num módulo. O cálculo para o primeiro módulo é mais simples. Somam-se os pontos obtidos pelo aluno em cada aula, divide-se o resultado pelo total de pontos que poderia obter e multiplica-se por 10. Essa será sua nota da AS no primeiro módulo.

A partir dos resultados obtidos num módulo, calcula-se um coeficiente individual, CI, que vai afetar a nota da AS no módulo seguinte. Esse coeficiente é obtido examinando a diferença entre a nota da AS e a nota da prova de cada aluno. Os que tiverem nota da prova maior ou pelo menos próxima da nota da AS, têm CI próximo de 0, o que significa que sua nota de AS no próximo módulo será contada integralmente, tal como no primeiro módulo. Porém, os que tiverem nota da AS muito maior que a nota da prova, terão CI próximo de 1, o que fará com que sua nota da AS no módulo seguinte caia aproximadamente para a metade, não ser que sua nota nas aulas da tarde compense essa perda.

Podemos agora explicar como se calcula a nota da AS nos 2°, 3° e 4° módulos. Neles, a nota da AS é a média ponderada entre a nota da AS das aulas da manhã, calculada como no primeiro módulo e a nota do trabalho individual das aulas da tarde, com pesos, respectivamente 1 e CI. Em termos matemáticos:

$$\text{nota do módulo} = \frac{\text{N. AS da manhã} + \text{CI} \times \text{N. trab. individual á tarde}}{1 + \text{CI}}$$

Assim, um aluno com CI = 1 terá a nota da AS reduzida á metade, a não ser partícipe do trabalho individual á tarde. É uma questão de opção: as "aulas da tarde" têm permitido a muitos alunos evitar a reprovação realizando antecipadamente um trabalho eficiente de aprendizagem que, no ano seguinte, seria muito mais penoso e menos produtivo. Também podem ocorrer casos de alunos com "falta de base" tão grave que o próprio trabalho individual á tarde se mostre insuficiente para levá-los a obter média 5 nas provas. Desses, alguns poderão ser aprovados por causa da AS.

Os que tiverem notas muito altas nas provas (8 ou 9 dependendo de como a turma saiu) ficam "condenados á monitoria" no módulo seguinte, isto é numa aula, estudam, na seguinte prestam assistência a grupos com dificudades especiais ou atrasados.

6. Dispensa das provas como critério de aprovação

No segundo semestre de 1986, os resultados do curso de Cálculo II em ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA acusaram o seguinte: 7 alunos desistiram antes da metade do período. Dos 56 que concluíram, 39 foram aprovados e 17 reprovados. Dos aprovados, 6 não o teriam sido se não tivessem se beneficiado da avaliação da AS. No entanto, TODOS os que tiveram AS acima de 75%, **teriam passado só com as notas das provas.**

No Cálculo I da FF do primeiro semestre de 1987, começaram 85, desistiram 14, foram aprovados 60, reprovados 11, não teriam sido aprovados se não fosse a AS, 14. Constatou-se que **98% dos que seriam aprovados se só houvesse provas, têm AS acima de 8.**

Esses resultados permitiram, no segundo semestre de 1987, realizar a primeira tentativa de dispensar o critério de aprovação pela prova: **para os que concluírem o curso com AS entre 8 e 9 o peso da AS diante da prova aumenta gradativamente de 30 para 100%.**

BIBLIOGRAFIA

ALTHUSSER, Louis - "IDEOLOGIE ET APPAREILS IDEOLOGIQUES D' ETAT - Positions, ED. Sociales, Paris 1976.

BCHELARD, Gaston - "EPISTEMOLOGIE" - Presses Universitaires, 1974.

BALDINO, R. "O ALUNO REAL" - G-Rio 1987.

BALDINO, R. "O OBJETO DA MATEMATICA: ESPECIFICIDADE E MATERIALIDADE" - Educação Pela Inteligência, Ano 1, Vol. 1 N° 1, 1981.

BARTHES, Roland - "MYTHOLOGIES" - Editions du Seuil, Paris.

BARUK, Stela "ECHEC ET MATHS" - Editions du Seuil, France 1973.

BOURDIEU, Pierre & PASSERON, Jean Claude - "LA REPRODUCTION - Les Editions de Minuit, Paris 1970.

BROUSSEAU, Guy - "LES OBSTACLES EPISTEMOLOGIQUES ET LES PROBLEMES EN MATHEMATIQUES" - Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 4 N° 2, pp.165-198, 1983.

CORNU, Bernard - "L'APPRENTISSAGE DE LA NOTION DE LIMITE" - These de 3eme. Cycle - U Paris VII, 1980.

FAUSTO, Ruy - "Marx, lógica e política - Ed. Brasiliense, 1983.

GARCIA, Rolando - "PROBLEMAS DEL CONOCIMIENTO Y LA PERSPECTIVA AMBIENTAL" - Henrique Leff, Ed. Siglo XXI, 1986.

GARCIA, Rolando e PIAGET, Jean - "PSYCHOGENESIS E HISTORIA DE LA CIENCIA - Siglo XXI, México 1982.

PIAGET, Jean - "L'EQUILIBRATIONS DES STRUCTURES COGNITIVES" Presses Universitaires de France, Paris 1975.

MATEMATICAS: UNA RECONSTRUCCION HISTORICO-FILOSOFICA PARA UNA NUEVA ENSEÑANZA

Angel Ruíz Zúñiga
Universidad de Costa Rica
San José, Costa Rica

RESUMEN

Se trata en este trabajo de analizar el origen de la visión racionalista de las Matemáticas, con sus énfasis en los aspectos deductivo-formales, aprioristicos y axiomáticos, y cuya influencia ha sido decisiva en la enseñanza de las Matemáticas. Para la descripción analítica de este paradigma se aborda la Filosofía de las Matemáticas en los griegos, Descartes, Leibniz y Kant, así como en el período que va de 1870 a 1940. En esta investigación se busca hacer una reconstrucción interpretativa de la naturaleza e historia de las Matemáticas, capaz de fundamentar una nueva y necesaria actitud en la enseñanza de las mismas. Lo que se busca entonces es sugerir la necesidad de un cambio radical en la filosofía moderna de las Matemáticas, que permita importantes transformaciones en su Enseñanza. (1986) (Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica).

El conflicto entre el Racionalismo y el Empirismo ha sido en el mundo de la epistemología un tremendo factor de separación de pensadores (y de ideas) en tradiciones antagónicas. Esto ha generado en algunas ocasiones una falta de comunicación que ha repercutido en la ausencia de una comprehensión más profunda de la naturaleza del conocimiento.

En la historia de la reflexión sobre las Matemáticas ha predominado como paradigma central uno que afirma al Racionalismo, que privilegia la "razón" por encima de la experiencia sensorial en la determinación de la verdad de las proposiciones de las Matemáticas. En torno al racionalismo se ha condensado una "ideología" que enfatiza los aspectos formales deductivos y axiomáticos que establece al conocimiento matemático como a priori, infalible, absoluto, y que ha tendido a favorecer la existencia de un mundo abstracto independiente, platónico, para las entidades de las Matemáticas. Esta "ideología" dominante ha determinado métodos, actitudes, programas, textos, etc., en la enseñanza de las Matemáticas.

Frente a esta ideología se ha opuesto tradicionalmente un empirismo a lo Mill que no da espacio a la mente más allá que el de ser reflejo mecánico de la experiencia sensorial, no dejando realmente lugar al influjo del sujeto epistémico. Por otra parte, dentro de los empiristas modernos del siglo XX (alrededor del Círculo de Viena), la posición de negación de contenido material a las matemáticas y reducción de su naturaleza al lenguaje, no pareciera tampoco una extraordinaria alternativa frente a la ideología racionalista.

El punto importante de entender tal vez sea que ni la ideología racionalista ni sus críticas empiristas parecieran ser muy satisfactorias para la filosofía de las matemáticas de nuestros días. Esto posee implicaciones extraordinarias para una Enseñanza de las Matemáticas que ha partido en los últimos tiempos de los paradigmas dominantes en la comprehensión de las Matemáticas, y que para nadie es un secreto que padece una profunda crisis.

Vamos a buscar aquí comprehensión de la ideología racionalista, y a partir de su crítica delinear una perspectiva filosófica diferente, que no cae simplemente en las formulaciones críticas clásicas del empirismo occidental.

La "Teoría de las Formas" de Platón constituye una fuente teórica muy importante que influiría en la evolución del paradigma considerado. Para éste existía un mundo especial de "formas", de esencias de las cosas, que sólo podía ser aprehendido por la razón. El mundo de los sentido no era verdaderamente real (1). Para Platón la realidad y la verdad se encontraban exclusivamente en ese mundo abstracto de "universales". La posición epistemológica de Platón era racionalista y además duramente crítica de las tendencias materialistas o empiristas de la época. Atacó de una manera sistemática la actitud de los naturalistas jónicos y especialmente al atomismo de Leucipo y Demócrito. Buscó un apuntalamiento del misticismo y las actitudes espiritualistas (comunes en las Civilizaciones del Bronce) y de todas aquellas actitudes intelectuales contrarias a la búsqueda del conocimiento a través de la práctica o de la experiencia sensorial o intuitiva. En un contexto histórico dominado por el retroceso general de Atenas (después de su derrota en las Guerras de Peloponeso), su gran erudición y su extraordinaria capacidad literaria convirtieron sus opiniones en puntos centrales de referencia de la vida intelectual griega. Si bien no produjo resultados importantes en matemáticas, se interesó tanto por ellas que exigía en su Academia el conocimiento de las mismas como requisito de admisión. Aunque el mejor matemático de la época fue su discípulo (Eudoxo), sus posiciones racionalistas fueron decisivas en la comprehensión y la forma de buena parte de las Matemáticas que le siguieron. Su visión debe considerarse como un auténtico obstáculo en el decurso positivo de la historia de las Matemáticas griegas (de hecho la rigidez de la metodología platónica limitó los alcances del trabajo de Eudoxo, quien tuvo que alejarse del maestro en muchas cosas). Para Platón además, el modelo deductivo y axiomático era esencial en las Matemáticas. Su influencia fue casi directa (a través de discípulos suyos) sobre Euclides, quien fue el director de la Facultad de Matemática del Museum de Alejandría, y su "texto" llamado <u>Los Elementos</u> se convertiría en el modelo a seguir en la enseñanza y evolución de las Matemáticas por muchos siglos (2).

Aristóteles, quien también fue discípulo de Platón, rompió considerablemente con la visión platónica. En lugar de un "mundo de Formas" o "universales" en el vacío, afirmó que los "universales" existían en las cosas reales, físicas. En partes de su obra (como en la <u>Biología</u>) adoptó una metodología de investigación empírica, que sus discípulos a través del <u>Liceo</u> y luego del Museum se encargarían de extender. Se sugiere que Estraton realizó experimentos controlados, tal y como haría Galileo dos milenios después. Aristóteles sistematizó las bases de la lógica en su Organom, pero no se dedicó a las Matemáticas. Sus ideas lograron contrapesar la actitud estéril platónica en ciertas ciencias, pero en las Matemáticas el territorio quedó libre completamente. ¿Qué habría sucedido si Aristóteles hubiera enfrentado el racionalismo exagerado y axiomatismo en la reflexión platónica sobre las Matemáticas? Es difícil de saber. La realidad es que Aristóteles no rompió totalmente con Platón ni con el racionalismo. Buena parte de sus escritos rechazan de hecho la experiencia sensorial y están cargados de categorías y recursos mentales que se juzgan verdaderos, absolutos e infalibles. Su "teoría de los universales" se puede valorar apenas como "moderada" frente a la "radical" de Platón. No será sino hasta el Siglo XIV de nuestra era con Ockam y el Nominalismo que se desarrollará una actitud más antagónica y alternativa frente a los "universales".

A pesar de la esterilidad del racionalismo platónico y su influencia en el mundo griego, se dieron trabajos como los de Apolonio de Perga y de Arquímedes de Siracusa. Apolonio dejó poco para la posteridad en el estudio de las cónicas. Arquímedes fue sin duda el mejor matemático de la antigüedad griega, y el padre de la física-matemática.

Con el Imperio Romano la civilización griega y mediterránea fue destruida casi completamente (3). En Occidente, la Edad Media se inició con la dispersión social y cultural, la miseria y el oscurantismo. Algunas partes de la cultura griega fueron conservadas por el Imperio Bizantino, y luego por los mahometanos a partir del Siglo VII D. C. No será sin embargo hasta los albores de la nueva sociedad europea (que arrancó con la Revolución Intelectual del Renacimiento - Reforma - Revolución Científica) que la cultura clásica va a ser rescatada, reelaborada y superada cuantitativa y cualitativamente.

Aparte de Galileo y de Francis Bacon, Descartes fue uno de los grandes profetas de la nueva forma de pensar de la sociedad emergente. En 1637 publicaba su Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences, en el que introducía una nueva variedad de racionalismo, y una metodología (de hecho trasladaba los criterios de verdad de la "correspondencia con el ser" a la "distinción y claridad" de las ideas). Utilizando como modelo la forma reconocida usualmente de la geometría introduce un carácter deductivo-axiomático del conocimiento y de la realidad. En sus "revolución cosmológica" y "revolución geométrica" la axiomática es la piedra de toque. Aunque la referencia se hace a la deducción y a la razón. En realidad se trata de contingencias en donde la intuición (de tipo espiritual y, a veces, hasta teológico) es decisiva. La "Razón" productora de verdades (¡y también realidades!) absolutas e infalibles (alejadas de lo empírico) se refería menos a la lógica que a una "intuición" (4).

En el esquema cartesiano (en donde las Matemáticas juegan un papel central: la mathesis universalis) está presente una consideración precisa sobre la naturaleza de las Matemáticas: axiomática, deductiva, absoluta, a priori, infalible. A pesar, no obstante, de este nuevo racionalismo en la misma obra de 1637, como apéndice, aparece la Geometría. En ésta establece el resultado teórico de la época más importante previo al invento del cálculo diferencial e integral: la geometría analítica (conjunción de la geometría clásica y el álgebra, desarrollada esta última especialmente por los algebristas italianos Tartaglia, Cardano, etc.) (5).

Algún tiempo después, Leibniz (uno de los creadores del Cálculo) también asumía el racionalismo de nuevo cuño, pero hacía de la lógica su referencia más importante. Las proposiciones de las Matemáticas eran verdaderas porque su negación sería lógicamente imposible. Kant más tarde va a crear una colección de categorías y de posiciones que busca dar cuenta de la naturaleza de las Matemáticas dentro del racionalismo, pero tomando en cuenta la tradición empirista que corría paralela (sobre todo en Gran Bretaña) en la sociedad moderna. Para éste las proposiciones de las Matemáticas son "sintéticas" a priori y no "analíticas" (6). Una proposición es "analítica" si no necesita para decidirse acerca de su verdad más que una indagación "conceptual", "lingüística", o incluso "lógica sencilla" (por ejemplo: "Todos los solteros son no casados"). Si se requiere algo más, por ejemplo la experiencia sensorial, la proposición es "sintética". El territorio de lo "sintético a priori" era aquí lo decisivo. Porque se trataba de proposiciones no analíticas pero no empíricas. Estas requieren algo especial que Kant llamaba una "intuición espacio-temporal". Para Kant las Matemáticas no eran analíticas (con ello se contraponía a Leibniz) pero sí eran a priori. No apuntalaba el paradigma formal-axiomatizante y deductivista, pero sí el racionalismo (7).

Con estos pensadores el racionalismo se estableció plenamente en la época moderna. Ya no era exactamente el mismo "platónico" o "griego" en general. Los siglos de oscurantismo y el control ideológico por parte del clero introdujeron nuevas características (por ejemplo: la reducción a primeras verdades o realidades en el nuevo racionalismo conectaba con la intervención divina). Los siglos XVII y XVIII habían creado una base filosófica racionalista de la que partirían siglos después casi todas las reflexiones sobre la naturaleza de las Matemáticas (8).

El racionalismo vuelve a recibir un fuerte empuje en el siglo XIX y especialmente en sus vertientes axiomático-lógico-formalizantes (Kant había afirmado una relación estrecha y dependiente entre su "intuición espacio-temporal" y la geometría euclidiana, al emerger las no euclidianas su racionalismo intuitivo se desprestigió). El motor de este empuje era el salto cualitativo en la abstracción de las Matemáticas y la necesidad de afianzar los fundamentos lógicos de las mismas (durante el siglo XVIII no importaba la "lógica" tanto como la "predicción" en las Matemáticas).

Con las nuevas matemáticas se volvió importante "renovar" las posiciones sobre la naturaleza de las Matemáticas aprovechando los nuevos resultados y recursos en la rigorización de las matemáticas (Gauss, Abel, Cauchy, Weierstrass, etc.) y en el desarrollo de la lógica (Boole, De Morgan, etc.). Gottlob Frege intentó un proyecto de fundamentación de las Matemáticas: el logicismo. En este buscaba reducir las Matemáticas a la lógica, a través de la teoría de conjuntos, que consideraba segura, firme. Frege era platonista en matemáticas, aunque su visión se manifiesta de diferentes formas en diferentes etapas de su vida (el platonismo más radical lo expresa en 1918 en su artículo "Der Gedanke"). Ante la existencia de paradojas en su edificio fundamental, esta etapa logicista entró en crisis, abriendo lugar a un nuevo intento, esta vez dirigido por Bertrand Russell. Este intento va a desquebrajarse profundamente con la introducción necesaria de axiomas no lógicas, que minaban el sentido logicista de la reducción.

Frente al logicismo (y porque de hecho existían visiones de partida diferente), se dieron dos intentos fundacionales más: el formalismo (D. Hilbert) y el intuicionismo (Brouwer). El primero volvía a la intuición en contraposición con el reduccionismo analítico de Frege-Russell. Para Hilbert, todo empezaba con la intuición del signo. Por otro lado, buscaba técnicamente fundamentar la matemática demostrando su consistencia a través de métodos finitistas y constructivos. Para los intuicionistas la vuelta a la intuición también era necesaria, pero a la intuición temporal (abandonando la Kantiana espacial). Para estos la lógica y el lenguaje eran secundarios en la construcción matemática. Supusieron además que la Ley del Tercero Excluido no era siempre correcta. Para esta corriente lo axiomático - formal y lógico no era decisivo, pero las Matemáticas seguían siendo a priori, infalibles y absolutas.

Desde los griegos hasta la sociedad moderna la visión racionalista sobre las Matemáticas, con énfasis en la lógica, la intuición o la sintaxis, ha sido constante en la conciencia occidental. Una colección extraordinaria de grandes matemáticos y pensadores ha asumido esa actitud filosófica. No es entonces de extrañar que gran parte de las ideas que todavía hoy en día se poseen sobre las Matemáticas estén condicionadas por el racionalismo y el esquema axiomático-formalizante. No se trata entonces de una problemática de origen cercano la que se plantea con las dificultades actuales de la enseñanza de las Matemáticas. Es decir, cuando se menciona que la "gran reforma" de los años 60 en la enseñanza de las Matemáticas ha engendrado dificultades, se está planteando un asunto que apunta a la reflexión más profunda sobre las Matemáticas. Por eso mismo es que las respuestas frente a la "crisis" no pueden ser improvisaciones espontáneas ni recursos aislados de un debate general filosófico, epistemológico, histórico, pedagógico e incluso hasta político.

Frente a esta ideología tan sólidamente anclada en la historia del conocimiento, una visión "mecánica" y unilateral como la inductivista de Mill, o un convencionalismo sintáctico como el del empirismo lógico, no podrían aspirar a ser seriamente alternativas filosóficas.

Este es el panorama intelectual que ha predominado en la reflexión más generalizada sobre las Matemáticas: Un dinámico racionalismo que encuentra como oposición epistemológica o un inductivismo simplista o un convencionalismo que libra de contenido a las Matemáticas. Se trata de un marco en donde no aparece adecuadamente una esencial referencia empírica intuitiva y, al mismo tiempo, un activo papel del sujeto epistémico. Las matemáticas son, en mi criterio, empíricas, poseen un objeto "propio" en el mundo físico y social. Su desarrollo está en relación íntima con los objetivos y métodos vinculados al devenir de lo real (no es extraña la relación especial que ha tenido históricamente con las llamadas ciencias "naturales"). Toda metodología que intente armar intelectualmente el análisis del decurso histórico de las Matemáticas (sus avances y retrocesos, sus tendencias y, cara al futuro, sus perspectivas) debe comprehender su carácter empírico. Pero entender esta naturaleza empírica no implica reducir el sujeto y la mente a meros receptáculos de la acción del objeto material (ni pensar que se reduce a la mera generalización de experiencias particulares). El resultado matemático es siempre producto de la combinación activa de componentes empíricos y mentales. Epistemológicamente: tanto el sujeto como el objeto intervienen en su configuración intelectual. La proporción en que lo hacen no es, sin embargo, definible de una manera a priori. Se trata de un problema histórico y concreto. Se debe establecer entonces las líneas vectoriales que determinan en cada situación el sentido de su evolución. Una visión empírica, intuitiva y dinámica como la que sugiero encuentra sustento en una lectura adecuada de la historia de las Matemáticas.

Toda historia de las Matemáticas es en realidad una reconstrucción teórica de las mismas; implica, la introducción de criterios metodológicos e interpretativos determinados. Parafraseando a Bachelard: el presente siempre ilumina al pasado. La Lectura que ha predominado de la historia de las Matemáticas ha estado sometida a los esquemas racionalistas, formalistas o convencionalistas. Se suele señalar la "demostración" en Tales y Pitágoras, para pasar luego rápidamente a la "axiomática" de Euclides. Lo importante aquí son los aspectos abstractos, la demostración y la axiomática. La relación con la física o las técnicas no se enfatiza. Arquímedes aparece más bien como un personaje extraño al que habría que "perdonarle" su física en tanto también hizo muy buena matemática axiomática.

Con una mentalidad filosófica diferente los aportes de Tales y Pitágoras se valorizarían mejor en su relación estrecha con el nacimiento de la ciencia occidental que supuso la actitud naturalista jónica. La obra de Euclides se podría analizar especialmente como una sistematización importante de los resultados de muchísimos matemáticos previos. De Tales a Euclides se dio un período muy rico en aproximaciones y métodos matemáticos (pitagóricos, Anaxágoras, Hippias, Filolao, Arquitas, Zenón, Demócrito, Teodoro de Cirene, Eudoxo, etc. (9)). Es el período en el que se plantearon los problemas clásicos de las Matemáticas griegas. Los Elementos de Euclides era un texto introductorio de matemáticas elementales que se basaba en los trabajos previos. Es difícil saber con certeza cuánto fue desarrollado previamente a Euclides y de qué forma. Es aceptado generalmente que la mayor parte de la obra de Euclides no fue original. Sería razonable pensar que muchos de los resultados matemáticos codificados por Euclides fueron obtenidos a través de métodos heurísticos, intuitivos y aproximativos. Si la tarea de Euclides fue la de formalización y sistematización, su obra no es tanto un reflejo iluminador de la naturaleza de la construcción matemática como de su expresión. También conocemos de la influencia que Platón tuvo en Euclides (indirectamente); y entonces de los efectos distorsionadores que esto pudo suponer en su obra matemática. La ausencia de mayores elementos de información sobre la antigüedad siempre obliga a dosis mayores de interpretación y opinión, pero creo que existe suficiente evidencia para afirmar que el modelo axiomático de Los Elementos no puede considerarse un modelo ni de la construcción matemática griega ni de las Matemáticas en general.

El caso "Arquímedes" es sin embargo, el más elocuente de lo que afirmo en el párrafo anterior. La primera señal significativa la constituye el volumen de resultados físicos y técnicos que se le reconocen. Sin duda su mente no podía estar ocupada sólo por los aspectos más abstractos y menos intuitivos de las Matemáticas.

Pero hay más. En 1906 salió a la luz lo que constituye tal vez el testimonio más importante sobre la naturaleza y métodos de la construcción matemática de la antigüedad griega. Se trataba de un palimpsesto escrito por Arquímedes llamado El Método, y descubierto por el danés J. L. Heiberg en Constantinopla (10). En este escrito Arquímedes revelaba su método mecánico e intuitivo con el que abordaba la construcción de sus resultados matemáticos. Las conclusiones eran inevitables: la forma axiomática de sus resultados matemáticos (y además no todos) hacía referencia a la expresión, no a la naturaleza del pensamiento matemático.

La historia del cálculo diferencial e integral es también un buen punto para el análisis de la naturaleza de las Matemáticas. Revela la importancia de la física y la intuición en la gestación de los conceptos matemáticos (el "cálculo de fluxiones" de Newton está directamente ligado a la cinemática). Newton (al igual que Arquímedes) estableció importantes resultados en física, pero además revela el papel de las nociones abstractas en la construcción matemática. La fuente inmediata anterior más básica para el trabajo de Newton fue la Geometría de Descartes (1637). En ella se establece la geometría analítica, que no es más que la conjunción de la geometría griega con los resultados algebraicos disponibles en el Siglo XVII. Las nociones algebraicas, menos ligadas a lo intuitivo y material, intervinieron importantemente en una síntesis intelectual dinamizante como la geometría analítica, que a la vez sería un punto de partida central para la creación del cálculo. Siempre en relación con el mundo (físico, social) las dimensiones más abstractas de las Matemáticas encuentran su papel. Esa combinación muy diversa y siempre distinta de elementos intuitivos y abstracto-lógicos es característica de las Matemáticas.

Las matemáticas del Siglo XIX con su abstracción y las necesidades del rigor lógico empujaron hacia el apuntalamiento del racionalismo: el Logicismo y el Formalismo (el Intuicionismo aunque racionalista es más una "reacción" sui géneris frente a los primeros). Hasta la década de los Treinta no se habían dado índices muy importantes de las dificultades de esta aproximación epistemológica.

En 1931, sin embargo, Gödel publicó su famoso artículo "Sobre Sentencias Formalmente Indecidibles de Principia Mathematica y Sistemas Afines". Sus resultados implican que cualquier formalismo, suficientemente fuerte para expresar la teoría elemental de números, es imcompleta (11). La conclusión: las Matemáticas no pueden ser formalizadas de manera absoluta, y, además, en las partes formalizables no es posible garantizar la consistencia. Las aspiraciones de fundamentar las Matemáticas por la vía de los sistemas formales quedaban destruídas (12). El intento de la fundamentación de las Matemáticas entraba en crisis. Esto resultaba en un duro golpe para el racionalismo; pero, sin embargo, no implicó un inmediato readecuamiento teórico en la filosofía de las Matemáticas. Las consecuencias de los resultados gödelianos no fueron sacadas completamente. El empirismo lógico que, frente al auge constante del racionalismo, había optado por reducir las Matemáticas al lenguaje (especialmente a la sintaxis), no supo oponer una respuesta metodológica verdaderamente alternativa. A pesar de Gödel, en la reflexión de las Matemáticas las ideologías apriorísticas, axiomatistas, formalistas, racionalistas o convencionalistas siguieron gobernando el panorama intelectual (13).

Sin embargo, después de la Segunda Guerra Mundial, con la renovación de la producción tecnológica y las exigencias aplicadas a la ciencia, las Matemáticas reales se han desarrollado por derroteros exigentes de una actitud concreta e intuitiva frente a ellas. El curso de las mismas matemáticas en las pasadas décadas se ha convertido entonces en el principal factor de crítica de la ideología dominante sobre las Matemáticas. Existe (aunque sólo en cierta medida) una importante brecha entre las ideologías sobre las Matemáticas y las Matemáticas concretas: entre la "conciencia" y la realidad.

Los fracasos en la enseñanza de las Matemáticas del modelo "moderno" (basado en la axiomática, las estructuras, lo formal), representan otro punto concreto histórico de crítica de la ideología anterior que sobrevive todavía. El territorio de la enseñanza de las Matemáticas es entonces un espacio central para la búsqueda de una conciencia de las Matemáticas más adecuada a su naturaleza.

Para avanzar prácticamente en esa perspectiva se requiere una orientación. A través de una adecuada lectura de la evolución de las Matemáticas es posible sugerir cómo (de manera general) abordar la nueva enseñanza de las Matemáticas. En primer lugar, está claro que es importante enfatizar siempre los aspectos concretos e intuitivos, y su relación con el mundo físico y social. La dialéctica entre lo concreto y lo abstracto debe transmitirse tomando como dirección vectorial el primer elemento de esa relación. Lo abstracto puede llegar a ocupar papeles muy decisivos en la construcción matemática, pero de manera general, sumergidos en un marco teórico vinculado al devenir físico y social (a la naturaleza y a la sociedad). La axiomática y lo formal si bien útiles en la expresión, son completamente secundarios en la construcción matemática. Los énfasis y sobrevaloraciones que se les han dado sólo han conducido a desvirtuar la naturaleza y el sentido de las matemáticas.

Por otra parte, consecuencia de lo anterior, es necesario introducir énfasis en la utilidad de las Matemáticas. También en su relación con las demás ciencias.

En los últimos años se ha empezado a considerar que la mejor forma de integrar la auténtica dimensión empírica e intuitiva, así como transmitir su verdadera naturaleza (en la que también interviene la dimensión "abstracta"), es a través de la historia de las Matemáticas. No solamente como recurso didáctico de motivación (lo cual se podría reducir a la anécdota), sino, especialmente, como estructuradora de la enseñanza de conceptos. El orden conceptual histórico es a veces la clave para transmitir la esencia de las nociones y resultados matemáticos. Reconstruyendo cómo fue la evolución concreta del pensamiento matemático su enseñanza puede facilitarse sustancialmente. La historia puede servir entonces como criterio a la hora de decidir cómo se aborda un tema o incluso sobre qué cantidad de álgebra es necesaria para abordar un problema geométrico (o viceversa). Es claro que no se puede seguir siempre el orden histórico. El orden lógico-deductivo debe introducirse también. De lo que se trata es de encontrar un auténtico equilibrio entre ambos.

La crisis latente e innegable de la enseñanza de las Matemáticas modernas puede ser el factor decisivo para motivar cambios en la filosofía dominante de las Matemáticas. Los resultados obtenidos en esa dirección, fusionados con esclarecedores saltos teóricos como los teoremas de Gödel en los Treinta, pueden dotarnos de los elementos necesarios para la edificación de una nueva conciencia intelectual sobre las Matemáticas que supere entre otras cosas la contraposición (tantas veces estéril) del Racionalismo y el Empirismo. Se trata de un reto.

NOTAS

1. Para Platón las Matemáticas eran asimiladas a un mundo de entidades universales, absolutas y eternas. Se trataba de descripciones de relaciones invariables entre entes invaribles. Según él las entidades de la naturaleza y la sociedad así como la percepción empírica de las cosas se colocaban en el terreno de la apariencia y no de la esencia o realidad.

Cf. Korner, S. Introducción a la Filosofía de la Matemática. Trad. Carlos Gerhard. México: Siglo XXI, 1969.

2. Los Elementos de Euclides constituía no sólo un texto de Geometría sino de todas las Matemáticas elementales de la época. Puede consultarse Boyer, Carl. A History of Mathematics. New York: John Wiley and Sons, Inc. 1968.

3. Se suele considerar como una unidad cultural e histórica: Grecia y Roma. Yo pienso que esa visión es absolutamente insuficiente para dar cuenta de aquella realidad. Opino que lo que existió fue esencialmente la Civilización Griega, la cual fue destruída en sus rasgos esenciales por un pueblo con un mayor poderío militar: Roma. La ciencia y las técnicas fueron "congeladas" a partir del siglo II A. C. El ordenamiento político-militar de Roma y su éxito constituyeron el principal disolvente social y cultural de Grecia (que durante el período alejandrino no era realidad homogénea). Lo que se suele llamar Feudalismo fue el resultado de la destrucción y descomposición socio-cultural que durante siglos engendró Roma. No se trataba entonces de un "modo de producción" o una organización social superior a la anterior. Si algo de la cultura clásica griega se logró salvar fue porque la parte Oriental del Imperio Romano logró ingeniárselas para subsistir (Bizancio) y a que luego el Imperio Islámico adoptó una actitud frente a la cultura clásica ciertamente positiva.

4. Cf. Brunschvicg, León. Les étapes de la philosophie mathematique. París: A. Blanchard, 1981. También puede consultarse:

Ruíz, A. "Implicaciones teórico-filosóficas del Teorema de Gödel en el paradigma racionalista de la reflexión sobre las Matemáticas". Revista de Filosofía de la Universidad de Costa Rica, Dic. 1985.

5. Se puede decir que la Geometría Analítica representa la fusión teórica de la Matemática griega clásica y los resultados algebraicos renacentistas, que fueron posibles gracias al influjo que supuso la recuperación algebraica por parte de los árabes.

6. Cf. Kant, Manuel. Crítica de la Razón Pura. Trad. José del Perojo. Buenos Aires: Losada, 1973. p. 148.

7. Cf. Korner. Ob. Cit. y además Ruiz, A. Ob. Cit.

8. De hecho, el siglo XIX es donde se desencadenó la Revolución Científica que poseía un importante sesgo matemático. Este es el siglo no sólo de la Geometría Analítica

sino también de la Teoría Elemental de Números, las Probabilidades y el Cálculo Diferencial e Integral. Se trata de una auténtica revolución en las Matemáticas que va a determinar el carácter de toda las Matemáticas desde los siglos posteriores.

Cf. Bell, E. T. Historia de las Matemáticas. Trad. R. Ortiz, México: Fondo de Cultura Económica, 1949.

9. Cf. Boyer, Ob. Cit.

10. Cf. Idem.

11. Consúltese Gödel, Kurt. Obras Completas. Trad. Jesús Mosterín, Madrid: Alianza, 1981. p. 99.

12. Cf. Ibid. p. 100.

13. A partir de los trabajos de Gödel nuevos resultados en el mismo sentido fueron obtenidos: en 1936 Gentzen ("Die Widers pruchs freiheit der reiner zahlentheorie") probó la consistencia para los enteros y algunas partes del análisis, pero a costa de introducir una inducción transfinita indeseada. Alonso Church en 1936 hechó carbón al fuego cuando probó que no es posible en general garantizar "procesos efectivos" en la meta matemática. En 1963, Paul Cohen probó que la hipótesis del continuo y el axioma de escogencia son independientes del sistema axiomático más usado, de Zermelo-Fraenkel; lo que equivale a decir que son proposiciones indecidibles. Cualquier opción en torno al uso de estos axiomas es entonces posible y en cada una axiomáticas matemáticas diferentes. Para terminar de completar el cuadro apareció el teorema de Skolem-Lowenheim señalando que los axiomas de un sistema no limitan los modelos posibles.

INTEGRACION DEL CONTEXTO SOCIO CULTURAL PARA EL MEJORAMIENTO DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA EN POBLACIONES INDIGENAS: EXPERIENCIA PERUANA

Martha Villavicencio
Instituto Nacional de Investigación y Desarrollo de la Educación (INIDE)
Lima, Perú

1. PROBLEMATICA EDUCATIVA EN AMERICA LATINA Y PRIORIDAD DE ATENCION A LA POBLACION INDIGENA[1]

Pese al notable esfuerzo desplegado por los gobiernos de América Latina en lo que a política educativa concierne, particularmente en la década del 60, la Conferencia de Ministros de Educación Latinoamericanos, convocada en 1979 en la Ciudad de México por el Director General de la UNESCO, constató agudos déficits educativos para los años 80. Si bien entre 1970 y 1977 la cantidad de alumnos de educación primaria de la región aumentó de 55 a 78.8 millones es decir, en un 42%, aún hay 45 millones de analfabetos, y alrededor de 11 millones de niños que no tienen acceso a la escuela, y de 1,000 niños que ingresan al sistema escolarizado sólo la mitad llega al cuarto grado. Por este motivo, la "Declaración de México" reconociendo entre otros postulados la democratización y la educación como condiciones básicas para el desarrollo social y económico de América Latina, determinó once metas prioritarias.

Entre tales metas cabe relevar las siguientes:

META1: Ofrecer y garantizar una educación primaria de un mínimo de 9 a 10 años e incluir en el sistema escolar, hasta 1999, a todos los niños en edad escolar.

META 4: Dotar de máxima prioridad la escolarización de grupos especialmente marginados que viven en el campo y en las aglomeraciones urbanas; y

META 5: Realizar las reformas necesarias de manera tal que la educación tenga en cuenta las características, sistemas de valores y esfuerzos de cada pueblo por separado.

Estas tres metas revisten importancia para los grupos poblacionales que no hablan castellano o para grupos autóctonos marginados para los cuales se exige una forma de educación correspondiente a sus necesidades.

---

[1] El término indígena designa a los descendientes de los pobladores originarios de América, es decir, aquellos que estaban establecidos antes de la llegada de los españoles, que mantienen su lengua y cultura

Considerando las once metas prioritarias de la "Declaración de México" se ha creado el "Proyecto Principal de Educación en América Latina y el Caribe" como instrumento para realizar hasta 1999 los fines planeados. En el capítulo IV de las resoluciones de la Conferencia Regional de Quito en 1981, el "Proyecto Principal de Educación" clasifica a la población indígena dentro de los grupos que requieren atención prioritaria.

Las estimaciones numéricas más confiables indican que en la actualidad viven en América Latina poco más de 30 millones de indígenas subdivididos en más de 400 grupos etnolingüísticos que incluyen desde microetnias de pocos centenares de individuos hasta macroetnias de millones de personas. Cerca del 90% de estas poblaciones se concentra en dos áreas: Mesoamérica (México y Guatemala) y la Región Andina (desde el norte de Chile hasta el sur de Colombia). El resto de las etnias indígenas se encuentra disperso en las demás regiones del continente (VARESE, RODRIGUEZ, 1983 a., cf., también RODRIGUEZ, SOUBIE, 1979, MAYER, MASERRER, 1979).

Un estudio comparativo sobre las cifras relativas y absolutas de analfabetos mayores de 10 años de 17 países latinoamericanos realizado por la OEA en base a los censos de población de 1970 a 1976, evidencia que el porcentaje de analfabetos entre la población indígena es mayor que el promedio respectivo del país.

Estudios similares sobre escolaridad incompleta y deserción escolar en la población indígena de los países latinoamericanos probablemente confirmarían la discriminación indígena en la atención escolar, agravando aún más la carencia educacional de estos grupos de población.

2. LENGUAS, CULTURA Y PROBLEMATICA EDUCATIVA EN EL PERU

Una réplica de la situación descrita anteriormente en lo que concierne a los países latinoamericanos la constituye el caso peruano.

Casi cinco siglos después de la conquista de estas tierras por los españoles, subsisten en el Perú trece familias lingüísticas.

Tales familias agrupan más de cincuenta lenguas nativas diferentes. Además, hay lenguas cuya afiliación lingüística aún no ha sido determinada.

Esta pluralidad lingüística supone el hecho concomitante de la coexistencia de varias culturas.

En el Perú los problemas del analfabetismo, de la inasistencia y deserción escolar, y el bajo nivel educativo de la población están íntimamente ligados con el problema de la barrera idiomática, esto se revela particularmente en los departamentos del Sur Andino.

3. MATEMATICA Y ETNOMATEMATICA

A 1987, en la realidad peruana se dan dos situaciones polarizadas. Por un lado existe un grupo social minoritario, hispano-hablante que tiene acceso al aprendizaje de la Matemática actual, con posibilidades de plantearse cuestiones relacionadas con la influencia de la Informática en el progreso de la ciencia Matemática, por ejemplo. En el otro extremo, hay poblaciones indígenas que encierran en sí una doble condición: El largo y secular proceso de colonización al cual han estado sujetas y, al mismo tiempo, su voluntad de permanencia y lucha por mantenerse como rostros singulares y diversos de ese complejo fenómeno de resistencia y clandestinización cultural que comparten todos los pueblos que han quedado englobados al interior o en la periferia de la expansión mercantil y capitalista de los últimos siglos (UNESCO, VARESE, 1985). Estas poblaciones indígenas también manejan conceptos y relaciones numéricas y geométricas para los cuales han creado términos lingüísticos. A este conjunto de conceptos y relaciones numéricas y geométricas usados por los grupos vernáculo-hablantes lo identificaremos como Etnomatemática.

Como consecuencia de una política de castellanización[2] desde la colonia hasta la década del 70, si bien constituyen la excepción algunos proyectos de educación bilingüe que han venido desarrollándose, éstos fundamentalmente han incidido en el estudio de metodologías y elaboración de materiales para el aprendizaje de la lecto-escritura y lenguaje tanto en castellano como en lengua materna, omitiendo la inclusión de estudios sobre la Etnomatemática de las poblaciones indígenas, habiéndose continuado con la enseñanza de Matemática fundamentalmente en castellano.

Partiendo del supuesto que la Etnomatemática es parte del acervo cultural de un grupo etnolingüístico, y que la cultura de un pueblo constituye uno de los ejes fundamentales para su transformación social, es de suma transcendencia que se le incluya en el desarrollo de contenidos curriculares de Matemática. En este sentido, deben rescatarse además los logros alcanzados en el campo de la Matemática por los antepasados del grupo, tales como instrumentos para el cálculo numérico (Por ejemplo: La Yupana, que es el ábaco que se utilizó en el Imperio de los Incas).

En los grupos lingüísticos de tradición oral, la Etnomatemática se evidencia a través de la expresión hablada y también en forma figurada (por ejemplo en las representaciones geométricas que aparecen en objetos de artesanía: cerámica y tejidos, construcciones de vivienda y locales comunales).

---

[2] Se entiende por castellanización a la imposición sistemática de la lengua española a vernáculo-hablantes de América Latina, con el objeto de alcanzar el entendimiento y la unidad en el Estado mismo y en el contexto global de la comunicación con América toda.

Dado que la Matemática es una ciencia que pertenece al patrimonio de la cultura universal, cuyos rudimentos se remontan a los orígenes del hombre, y cuyo desarrollo actual se debe al aporte de varias civilizaciones de oriente y occidente, la Etnomatemática de un grupo social determinado estaría constituída por casos particulares de algunos modelos matemáticos, ligados a su cosmovisión.

Ilustremos la ubicación de la Etnomatemática aimara respecto a la Matemática, en el caso de la numeración.

Genovieve GUITEL, investigadora francesa que ha dedicado veinte años de su vida al estudio de las numeraciones escritas, releva la importancia de las numeraciones figuradas y numeraciones orales pues la numeración escrita sólo se inventó para conservar el recuerdo de lo que inicialmente pertenecía al gesto y a la palabra.

GUITEL clasifica las numeraciones escritas en tres tipos:

TIPO I : Las cifras son enteramente libres
TIPO II : Las cifras son solo parcialmente libres
TIPO III : Las cifras son encadenadas

Así mismo, nos ilustra respecto a las influencias que se ejercen entre las diferentes culturas, indicando que los árabes se sirvieron de las fracciones de los babilonios, escribieron las cifras a lo hindú y pusieron sus operaciones como los chinos, preparando la síntesis más fecunda de los procedimientos de cálculo.

GUITEL formula como una de sus conclusiones, que de acuerdo a la investigación histórica, en el mundo sólo existen cuatro sistemas originales de numeración escrita de posición, la Babilonia, la Maya, la China y la India.

Hace notar que en la lista de las bases utilizadas por las numeraciones que ha estudiado se evidencia, con relación a la expresión numérica de estas bases, un paréntesis que amerita retener la atención:

	Base	
Egipto	10	
Grecia I, Roma	10	
Numeraciones alfabéticas	10	10^4 en Grecia 10^2 en Etiopía
Sumeria	10 y 6	
China	10	10^2
India	10	10^2
Azteca	20	
Maya	20	
Babilonia	60	

Visiblemente todos estos sistemas dan valor privilegiado a la base 10 puesto que si este número no sirve de base, uno de sus múltiplos es adoptado.

GUITEL recuerda que el hombre en sus orígenes recurre a las diferentes partes de su cuerpo para contar, y que este cuerpo humano ha contribuído a dar una base a la numeración. La mano ofrecía una cualidad muy importante, se podía considerarla como formada por la yuxtaposición de sus cinco dedos, pero no se podía olvidar que ello formaba un todo, una mano. Con ella la idea de base de numeración devenía verdaderamente intuitiva. El número cinco era sin embargo pequeño, es por esta razón que 10 y 20 han sido preferidos. Es impresionante ver aparecer exclusivamente los números 10, 20, 60, como bases principales, con incidencia de las bases auxiliares 5, 100 y también 10,000, siempre diez, algunos de sus múltiplos, algunas de sus potencias y su mayor divisor: esto no puede ser efecto de azar.

La historia de la numeración nos enseña que el número diez representa una buena elección para la memoria humana. En cambio cinco era demasiado pequeño, 20 y sobre todo 60 eran muy grandes, los pueblos que han adoptado estas bases han tenido que introducir en su numeración hablada, o en su numeración escrita bases auxiliares: 10 y 5 en el caso de los mayas y 6 y 10, los Babilonios.

Un modelo matemático de un número en un sistema numérico posicional podría ser un polinomio:

$$P(n) = a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + a_{r-2} n^{r-2} + \ldots + a_1 n^1 + a_0 n^0$$

donde n : base de numeración

n^r : Potencia de la base, $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$

a_i : Coeficiente de cada monomio, y

$i = 0, 1, \ldots, r$

$a_i = 0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$

Esta presentación algebraica es solamente la expresión de una numeración oral bien organizada.

En este caso, los términos de la numeración oral aimara, que forman parte de la Etnomatemática de la población aimara del altiplano puneño, constituye una ejemplificación de tal modelo matemático. En efecto, la base es diez (tunka)

Los veinte primeros números en aimara son:

1	maya	10 + 1	Tunka mayani
2	paya	10 + 2	Tunka payami

3 Kimsa	10 + 3 Tunka kimsani
4 Pusi	10 + 4 Tunka pusini
5 Phisqa	10 + 5 .Tunka phisqani
6 Suxta	10 + 6 Tunka suxtani
7 Paqallqu	10 + 7 Tunka paqallquni
8 Kimsa Kallqu	10 + 8 Tunka kimsaqallquni
9 Llatunka	10 + 9 Tunka llatunkani
10 Tunka	20 pä tunka

Donde, por ejemplo:

34: Kimsa tunka pusini = $30 \times 10^1 + 4 \times 10^0$
De modo similar, los números del sistema numérico oral quechua, contenido en la Etnomatemática quechua, constituyen ejemplificaciones del modelo polinómico referido.

Los veinte primeros números en quechua son:

1 huk	11 chunka hukniyuq
2 iskay	12 chunka iskayniyuq
3 Kinsa	13 chunka kinsayuq
4 tawa	14 chunka tawayuq
5 phishqa	15 chunka phishqayuq
6 suqta	16 chunka suqtayuq
7 qanchis	17 chunka qanchisniyuq
8 pusaq	18 chunka pusaqniyuq
9 isqun	19 chunka isqunninyuq
10 chunka	20 iskay chunka

Sistema numérico en el cual por ejemplo:

47: Tawa chunka qanchisniyuq = $4 \times 10^1 + 7 \times 10^0$

4. ENSEÑANZA DE MATEMATICA Y EDUCACION BILINGUE INTERCULTURAL

Tratándose de grupos de población de lengua y cultura vernáculas, de países plurilingües y multiculturales cuya lengua mayoritaria es el castellano, la enseñanza de Matemática debe hacerse en el marco de una educación bilingüe intercultural. Es decir, una educación a través del uso de dos lenguas, que posibilite el conocimiento de la cultura de origen y conocimiento sobre otras culturas existentes: minoritarias y mayoritarias. Con esto se aspira a equiparar las posibilidades, a entender el orgullo por la cultura propia y a fomentarlo, y a orientarse entre las otras culturas con seguridad y conciencia de sí mismo.

En un país multilingüe y pluricultural como el Perú la educación de la mayoría hispano-hablante debe ser intercultural para posibilitar la comprensión de las minorías de una sociedad así como el intercambio de sus elementos culturales (por ejemplo la yupana es un instrumento de cálculo útil también en la enseñanza de la Matemática a hispano-hablantes). Además, una educación intercultural contribuiría, desde un punto de vista internacional, a conocer y entender otras culturas a fin de reflexionar sobre la propia y lograr el entendimiento entre los pueblos.

Siendo consecuente con mi posición de considerar la cultura de un pueblo como el principal resorte potencial de su transformación, postulo una educación bilingüe que contribuya al desarrollo de las lenguas vernáculas. Indudablemente que esto constituye un enorme reto pues implica recuperar -en el caso de las culturas andinas- más de cuatro siglos de dominación.

En el caso particular de la Matemática significa no sólo inventariar el caudal terminológico en lenguas vernáculas sino elaborar también con miras a su expansión. Esto es sumamente importante pues coadyuvará a la recuperación de la confianza en el poder generador de la propia lengua, apoyando así el proceso de movilización cultural.

5. EXPERIENCIA PERUANA EN EL MEJORAMIENTO DE LA ENSEÑANZA DE MATEMATICA EN POBLACIONES INDIGENAS

En el marco de una concepción de educación bilingüe intercultural, el Instituto Nacional de Investigación y Desarrollo de la Educación (INIDE), desde 1981 viene experimentando metodologías y materiales educativos de Matemática para educandos de habla quechua y aimara en los departamentos del Sur Andino. A la fecha ha producido módulos validados de Matemática para los dos primeros grados de Educación Primaria Bilingüe, para el departamento de Puno, y luego de la aplicación experimental del módulo de primer grado en los departamentos de Cusco, Apurímac y Arequipa, en 1987 se producirá el módulo validado respectivo. Paralelamente, se continúa la experimentación de módulos para tercero y cuarto grados de Educación Primaria Bilingüe en el Departamento de Puno.

Los resultados de los estudios evaluativos de los logros obtenidos por los educandos del primer grado de Educación Primaria Bilingüe, en Puno (1983) y en Arequipa, Cusco y Apurímac (1987) nos muestran que el rendimiento en Matemática de los niños de las escuelas de Educación Bilingüe es mejor comparativamente, que el de los niños vernáculo-hablantes de las escuelas en que se utilizan metodologías castellanizadoras, que no consideran el contexto sociolingüístico-cultural de estos niños. La diferencia de medias es significativa al 0.05 de error a favor de los grupos experimentales de Educación Bilingüe. Resultados similares se obtienen en el estudio efectuado con niños del segundo grado de Educación Primaria Bilingüe en el Departamento de Puno (1984), al contrastar sus logros con los de los niños de escuelas del sistema tradicional.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ARANDA, Eleodoro. Informe de Validación del material de matemática para Primer Grado de Educación Primaria Bilingüe - INIDE, 1983.

ERMEL. Apprentisages mathematiques a l'école élémentaire ciclo Moyen. Tome., 1981.

GUITEL, Genevieve. Histoire Comparée des numerations écrites. Flammarion, éditeur. París VI, 1975.

MAYER, Enrique; MASFERRER, Elio 1979. "La población indígena de América en 1978", en América Indígena, Vol. XXXIX, No. 2, Instituto Indigenista Interamericano, México.

MASFERRER, K. Elio, 1983. Situación Social de los Grupos Indígenas. UNESCO. III México.

OYARCE VILLANUEVA, Gilbert. Informe de Validación del Material de Matemática para Segundo Grado de Educación Primaria Bilingüe - INIDE, 1984.

PIAGET, CHOQUET, DIEUDONNE, THOM Y Otros. La Enseñanza de las Matemáticas Modernas. Alianza Editorial. Madrid, 1978.

Public (APMEP). Inforama, Parsa, 1985.

SOLORZANO, María. Proyecto PERU-BIRF II Informe Evaluativo para Validación de Textos Escolares, 1986.

UNESCO/OREALC. Educación en Poblaciones Indígenas. "Políticas y Estrategias en América Latina". Santiago de Chile, 1987.

VON GLEICH, Utta. Informe de Educación No. 34: Educación Primaria Bilingüe y Bicultural en América Latina.

VILLAVICENCIO, Martha. Numeración, Algoritmos y Aplicación de Relaciones Numéricas y Geométricas en las Comunidades Rurales de Puno. INIDE, Lima - Puno, 1983.

- "Yupasun", Guías de Matemática 1 y 2 validados para Puno. INIDE - Lima, 1986.

- "YUPASUN 3", Guía y Cuaderno Experimentales de Matemática para Tercer Grado INIDE - Lima, 1985.

- "YUPASUN 4", Cuaderno Experimental de Matemática para Cuarto Grado, INIDE - Lima, 1986.

- Estudio de Base para el Mejoramiento de la Enseñanza-aprendizaje de Matemática. Bogotá, Colombia, 1986.

PANEL B: *Cómo Desarrollar en los Estudiantes Habilidades para Resolver Problemas*
Coordinador: *Claude Gaulin*

MODELAGEM COMO METODOLOGIA DE ENSINO DE MATEMATICA

Rodney C. Bassanezi
Universidade Estadual de Campinas
Sao Paulo, Brasil

1. INTRODUÇÃO

Grande parte das idéias matemática têm sua origem em situaçoes empíricas. Tais idéias, quando trabalhadas, enveredam pelo caminho do estético e do abstrato, e quanto mais se afastam da situação de origem maior é o perigo de que venham a se tornar um amontoado de detalhes tão complexos quanto pouco significativos.

Quando se propõe analisar um fato ou uma situação real cientificamente, isto é, com o propósito de substituir a visão ingénua desta realidade por uma atitude crítica e mais abrangente, deve-se procurar uma linguagem adequada que facilite e racionalise o pensamento.

O objetivo fundamental do "uso" de Matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia da linguagem. Desta forma, a Matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar idéias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância.

Pode-se dizer que "fazer Matemática" é aliar de maneira equilibrada a abstração e a formalização não perdendo de vista a fonte que originou o processo. Este procedimento construtivo conduzao que se convencionou chamar do Matemática Aplicada. Convém salientar aqui que alguns matemáticos de renome como Keller afirman que a boa Matemática é aquela que tem chance de vir a ser "aplicada". Nossa sugestão é encarar a Matemática Aplicada como uma maneira de se fazer Matemática e para nós principalmente como um método de se ensinar Matemática. O que propomos neste trabalho é sistema0tizar de alguma forma cursos regulares ou não, utilizando a "atitude" de Matemática Aplicada no aprendizado de Matemática.

2. MODELAGEM MATEMATICA E O ENSINO

A base de todo progresso científico e tecnológico está na valorização de recursos humanos e se os educadores não tiverem o devido cuidado poderão construir uma geração completamente desligada destes valores. Cada educador deve, antes de mais nada, procurar substituir esta visão ingênua da realidade, assumindo muitas vezes uma postura política e propondo alternativas que influenciem no comportamento das pessoas que devem atuar nesta realidade. O ensino deve estar voltado para os interesses e necessidades da comunidade e sob este ângulo cada aluno deve participar efetivamente do desenvolvimento de cada conteúdo e do curso como um todo. Este propósito de participação geral, numa sala de aula de Matemática pode parecer, pelo menos a princípio, difícil de ser conseguido principalmente quando se pressupõe que o desenvolvimento do programa de cada disciplina seja de forma sequenciada e cada tópico exige uma cadeia de pré-requisitos. O que ocorre de maneira geral neste processo é o professor culpando os alunos de não terem uma "boa base" e por isso achando que deve "baixar o nível" do curso. Entretanto, os problemas mais graves com os quais defrontamos na tarefa docente, são muito mais uma consequência de uma situação social, econômica e política, cujos efeitos sentidos em nossas salas de aula não podem ser eliminados independentemente de suas origens.

Sem que sejamos simplistas há uma decisão entre "cruzar os braços" aderindo á mediocridade geral, ou tentar de algum modo agir dentro desta realidade no sentido de ajudar o aluno em seu aprendizado. Esta postura aparentemente romântica, sonhadora ou mesmo quixotesca deve ser o resultado de um balanço crítico entre o programa da disciplina, das reais necessidades posteriores dos alunos, do contexto regional da escola, do próprio preparo anterior dos alunos e também da formação do professor.

Em nosso país, como em outros tantos, é muito frequente a falta de recursos destinados á Educação e é aí que entra a criatividade do educador e sobretudo sua solidariedade, sem o que não se pode educar. É o que preconiza Morley em sua proposta de atuação: "Vá ao teu povo, ame-o. Aprenda com ele, planeje com ele, sirva-o. Comece com o que ele sabe. Construa e ensine-o com o que ele tem." Parece consensual que ensinar é também despertar no aluno aquilo que ele já sabe e ninguém ensina o que o outro não tem motivação para aprender.

Quando se inicia o processo ensino-aprendizagem fazendo um balanço das dificuldades, e os objetivos estão esclarecidos á priori, os alunos sentem-se desafiados e são co-responsáveis pelo seu aprendizado. Talvez seja este o ponto básico quando se propõe trabalhar com Modelagem Matemática - desafiar os professores a ensinar a disciplina, em qualquer nível, utilizando aplicações mais ou menos relevantes. Não é nossa intenção fazer uma apologia do "prá que serve" - Um resultado de Matemática pode tener uma importância intrínseca, independentemente de uma aplição imediata - Não devemos iludir o aluno, levando-o a pensar que só é relevante aquilo que se aplica na realidade cotidiana - Querer uma aplicabilidade imediata para cada ítem levará alunos e professores à frustração e ao desencanto. Por outro lado, como professores de Matemática básica o "prá que serve" tem que ser investigado e apresentado de modo claro aos alunos, e não com a resposta:

"você vai ver mais tarde" - Se o "mais tarde" for abreviado para o presente, o professor se sentirá valorizado tendo cumprido o seu papel de educador.

A Modelagem Matemática de situações-problemas envolvendo a realidade cotidiana funciona como elemento motivador para o aprendizado dos alunos. Tal efeito motivador não se reflete apenas no aprendizado da matéria mas também revela aos alunos a interação que existe entre as diversas ciências.

Muitos professores, preocupados em "dar matéria", esquecem seu papel fundamental de educadores que é a formação de elementos atuantes na sociedade.

Maior objetividade e uma interligação com outras ciências podem ser conseguidas em alguns cursos quando estes são modificados, não excluindo seu conteúdo teórico, mas mostrando a importância deste conteúdo. Importância esta, não só na resolução de modelos, mas também na compreensão de problemas análogos de outras áreas. Trata-se na verdade de mostrar ao aluno que o estudo de determinados conceitos de Matemática é fundamental para a compreensão de outros conceitos relacionados, inclusive na própria Matemática. Esta abordagem visa capacitar o aluno a analisar um determinado problema no seu aspecto global, possibilitando-o a resolver as partes que estiverem ao seu alcance, ao mesmo tempo que o motiva a estudar "outras Matemáticas" para resolver as partes restantes.

Desta forma, o professor estará dando ênfase, não somente á quantidade de conteúdo, mas á valorização de tal conteúdo que deve ser direcionado para algum objetivo bem definido. Isto faz com que o professor também passe a acreditar que seu conhecimento é importante e de alguma forma se auto-valorize.

Se considerarmos como um dos objetivos do professor de Matemática básica mostrar a importância desta disciplina, não somente como um ciência voltada para si mesma, mas como instrumento para a compreensão e possível modificação da realidade, o melhor caminho para atingí-lo é trabalhar com situações-problemas desta realidade.

O estudo de problemas e situações reais usando a Matemática como linguagem para sua compreensão, simplificação e resolução para uma possível previsão ou modificação do objeto estudado faz parte do processo que se convencionou chamar de Modelagem Matemática. Em termos de educação este processo possibilita o aprendizado de conteúdos matemáticos interligados aos de outras ciências.

Trabalhar com Modelagem Matemática no ensino não é apenas uma questão de ampliar o conhecimento em Matemática mas sobretudo de se estruturar a maneira de pensar e agir.

A modelagem de uma situação ou problema real pode ser simplificadamente visualizada no esquema 1 na siguiente pagina.

3. ONDE UTILIZAR MODELAGEM MATEMATICA

A Modelagem Matemática pode ser utilizada como uma metodologia para aprendizado de Matemática de várias formas:

a) Em curso regulares em que os programas são bem definidos e costumam servir de pré-requisitos para os cursos posteriores. Neste caso, a escolha de uma situação-problema tem muito a vem com o tipo de curso e com o seu programa. Entretanto somos de opinião que não se debe propor um modelo matemático simplesmente para justificar um programa a ser cumprido.

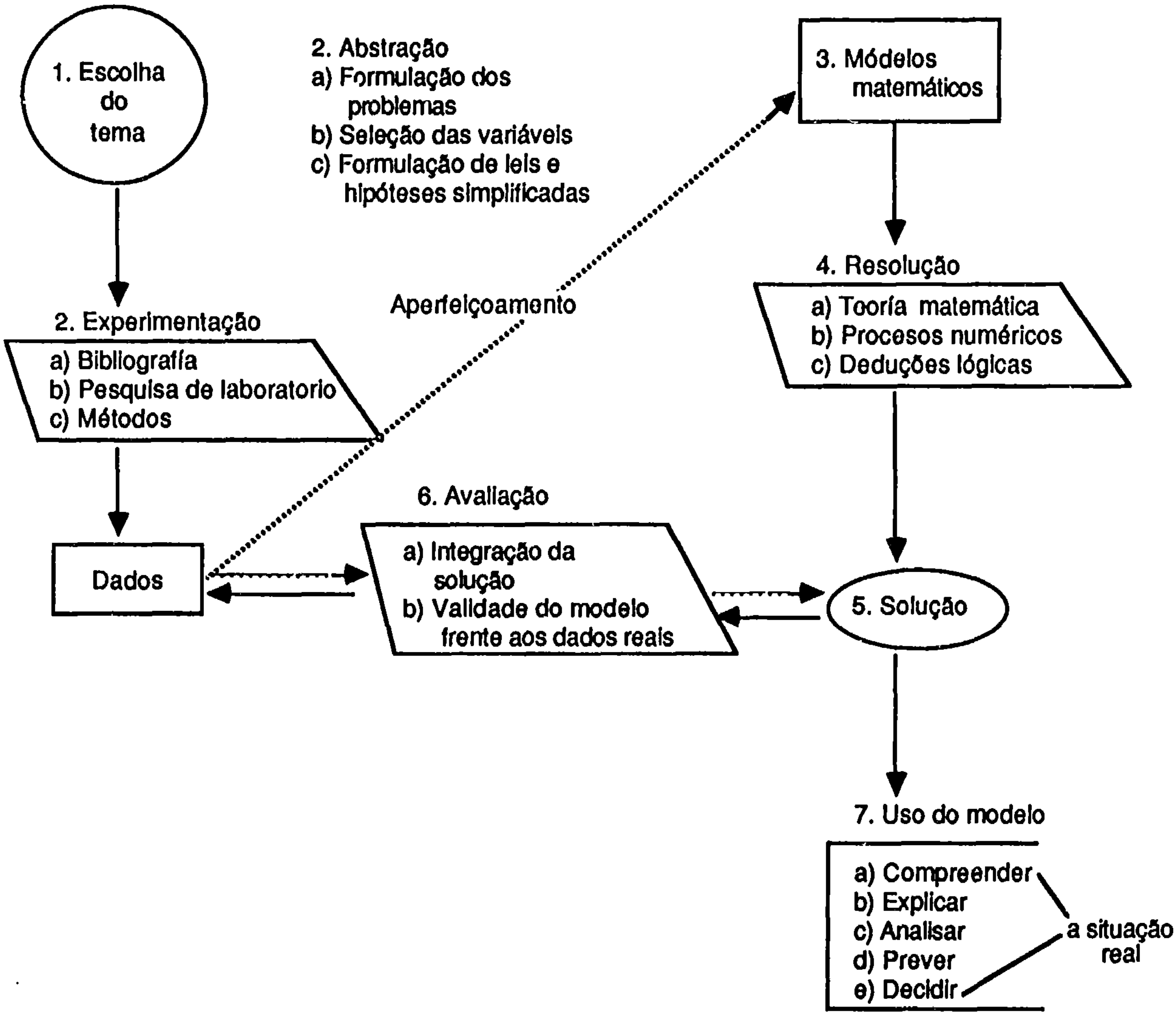
A participação dos alunos na escolha do tema, que pode ser orientada mas nunca imposta pelo professor, é muito importante pois os torna também responsáveis por seu aprendizado e já proporciona uma motivação para resolverem os problemas que surgirem.

De qualquer forma, o programa do curso e o conjunto de prérequisitos requeridos para seu desenvolvimento orientam o caminho a ser seguido no processo da Modelagem.

Numa 5ª série do 2° grau em que o programa consiste da introdução dos números (naturais, decimais, fracionários), medidas usuais de comprimento, área e volume, e noções elementares de geometria, a situação-problema escolhida foi a "construção de casas populares" e com este tema todo o conteúdo do programa foi desenvolvido. O mesmo ocorreu quando o tema escolhido foi "conta de luz".

Num curso de Cálculo Diferencial e Integral para alunos de Tecnologia de Alimentos da UNICAMP o tema proposto foi "plantação de batatas". Tambén neste caso, todo o programa foi desenvolvido em cima da questáo proposta pelos alunos que se sentiram co-participantes do processo de ensino-aprendizagem.

b) Em cursos com programas gerais de Matemática, onde o objetivo maior é a própria valorização do conhecimento de cada aluno e os pré-requisitos vão sendo trabalhados no decorrer do proceso de Modelagem. São cursos com programas abertos e o conteúdo matemático passa a ser importante quando utilizado no modelo. Trabalhamos desta maneira num curso de Biomatemática para alunos de Mestrado e Doutorado em Biologia e Ecologia da UNICAMP em 1987. Neste curso desenvolvemos alguns modelos clássicos de dinâmica populacional, poluição, Esquema 1



epidemias, etc., para introduzir a linguagem Matemática do Cálculo Diferencial e Integral e programação linear - posteriormente os alunos trouxeram seus próprios problemas e temas de dissertação com a intenção de ajustá-los em modelos matemáticos e desta forma pudemos analisar o "vôo das borboletas", "o processo de desenvolvimento das vespas", "a oxidação do sangue", o estudo de "ilhas ecológicas", a "pesca", etc.

A adoção de programas gerais proporciona também um rendimento bastante bom e um interesse extraordinário em cursos de Especialização e ou Reciclagem para professores de Matemática.

A falta de objetividade da maioria dos cursos de licenciatura em Matemática provoca uma angústia nos formandos que se sentem incapacitados para exercerem o magistério. Os programas desenvolvidos nos diferentes cursos da Universidade quase sempre são fechados, não existindo uma interligação com outras ciências e a ênfase maior é a com a quantidade de conteúdo e não com a formação de elementos atuantes na sociedade.

Quando nos propusemos, juntamente com um grupo do IMECC, a organizar um curso de Aperfeiçoamento para professores de Matemática na região de Guarapuava, nosso objetivo principal foi valorizar o conhecimento já adquirido por esses professores, trabalhando concretamente com as idéias básicas e fundamentais da Matemática.

A formação e procedência de cada aluno-professor eram bem variadas assim como sua atuação em relação ao nível de Matemática que ensinavam - Eram 40 professores de 1°, 2°, e 3° graus, graduados em Universidades muito mais comprometidas com a parte econômica do que com a própria formação dos alunos.

O programa geral proposto consistia de Matemática elementar (2° grau), Estatística Básica, Cálculo Diferencial e Integral, Algobra Linear, Métodos Numéricos, Métodos e Linguagem Computacionais e Equações Diferenciais.

O programa foi desenvolvido em três etapas, utilizando os períodos de férias escolares. Em cada etapa participaram três professores da UNICAMP em disciplinas integradas e abordadas através de situações-problemas tiradas da realidade regional.

Inicialmente faz-se um levantamento dos possíveis temas que poderiam ser abordados usando Modelagem Matemática. Estes temas são propostos tendo em vista o setor de produção, a situação econômica e social da região. Convida-se pessoas ligas ás diferentes atividades locais para fazerem palestras para os alunos. Desta forma, os alunos podem selecionar as atividades que serão objetos de estudo. Divididos em grupos de mesmo interesse passa-se á fase das visitas aos locais a serem pesquisados.

No primeiro curso deste tipo oferecido em Guarapuava (1983) os temas selecionados foram: Horticultura, Marcenaria, Plantação de Maçã, Suinocultura, Jogos Infantis, Estilingue e Construção-Civil. Num segundo curso da mesma região, escolheram: Suinocultura, Piscicultura, Maçã, Apicultura, Fabricação de papel e Erva-Mate.

Cada grupo trabalha em seu projeto independentemente - o professor de cada disciplina funciona na maior parte do tempo como monitor dos grupos e quando constata deficiências comuns á maioria dos alunos, propõe uma aula coletiva onde aborda o conteúdo necessário.

A homogenização de cada grupo é responsabilidade também de seus elementos que procuram discutir as dificuldades surgidas até que todos atinjam mais ou menos o mesmo grau de compreensão.

<u>Levantamento de Problemas</u> - Daremos aqui apenas um resumo dos principais problemas levantados por cada grupo.

1. Indústria de Papel

a) Análise da gramatura e produção do papel
b) Análise da gramatura e bactericida
c) Produção e Biocida
d) Otimização do uso de bactericida

2. Apicultura

a) Geometria dos favos
b) Dinâmica populacional das abelhas
c) Polinização
d) Otimização da indústria do mel

3. Suinocultura

a) Construção de chiqueiros
b) Balanceamento de rações
c) Comercialização de porcos
d) Otimização do abate de porcos

4. Erva-Mate

a) Escolas rurais
b) Cultivo e comercialização
c) Produção industrial
d) Crescimento populacional da região e expansão da cultura do mate

5. Maçã

a) Estocagem - Projeto de melhoria das câmaras frigoríficas
b) Processo de resfriamento diferenciado - sugestão de melhoria
c) Propagação de pragas
d) Propaganda para consumo de maçã

6. Piscicultura

a) Dinâmica de nutrição
b) Crescimento em peso
c) Relação peso-comprimento
d) Dinâmica Populacional de peixes

No final do curso cada grupo deve expor seu trabalho numa espécie de "defesa de tese" onde os demais alunos agem como uma "banca examinadora" - É quando se faz a troca de experiências e críticas visando a melhoria de cada projeto e do próprio curso como um modelo de aprendizado.

Cada grupo apresenta também uma monografia que é distribuída para todos os participantes.

Acreditamos que este tipo de aprendizado seja efectivamente um potencial gerador de recursos humanos contribuindo em seu aperfeiçoamento. Proporciona também condições para a formação de grupos de pesquisas preocupados com o desenvolvimento regional atuando na resolução de problemas que afetam as comunidades locais. Nesse sentido já obtivemos algum retorno, para avaliação do curso, com alunos que estão aplicando esta metodologia fazendo Modelagem Matemática no garimpo de diamantes (Arenápolis-MT), em construção de casas populares (Guarapuava-PR), na pesca (Cáceres-MT), etc.

O sucesso dos primeiros curso despertou o interesse de outras universidades em adotar programas semelhantes -(Universidade Federal de Mato Grosso - 1987, Universidade Federal de Ponta Grossa - 1988, Universidade Estadual de Maringá - 1989, FIDENE (Ijui) - 1989, etc).

c) Em <u>projetos de iniciação científica</u> onde os alunos trabalham em grupos pequenos ou isoladamente com o objetivo de aprenderem a <u>fazer</u> Modelagem Matemática e o conteúdo utilizado depende essencialmente do tema escolhido. Trabalham inicialmente com <u>modelos clássicos</u> para compreenderem o mecanismo e a dinâmica do processo. O segundo passo consiste em propor <u>modelos alternativos</u> ajustados a dados experimentais ou simulados. Finalmente, devem criar <u>modelos novos</u> utilizando a analogia existente entre situações problemas diversos, e analisar a validade de tais modelos criticando seus pontos fracos e as hipóteses formuladas. Alguns modelos relevantes foram desenvolvidos neste contexto: "produção-fertilização", "obtenção de etanol", "biodigestores", "produção de papel", etc.

A realização de tais projetos torna-se mais efetiva quando os alunos estão vinculados ou são participantes de grupos maiores pesquisando em algum problema específico. É o caso, por exemplo, dos alunos da UNICAMP envolvidos atualmente com o grupo de Biomatemática que trabalha com o crescimento e tratamento de tumores cancerígenos.

Aplicações de Modelagem Matemática

Damos aqui alguns exemplos de Modelagem Matemática efetuadas em programas distintos: "Plantação de batatas" (curso regular de Cálculo), "Dinâmica populacional de uma colméia" (curso de Especialização para professores de Matemática) e "Produção de papel" (iniciação científica).

MODELO 1: PLANTAÇÃO DE BATATAS

O problema da plantação de batatas surgiu num curso de Cálculo Diferencial e Integral para alunos da Tecnologia de Alimentos da UNICAMP. Apesar de ser o primeiro contato que estes alunos teriam com Matemática na Universidade, muitos já usavam a camiseta - símbolo do curso com os dizeres "Detesto Cálculo". Evidentemente isto traduzia o sentimento dos veteramos de T. A. que não viam motivo satisfatorio para estudarem 3 semestres seguidos de una disciplina "inútil" e responsável pelo maior índice de reprovação de todo o curso.

Assim é que, levado pela desmotivação geral da classe, propusemos o seguinte esquema de trabalho: Só trabalnaríamos com a matemática que eles achassem interessante e útil, com problemas propostos pelos próprios alunos. Surgiram desta forma vários temas interessantes: otimização e empunhadura de embalagens, dieta alimentar, balanceamento de rações, etc. - vamos relatar aqui o problema da **plantação de batatas** proposto por um aluno da seguinte forma: "Meu pai planta batatas colocando cada 'semente' a uma distância de 30 cm, queria saber por que ele faz desta maneira?" Evidentemente não tínhamos nenhuma resposta imediata mesmo porque nosso conhecimento sobre batatas era muito limitado. O primeiro passo no caso foi procurar obter alguma informação junto à Secretaria da Agricultura:

H_1) O espaçamento entre duas "ruas" deve ser no mínimo de 80 cm para que a limpeza de carpa possa ser executada.

H_2) Cada planta isolada produz em média 8,25 batatas (graúdas e miúdas).

H_3) O peso médio de 8 batatas de uma mesma planta é 0,639 gramas.

H_4) As companhias de seguro consideram como produção normal 800 sacos de 60 Kg por alqueire plantado (a metragem em alqueire paulista é 24200 m^2).

H_5) Dados experimentais fornecem a seguinte relação entre espaçâmento de plantas da mesma rua e quantidade de batatas por planta:

25 cm	4,5 batatas
30 cm	6,5 batatas

35 cm 7,5 batatas
40 cm 8,0 batatas

Mais de 40 cm a planta pode ser considerada "quase - isolada" e a variação da produção é desprezível!

Baseados nestas hipóteses e dados experimentais, propuzemos a seguinte questão:

Determinar o espaçamento entre as plantas (na mesma rua) de modo que a produção seja máxima

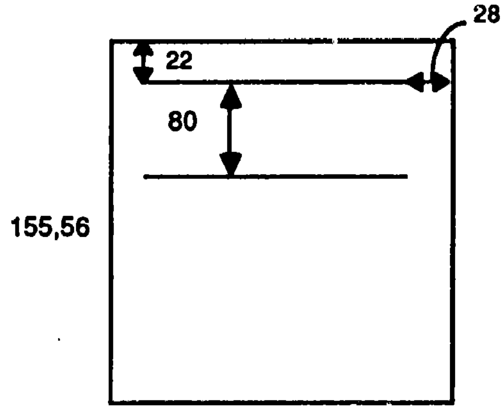
a) Consideramos inicialmente, como primeiro modelo, uma região plana quadrada de área igual a 1 alqueire, e usando regra-de-três deveríamos completar a seguinte tabela:

distância entre plantas da mesma rua	qde. de batatas por planta	qde. de plantas por rua	qde. de plantas total 1 alq.	produção por plantas	produção total do alqueire
d : cm	b: média	média		Kg.	sacos: 60Kg
25	4,5				
30	6,5				
35	7,5				
40	8,0			0,639	800
45 *	8,25 *				

(*) dados auxiliares

b) Quantidade de ruas em um alqueire de forma quadrada: Cada rua mede $\sqrt{24200} = 155,5635$ m.

Se as ruas devem estar espaçadas de 80 cm, teremos $155,5635 \div 0,80 = 194,4543$ mas



se tomarmos como comprimento de uma rua 155 m estamos deixando un espaço de 0,56 + 2 = 28 cm entre as extremidades das ruas e a divisa do terreno. Tomando 194 ruas deixamos un espaço de 22 cm entre as ruas de extremos e a divisa do terreno.

c) A produção em sacos (60 Kg) é uma função da distância d entre duas plantas consecutivas da mesma rua e da quantidade b de batatas por planta:

P(d,b) = (peso de 1 batata x qte. de batatas por planta) x

x (n° de plantas por rua x q te. de ruas) x (qte. de sacos).

$$P(b,d) = \left(\frac{0,639}{8} \times b\right) \times \left(\frac{155}{d} \times 194\right) \times \left(\frac{1}{60}\right) \approx \frac{40b}{d}.$$

Portanto a produção é directamente proporcional à quantidade de batatas por planta e inversamente proporcional à distância entre duas plantas consecutivas da mesma rua.

d) Expresar P em função de somente uma variável. Agora devemos encontrar uma relação entre b e d:

Tenemos os dados:

d	b
0,25	4,5
0,30	6,5
0,35	7,5
0,40	8,0
0,45	8,25

Então consideramos os dados **discretos**:

$$b_0 = f(d_0)$$
$$b_1 = f(d_1)$$
$$b_2 = f(d_2)$$
$$b_3 = f(d_3)$$
$$b_4 = f(d_4)$$

e devemos encontrar uma função **contínua** $b = f(d)$. Temos

$$f(d_1) - f(d_0) = 6{,}5 - 4{,}5 = 2$$
$$f(d_2) - f(d_1) = 7{,}5 - 6{,}5 = 1$$
$$f(d_3) - f(d_2) = 8{,}0 - 7{,}5 = 1/2$$
$$f(d_4) - f(d_3) = 8{,}25 - 8{,}0 = 1/4$$

$$f(d_n) - f(d_{n-1}) = \;--- = 1/2^{n-2} \text{ (forma recursiva)}$$

Somando membro-a-membro cada expressão acima, vem:

$$f(d_n) - f(d_o) = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}$$

onde o 2° membro é a soma de uma **progressão geométrica** com $a_1 = 2$, razão $q = \frac{1}{2}$ a último termo $a_n = \frac{1}{2^{n-2}}$.

$$\text{Logo } S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{2 - \frac{1}{2^{n-2}} \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 4 - 2^{2-n}$$

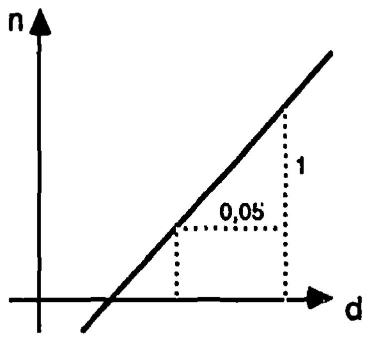
como $f(d_0) = 4{,}5$, podemos escrever:

$$\boxed{b_n = f(d_n) = 8{,}5 - 2^{2-n}.}$$

A relação entre n e d é dada por:

n	d
0	0,25
1	0,30
2	0,35
3	0,40
4	0,45

ou seja, quando n aumenta de 1, d aumenta de 0,05



portanto a relação $\dfrac{n_i - n_j}{d_i - d_j}$ é constante.

Tomando pois os pontos (0; 0,25) e (1; 0,30) podemos determinar esta constante

$$\alpha = \frac{1-0}{0,30-0,25} = 20.$$

De uma maneira geral os pontos (n,d) e (n_i, d_i) estão relacionados por

$$\frac{n - n_i}{d - d_i} = \alpha.$$

Tomando (n_i, d_i) = (0; 0,25), obtemos

$$n = 20\,(d - 0,25) = 20d - 5 \text{ (equação de uma reta).}$$

Desta maneira podemos passar da forma discreta

$$b_n = f\,(d_n) = 8,5 - 2^{\,2-n}$$

para a forma contínua

$$b = f\,(d) = 8,5 - 2^{2-(20d-5)}, \text{ ou}$$

$$\boxed{b = f\,(d) = 8,5 - 2^{7-20d}}$$ (função potência)

como $P(d,b) = \dfrac{40\,b}{d}$, temos

$\boxed{P(d) = \frac{40}{d}\left(8,5 - 2^{7-20d}\right)}$ Produção em sacos em função da distância entre duas plantas consecutivas.

ou $P(d) = \frac{40}{d}\,(8,5 - \exp[(70 - 20d)\ \ln 2])$

e) Encontrar o valor de d de modo que P(d) seja **máximo**.

Como P(d) é uma função diferenciável em todo IR (função potência) temos que se $d = d^*$ é um ponto máximo para $P(d)$, então sua derivada em d^* se anula, isto é $P'(d^*) = 0$.

Temos ainda que se $f(x) = a^{h(x)} \Rightarrow f'(x) = h'(x)\ a^{h(x)}\ \ln a$ (derivada de uma função potência composta).

Logo, usando as propriedades de derivada (soma, subtração, produto, quociente, etc.), temos:

$$P'(d) = \frac{-40 \times 8,5}{d^2} - \frac{40d \times 2^{7-20d}(-20 \times \ln 2) - 40 \times 2^{7-20d}}{d^2}$$

$$= \frac{40 \times 2^{7-20d}(20 \times \ln 2 \times d + 1) - 40 \times 8,5}{d^2}$$

Assim, $P'(d) = 0 \Leftrightarrow D = 2^{7-20d}\,(20 \cdot \ln 2 \cdot d + 1) - 8,5 = 0.$

A solução desta equação não é simples. Construímos então uma tabela

d	2^{7-20d}	$(d20 \ln 2 + 1)$	D
0,25	4,0	4,4657	9.3638
0,30	2,0	5,1588	1.8176
0,35	1,0	5,8520	- 2.6480
0,40	0,5	6,5451	- 5.2274
0,45	0,25	7,2383	- 6.6904

Como a função P ' (d) é contínua e muda de sinal entre os valores d = 0,30 e d = 0,35 então existe um ponto $d^* \in (0{,}30 ; 0{,}35)$ tal que $P'(d^*) = 0$ (Teorema do Valor Médio), fazemos $d_1 = \frac{0{,}30 + 0{,}35}{2} = 0{,}325$ e calculamos $P'(d_1) = -0{,}7141$. Portanto a raíz de P '(d) deve estar entre 0,30 e 0,325, tomando $d_2 = \frac{0{,}3 + 0{,}325}{2} = 0{,}312$ e calculamos $P'(d_2) = 0{,}5181$. Continuamos o processo (denominado **bissecção**) e chegamos tão perto quanto desejarmos da raíz de P'(d).

d	P' (d)	Sinal
0,30	1,8176	+
0,35	-2,6480	-
0,325	-0,7141	-
0,312	0,5181	+
0,318	-0,0720	-
0,315	0,2184	+
0,317	0,0234	+
0,3175	-0,0240	-
0,3173	-0,0050	-
0,3172	-0,0040	+
— — — —	— — — —	— —

A condição $P'(d^*) = 0$ é **necessária** para termos um **ponto crítico**. d^* será um **ponto máximo** se $P''(d^*) < 0$ (condição **suficiente**).

Agora

$$P''(d) = \frac{1}{d^4}\left[d^2\left[\left(40\times 2^{7-20d}(\ln 2\times(-20))\right)(20\ln 2\times d+1)+40\times 2^{7-20d}\times 20\ln 2\right]\right]$$

$$-\frac{1}{d^4}2d\left[40\times 2^{7-20d}(20\ln 2\times d+1)-40\times 8{,}5\right]$$

Antes de termos feito tal conta poderíamos já ter simplesmente concluído que $d^* \simeq 0{,}31725$ é **ponto de máximo** de P(d). Tomando: P(0,3) = 866,66, P(0,31725) = 873,1768 e P(0,32) = 873,03, P(d) cresce quando $d < d^*$ e P(d) decresce quando $d > d^*$. Logo d^* é ponto de máximo.

f) como o financiamento para o plantio de batatas pressupõe que se tenha uma colheita de 800 sacos por alqueire. Queremos saber a que distância se pode plantar para que se colha pelo menos 800 sacos.

SOLUÇÃO: Devemos calcular d de modo que se tenha $P(d) \geq 800$ ou seja:

$$800 \leq \frac{40}{d}\left(8,5 - 2^{7-20d}\right)$$

$$\Leftrightarrow 800d \leq 340 - 40 \times 2^{7-20d}$$

$$\Leftrightarrow 800d - 340 \leq -40 \times 2^{7-20d} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{2^{7-20d} \leq 8,5 - 20d}$$

$$8,5 - 2^{7-20d} \geq 20d \text{ ou}$$

$$\boxed{b \geq 20d}$$

Fazemos outra vez por bissecção:

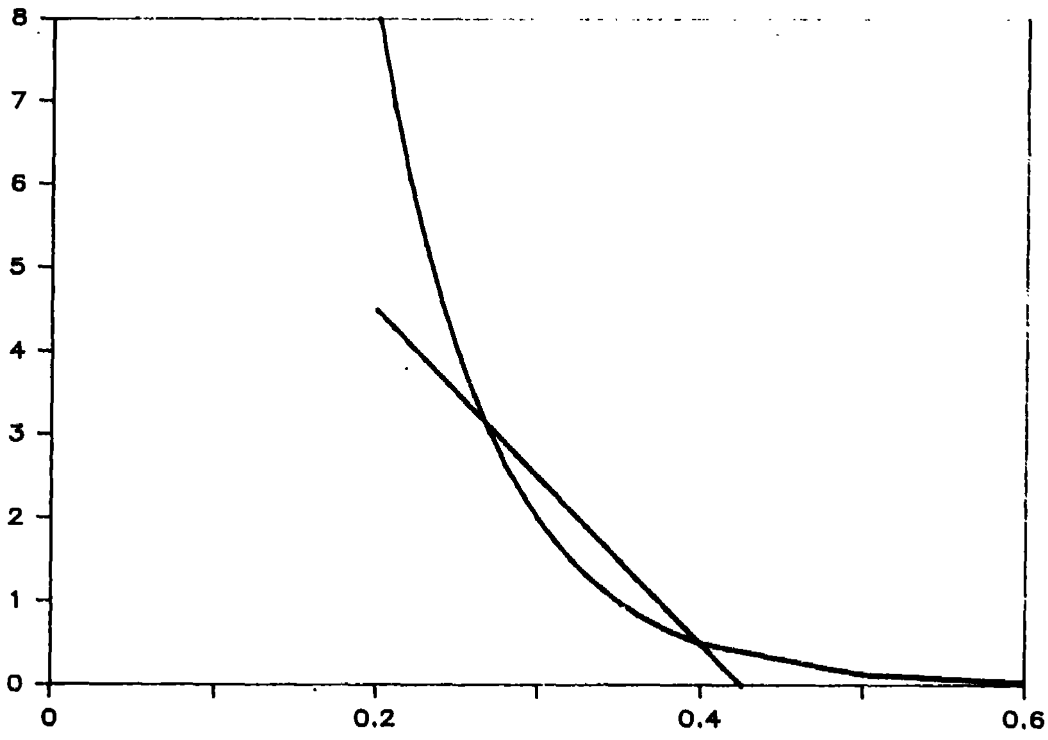
para $d = 0,25 \Rightarrow 20d = 5 > b = 4,5$
$d = 0,30 \Rightarrow 20d = 6 < b = 6,5$
$d = 0,275 \Rightarrow 20d = 5,5 < b = 5,67$
$d = 0,265 \Rightarrow 20d = 5,3 > b = 5,25$

$\boxed{d = 0,27 \Rightarrow 20d = 5,4 > b = 5,46}$ $\Rightarrow$ d mínimo $\approx$ 27 cm.

Se $d = 0,40 \Rightarrow 20d = 8$ e $b = 8 \Rightarrow$ d máximo $\approx$ 40 cm.

Logo o plantio deve ser executado tomando-se as plantas entre 27 cm e 40 cm.

Poderíamos obter o resultado geometricamente:



g) Estudo do gráfico P(d)

$$P(d) = \frac{40}{d}\left(8,5 - 2^{7-20d}\right),\ d > 0$$

P é uma função potência racional definida para todo d > 0

$$P(d) = 0 \Leftrightarrow 8,5 - 2^{7-20d} = 0 \Leftrightarrow 8,5 = 2^{7-20d} \Leftrightarrow$$

$$\ln 8,5 = (7-20d)\ln 2 \Leftrightarrow \frac{\ln 8,5}{\ln 2} = 7-20d =$$

$$20d = 7 - \frac{\ln 8,5}{\ln 2} \Rightarrow d\,\frac{1}{20}\left(7 - \frac{\ln 8,5}{\ln 2}\right) = 0,19563$$

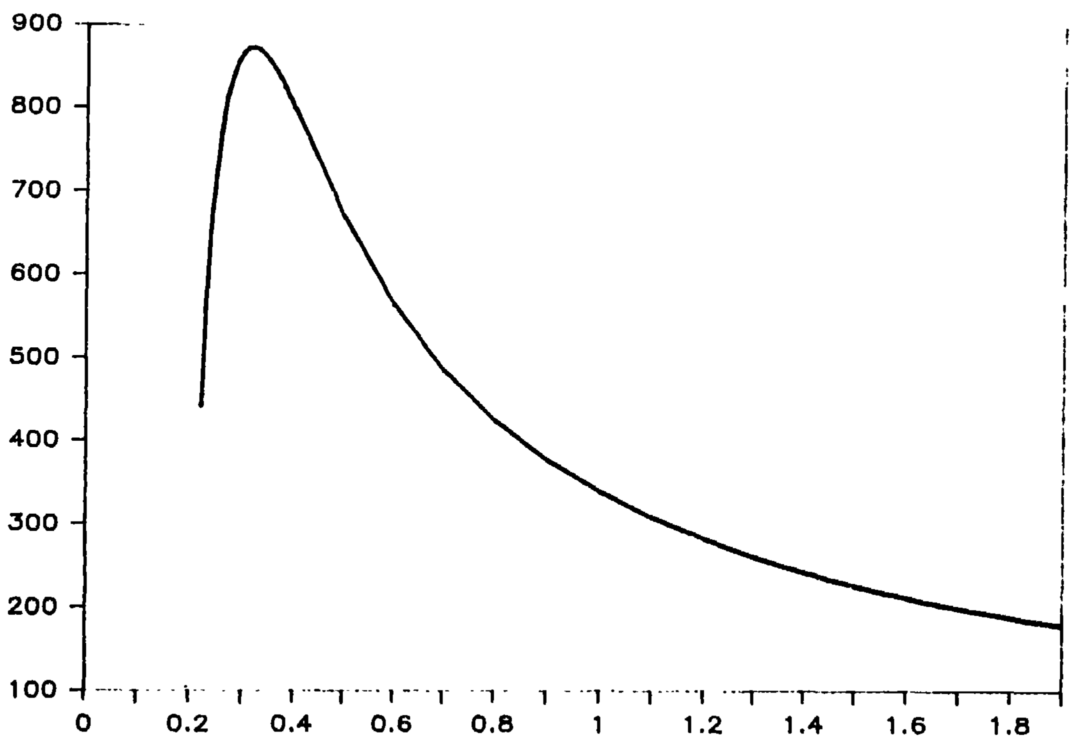
$P(d) > 0$ se $d > 0,19563$ e $P(d) < 0$,se $d < 0,19563$.

$\lim\limits_{d\to 0+} P(d) = -\infty$ e $\lim\limits_{d\to +\infty} P(d) = 0$

Como $P'(d) = \dfrac{40 \times 2^{7-20d}(20d\ln 2 + 1) - 40 \times 8,5}{d^2}$ temos que

$P'(d) = 0$ quando $d^* \approx 0,31725$ (como já vimos d^* é ponto de máximo e $P(d^*) = 873,1768$).

Assim as retas $P = 0$ e $d = 0$ são assíntotas de $P(d)$.



COMENTÁTIO FINAL

Este problema, inicialmente de aparência despretenciosa, despertou nos alunos de Tecnologia de Alimentos uma motivação para estudarem a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, tanto é que no final houve apenas uma reprovação em 70 cursantes (as provas eram iguais para todos os 14 cursos de Cálculo I da UNICAMP).

O programa foi sendo desenvolvido à medida que o problema exigia novos conceitos. Assim é que trabalhamos com função (linear, potência, exponencial), função inversa (logarítmo) - função discreta (forma de recorrência) - continuidade - limite (assíntotas) - derivada - pontos críticos - raizes de funções (método da bissecção e o teorema do valor médio) - gráfico de funções.

O conceito de integral definida foi motivado posteriormente com este mesmo problema quando procuramos efetuar a plantação em terrenos de forma irregular (Cálculo de Áreas).

MODELO 2 - DINÂMICA POPULACIONAL DE UMA COLMÉIA

Introdução

Quando se propõe analisar o crescimento populacional de uma comunidade qualquer um dos objetivos é saber seu comportamento em cada instante e a previsão de seu tamanho no futuro. Cada população tem uma dinâmica própria , isto é uma "lei de formação" inerente à especie.

Em um curso nosso de **"Modelagem Matemática"** para professores de 1° e 2° graus (Guarapuava - 1981), um grupo de alunos decidiu analisar o comportamento e formação de uma colméia, propondo um modelo deterministico que esprimisse sua dinâmica. Os dados empiricos e exprimentais foram colhidos em entrevistas com apicultores da região.

Foram propostos modelos de complexidade matemática variada: os modelos iniciais, fazem uso de uma matemática específica de programas de 2° grau (sequências geométricas, equações da reta, funções potência, exponencial é logarítmo) - outros modelos mais "sofisticados" fazem uso de equações diferenciais ordinárias e podem servir de motivação em cursos de biomatemática, no 3° grau.

De uma maneira geral, quando um tema e escolhido para ser trabalhado via modelagem matemática o processo fornece meios necessarios para o desenvolvimento da criatividade em uma proposta de ensino-aprendizagem desde que adaptemos nossos modelos ao conteúdo programatico de cada disciplina.

Neste trabalho, vamos apresentar modelos matemáticos distintos relativamente ao estagio de con' ùdo matemático, mas que expressam, essencialmente, o mesmo fenomeno: crescimento populacional de uma colméia.

A Colméia

Entre apicultures, a expressão colméia significa abelhas alojadas racionalmente com uma população equilibrada e distribuida em tres castas: **rainha, operárias e zangões.**

A constituição de uma colméia em condições normais e a seguinte:

-1 rainha (vive até 5 anos).

- atè 400 zangões. A quantidade depende da abundância de alimento (vivem até 80 dias).

- 60.000 a 80.000 operárias. A longevidade de uma operária depende do clima e do seu período de atividade. De um modo geral, varia entre 38 a 42 dias.

A capacidade de postura de uma rainha vai até 3.000 ovos por dia, o que corresponde a duas vezes seu próprio peso. Esta quantidade depende da area disponivel para postura, da qualidade genética da rainha e das condições florais e climáticas existentes.

Quando uma rainha diminui a quantidade de ovos, as operárias responsáveis pela manutenção das larvas promovem o desenvolvimento de nova rainha. A nova rainha, depois do vôo nupcial em que é fecundada por um dos zangões, retorna à colméia desalojando a rainha velha e esta parte para formar uma outra colméia. Acompanhando a velha rainha seguem un séquito de aproximadamente 10.000 operárias: é o **enxame voador.**

Para o estudo do crescimento da população em uma nova colméia consideraremos os seguintes dados:

- Postura da rainha: 2000 ovos/dia.

- Período entre a postura e o nascimento da abelha: 21 días.

- Quantidade inicial de abelhas: 10.000.

- Logenvidade de uma operária: 40 días.

Modelos

Um modelo matemático da dinâmica populacional de uma nova colméia deve ser apresentado levando-se em consideração dois estágios distintos: **o período de adaptação que é** intermediario entre a postura inicial e o seu nascimento (21 dias), e o **período de desenvolvimento** quando nascem diariamente 2000 abelhas.

Em relação ao período inicial podemos estabelecer duas hipóteses distintas quanto ao índice de mortalidade das operarias.

H_1) **As abelhas têm idades equidistribuidas.**

Neste caso estamos supondo que em cada grupo, distribuido por idade (dias de vida), existem exatamente a mesma quantidade de operárias.

Desta forma, das 10.000 abelhas iniciais, em cada dia morrerão 250 o que corresponde a

$\frac{1}{40}$ de 10.000.

Seja $y_n = y(n)$ a quantidade de abelhas no n-ésimo dia de existência da nova colméia, $0 \leq n < 21$. Então, podemos escrever:

$$y_0 = 10.000$$
$$y_1 = y_0 - 250$$
$$y_2 = y_1 - 250 = y_0 - 2 \times 250$$
$$y_3 = y_3 - 250 = y_0 - 3 \times 250.$$

Podemos generalizar, escrevendo

$$y_n = y_0 - n \times 250.$$

Assim, obtemos um **modelo matemático** que nos dá a informação sobre a quantidade de abelhas no n-ésimo dia de existência da colméia.

$$y_n = 10.000 - 250n. \qquad 0 \leq n \leq 21. \qquad (1)$$

O modelo (1), é dito **discreto** no sentido que a variável independente n (tempo) está tomando valores no conjunto dos numeros naturais **N**.

Obsevação: Seja $k > n$, definimos $\Delta y = y_k - y_n$: quantidade de abelhas que morrem entre o k-ésimo e o n-ésimo dia e $\Delta_n = k - n$: numero de dias passados entre o k-ésimo e o n-ésimo dia, então a **razão incremental** $\frac{\Delta y}{\Delta n}$ é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta n} = \frac{y_k - y_n}{k - n}$$

$$= \frac{(y_k - y_{k-1}) + (y_{k-1} - y_{k-2}) - \dots + (y_{k+1} - y_n)}{[k - (k-1)] + [(k-1) - (k-2)] + \dots + (n + 1 - n)}$$

$$= \frac{(k-n)(-250)}{k-n} = -250$$

ou seja a razão entre a variação da quantidade de abelhas pela variação do tempo é **constante**. Isto significa que o resultado para um dia n qualquer poderia ser obtido por uma **regra de três**: "A quantidade de abelhas que morrem em n dias e proporcional a n". Por exemplo, se em 1 dia morrem 250, em 21 dias morrerão 5.250 abelhas:

1 - 250

21 - x

$\Rightarrow x = 21 \times 250 = 5250$

A constante C = -250 é o **coeficiente angular** da reta (Fig. 1);

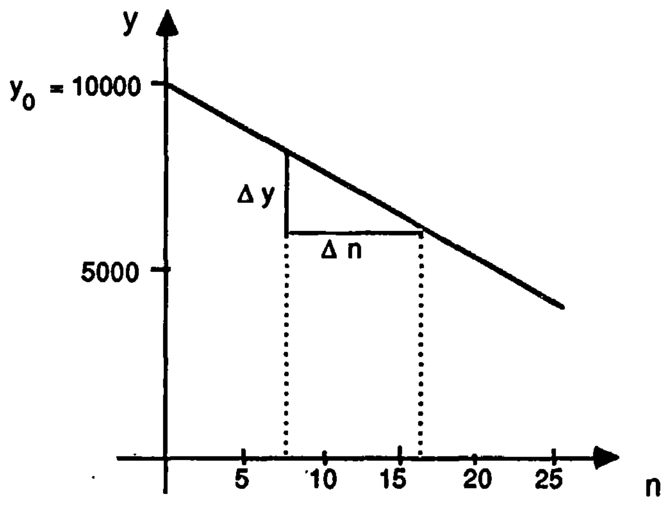


Fig. 1. y = -250 t + 10000

que representa o **modelo contínuo** correspondente a equação (1).

Chamamos a atenção para o fato de que a constante de "proporcionalidade" usada numa regra-de-três é equivalente ao coeficiente angular de uma reta, ou seja, **so podemos usar regra-de-três quando as variáveis estão relacionadas segundo a equação de uma reta.**

H_2) A morte das abelhas é "proporcional" a quantidade que se tom de abelhas em cada instante.

Observe que com esta hipótese não podemos usar regra-de-três. A taxa de mortalidade e

$\frac{1}{40} = 0{,}025$ e portanto a taxa de sobrevivência é $1 - 0{,}025 = 0{,}975$

Podemos obter uma expressão de recorrencia para y_n com um modelo discreto:

$$y_0 = 10{,}000$$
$$y_1 = 0{,}975\, y_0$$
$$y_2 = 0{,}975 \cdot y_1 = (0{,}975)^2\, y_0$$
$$-----------------$$
$$y_n = (0{,}975)^n\, y_0 \qquad (3)$$

Usando o fato que $a^x = e^{x \ln a}$, para todo $x \in \Re$, a função potência (3) pode ser dada na forma exponencial:

$$y_n = \exp(n \ln 0{,}975) \cdot y_0 = \exp(-0{,}02532\, n) \cdot y_0 \qquad (4)$$

No caso contínuo (tempo contínuo) podemos escrever

$$y = y(t) = y_0\, e^{-0{,}02532t} \qquad 0 \leq t \leq 21 \qquad (5)$$

Tomando $y_0 = 10.000$ e $t = 21$ em (5), obtemos $y(21) = 5876$. Verificamos que, de acordo com a hipótese considerada, os valores de y_{21} são distintos, se bem que na prática tal diferença não seja significante, mesmo para o estudo do comportamento futuro da colméia.

O modelo matemático para o periodo de desenvolvimento da nova colméia leva em consideração que a partir do 21-ésimo dia nascem, 2000 abelhas:

Se A_0 é a quantidade remanescente de operárias velhas, teremos para o 21-ésimo dia:

$$Y_1 = y_{21} = A_0 + 2000$$

Considerando agora a taxa de sobrevivência igual a 0,975, podemos formar uma relação de recorrencia dependendo do valor A_0:

$$Y_2 = y_{22} = 0{,}975\, Y_1 + 2000 = 0{,}975\,(A_0 + 2000) + 2000 =$$
$$= 0{,}975\, A_0 + 0{,}975 \times 200 + 2000 = 0{,}975\, A_0 + 2000\,(0{,}975 + 1)$$

$$Y_3 = y_{23} = 0{,}975\, Y_2 + 2000 = 0{,}975\,(0{,}975\, A_0 + 0{,}975 \times 2000 + 2000) + 2000$$
$$= (0{,}975)^2 A_0 + (0{,}975)^2 \times 2000 - 0{,}975 \times 2000 - 2000$$
$$= (0{,}975)^2 A_0 + 2000\,[(0{,}975)^2 + 0{,}975 + 1)]$$

E asim sucessivamente, chegamos a

$$Y_n = (0{,}975)^{n-1}A_0 + (0{,}975)^{n-1} \times 2000 + (0{,}975)^{n-2} \times 2000 + \ldots + 0{,}975\,2000 + 2000$$

$$= (0{,}975)^{n-1}A_0 + 2000\,[(0{,}975)^{n-1} + (0{,}975)^{n-2} + \ldots + 0{,}975 + 1]$$

A expressão entre colchetes e a soma de uma **progressão geométrica** de razão igual a 0,975, o que nos permite simplificar escrevendo:

$$Y_n = (0{,}975)^{n-1} A_0 + 2000 \frac{1-(0{,}975)^n}{1-(0{,}975)} = (0{,}975)^{n-1} A_0 + 800000\,(1-0{,}975^n)$$

$$= (0{,}975)^{n-1} A_0 + 80000 - 80000 \times (0{,}975)^n$$

$$= (A_0 - 78000)\,(0{,}975)^{n-1} + 80000 \qquad (6)$$

Podemos pensar numa expressão continua para Y_n tomando:

$$y(t) = (A_0 - 78000)\, e^{(t-21)\ln 0{,}975} + 80000 \qquad (t \geq 21).$$

ou seja

$$y(t) = (A_0 - 78000)\, e^{0{,}02532(t-21)} + 80000 \text{ para } \quad t \geq 21 \qquad (7)$$

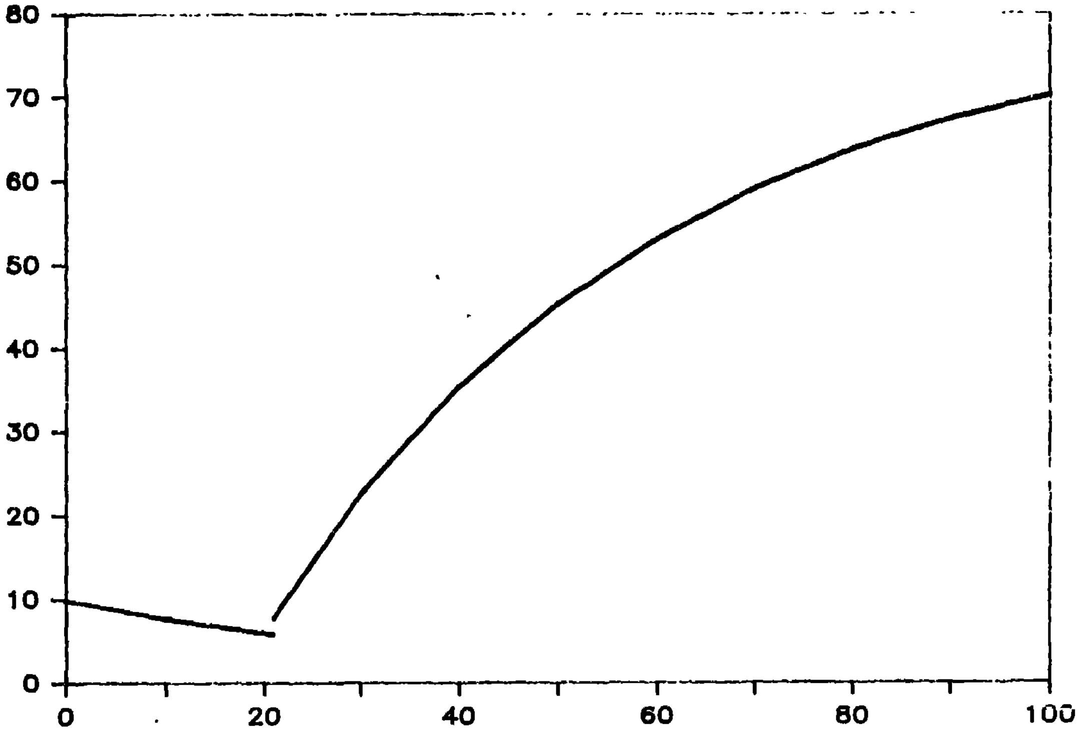
A expressão (7) nos da a população da colméia num tempo t qualquer a partir do 21-ésimo dia.

Podemos notar que quanto t cresce o valor de $e^{-0{,}02532\,(t-21)}$ tende a zero e portanto a população da colméia se estabiliza com 80000 abelhas o que mostra uma certa coerência com a realidade, isto é com os dados experimentais.

Isto pode ser traduzido pela expressão matemática:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 80000$$

A reta y = 80000 é uma assíntota horizontal da função y(t).



Juntando as duas partes do modelo contínuo de crescimento populacional das abelhas (equações (5) e (7)) podemos escrever:

$$\begin{cases} y(t) = 10000e^{-0,02532\,t} & \text{se } 0 \le t \le 21 \\ y(t) = (A_0 - 78000)e^{-0,02532\,(t-21)} + 80000 & \text{se } t \le 21 \end{cases}$$

onde $A_0 = 5876$.

Lei de Formação de Uma Colméia

No caso contínuo (tempo t como variável continua) podemos usar a linguagem de derivadas e hipótese H_2 da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -0,025y \\ y(0) = 10000, \quad 0 \le t \le 21 \end{cases} \tag{8}$$

onde $\frac{dy}{dt}$ indica a variação instantânea da população de abelhas. Portanto, a expressão (8) quer dizer que no primeiros 21 dias, a variação da população de abelhas (mortandade) é proporcional a quantidade presente em cada instante com un indice de mortalidade igual a $\frac{1}{40} = 0{,}025$ e uma população inicial de 10000 abelhas.

A solução da equação (8) é obtida separando as variáveis e integrando

$$\frac{dy}{y} = -0{,}025\,dt\text{, logo } \int \frac{dy}{t} = \int -0{,}025\,dt$$

ou

$$\ln y = -0{,}025\,t + K \text{ (k constante de integração)}$$

donde tiramos

$$y(t) = e^{k} \,.\, e^{-0{,}025t}$$

Usando a condição inicial $y(0) = 10000$, vem que $e^{k} = 10000$. Assim,

$$y(t) = 10000\,e^{-0{,}025t}, \qquad 0 \leq t \leq 21 \tag{9}$$

A solução (9) é aproximadamente igual à (5) obtida anteriormente. Para o período de crescimento da colméia, podemos fazer uma **analogia** com o "modelo de aquecimento de Newton" uma vez que em ambas as situações as soluções são semelhantes.
Consideramos então a equação diferencial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = k(L - y) \\ y(21) = 7915 \end{cases} \tag{10}$$

onde $L = 80000$ é a população limite, $t \geq 21$ e $k = \ln 0{,}975$.

Separando as variáveis é integrando, obtemos

$$\frac{dy}{L - y} = k dt \Rightarrow -\ln(L - y) = kt + c$$

Portanto, $L - y = e^{c}e^{-kt} \Rightarrow y(t) = -e^{c}e^{-k(t-21)} + L, t \geq 21$.

Para $t = 21 \Rightarrow -e^{c} = 7915 - 80000 = -72085$ ou

$$y(t) = -72085e^{-(t-21)\,0{,}02532} + 80000. \tag{11}$$

Desta forma (cf. (I0)) podemos dizer que a "lei de formação" de uma colméia nova é a siguiente:

"O crescimento populacional da colméia é proporcional à diferença entre a população final e a população dada em cada instante".

Conclusão. Usando o processo de modelagem matemática, podemos aliar de maneira equilibrada, a abstração e a formalização, não perdendo de vista a fonte que originou o processo. Este procedimento construtivo conduz ao que se convencionou chamar de Matemática Aplicada e para nos educadores se constitui numa estratégia para se ensinar Matemática.

A modelagem matemática de situações - problemas envolvendo a realidade cotidiana funciona como elemento motivador para o aprendizado dos alunos.

Como verificamos, uma mesma situação pode ser analisada através de modelos de complexidade variada, dependendo do curso em que se está trabalhando. O crescimento populacional das abelhas poderia ser analisado num colegial (2° grau) onde o conteúdo requerido seria função potencia, exponencial e logaritmo, equação da reta, e soma de uma P.G. Ja num curso de Cálculo Diferencial a mesma situação poderia ser analizada via equações diferenciais.

Referências

[1] E. BATSCHELET. "Introdução à Matemática para Biocientistas", Eds. Interc. USP - S. Paulo, 1978.

[2] H. WIESE e outros, "Nova Apicultura", Agropecuária, P. Alegre, 1980.

[3] R. C. BASSANEZI e W. C. FERREIRA, "Equações Diferenciais com Aplicações". Ed. Harbra Ltda. São Paulo, 1988.

COMO DESARROLLAR EN LOS ESTUDIANTES HABILIDADES PARA RESOLVER PROBLEMAS

Cipriano A. Cruz G.
Universidad Central de Venezuela
Caracas, Venezuela

RESUMEN

Se presenta una síntesis cronológica de los principales esfuerzos realizados, en el período 1975-1987, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela, en el área de desarrollo de habilidades para resolver problemas.

Se citan otras experiencias al respecto, que han tenido lugar en algunas instituciones venezolanas.

Se mencionan los diversos intentos metodológicos utilizados en estudiantes, para lograr desarrollar las habilidades necesarias para resolver problemas, y con docentes, para captar interesados en centrar su actividad pedagógica en la enseñanza de procesos.

La exposición finaliza con un conjunto de recomendaciones que pudieran ser útiles a instituciones y docentes que estén considerando la posibilidad de desarrollar líneas de trabajo en el área de **Solución de Problemas.**

INTRODUCCION

Creo imprescindible dejar establecido que no soy un experto en Psicología de la Instrucción, ni siquiera en un área específica como el desarrollo de habilidades para el aprendizaje o, aún más específica, como el desarrollo de destrezas para las tareas de solución de problemas y toma de decisiones.

Otro inconveniente, imposible de soslayar, radica en la naturaleza del tema que nos preocupa. Me explico. Para un profesor de Matemáticas responder a las preguntas características del Acto Pedagógico: ¿QUE?, ¿QUIEN?, ¿A QUIEN?, ¿PARA QUIEN?, ¿PARA QUE?, ¿CUANDO?, resulta una tarea de un grado de complejidad medio. En efecto, "el QUE" lo da la teoría subyacente al tema que debe enseñar, "el QUIEN" lo proporciona él mismo como individuo a través de su interacción con sus estudiantes, "el A QUIEN" generalmente ha sido resuelto por el Sistema Educativo, "el PARA QUE" aparece normalmente en los objetivos generales y específicos de los programas y "el CUANDO" se obtiene de la secuencia lógico-temporal de los diferentes temas de un programa de asignatura. Sin embargo, la pregunta fundamental del Acto Pedagógico, es decir ¿COMO?, debe responderla a partir de sus propios recursos:

- para cada grupo con el que debe trabajar,
- para cada momento en que se diseña una asignatura, una clase o un material didáctico,
- para cada instante en que percibe que el proceso de enseñanza-aprendizaje no está siguiendo la dirección esperada.

Es facil comprender entonces, que en un área como el desarrollo de habilidades para resolver problemas, en la cual:

- no se dispone de una sólida teoría subyacente,
- no hay cierto consenso mínimo acerca de si se pueden enseñar procesos,
- no es sencillo seleccionar contenidos o establecer una descomposición en subtemas,
- ni tampoco es simple decidir en qué momento debemos poner énfasis en "aspectos procedimentales generales" por sobre "procesos específicos", la búsqueda de una respuesta "al COMO", es una situación particularmente compleja (pero, por lo mismo, altamente motivante).

Ante este cúmulo de DIFICULTADES tomo conciencia de INDIVIDUO con muchas limitaciones (dimensión psicológica) y me fijo una META posible de alcanzar con mis RECURSOS disponibles y que, a riesgo de no satisfacer las expectativas de ustedes (dimensión sociológica), pueda al menos servir de punto de referencia para quienes tengan inquietudes en explorar la posibilidad de enseñar procesos (dimensión "topográfica"). Me propongo hablar de COMO hemos intentado, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela, desarrollar habilidades para resolver problemas (dimensión pedagógica) y mencionar, a título de ejemplos, algunos esfuerzos en la misma área realizados en otras instituciones venezolanas.

SINTESIS CRONOLOGICA

1975

El Sevicio de Orientación de la Facultad de Ingeniería de la U.C.V., comienza a trabajar en la enseñanza de estrategias para resolver problemas, utilizando el esquema propuesto por Polya [1] como una forma de ayudar a los estudiantes que, por su bajo rendimiento, solicitan o se les recomienda asistencia extra-curricular.

1978

Se implanta el Curso de Iniciación como programa previo y obligatorio para los estudiantes que se inscriben para comenzar estudios en la Facultad. El programa del Curso contiene un Area de Recursos para el Aprendizaje, en la que se incluye la enseñanza de estrategias para resolver problemas.

1980

Se incorpora el esquema de Polya a una guía de Estudio [2] elaborada para uso de los estudiantes en la asignatura Análisis Matemático III, que imparte el Departamento de Matemática Aplicada de la Facultad.

Se incorpora al Curso de Iniciación un Taller de Matemáticas y se conforma un grupo de trabajo interdisciplinario (educadores, ingenieros, matemáticos, orientadores, psicólogos) que comparten tareas de diseño y puesta en práctica de una nueva modalidad para el Curso de Iniciación.

1981

Un grupo de profesores de los Departamentos de Matemática Aplicada, de Dibujo y del Servicio de Orientación asisten a un Seminario sobre Desarrollo de Sistemas Operacionales de Pensamiento, auspiciado por el Ministerio de Estado para el Desarrollo de la Inteligencia. Este grupo re-diseña las áreas de Recursos para el Aprendizaje y Matemáticas del Curso de Iniciación, incluyendo el entrenamiento y uso de Herramientas de Pensamiento de Edward de Bono [3]. Se acuerda que el Area de Matemáticas pondría énfasis en la consolidación de destrezas de pensamiento, de lectura y de solución de problemas.

1982

Se organizan Talleres para entrenamiento de facilitadores en el Area de Recursos para el Aprendizaje.

1983

Se incorpora al listado de asignaturas electivas no técnicas de la Facultad "Apoyo Instrumental" con un programa similar al área de Recursos para el Aprendizaje del Curso de Iniciación [4].

1984

Las actividades del Curso de Iniciación se centran en el diagnóstico y se comienzan estudios con el objeto de determinar cuál es el nivel real de ingreso de los estudiantes de la Facultad, no sólo en el manejo de contenidos, sino también en el grado de desarrollo de algunas habilidades para resolver problemas [5].

1985

Se realiza en la Facultad un Seminario permanente sobre Solución de Problemas, con el propósito de intercambiar experiencias, conocer y comentar varios artículos escritos en el área.

1986

La experiencia acumulada por el equipo permite diseñar y poner en Práctica Talleres de Solución de Problemas dirigidos a docentes (en el Colegio Universitario Francisco de Miranda [6] y en el Sistema de Actualización Docente del Profesorado de la U.C.V. [7]) y estudiantes (en el Servicio de Orientación de la Facultad de Ingeniería [8]).

1987

Miembros del equipo trabajan en:

- Taller de Solución de Problemas y Toma de Decisiones en el S.A.D.P.R.O.
- Diseño y desarrollo de materiales para un área del Curso Introductorio de la Universidad Experimental de Guayana (el área de desarrollo de destrezas cognoscitivas) en la cual se incluyen aspectos de Solución de Problemas y Toma de Decisiones [9].
- Taller de Solución de Problemas realizado en el marco del III Simposio de Enseñanza de la Matemática en Ingeniería (U.C.V., Junio).
- Un proyecto orientado hacia Tesis de grado de licenciados en Matemáticas, opción Docente, en algunos protocolos para resolver problemas y su aplicación en Análisis Matemático I, en la Facultad de Ingeniería de la U.C.V. [10].

OTRAS EXPERIENCIAS

Sabemos de otros intentos en Venezuela por abrir direcciones en la enseñanza de solución de problemas. Citamos, a título de ejemplo:

- Las experiencias llevadas a cabo por el Dr. Eduardo Lima de Sá de la Universidad Simón Bolivar ([11], 1982).

- Experiencias de Rodríguez (1979-1980) e Investigaciones de Alice Mayorga ([12], 1984) en el Instituto Pedagógico de Caracas.

- Proyectos del Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia (1975 y 1986, este último es un módulo tutorial, dirigido a docentes de Educación Básica, para presentar una metodología de Enseñanza en el área de Solución de Problemas, [13]).

- Seminarios y Tesis de Grado que se realizan en el Programa de Maestría en Psicología de la Instrucción, Facultad de Humanidades y Educación de la U.C.V. [14].

- Seminarios y Tesis de Grado en Facultad de Ciencias; opción Docente en Matemáticas [15].

- Seminario Nacional permanente sobre Didáctica de la Matemática [16].

COMO HEMOS INTENTADO DESARROLLAR EN LOS ESTUDIANTES HABILIDADES PARA RESOLVER PROBLEMAS.

Los primeros intentos, como es lógico suponer, fueron realizados por diversas personas, en forma aislada y sin disponer de un fundamento teórico que guiara las acciones. Se presenta al estudiantado la metodología propuesta por Polya a través de un audiovisual producido por el Sevicio de Orientación (se explica la metodología con problemas de "ingenio") y a través de una guía de estudio para la Asignatura Análisis Matemático III, (la metodología en el marco de un contenido específico).

La consolidación del área de Recursos para el Aprendizaje del Curso de Iniciación y el nacimiento de la asignatura Apoyo Instrumental producen en el equipo de trabajo el convencimiento de trabajar en la enseñanza de PROCESOS.

En lo que a solución de problemas se refiere, llegamos al consenso que "la categoría de pensamiento asociada a esta actividad" debe tener atención preferente, y que para desarrollar las habilidades necesarias para tener éxito en la misma debe prescindirse de contenidos específicos o, al menos, ellos deben ser de un nivel de dificultad tal que no impidan al novato observar el PROCESO. El entrenamiento en esta área se dirige a lograr que el estudiante ponga en ejecución las habilidades iniciales para resolver problemas: leer, reconocer, separar y establecer relaciones entre los elementos del problema, cambiar de una modalidad de presentación de un problema a otra (verbal, gráfica o simbólica).

Se trabaja en grupos de un máximo de 35 estudiantes por salón en la puesta en práctica de las estrategias de REPRESENTACION [17] y con una selección de problemas que permiten centrar la atención en:

representación unidimensional
representación bidimensional
representación por tablas lógicas
representación por simulación.

Adicionalmente el equipo diseña algunos problemas cuyo centro de interés está en el proceso mismo y que se representan por diagramas de flujo.
La metodología de trabajo en el aula es la siguiente:

a) Clases "teóricas": exposiciones para presentar e ilustrar el uso de la metodología general de Polya con transparencias, [18].

b) Clases prácticas tipo "Taller". Cada sesión tiene cuatro fases:

   1) Introducción: el facilitador modela la conducta de "ver" y representar un problema. Explica las dificultades de "ver el problema" sólo a través de su enunciado verbal y aclara como usar la estrategia.

   2) Práctica: Los participantes forman equipos de trabajo (máximo cinco estudiantes cada uno) designan secretario y relator y escriben las soluciones a los problemas planteados por el facilitador.

   3) Proceso: cada equipo presenta y explica sus respuestas. El facilitador orienta, aclara e induce a hacer comparaciones, tanto de las diferentes representaciones como de los procesos realizados.

   4) Cierre: El facilitador resume los principales logros alcanzados por el grupo y asigna problemas adicionales como ejercicio.

La conformación multidisciplinaria del equipo y la necesiad de comunicar algunas experiencias producen la inquietud de buscar una fundamentación teórica para las acciones. Es así como en el seminario permanente del año 85 se leen y discuten varios materiales que se estima pueden ayudar en este aspecto: [19], [20], [21], [22] y [23].

Como producto de estas discusiones resulta una más amplia y mejor categorización de las estrategias a enseñar y se incorporan al trabajo con estudiantes otras heurísticas (Schoenfeld, Newell y Simon y Teoría Triárquica de la Inteligencia de Sternberg [22]).

El trabajo en los Talleres con docentes no es esencialmente diferente al que se usa con los estudiantes; pero sí para los primeros se pone un mayor énfasis en los procesos, disponiendo que algunos realicen el rol de observadores y otros el de sujetos.

El observador debe:

1) Leer cuidadosamente el problema.
2) Familiarizarse con el problema y una hoja de registro.
3) Recopilar con el mayor detalle posible los procesos de pensamiento verbalizados por el sujeto; haciendo preguntas si es necesario para que éste aclare su proceso, pero evitando evaluar la conducta del sujeto y absteniéndose de dar ayudas para la búsqueda de soluciones.
4) Registrar las pausas que haga el sujeto.

El sujeto debe:

1) Pensar en voz alta conforme trabaja; es decir tiene que verbalizar todos los pensamientos que pasan por su mente.

2) Disponer de un tiempo limitado para producir ideas en torno al problema en estudio.

3) No dar importancia al hecho de no llegar a la solución del problema [7].

El trabajo en pequeños grupos con estudiantes se realiza en ambientes de "mesa redonda" en donde los participantes, estimulados por los facilitadores, exponen sus ideas acerca de los principales obstáculos que confrontan al resolver problemas. Al detectar alguna deficiencia se asignan problemas (que han sido previamente categorizados como "los adecuados" para que el estudiante "aprecie" la importancia de usar una cierta estrategia) que deben ser resueltos en forma individual. El análisis de los resultados se hace en grupo, cada participante expone sus ideas, y, con la participación de todos, se refuerzan las conductas positivas y se sugieren las recomendaciones para corregir las deficiencias.

Cabe mencionar aquí que al trabajo en pequeños grupos, que se realiza a través del Servicio de Orientación, se ha incorporado un conjunto de sesiones, previas a solución de problemas, con la finalidad de que el participante logre autosupervisar su programa de estudio, la frecuencia y la duración de sus sesiones de estudio (modelo de autocontrol, [25], [26], [27], [8]).

La metodología que se está usando en el Proyecto: "Algunos Protocolos para Resolver Problemas y su Aplicación en Análisis Matemático I", es la siguiente:

Un grupo de estudiantes se inscribió, voluntariamente, en el proyecto. Luego de una reunión inicial para dar instrucciones e intercambiar expectativas, se aplicó un examen diagnóstico. El grupo se dividió en tres equipos de trabajo (de nueve estudiantes cada uno). Cada equipo se reune, una vez por semana (en sesiones de tres horas de duración, fuera del horario regular de clases) asesorado por uno de los tesistas. En cada equipo se trabaja con un protocolo diferente para resolver problemas:

- El protocolo de Polya [1].
- El protocolo de Newell y Simon [24].
- El protocolo de Sternberg [22].

La estrategia en el aula de clases es como sigue:

- Cada participante dispone de una hoja con el protocolo corrrespondiente.
- El facilitador presenta un problema al equipo (cuyo contenido está relacionado directamenta con la materia que se está estudiando en Análisis en ese momento).
- Los participantes trabajan en forma individual, en búsqueda de soluciones.
- El facilitador orienta el proceso y les estimula a usar deliberadamente el protocolo.
- Los participantes, en forma rotativa, van exponiendo sus ideas. En esta fase el facilitador va deteniendo el proceso y destacando las diferentes etapas del protocolo.
- Los restantes participantes preguntan, comparan y aportan sugerencias para mejorar la ejecución.
- El facilitador resume lo realizado e invita al grupo a evaluar los logros en términos de las expectativas.

Se tiene previsto aplicar, al término de la experiencia, un examen y una encuesta de opinión para evaluar los posibles efectos que ha producido en cada individuo el programa de entrenamiento.

Me referiré, ahora, al área de desarrollo de destrezas cognoscitivas del Curso Introductorio para la Universidad Experimental de Guayana [9].

Esta componente del Curso tiene como objetivo general lograr que el estudiante "aplique a su actividad académica los procedimientos y estrategias que aportan diferentes modelos téoricos en solución de problemas, para enfrentar en forma crítica los problemas, autorregular su conducta ante los mismos, caracterizarlos y seleccionar las estrategias más adecuadas para su solución".

El material será presentado a los estudiantes en un período de 14 semanas con 5 horas de clases semanales, usando un conjunto de lecciones estructuradas en cuatro sub-áreas.

- Directores de atención, centrada en el entrenamiento para el uso deliberado de "algunas operaciones de pensamiento" (De Bono, [3]) vinculadas a los procesos medulares del

Curso: **Solución de Problemas y Toma de Decisiones.**

- Razonamiento abstracto, con énfasis en los procesos de Analizar, Comparar e Inferir.
- Solución de problemas, de carácter operacional y centrado en la estructura del problema como fuente de heurísticas para la aplicación de estrategias de solución. Se usarán la caracterización de Newell y Simon [24] y la categorización de Perkins [20] en lo que a estuctrura se refiere. Como estrategias se han elegido: definición de la naturaleza del problema, representación, sub-metas, inferencia, contradicción y trabajar hacia otras.
- Toma de decisiones, de carácter operacional y centrada en el análisis de los factores que intervienen en la toma de decisiones: establecimiento de criterios, generación de alternativas y estrategias para ponderar las diversas alternativas.

Se tiene previsto dictar, a los facilitadores del Curso, un Taller de Entrenamiento, en el cual no sólo se discutirán los contenidos sino también las estrategias de dinámica de grupos que se estiman convenientes para el desarrollo del programa con los estudiantes.

Las razones de esta necesidad están claramente expuestas en el trabajo de Torre [23], quien dice:

"La solución de problemas es algo más que una secuencia de pasos o una serie de técnicas y estrategias; se necesita de una estructura mental adecuada. El que soluciona el problema debe sentirse capaz de emprender con éxito el proyecto específico que tenga entre manos. Debe sentir confianza en sus propias facultades y talentos. En pocas palabras, el que soluciona problemas necesita desarrollar cualidades de líder... procurando, permanentemente:

1) mantener al grupo trabajando en forma animada
2) percibir y satisfacer la necesidad de un ambiente apropiado para el proceso de aprendizaje
3) mantener registros accesibles y precisos del grupo y de cada individuo
4) hacer el mejor uso posible del tiempo
5) enseñar a otros
6) evaluar críticamente los elementos positivos y negativos del trabajo propio y el de otros".

RESULTADOS

Tomando en cuenta que:

- Los cambios de conducta son difíciles de observar en forma inmediata.
- Los grupos que han recibido entrenamiento se distribuyen en distintos cursos de la Facultad.
- El equipo de trabajo es reducido.
- Algunas de las experiencias se encuentran en plena fase de ejecución, por lo que no ha sido posible evaluar los resultados obtenidos por la totalidad de los individuos que han recibido atención en el área.

Sin embargo, podemos mencionar que:

- se están realizando estudios de seguimiento a los estudiantes que han cursado Apoyo Instrumental
- en los Talleres dirigidos a docentes se aplican encuestas
- se dispone de algunas opiniones emitidas por estudiantes y de otras emitidas por docentes con respecto a los efectos que producen sobre ellos el trabajar en estrategias para resolver problemas.

Los estudiantes manifiestan que estos Talleres les sirven para lograr:

- Aprobar las asignaturas en que confrontan dificultades
- Cambios positivos en su forma habitual de estudiar
- Cambios positivos en el aspecto personal relacionado con el aumento de su motivación y su responsabilidad por los estudios,
- mejorar sus relaciones interpersonales y
- darse cuenta de sus recursos individuales.

Las opiniones de los docentes se resumen en las siguientes categorías:

UTILIDAD: Alto grado de aplicabilidad, tanto desde el punto de vista personal como el académico profesional. Fácilmente transferible lo aprendido a una asignatura específica.

PERTINENCIA: Satisface plenamente las expectativas. Coincide lo tratado con una preocupación que debe ser permanente en el docente.

MOTIVACION: Alta, pues es una excelente oportunidad de compartir experiencias con personas de otra formación.

NIVEL: Grado de conceptualización y profundidad de acuerdo al grupo. Necesidad de dedicar mayor tiempo para profundizar algunos aspectos teóricos.

RECOMENDACIONES

Las experiencias obtenidas nos inducen a listar las siguientes recomendaciones, (o mejor direcciones de trabajo) en relación al COMO desarrollar en los estudiantes habilidades para resolver problemas:

1. Crear en las diferentes instituciones grupos interdisciplinarios que estudien, bajo el eje curricular de solución de problemas: pensa de estudios, programas de asignaturas, estrategias docentes, sistemas de evaluación.

2. Incorporar a la enseñanza de asignaturas específicas del uso de algunas estrategias generales para resolver problemas.

3. Diseñar materiales educativos (guías, folletos, prácticas de laboratorio, textos, instructivos) que estén centrados en el uso de técnicas de procesamiento de la información.

4. Crear, de acuerdo a las necesidades, unidades dentro de un curso, o aún cursos, en el área de solución de problemas.

5. Evaluar, bajo esta óptica, los actuales logros institucionales, de cada carrera y cada materia.

6. Desarrollar proyectos de investigación en temas tales como:

   * Detección y análisis de las diferencias experto-novatos en el manejo de conceptos, resultados y/o procedimientos en el contexto de alguna asignatura.
   * Influencia del lenguaje (vulgar - técnico, escrito, hablado) en la comprensión y eficiencia para resolver problemas.
   * Diagnóstico, análisis y aprovechamiento, en el proceso de enseñanza, de los errores que comenten los novatos.
   * Posible aumento del rendimiento de los estudiantes por efecto del aprendizaje de estrategias.
   * Resolución de problemas en general y su comparación con algún contexto específico (Diseño de Arquitectura e Ingeniería, Toma de Decisiones en Gerencia, uso óptimo de capacidades y potencialidades en Administración de Personal, técnicas de Programación en administración docente y control de proyectos, etc.).
   * Efectos que se producen en ciertos grupos de estudiantes al usar materiales educativos con nuevos diseños.
   * Posibilidad de diseñar programas de asignaturas atendiendo a los nuevos enfoques de la psicología educativa (uso de: mapas de conceptos, organizadores avanzados, etc.).
   * Efectos que se producen en grupos de estudiantes al enseñar una materia poniendo como centro de interés algunas estrategias de procesamiento de la información.
   * Influencia en la capacitación del estudiante para resolver problemas, que tienen los textos actualmente en uso.
   * La formulación y reformulación de problemas como agente de aprendizaje de una materia.

REFERENCIAS

(Se listan según el orden en que fueron citadas)

[1] Polya, G. **Cómo Plantear y Resolver Problemas.** Trillas, México, 1969.

[2] Cruz, C. **Guía de Estudio para Matemáticas III.** U.C.V., Facultad de Ingeniería, 1980 (Mimeo).

[3] De Bono, E. **Método para Aprender a Pensar.** Ministerio de Estado para el Desarrollo de la Inteligencia, Caracas, 1980.

[4] **Apoyo Instrumental.** U.C.V., Facultad de Ingeniería (Programa de la Asignatura).

[5] **Curso Iniciación.** U.C.V., Facultad de Ingeniería (Programa de Curso).

[6] Cáceres R., Carrizales O., Cruz C., Itriago M. **Taller de Resolución de Problemas.** Facultad de Ingeniería U.C.V. y Colegio Univ. Francisco de Miranda, Caracas, 1986.

[7] **Solución de Problemas y Toma de Decisiones.** U.C.V., Vicerrectorado Académico, Sistema de Actualización Docente del Profesorado.

[8] Velásquez M., Cruz C., Magallanes A., Mijares L., Tossi M. **Taller de Resolución de Problemas para pequeños Grupos. Una Experiencia en el Servicio de Orientación de la Fac. de Ingeniería, U.C.V.** III Simposio de Enseñanza de la Matemática en Ingeniería, Caracas, Venezuela. Junio, 1987.

[9] Carrizales O., Cruz, C., Itriago, M. **Desarrollo de Destrezas Cognoscitivas. Un Area del Curso Introductorio de la Universidad Experimental de Guayana,** Caracas, 1987 (en preparación).

[10] Cruz C., Medina C., Saladino A, Sequera A. **Algunos Protocolos para Resolver Problemas y su Aplicación en Análisis Matemático I.** Tesis de Grado, U.C.V., Facultades de Ciencias e Ingeniería Caracas, 1986-1987 (en preparación).

[11] Lima de Sá, E. **Enseñanza de la Resolución de Problemas. Propuesta para un Curso.** 1ª Sesión del Seminario permanente sobre Enseñanza de la Matemática. Universidad de Carabobo, Julio 1983.

[12] Mayorga, A. **Efectos de las Sugerencias Generales versus las Sugerencias Específicas en la Solución de Problemas Algebraicos.** XXXIV Convención de ASOVAC, Cumaná, Venezuela, 1984.

[13] CENAMEC **Módulo Tutorial: "Resulución de Problemas"**, Caracas, 1986.

[14] Reverand, E. **Naturaleza del Error en la Solución de Problemas Algebráicos Literales.** U.C.V. Facultad de Humanidades y Educación (Tesis de Grado), Caracas, 1987.

[15] Meza, M. **Taller sobre Problemas y Otros Enunciados Usados en la Enseñanza de la Matemática.** U.C.V., Facultad de Ciencias (Tesis de Grado en preparación).

[16] **Seminario Nacional Permanente sobre Ensoñanza de la Matemática.**
1ª Reunión Univ. de Carabobo, Jul. 1983.
2ª Reunión U.C.V., Fac. Ingeniería, Oct. 1983.
3ª Reunión U.C.V., Fac. Ciencias, Dic. 1986.
4ª Reunión U.C.V., Fac. Ciencias, Abr. 1987.

[17] Harvard University & Bolt, Beranek & Newman, Inc. **Proyect Intelligence**, Ministry of Intelligence, Caracas, 1980.

[18] Cruz, C.
- **Resolución de Problemas.**
- **Un Problema Típico de Ingeniería.**
- **Palabras Claves en Resolución de Problemas.**
- **La Formulación de Problemas.**

(Charlas), Fac. de Ingeniería U.C.V., 1982-83.

[19] Anderson, J. **Cognitive Psychology.** Freeman and Compay, 1980.

[20] Perkins, D. **Problem Theory.** BBN, Inc. 1983.

[21] Schoenfeld, A. **Teaching Problem - Solving Skills.** American Mathematical Montly 1980, Vol. 87, N° 10, pags. 794-805.

[22] Sternberg, R. **De la Comprensión y el aumento de la Inteligencia.** Caracas, 1984.

[23] Torre, C. **Problem Solving and Decision Making.** Northeastearn Illinois University, Human Services Department, 1984.

[24] Newell, A. & Simon, H. **Human Problem Solving.** Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1972.

[25] Goldweiws, M. Merbaun, M. **Cambio de Conducta a través del Autocontrol.** U.C.V., Escuela de Psicología (Mimeo).

[26] Theoresen, C. Maboney, M. **Autocontrol de la Conducta.** Fondo Cultura Económica, 1987.

[27] Lombao, M. **Taller de Distribución del Tiempo.** U.M., Caracas, 1986 (Mimeo).

DESMI(S)TIFICAÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO PELA CONSTRUÇÃO DE LINGUAGEM E MODELOS MATEMÁTICOS - EXPERIÊNCIA E PRODUÇÃO DE MATEMÁTICA EN SALA DE AULA

Antonio José Lopes
Sociedade de Educação Matemática / Grupo de Pesquisa em Resolução de Problemas
São Paulo, Brasil

O ensino-aprendizagem da Matemática nos níveis primário e secundário tem sido objeto de investigações em todo o mundo contemporáneo e em especial na América Latina. Destas investigações destacam-se as que se referem à resolução de problemas.

Este artigo pretende resumir, com os perigos de simplificação que todo resumo implica, as principais colocações deste painel do qual participei como convidado da organização da 7ª CIAEM junto a tão ilustres painelistas.

Partimos do pressuposto de que o fundamental no ensino-aprendizagem da Matemática é a sua desmistificação: entendê-la como conhecimento a ser adquirido e enquanto conhecimento a ser produzido. Nossas investigações indicam que os alunos desmistificam a Matemática quando a produzem e quando a experimentam em todos os sentidos, nas suas certezas e nas suas dúvidas. Acreditamos que o ensino-aprendizagem da Matemática através da resolução de problemas pode criar as condições para isso. Desmistificando o conhecimento matemático, um dos maiores obstáculos à aprendizagem tem maiores possibilidades de ser removido.

Centramo-nos então no outro foco de nossa proposta: desenvolver no aluno uma autonomia em relação à construção do seu conhecimento.

Ao corpo de propostas e princípios que viabilizam estes objetivos chamaremos de **Experiência Matemática** na sala de aula.

O QUE É A EXPERIÊNCIA MATEMÁTICA?

O conceito de Educação Matemática aqui adotado é o que **Inre Lakatos** (1922 - 1973) desenvolveu em seu ***"Proofs and Refutations - The Logic of Mathematical Discovery"***. É em **Lakatos** que nos apoiamos na definição dos pressupostos teóricos, ao menos no que se refere à filosofia da Matemática. É com esse ***"olhar"*** que vamos abordar e reconhecer a Matemática produzida em aula.

Lakatos entende a Matemática não como um corpo esqueletizado, estático e fossilizado, mas "... ***A Matemática crescendo a partir de um problema ou uma conjectura, com uma teoria adquirindo forma perante nossos olhos, no calor do debate e da discordância, a dúvida cedendo lugar à certeza e em seguida a novas dúvidas...***". **Lakatos** mostra que a matemática, como as ciências sociais e naturais, é falível, não é indubitável. Uma demostração neste contexto de Matemática informal não significa um processo mecânico que transmite a verdade numa cadeia inquebrantável, das hipóteses até as conclusões.

NA SALA DE AULA

Segundo o conceito de Experiência Matemática aqui definido, os problemas, na sala de aula, surgen e se transformentada do sistema escolar, à divisão em níveis sucessivos, à divisão entre disciplinas e a um programa fixado (e filtrado) para cada uma delas. Reflete um tipo de hierarquização próprio do sistema educativo, remete a uma concepção de comunicação em que o adulto detém o conhecimento a ser transmitido a uma criança vazia, à idéia de que a aprendizagem reside na repetição e na memorização, conceitos que se contrapõem à exploração à compreensão, à criatividade e à construção.

Currículos fechados e livros texto, na sua tentativa de serem eficientes perante os sistemas que os mantêm, tendem a ignorar as experiências anteriores dos alunos. Seus objetivos e conteúdo fixados e padronizados desprezam o repertório lingüístico, valores e capital cultural dos alunos.

O "Currículo" da Experiência Matemática é a somatória das experiências dos alunos, vivenciadas numa dinâmica de provas e refutações, construção e desmontagem. O livro é substituído por um registro que sistematize essas experiências.

SISTEMATIZAR E RESOLVER PROBLEMAS:
DUAS FACES DA MESMA MOEDA

A sistematização e resolução de problemas não deveriam ser vistas de maneira estanque. A sistematização nesta proposta é a um mesmo tempo registro (história do processo), processo e produto (a parte visível do processo). A visão do problema, seu limite de validade e alcance, é ampliada quando os alunos desenvolvem hábitos de registro da história de sua exploração (pensamentos, estratégias, dúvidas, curiosidades). No problema do cálculo das diagonais de um polígono, por exemplo, observamos que certa regularidade e as leis que as regem só são perceptíveis a partir dos registros e esquemas gráficos que os alunos constróem. A obsolescência de uma estratégia como traçar e contar as diagonais, por exemplo, tambén surge do registro.

Com a sistematização, os alunos têm frente a seus olhos a evolução de seu conhecimento matemático e o de seus colegas. Da socialização e releitura do processo (individual e coletivo) surgem novas estratégias e problemas.

Do confronto com outras formas de sistematização os alunos criam e aperfeiçoam linguagem matemática, aprendem a extrair conhecimento de livros, tabelas, dicionários ou jornais.

AVALIAÇÂO: A 3ª FACE DA MESMA MOEDA

Os instrumentos de avaliação na Experiência Matemática se confundem com o próprio processo de ensino-aprendizagem. Estão nos variados procedimentos de sistematização, na geração de novos problemas e na mutação dos modelos construídos. Cabe aos alunos, durante o trabalho, avaliar o ritmo de sua produção, e a evolução individual e coletiva.

Porém é só a socialização do conhecimento Matemático produzida pelo grupo que determina o sucesso de uma auto-avaliação contínua. Nesta proposta o "exame (ou prova) com data marcada" nao tem significado. O objetivo é: criar condições para mam. Não cabe ao professor selecionar problemas a priori em detrimento de situações problematizáveis. Os alunos têm dúvidas, certezas, curiosidades e principalmente criatividade, é essa a matéria prima do trabalho. O professor é figura enzimática do processo. A ele cabe, entre outras funções, perturbar o sistema de dúvidas e certezas.

As fontes das situações problematizáveis são as mais diversas. Consistem basicamente no conjunto de experiências vividas pelo alunos, inclusive em sala de aula. Uma notícia de Jornal, a estimativa do custo de uma excursão, um problema de livro texto, um quebra-cabeça, um paradoxo, um jogo, o controle de uma conta bancária, são algunas destas experiências cotidianas geradoras de problemas que, por sua vez geram modelos, confrontados esses modelos com os problemas geradores, são então aceitos no seu limite de validade ou refutados e transformados.

Neste ambiente, toda proposição, hipótese ou conjectura, depois de sistematizada, pode ser verificada, confirmada ou refutada. Os erros assim como as leis e axiomas considerados irrefutáveis pelos adultos, são todos considerados **verdades provisórias** (Lopes, 1987).

A Matemática viva da experiência matemática se choca com a Matemática estática e burocrática dos livros texto e programas oficiais.

O conceito de currículo oficial (e os livros que nele se apóiam) traz dentro de si uma visão unilateral do que seja conhecimento, refere-se à organização burocrática e compartique os alunos se desenvolvam em toda a sua potencialidade, e não a adestrá-los a seguir um calendário de testes através dos quais serão premiados ou castigados com um número entre dez e zero.

EXPERIÊNCIA E PRODUÇÃO DE MATEMÁTICA

Por tudo o que expusemos até aqui, o ensino de Matemática através de resolução de problemas não tem como finalidade apenas solucioná-los. Muitos objetivos podem ser atingidos ao longo de cada experiência. Nelas podemos observar coisas comuns. Em especial a **Matemática produzida pelos alunos:** na criação de modelos, no levantamento de hipóteses, na criaçãode linguagem, na introdução e enfraquecimento de variáveis, na aplicação da matemática a situações conhecidas ou não, na generalização, na verificação dos resultados, na imposição de limites para as hipóteses ou leis gerais, na busca de sistemas análogos, na identificação de propiedades, na observação de regularidades, no errar e no acertar.

Ao conceito embutido neste ***fazer Matemático*** chamamos **Experiência Matemática.** Ela está em todos os lugares, em cada instante da relação professor-aluno-conhecimento.

Não vemos de maneira estanque, isolada, o resolver o problema, o se organizar, avaliar, etc... Não aceitamos a separação artificial entre resolução de problemas e modelagem ou história, conteúdo, etc... Consideramos esta proposta sob uma ótica externalista. Seu fim não está na solução do problema, no método mais adequado, na nota 10 em Matemática. A **Experiência Matemática** aqui discutida é a concretização de uma visão libertária de como construir conhecimento com o aluno e não por e para ele.

Acreditamos que essa visão sobre Educação, desenvolve autonomia e o famoso "***espírito crítico***" de que tanto se fala.

Resolução de Problemas para nos é **Experiência Matemática.**

ANEXOS

Muitos companheiros presentes na 7ª CIAEM me pediram que descrevesse algumas experiências com alunos dentro do ***"espírito"*** da Experiência Matemática. Seguem duas situações sistematizadas junto com os alunos.

1. "***Meia, Gavetas e Cinema***" é o retrato fiel de 60 minutos em uma 7ª serie (20 alunos com idades entre 12 anos e 8 meses e 14 anos e 4 meses).

2. "***As Diagonais***" é resultado de 90 minutos com um grupo de 28 alunos com idades entre 12 anos e 6 meses e 15 anos e 2 meses. (Há docuemtação sobre outros resultados obtidos com a mesma situação problema com alunos com idades entre 10 e 15 anos e 6 meses).

ANEXO I

MEIAS, GAVETAS E CINEMA

Vamos considerar um Problema bastante simples e conhecido:

- ***"Você tem que ir ao cinema. Haa... aquelas meias tão bonitas que estão na gaveta do quarto de papai... Chiii ele está dormindo. Você sabe que tem 8 meias vermelhas e 10 amarelas. Qual é o menor número de meias que você deve retirar da gaveta, sem ascender a luz, para ter garantido um par de meias da mesma cor?"***

Barulho, perplexidade na sala de aula, olhos que brilham, rabiscos, um chute ... e de repente a classe toda grita:

- *"TRES"*

- ***"Fácil, não acharam? – Bem, vamos a outro problema ..."***

- ***"Não... Não... E se na gaveta temos não 8 mas 16 meias vermelhas e 20 amarelas, ao invés de 10?"***

Um pouco de silêncio. Achavam que um problema que envolvesse meias, gaveta e cinema, não poderia ir muito além do anterior.

- *"Seis"* , arrisca alguém timidamente, mas logo se contém. Enfim o grupo rompe a insegurança e arrisca.

  "Também três"

conferem e validam suas próprias conclusões, se apoiando em desenhos de meias, coloridos e legendados.

O grupo gostou do desafio e logo toma a iniciativa das perguntas:

-***"E 30 vermelhas e 50 amarelas?*** arrisca um aluno.

- *"Tres"*, responde a maioria.

- ***"Se forem 300 e 500, também será TRES"*** conclui outro.

Logo, o grupo todo percebe que o número de meias para cada cor, não interfere no número de meias que devem ser retiradas da gaveta, satisfazendo as condições do problema inicial.

- ***"Ese na gaveta temos: 8 vermelhas, 6 amarelas e 10 azuis?"***

Pausa.

-***"Quatro"***

Logo alguém arremata.

- ***"Se na gaveta, tenho pelo menos 4 pares de cores diferentes?"***

- ***"Cinco"***, grita o grupo.

- ***"100 pares de cores diferentes?"***

- *"101"*

- ***"E se tenho 'n' pares de cores diferentes?"***
  pergunto eu.

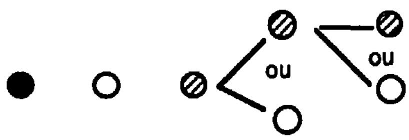
- ***"ene mais um"***, diz o grupo.

Escrevo "ene mais um", no quadro e proponho que simplifiquem, codificando, o que queriam dizer.

- *"n + 1"*, alguém escreve no quadro.

- ***"Mas e se no problema inicial, (8 vermelhas e 6 amarelas) quero 2 pares?"***

Exploram a solução, usam legendas:



Respondem:
- ***"Cinco"***

Logo, alguém introduz nova condição:

- ***"Se no caso anterior quero 2 pares, mas de cores diferentes, prá poder escolher o que melhor combina com meu sapato?"***

Novas explorações: os alunos vão ao quadro negro, fazem diagramas, exploram casos extremos, como por exemplo tirar as 6 primeiras meias da mesma cor.

- ***"Deve ser mais de 6, pois nesse caso tá garantido só um par de cada cor".***

- ***"As próximas duas meias devem ser da outra cor".***

- *"Mas se as 6 primeiras eram vermelhas, as próximas duas, também, podem ser vermelhas".*

Logo concluem que para garantir os dois pares de cores diferentes precisam de 8 + 2 = 10 meias.

CASO EXTREMO

Sugiro outras situações semelhantes, variando o n° de meias para cada cor. O grupo experimenta outros obstáculos, por exemplo:

Exigir 3 pares de meias, com cores diferentes, numa gaveta com meias de cores A, B e C.

n (A) = 8 n (B) = 10 n (C) = 14

A solução do problema acima não demorou a ser encontrada:

14 + 10 + 2 = 26 meias

Sugiro um tipo de generalização, crio com a contribuição dos alunos uma notação conveniente. A notação se torna necessária na dinâmica que imprimimos, como forma de uniformizar as várias legendas, tornando assim mais universal, ainda que local, e eficiente nossa comunicação

A B C

n° de meias para cada cor

n_1 n_2 n_3

Os alunos conseguem apresentar a solução, no caso de se querer 3 pares de cores diferentes. A solução é apresentada em várias versões, evoluindo do verbal ao codificado.

- *"E a soma do n° de meias dos dois maiores n°s. mais dois"*

- "$Max_2\ \{n_1; n_2; n_3\} + 2$" ou

- "$Max\{\{n_1 + n_2\}; \{n_1 + n_3\}; \{n_2 + n_3\}\}; + 2$"

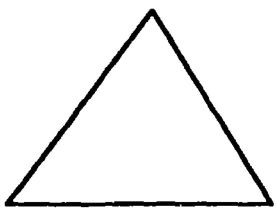
ANEXO II

AS DIAGONAIS

CENA I

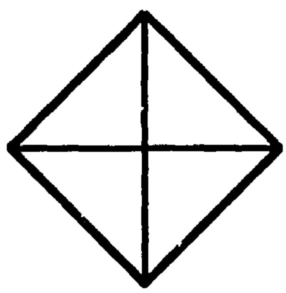
O que se pode dizer sobre o n° de diagonais de um polígono convexo?

O grupo explora, na maior parte das vezes desenhando.



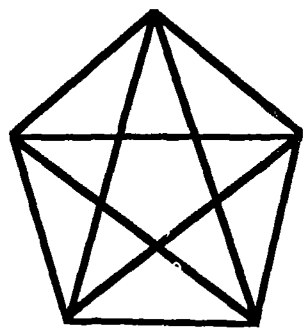
"o triângulo
nenhuma" ...

0



"o quadrilátero
duas"

2

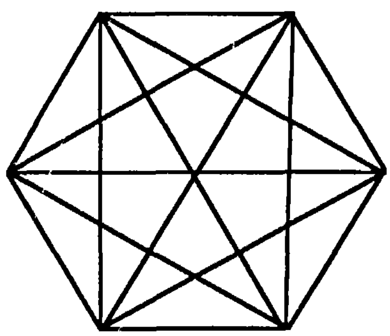


"o pentágono... epa.
vamos traçar contando ...
É isso. cinco".

5

O Hexágono

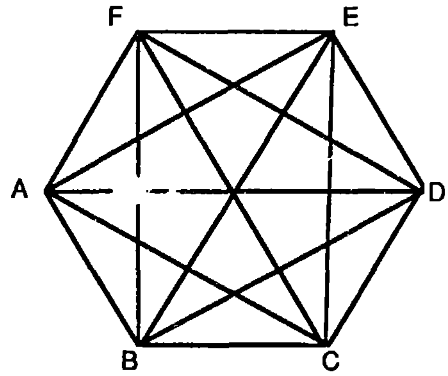
aluno **A**



contando ... um ...
dois ... oito

8

aluno **B**



de **A** saem
AE
AD > 3
AC

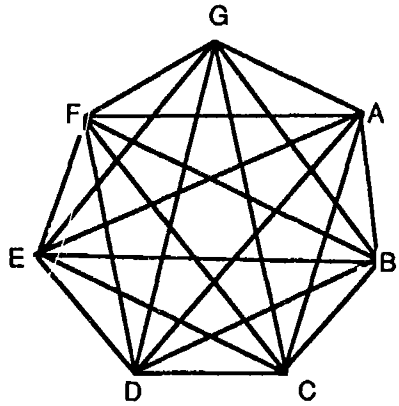
de **B** saem
BF
BE > 3
BD

e assim por diante, pronto.
Nove.

9

Algun conflito, quando os dois colegas checam seus resultados. O aluno **A** percebe que se perdeu ao traçar aleatoriamente as diagonais, enquanto o aluno **B** procurou organizar a maneira de traçar as diagonais.

O Heptágono.



Neste momento o aluno **A** procura usar o procedimento usado por **B** pois o considera mais adequado.

Começa a contar ... uma ... duas ... chiii ... (Os alunos perceben um complicante na hora de contar as diagonais do heptágono pra cima, devido à poluição visual) ... catorze.

Neste momento o grupo percebe que está diante de um problema. O procedimento adotado atè aqui - traçar e contar - apresenta-se como inadequado para determinar o n° de diagonais de polígonos de "n" lados para **n** $\geq$ 7.

O problema parece insolúvel, até que o Carlos discute com o grupo suas obsevações.

"Observem a tabela, em que d_n é n° de diagonais de um polígono de "n" lados.

$d_3 = 0$

$d_4 = 2$

$d_5 = 5$

ou

n	3	4	5	6	7	8
d_n	0	2	5	9	14	

+2 +3 +4 +5 então +6

deve ser 20

O modelo do Carlos (que chamaremos de mod. 1) de obsevar as regularidades é aceito por todos sem restrições, e tratam de completar a tabela.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
d_n	0	2	5	9	14	20	27	35	44	54	65	...

+2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 +10 +11 +12

Logo perceben que podem calcular o n° de diagonais de qualquer polígono convexo. Até que ... Rodrigo formula a seguinte obsevação:

"*O modelo* 1 *tem uma desvantagem pois para se determinar o n° de diagonais de um polígono de* n *lados, com* n *muito grande, será necessário calcular o n° de diagonais de todos os polígonos até* n-1".

"*Sim para calcular d_{100} precisam saber o valor de d_{99}*" observa outro aluno.

- Que mais vocês podem saber sobre d_{100}? pergunto

"d_{100} = d_{99} + alguma coisa. ... hum ... já sei quem é esse alguna coisa." diz Xanda, e vai ao quadro e escreve:

$$\boxed{d_{100} = d_{99} + 98}$$

"foi assim que aconteceu com o d_{10}, d_{10} = d_9 + 8 ou d_{10} = 27 + 8 = 35, podem verificar na tabela"

O grupo aceita as consideraçoes do Xanda, não sem antes verificar. Xanda arremata generalizando sua descoberta.

n - 1	n
dn - 1	dn

$\underbrace{\quad\quad}_{+(n-2)}$

então $dn = dn-1 + (n-2)$

O dilema persiste, de qualquer maneira para se calcular d_{100} é preciso saber d_{99}.

Neste momento o professor já se dá por satisfeito, o produto alcançado pelo grupo até ali já era muito bom e a Experiência Matemática na sala de aula se realizava.

Quando então surgiu o modelo 2 da Janaína.

Janaína explica suas observações na Tabela:

n	3	4	5	6	7	8	9
d_n	0	2	5	9	14	20	27
	+2	+3	+4	+5	+6	+7	

$d_9 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$

Pois vejam:

$d_4 = d_3 + 2 = 0 + 2 = 2$

$d_5 = d_4 + 3 = (0 + 2) + 3 = 2 + 3 = 5$

$d_6 = d_5 + 4 = (2 + 3) + 4 = 9$

$d_7 = d_6 + 5 = (2+3+4) + 5 = 14$

$d_8 = d_7 + 6 = (2+3+4+5) + 6 = 20$

$d_9 = d_8 + 7 = (2 +3+4+5+6) + 7 = 27$

"*então ...*

$d_{18} = 2 + 3 + \ldots 16$ *pois pela proposição de Xanda o último a ser somado é o n-2"* diz Paola.

Ah! Então $d_{100} = 2 + 3 + \ldots\ldots + 97 + 98$ - conclui outro aluno, o João.

Aqui o grupo considera que o problema está resolvido.

$$d_{100} = 2+3+\ldots\ldots + 97 + 98$$

O problema agora é calcular a soma .. $2 + 3 + \ldots\ldots + 97 + 98$

Este não é um problema difícil, pois os alunos já haviam trabalhado com Somas de Gauss, utilizando um artifício conhecido entre eles como fórmula do Pedro Ernesto (aluno da turma que conhecia uma fórmula parecida).

$$\begin{array}{r} 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + 97 + 98 \\ 98 + 97 + \ldots\ldots\ldots + 3 + 2 \\ \hline \underbrace{100 + 100 \ldots\ldots\ldots 100 + 100}_{98 - 1 \text{ vezes}} \end{array}$$

então: $d_{100} = \dfrac{100 \times 97}{2} = 4850$

O caso geral é resolvido usando o modelo 2 da Janaína, a fórmula do Pedro Ernesto e a observação da Xanda.

$$d_n = 2+3+\ldots\ldots(n-2) \quad *$$

$$d_n = \frac{(2+(n-2))\,(n-3)}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$* \quad \underbrace{2 + 3 + \dots\dots + n - 2}_{\underbrace{(n-2)-1}_{n-3\ \text{termos}}}$$

Tudo parecia terminado quando o Daniel apresentou o seu modelo, Mod. 3. Pedi a ele que ditasse para o grupo, depois que explicou no quadro.

Sesión de Preguntas y Respuestas del Panel B

A. Preguntas a Cipriano Cruz y respuestas a las mismas.

1. ¿Qué es un protocolo de solución de problemas y, en particular cuál es el protocolo de Polya?

Se da una descripción de los protocolos de Polya [1], Newell y Simon [24] y Teoría Triárquica de la Inteligencia [22].

2. ¿Cuál es la carga académica máxima que puede tener un docente para desarrollar en clases una técnica de enseñanza centrada en solución de problemas?

Desde luego cualquier "técnica heurística" demanda una gran cantidad de tiempo y concentración por parte del docente, pero los resultados que se obtienen compensan largamente los esfuerzos. Es difícil dar reglas al respecto, pues las realidades locales son variadas y las circunstancias extra-académicas imponen exigencias al docente más altas que las que, con real eficiencia puede atender.

3. ¿Es posible transferir los conocimientos y/o las habilidades operacionales a "las demostraciones?

Creemos, firmemente, que una enseñanza centrada en solución de problemas produce una real capacitación del individuo y que, en consecuencia, el problema (siempre latente) de la transferencia del conocimiento a otros temas se resuelve por esta vía.

4. ¿Qué tipo de materiales se usan en los Cursos Introductorios?

Se han usado materiales escritos especialmente para el Curso (los cuales se encuentran en la sala de exposiciones de la Conferencia), bajo la modalidad de "Módulos", y materiales visuales (transparencias) para las clases teóricas. Cada alumno dispone de los módulos pues ellos contienen la exposición teórica, la metodología de trabajo y los problemas que se deben resolver.

5. Independientemente a lo que dice Polya y las modificaciones piloto hechas por la Universidad Central de Venezuela, ¿creen ustedes que el alumno aprende más fácil Matemática, conociendo las reglas antes o después del problema?

Es posible que la velocidad de la palabra y de las presentaciones, produzcan este tipo de fenómenos. Creo que dije, que la regla no está antes sino después y está reelaborada por el estudiante. Cuando presenté el esquema de Polya, es para que lo conozcan, los que no lo conocen; pero el estudiante llega a conocer por la vía heurística la metodología de Polya; a conocer por la vía heurística un estilo de trabajo. No es presentando el modelo, sino el problema es el que genera un estilo de trabajo. No es presentando el modelo, sino que son los problemas los que van generando la necesidad de adoptar algunas estrategias de trabajo, es decir, lo que llamé antes la receta es de alto nivel, no ha sido dada de entrada, sino la consecuencia natural de la necesidad que tenemos los seres humanos de hacer algo cuando tenemos dificultades.

B. Pregunta a Antonio José Lopes y respuesta a la misma.

¿Puede usted presentar, a través de un ejemplo detallado, el punto de vista que usted ha presentado sobre cómo desarrollar en los alumnos habilidades para la resolución de problemas?

Con respecto a esta pregunta ver ejemplos sobre "Las Diagonales" y "Las Medias" en mi trabajo expuesto en este panel.

C. Pregunta a Luis Puig y respuesta a la misma.

Trabajo en inteligencia artificial (área informática). Me interesa saber de qué forma influye el humano al resolver un problema que no tiene estrategia definida. ¿Ve el contexto, no particularidades, como la computadora? ¿De qué manera influye eso con la heurística o con la metodología que se presenta?

El problema fundamental que hay en la investigación de problemas respecto a la inteligencia artificial, es que se ha utilizado el modelo del computador como un modelo de la inteligencia humana. Y los procedimientos que se utilizan en la inteligencia artificial para la resolución de problemas, difícilmente se puede decir que se correspondan con los procedimientos que usan los humanos. Las personas cuando trabajan sobre un problema producen sentidos, en cambio, las máquinas son sintácticas. Hay una diferencia bastante grande. He dicho durante estos días, que lo importante para entender la resolución de problemas, es que el objetivo no es tener éxito, encontrar el resultado del problema, sino aprender cosas a lo largo del proceso, y esto, aprender cosas, se puede describir diciendo que cuando una persona tiene un problema, hay una situación significativa que desea afrontar y para la cual no ha producido sentido. Esta es una definición que sirve para pensar en ella. Si esta definición tiene sentido, hay cosas como el deseo, que no están en el computador por el momento. La producción de los sentidos es característica de los humanos.

D. Pregunta a Rodney Bassanezi y respuesta a la misma.

Mi pregunta está relacionada con el problema de la transferencia. Mi experiencia me la ha dado la enseñanza de Cálculo. Hay un problema con los modelos matemáticos desarrollados y en aplicación, más bien con las estrategias para resolver problemas de Cálculo. ¿Cómo hacer las clases, para que éstas se constituyan en modelos matemáticos que puedan ser aplicados a cualquier situación en la escuela o fuera de la escuela?

El problema es que para enseñar la Matemática, hay que aprender Matemática. Yo creo que haciendo los problemas se aprende Matemática y haciendo Matemática se piensa mejor en los problemas. Entonces hay que hacer ambas cosas. Depende del curso, si es regular o fuera de programa. Si es regular, debemos tener experiencia en el modelo para abarcar otros cursos. Si es de otro tipo, como por ejemplo, de especialidad, debemos ofrecer la experiencia de acuerdo a la necesidad y al medio.

E. Preguntas generales para todos los panelistas y respuestas a las mismas.

1. ¿Creen ustedes que el bajo nivel en Matemática puede influir negativamente en el aprendizaje de la Física?

Cipriano Cruz:

Bueno, la respuesta es muy simple. La generalizo. Yo diría que el bajo nivel en Matemática puede influir negativamente en el aprendizaje, sin apellido, sin un contenido específico y creo que la respuesta es directa. Pienso que sí, definitivamente sí. Ayer en mi intervención hablaba de que uno de los objetivos que debe perseguirse cuando se enseña resolución de problemas es desarrollar características de líder en el individuo. Y si es éste el propósito, el querer formar "individuos líderes", entonces, el individuo bien preparado que llegue a líder estará en condiciones de rendir en cualquier terreno.

Antonio José Lopes:

Acredito que o baixo nível em Matemática afeta não só a aprendizagem da física mas também de outras disciplinas como a língua (o português no caso do Brasil). Creio que o baixo nível nas outras disciplinas também influi negativamente na aprendizagem da Matemática.

Luis Puig:

El bajo nivel en cualquier cosa, influye en el aprendizaje de cualquier otra cosa, y me parece importante decir esto, porque los profesores de Matemática hemos creído durante mucho tiempo y seguimos creyendo, incluso en la sociedad y en el sistema escolar, que las Matemáticas juegan un papel privilegiado en el conjunto de las enseñanzas que hay que recibir en la etapa de escolarización obligatoria, y quizás este papel deberíamos dejar de tenerlo o sería muy bueno, que dejáramos de tenerlo. Para hablar del caso concreto de la Física, es una tradición que los profesores de Física en secundaria, por formación, acusan a los profesores de Matemática de ser incapaces de tratar determinadas cuestiones porque ellos no han hecho antes lo que deberían haber hecho. Yo creo que hay una respuesta muy simple que darle a los profesores de Física: "Bueno, háganlo ustedes". La mayor parte de los conceptos de Matemática que hoy día necesitan los físicos pueden tratarlos los físicos y darles un sentido, incluso mucho mayor, al que se le da en las aulas de Matemáticas.

2. Es muy importante "conducir " a los futuros profesores a adquirir ese estilo heurístico del que Luis Puig habló. ¿No consideran ustedes también que <u>además</u> es importante ayudarlos o enseñarlos a plantear claramente esos problemas, ya que en la vida real no se presentan en forma muy clara?

Luis Puig:

Sí, se pueden decir más cosas. El único problema está en el planteamiento. Lo que pasa es que hay que presentar en clases situaciones problemáticas, entendiendo por esto algo más amplio que el contexto tradicional que se tiene del problema, y entender que la primera tarea que hay que resolver es formular las preguntas que hacen capaces a los alumnos de construir esas situaciones problemas. No creo que hay que enseñar a clarificar las situaciones oscuras, sino que tienen que ser los propios alumnos que sean capaces de buscar las preguntas a las situaciones que deben responder. Este es todo el problema de las variables afectivas de las que no se ha hablado.

Antonio José Lopes:

Sí, pero no se trata simplemente de ayudarles a plantear claramente sus problemas, sino se trata de que los maestros desarrollen su visión de la ciencia, la historia, la educación. Esto se descuida en la formación de los maestros. Los maestros deben hacerse conscientes de la importancia de plantear problemas relacionados con el mundo y la ciencia. No se trata de proponer técnicamente actitudes o estrategias para trabajar en el aula, se trata de discutir con ellos cómo es el niño que tienen al frente, cómo es su desarrollo físico y emocional, cómo vive el niño. Estas reflexiones sobre el niño en el aula, en la escuela, en la sociedad no están separadas.

Rodney Bassanezi:

El problema es muy interesante. Pero, ¿cuántos de nosotros encontramos problemas similares en nuestras vidas a los que generalmente planteamos en las clases de matemática? No he visto ningún problema planteado por los propios alumnos. Son problemas que les presentan los profesores a los alumnos. ¿Cuántos de nuestros alumnos que estudian Matemática serán matemáticos? ¿Cuántos alumnos entrarán a la enseñanza superior? No pretendo hacer una apología de la Matemática aplicada. La Matemática es importante por la propia Matemática. Cuando un niño pregunta: ¿Para qué sirve esto? La respuesta es casi siempre la misma: más tarde lo verá. Recordemos las palabras de un gran matemático americano: "La buena Matemática es aquella que puede ser aplicada".

Cipriano Cruz:

Desde luego, en tal caso estaríamos hablando de lo que se ha dado en llamar los "problemas no estructurados" y, en nuestros cursos dedicamos una parte a tratar lo que denominamos formulación de problemas, en donde pretendemos cubrir este aspecto (ejemplo de esto se pueden encontrar en la obra que aparece en la cita [18] de mi ponencia).

Antonio José Lopes:

Yo no concuerdo con la tendencia de clasificar problemas por su grado de importancia para los niños. Es muy peligroso. Hay algunas perturbaciones en Brasil, hay una Matemática para los niños ricos y otra para los niños pobres.

Poseo una centena de problemas planteados por los niños. Hay desafíos y problemas matemáticos que ellos encuentran en su vida. No pretendo que sean matemáticos profesionales y que valoren más los problemas prácticos de los que no lo son. Estos son problemas y desafían su pensamiento, lo que es importante para su desarrollo.

3. A los alumnos les interesan problemas que a ellos se les presentan, más que los que el profesor plantea. ¿Y entonces? ¿No consideran ustedes que también es conveniente que ellos aprendan a plantear y resolver lo suyos, haciendo una enseñanza más personalizada y auténtica?

Luis Puig:

Sí, pero no todo es tan sencillo. En realidad en la escuela y en el aula, dentro del sistema escolar, los alumnos saben exactamente que no están ahí para divertirse. Sus problemas los tratan en otra parte, los tratan fuera de la escuela. En la escuela hay que ampliar el campo de preguntas y problemas, incluyendo aquellas que los alumnos se hacen a partir de los suyos, ya sea intereses de los alumnos, y de los profesores, intereses de la sociedad expresados en el currículum de Matemática en particular, objetivos generales que persigue el currículum, intereses de los distintos grupos sociales que están en conflicto en este momento y que se expresan por el poder que posean en la sociedad; y además hay que buscar una pista de encuentro de estos intereses en el caso de Matemática, ya que existe una zona de encuentro de intereses matemáticos en relación a nosotros. Es gratificante decir: "Vamos a hacer lo que los alumnos quieren", por supuesto, todos queremos, pero es mentira. Aparte de lo que los alumnos quieren hay más intereses en conflicto y es el conflicto de todos ellos, el que hay que intentar solucionar, es difícil.

Antonio José Lopes:

Sim, em minha opinião esta proposição é uma consequência natural da proposta de **Experiência Matemática.**

4. A propósito de la justificada crítica que Luis Puig hizo de la metodología de Polya, ¿qué metodología esquemática para resolver problemas propone usted? ¿No es contradictorio proponer una metodología X y tener como objetivo que cada individuo cree su propio estilo para resolver problemas?

Luis Puig:

Hay una cosa que deseo explicar. No quiero decir que la metodología de Polya sea errónea. Lo que he dicho es que el modelo de Polya es la descripción de la solución ideal de un problema. Lo que es erróneo, desde mi punto de vista, es utilizar una cosa que entiendo como la prescripción de lo que hay que hacer. Considero que la obra de Polya es fundamental para entender lo que pasa en la resolución de problemas, pero sabiendo que lo que hay ahí es un modelo ideal. A la pregunta de qué metòlogía esquemática propongo, el problema fundamental es que no puedo contestar con un esquema y a lo largo de las sesiones realizadas (domingo, lunes y martes) he intentado dar algo no esquemático, sino el estilo de la metodología. La metodología se trabaja en clase, no puede ser esquemática, sino un método de enseñanza más que una descripción paso a paso para resolver un problema.

Antonio José Lopes:

Não proponho nenhuma metodologia esquemática. O conceito que atribuo à **Experiência Matemática** é incompatível com receituários ou qualquer tipo de esquemas frios rígidos e mecânicos que tendem a fazer de metodologias novas mercadorias. Em nossa proposta de desmistificar o conhecimento matemático criando matemática, como formula Impe **Lakatos**, o aluno desenvolve naturalmente seu estilo e sua autonomia.

Cipriano Cruz:

Mi respuesta es breve. Ya presenté tres metodologías en las que estamos trabajando y hay otras. No es que sean las mejores. Debemos conocer los resultados de la experiencia, están aún en fase de experimentación. Además, para esto, existen caracterizaciones particulares que debemos tomar en cuenta.

5. Para desarrollar la habilidad de resolver problemas, ¿qué se ha hecho con los alumnos de educación pre-escolar, primaria, secundaria y bachillerato? ¿Cómo se maneja la continuidad de un nivel con respecto a otro? ¿Qué se ha hecho para preparar a los maestros?

Antonio José Lopes:

O trabalho que descrevo aqui está investigado e desenvolvido com alunos entre 10 e 15 anos. Quanto ao trabalho de formação dos professores o consideramos fundamental. A fim de multiplicar esta proposta, organizamos no Brasil um calendário de cursos, conferências e oficinas de trabalho. Estimulamos a organização de grupos autônomos de investigação e estudo (3 a 6 Professores) e damos orientação e acompanhamento.

Em geral nos cursos, de 30 a 40 professores e entre 20 e 80 horas simulamos situações vivenciadas pelos alunos e problematizamos (desequilibramos) durante as atividades, destacando: estratégias, aspectos teóricos, obstáculos, etc...

Finalmente procuramos criar condições para que o professor transforme sua visão sobre Educação e Matemática refletindo sobre as condições sociais, políticas, psicológicas e filosóficas que influem na relação ensino-aprendizagem.

Cipriano Cruz:

La pregunta se refiere a los esfuerzos que se han hecho para desarrollar habilidades o cómo enseñar resolución de problemas en los niveles de pre-escolar, primaria, secundaria y bachillerato. Yo no trabajo en esta área. Conozco lo que se hace en Venezuela en el Centro

Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia. Hay un módulo tutorial, que se ha escrito para maestros de 7° grado. Dejaré la dirección. Es una alternativa de trabajo.

6. Lo que se ha desarrollado hasta hoy, es cómo crear habilidades en los estudiantes para resolver problemas en el área de Matemáticas y veo que cada uno de los expositores presenta una manera diferente. Entonces mi pregunta es: ¿Lo primero que habría que hacer es determinar la situación social en que viven los estudiantes en determinada área, para luego desarrollar qué tipo de habilidades hay que crear para el área en que viven los estudiantes? ¿Hay una Matemática para estudiantes pobres y una Matemática para estudiantes ricos?

Rodney Bassanezi:

Recuerdo que, en mi país, es un problema muy serio la inflación y la deuda externa. Nosotros debemos 110 billones de dólares. Debe ser un problema para los alumnos también. Entonces necesitamos saber qué significa deuda externa, si es posible pagar esa deuda, cómo estamos pagando esa deuda. Ese es un problema nuestro y no el de otro país tal vez. Entonces, cada problema tiene su localización y en este sentido es que motiva a enseñar Matemática. Somos profesores de Matemática y nuestro objetivo es transferir nuevos conocimientos de Matemática. Debemos hacerlo de la mejor manera posible. Me disculpan los colegas por estar siendo un poco radical al decir esto, pero estamos acostumbrados en nuestros países, cuando hacemos negocios pedir un precio muy alto, para llegar a la mitad. Tal vez, esto también sucede con la educación.

Cipriano Cruz:

Mi interpretación es que, más que una pregunta, es una inquietud compartida y a propósito de esta inquietud, uno podría ver dos versiones importantes. No olvidemos que el problema social tiene sus dimensiones. Si me refiero a lo social, me estoy refiriendo a lo nacional o a lo internacional, al contexto de Latino-América. Ese estudiante que tenemos al frente, además, tiene otra dimensión de lo social, que es su propio núcleo familiar, el barrio donde vive, sus condiciones ambientales, etc. Entonces, es muy amplio lo que podemos hacer. Posiblemente para dar respuesta, habría que pensar a nivel nacional. Por ejemplo, podríamos plantearnos algunos problemas, tales como, si decidiéramos pagar la deuda externa en monedas de 5 centavos, qué altura tendría la columna, pero si pensamos a un nivel más local, familiar del estudiante, debemos pensar cuáles son las motivaciones que él tiene para salir de su estado de incompetencia frente al sistema educativo.

Antonio José Lopes:

Nuestras propuestas no son sólo para los profesores de Matemática, sino para los educadores en general, una visión más amplia. Hablo en mi país de que debemos hacer que los maestros dejen de ser funcionarios públicos, cumplidores de tareas para el estado, y que se comporten como educadores. Luego hay que poner como primera condición que el trabajo tenga éxito. No pensando dónde trabajo. Cuando propongo construir la Matemática a partir de los intereses del niño, estoy haciendo eso. Por ejemplo, habían elecciones en el pasado año. Los niños eran invadidos con los programas de televisión y diarios de los adultos. Comenzamos a partir de ahí a hacer algunas investigaciones, con trabajos de estadística y probabilidad. Eran niños de 12 años. Otros, se preocuparon por la variación del precio de la goma de mascar. Visitaron diversos supermercados y desarrollaron modelos relacionados con la variación de precios. Otros se interesaron por juegos que habían en algunas tiendas. Comenzamos a hacer nuestros propios juegos. La situación del juego no está relacionada con la resolución de problemas sociales, esto es aparente, pero partimos de aquí para hacer Matemática. Cuando hablo de la realidad, estoy hablando de esto y de las condiciones sociales en que viven. No pretendo que los niños aprendan Matemática para cuando van a comprar un producto o van a calcular su salario, estoy intentando desarrollar una reflexión que va más allá de eso.

Luis Puig:

Lo único que se podría añadir a lo más importante que ya se ha dicho es que a lo mejor, este estilo heurístico es transferible a otro ámbito de problema distinto del matemático y puede servir para que los alumnos enfrenten de otra manera al mundo real. No está muy claro, pero posiblemente sucede.

7. Luis Puig acaba de decir que lo que se aprende en estas clases, se puede transferir a otras partes. Lo que le preguntaría es: ¿Lo que se aprende en estas clases se puede transferir a otras clases de Matemática? Hay problemas muy bonitos (el de las puertas y otros), pero yo dudaría que muchos de mis colegas matemáticos podrían resolverlos inmediatamente. De hecho, no tendrían el espíritu heurístico y los dejarían de lado inmediatamente. Mi pregunta es: ¿Si esto incide en el aprendizaje real de los cursos de Matemática?

Luis Puig:

Habría que preguntarse primero: ¿Qué es un curso de Matemática? ¿Esto es para ver si se transfiere al curso de Matemática o no? Lo que pasa es que es más complicado. Por ejemplo, yo tengo pequeña evidencia de determinados ambientes de clases, donde se hacen Matemáticas, incluso Matemáticas estándar, en que profesores y alumnos trabajan de esta manera y hacen posible que se aprendan conceptos, estructuras conceptuales, hechos o modismos, etc. a los que llamamos "matemáticos". Una de las cosas que suceden es que hace falta que la relación en la clase entre profesor y alumno en general, haga posible que este tipo de trabajo, sea considerado como trabajo matemático. Esto acontece a menudo en el nivel de formación de profesores donde trabajo. La primera parte del curso consiste en "olviden ustedes cómo han estado trabajando hasta la fecha". Si no se crean unas nuevas reglas de trabajo en la sala de clase, algunos didactas le llaman el contrato didáctico entre profesor y alumno, este procedimiento no funciona, ya que los alumnos no quieren hacerlo, no les parece que es lo que se espera de ellos. Hay otra cosa que tengo que decir, he intentado establecer de alguna manera el estilo, el método de enseñanza por diagnóstico con el estilo heurístico. Estamos intentándolo, pero no está muy claro que lo consigamos. Si somos capaces de tomar ambas cosas, entonces la respuesta sería que sí. Lo que no está claro es que seamos capaces de hacerlo. Probablemente no, pero eso significa que nos equivocamos nuevamente.

8. ¿Se lleva un registro del proceso en la solución de problemas? Otra pregunta es un asunto de forma: resolución y solución de problemas, ¿existe alguna diferencia en esta terminología que utilizan?

Antonio José Lopes:

Uso el término de resolución de problemas para abarcar todo lo que se dice en solución de problemas. No hago separación. Poseo descripción y fechas de lo sucedido. Registro los pasos de un problema a otro y la descripción de las dificultades encontradas. Es importante ya que el estudiante puede reflexionar sobre su propio proceso. Cuando el estudiante compara su descripción con la descripción de otro compañero puede reflexionar sobre su punto de vista con el del otro. Las descripciones de los niños muestran a lo que ellos le dan más importancia.

PANEL C: *Usos Innovadores de las Calculadoras y las Computadoras en la Enseñanza de la Matemática*

Coordinador: *Asunción Comas*

USOS INNOVADORES DE LAS CALCULADORAS Y LAS COMPUTADORAS EN LA ENSEÑANZA MATEMATICA

Jorge López
Universidad de Puerto Rico
Río Piedras, Puerto Rico

A pesar de que calculadoras y computadoras tienen un uso extenso en la sociedad, sus aplicaciones a la educación matemática han sido muy limitadas. La discusión de la calculadora y la computadora como instrumentos educativos revisten consideraciones esencialmente diferentes. Por tal razón estimo que se serviría mejor el propósito de este panel si las discutimos separadamente.

Calculadoras

La pedagogía matemática, luego de más de dos décadas de la aparición de la calculadora electrónica, aún no ha integrado de una manera honesta la presencia de este instrumento de cálculo. Si uno da un vistazo a los "nuevos" libros de texto de matemática, se podrá percatar de que los llamados "ejercicios de calculadoras" no son sino "más de lo mismo", es decir, los mismos tipos de ejercicios de siempre en los que los números envueltos son "más complicados" en la medida en que los cálculos matemáticos necesarios resultan más difíciles. La calculadora se utiliza a duras penas para estimular el pensamiento o la imaginación del estudiante, concibiéndose la misma como un instrumento "triturador de números", únicamente útil para el cálculo matemático. Curiosamente, el estudio de ciertos aspectos del **caos**, una de las áreas de más ebullición de la matemática contemporánea, germinó como consecuencia de las investigaciones informales que un ilustre físico realizó mientras "jugaba" con una calculadora electrónica. La calculadora apenas se utiliza en el salón de clases como un laboratorio para la experimentación matemática o como un instrumento utilizable para escudriñar y descubrir patrones y relaciones numéricas en escenarios matemáticos. Nuestra imaginación como maestros ha sido tan pobre en lo que se refiere al uso de la calculadora en el aprendizaje matemático, que hemos permitido que nuestros prejuicios nos muevan a rechazar o recibir friamente la calculadora en el salón de clases. Un caso ilustrativo que muestra el desatino que puede tener un maestro al juzgar la eficacia pedagógica de la calculadora lo muestra la situación que actualmente prevalece en los Estados Unidos de Norteamérica. El National Council of Teachers of Mathematics (Concilio Nacional de Maestros de Matemática) en un memorando fechado en abril del 1974 y titulado A Position Statement on ... Calculators in the Mathematics Classroom (Una toma de posición sobre las calculadoras en el salón de clases) presentó una lista de recomendaciones específicas para integrar la calculadora electrónica al currículo escolar. En este documento se recomendó entusiastamente la integración de la calculadora a los programas de matemática de todos los niveles educativos, tanto para el trabajo en clase, las tareas escolares a realizar en el hogar y la evaluación del aprendizaje. Se argumentaba que el tiempo liberado en la instrumentación de algoritmos numéricos con papel y lápiz se podría utilizar más provechosamente para estudiar estrategias para la resolución de problemas y ayudar al estudiante a entender mejor los conceptos matemáticos. El énfasis, se decía, debía ser en los procesos para la resolución de problemas y no en los cálculos envueltos. Se recomendó a los publicadores, autores y redactores de pruebas que integraran completamente la calculadora a los materiales matemáticos de todos los grados y todos los niveles.

Los maestros de matemática, sin embargo, no cerraron filas con el Concilio Nacional ya que la realidad prevaleciente evidenciaba que un gran número de educadores abrigaban profundas reservas sobre las directrices presentadas en el memorando. Quizá por tal razón la década que siguió a la presentación del memorando fue rica en investigaciones que estudiaban los efectos que las calculadoras tenían en el aprendizaje de las destrezas matemáticas y las actitudes de los estudiantes. En el 1986 Ray Hembree y Donald Dessart publicaron un artículo titulado Effects of Calculators: A Meta-Analysis (Los Efectos de las Calculadoras: Un Meta-Análisis) en la revista *Journal for Research in Mathematics Education*. En el mismo los autores utilizaron el método estadístico del Meta-Análisis para resumir coherentemente el resultado de 79 estudios que comparaban el progreso de un grupo experimental que utilizaba calculadoras en la clase de matemática con la de un grupo similar que estudiaba el mismo material sin utilizar calculadoras. Los estudiantes considerados abarcaban los niveles educativos del Kindergarten al grado doce. Algunos de los resultados obtenidos por Hembree y Dessart sorprendieron a muchos. He aquí algunas de las conclusiones:

1. "En los grados K-12 (con la excepción del Grado 4) los estudiantes que utilizan la calculadora en combinación con la instrucción tradicional, pueden mantener sus destrezas de papel y lápiz sin sufrir daño alguno aparente. En efecto, el uso de la calculadora puede mejorar las destrezas de papel y lápiz del estudiante promedio, tanto en las operaciones básicas como en la resolución de problemas".

2. "El uso sostenido de la calculadora por los estudiantes de Grado 4 parece ser contraproducente en lo que se refiere al aprendizaje de las destrezas básicas".

3. La utilización de la calculadora en pruebas produce puntuaciones de aprovechamiento mucho más altas que las que se consiguen utilizando sólo papel y lápiz, tanto en las operaciones básicas como en la resolución de problemas. Esta conclusión aplica a través de todos los grados escolares y todos los niveles de habilidad. En particular, en el área de la resolución de problemas, la misma aplica a los estudiantes de más alta habilidad así como a los de más baja habilidad.

4. El mejoramiento general en el aprovechamiento parece ser el resultado de la mejorada capacidad de los estudiantes para realizar sus cálculos matemáticos y escoger adecuadamente los procesos a seguir en la resolución de un problema.

5. Los estudiantes que utilizan la calculadora, a diferencia de aquellos que no lo hacen, muestran una mejor actitud hacia las matemáticas y un renovado auto-concepto en las matemáticas. Esta conclusión aplica a través de todos los grados escolares y todos los niveles de habilidad.

6. Los resultados obtenidos con estudiantes que siguen currículos especiales, parecen indicar que es posible desarrollar materiales y métodos para mejorar los niveles de aprovechamiento a través de la enseñanza orientada hacia la utilización de la calculadora. Sin embargo, este tipo de instrucción especial ha recibido poca atención por parte de los investigadores.

7. La pregunta relevante no parece ser si debemos utilizar la calculadora en la enseñanza de las destrezas básicas, sino más bien cómo debemos utilizarla.

Así pues, excepto en el caso de los estudiantes de Grado 4 que aprenden destrezas básicas, las calculadoras no deben ser un motivo de preocupación, sino más bien instrumentos que sirven para enriquecer y mejorar las destrezas de los estudiantes, su habilidad para resolver problemas y su actitud hacia las matemáticas. Aún en el grado 4, la calculadora se puede utilizar de manera ingeniosa para que los estudiantes memoricen de manera más expedita las combinaciones de la multiplicación. En esta intervención incluímos un ejemplo de una forma ingeniosa de utilizar la calculadora para que los estudiantes del tercer grado memoricen los datos básicos de la suma; la actividad está tomada del libro de Matemática para la Familia (p.236).

Los niveles educativos superiores, donde típicamente se utiliza la calculadora electrónica para efectuar cálculos complicados, han experimentado muy pocos cambios, tanto metodológicos como de contenido, en lo referente a la enseñanza matemática con la ayuda de la calculadora. Por ejemplo, los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones brilla por su ausencia en los cursos avanzados de los niveles educativos pre-universitarios. Esta circunstancia prevalece a pesar de que el método de Newton se puede presentar utilizando derivadas formales, sin necesidad de tener que montar toda la infraestructura que supone el Cálculo. Además, los textos de precálculo aún conservan el fósil pedagógico de la interpolación lineal para la enseñanza de la trigonometría y los logaritmos. La aproximación numérica mediante la calculadora electrónica debe ser un ingrediente primordial en la enseñanza de todos los cursos matemáticos de contenido computacional.

Computadoras

La computadora aún no ha visto su mejor momento en la enseñanza matemática. Como es harto conocido por todos, la mayoría de los programas educativos para computadoras deja mucho que desear por circunscribirse a la consabida práctica rutinaria de las destrezas matemáticas de siempre. Desde luego que si el fin de la educación matemática consistiera en lograr el dominio de tales destrezas, entonces la mayoría del software educativo disponible podría quizás pensarse adecuado. Sin embargo, la mejor parte de la matemática (lo que algunos insisten que no se puede enseñar a fin de cuentas), aquello de la matemática que tiene que ver con la matematización de situaciones, es decir, con el proceso de dotar de contenido matemático a situaciones que a priori no lo tienen, apenas se atiende con el software educativo de hoy día. El computador en la matemática se podría utilizar como un instrumento útil para la investigación de patrones y relaciones numéricas, de manera análoga a la forma en que se puede utilizar una calculadora electrónica para tales fines. Además, las simulaciones en el computador de situaciones "reales" controladas pueden ser de gran utilidad al estudiante que necesita entender situaciones difíciles. Por ejemplo, las simulaciones del computador pueden ser muy efectivas para lograr el entendimiento cualitativo de procesos complicados que dependen de dos o más variables. Hay programas de computadoras muy útiles en la enseñanza de "cantidades intensivas" como lo son la densidad y la velocidad. No podemos exagerar la importancia de este tipo de entendimiento cualitativo de los procesos matemáticos; en efecto, quizás la mejor medida del entendimiento matemático es la habilidad que desarrolla un estudiante para discurrir cualitativamente en situaciones numéricas abstractas. Desde luego, este no es el tipo de destreza que se desarrolla puntualizando la aplicación de algoritmos numéricos instrumentables con papel y lápiz, con una calculadora o con el computador. Todo lo contrario, el énfasis en el cómputo matemático como un fin en sí mismo impide el desarrollo de este tipo de habilidad matemática.

Los primeros intentos por desarrollar programas educativos para la computadora partían del supuesto (que reflejaba una fe desmedida e irreal en las posibilidades inmediatas de la nueva tecnología) de que la computadora había sentenciado a muerte al maestro del salón de clases. Se pensaba que el estudiante aprendería sentado frente a un computador y que el maestro terminaría por ser algo así como un administrador o guía que dirigiría la atención del estudiante a los programas educativos necesarios. Hoy día hemos atemperado nuestras expectativas de la computadora a las realidades observadas durante las últimas dos décadas. Los programas que más éxito han tenido en la educación matemática son programas de "utilerías" o "herramientas" que sirven al estudiante para descubrir relaciones y patrones en escenarios matemáticos que usualmente están controlados por el maestro.

Estos programas, que a veces se conocen colectivamente como estuches de herramientas, pueden ser realmente ingeniosos.

Algunos programas que pertenecen a esta categoría, desarrollados en los Estados Unidos de Norteamérica por Sunburst, lo son el Geometric Supposer: Triangles y Geometric Supposer: Quadrilaterals. Estos son programas ejemplares, los cuales nos permiten enseñar la geometría de una manera original y creadora. Tradicionalmente el estudiante de geometría se limita a memorizar y quizás intentar demostrar formalmente resultados cuya validez debe creer por fe. Usualmente no pedimos a nuestros estudiantes que propongan los resultados geométricos que ellos estiman o piensan deben ser válidos. Mediante estos programas el estudiante puede realizar expeditamente construcciones geométricas que le sirven como "datos experimentales" para proponer la descripción general del resultado geométrico. Este aspecto del descubrimiento en las matemáticas (sin duda el más importante en el estudio de las matemáticas) raras veces se intenta enseñar en nuestros salones de clases. El profesor Judah Schwartz del Educational Technology Center de la Universidad de Harvard desarrolló una versión similar a los programas anteriormente mencionados para tratar problemas algebraicos. Además, el profesor Enrique Calderón del Instituto Galileo de la Ciudad de México, ha descrito en su ponencia ante este congreso varios estuches de herramientas desarrollados por él y sus colaboradores.

También han habido intentos muy interesantes de integrar la tecnología del disco de video a la computadora para desarrollar el entendimiento de ideas matemáticas y científicas. Uno de los experimentos más interesantes en este aspecto también se realiza en el Educational Technology Center de la Universidad de Harvard. Allí se intenta desarrollar programas en los que el estudiante puede imponer sistemas de coordenadas cartesianas sobre las imágenes de cuerpos en movimiento que aparecen en la pantalla del computador (y que provienen de una unidad de disco de video controlada por el estudiante a través del computador) para así realizar medidas de distancias y tiempos para luego calcular velocidades y aceleraciones. ¡La idea de que el estudiante pueda realizar los experimentos de la cinemática y la cinética sentado frente a un computador es una realmente interesante!

REFERENCIAS

The Harvard Education Letter, Vol. 11, Num. 6, Nov. 1986.

Technology in the Curriculum, Mathematics Resource Guide, Lawrence Hall of Science, University of California, Berkeley.

COMPUTADORAS Y RESOLUCION DE PROBLEMAS MATEMATICOS

Carlos A. Mansilla
Facultad Regional de Resistencia de la Universidad Tecnológica Nacional
Argentina

En todo el mundo, educadores están ocupados con el potencial de computadoras en educación. Matemática es quizás la disciplina escolar donde el potencial parece ser mayor. Debido a su bajo costo y mínimos requerimientos en infraestructura, las microcomputadoras pueden ser las más indicadas para uso escolar, especialmente para países en vías de desarrollo. Sin lugar a dudas, la microcomputadora es uno de los adelantos tecnológicos de mayor influencia potencial en la actualidad.

En el presente trabajo daré mis puntos de vista sobre el tema y realizaré la descripción de algo de lo que estamos realizando en mi provincia en Argentina.

Dos son las modalidades de uso educativo de la computadora que están mereciendo mayor atención. Una es conocida como Enseñanza Asistida por Ordenador (EAO), en la cual la máquina es utilizada para reemplazar o complementar la labor del maestro. La segunda, es la programación de computadoras tanto sea por su valor instrumental como para desarrollar habilidades mentales. Según palabras de Papert: "En mi visión, el niño programa a la computadora y haciéndolo adquiere maestría sobre una parte de la más moderna y poderosa tecnología, y establece un íntimo contacto con algunas de las más profundas ideas sobre ciencias, matemática, y del arte del modelado intelectual".

Recientes recomendaciones curriculares han puesto énfasis en el uso de computadoras en educación matemática, muchas de ellas relacionadas con el conocimiento de la ciencia de la computación. También ha sido señalada la importancia de la alfabetización en computación, esto es el conocimiento sobre computadoras, cómo usarlas y cómo se puede obtener beneficio de ellas. En un estado avanzado, esto último incluye programación, una habilidad nada desdeñable que incentiva a los alumnos a pensar algorítmicamente y a desarrollar habilidades para resolver problemas. Los maestros tanto primarios como secundarios deben estar capacitados para trabajar con computadoras. La realidad está señalando que en caso contrario serán sobrepasados por sus alumnos, con los cuales ni siquiera podrán conversar sobre temas de actualidad. Otro importante aspecto a tener en cuenta es la necesidad de currículo y metodología consistente con la disponibilidad de la tecnología de computadoras de hoy día y de las que vendrán.

Entre todos los lenguajes de computación, BASIC es el más popular. Está incluido como equipamiento corriente en todas las microcomputadoras, lo cual es muy importante para los apretados presupuestos escolares. Además ha sido especialmente desarrollado para enseñar programación a principiantes. A pesar que existen otros lenguajes más actualizados y mejor estructurados, ninguno alcanzó la popularidad del BASIC. No es esto de extrañar ya que sirve tanto para modestas aplicaciones como para trabajos de gran envergadura.

Existen versiones de LOGO en castellano, pero hay una versión distinta para cada clase de máquina o sistema operativo, lo que causa confusión en muchos casos. El usuario debe estar adivinando cuál es la instrucción que corresponde a la versión que está utilizando para realizar una determinada tarea. En la Argentina, las versiones de LOGO se están utilizando principalmente a nivel primario.

Un segundo tópico que ha atraído la atención de profesores de matemática y elaboradores de currículo es la resolución de problemas. Existe un consenso generalizado que la enseñanza de resolución de problemas matemáticos debe ser parte del currículo de matemática actual. A pesar de eso, la generación de habilidades para resolver problemas matemáticos es casi ignorada en Argentina, el énfasis se centra en contenidos, o en memorizaciones y aplicaciones rutinarias de fórmulas y algoritmos. En general se espera que el alumno esté capacitado para realizar ejercicios tales como resolver el siguiente sistema de ecuaciones o multiplique los siguientes polinomios. Sin embargo, ya han surgido voces reclamando énfasis en la resolución de problemas y aplicaciones.

La Ley de Educación de la Provincia del Chaco establece entre sus metas y objetivos generales dos que están relacionados con la programación de computadoras y resolución de problemas matemáticos, aunque de una manera general, cuando habla de promover habilidades de pensamiento reflexivo y creatividad intelectual, y promover el desarrollo de las capacidades científicas y tecnológicas.

Cabe ahora preguntarse si existe alguna conexión entre la programación de computadoras y la resolución de problemas. Recientemente han sido realizadas muchas afirmaciones sobre los efectos de la programación de computadoras en el currículo de matemática. Como ya fue señalado, los dos tópicos que están comandando la atención de la comunidad de educación matemática son la resolución de problemas y la programación de computadoras, ésto último con mayor intensidad debido a su impacto social. Algunos especialistas opinan que computadoras y matemática están en veredas opuestas en muchos aspectos. Matemática es una vieja ciencia y de alguna manera nunca nada es viejo en ella. Es una acumulación de conocimientos, la relación pitagórica fue tan válida tanto en el antiguo Egipto como en la actualidad. Por otra parte, las computadoras están cambiando continuamente, lo que es la última palabra en el día de hoy seguramente no lo será en un futuro cercano. Pero las habilidades y estructuras mentales que podamos crear con la computadora seguramente no pasarán fácilmente de moda.

Varios investigadores han señalado que la enseñanza de programación de computadoras afecta favorablemente el rendimiento de los alumnos cuando resuelven problemas matemáticos. En muchos casos los alumnos programadores fueron más sistemáticos y mostraron mejor uso de variables y ecuaciones, además de controlar y corregir respuestas más frecuentemente cuando resuelven problemas matemáticos. Elaborar un programa de computación es en realidad resolver un problema. Los pasos que se siguen son los mismos o semejantes: primero leer e interpretar lo leído, es decir, entender el problema, idear una estrategia de solución, analizar lo disponible, descomponer un problema en partes, realizar una síntesis, y por último probar el programa, lo que equivale a la discusión de los resultados obtenidos. Además la programación de computadoras crea saludables hábitos tales como una actividad sistemática, frecuente revisión de los resultados, correcto uso de variables subscriptas, y en un estado más avanzado uso de vectores y matrices multidimensionales.

La programación de computadoras es en general enseñada fuera de la clase de matemática, aunque en algunos casos se desarrolla dentro de ella. Esta última modalidad quita mucho tiempo al tratamiento de temas específicos de matemática razón por la cual no ha gozado de gran popularidad.

Resulta evidente que la computadora es un poderoso elemento de motivación y como tal no puede ser ignorado por ningún docente. La falta de interés de los alumnos en la currícula escolar se debe fundamentalmente a la falta de conexión entre los intereses de los jóvenes y la metodología vigente. Resulta un verdadero desafío para los profesores de matemática de hoy día encontrar la motivación necesaria para interesar a los alumnos en matemática escolar. Hace ya varios años que se viene recomendando el uso de problemas tomados de la vida real, del mundo en que se desarrolla la vida de los alumnos. La Oficina de Ciencias de la

UNESCO de Montevideo realizó hace algún tiempo publicaciones sobre las aplicaciones en la enseñanza de la matemática en la escuela secundaria, con la colaboración del Dr. Luis Santaló.

Esta metodología trae aparejado un inconveniente, los problemas de la vida real envuelven con cierta frecuencia complejos cálculos y en muchas oportunidades conocimientos de álgebra lineal, cálculo, teoría de probabilidades y otros temas avanzados de matemática. Nadie puede ignorar el interés despertado por la computación en niños y jóvenes, y sería lamentable no aprovecharlo para conseguir un mejoramiento del servicio educativo. La labor estudiantil de programación puede mejorar tanto el rendimiento de los alumnos en matemática como sus actitudes hacia esa disciplina y hacia la escuela en general.

Específicamente pueden mejorar las habilidades para resolver problemas matemáticos, lo cual como ya fue señalado anteriormente constituye uno de los focos de la educación matemática en la actualidad. El uso de la computadora como herramienta de trabajo puede colaborar grandemente en la labor del alumno en matemática. En muchas oportunidades el alumno rehuye atacar un problema porque está en conocimiento de lo tedioso que puede resultar resolver un sistema de ecuaciones u otra actividad rutinaria pero engorrosa. La máquina puede liberarlo de estas tareas, las que por otra parte no aportan razonamiento ni requieren creatividad, y puede hacer que el educando se sienta más atraído a sentarse a pensar y encarar la resolución de un problema. Los programas que use pueden ser tanto desarrollados por el alumno, por un equipo de ellos, o programas enlatados como el muMath. Se puede presumir entonces que la disponibilidad de computadoras en la clase de matemática tiene dos efectos principales: uno es el motivacional tanto por el uso de la máquina en sí como por la posibilidad de estudiar problemas de la vida real; el otro es el desarrollo de métodos de resolución de esos problemas dentro del currículo de la escuela secundaria. La computadora puede ser ciertamente usada tanto como herramienta de trabajo para resolver problemas de la vida real como para reforzar el entendimiento del proceso de resolver problemas matemáticos.

La disponibilidad de computadoras implica incluso la aparición de nuevas metodologías en educación matemática. En primer lugar su rapidez y seguridad en hacer cálculos permite incrementar la complejidad de los problemas propuestos, y por otra parte se pueden encarar investigaciones o abordar temas que normalmente no se pueden hacer por lentitud y tediosidad de los cálculos requeridos. Además, la disponibilidad de computadoras hace que las clases de matemática puedan adoptar métodos de laboratorio propios de las ciencias naturales, pudiendo los alumnos realizar "experimentos" tales como observar qué sucede con la gráfica cuando se modifica el valor de una variable o de un coeficiente.

Lo que antecede es una apretada síntesis de los posibles usos de la computadora en la clase de matemática y de alguna manera especial su influencia en las habilidades y capacidades de los alumnos para resolver problemas matemáticos. Por supuesto puede haber muchos más y seguramente los hay.

En la República Argentina las microcomputadoras están ganando terreno día a día. Si bien en el campo educativo es quizás donde más lentamente lo hacen, asemejan al comportamiento de las estrellas: sin prisa pero sin pausa. Ciertamente están causando una revolución no solo educativa sino cultural. El interés crece continuamente, y desde el año pasado comenzaron a realizarse congresos federales y regionales sobre informática educativa. En todo el país el gobierno federal está desarrollando un proyecto a través del Consejo Nacional de Educación Técnica el cual apunta al uso de la computadora como herramienta de trabajo en la escuela secundaria. En la Provincia del Chaco se están desarrollando cursos de programación para profesores de matemática, los que serán continuados con cursos sobre el tratamiento de temas matemáticos con computadoras. Asímismo, se está desarrollando una investigación sobre los efectos de la programación de computadoras en las capacidades de los alumnos de décimo grado en resolver problemas matemáticos. Para ello se han tomado seis divisiones del citado curso que componen tres grupos: uno recibe enseñanza de estrategias para resolver problemas y programación de computadoras, el otro programación de computadoras y clases regulares de matemática, el tercero no recibe ningún tipo de tratamiento especial y sirve como grupo testigo. El tratamiento estadístico se realiza con la aplicación de pretest y posttest. Esta experiencia se realiza con el apoyo del Consejo General de Educación de la Provincia de Chaco y el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Además, la Cámara de Diputados de la Provincia del Chaco, ha recomendado recientemente al Consejo General de Educación la concreción de la alfabetización en computación en escuelas primarias y secundarias.

Resumiendo lo expuesto: existe consenso generalizado que la programación de computadoras debería ser parte del currículo de la escuela secundaria. La enseñanza de la programación de computadora debería ser hecha fuera de la clase de matemática en curso especial a tal efecto. Esto no implica que la programación de computadoras no deba ser utilizada en las clases de matemáticas. El lenguaje más popular es el BASIC debido a que fue diseñado especialmente para principiantes, es muy versátil y gratis en cualquier tipo de microcomputadora. Por último queda señalar que la enseñanza de la programación de computadoras puede tener muy positivos efectos sobre las habilidades de los alumnos para resolver problemas matemáticos y el uso de computadoras permite abordar temas matemáticos con una metodología que sería imposible sin ellas, pudiéndose adoptar métodos experimentales.

Los beneficios que puede prestar la computadora a la clase de matemática crecen día a día, su impacto puede compararse al producido por la invención de la imprenta. Es una obligación de los educadores sacar el máximo provecho de ella, para beneficio de los educandos y del futuro de nuestra sociedad.

EL APRENDIZAJE MATEMATICO Y LA PROGRAMACION EN LOGICA

Fidel Oteiza M.
Universidad de Santiago de Chile
Santiago, Chile

INTRODUCCION

En este trabajo se exploran las relaciones entre el razonamiento y el aprendizaje matemático, de una parte y la programación en lógica (1), de la otra.

Sobre la base de la experiencia lograda en el desarrollo de sistemas computacionales destinados a la facilitación del aprendizaje matemático preparados en PROLOG (2), se dan argumentos para ilustrar y justificar las siguientes proposiciones:

La programación en lógica:

1. Favorece la ejecución de tareas intelectuales de nivel taxonómico alto. Esta forma de programación pone, a quien la realiza, en contacto estrecho con el método hipotético deductivo y con aspectos centrales de la axiomática.

2. Favorece la metacognición y el ejercicio de estrategias cognitivas de nivel superior (3), necesarias para el desarrollo del pensamiento matemático y la resolución de problemas.

3. Puede ser utilizada para investigar acerca del desarrollo del pensamiento matemático y su formación. El tipo de problemas que hay que resolver y las evidencias que quedan de la forma de razonar de quién trabaja en este ambiente, se prestan para conocer mejor la forma en que se da el razonamiento matemático.

4. Ofrece la oportunidad de desarrollar modalidades de aprendizaje en los que el estudiante aprenda matemática sobre la base de un enfoque relacional y clarificador de sus fundamentos. En efecto, esta modalidad de programación hace uso constante del concepto de relación y cada programa se comporta como un conjunto de axiomas. La ejecución de un programa se genera a partir de una pregunta hecha por el usuario; esa pregunta es tratada como un teorema. El sistema verifica la consistencia o inconsistencia del conjunto de proposiciones formado por el programa y la proposición cuya veracidad se estudia; y

5. Permite el tratamiento de información cualitativa, acercando al estudiante a los modelos formales que tienen aplicación en las ciencias sociales.

Desde un ángulo diferente, la programación en lógica, pone en evidencia la necesidad de ciertos aprendizajes matemáticos y de ciertos tópicos de la matemática comúnmente ausentes de los currículos de enseñanza actuales. Los adelantos logrados en el proyecto de computadores de quinta generación muestran que este tipo de programación será importante en el campo laboral del futuro (4). Es, entonces, muy posible que los antecedentes matemáticos de la programación en lógica tengan su lugar en el currículo matemático en un futuro cercano.

Se propone que los educadores consideren esta forma de programación entre las alternativas que la informática ofrece para desarrollar innovaciones en materia de aprendizaje matemático.

ANTECEDENTES

Un Sistema Tutor Diseñado en PROLOG.

El análisis aquí presentado es un producto lateral de un proyecto que tiene por objeto desarrollar sistemas para la facilitación del aprendizaje de elementos de álgebra. A continuación una breve descripción del "Sistema Tutor" o "Analizador de Respuestas", que motivó este estudio.

Desde hace dos años un grupo de alumnos terminales de la carrera de educación matemática y computación y de ingeniería (5), bajo la dirección del autor de esta propuesta, trabaja en el desarrollo de sistemas que pueden orientar el aprendizaje sobre la base de un dispositivo que analiza las acciones y respuestas de un estudiante.

Se espera que estos sistemas - y las dos primeras versiones experimentales así lo hacen (6) - tengan la capacidad para "seguir" el trabajo que realiza un estudiante que resuelve ejercicios de álgebra y de reaccionar, sea justificando los pasos dados, sea señalando los errores cometidos.

El objeto es disponer de un dispositivo que permita facilitar el aprendizaje matemático permitiendo que sea el propio estudiante quién genere los problemas. El sistema analiza las acciones del estudiante y entrega mensajes orientadores.

La versión sobre la que se trabaja en la actualidad está provista de reglas de producción que definen una estructura de cuerpo y de una gramática que define lo que en este sistema se entiende por expresiones algebraicas, igualdades y ecuaciones (7).

Este sistema debe:

1. Aceptar expresiones o ecuaciones escritas por el alumno o bien, generar expresiones o ecuaciones según condiciones determinadas. Esto significa que una secuencia de trabajo puede ser iniciada por un problema propuesto por el estudiante, o, si éste así lo solicita, por el sistema.

2. Reconocer si un problema propuesto es o una "expresión" o una "ecuación" sintácticamente válida, y reaccionar de acuerdo a patrones previamente definidos. De acuerdo con esta condición, cada paso dado por el estudiante es analizado por el sistema que determina su validez sintáctica.

3. Seguir paso a paso la ejecución respondiendo con un ok! y una referencia al axioma, propiedad o teorema que justifica la acción, en caso de reconocerla como correcta; con una advertencia cuando la acción es correcta pero no se relaciona necesariamente con la solución o con una señal de error - que apunta a la posible causa de invalidez - en caso contrario.

4. Resolver el problema - paso a paso y según heurísticas aceptables - si el estudiante así lo solicita. También en este caso el sistema debe poder entregar la(s) justificación(es) de su actuación.

5. Hacer preguntas al estudiante en caso que no pueda "comprender" su actuación. Un caso característico lo constituyen los "pasos saltados", en esta situación el sistema debe pedir pasos intermedios hasta que pueda relacionar la respuesta con una de las heurísticas consideradas como aceptables.

Paralelamente se trabaja en el análisis del conocimiento del que hace uso un tutor que orienta el aprendizaje matemático. Se experimenta, también, con formas de representación de ese conocimiento. El objeto es explorar la posibilidad de agregar al sistema tutor una componente de orientación usando técnicas desarrolladas para los sistemas expertos. Mediante este tipo de sistemas se espera generar programas que simulen la actuación de un profesor experimentado.

Dados esos objetivos, ha sido natural relacionar la programación en lógica y el aprendizaje matemático. En efecto, se trabaja simultáneamente en problemas de programación haciendo uso del lenguaje PROLOG, y en el análisis de estrategias de facilitación del aprendizaje matemático.

Programación en Lógica.

¿Qué significa programar en lógica? El lector interesado puede consultar la literatura al respecto (8).

La programación en lógica se inscribe en la línea de pensamiento que han seguido los que trabajan en inteligencia artificial.

Desde el nacimiento mismo de los lenguajes computacionales de alto nivel, hacia fines de los años cincuenta y comienzo de los sesenta, se siguieron dos caminos básicos en el diseño de lenguajes computacionales. El primero, representado por el FORTRAN, el BASIC y posteriormente el PASCAL, para nombrar sólo tres exponentes, se orientó hacia los algoritmos y lo que luego se llamó programación imperativa: cada paso está unívocamente determinado por el anterior e implica la ejecución de una acción específica. Estos lenguajes sirven para que el programador describa procedimientos secuenciales y determinísticos, adecuados para el tratamiento de información cuantitativa. En el segundo camino, encontramos a IPL de A. Newell y H. Simon; LISP, creado por J. McCarthy; y PROLOG de Ph. Roussel y A. Colmerauer. Estos últimos fueron creados para representar y procesar información cualitativa, por su estructura se los llama declarativos.

Se señala la conferencia de Dartmouth (organizada por el mismo McCarthy y su colega M. Minski del M.I.T.), como el nacimiento de la inteligencia artificial. Parece ser que McCarthy fue quien por primera vez usó la expresión inteligencia artificial, también escribió, en la misma conferencia:

> El estudio debe proseguir sobre la base
> del supuesto de que todos los aspectos del
> aprendizaje o cualquier otra característica de
> la inteligencia pueden - en principio - ser
> descritos con tal precisión que puede
> construirse una máquina para simularlo (9).

Los lenguajes desarrollados para los efectos de simular el razonamiento humano ponen el acento en la representación del conocimiento, en sus aspectos cualitativos.

El lenguaje PROLOG fue desrrollado por los mencionados Ph. Roussel y A. Colmerauer en la Universidad de Marsella en 1972.

Un programa escrito en PROLOG está formado por un conjunto de proposiciones (cláusulas) que representan hechos y reglas. La ejecución del programa se logra proponiéndole un problema al sistema. Este busca la solución sobre la base del conjunto de afirmaciones que actúa como una axiomática. Para responder, el sistema utiliza un mecanismo inferencial (ver anexo).

En la actualidad, gracias a los logros de R. A. Kowalski, K.L. Clark y F.G. McCabe, entre otros, que trabajaron en el Imperial College y en la Universidad de Edimburgo en Gran Bretaña, existen versiones para microcomputadores. Estas versiones son las que hacen posible su aplicación a proyectos educativos (10).

Por qué Enseñamos Matemática, un Comentario.

Las razones que suelen esgrimirse para enseñar matemática - o para incluir determinados temas matemáticos en el currículo - son muy pocas pero suficientes como para justificar que millones de seres dediquen esfuerzos considerables en su aprendizaje.

Las justificaciones más frecuentes son: "porque son útiles", esto es, contribuyen a la solución de problemas importantes o facilitan el aprendizaje de otros conocimientos que son considerados útiles; "porque permiten adentrarse en el conocimiento científico"; "porque son culturalmente valoradas"; o simplemente porque "las estructuras matemáticas son creaciones humanas armoniosas"; y una razón que se señala como la más importante, "la matemática contribuye en el desarrollo del intelecto".

Algo de lo disciplinario, de lo potencialmente formador, de la matemática ha atraído siempre la atención de los educadores.

No existe una demostración del hecho que el ejercicio de actividades matemáticas contribuya en el desarrollo de la capacidad intelectual. Es difícil decidir si son sujetos intelectualmente dotados para el pensamiento abstracto de los que se sienten atraídos por el conocimiento formalizado o es la experiencia con ese conocimiento la que desarrolla la capacidad de abstracción y de inferencia por sobre el promedio.

A falta de pruebas se puede argumentar que la conjetura es plausible. En todo caso su aceptación no produce daño y su negación podría inducir a cometer un error de proporciones.

Aceptemos como válida la afirmación que dice que la experiencia con estructuras abstractas y formalmente válidas constituyen un estímulo valioso tanto para la organización como para el desarrollo de la inteligencia. Reservemos, eso sí, un espacio para la ponderación de la afirmación sobre la base de la calidad y naturaleza de esa experiencia, retomaremos este punto antes de terminar este trabajo.

En esa línea de raciocinio es inevitable valorar el continente, la mente, por sobre el contenido, el conocimiento. Sobre la misma base se puede defender la valoración de las experiencias con estructuras formalmente interesantes por sobre tal o cual contenido o tema. Es en esta línea de pensamiento que propongo se considere el potencial formativo de la programación en lógica.

Programación en Lógica y Conocimientos Matemáticos.

El estudiante de ciencias de la computación, y también aquel que desea interiorizarse de tópicos más o menos avanzados de computación, requiere de ciertos conocimientos matemáticos algo diferentes a los que se enseñan habitualmente.

Al estudiar cuáles son esos conocimientos se encuentra que se trata de temas habitualmente ausentes del currículo matemático de la enseñanza media y de los primeros años universitarios o que se los trata sólo superficialmente. El lector podrá observar, en la lista que se entrega a continuación, que algunos tópicos centrales para el que estudia computación, son propuestos sólo como ejemplos de determinadas estructuras o porque facilitan otros aprendizajes considerados como más importantes.

Entre esos temas se encuentran: métodos numéricos y una serie de algoritmos de cálculo con poca o ninguna aplicación en matemáticas generales; álgebra de Boole, grupos finitos, teoría de códigos (una aplicación de las matrices), teoría de la información, teoría de autómatas y lenguajes formales.

Si consideramos la programación en lógica se agregan: la lógica estándard - que estuvo presente en la formación general pero cuya importancia ha disminuido hasta casi desaparecer; la lógica clausal - central en la definición misma de esta modalidad de programación y no incluida en ningún currículo de matemática general conocido por este autor; las relaciones - que sólo se enseñan en algunos programas para definir funciones; los grafos - en particular grafos dirigidos y sus isomorfismos con estructuras finitas, con listas en particular, y temas de los fundamentos de la matemática como computabilidad y definiciones recursivas, axiomática y diversos aspectos de la inferencia matemática: modus ponens, modus tollens, inducción y abducción.

En los apartados siguientes se mostrará una relación bastante profunda entre la programación en lógica, el razonamiento matemático y los fundamentos de la matemática, pero ya esta primera observación debiera ser tomada en cuenta al revisar la pertinencia y relevancia de los currículos matemáticos actuales.

PROGRAMACION EN LOGICA Y APRENDIZAJE MATEMATICO

En esta sección se analizan las relaciones entre la programación en lógica y el aprendizaje matemático. Sobre la base de ejemplos extraídos del programa que define el sistema tutor antes descrito, se dan argumentos para justificar las afirmaciones siguientes:

La programación en lógica favorece aprendizajes matemáticos que difieren de los que se ven favorecidos por la programación algorítmico-imperativa.

Mientras FORTRAN, BASIC o PASCAL ponen el acento en los procedimientos, PROLOG lo hace en los conceptos. Así también, la programación algorítmico-imperativa permite profundizar contenidos de la matemática, mientras PROLOG pone en contacto con los fundamentos de esa disciplina. En el mismo sentido se puede afirmar que mientras los primeros están diseñados para la calculatoria, para la aplicación de fórmulas e implican un pensamiento algorítmico, el segundo está orientado hacia el razonamiento, las estructuras y el pensamiento heurístico.

Se dan también algunos argumentos para mostrar el potencial de la programación en lógica en el logro de la metacognición. En esa última parte de la argumentación se hacen referencias a los sistemas expertos y a la inteligencia artificial.

Conceptos y Procedimientos

Si se quiere generar un programa que determine si un elemento X pertenece o no a una lista L = [Y1, Y2,...,YK], un programa escrito en un lenguaje imperativo-algorítmico como FORTRAN, BASIC o PASCAL, requiere de un algoritmo. Este puede tener la forma siguiente:

```
lea X   (el elemento)
lea Y   (la lista, puede ser un arreglo lineal)
compare X con Yi     (i=1,2...k)
si X = Yi
 responda: "X es miembro de Y"
si X distinto de Yi
siga
si fin de lista
responda: "X no es miembro de Y"
pare
```

En este caso el programador debe definir con precisión el procedimiento que utilizará el sistema.

Si el programa se genera en PROLOG el cuidado debe ponerse en definir lo que el sistema debe "comprender" por la relación de pertenencia.

La definición de la relación "miembro-de" se logra por medio de dos afirmaciones:

X es miembro de toda lista que comience por X.

X es miembro de una lista que comienza por
algo diferente de X, si
X es miembro de la cola de la lista.

Cuando el sistema deba verificar si un X pertenece o no a una lista o bien encontrar un X que satisface la relación, hará uso de la definición precedente.

En este tipo de programación cada relación se define haciendo uso de proposiciones que pueden ser incondicionales, como la primera del ejemplo, o condicionales como la segunda.

En todo caso el programa es un conjunto de definiciones y hechos, la cuestión procedimiento queda a cargo del sistema.

El ejemplo muestra que: mientras la programación algorítmica enfatiza y permite tener experiencia con los procedimientos, con el cómo se hacen las cosas, la programación en lógica pone el acento en las definiciones, en lo que los objetos son. Si unimos esta observación con el concepto de programa como un espacio definido al modo axiomático, podemos concluir que la programación en lógica ofrece la oportunidad de experimentar con la definición de objetos sintácticamente válidos, a la par que semánticamente significativos.

Fundamentos y Contenidos de la Matemática.

La afirmación que se ilustra en este apartado es la siguiente: mientras la programación imperativo-algorítmica puede ser un vehículo para el aprendizaje de algunos contenidos de la matemática - dependiendo de los problemas que se aborden - la programación en lógica - independientemente del tópico elegido - pone en contacto con estructuras homólogas a las que sirven de fundamento a la matemática.

En efecto, si utilizando un lenguaje computacional algorítmico se programan modelos que hagan uso de sucesiones, series, raíces de un polinomio, integración numérica, matrices, etc., el programador tiene la oportunidad de profundizar esos temas y de, posiblemente, dominarlos en un buen nivel; si, por el contrario el programa no requiere de conceptos o procedimientos matemáticos, la experiencia de programación no es necesariamente una experiencia relevante desde el punto de vista del aprendizaje matemático.

En el caso de la programación en lógica, el programador, independientemente del tema de programación, debe razonar en términos de la axiomática, de las reglas de inferencia, de la verificación de proposiciones y de la definición de objetos - que pueden ser compuestos - a partir de ciertos términos elementales, algo así como los términos primitivos.

Una vez que a un programa escrito en PROLOG se le ha hecho una pregunta y el sistema la ha respondido, se le puede pedir, mediante la función "Traza", que explicite la secuencia de inferencias que lo hicieron llegar desde las afirmaciones que forman la base a la respuesta. Esta operación se asemeja a la justificación - sobre la base de axiomas y/o teoremas - que hacemos al explicar una demostración.

Observe la tabla No. 1 (en la página siguiente), allí se asocian ciertos conceptos de los fundamentos de la matemática con conceptos seleccionados de la programación en lógica.

La relación entre lenguaje y metalenguaje es también muy interesante. En una de las sesiones de trabajo llegamos al problema que plantea el reconocimiento de una expresión, de una igualdad y de una ecuación por parte del sistema tutor descrito con anterioridad. La solución a la que llegaron mis alumnos, es clásica, generaron una gramática.

Usemos Ex, por expresión, e Ig, por igualdad; y la gramática se puede expresar del modo siguiente:

Ex ---> Ex + F, Ex - F, F
F ---> F * G, F / G, G
G ---> -Ex, (Ex), a

Esto es, por Expresión acepte una constante "a", o una expresión entre paréntesis, o el opuesto de una expresión, o un cociente de expresiones, o su producto, su diferencia o su suma.

De un modo natural, por igualdad entienda Expresión = Expresión:

Ig ---> Ex = Ex

Tal como lo comentaron los alumnos, esta gramática no constituye el objeto que maneja el programa sino que gobierna a los objetos que el programa puede manipular. Se trata de una experiencia con la relación entre lenguaje y metalenguaje, la que se da entre una teoría matemática y la lógica por ejemplo.

Tabla No. 1

Relación entre conceptos matemáticos y conceptos de la programación en lógica

Fundamentos de la Matemática.	Programación en Lógica
Términos Primitivos	Nombres Predicados.
Términos Derivados	Predicados definidos a partir de los primitivos.
Axiomas	Relaciones y Hechos.
Teoremas	Preguntas/Objetivos
Demostraciones	Mecanismo Inferencial
Justificación de la demostración	Traza.

Bastarían acaso estas constataciones para despertar el interés de los educadores matemáticos en estas materias, sucede que una vez iniciada la comparación se encuentran otras con facilidad. En los apartados siguientes se incorporan algunos elementos de intelingencia artificial en el análisis.

Razonamiento Matemático y Calculatoria

La proposición que se ilustra ahora es: mientras la programación algorítmico-imperativa pone el acento en la calculatoria, el ambiente creado para el desarrollo de la inteligencia artificial, lo pone en el razonamiento.

La literatura relacionada con la inteligencia artificial abunda en referencias, descripciones y modelaje de la forma de razonar de un ser humano. Su definición misma implica una reacción entre máquina y pensamiento.

El desarrollo de sistemas expertos, aquellos que emulan a un especialista humano en su actuación en el área de su especialidad, ha permitido la creación de diversos modelos para la representación del conocimiento y para su utilización. Estos últimos son procesos de verificación, mecanismos inferenciales y formalismos que hacen uso de la abducción, esto es, de raciocinios plausibles (si a -->b, y b, entonces, posiblemente a).

Un programa escrito en PROLOG hace uso de una estructura homóloga a la de un sistema experto. Tiene una base de conocimientos - provista por el programador - y un mecanismo inferencial propio del sistema. Acepta preguntas que responde sobre la base de las dos componentes antes mencionadas.

Al generar el programa, el programador tiene ventajas si puede conceptualizar el "espacio de búsquedas" (formado por todos los caminos posibles de acuerdo con las cláusulas que definen el programa) en el que se moviliza el sistema inferencial para responder. Quien haya analizado un espacio de búsquedas habrá tenido un contacto estrecho con los formalismos inferenciales. Esta experiencia puede servir para ganar en comprensión acerca del razonamiento y de sus reglas.

El proceso por medio del cual un ingeniero analiza el conocimiento y la forma de razonar de un especialista para luego diseñar un sistema experto, descrito en la literatura (11), es un ejemplo de lo que se puede lograr en la comprensión del razonamiento matemático. Todo hace pensar que esta comprensión puede tener efectos interesantes en la enseñanza de esa disciplina.

Estructuras y Fórmulas

FORTRAN es una contracción de la expresión inglesa "FORmula TRANslator". La programación imperativo-algorítmica hace uso frecuente de fórmulas: medidas de tendencia central, de dispersión, cálculo de la t de Student, algoritmos para redondear, procesos iterativos, para nombrar algunos. La programación en lógica hace uso de estructuras y es débil en la calculatoria. Las listas son estructuras, los patrones de listas, las definiciones recursivas, los espacios de búsqueda y los programas mismos son instancias de estructuras.

Durante la ejecución de un programa la interacción entre estas estructuras genera relaciones que vale la pena analizar desde el punto de vista de su potencial formativo o como problemas de enseñanza de la computación. La instanciación y en particular el proceso de "calce" entre las estructuras presentes en un objetivo y las que se encuentran en las cláusulas que conforman la base, son dos situaciones en las que la abstracción y ciertas formas de isomorfismo se hacen presentes.

En PROLOG, las operaciones son relaciones. Por ejemplo:

SUM(X, Y, Z) representa la ecuación $X + Y = Z$

SUM se la puede utilizar para verificar si dos números sumados son o no iguales a un tercero, o bien para calcular una suma: dándole valores a X e Y; o para calcular una diferencia: dándole valores numéricos a Z y a una de las otras variables.

En el programa del sistema tutor que hemos usado como ejemplo varias veces, se representa una ecuación lineal por una lista que tiene una estructura equivalente a la ecuación.

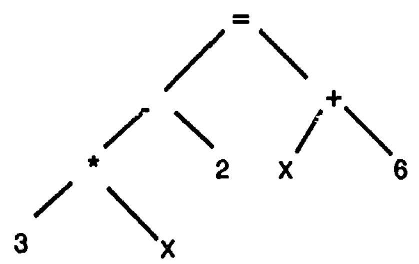
Por ejemplo, si el estudiante escribe:

3* x - 2 = x + 6

El sistema trabaja con:

= (- (* (3, x), 2), + (x, 6))

Que es una estructura de lista en la que las relaciones se expresan en notación prefija.
Esa estructura es equivalente al árbol:



Mientras la programación algorítmica hace uso frecuente de fórmulas, la programación en lógica utiliza estructuras y relaciones entre estructuras.

Esta es una de las razones por las cuales la programación en lógica se presta más que la programación algorítmica para el desarrollo de modelos para las ciencias sociales y otras áreas del conocimiento que manejan información simbólica.

Pensamiento Heurístico, Pensamiento Algorítmico y Metacognición.

Durante la década de los años sesenta la computación puso de moda el concepto de algoritmo. Indudablemente tenemos hoy una mejor comprensión de lo que son, de cómo operan y de cómo se enseñan los algoritmos. Un estudio en educación matemática publicado hacia el final de esa década introdujo una taxonomía para los objetivos de la enseñanza de la matemática. Se propusieron tres niveles: conocimiento y recuerdo, pensamiento algorítmico y búsqueda abierta (open search en el original canadiense); me refiero al trabajo de Avital y Shettleworth publicado en 1968, cuyo impacto es bien conocido por los educadores (12).

Si ese lenguaje lo traducimos al actualmente en boga, el tercer nivel lo llamaríamos pensamiento heurístico. Aquel por medio del cual se busca la solución a un problema no resuelto con anterioridad. En estas situaciones el sujeto hace uso de la información específica presente en el problema, también usa información acerca de situaciones relacionadas, algoritmos o segmentos de algoritmos conocidos, estrategias de solución que han dado resultados en situaciones parecidas, entre otros elementos, y genera un proceso mediante el cual probablemente podrá resolver la situación planteada.

La inteligencia artificial necesita y busca formalismos para simular el razonamiento heurístico. Los sistemas expertos han hecho uso de esos formalismos para emular el comportamiento de especialistas humanos.

Se puede afirmar que mientras la programación imperativo-algorítmica facilita el aprendizaje acerca de y de los procesos algorítmicos, las técnicas relacionadas con la inteligencia artificial facilitan la comprensión de los procesos heurísticos.

Para completar esta serie de relaciones, quiero llamar la atención acerca de la posibilidad de hacer uso de estas técnicas en el estudio de la metacognición y de las estrategias congnitivas, así como acerca de la posibilidad de que sean un buen vehículo para su desarrollo.

En el diseño de sistemas en PROLOG, nos hemos encontrado con frecuencia con situaciones en las que nos preguntamos: ¿Cómo lo hice?, ¿cómo actúo en estas situaciones?, ¿cómo pienso?, ¿cuáles son los pasos para llegar a la solución? La literatura acerca de sistemas expertos hace frecuentes menciones a la ingeniería del conocimiento, las técnicas que utiliza un analista para comprender y luego representar y formalizar el modo de razonar del especialista. Allí también se repiten las mismas preguntas: ¿Cómo llega a esa conclusión?, ¿qué conocimientos usa?

"La metacognición es nuestro grado de conciencia acerca de nuestra actividad mental" (13). En el mismo trabajo se argumenta la existencia de una posible relación entre ese grado de conciencia y el aprendizaje de las estrategias cognitivas que usa el sujeto para resolver problemas o para aplicar el conocimiento adquirido. Los autores citados se refieren a esas estrategias como las "... destrezas de manejo de sí mismo que el aprendiz adquiere, (...) para gobernar su propio proceso de atender, aprender y pensar... (lo que le permite) llegar a ser un pensador independiente" (p. 307).

El conjunto de las relaciones entre el razonamiento matemático y la programación en lógica junto a las definiciones recién citadas, hacen pensar en que esa forma de programación, representa una oportunidad interesante para conocer y para facilitar el aprendizaje de la metacognición y, posiblemente, de las estrategias cognitivas.

Es interesante el hecho que a los sistemas expertos se les pueda pedir que expliquen las razones que tienen para proponer determinado curso de acción, esto es, deben "conocer" su "forma de razonar". En algunas versiones de PROLOG existe la función "traza", que entrega la secuencia de inferencias que llevaron al sistema a entregar una respuesta. Son formalismos de metacognición.

CONCLUSIONES Y PROYECCIONES

Existen otras y buenas razones para estudiar programación en lógica, aquí nos concentramos en una, su papel formativo. Entre esas razones destaca el hecho de ser PROLOG - o un lenguaje tipo PROLOG - el seleccionado para servir de base al proyecto japonés de computadores de quinta generación. Es también atractivo que sea un lenguaje computacional apropiado para diversas aplicaciones en la inteligencia artificial, tema éste que atrae bastante atención en la actualidad. Por último, es importante que sea un medio adecuado para procesar y generar relaciones cualitativas.

El hecho de que existan relaciones entre esta forma de programación y la estructura de la matemática no debe sorprender. El lenguaje fue creado sobre la base de los formalismos de la lógica, se trata más bien de relaciones tautológicas. Ahora bien, no porque estas relaciones sean consecuencia directa de la estructura del lenguaje hace que sean menos interesantes por sus posibles aplicaciones educativas.

Lo que se hace con un lenguaje de computación de uso general se puede hacer con otro. Este argumento se plantea frente a cualquier análisis que muestre las ventajas de alguno en particular. Es efectivo, se trata de máquinas universales, en el sentido de Turing. Toda máquina universal puede expresar un formalismo equivalente a cualquier estructura que pueda ser definida con precisión. También sería efectivo que todo formalismo está potencialmente resuelto desde la creación de esos modelos en 1937, eso no ha impedido que se generen lenguaje tras lenguaje, para hacerlo mejor, más rápido o más eficientemente. Cada lenguaje posee una estructura, esa estructura hace resaltar ciertas relaciones o formas de proceder por sobre otras. PROLOG favorece la experiencia con estructuras lógicas.

Esto ha sucedido antes. En efecto, de tiempo en tiempo aparecen ideas, procedimientos, aparatos u otras innovaciones cuya aplicación en educación parece valiosa. Desde el cine, pasando por la televisión, hasta llegar a las calculadoras, los microcomputadores, el BASIC, el PASCAL, recientemente el LOGO sin contar los procesadores de texto y otros programas utilitarios. Y es efectivo que la educación tiene una inercia grande para incorporar esas innovaciones. La programación en lógica es una innovación más que merece la atención y el estudio por parte de la comunidad educativa.

Es una buena oportunidad para combartir uno de los problemas más serios en los resultados del aprendizaje matemático, el aprendizaje inconexo. Los estudiantes aprenden partes, modos de operar, problemas específicos, ideas, etc., sin comprender las relaciones que guardan entre sí o con otras áreas del conocimiento u otras realidades. Las consideraciones hechas con anterioridad pueden haber dejado en claro que se puede lograr un ambiente integrador y clarificador de lo que une las partes de la matemática: sus fundamentos.

Dos experiencias importantes en materia de ambientes estructurados para el aprendizaje, el uno de matemática y el otro de computación, han sido los trabajos de Zoltan Dienes (14), en los años sesenta y el LOGO recientemente. En ambos casos se hace uso de una estructura fuerte con la que el estudiante interactúa para aprender a partir de su propia experiencia. En ambos casos los resultados mostraron que la mediación de parte de un adulto experimentado es altamente necesaria.

Para profundizar en las posibilidades educativas de la programación en lógica se hace necesario:

1. Poner a prueba ideas, experimentar. Cada una de las relaciones presentadas sugieren estudios y modalidades de uso a analizar teórica y luego empíricamente.

2. Estudiar las relaciones entre programación en lógica y estrategias cognoscitivas haciendo uso de un enfoque interdisciplinario.

3. Generar guías y experiencias de aprendizaje con los correspondientes soportes pedagógicos. Hacer uso en su diseño del concepto de experiencia mediada (15). La experiencia directa con un ambiente especialmente estructurado es un buen procedimiento de aprendizaje; si esa experiencia cuenta con la mediación de un adulto experimentado, los resultados son mejores.

4. Preparar manuales en los que la programación en lógica esté estrechamente relacionada con el aprendizaje matemático, en particular con la lógica y los fundamentos de la matemática.

5. Proponer y poner en práctica programas de formación de profesores y de perfeccionamiento en servicio que preparen al docente para utilizar estos conocimientos en el aula.

6. Analizar los contenidos de los programas de matemática generales a la luz de las necesidades y posibilidades que los estudiantes enfrentarán o encontrarán en el futuro cercano.

La puesta en práctica de esas ideas supone la solución de varios problemas y la creación de herramientas. A continuación se nombran algunas.

i) Se detecta la necesidad de información de buen nivel a la vez que accesible para los docentes. Podría ser un libro de lecturas que entregue una visión de conjunto acerca de lo que es la inteligencia artificial, cuáles son sus fundamentos, los principales problemas que enfrenta, cuáles sus logros y cuáles sus limitaciones. Este documento podría ser usado tanto en programas de formación de profesores o para docentes en servicio.

ii) Se requiere de un conjunto de programas que ilustren diversas aplicaciones de la programación en lógica. Estos programas deberían cubrir una gama amplia de áreas del conocimiento para mostrar el potencial de este tipo de lenguajes en el tratamiento de la información cualitativa.

iii) Un programa de enseñanza que tenga un tratamiento integrado del álgebra y de la programación en lógica. Este programa podría servir para estudiar la efectividad del potencial formativo de la programación en lógica. Sería conveniente desarrollar, paralelamente, una versión para la enseñanza media y otra para ser usada en la formación de profesores.

iv) La conjetura acerca del valor formativo de la programación en lógica se plantea en la posibilidad de alcanzar niveles de aprendizaje taxonómicamente superior al logrado en cursos de matemática generales. Poner a prueba esa idea implica el desarrollo y la validación de instrumentos o procedimientos de medición que detecten la presencia de logros cognitivos de nivel superior. Estos instrumentos no existen.

v) Las aplicaciones en el continente se verían facilitadas si se dispusiese de versiones de PROLOG y de micro-PROLOG en castellano.

En síntesis, la programación en lógica es una herramienta que puede representar una innovación valiosa en la formación matemática y científica, es necesario estudiar esas posibilidades y ponerlas a prueba.

REFERENCIAS

1. En el sentido que le da a esta expresión Robert Kowalski, ver referencia más adelante.

2. PROgramación en LOGica, en sus versiones para microcomputadores micro-PROLOG y Turbo-PROLOG.

3. Antonijevic, Nadja y C. Chadwick. **Estrategias Cognitivas y Metacognición**. En Revista de Tecnología Educativa. Departamento de Asuntos Educativos de la OEA, Vol. 4, N.7 1982/1983.

4. Me refiero al conocido anuncio japonés de máquinas de "quinta generación" que usarían un lenguaje del estilo iniciado por PROLOG. Ver: E. Feigenbaun y P. McCorduck. **La Quinta Generación**. Barcelona-España: Ediciones Planeta, (2a. Ed.) 1986.

5. La carrera de **Licenciatura en Educación Matemática y Computación** se imparte en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Santiago de Chile.

6. La primera versión sirvió de trabajo de titulación, en ingeniería informática: M. Albornoz, R. Krebs y B. Lagos. La segunda fue preparada como tesis de grado por Susana Collarte de la Licenciatura en Educación Matemática y Computación.

7. Jorge Boza y Eduardo Castillo, alumnos de la Licenciatura en Educación Matemática y Computación. La "gramática" y las discusiones con estudiantes a las que se alude más adelante también se refieren a ellos.

8. Algunas referencias para el tema:

   i) R. Kowalski. **Logic for Problem Solving**. North Holland, Artificial Intelligence Series. 1979.

   ii) W. F. Clocksin y C. S. Mellish. **Programing in PROLOG**. Segunda edición, Spring-Verlag, 1984.

   iii) Ch. J. Hogger. **Introduction to Logic Programing**. Londres: Academic Press, Inc., 1984.

   iv) A. Colmerauer. "PROLOG Lenguaje de la Inteligencia Artificial", en **Mundo Científico**. No. 41, vol. 4, 1984.

9. Descrito en el libro de E. Charniak y D. McDermott **Artificial Intelligence**. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Co., 1986.

10. Existen versiones de micro-PROLOG para equipos de 8 bits como Apple, Commodore 64 o más, entre otros. Para PC compatibles se ..an desarrollado diferentes versiones de PROLOG. Existe un intérprete castellano para el módulo simple de la versión de micro-PROLOG para commodore, "CASTILL", desarrollado por E. Cansado y V. Araya de Microdatasistemas, en Santiago-Chile.

11. i) F. Hayer-Roth, Waterman y Lenat. **Building Expert Systems**. Massachusetts: Addison - Wesley Co., 1984.

    ii) J. G. Ganascia. "La Concepción de los Sistemas Expertos", en **Mundo Científico**. N. 53, 1985.

12. S. Avital y Shettleworth. **Objetives for Mathematics Learning, Some Ideas for the Teacher.** Ontario-Canada: Ontario Institute for Studies in Education. Boletín No. 3, 1968.

13. N. Antonijevic y C. Chadwick. Op. cit, pp 307 y 308.

14. Zoltan Dienes es el autor de los bloques lógicos, de los materiales multibase, de una serie de otros juegos o materiales estructurados para la enseñanza de la matemática.

    Sus principios metodológicos han sido muy influyentes en el desarrollo de la educación matemática contemporánea.

15. R. Feuerstein. **Instrumental Enrichment, an Intervention Program for Cognitive Modificability.** Baltimore-USA: University Park Press, 1980.

ANEXO

Programación en Lógica
Algunos conceptos esenciales

Un programa escrito en PROLOG consiste en un conjunto de hechos y de reglas. Los hechos se expresan por medio de proposiciones incondicionales: "A es el caso" (el hecho A se cumple incondicionalmente). Las reglas por medio de proposiciones de la forma: "A si P". Hechos y relaciones forman la base de datos, también llamada base de conocimientos o simplemente programa. Para que opere basta hacer preguntas. El sistema está preparado para inferir respuestas a partir de la base.

Hechos, relaciones y preguntas se expresan por medio de cláusulas de Horn. Estas son estructuras lógicas de la forma;

A si P1 y P2 y... y Pk

Que se pueden escribir, en el computador, del modo siguiente:

A : - P1, P2, ..., Pk.

A es la "conclusión" y los Pi son "las condiciones". Esta expresión se puede interpretar del modo siguiente: Si se cumplen P1 y P2 y...y Pk, entonces, infiera que A es verdadera.

De allí que un hecho, o proposición incondicional, se escriba:
"A : -". Para indicar que se cumple A sin condiciones.

Un conjunto de condiciones que no conducen a ninguna conclusión, sirven para representar su negación: no(P1, P2, ..., Pk), se expresa mediante la cláusula - sin conclusión - siguiente:

: - P1, P2, ..., Pk.

Para hacer una pregunta se usa la notación:

"?-A". Que se interpreta como: Se cumple A?

Para completar esta breve explicación, un ejemplo.

La siguiente expresión es una regla que queda definida por la relación "graduado/a":

X es graduado/a si X cumple con los requisitos de curso y
X aprobó tesis y
X aprobó examen de grado.

Observe que tiene la estructura de cláusula. Esta regla se puede escribir usando la sintáxis de PROLOG, en la forma siguiente:

```
graduado/a (X) :- requisitos-curso(X),
aprobó-tesis(X),
examen-grado(X).
```

Para completar la base debemos indicar al sistema lo que entenderemos por cada una de las relaciones nombradas en las condiciones, en esta oportunidad lo hacemos entregando los hechos siguientes:

requisitos-curso(Juan).
requisitos-curso(María).
aprobó-tesis(María).
aprobó-tesis(Manuel).
examen-grado(María).
examen-grado(Manuel).

En conjunto la regla y los seis hechos forman la base de conocimientos, nuestro programa. Si queremos que opere, hacemos preguntas.

Para comenzar un ejemplo de verificación: Es cierto que...? La pregunta siguiente inquiere si es cierto que María aprobó su examen de grado:

?-examen-grado(María).

El sistema responde:
verdadero.

?-aprobó-tesis(Elena).

El sistema responde:
falso / no

Independientemente de lo que suceda en la realidad, para el sistema ese hecho no existe en su base de conocimientos.

¿Quiénes cumplen los requisitos de curso?, esto se expresa por la pregunta:

?-requisitos-curso (X).

El sistema responde;
X = Juan
X = María
2 soluciones.

Si queremos saber quienes aprubaron la tesis y el examen, preguntamos:

?-aprobó-tesis(X), examen-grado(X).

En este caso el sistema responde:

X = María
X = Manuel
2 soluciones.

Si nos interesa saber los que están graduados peguntamos:

?-graduado/a(X).

El lector puede aplicar la regla que define la condición de graduado o graduada y tener una primera idea de lo que el sistema hace para inferir una respuesta simple como la planteada.

La respuesta es, en este caso:

X = María,
1 respuesta.

La regla recién aplicada tiene la forma:

A(X) si P(X) y Q(X) y R(X)

En este caso el sistema evalúa P(X) buscando en la base un valor que la satisfaga, encontrado ese valor, en nuestro caso es Juan, instancia Q(X) con la constante Juan y verifica su validez. No existe el hecho aprobó-tesis (Juan), luego retrocede a la primera relación, busca otra constante y encuentra a María. Ahora si se satisfacen la segunda y la tercer relación. Responde con el valor encontrado.

El mecanismo inferencial de PROLOG permite relacionar cualquier número de relaciones y hechos hasta verificar si una proposición se cumple o no, o bien hasta encontrar la(s) constante(s) que satisface(n) alguna(s) condición(es).

En términos generales se basa en un procedimiento como el siguiente:

Si A1, A2, A3...An son las reglas y hechos que definen un ambiente (podemos pensar que son los axiomas que definen un campo de valores y de relaciones posibles) entonces una pregunta T (pensemos en un teorema) puede ser evaluada contrastando su validez con la base. Esto mediante el estudio de la "consistencia" de la nueva base formada por los n Ai, y la proposición que resulta de negar T.

La pregunta es, ahora, ¿es consistente el conjunto de proposiciones A1, A2, A3,...An y no (T)?. Si niega esta proposición infiere que T es verdadero dados los Ai, el clásico modus tollens.

La fuerza y la validez de un programa descansa en la fuerza y en la validez de las reglas y hechos que lo definen.

LEARNING MATHEMATICS USING COMPUTERS OUTSIDE THE MATHEMATICS CLASSROOM

Richard Wolfe
The Ontario Institute for Studies in Education
Ontario, Canada

Introduction

This report is derived from work carried out at OISE as a collaborative project involving computer scientists interested in school applications of computers and social historians interested in history and social studies in the school curriculum. Experimentation with computerized database applications in the history classroom has been the focus of this collaboration.

The substantive goal of the computer application has been to have students carry out, or simulate carrying out, the activities of the professional historian, doing research in real historical material, such as census records. Indeed, the computer has become a common research tool for this kind of historical research. From the perspective of the computer scientist, the students can at the same time be acquiring important technological skills, from basic computer operations and keyboarding to use of commercial computer database programs.

I have an insidious interest in this. I am convinced that important mathematical content can be introduced and exercised when students use database applications. Mathematics, like language, is content that one encounters across the curriculum. Language educators have understood this and depend on teachers in other areas, such as social studies, to provide much of the instruction and training of students in writing. Mathematics educators need to be more serious in promoting *mathematics across the curriculum.*

Database Applications

In the history (or social studies or geography) classroom without computers, one sees many kinds of database activities suggested by textbooks and put in practice by teachers. Students construct lists of names, dates, and places; collect, collate, and tabulate data; and perform statistical comparisons. Our objective has been to computerize these existing activities and at the same time to increase the scale of the work. Students have worked with census data from 19th century Ontario communities and with municipal records of land and residential ownership in Toronto.

The introduction of computerized database applications into the history and social studies classroom requires initial training of students -- and teachers -- in the general use of computers and in the specific terminology and techniques of database programs. For example, students and teachers need to learn about file names, commands, keyboard entry and correction,disk storage, etc. They soon arrive at the point where mathematical skills and concepts are needed.

The introduction and reinforcement of mathematical skills in the science classroom is a long-standing tradition -- for example, with problems of time, distance, velocity and acceleration. This is perhaps less expected in the social studies classroom. Yet in a sense, the social-science, database computer applications and the associated mathematics are more important for many students, especially those who will not be science specialists but rather concerned with consumer, business, or administrative work and computer utilization. While most data processing is non-numeric, it still involves a great deal of mathematics.

Number systems

The first step in applying a database program to historical information is to define coding systems. This provides the opportunity to introduce important mathematics concerning number systems. What number theory does one need to code data? What can one learn about number theory while defining coding systems?

Perhaps the most well-known mathematical fact about computers is that they use binary numbers. Presumably, having students deal with computer arithmetic helps them learn facts about number systems -- for example, place value. There has been some expectation that students should know how to do some arithmetic in base 2.

This is not, however, very interesting mathematically. More interesting is that computers use finite numbers. The numbers are stored in fixed-length memory cells and therefore do not have infinite extent. The computer arithmetic is modular, forming a finite ring. Yet it is a complete arithmetic, with concepts of zero, and inverse.

In defining a coding system for some historical variable -- such as occupation -- the social studies teacher and student are led to considerations of data field width, size of number required, order of codes and numbers. The computer's modular arithmetic provides a ring of recurring codes. In this sense, the binary nature of the numbers is not especially important.

The coding can become more complicated, requiring fields and subfields, so we define mixed-base "numbers" that may have a different domain of digits for each position. We now have a new kind of arithmetic. What are its properties?

While this coding work can be carried out in a completely pragmatic fashion, one hopes that the mathematical choices and consequences can be made evident, and that students will gain insight into the mathematics of number systems.

Ordering data

The elements of a database record can be codes represented by finite numbers as described above, floating point numbers, and alphanumeric strings. Around the technique of floating point numbers lurks a whole other set of mathematical concepts: precision, roundoff, relationship of reals and rationals, etc. Strings can be thought of mathematically as numbers with a base the size of the alphanumeric code set.

The database record as a whole can be considered numerically. Each field has an enumerated domain, so the record is a "number" in a variable-base number system.

In this way, we can introduce the concept of sorting a database: The records are ordered according to the number system that the fields and their positions define. Usually we will be dealing with partial orderings, corresponding to a selection of fields. For example, we might order by last name, and within last name by first name. Multiple-key sorting is a concept that students find difficult, and perhaps the deeper mathematical explanation will be helpful. Partial ordering also leads to a concrete example of equivalence classes (all records with the same sorting keys).

Selection of records

A basic use of computerized databases for social studies is selecting information -- data retrieval. In standard computer database systems, this is said to be done with "Boolean algebra". If we look carefully, we see that Boolean (logical) operators and expressions are used together with computations carried out in the arithmetic of the data coding. For example, we can ask for all records where age is greater than 45 and sex is male; the Boolean operator "and" combines comparisons made in the arithmetic of coding of age and sex.

For mathematical learning, computerized data selection can make very concrete the relationship between:

- the Boolean and arithmetic determination of whether a record is to be selected or not;
- the set selection from the database, with conjunctions becoming intersections, disjunctions becoming unions, negations becoming complements; and

- the computerized operation needed to carry out the determination and the selection.

For example, one can make a concrete example of the Boolean fact that the negation of a conjunction is the disjunction of the negations, considering both the computation and the result. Everyone except males older than 45 years is the same as persons not male or 45 years old or less.

For the mathematical learning to be accomplished in this kind of application, it is important for the computer system to be "transparent" in the sense that it allows student to see how the work is being accomplished "inside" the computer. For example, it should be possible to have the computer work step by step, showing intermediate results.

Relational systems

To carry out substantively interesting social studies, the database applications and the corresponding mathematics have to get more sophisticated. Data selection from a "flat" file is not enough.

An example of more sophisticated work for social history is reconstructing family structures from birth and marriage records. From a mathematical point of view, these records define relations: X is the child of Y, A and B are married. These can easily be captured in a relational database system. In experiments in Ontario, we have successfully used relational database systems with students as low as grade 3 (8 years old). Relational database program have great significance in the commercial data processing business.

When students apply relational databases to study family histories, they are led naturally to utilize important mathematical concepts, implicit in the computations performed on the database and in the files (subsets of records) obtained.

1. a relation and its potential properties such as reflexivity, transitivity, etc.

2. the inversion of relations -- is a parent of, is a child of;

3. the composition of relations -- is a cousin of;

The student is doing practical work using advanced mathematical ideas, and the potential mathematical learning is in the areas of relational algebra, functional composition, and set theory.

Conclusion

Mathematical learning can and should take place across all areas of the curriculum. The use of computerized database applications in the social science and history classroom illustrates how important and interesting mathematics can be introduced in a way that enhances the learning of the subject area, provides practical training and experience with computers, reinforces contemporary study in mathematics, and provides an opportunity to present and practice advanced concepts in mathematics. This kind of work will require careful attention to the selection or design of computer programs so that the mathematical processes are visible. Also, the mathematics educator must work with computer scientists and subject area specialists -- such as social studies teachers -- to ensure that the opportunity for mathematical learning is appreciated and exploited.

Sesión de Preguntas y Respuestas del Panel C

1. ¿Qué opinión le merece a usted la situación de los estudiantes rurales y de las ciudades que no pueden disponer del uso de la computadora? Esta situación podría producir una separación social entre los que cuentan con mayores recursos y aquellos que menos pueden. Entiendo que para aprender a trabajar con una máquina hay que manejarla. ¿Qué alternativa se le deja para el aprendizaje de la matemática a aquellos estudiantes donde no exista energía eléctrica? ¿Tendremos los profesores de matemática, entonces que luchar primero por una transformación social, para llegar a toda la sociedad, o debemos conformarnos con buscarles alternativas a una parte de la sociedad?

Carlos A. Mansilla: La pregunta es por cierto bastante amplia, intentaré responder por parte.

Entiendo que usted tiene razón ya que la computadora puede agrandar las diferencias sociales, por eso creo que es una obligación de la escuela pública poner la máquina al alcance de todos los alumnos, apuntando principalmente a las clases más desprotegidas. Estas últimas serían las más perjudicadas si la escuela pública ignora la máquina, porque seguramente las clases pudientes alfabetizarán a sus hijos a través de instituciones privadas deseosas de hacerlo. La enseñanza de la informática en la actualidad es un gran negocio.

En cuanto a la parte de la pregunta sobre alternativas para alumnos donde no existe energía eléctrica quiero aclarar que ese no es el caso de mi país donde debido a planes nacionales y provinciales de electrificación rural, la electricidad llega a casi todos los puntos del país. La alternativa estaría centrada en la creatividad de los educadores. No es mi punto de vista que no se puedan dar clases de matemática sin computadoras, simplemente pienso que es mejor.

La última pregunta es más bien de carácter sociológico, y podría ser tema para un largo debate. Aquí el problema es quién es primero el huevo o la gallina. Fijaré mi posición al respecto: pienso que la pobreza de un país es un problema educativo y cultural más que un problema económico. Los ejemplos de esto abundan en el mundo, Japón es un país pobre en riquezas naturales, sin embargo es una potencia, mi país es riquísimo en recursos, sin embargo es un país pobre. No olvidemos las palabras de Jesús: Al que tiene hambre no le des pescado, enséñale a pescar. Creo que debemos enseñar a pescar desde la escuela pública, la transformación social vendrá sola.

2. ¿En cuáles niveles de la enseñanza es empleada la computadora en Puerto Rico?

Jorge López: Se intenta utilizar el computador en todos los niveles educativos de los más elementales a los más avanzados, incluyendo el nivel universitario. El Departamento de Instrucción tiene varios proyectos que hoy día se realizan en las escuelas del país.

3. ¿Cuál es el "estado del arte" del uso de calculadores en las escuelas de su país?

Carlos A. Mansilla: Los calculadores en Argentina se usan regularmente como complemento de la educación tradicional. No se han desarrollado temas específicos para ser tratados con calculadoras.

Alrededor de 1975 hubo una fuerte oposición al uso de calculadoras en las escuelas, llegándose incluso a prohibir su uso en muchas de ellas.

4. ¿Aprueba usted el uso de calculadora de mano en los primeros años del nivel primario? Señale, por favor, ventajas y desventajas.

Jorge López: ¡Sí! La calculadora brinda un nuevo recurso al estudiante para alcanzar conclusiones de índole numérica. El estudiante, al término de sus estudios preuniversitarios deberá ser diestro en los cálculos con la ayuda de la computadora, mediante la estimación y mediante la aplicación de los algoritmos numéricos de "papel y lápiz". La calculadora mejora el aprovechamiento aún en el área de las destrezas básicas.

Parece sin embargo ser contraproducente en el nivel del cuarto grado, grado en que se suelen enseñar las tablas de multiplicación.

5. Usted afirmó que en su provincia, Chaco, Argentina, el Logo se usa a nivel primario. ¿En particular qué hacen? ¿Qué objetivos persiguen?

Carlos A. Mansilla: En mi provincia la actividad que mencioné la lleva a cabo el proyecto MEVAL mediante un convenio entre el Consejo General de Educación de la Provincia del Chaco y una fundación holandesa. Disponen de microcomputadoras con versiones de Logo en Castellano, las cuales son llevadas a las escuelas por períodos determinados, trasladándolas a otras una vez terminada la tarea. El principal objetivo es la alfabetización en computación. Para mayores informes recomiendo escribir a:

Proyecto MEVAL
Consejo General de Educación
Casa de Gobierno - 3er. Piso
3500 Resistencia - Chaco
Argentina

6. ¿Qué métodos se desarrollan actualmente en la Argentina para enseñar a los niños de la primaria a programar las calculadoras? ¿Existen libros de textos a este nivel para lograr tales fines? ¿Qué proyectos e inversiones hace el estado?

Carlos A. Mansilla: Creo que el colega cometió un error en su pregunta al decir calculadoras en lugar de computadoras. Para programar calculadoras no se está haciendo absolutamente nada.

Para programar computadoras puedo describir lo que estamos haciendo en nuestra provincia en la escuela secundaria. En estos momentos lo estamos haciendo con cuatro escuelas. Los alumnos reciben una clase teórica por semana y pueden trabajar en el laboratorio una hora semanal a razón de un alumno por máquina. Para la escuela primaria recomiendo dirigirse al proyecto MEVAL.

No conozco que existan libros de texto para el nivel primario.

Los proyectos e inversiones del estado son muy limitados, no estoy en condiciones de brindarle mucha información sobre el nivel primario. Para el nivel secundario puedo hacerle llegar información si me facilita su dirección.

7. ¿En qué grado o edad se le debe permitir al niño el uso de las calculadoras?

Jorge López: Desde los grados primarios. Hay actividades provechosas, (que incluyen la calculadora) que se pueden utilizar para mejorar el aprovechamiento en todos los niveles educativos. El grado más problemático es el cuarto.

8. a) Dada la naturaleza de la formación elemental operacional, ¿cree usted que se puede usar a este nivel la calculadora y que rinda efectos positivos en nuestros alumnos?

Carlos A. Mansilla: Pienso que la calculadora es una herramienta y como tal debe ser usada en todos los niveles y modalidades de la educación. La calculadora no razona ni puede pensar, el concepto matemático de la operación lo tiene que poner el alumno, la máquina simplemente hace la parte mecánica. No creo que aprender las tablas de multiplicar de memoria sea más productivo que usar la calculadora.

b) ¿No cree usted que lo que hace la computadora es simplemente ayudar a resolver y no realmente mejorar su formación intelectual y formal en matemática?

Carlos A. Mansilla: Considero que la computadora puede tener ambos efectos: como herramienta y como elemento formativo. Sería algo extenso descubrir los distintos usos de la computadora en sus capacidades para ayudar al estudio de la matemática. A lo largo de mi exposición di algunos ejemplos de esto: tales como que el alumno programador hace mejor uso de variables, revisa más frecuentemente sus resultados y es más ordenado. Por otra parte, la computadora permite la visualización de muchos conceptos matemáticos, lo cual es casi imposible sin su ayuda.

9. ¿Qué utilidad le puede proporcionar a los alumnos el uso de la calculadora sin antes manejar las destrezas y habilidades básicas?

Jorge López: Un estudiante de matemática debe ser competente en el cálculo con papel y lápiz (práctica de los algoritmos tradicionales) en la práctica de la estimación matemática y el uso de la calculadora electrónica. La calculadora, se ha demostrado, puede ser de suma utilidad para elevar los niveles de aprovechamiento matemático en muchas áreas incluyendo el área de las destrezas y habilidades básicas.

10. ¿Qué edad piensa usted debe ser la idónea para la alfabetización informática y en qué consistiría la misma?

Carlos A. Mansilla: Es una pregunta realmente difícil de contestar en forma terminante y depende mucho del ambiente socioeconómico donde crece el niño. Si éste puede tener acceso a una máquina a los tres o cuatro años esa es una buena edad para comenzar, y podría hacerse mediante juegos educativos. Con ello el niño ya toma su primer contacto con el mundo de la informática. En la escuela primaria puede comenzarse la alfabetización en informática trabajando con el lenguaje logo, el cual es muy accesible y entretenido. Pienso que en la escuela secundaria la tarea será un mandato en un futuro cercano. No se puede ignorar más la computadora. A nivel secundario, la alfabetización consistiría en el aprendizaje sobre computadoras, cómo trabajan, para qué sirven, cuál es su potencialidad y terminando con programación. Esta última debería ser en Pascal, pero por razones económicas es más factible usar el BASIC.

PANEL D: *Cómo Mejorar la Enseñanza de la Geometría en las Escuelas Primarias y Secundarias*

Coordinador: *Emilio Lluis*

LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA. (Primer Ciclo Secundario 11-14 años)

Emma Castelnuovo

Italia

Quiero empezar con unas consideraciones generales. Cuando los muchachos frecuentan la escuela durante pocos años es muy importante que este período escolar influya en ellos, dandoles algo útil para su vida. Pero, muy frecuentemente estos objetivos no se tienen en cuenta, y -como decía Eduardo Luna en su conferencia en Guadalajara -"nadie se pregunta si lo que el niño aprende le va a servir para la vida".

Consideremos ahora el tema particular: ¿Cómo puede la geometría influir sobre el alumno que será un día un futuro ciudadano?, ¿de qué manera puede motivarlo? Me parece que las respuestas a estos interrogantes se pueden resumir en dos puntos:

1. El muchacho está estimulado y nunca olvidará el argumento si esto tiene una inmediata aplicación en la realidad que lo rodea;

2. El muchacho recibe un fuerte estímulo si la clase motiva sus facultades de observación.

Es fácil entender el punto 1): una geometría de medidas, de semejanzas, en fin una geometría práctica tiene un reflejo inmediato en la realidad aplicándose al trabajo del campo, en los diversos tipos de construcciones, en breve a la vida de todos los días.

Más difícl es entender el sentido del punto 2): ¿Qué significa motivar las facultades de observación? ¿Puede la demostración de un teorema tener este papel? Seguramente <u>no</u>. Un desarrollo lógico de teoremas nunca motiva a los alumnos; al contrario, permanece, muy frecuentemente como un recuerdo aburrido, inútil, o peor, que inspira miedo. Estas consideraciones nos conducen a reflexionar: Está claro que si se quiere motivar a la observación, la geometría que se presenta no debe ser estática; no se observa a un rectángulo dibujado en una pizarra ni tampoco un rectángulo realizado en cartulina. Es bien conocido desde un punto de vista psicológico que para motivar a la observación se necesita realizar una variación continua. Por lo tanto, volviendo a la matemática, la observación está ligada al concepto dinámico de <u>función</u>.

Mi tesis es que la enseñanza de la geometría no debe separarse de las otras ramas de la matemática, no debe permanecer aislada en una torre de marfil.

En conclusión: una geometría dinámica, ligada al concepto de función... Pero ¿cómo desarrollarla? Me parece que es suficiente un ejemplo para ilustrar mis ideas. Voy a presentar un problema que tuve la oportunidad de desarrollar a lo largo de muchos años con mis alumnos italianos de 11-12 años y con alumnos de otros países, particularmente en Nigeria, Africa. Se trata de un problema que es ya clásico en las escuelas italianas constituyendo muy frecuentemente el comienzo de un curso del primer ciclo secundario: es "el problema del cordel". Tengo un cordel amarrado bien extendido entre las manos de manera que se forme un rectángulo. Acercando y alejando las manos se obtienen muchos rectángulos diferentes. Es claro que el perímetro no cambia: es el cordel. ¿Y el área? A la pregunta ¿qué le sucede al área?, todos los alumnos contestan "El área es siempre la misma porque el perímetro no cambia". Dice, alguien: "¿Cómo podría el área salir del contorno si este es siempre el mismo?" "El área se desplaza...". Otra respuesta que parece más lógica: "Como el área del rectángulo se halla multiplicando base por altura, y como lo que se pierde en altura se gana en base, es claro que el área no cambia".

Respuestas de este tipo se tienen a todas las edades. Estas discusiones son muy interesantes porque muestran la gran confusión entre perímetro y área, y entre adición y multiplicación. Muestran también una disposición natural de la inteligencia hacia las constantes.

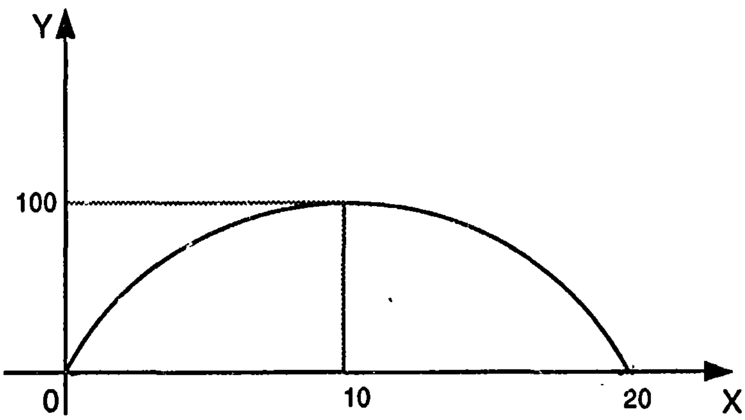
Es la observación del caso límite que obliga a reflexionar: es claro que en este caso, cuando la altura (o la base) es cero, el área es cero. A la pregunta "¿desaparece el área de golpe? Muchos contestan que "No"; pero dicen "Al comienzo el área no cambia; luego..., a la mitad empieza a disminuir". Para tener unas ideas más claras vamos a pasar a los números. Si por ejemplo, el perímetro es de 40 centímetros, significa que la base más la altura es 20; vamos a construir dos tablas:

base	altura
0	20
1	19
2	18
.	.
.	.
.	.
9	11
10	10
11	9
.	.
.	.
.	.
18	2
19	1
20	0

base x	área y
0	0
1	19
2	36
.	.
.	.
.	.
9	99
10	100
11	99
.	.
.	.
.	.
19	1
20	0

"¿Hay sólo estos diez casos?". La variación continua da un sentido concreto a los números decimales... y por lo que concierne al área se entiende bien que se presentan casos simétricos con respecto al caso "central", el del cuadrado. Y se entiende, observando la tabla, el porqué la primera intuición conducía a un error: en efecto la variación del área cerca del máximo es muy pequeña.

La tabla del área y la observación de los rectángulos conducen a traducir el fenómeno a un gráfico. Los alumnos piensan, en seguida, que debe tratarse de una semi-circunferencia. Pero el gráfico nos dice que no se trata de un círculo.



Se trata de una parábola. Antes de hablar de lo que puede representar esta curva para los muchachos, quiero destacar la enorme importancia de los gráficos desde un punto de vista didáctico-social. En mi opinión se deben introducir lo más pronto posible, sea que se trate de gráficos matemáticos, como este, sea que se trate de gráficos empíricos como la producción de este o aquel producto agrícola, café, bananas,..., claro algo del país donde se vive. Los gráficos son siempre muy importantes; pero para entender el sentido de un gráfico, es necesario antes empezar a construirlos... Volviendo ahora al problema del cordel, el gráfico es una parábola. Un problema de geometría conduce a mirar la realidad; la parábola siempre se ve pero no se la observa: la curva descrita por una pelota es una parábola, y por lo tanto se nos presentan muchas formas de parábolas, más o menos "estrechas". La parábola en los faroles de un coche ¿por qué? En los repetidores de la radio ¿por qué? La propiedad del foco. La parábola y la energía solar; ¿cómo se puede recoger el máximo de la radiación solar? Los arcos parabólicos en las construcciones ¿por qué? Una cantidad de aplicaciones invitan a observar la realidad, y es la realidad que nos lleva, otra vez, a estudios abstractos de matemática, en particular de la geometría.

Se empieza, poco a poco, a darse cuenta de la importancia de la observación, en el estudio de la geometría; una observación que, podrá, más tarde, transformarse en un "saber ver en matemática".

COMO MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA EN LAS ESCUELAS PRIMARIAS Y SECUNDARIAS

Luiz Roberto Dante
Universidade Estadual de São Paulo
Rio Claro-SP, Brasil

1. INTRODUCCION

La enseñanza de la geometría (bien como otros asuntos específicos) ha sido muy discutida en los últimos congresos de educación matemática sin que hayan ocurrido cambios significativos en las clases de las escuelas primarias y secundarias. Recuerdo que el Prof. Santaló, en 1979, citó el Vol. III de "Nuevas Tendencias en la Enseñanza de la Matemática", UNESCO, 1972, donde se afirma que "La concepción moderna de la enseñanza de la geometría sigue sujeta a nuevas investigaciones pedagógicas y el establecimiento de un programa aceptable para ella es actualmente uno de los problemas curriculares más difíciles". Y concluyó: "transcurridos 7 años, la situación sigue más o menos la misma".

Otros congresos se realizaron, otras publicaciones fueron elaboradas y, en todas se ha discutido el problema de la enseñanza de la geometría, pero casi no se ha operado ningún cambio en las clases de las escuelas primarias y secundarias. Podemos repetir: "transcurridos 17 años, la situación sigue más o menos la misma".

Es necesario hacer algo en esta dirección. Es fundamental buscar mecanismos adecuados para que las investigaciones y estudios que se hacen en educación matemática en las instituciones de enseñanza universitaria y, las discusiones y sugerencias que se dan en las conferencias y congresos, sean presentadas en forma didáctica y accesible a los maestros y a los alumnos de las escuelas primarias y secundarias que son la primordial razón de la existencia de esta nueva y entusiasmante área de conocimiento: la educación matemática.

En este sentido, invito a cada participante de esta VII Conferencia a asumir el compromiso de llevar a sus países, a sus provincias, a sus ciudades, a sus distritos o delegaciones regionales de educación, a los maestros y alumnos, nuestras discusiones, nuestras inquietudes y nuestras propuestas relacionadas con los temas que aquí estamos discutiendo. Solo así estaremos HACIENDO educación matemática y pasando del discurso a la práctica. Y quizás, no escucharemos frases como esta: "transcurridos 20, 30 años, la situación sigue más o menos la misma".

PRINCIPALES DIFICULTADES

2.1. Formación inadecuada de los maestros de las escuelas primarias y secundarias en geometría (en contenido y metodología). Esto hace que ellos se resistan a desarrollar temas geométricos, dando más énfasis y dedicando mayor tiempo de sus clases a aritmética y álgebra.

2.2. Poca cantidad y variedad de textos adecuados (en contenido y metodología) de geometría para alumnos y maestros de las escuelas primarias y secundarias.

2.3. Poca relación de la geometría con otros temas de la matemática y con otras asignaturas del currículo.

2.4. La gran mayoría de los alumnos tienen aversión a la geometría por la manera como se presenta (deductivamente).

2.5. Cuando se desarrollan las deducciones (por pequeñas y simples que sean) no son, en general, descubiertas o intuidas por el alumno, sino literalmente impuestas con exceso de formalizaciones.

2.6. No hay una deseable y continuada graduación, desde el nivel bien elemental, donde se debe hacer una geometría experimental, física, manipulativa, intuitiva, hasta el nivel del último año de la secundaria, donde el alumno debe tener una idea razonable de lo que es un sistema deductivo.

2.7. No queda claro, ni para los alumnos ni para los maestros, cómo y cuándo se debe hacer la necesaria conexión entre la geometría experimental (concreta) y la geometría deductiva (abstracta).

2.8. Los problemas geométricos no son sacados del cotidiano vivir de los alumnos. Esto hace que ellos, en lugar de hacer geometría por el método heurístico, se limiten a estudiarla y repetirla en las pruebas y exámenes.

2.9. Parece que no hay aún distinción clara entre lo que es la geometría como materia de investigación entre matemáticos profesionales, para la cual hay que buscar y exigir total coherencia, sistematización y rigor, y lo que es la geometría como parte informativa y formativa de la matemática que debe ser enseñada didácticamente a los alumnos de 7 a 16 años que tienen vocaciones distintas como también capacidades de comprensión y raciocinio limitadas por sus edades.

3. CAMINOS POSIBLES EN LA DIRECCION DE UNA MEJOR ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA EN LA ESCUELA DE 1° GRADO (7-14 años)

3.1. Los primeros años (7-11 años)

La geometría de los 7-11 años debe ser, esencialmente, la geometría experimental, empírica, manipulativa, concreta, etc. De un modo general, la geometría debe ser trabajada con los siguientes:

3.1.1. Objetivos

a. Explorar y sentir el espacio posibilitando que los niños comprendan mejor el mundo físico en que ellos viven.

b. Reconocer, clasificar y, de modo intuitivo, estudiar las figuras geométricas (espaciales, planas y lineales) y sus propiedades.

c. Asociar números a las figuras geométricas, midiendo y contando.

d. Hacer que los niños elaboren argumentos pequeños y simples basados en raciocinio lógico.

3.1.2. ¿Cómo alcanzar estos objetivos?

Los objetos del mundo tienen una forma, un tamaño y ocupan un lugar en el espacio. La geometría estudia formas, se preocupa del tamaño y de la posición de las figuras. Entonces, para alcanzar los objetos citados anteriormente, es necesario dejar los niños, con toda la fuerza de su creatividad y curiosidad, libres para pensar y actuar en un ambiente rico de objetos del mundo físico: manoseando, comparando, observando semejanzas y diferencias, clasificando, construyendo modelos, planificando cajas, recortando y haciendo dobleces en papel, diseñando, contando, midiendo, etc.

Es importante hacer el camino de lo concreto a lo abstracto, del estudio de las figuras espaciales (objetos palpables de lo cotidiano de los niños) hasta las figuras lineales (línea recta, segmento de recta, polígono, etc.), pasando por las figuras planas (regiones rectangulares, triangulares, circulares, etc.).

3.2. Los últimos años (12-14 años)

Agregamos a los objetivos anteriores dos más:

e. Hacer la conexión entre la geometría concreta y la geometría deductiva.

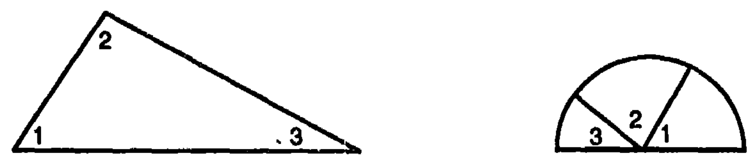
f. Hacer demostraciones locales de algunas propiedades geométricas.

3.2.1. ¿Cómo alcanzarlos?

Dando seguimiento a los primeros años, la geometría va pasando poco a poco de totalmente empírica, manipulativa a semi-empírica hasta que en los últimos 2 años aparezca la introducción a la dedución.

No se trata aquí en este nivel de axiomatizar globalmente la geometría con una secuencia de decenas de axiomas, definiciones y teoremas de una manera lineal y rigurosa. Lo que se pretende es que el alumno haga algunas demostraciones locales. Esto se puede hacer en el caso de la suma de las medidas de los ángulos de los polígonos, en el caso del cálculo de las áreas con figuras planas, etc. Considéranse conocidas algunas propiedades y se demuestran otras.

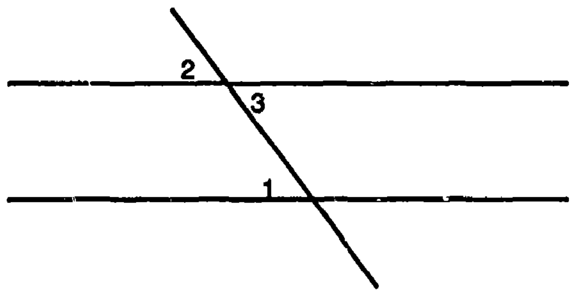
En esta etapa, lo experimental y lo deductivo se complementan. Inicialmente, el alumno con regla graduada, compás, transportador y otros instrumentos, traza figuras en el papel, observa, mide, recorta, compara, hace superposición, etc. Comprueba (constata), por ejemplo, por inducción, que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.



En la secuencia esto es demostrado localmente aceptando como verdaderas las afirmaciones siguientes:

a. Por un punto fuera de una recta hay una única recta paralela a la recta dada.

b. Angulos correspondientes y ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

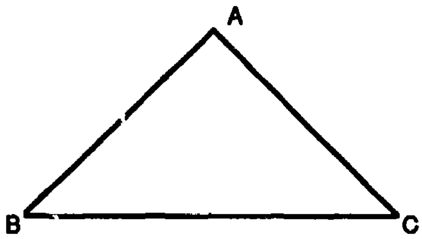


$\angle 1 = \angle 2$

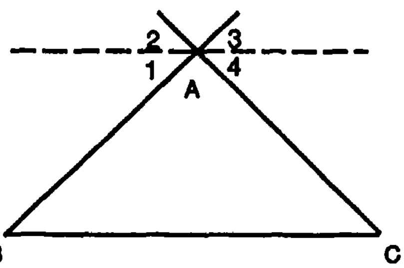
$\angle 2 = \angle 3$

<u>Demostración</u>

Dado el triángulo ABC,



Por (a.) podemos considerar la recta que pasa por el punto A y es paralela a la recta conteniendo BC



Por (b.), tenemos: $\angle C = \angle 2$ Y $\angle 2 = \angle 4 \Rightarrow \angle 4 = \angle C$

$\angle B = \angle 3$ Y $\angle 3 = \angle 1 \Rightarrow \angle 1 = \angle B$

Como,

$$m\angle 1 + m\angle A + m\angle 4 = 180°$$

entonces

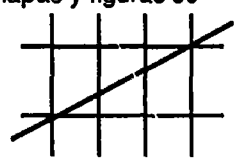
$$m\angle B + m\angle A + m\angle C = 180°$$

He ahí el método deductivo aplicado localmente, completando el hacer empírico. De dos afirmaciones aceptadas como verdaderas (a y b), deducimos otra afirmación verdadera: la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

3.3. Aún buscando caminos

3.3.1. Geometría y Vida

Es muy importante y motivador relacionar la geometría con la vida cotidiana. Plagiando los pitagóricos, es posible decir que "todo es geometría": las formas de los objetos del mundo; la naturaleza (animales, vegetales y minerales) con sus simetrías y regularidades; las medidas de la vida práctica (longitud, área y volumen); el uso del ángulo en astronomía y navegación; la presencia de la geometría en el arte; la ampliación y reducción de fotos, mapas y figuras se hace a través de la semejanza, la rigidez del triángulo aplicada en la necesidad de una tranca en el portón; la colocación de pisos y los polígonos regulares, etc., etc.

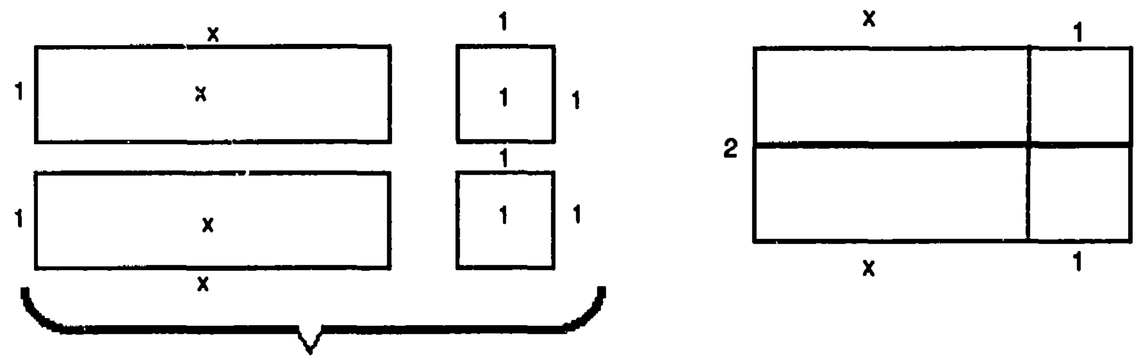


3.3.2. Geometría Plana y Espacial

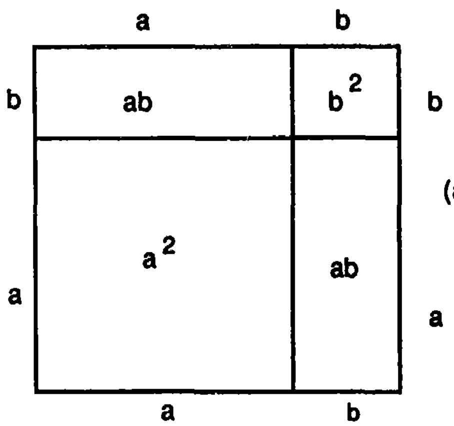
No es conveniente, en las clases, separar rígidamente la geometría del espacio de la geometría plana. Hay partes simples de la geometría espacial que se pueden y se deben estudiar en la primaria, como también, hay partes más difíciles de la geometría plana que pueden ser dejadas para la secundaria. Por otro lado, en lo posible ambas deben ser tratadas conjuntamente.

3.3.3. Geometría y Algebra

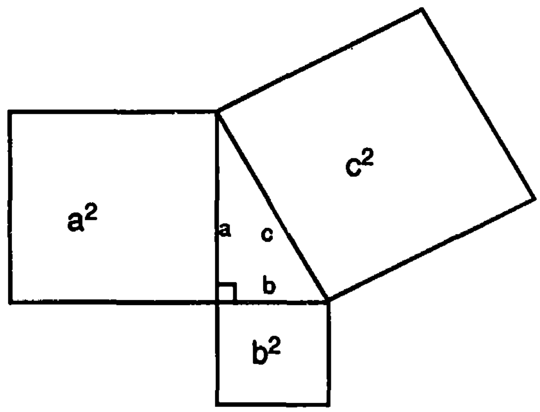
No es conveniente separar rígidamente la geometría del álgebra. En una clase de álgebra, como por ejemplo la factorización, hay instantes en que es muy imporante dar la visión geométrica.



$$2x + 2 = 2\ (x + 1)$$



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Además de esta conexión, entre geometría y álgebra, es conveniente que haya un equilibrio entre el número de clases de álgebra y el número de clases de geometría, no abandonando ninguna de ellas.

3.3.4. <u>Geometría y Diseño Geométrico</u>

Las construcciones geométricas "no puras", o sea, aquellas que permiten el uso de la regla graduada, compás, transportador, etc., son muy útiles en la comprensión de hechos y propiedades geométricas. Las justificaciones de construcción de perpendiculares, bisectrices, mediatrices, triángulos, etc., nos conducen naturalmente a los aspectos deductivos de la geometría.

3.3.5. Geometría e Historia de la Matemática

La historia de la matemática es un elemento de motivación para nuestras clases. Charlas de la historia de la geometría, en la medida que los conceptos son desarrollados, hacen las clases más interesantes y el aprendizaje más significativo. Por ejemplo, hablar sobre la filosofía pitagórica, sobre el teorema de Pitágoras y su relación con el descubrimiento del irracional $\sqrt{2}$, despiertan en los alumnos un gran interés. Presentar la evolución histórica de los conceptos es más motivador que su presentación lógica, abstracta y de manera acabada.

3.3.6. Geometría y Transformaciones

Es interesante trabajar intuitivamente con las ideas de simetría, reflexión, rotación, traslación y homotecia, para diversificar el enfoque de la geometría. No nos parece conveniente en este nivel hacer toda la geometría vía transformaciones.

3.3.7. Geometría y Arte

El arte y la geometría caminan juntos. Los trabajos artístico - geométricos elaborados, por ejemplo, en el geoplano, hacen que los niños aprendan conceptos geométricos creando y haciendo geometría y arte. Pequeñas explicaciones sobre la razón áurea, sobre el rectángulo áureo y su relación con los cuadros de Leonardo da Vinci merecen ser mencionadas.

4. PALABRAS FINALES

Es fundamental mejorar la formación de los maestros con respecto a la geometría, introduciendo varios enfoques de contenidos y metodologías en los cursos de preparación y de capacitación. Es necesario también elaborar materiales instruccionales adecuados para alumnos y maestros.

Sólo así tendremos alumnos y maestros haciendo geometría, con satisfacción, en las clases de matemática. Sólo así tendremos ciudadanos raciocinando y argumentando más lógicamente y entendiendo mejor el mundo en que viven. Como dice Pogorélov:

> "La tarea esencial de la enseñanza de la Geometría en la escuela consiste en enseñar al alumno a raciocinar lógicamente, argumentar sus afirmaciones y demostraciones. Muy pocos de los que salen de la escuela serán matemáticos y mucho menos geómetras. También habrá los que no usan, ni siquiera una vez, en su actividad práctica, el teorema de Pitágoras. Sin duda, difícilmente habrá uno solamente que no necesite raciocinar, analizar o demostrar".

BIBLIOGRAFIA

1. UNESCO- Educación Matemática en las Américas - V" 1979. pág. 30-74.

2. ICME - Proceeding of the Fourth International Congress on Mathematical Education - Birkhaüser - 1983, pág. 153-178.

3. NCTM- Yearbook 1973 - "Geometry in the Mathematics Curriculum" - Thirty sixth Yearbook.

4. NCTM - "Readings in Geometry From the Arithmetic Teacher", 1972.

5. O'Daffer, P. G. y Clemens, S. R. - "Geometry: An Investigative Approach", Addison - Wesley Publ., 1976.

6. POGORÉLOV, A. V. - "Geometría Elemental", Editorial "MIR", Moscú, 1974.

7. DANTE, L. R. - "O Método Mosaico em Geometria", em Educación Matemática en las Américas - V - UNESCO, 1979, pág. 43-48.

8. DANTE, L. R. - "Geometria no 2° Grau" em Subsidios para a implementação da proposta curricular de Matemática para o 2° Grau - Vol. I, SP, 1980.

9. PREMEN/MEC - UNICAMP - "Geometria Experimental" - 1978.

10. SANTALO, L. A. "Causas y efectos de las tendencias actuales en la Enseñanza de la Geometría" - en Educación Matemática en las Américas - V - UNESCO, 1979, pág. 54-64.

11. BARBOSA, J. L. M. - "Geometria Euclidiana Plana", Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) - RJ, 1985.

12. JURGENSEN, y otros - "Geometría Moderna - Estructura y Método", Publicaciones Cultural S. A., México.

13. Colección: Lecciones Populares de Matemáticas - Editorial MIR - Moscú.

a) Construcciones geométricas mediante un compás.
b) Curvas maravillosas.
c) División de un segmento en la razón dada.

d) División de figuras en partes menores.
e) Acerca de la demostración en geometría.
f) Inducción en la geometría.
g) Figuras equivalentes y equicompuestas.
h) Método cinemático en problemas geométricos.
i) Teoremas de configuración.
j) Líneas más cortas - problemas de variaciones.

14. KUTUZOV, B. V. - "Geometry", Studies in Mathematics, Vol. IV, SMSG, 1960.

15. COXETER, H. S. M. - "Introduction to Geometry", J. Wiley, New York, 1963.

16. CASTRUCCI, B. -"Fundamentos de Geometria", Livros Técnicos, 1979, SP.

17. HILBERT, D. y Cohn Vossen, S. - "Geometry and Imagination", Chelsea Publ. Co., New York, 1956.

18. MOISE - DOWNS - "Geometría Moderna" - Editora Edgard Blucher, SP.

GEOMETRIA, INVESTIGACION Y COMPUTADORES

Alan Hoffer
Boston University
U. S. A.

Introducción

Quiero expresar mi admiración a Ubiratam D'Ambrosio por su liderazgo durante tantos años y por los muchos obstáculos que ha tenido que vencer para establecer el éxito de esta organización; a Eduardo Luna por su creatividad y paciencia al organizar esta conferencia; a los demás miembros de este panel y a Claude Gaulin por sus contribuciones al aprendizaje de geometría.

En caso de que sus mentes se alejen de las presentaciones, les voy a proponer un problema para que lo piensen. Es un problema famoso de geometría, uno que pueden intentar resolver tanto adultos como niños a diferentes niveles de sofisticación. Ustedes saben que se puede coger un papel en forma rectangular y enrrollarlo (de dos modos) para formar un cilindro rectangular (Figura 1a). Suponga que quiere hacer un cilindro oblicuo. El problema simplemente es: cuál forma de papel se debe usar? (Figura 1b).

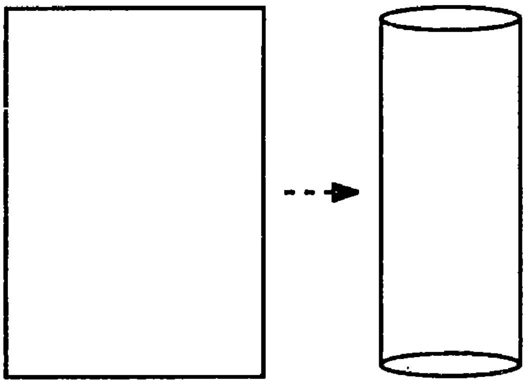


Figura 1a.

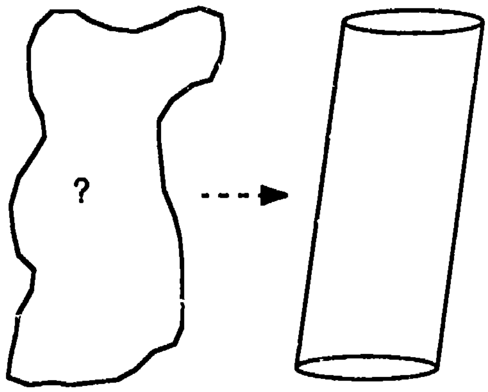


Figura 1b.

Un Modelo para la Enseñanza de Geometría

Mi interés en geometría consta de tres áreas: 1. Geometría como una invención profunda de la mente humana, uno de los empeños intelectuales más antiguos, y una fuente de ideas provocativas para usar con niños, para ayudarlos a razonar y desarrollar imaginación visual y relaciones espaciales. 2. Geometría como fuente de investigaciones sicológicas para ayudarnos a entender cómo aprenden y entienden los niños, cómo es su interacción con ese aprendizaje, y cómo los afecta. 3. Geometría como un vehículo para investigar el poder y las capacidades potenciales de la tecnología del computador y las implicaciones de esa tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Como marco para mis estudios de investigación escogí el trabajo de Pierre y Dina Van Hiele, de Holanda. Reportes preliminares de éste y otros trabajos relacionados aparecen en tres artículos. En [Hoffer, 1978], intenté describir cómo puede ayudar la teoría van Hiele a los profesores de nivel elemental a organizar la enseñanza de geometría. En [Hoffer, 1981], intenté demostrar a profesores de nivel secundario como se entrelaza la estructura van Hiele con el desarrollo de habilidades de geometría. Y en [Hoffer, 1983], intenté extender el modelo a otras materias fuera de la geometría; de encajar el concepto a una teoría matemática, y reportar investigaciones recientes en esa área. Quiero hacer notar que el modelo fue presentado por los van Hiele, [ver van Hiele, 1959] hace treinta años. Influencia de dicho trabajo apareció en reportes de la Unión Soviética hace veinte años como está descrito en [Pyshkalo, 1968]. Pasaron muchos años hasta que esas ideas fueron recibidas en las Américas.

El marco van Hiele tiene tres componentes esenciales, como se puede ver en la Figura 2. Ante todo se trata de ayudar a los niños a desarrollar perspicacia matemática. Los van Hiele explican que una persona tiene perspicacia en un área si cuando se le presenta un problema en esa area, la persona i) es capaz de comenzar, de tomar alguna acción hacia la solución del problema; ii) produce acciones que tratan correctamente con las estructuras del problema; y iii) ejecuta acciones deliberadamente y con confianza. Uno puede imaginarse situaciones que demuestran que estas tres características son independientes entre sí.

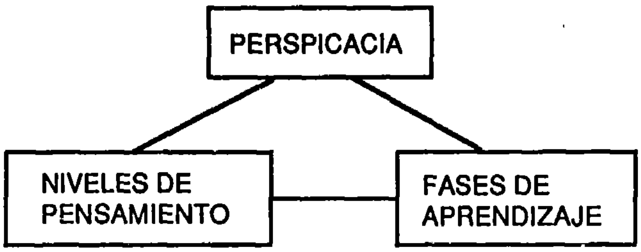


Figura 2

El aspecto del nivel de pensamiento de la teoría van Hiele ha llamado mucho la atención. La idea aquí es que puede haber grandes brechas entre las dinámicas de comunicación de niños y adultos. En particular, explicaciones, preguntas y tareas presentadas a los niños por adultos pueden, por el modo en que se presentan, plantear obstáculos para los niños. Estas barreras de comunicación se pueden describir en términos de niveles de pensamiento. El nivel 0 es el nivel de totalidad, en el cual los niños pueden reconocer formas, tales como un cuadrado, por su apariencia global, aunque no ven explícitamente propiedades de las figuras. El nivel 1 es el nivel de análisis, en el cual los niños pueden dar explícitamente las propiedades de las figuras, tales como diagonales que se bisectan, sin entender cómo se interrelacionan figuras o propiedades de figuras. El nivel 2 es el nivel de implicación, en el cual los niños pueden entender que hay implicaciones entre figuras o entre propiedades de figuras, tales como "rectángulo implica paralelogramo", pero son incapaces de explicar explícitamente por qué son verdad esas implicaciones. El nivel 3 es el nivel de deducción, en el cual los niños pueden demostrar explícitamente que sus afirmaciones sobre las figuras son correctas, tales como por qué los lados opuestos de un paralelogramo son iguales. El nivel 4 es el nivel riguroso, en el cual los estudiantes tienen un entendimiento de las fundaciones matemáticas de la geometría.

Las fases de aprendizaje forman la tercera componente del modelo van Hiele. Forman el esqueleto para un plan de enseñanza-aprendizaje, un modo de diseñar experiencias de aprendizaje para ayudarles a los estudiantes a progresar en los niveles de pensamiento y así procurar tener perspicacia en la materia. La fase 1 es una fase inquisitiva, en la cual el profesor guía una discusión usando el vocabulario propio del tópico sobre el cual los estudiantes se sienten motivados a hacer preguntas y a enterarse de problemas importantes y direcciones de estudio. La fase 2 es una fase de orientación directa, en la cual el profesor da instrucciones específicas o hace preguntas que requieren "respuestas de un paso" a los estudiantes. Durante esta fase los estudiantes no tienen que hacer decisiones sino seguir instrucciones y familiarizarse con las estructuras del tópico. La fase 3 es una fase de explicitación, en la cual los estudiantes describen lo que han observado sobre las estructuras durante las dos fases anteriores. La fase 4 es una fase de orientación libre, en la cual los ostudiantes tratan de resolver problemas haciendo sus propias decisiones sobre el curso de acción que deben seguir. La fase 5 es la fase de integración, en la cual los estudiantes han desarrollado un entendimiento comprensivo sobre las estructuras y las interacciones de la materia. El tiempo que tarda progresar por estas fases depende de la dificultad del tópico relativo a la sofisticación de los estudiantes. Una secuencia puede durar tanto como seis meses, o tan poco como una semana. Una meta de la instrucción es aumentar el nivel de interacción entre los estudiantes y el tópico, ya sea que tal interacción provenga del profesor, del texto, o de agencias de exámenes. En resumen, la intención del plan es reducir el número de obstáculos para los estudiantes.

El Poder del Computador para la Gente

Para la tercera área de interés, quiero concentrarme en un programa de computador específico, en el cual estoy trabajando, que trata de figuras en el espacio tri-dimensional. Tomo la posición de que un aspecto importante de usar computadores es proporcionar a los estudiantes experiencias de aprendizaje que deben ser consistentes con nuestra base teórica para instrucción. Un aspecto del modelo descrito arriba implica guiar a los estudiantes de una fase de instrucción directa a una en la cual ellos mismos pueden investigar y descubrir relaciones. Tenemos la capacidad, con esta generación de microcomputadores, de desarrollar programas que pueden desempeñar todas las funciones de los cursos de matemáticas escolares. Por modo de analogía, piensen cómo cambiaría el programa curricular de aritmética escolar si cada niño tuviera acceso contínuo a la calculadora de mano. Claramente se justificaría que aprendan los hechos básicos, para hacer mejor uso de su tiempo. Además sería necesario que los estudiantes aprendieran a estimar para asegurarse de que la calculadora no les miente. Los estudiantes deben saber cómo funcionan algoritmos pero no habría razón para las aburridas tareas artiméticas, ni para practicar con números grandes ni fracciones horrorosas. Ese es oficio para la calculadora. Así le evitamos a los estudiantes largos cálculos para poder dedicar más tiempo a pensar y resolver problemas.

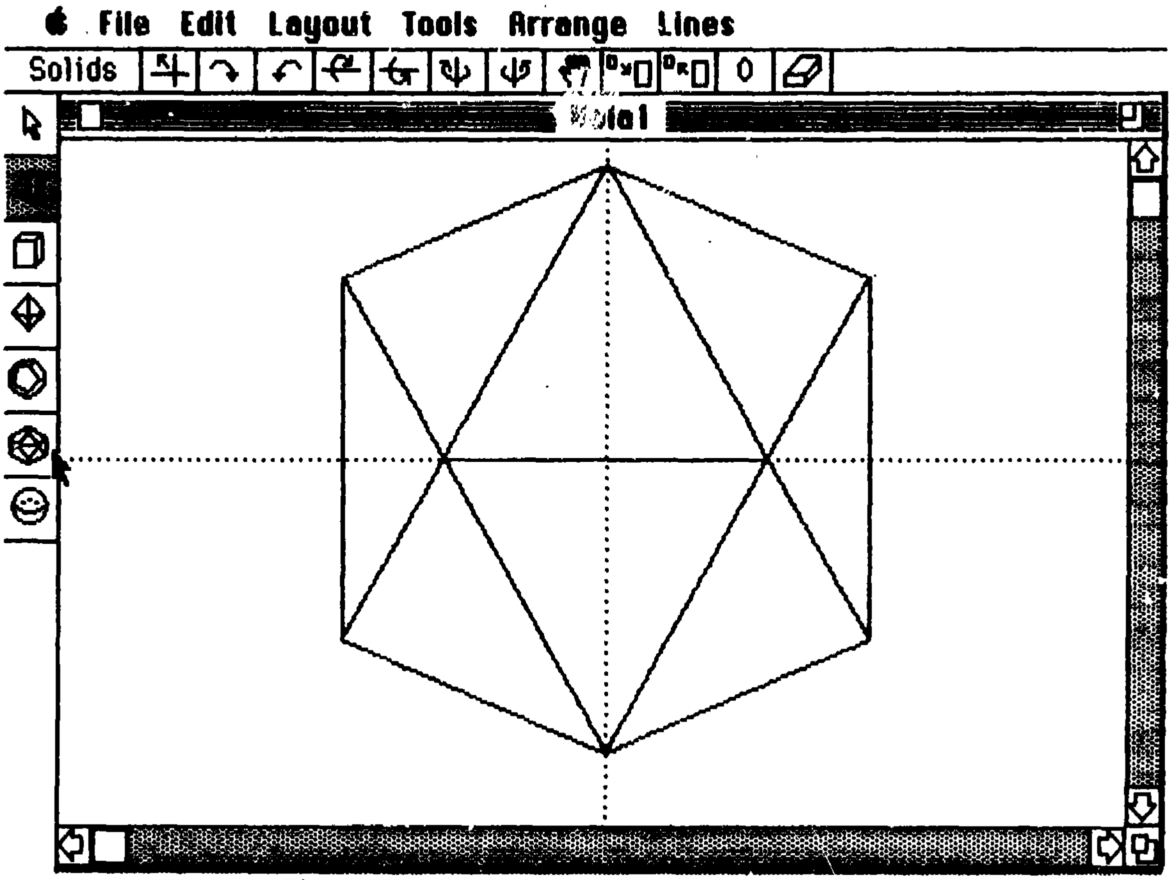


Figura 3. Usando la Herramiento Icosaedra

Tenemos programas de computador para muchas de las materias incluidas en el currículum escolar matemático. Lo que quiero decir con esto es que el programa le da al usuario las funciones de la materia, así como las calculadoras le ofrecen a la gente las cuatro funciones aritméticas. Por ejemplo, hay programas de manipulación simbólica que factorizan polinomios, simplifican expresiones complicadas, resuelven ecuaciones, y hacen gráficas de funciones compuestas, todo al toque de unos botones. Existen programas que verifican pruebas de geometría; que trazan figuras y hacen transformaciones geométricas; que manipulan dentidades trigonométricas; que hacen operaciones de matrices, etc. ¿Pueden imaginarse cómo se pueden utilizar programas como estos en las distintas fases de aprendizaje delineadas arriba?

El programa que quiero demostrar le da al usuario la capacidad de diseñar figuras bi - y tri-dimensionales; de transformarlas en tiempo real; de hacer cortes transversales; de medir partes de figuras y buscar nuevas relaciones. Voy a demostrar únicamente una de las funciones del programa al investigar cortes transversales de un icosaedro.

En la Figura 3 escogemos el icosaedro del menú de SOLIDOS (SOLIDS) y decidimos qué tamaño queremos que tenga. La podemos mover en distintas direcciones para ver que realmente es una figura tridimensional. Luego cambiamos al menú DIBUJAR (DRAW) y escogemos el rectángulo en las herramientas para trazar el corte transversal (1) que aparece en la Figura 4.

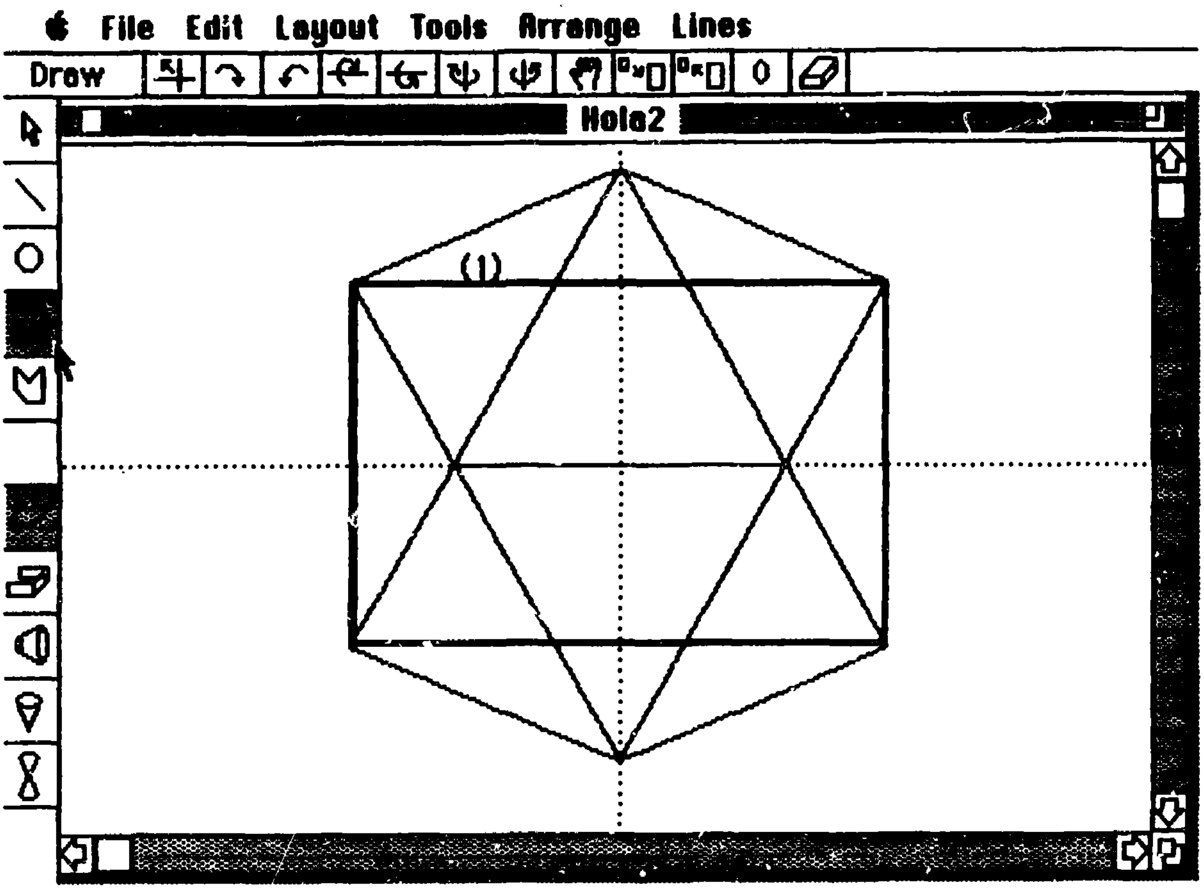


Figura 4. Trazando un Corte Transversal

Ahora se usa una de las herramientas rotacionales para rotar la figura en el espacio y trazar otro corte transversal (2). El primer corte transversal que trazamos se ve ahora de punta como un segmento en la mitad del dibujo en la Figura 5.

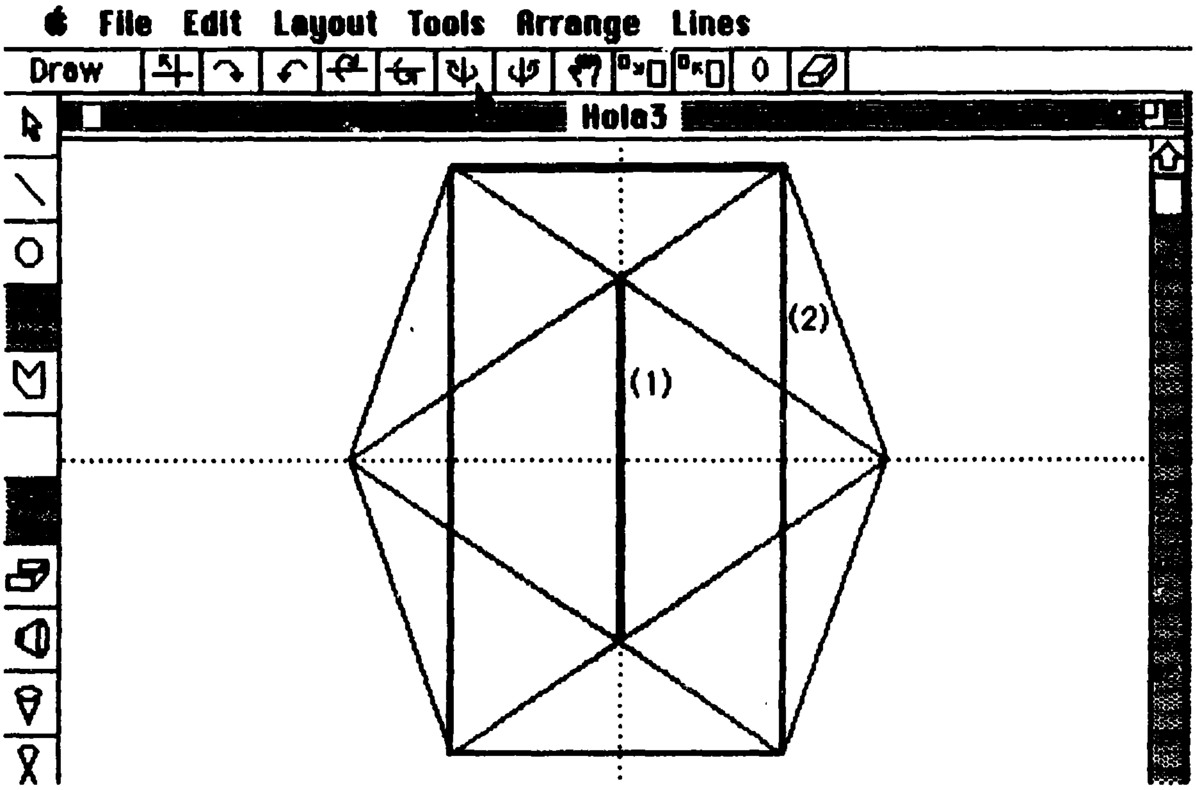


Figura 5. Rotando la Figura, Otro Corte Transversal

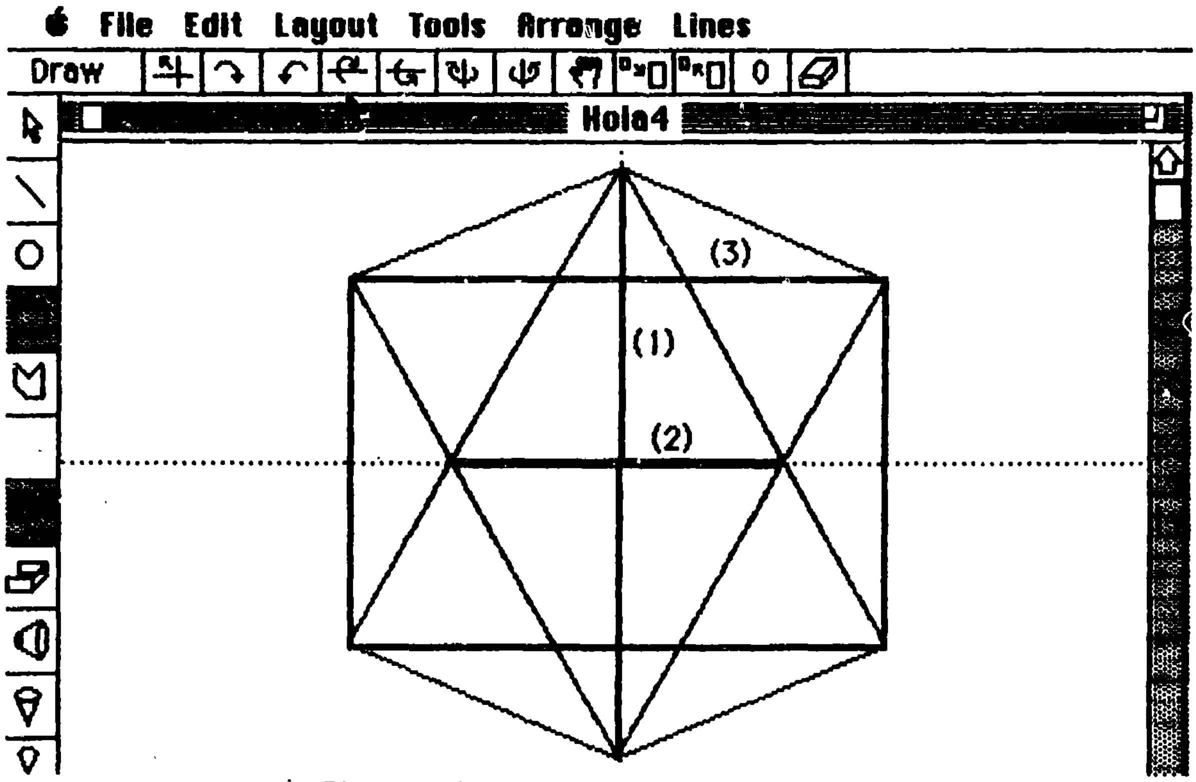


Figura 6. Un Tercer Corte Transversal

Finalmente, utilizamos otra herramienta rotacional para voltear nuevamente la figura y trazar un tercer rectángulo (3), como aparece en la Figura 6. Los tres rectángulos se pueden ver y están numerados en la figura.

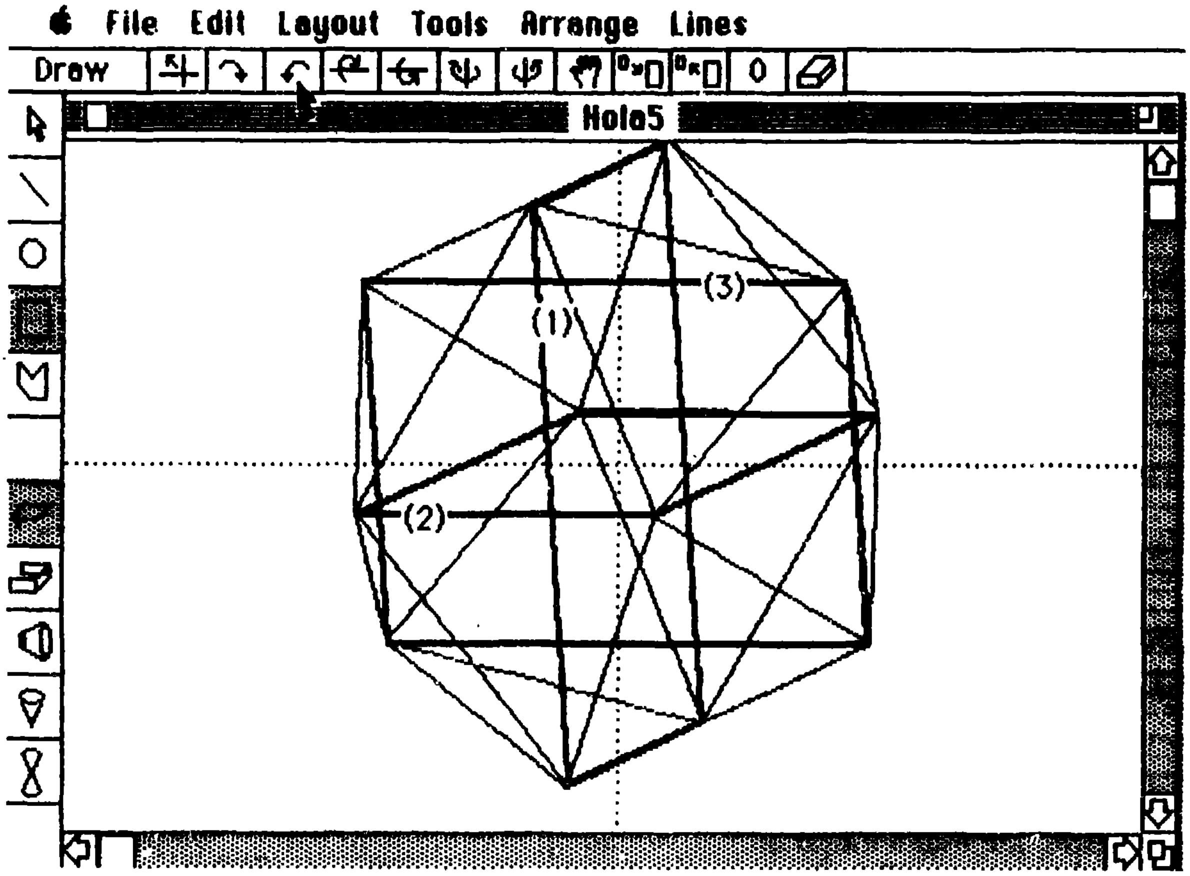


Figura 7 Una Vista Tri-Dimensional

Podemos mover la figura como queremos por medio de rotación, claro, pero además por traslación, reflexión, ensanchamiento o encogimiento. Inclusive podemos desarmar la figura y editarla como nos guste. Todas estas operaciones ocurren instantáneamente.

Por ejemplo, la Figura 7 muestra la figura rotada y podemos ver los tres planos congruentes formados. En la Figura 8 escondemos el icosaedro para podernos concentrar más directamente en los tres planos intersectantes.

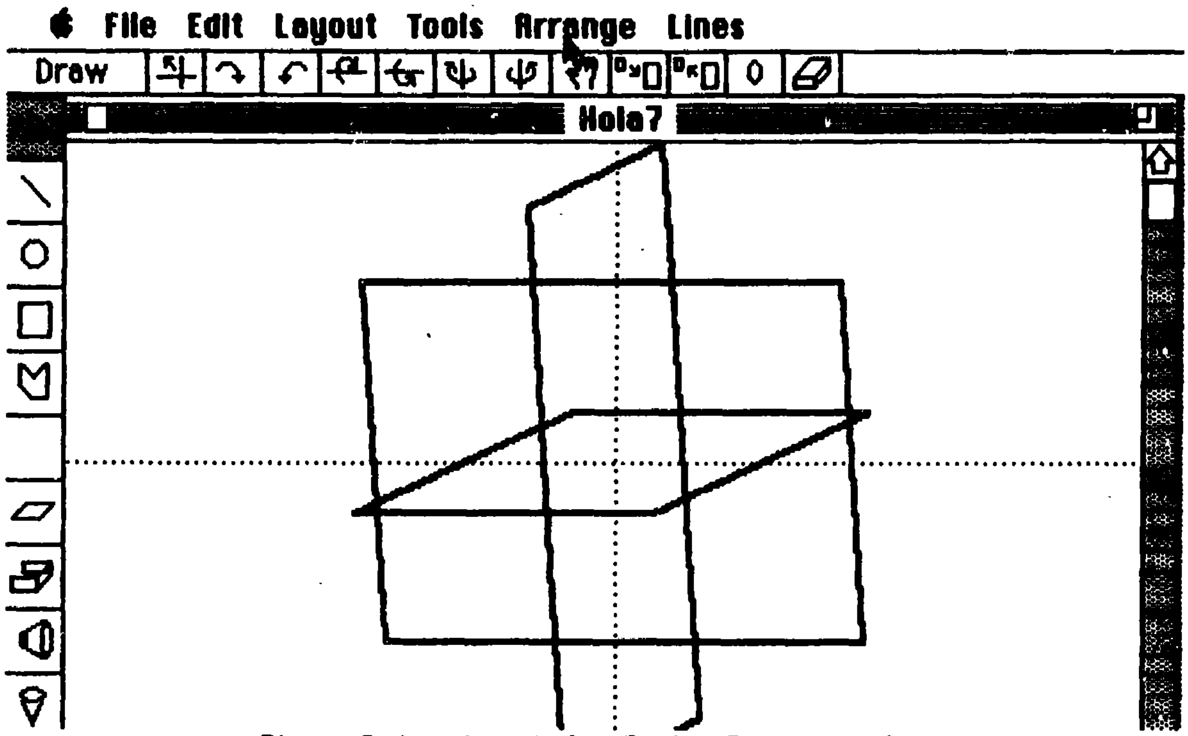


Figura 8. Acentuando los Cortes Transversales

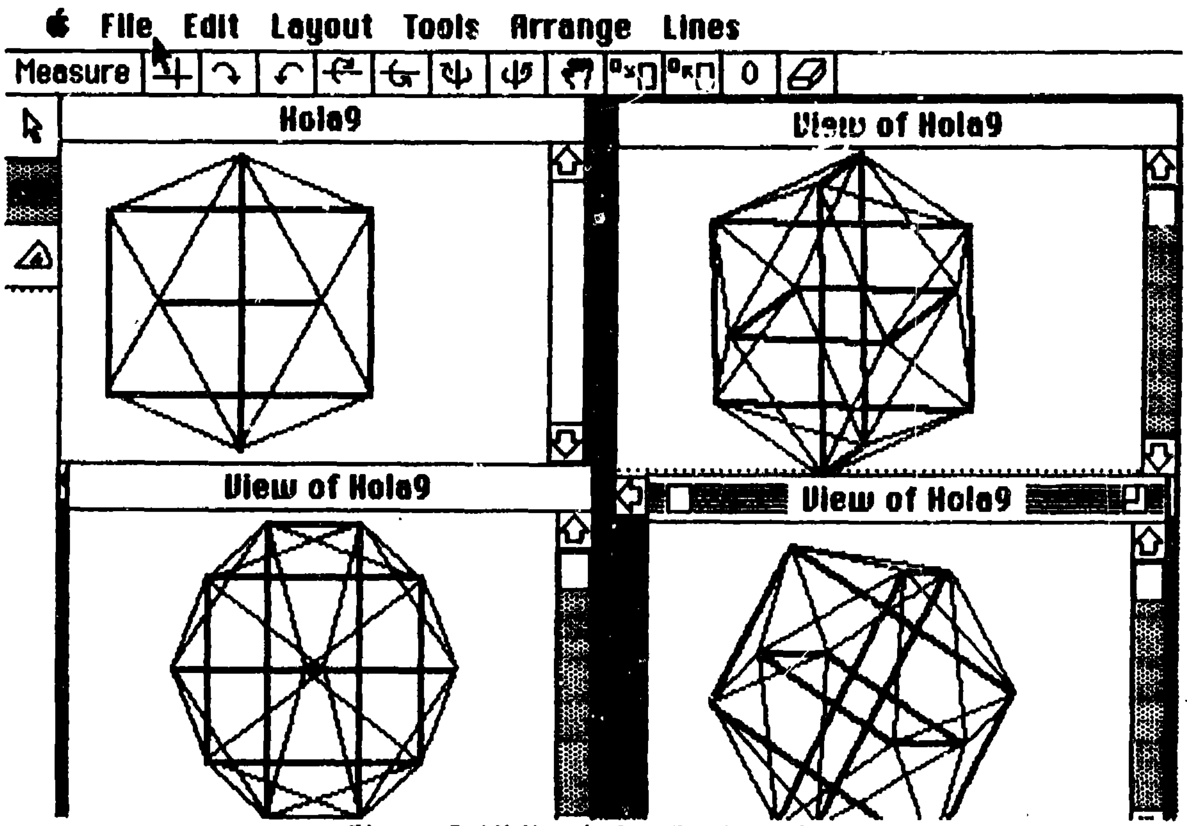


Figura 9. Midiendo los Rectangulos

Podemos inclusive ver múltiples perspectivas de la figura, como en la Figura 9, y manipular cada perspectiva aparte. Además, la Figura 9 muestra parte del menú MEDIDA (MEASURE). Podemos medir segmentos, ángulos, áreas, y volúmenes en el espacio. Aplicando la herramienta de medida lineal podemos hallar medidas de los rectángulos. ¿Qué pueden anticipar que sea cierto sobre rectángulos que son cortes transversales como estos de un poliedro regular? ¿Espera que estos rectángulos congruentes y mutuamente ortogonales tengan propiedades especiales? ¿Oi a alguien decir que pueden ser rectángulos áureos? Las medidas parecen indicar que lo son. Trate de demostrarlo. Tenga en mente que los tres rectángulos también generan el icosaedro - cada vértice del icosaedro es vértice de uno de los rectángulos.

Resumen

Hemos tocado brevemente tres aspectos de enseñanza y aprendizaje de la geometría. El primer aspecto está relacionado a las preguntas y actividades desafiantes que están al alcance nuestro y de nuestros estudiantes. Por medio de un pequeño ejemplo, consideramos la preguntas natural y fácilmente propuesta de diseñar un cilindro oblicuo. El problema inicialmente conduce a comienzos falsos y conclusiones erróneas. Soluciones sotisficadas son, claramente, posibles si tenemos suficientes herramientas matemáticas a nuestra disposición. Por ejemplo, coordenadas cilíndricas serían una gran ayuda. Por otro lado la solución más creativa que he visto fue la de un estudiante de diez años quien sugirió sumergir el cilindro rectangular en agua de color (como las de clase de arte), luego desenvolverlo, y cortar a través de la línea de agua para hacer nuestro modelo. Niños de diez años no han aprendido la curva del coseno pero ésta era una buena solución. Alguna gente que cose ropa reconoce que el modelo es como el hombro de la manga de una camisa.

El segundo aspecto de instrucción de geometría trata con un modelo teórico en el cual establecemos un ambiente para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Describimos sólo un ejemplo de dicho modelo pero debemos recalcar que ese sistema teórico no es absoluto. Por ejemplo, simplemente porque un estudiante parece responder a una pregunta al nivel 2 de van Hiele no implica que ese estudiante piensa a ese nivel en todos los tópicos imaginables. Debemos evitar clasificar a estudiantes con modelos teóricos. No hay tal cosa como un "estudiante a nivel 2". Aun más importante que los niveles son las fases de aprendizaje para nuestros estudiantes. Y, como dijeron los van Hiele, lo más importante es el esfuerzo que ponemos para ayudar a nuestros estudiantes a desarrollar perspicacia.

El aspecto final, tratando con geometría hace uso de tecnología, especialmente computadores. Hay muchos tópicos relacionados que no fueron discutidos acá, tal como entrecaras de video, de sonido, maquinaria de aprendizaje de ciencia, o como ayuda para estudiantes con incapacidades físicas. Además, no se habló de cómo usar los programas de computador disponibles, tales como databases, spreadsheets, paquetes estadísticos, gráficas, y programas de page layout. Se recalcó que los computadores se están volviendo cada vez más poderosos y que la técnica para desarrollar programas se está volviendo muy sofisticada. Podemos unir estas dos capacidades para producir programas de computador que les dan mucho poder a nuestros estudiantes. Estos programas hacen que nuestros estudiantes practiquen y desarrollen una variedad de habilidades, desde nociones aritméticas hasta la exploración y el descubirmiento de muchas materias avanzadas. Se demostró un ejemplo de dicho programa de computador para que el estudiante pueda crear, editar, medir y transformar figuras en el espacio tridimensional. El programa tiene la capacidad de ayudar a los estudiantes a aprender hechos básicos de geometría y les permite explorar, por sí mismos, conceptos y relaciones posiblemente nuevas. Cuando su trabajo escolar se termina, este programa puede continuar ofreciéndole a la gente herramientas poderosas para usar en el trabajo.

He tratado de enfocar en esta presentación las posibilidades para el futuro. Esta es una conferencia de representantes de diversos y maravillosos países y, como ya se recalcó, cada país debe considerar el grado de aptitud de estas posibilidades para su situación nacional. Hay una gran cantidad de kilómetros entre las áreas en el norte de Canada y las del sur de Chile y Argentina. También hay una gran distancia entre diseñar una red física para un cilindro oblicuo e investigar cortes transversales de un icosaedro vía un programa de computador. Debemos considerar estas y todas las posibilidades intermedias para proporcionarles a nuestros estudiantes las mejores oportunidades de aprendizaje.

Referencias

Hoffer, A. (dir), Planning for instruction in geometry. Didactics and mathematics. Palo Alto: Creative Publications, 1978.

Hoffer, A., Geometry is more than proof. Math. Teacher, NCTM, 1981, 74, 11-18.

Hoffer, A., Van Hiele-Based Research. Acquisition of Mathematics Concepts and Processes (R. Lesh, ed.), Academic Press. 1983, 205-227.

Pyshkalo, A. M. Geometriya v I-IV klasakh. In Problema formirovaniya geometricheskikh predstavlenii u mladshikh shkol'nikov. In A. Hoffer (ED.) and I. Wirszup (Trans.) University of Chicago. Moscow: Prosveschchenie, 1968.

van Hiele, P. M. La pensee de l'enfant et la geometrie. Bulletin de l'Association des Professeurs Mathematiques de l'Enseignement Public, 1959, 198, 199-205. [1]

[1]También, aprecio mucho la ayuda que me ha prestado la Dra. Myriam G. Steinback durante el congreso y le agradezco por su labor en traducir este artículo al español.

PARTE IV

GRUPOS DE TRABAJO

1. ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMATICA Y REALIDAD SOCIOCULTURAL (GENAMARES)

El Grupo de Trabajo Enseñanza de la Matemática y Realidad Socio-Cultural, creado a partir del Panel "Integración de la Enseñanza de la Matemática en el Contexto Socio-Cultural", se reunió a las 15 horas 30 minutos del día miércoles, 15 de julio de 1987 en el salón 204 para plantear la continuación, hasta la próxima CIAEM, de las discusiones comenzadas en el panel.

Se decidió que además de los temas tratados en el panel:

- Enseñanza - aprendizaje de la matemática de poblaciones vernáculo - habitantes a partir de su lengua y cultura.

- Asimilación solidaria en tercer grado. Por una universidad sin pruebas.

- Matemáticas: una reconstrucción histórica-filosófica para su enseñanza.

- Historia social y formación científica en matemática.

Se tratarán otros tópicos que sugieran los integrantes del grupo de trabajo.

También se acordó lo siguiente:

- Organizar una red de correspondencia. Esta red funcionará a través de por lo menos un representante del país de procedencia de los integrantes.

- Producir y distribuir un boletín mensual bajo la responsabilidad del Profesor Roberto Baldino, de la Universidad Federal de Río de Janeiro. En tal boletín, cada representante de la red en el país recibirá las informaciones que los demás quieran dar al grupo sobre sus actividades locales así como respecto a los tópicos que deseen discutir y la bibliografía necesaria para esto.

- Invitar a integrarse en este grupo de trabajo a todos los participantes de la VII CIAEM, a través del representante de la red en su país. Para inscribirse, los interesados proporcionarán información sobre sus datos personales de acuerdo a lo que se indica al final, y la entregarán directamente a cualquiera de nosotros o enviarlo por correo a:

ROBERTO RIBEIRO BALDINO
Rua Sebastião de Sampaio
52 AP 102
21910, Rio de Janeiro
BRASIL

TELEFONO (21) 3964709

La invitación parte de:

ANGEL RUIZ ZUÑIGA - Costa Rica
CARLOS RONDERO GUERRERO - México
ANALUCIA DIAS SCHLIEMANN - Brasil
DOMINGO A. CARVAJAL - República Dominicana
LUIS CARLOS ARBOLEDA - Colombia
MARTA VILLAVICENCIO - Perú
ROBERTO RIBEIRO BALDINO - Brasil
VERONICA FRANCO G. - México

2. ENSEÑANZA A TRAVES DE RESOLUCION DE PROBLEMAS

Antonio José Lopes, Sociedade de Educação Matemática, Brasil
Pilar Martínez, UNAM, México

Puntos para reflexionar acerca del grupo de trabajo sobre la resolucion de problemas

¿QUE PIENSA USTED ACERCA DE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS?

¿Es posible adorar incondicionalmente a G. Polya?
¿Qué puntos altamente positivos hay en su obra?
¿Es posible cuestionar algunos de sus puntos?

1. ¿Cuáles son las principales dificultades para la multiplicación de los trabajos dentro de la filosofía de enseñanza que se basa en la resolución de problemas?

2. ¿Se identifican los presupuestos teóricos de enseñanza a través de problemas?

3. ¿Cómo están las investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje? ¿Cómo hacer una organización de los trabajos, artículos y libros sobre el tema?

4. ¿Cómo incide la propuesta de enseñanza a través de problemas en los programas oficiales? ¿Hay conflictos?

5. ¿Qué propuestas pueden ser producidas por los grupos que investigan problemas para la formación y reciclaje de los maestros en América Latina?

6. En lo que se refiere al alumno, ¿los resultados obtenidos han sido satisfactorios? ¿Hay autonomía en relación a la construcción del conocimiento?

7. ¿La propuesta ha sido asimilada por los maestros? ¿Llega a los alumnos?

8. Otros puntos.

ALGUNAS PROPUESTAS

a) Agilizar el boletín:

Definir una continuidad periódica.
Hacer un cálculo de costos.
Estudiar formas de impresión y distribución.

b) Reorganizar la red de los interesados en intercambiar experiencias, distribuir el boletín y organizar grupos autónomos o institucionales:

Reorganizar la lista de estos interesados.

c) Organizar algunos eventos para profundizar el cambio de experiencias:

Propongo una reflexión acerca de un Seminario Internacional de Resolución de Problemas, que puede ser organizado en Sao Paulo en 1988 o inicio de 1989. Organizar las sugerencias del temario, dinámica y algunos nombres (OBS: La propuesta es de un seminario abierto).

d) Otras propuestas definidas por las personas que participan del grupo.

Gracias a todos:

Prof. Antonio José Lopes - Brasil
Coordinador del Grupo de Trabajo
sobre Resolución de Problemas

Acta de la reunión de coordinación del grupo de trabajo sobre enseñanza a través de resolución de problemas de las 6a. y 7a CIAEM.

A los 7 días del mes de agosto de 1987 se reunieron en las instalaciones del Depto. de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM los profesores ANTONIO JOSE LOPES de Brasil, las profesoras PILAR MARTINEZ TELLEZ, JULIETA VERDUGO y los profesores FRANCISCO STRUCK, ANTONIO GONZALEZ y GUILLERMO GOMEZ, de la UNAM, para decidir respecto a las actividades del GTRP/CIAEM a partir de las decisiones de la 7a. CIAEM en Sto. Domingo. Acordaron los siguientes puntos:

1. Se dará continuidad a la edición del Boletín. A partir del 2° número deberá tener las siguientes características:

   a) Secciones sobre: referencias bibliográficas;
   traducción de artículos;
   debates sobre tendencias, experiencias,etc.;
   información de eventos.

   b) Se intentará un tiraje de 1000 ejemplares a ser distribuidos preferencialmente a

   - los participantes de la reunión del GTRP de las 6a. y 7a. CIAEM.
   - multiplicadores en América Latina, comprometidos y definidos en la 7a. CIAEM.
   - multiplicadores en los demás continentes.
   - demás participantes de las reuniones de la CIAEM (6a. y 7a.)

   c) Se intentará que tenga una periodicidad trimestral.

   d) Se incluirá una ficha en 4 idiomas (francés, inglés, español y portugués) donde los interesados manifestarán su deseo de continuar recibiendo los próximos números y donde se presentarán los objetivos del boletín, inclusive con informaciones técnicas respecto a las contribuciones.

   e) Experimentalmente serán editadas dos versiones, una en español y otra en portugués.

f) Se investigará sobre formas de apoyo material.

g) A partir de los resultados y facilidades obtenidas, en la edición de los próximos boletines se intentará editarlos en francés e inglés.

2. El grupo hará esfuerzos para que durante el 6° ICME se realicen encuentros entre los coordinadores de publicaciones afines sobre educación matemática.

3. Se enviará a la comisión directiva de la CIAEM una relatoría del grupo de trabajo con una petición de apoyo material para la continuidad de las actividades del grupo de trabajo.

4. Desde ahora se están realizando estudios y contactos para la organización futura de un Seminario Internacional de Resolución de Problemas.

Cd. Universitaria, D. F., 10 de agosto 1987.

Prof. Antonio José Lopes		Prof. Pilar Martínez Tellez

3. FORMACION DE PROFESORES DE MATEMATICA EN SERVICIO Y FACTIBILIDAD DE COOPERACION REGIONAL

Lelis Páez
Venezuela

Respondieron a la invitación a participar en este grupo de trabajo un total de 12 colegas provenientes de los siguientes países:

Colombia
México
República Dominicana
Brasil
Canadá
Estados Unidos

Una primera constatación: la pertinencia del problema planteado. En todos los países del área, la formación de docentes en servicio es uno de los problemas medulares y de muy difícil solución.

Una segunda constatación: la variedad de planes y modalidades puestas en acción en diferentes países representados en el grupo y la ausencia casi total de ellos en otros.

Una tercera y última constatación: la necesidad de romper la desinformación común sobre lo que pasa en los países hermanos como paso previo a una discusión sobre posibles acuerdos de cooperación.

Acuerdos tomados en el grupo:

* Constituirse como grupo de trabajo permanente y así continuar su labor en el marco de las conferencias interamericanas.

* Editar un boletín informativo del trabajo del grupo. El primer número contendría una información sucinta sobre los programas de formación de docentes en servicio existentes en el área de Matemáticas, en los diversos países del continente americano. En tal sentido, se procederá a diseñar una encuesta a fin de recabar de manera organizada y homogénea dicha información. Una primera versión de la encuesta le será enviada a los participantes en el grupo de trabajo a finales del año 87. Se cuenta ya con material informativo amplio y muy interesante sobre los planes de formación en servicio en México y Brasil.

¡¡Se exhorta a todos los colegas a hacernos llegar información sobre el tema, en particular nombres y direcciones de personas e instituciones encargadas de programas de formación en servicio !!

Igualmente nos interesa cualquier información referente a posibilidades de financiamiento para acuerdos de cooperación regional en esta materia.

Para cualquier información, favor escribir a:

Lelis Páez S.
Edificio Mérida PB-3
Residencias Venezuela
Coche 1091 - Caracas
VENEZUELA

4. PENSAMIENTO MATEMATICO AVANZADO (PMA)

Lilia del Riego, Centro de Investigación Científica de Yucatán, MEXICO
Gontran Ervynck, Katholieke Universiteit Leuven (KULCK), BELGICA

Material de apoyo preparado previo a la VII CIAEM.

1. OBJETIVOS

Este grupo de trabajo pretende estudiar el pensamiento matemático avanzado, desde los años preuniversitarios (16+) y universitarios hasta la investigación en Matemáticas. Se pretende que el trabajo producido sea de ayuda para maestros de niveles avanzados, tomando en cuenta poblaciones estudiantiles diferentes tales como estudiantes de Matemáticas, estudiantes que usen a las Matemáticas como herramienta, futuros maestros, inclusive investigadores en Matemáticas.

Podrán participar todos los interesados en estos objetivos. Posiblemente este grupo pueda evolucionar hacia un grupo de trabajo que se mantenga en contacto por un tiempo más prolongado planeando reuniones futuras y tal vez publicaciones.

2. ORGANIZACION

Nuestro grupo dispone de cuatro sesiones de trabajo. Sugerimos que estén dedicadas a la discusión de los siguientes temas, los cuales merecen atención desde diferentes puntos de vista (matemático, sicológico, filosófico). Por supuesto que ésta no es una lista exhaustiva.

A. Sesión I. Los procesos matemáticos de P. M. A.

(1) ¿Cuál es la diferencia genuina entre Matemáticas elementales y avanzadas? ¿Pertenece la diferencia a la imaginación pura, o existe un paso decisivo desde la iniciación hacia las matemáticas avanzadas?

(2) ¿Cuál es el procedimiento para la creación de teoremas nuevos (o de una nueva teoría)? ¿Cómo se desarrolla el procedimiento desde el pensamiento intuitivo hacia una teoría formal, a través de formulación de definiciones, conjeturas, etc.?

(3) ¿Cuál es el rol del inconsciente al hacer descubrimientos matemáticos (ideas que surgen de repente, ver Poincaré, Hadamard)? ¿Tiene este fenómeno relación con los métodos intuitivos: adivinar por iluminación y analogía?

(4) El rol del trabajo heurístico, algorítmico e inventivo al resolver problemas, incluyendo la génesis de demostraciones de teoremas y la selección adecuada de definiciones.

(5) ¿Cuál es el rol de la formalización y la abstracción en Matemáticas, y cuál es su relación? Estos procesos sin duda están relacionados, mas no son idénticos. La abstracción es la sustitución de fenómenos concretos (sobre todo físicos) por conceptos cuya existencia está restringida al cerebro humano. Por ejemplo el álgebra de los números reales fue, hasta la segunda mitad del siglo XIX, abstracta mas no formal. La formalización es la sumisión de conceptos a un conjunto de reglas precisas y bien enunciadas. Por ejemplo, jugar ajedrez es una actividad formal pero no abstracta (por supuesto una gran mayoría de teorías matemáticas son a la vez formales y abstractas). ¿Cómo empieza en Matemáticas la abstracción y/o la formalización? ¿Es necesario dar un impulso inicial para empezar el proceso de manera semejante a como en cristalografía se necesita un germen para empezar la formación de cristales?

(6) ¿Qué actitud debe adoptarse hacia las Matemáticas técnicas y computacionales (aplicación de fórmulas)? ¿Es una degeneración, o se trata de pensamiento genuino y activo?

(7) ¿Existen niveles diferentes de pensamiento matemático o todos los avances en formalización y abstracción son igualmente difíciles? ¿Es válida la siguiente distinción: un ejemplo de pensamiento matemático de bajo nivel es reemplazar un número real arbitrario por un símbolo x, mientras que un ejemplo de pensamiento matemático avanzado es inferir, de la aparición de cierta semejanza entre estructuras Matemáticas, la existencia de un modelo único (grupos, espacios vectoriales, espacios métricos)?

(8) ¿Cuál es la relación entre la estrategia de creación Matemática y el aprendizaje de las Matemáticas? Como ambos son aspectos diferentes del proceso de aprendizaje, es obvio que las experiencias de investigadores en Matemáticas deben tener influencia en sus métodos de enseñanza.

B. <u>Sesión II. Los procesos sicológicos del P. M. A.</u>

(1) ¿Qué significado tiene "entender" un teorema, o una "teoría"? ¿Es un concepto puramente subjetivo o hasta qué punto se involucran factores objetivos?

(2) ¿Es el entender Matemáticas diferente para niños, para estudiantes de más de 16 años, para adultos? (un adulto en Matemáticas tiene una mente consciente de su razonamiento deductivo y puede influenciarlo hasta cierto punto). Si hay diferencia, ¿cómo está estructurada?

(3) ¿Cuáles son las características comunes y las características particulares del pensamiento matemático entre varios grupos homogéneos?

- estudiantes de Matemáticas
- otros estudiantes cuyo estudio principal no son las Matemáticas
- maestros de Matemáticas
- investigadores en Matemáticas
- consumidores de Matemáticas:
  a) en las ciencias exactas
  b) otras (p. ej. linguística)
- no matemáticos (en este grupo, el pensamiento está dominado por actitudes: admiración, indiferencia, disgusto, miedo).

(4) ¿Cuáles son los obstáculos personales o de grupo en el aprendizaje de las Matemáticas? ¿Por qué algunos estudiantes son muy ingeniosos, mientras que otros nunca triunfan?

(5) ¿Cuál es el rol de factores afectivos/repulsivos en estudios matemáticos?

(6) ¿Qué influencia tiene el uso de símbolos para entender? El lenguaje esotérico de las Matemáticas hace que gran parte de ellas sean inaccesibles para los no matemáticos, aunque sean autoridades reconocidas en otros dominios de la ciencia.

(7) ¿Cuál es la importancia de la neurocirugía del cerebro? ¿Nos ayudarían resultados modernos de esta ciencia a entender cómo trabaja en el caso de las Matemáticas?

(8) Descripción precisa de la condición y la posición de las mujeres en Matemáticas. Como ciencia, las Matemáticas no están influenciadas por la dicotomía hombre-mujer, por lo tanto la posición de la mujer en las Matemáticas depende enteramente de las condiciones fisiológicas, sociales, etc. (ver (4), con la que sin duda tiene relación).

(9) ¿Es nuestra concepción de Matemáticas. diferente de lo que era hace 100 años? Si lo es, ¿de qué manera cambió?

(10) ¿Cuál es el sentido de la certeza-de la credibilidad-de la utilidad en las Matemáticas? ¿Está ésta afectada por la existencia de dificultades en las fundaciones de la misma, en reformas no exitosas a los currícula de enseñanza ("Matemáticas modernas") o en el uso de computadoras para demostraciones?

(11) ¿Cuál es la categoría o posición de un resultado nuevo en Matemáticas? ¿Hay oposición entre el concepto de invención y el de descubrimiento? ¿Cambió nuestro punto de vista en el siglo XX por la formalización de las Matemáticas?

(12) ¿Cuál es la relación de las Matemáticas con el lenguaje natural? Como los dos están diseñados para transmitir ideas, están estrechamente relacionados, pero ¿de qué manera? Es una observación elemental el que aún los axiomas más simples de las Matemáticas (incluyendo la lógica formal) requieren el uso del lenguaje natural.

C. Sesión III. P. M. A. por áreas específicas

Los problemas educativos en áreas específicas pueden ser clasificados de diversas maneras de acuerdo a características particulares del pensamiento matemático del área particular. Por ejemplo:

(1) Las tres áreas básicas Algebra-Geometría-Análisis generan una multitud de problemas de enseñanza bien conocidos, aunque las soluciones a los mismos están dadas en términos vagos, o son desconocidas. Por otra parte, la Topología se considera erróneamente como el estudio de la "forma" en lugar de un estudio de la "cercanía" y la "continuidad".

(2) Lógica y demostracción: ésta es fuente de bastantes dificultades de enseñanza. La formulación precisa de, por ejemplo, el inverso de un teorema, o la negación de una proposición que contenga cuantificadores resulta complicada para muchos estudiantes.

(3) Probabilidad y Estadística: el carácter no determinístico de la teoría requiere un modo de pensar bastante diferente del de otras áreas. Además, bases firmes para la teoría de la medida resultan muy sofisticados para la mayoría de los estudiantes.

(4) Las Matemáticas aplicadas, usadas como herramienta en otras ciencias, son bastantes diferentes en aspecto de las Matemáticas puras: parece no haber necesidad de bases firmes, lo principal es que "funcione".

D. Sesión IV. Conclusiones

El contenido de la última sesión dependerá del trabajo hecho en las sesiones anteriores. Puede dar lugar a planes para actividades futuras o a proyectos que desarrollen puntos particulares.

Información sobre investigación en P. M. A.

Es importante dejar algún tiempo para reunir información sobre investigaciones recientes sobre educación matemática. Esta información puede ser presentada como resumen de la literatura existente. Estos resúmenes pueden resultar de gran utilidad aunque estén restringidos a un sólo país o en un lenguaje particular.

Acta de las reuniones en la VII CIAEM.

La mayoría de los trabajos de educación matemática están concentrados en estudios sobre educandos de nivel elemental. Es fácil constatar, por ejemplo en el programa de esta conferencia, que el número de trabajos de investigación educativa está en proporción inversa con el nivel educativo del estudiante; se encuentran muy pocos trabajos de investigación educativa a nivel universitario.

Este grupo de trabajo se propone estudiar el pensamiento matemático avanzado, es decir el pensamiento matemático de los alumnos de más de 16 años, abarcando desde los años preuniversitarios y universitarios hasta la investigación de las Matemáticas. Nuestro propósito es entender los procesos mediante los cuales se pueden aprender y enseñar Matemáticas avanzadas. Además deseamos entender la naturaleza del pensamiento creativo en la investigación en Matemáticas.

Como base de discusión, en esta conferencia propusimos una serie de preguntas. Las presentamos a continuación junto con algunos comentarios de los interlocutores que se suscitaron:

A. LOS PROCESOS MATEMATICOS DEL P. M. A.

(1) ¿Existe diferencia entre Matemáticas elementales y avanzadas? ¿Existen diferentes niveles de madurez del P. M. A.?

Refiriéndose a la primera pregunta, U. D'Ambrosio (Brasil) mencionó que como es imprecisa, lo importante es no caer en la trampa de distinguir elemental de avanzado (para ejemplos y más detalles, ver (1)). Con respecto a la segunda pregunta, se enunciaron algunos indicadores de madurez como: la capacidad de asimilar conocimientos nuevos (Leandra Tapia, República Dominicana), la capacidad de hacer conexiones entre varios conceptos y la capacidad de pensar en abstracto (Pedro Suárez, República Dominicana).

(2) ¿Cuál es el procedimiento para la creación de teoremas nuevos, o de una teoría nueva? (Poincaré, Hadamard).

U. D'Ambrosio (Brasil) refiriéndose a la gran importancia de la creatividad, comentó las ideas dadas por H. Whitney al recibir el premio Steele en 1985 (Notices AMS, vol. 32, 5 pág. 577-579, Oct. 1985). También habló sobre una nueva manera de explicar la creatividad matemática que además de la inducción y la deducción, presenta la idea de abducción (véase el libro "The sign of Three" de Pierce-Sebede-Eco; para más detalles ver (1)). Por otra parte, Enrique Calderón (México) mencionó la recursión como una herramienta poderosa para el P.M.A. que no ha recibido la atención debida; Corides Pérez (República Dominicana) comentó sobre el hecho común de que los maestros se guían por la preeminencia de la deducción en la redacción de los manuales de matemáticas, dejando de lado la inducción, la analogía y la intuición.

(3) ¿Cuál es el rol: a) del incosciente al hacer descubrimientos matemáticos (ideas que surgen de repente, ver Poincaré, Hadamard); b) del trabajo heurístico, algorítmico e inventivo al resolver problemas, y c) de la formalización y la abstracción?

(4) ¿Qué actitud debe adoptarse hacia las Matemáticas técnicas y computacionales?

(5) ¿Existe relación entre la estrategia de creación matemática y el aprendizaje de las Matemáticas? (Peter Hilton).

B. LOS PROCESOS SICOLOGICOS DEL P. M. A.

(1) ¿Qué significado tiene "entender" un teorema, una teoría?

(2) ¿Es el entender Matemáticas diferente para los niños, para los estudiantes de más de 16 años, para los adultos?

(3) ¿Cuáles son las características comunes y particulares del pensamiento matemático entre varios grupos homogéneos tales como estudiantes de Matemáticas, estudiantes cuyo estudio principal no son las Matemáticas, maestros de Matemáticas, investigadores de Matemáticas, consumidores de Matemáticas, no matemáticos?

(4) ¿Cuáles son los obstáculos personales o de grupo en el aprendizaje de las Matemáticas?; factores afectivos/repulsivos; mujeres en las Matemáticas.

(5) ¿Qué influencia tiene el uso de símbolos para entender? Relación de las Matemáticas con el lenguaje natural.

Según Leandra Tapia (República Dominicana) el uso de símbolos tendrá éxito en la medida en que el educando tenga un razonamiento estructurado; hay evidencias de que el lenguaje matemático es más natural a los que provienen de un medio ambiente con estructuras lingüísticas más estructuradas.

(6) ¿Tienen importancia los estudios sobre neurosicología del cerebro (p. ej: estudios sobre el hemisferio izquierdo-derecho) para entender el pensamiento matemático?

(7) ¿Es nuestra concepción de las Matemáticas diferente de lo que era hace 100 años?

(8) ¿Cuál es el sentido de la certeza, de la credibilidad, de la utilidad en Matemáticas? ¿Hay oposición entre el concepto de invención y el de descubrimiento?

C. <u>PROBLEMAS DEL PENSAMIENTO MATEMATICO EN DOMINIOS ESPECIFICOS, POR EJEMPLO:</u>

Algebra	pensar en estructuras
Geometría	la visualización y abstracción
Análisis	los límites infinitesimales
Lógica y Demostraciones	el uso de cuantificadores
Probabilidad	el concepto nuevo de incertidumbre
Matemáticas Aplicadas	la creación de un modelo matemático
Geometría Diferencial	la integración de técnicas algebrísticas y analíticas en problemas geométricos.

COMENTARIOS SOBRE P. M. A.

Ubiratán D'Ambrosio (Brasil)

1. En vez de enfocar la atención en el pensamiento matemático elemental o avanzado se debería discutir la creatividad matemática. ¿La distinción entre lo elemental y avanzado lleva una "trampa"; ejemplo: la teoría de los números primos, es elemental o avanzada?

2. Es un hecho que nuestra gente entrenada como matemáticos muestran una productividad muy modesta; nosotros (Latinoamérica) prácticamente no contamos en el escenario internacional. Nuestra producción es <u>marginal</u> y <u>trivial</u> en investigación. Esto ha sido una gran preocupación para mí (ver publicación em IMPACT en 1975). Nuestros PHD no son productivos. Creo que hay algo mal en el nivel avanzado pre-universitario, no se les pide a los escolares de 16-18 años ser creativos. Por esta razón, debería ser diseñada una investigación sobre el proceso creativo de los matemáticos latinoamericanos. Con una metodología de investigación etnológica, deberíamos poder identificar algunos de nuestros "jóvenes prodigios" que una vez obtenido su doctorado, son absolutamente incapaces de producir cuando regresan. Tal investigación requeriría de estudios históricos, pues en tiempos de la colonia se tenían tales individuos y en tiempos recientes (después del 50) su número no es depreciable. Este asunto ha sido de gran preocupación

para mí, ya que gente va por el título de doctor y regresa improductivo, sólo producen con su asesor, incapaces de abrir sus líneas propias de investigación, ¿estarán atados a un reconocimiento internacional de ser parte de un grupo?

3. Deberíamos analizar las nuevas maneras de explicar la creatividad y la percepción, por ejemplo "The Sign of Three" de Pierce-Sebede-Eco, que apareció en Indiana University Press (en 1983?). Véase también "The Challenges of Rationalism" para la búsqueda de nuevos paradígmas holísticos, por ejemplo "La Ciencia y la Frontera del Conocimiento", Simposio de Venecia, UNESCO, (Fundación Cine 1986).

Se puede pedir copia a M. Matori, UNESCO, Oficina del Director General, París. Véase también, "La Ciencia de cara a los confines del conocimiento", de Michel Random, editor, París, 1987.

4. El principal objetivo es ¿qué es la creatividad matemática? ¿Es el resultado de "otro ladrillo en la pared"? o ¿viene en una pieza entera, como una pieza de Mozart, y después sigue por un proceso de pulir, codificar y eliminar rebabas?

PARTE V

COMUNICACIONES ORALES

LIBROS DE TEXTO PARA ESCUELAS SECUNDARIAS DEL ESTADO DE MEXICO

Alberto Alonzo (Coordinador) et al.
Secretaría de Educación, Cultura y Bienestar Social del Gobierno del Estado de México
México, D. F., México

El objetivo del trabajo fue la elaboración de libros de texto para las escuelas secundarias del Estado de México que respondieran a las siguientes condiciones:

1. Que fuesen adecuados a la población magisterial y estudiantil del Estado de México.

2. Que rescataran y/o fomentaran la identidad estatal.

3. Que fuesen congruentes entre grados y entre áreas.

4. Que su calidad fuese igual o superior a la del mercado nacional.

5. Que fuesen más económicos que los del mercado nacional.

Se analizaron libros de texto del mercado nacional; para tal efecto, se usó el cuestionario elaborado por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), con dicha información como antecedente, se diseñaron los libros de texto para los tres grados que conforman la educación secundaria en México. Los libros fueron experimentados en 37 escuelas (de 418 que existían en 1984) del sistema educativo estatal. Se aplicaron cuestionarios a los profesores y estudiantes de los grupos experimentales con el objeto de reestructurar los libros en los aspectos que eran señalados por los profesores como deficientes y que era confirmado por los cuestionarios de rendimiento escolar aplicados a los estudiantes. Esta información se sometió a la consideración de los integrantes de las otras áreas y de los asesores técnicos, para proponer la reestructuración de los libros.

Los libros reestructurados se distribuyeron a todos los profesores del sistema educativo. Se recopiló información sobre los mismos a través de cuestionarios y entrevistas; se enviaron dichos materiales al Consejo Nacional Técnico de la Educación para su dictamen, ya que en México todo el material educativo dirigido a estudiantes de secundaria, debe ser aprobado por dicho organismo federal.

Con las observaciones vertidas por los profesores del sistema educativo estatal y por el Consejo Nacional Técnico de Educación, se hicieron las adecuaciones que se consideraron pertinentes y se elaboró la edición final que se usará a partir del ciclo escolar 1987-1988.

METODO PARA EXPLICAR LOS GRAFICOS DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS Y LOS GRAFICOS DE LAS SUPERFICIES CILINDRICAS Y CUADRICAS

Daniel Báez, Felix Lara
Instituto Tecnológico de Santo Domingo (INTEC)
Santo Domingo, República Dominicana

Este trabajo tiene como objetivo fundamental tratar de desarrollar un método para explicar los gráficos de las funciones trigonométricas, así como los gráficos de las superficies cilíndricas y cuádricas. Estos temas forman parte de un trabajo que están realizando los profesores del Area de Matemática del INTEC. El mismo abarcará todos los gráficos que tradicionalmente se enseñan en las universidades del país. Con los temas escogidos se pretende coadyuvar al desarrollo de una metodología eficaz que contribuya a que el estudio de los gráficos sea ameno y comprensible para el estudiante. Para la explicación de los referidos temas es necesario partir del concepto de que cada tipo de gráfico tiene sus ELEMENTOS FUNDAMENTALES, y para la discusión del gráfico en cuestión, el estudiante debe saber como determinar los parámetros correspondientes a dichos elementos fundamentales.

ASIMILACION SOLIDARIA EN 3° GRADO: POR UNA UNIVERSIDAD SIN PRUEBAS

Roberto Ribeiro Baldino
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro, Brasil

Se describen resultados parciales obtenidos en un proyecto durante seis años en la enseñanza de Cálculo I y II para estudiantes de ciclo básico de la Facultad de Farmacia.

Los objetivos son determinar:

Una red de situaciones-problema.
Un conjunto de reglas de trabajo individuales y en grupo.
Un conjunto de criterios de medidas.

Capaces de garantizar la consecución del objetivo nominal de las disciplinas de Cálculo (formulación y resolución de problemas de ecuaciones diferenciales elementales al nivel taxonómico de aplicación) para una población de estudiantes homogeneizados por el examen de admisión dentro de las condiciones de enseñanza, materiales y normativas impuestas por la tradición de la universidad.

Se introdujo un criterio de mediciones basado en el tiempo de trabajo individual y en grupo realizado en clase y en recuperación paralela, dentro de las reglas de la asimilación solidaria para ser ponderado con las notas de las pruebas. Se espera obtener perfecta correlación entre los aprobados por el criterio de tiempo de trabajo y los aprobados por el criterio de pruebas y exámenes. Al final se espera poder eliminar las pruebas como criterio de aprobación.

La evidencia del problema es demostrada en un libro, "El alumno real" (aún no editado), a partir de grabaciones de situaciones en aulas y debates con alumnos. Los resultados obtenidos y las adaptaciones de las reglas de la asimilación solidaria a 1° y 2° grados son discutidos en el "Manual de asimilación solidaria", elaborado a partir de cuestionamientos recibidos en correspondencia con innumerables colegas.

ANALISE DE ERROS E HABILIDADES NAS SOLUÇÕES DE PROBLEMAS

Ary Vieira Barradas
Rio de Janeiro, Brasil

Neste trabalho são analisados os ERROS cometidos pelos alunos Brasileiros, do 1º grau, na faixa estária de 7 a 11 anos de idade, e suas habilidades na solução de problemas de Matemática.
Inicialmente 3 (três) aspectos são caracterizados nos problemas, quais sejam:
1) Da linguagem em que o problema é apresentado.
2) Do nível de representação em que os dados são fornecidos.
3) Da lógica do problema, isto é: o conjunto das relações estabelecidas e a estabelecer entre os dados.
Em seguida é feito um estudo dos ESTAGIOS de desenvolvimento congnitivo do aluno e analisado o conteúdo de matemática apresentado pelos Professores.
Posteriormente vários testes, nas suas várias formas, são resolvidos pelos alunos e análise das soluções são feitas.
Pretende-se com este trabalho, dar ao Professor subsídios para elaboração de seu plano de aula, de curso e elaboração de metodologias de apresentação de conteúdos de matematica.
Este trabalho tem apoio financeiro da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), sendo desenvolvido no Projeto Fundão - UFRJ e deverá estar concluído em março de 1987.

MODELAGEM MATEMATICA COMO ESTRATEGIA DE ENSINO NUM CURSO DE RECICLAGEM DE PROFESSORES

Rodney Carlos Bassanezi
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Campinas, Brasil

O propósito deste trabalho é mostrar como un curso de especialição para profesores de matemática pode ser o mais eficiente possível quando sua ênfase maior é a valorização do conhecimento já adquirido pelos alunos-professores. A metodologia empregada neste caso foi a da modelagem matemática como motivação e como fator sócio-econômico, objetivando além de mudanças no ensino, um maior empenho nas transformações sociais. Nosso programa foi desenvolvido na Faculdade de Filosofia de Guarapuava (PR) em 3 etapas nas férias (1985-1986) num total de 360 horas, para 40 professores de matemática (1º, 2º e 3º graus) de diversas regiões do país. Os alunos-professores foram divididos em 6 grupos, cada um atuando em problemas diversos da realidade local: suinocultura, apicultura, piscicultura, plantação e industrialização da erva mate e da maçã e, fabricação de papel. As disciplinas e programas foram ofrecidos de tal forma a levantar problemas relativos ás áreas de interesse de cada grupo, numa sequência de disciplinas integradas: (1) Etnomatemática, (2) Estadística, (3) Matemática Elementar, (4) Métodos Numéricos e Computacionais, (5) Programação Linear, (6) Física Experimental, (7) Cálculo Diferencial e Integral e (8) Equações Diferenciais. A eficiência de modelagem matemática neste curso além de valorizar o conhecimento dos alunos, deu condições para desenvolver novos conteúdos e através dos modelos obtidos por cada grupo, entender e influenciar a realidade local na medida que estes modelos puderam ser utilizados na própria realidade pesquisada.

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE SEMEJANZA

Lucilia Bechara Sanchez
Associação Universitária Interamericana
Sao Paulo, Brasil

Este trabajo trata sobre la interacción entre la enseñanza y el aprendizaje de nociones de geometría relacionadas específicamente con la semejanza y la homotecia.

Fue elaborado a partir del análisis de los programas de enseñanza de geometría para el primer grado en el Estado de São Paulo (alumnos de 6 a 14 años).

Estudiamos aquí el "campo conceptual" de la semejanza, en dos contextos:

1º Con alumnos de 7 a 15 años mediante la propuesta de problemas de ampliación y reducción de figuras planas. Posteriormente analizamos las soluciones.

El objetivo de este estudio es comenzar a "rastrear" el proceso de adquisición de conceptos de ampliación y reducción, a través del tiempo, entre los alumnos de 7 a 14 años.

2º Con grupos de profesores de matemática del Estado de São Paulo, aplicando a estos grupos una "secuencia didáctica", donde fueron utilizadas tres "situaciones problema", cuya solución requiere conocimientos de semejanza.

Analizamos los resultados de la aplicación de esta "secuencia didáctica" para evaluar cómo están estructurados los conocimientos de semejanza y homotecia entre los profesores.

En los dos estudios consideramos los siguientes presupuestos:

a) La estructuración de los conocimientos de semejanza necesita un largo período de tiempo y experiencias que van desde el reconocimiento intuitivo de ampliaciones y reducciones hasta la formalización y aplicación de los teoremas de semejanza y homotecia.

b) Los conocimientos con los cuales el individuo actúa se mantienen inconscientes durante mucho tiempo. Es necesario hacerlos conscientes para su fomalización y aplicación. Cuando son inconscientes, los conocimientos actúan en forma limitada y distorsionada.

Este trabajo muestra los niveles de elaboración del conocimiento de semejanza y homotecia y los tiempos necesarios para su estructuración.

Verificamos que en la construcción de estos conocimientos están articulados dos sistemas: uno de relaciones geométricas vinculadas con las propiedades de las figuras planas y otro de relaciones numéricas vinculadas con las estructuras multiplicativas.

El nivel de elaboración de estos dos sistemas varía en cada individuo y en cada grupo.

Realizamos también, un análisis de la metodología utilizada y observamos que cuando proponemos una "situación problema" tenemos un proyecto, pero la trayectoria de cada grupo o individuo modifica este proyecto inicial.

El conocimeinto de los individuos promueve las síntesis y éstas el conocimiento de los individuos y en este proceso los liderazgos actúan definiendo prioridades, por lo tanto, el proceso es dialéctico: el contenido y la metodología son interdependientes.

Observamos también, una alarmante falta de coordinación entre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría y, como consecuencia, un bajo nivel de conocimiento de los alumnos.

Los primeros resultados muestran la posibilidad de elaborar un programa analítico de geometría.

Pretendemos ampliar este trabajo mediante el estudio de casos con la finalidad de caracterizar la interacción entre enseñanza y aprendizaje.

DA UNIVERSIDADE A ESCOLA: RELATO DE UMA EXPERIENCIA

Ana Maria Beltrame, Marli Basso
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)
Santa Maria, Brasil

Neste trabalho relatamos uma experiência realizada por alunos e professores do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Maria -Santa Maria- Rio Grande do Sul, participantes do Projeto de Iniciação á Pesquisa em Educação Matemática (GIPEM). Este projeto está sendo desenvolvido desde 1984 e consta das seguintes etapas: a) elaboração pelos alunos, de projetos de pesquisa em Educação Matemática a nível de 1º e 2º graus sob a orientação dos professores do curso, tendo a preocupação básica de aprofundar os conteúdos matemáticos, establecer as relações com as demais áreas de conhecimento e buscar uma metodologia adequada para o desenvolvimento dos mesmos; b) desenvolvimento pelos alunos nas escolas de 1º e 2º graus, dos projetos elaborados, propiciando uma vivencia do cotidiano da escola através da troca de experiências entre alunos e professores destas; c) análise do trabalho desenvolvido pelos alunos, com a participação dos professores orientadores e dos professores das escolas envolvidas, a través de reuniões sistemáticas com o objetivo de avaliar os projetos desenvolvidos. Os resultados obtidos nos permitem uma melhor adequação do currículo do Curso á realidade, possibilitando ainda uma constante avaliação do curso de licenciatura e uma atuação mais eficiente dos futuros profissionais.

ANALISE DE UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR DE CIENCIAS E MATEMATICA PARA AS ESCOLAS DE 1 º GRAU DE SANTA MARIA - RIO GRANDE DO SUL - BRASIL

Eleni Bisognin,Vanilde Bisognin
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)
Santa Maria, Brasil

Neste trabalho apresentamos alguns resultados básicos obtidos através da realização de uma experiência interdisciplinar para o ensino de Ciências e Matemática nas Escolas de 1º grau da Cidade de Santa Maria - Rio Grande do Sul -Brasil. Para realização deste trabalho optou-se pela criação de Cursos de treinamento para os professores das escolas envolvidas com posterior assessoramento, acompanhamento e avaliação do trabalho pedagógico. Optou-se também pela participação de alunos dos Cursos de Licenciaturas em Matemática, Física, Química, Biologia e Ciências da Universidade Federal de Santa Maria, propiciando a integração destes com os professores das escolas. Destacamos como resultado fundamental deste trabalho a formação de Núcleos de Estudos Interdisciplinares nas escolas envolvidas, bem como a constituição de um Grupo Interdisciplinar na UFSM com a finalidade de dar continuidade á pesquisa. Este projeto está sendo financiado pela CAPES através do Programa de Apoio ao Desevolvimento Científico e Tecnológico (PADCT) - Subprograma Educação para a Ciência.

VIVENDO E COMPREENDENDO A REALIDADE - UMA EXPERIENCIA CONCRETA

Vanilde Bisognin, Eleni Bisognin
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)
Santa Maria, Brasil

Este trabalho refere-se a uma experiência na área de Matemática desenvolvida numa escola de 1º grau em Santa Maria. Neste relato nos propomos a apresentar algumas idéias sobre como a Matemática pode contribuir para formar pessoas críticas e participantes e oportunizar ao aluno uma participação ativa fazendo com que ele seja sujeito de seu próprio processo educativo. Com esse objetivo foi definida uma linha de trabalho que procurou centralizar o estudo em questões socialmente relevantes tais como a análise do Custo de Vida e as repercussões sócio-econômicas na vida dos alunos. Procuramos abordar questões que colocassem em primeiro plano o homem e suas relações com a sociedade e ao mesmo tempo que fossem relevantes quanto ao conteúdo matemático abordado. Analisamos alguns aspectos tais como o problema da habitação, do transporte, da saúde e alimentação, destacando a necessidade do conhecimento matemático para entender e analizar tais questões. Procuramos levantar os aspetos contraditórios e dinâmicos dos fatos destacando que as transformações ocorrem pela ação do homen e que o homem se modifica ao modificar as coisas. O processo de modificação é lento, mas alguns resultados positivos podem ser observados.

THE TEACHING OF ALGEBRAIC CONCEPTS TO ELEMENTARY SCHOOL STUDENTS

Henry Borenson
Council Rock School District
Pennsylvania, U. S. A.

Can elementary school children learn the algebraic concepts and methods related to "9th grade" algebraic linear equations if presented with a concrete model of the world of algebraic linear equations? What concrete model would make such learning easy for students? These were the original questions which motivated the research and development of The Hands-on Equations Learning System. Working with students one-on-one, the students' "natural" approaches to concretely solving algebraic equations were noted. These methods were then refined and tried with other children. Gifted children in the 2nd and 3rd grade were found capable of learning the materials on their own just from reading the manuals. Average fourth grade students were found to show enthusiasm for the materials. This research suggests that elementary school students can be provided with significant pre-algebraic experiences through the use of concrete materials (1984-1986).

IMPLANTAÇÃO DE UMA METODOLOGIA ATIVA NAS ESCOLAS OFICIAIS DO ENSINO REGULAR DO 1° GRAU DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Diva Maria Brêtas de Noronha
Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro, Brasil

A Matemática tem sido desenvolvida de modo inadequado na maioria das escolas de todos os níveis. As posturas metodológicas, didática e pedagógica dos professores dessa disciplina têm invertido o processo da Educação Matemática, utilizando a ordem científica e não a genética.

Pressupomos que o conhecimento matemático é construído "a partir do concreto" através de situações-problema que possibilitam o desequilíbrio interno necessário à legítima aprendizagem, e enfatizamos o ensino dinâmico em grupo, de modo que, todo o processo conduza à "assimilação solidária".

A metodologia empregada com os professores das escolas envolvidas, coerente com a premissa - FAZENDO É QUE SE APRENDE - inclui: no 1° ano de trabalho vivência da construção de conceitos da Matemática elementar, através de materiais concretos; discussão do processo vivido em confronto com o sistema tradicional de aulas expositivas; observação e discussão de aulas de demostração; no 2° ano de trabalho aplicação da metodologia vivenciada; continuação da orientação através de visitas às salas de aula, comentários, debates e execução de novas atividades pelos professores.

Nesse trabalho, iniciado em 1985 em duas escolas municipais, nos defrontamos com dificuldades:

de ordem interna da escola - inadequação da estrutura física, avaliação tradicional, seriação, etc.

de orden externa à escola - vestibular, concursos, cobrança dos pais, política estadual de educação.

de resistencia do professor - A partir de depoimentos das professoras e dos índices de reprovação de Escola Municipal Penedo:

	Antes da implantação/1985	Depois da implantação/1986
1ª série	56%	36%
2ª série	53%	23%
3ª série	39%	21%
4ª série	12%	13%

podemos concluir que nossa proposta de Ecucação Matemática:

- atinge o processo educativo como um todo; atingindo as outras áreas do conhecimento, particularmente a alfabetização, e mudando a forma de "ver" o aluno;
- quando aplicada, torna-se um processo irreversível;
- cria um espaço de ensino da Matemática accessível a todos.

EM BUSCA DE UMA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA TRANSFORMADORA

Aristides Camargos Barreto
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro, Brasil

1. INTRODUÇÃO

A Educação Matemática torna-se, cada vez mais, uma componente indispensável à formação integral do homem moderno. Basta olhar para o Brasil de hoje, inundado de índices (inflação e reajuste de preços versus gatilho), para ver que um mínimo de conhecimentos matemáticos constitui uma das necessidades individuais mais básicas, na luta pela vida.

Paradoxalmente, por tradição e elitismo, a Escola de 1° e 2° graus continua afastada dessa realidade. E a Matemática, enquanto disciplina que mais reprova, exerce uma barreira social dupla: por um lado, ignora/rejeita os conhecimentos informais que os estudantes já possuem - a cultura do grupo social; por outro lado, ela é a principal responsável pelos crônicos fenômenos de repretência e evasão. A própria linguagem matemática é de difícil decodificação para a maioria, o que faz dos chamados problemas verbais um tormento.

No Terceiro Mundo, o mau desempenho nas séries iniciais é devido, em grande parte, a carências nutricionais, visuais e afetivas. Mas a que atribuir os catastróficos resultados nas provas de Matemática dos recentes concursos vestibulares, cuja clientela já acumula, por lei, onze ou mais anos de escolaridade? Além disso, no 3° grau, as áreas de ciências exatas e tecnológicas também convivem com altos índices de reprovação nos cursos de Cálculo.

É consenso que a dificuldade em Matemática, geradora da já chamada ansiedade matemática (SEGAL, 1984), é devida ao caráter abstrato dessa ciência. De fato, "a abstração é o sangue da vida da Matemática" (DAVIS E HERSH, 1982, p. 113). Logo, o que qualquer metodologia científica nesse campo pode pretender é motivar e amenizar a abstração, aproximando a Matemática da realidade do educando, em seu tempo e meio. Esta nova Educação Matemática será tanto mais transformadora quanto mais des-alienada, isto é quanto menor ela tornar a distância abstrato-concreto.

2. RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA PROFISSIONAL

Ao longo dos doz últimos anos, temos alternado a metodologia convencional

teoria → exemplo → exercício

com a estratégia de ensino a partir de modelos matemáticos interdisciplinares (BARRETO, 1984), que introduzimos em 1976. Esta última obedece o esquema:

situação → teoria → modelo,

que consiste no seguinte: a abordagem de cada tópico central do currículo é <u>precedida</u> por uma situação-problema significativa e motivadora; em seguida, expomos a teoria; e no fim retornamos à situação, para matematizá-la com a teoria exposta. A situação matematizada é o que se chama um modelo matemático da situação de partida. Este pode revelar informações novas sobre a situação (eventualmente, previsões), como feito nos modelos profissionais.

Onde obter situações?

1. Na comunidade.

   Exemplo: análise de soluções matemáticas já obtidas empiricamente (etnomatemática).

2. Em jogos, brinquedos, danças, adivinhações, e outras situações lúdicas (DE CARDENAS, 1981 e TAHAN, 1983 e 1984).

3. Em jornais e revistas.

   Exemplos: tabelas numéricas, informações sobre índices.

4. Em disciplinas cursadas paralelamente.

   Exemplos: fluxogramas em geral, análise estrutural de textos. (SANT'ANNA, 1979).

5. Em instituições públicas e privadas que usem a Matemática.

   Exemplos: serviços de transportes, ocupação de leitos em hospitais, programas de vacinação, cadastramento.

As situações - de preferência, buscadas pelos estudantes - são levadas à escola e aí matematizadas, de formas alternativas; as conclusões são analisadas e comparadas.

3. RESULTADOS

Nossa experiência direta com estudantes e a experiência comunicada por professores que temos orientado dentro dessa estratégia revela:

Melhor desempenho nas avaliações convencionais;
Aumento do interesse pela disciplina; Redução da ansiedade matemática;
Desenvolvimento do espírito crítico e da criatividade;
Aperfeiçoamento da capacidade de análise e de síntese;
Valorização do hábito de leitura.

Esta metodologia, mais aberta e mais global, privilegia o interpretar/discutir/analisar/ estudar sobre o clássico calcular/achar/resolver/determinar. Ela simula a forma de aplicar efetivamente a Matemática, tem caráter interdisciplinar, de integração, e reaproxima a Matemática das ciências humanas, sociais e biológicas, numa perspectiva menos tecnocrática e mais humanista.

Conforme Umberto Eco, em entrevista recente, "o humanista, e não o engenheiro, é o homem do futuro". Como a Educação deve caracterizar-se pelo sentido de antecipação
(= sensibilidade ao que ainda vai acontecer), ainda mais se visa ser transformadora, então sejamos humanistas!

LA TRANSFORMACION DE PROBLEMAS Y LA CONSTRUCCION DE CONOCIMIENTOS MATEMATICOS POR LOS ALUMNOS

Rómulo Campos
Sao Paulo, Brasil

La cuestión motivadora de este estudio es comprender de qué forma se da la construcción del conocimiento en una situación en que los alumnos están trabajando en la resolución de un problema o en la investigación de un tema.

Encontrar una respuesta satisfactoria a esta cuestión es sumamente importante para establecer principios que puedan orientar los maestros y maestras en la dirección de un trabajo abierto en las clases de Matemática, que pueda prescindir de modelos rígidos.

En nuestra investigación hicimos un estudio comparativo entre los trabajos de un grupo de niños y niñas alrededor de un problema clásico (unir tres casas a tres estaciones de servicios sin que las líneas se crucen) y la solución que Euler dio al problema de los 7 puentes de Königsberg.

Queda bastante claro un procedimiento común que es basado en sucesivas transformaciones del problema hasta que se presente en una forma en que su solución sea "visible".

Elaboramos entonces el concepto de Campo de Problemas (el conjunto de problemas creados a traves de transformaciones y reconocidos por el alumno como problemas relacionados) como dato "a posteriori", resultante del proceso real y no como dato "a priori", idealizado (como en los Campos Conceptuales de G. Vergnaud). Este punto de vista pretende destacar la existencia de Campos Conceptuales reales y provisionales, aunque manteniendo muchas de las características indicadas por Vergnaud. Los CCR pueden ser caracterizados entonces como "rastros" de la construcción de los Campos de Problemas y la cuestión de su "previsibilidad" se presenta de forma muy compleja.

Otros elementos importantes:

- La construcción de conocimiento a través de desequilibrios y a través de concordancias.
- La construcción y transformación del lenguaje.
- El maestro está siempre aprendiendo sobre el conocer de sus alumnos.

Fueron además analizadas de manera breve las relaciones entre la Cultura Matemática (en el sentido del conocimiento no explicitado como tal), la Cultura en su sentido más general y la construcción del conocimiento por los alumnos. Una cuestión quedó planteada para futuras investigaciones: la manera como Euler ha resuelto el problema de los puentes indica la necesidad de estudiar las relaciones entre el conocimiento anterior (horizonte matemático) y las formas de abordaje de una situación nueva.

PROYECTO 30-ST. UNA ACCION CAPACITADORA. DEPARTAMENTO DEL QUINDIO. REPUBLICA DE COLOMBIA

Rafael Cardona Oviedo et al.
Universidad del Quindío y Grupo de Estudios sobre la enseñanza de la Matemática (GEMA)
Aguadilla, Puerto Rico

Este es un trabajo de tipo práctico que ha venido realizándose desde 1984 en los Municipios del Departamento del Quindío y de otros Departamentos. Su objetivo general es CAPACITAR al docente de Matemática, tanto primaria como de secundaria, en el aprendizaje de nuevas técnicas para la enseñanza de la matemática. El trabajo se viene realizando en la modalidad de SEMINARIO-TALLER (S-T), a través de temas específicos y materiales complementarios. En Geometría hemos desarrollado, entre otros, S-T sobre: el geoplano y su uso; construcciones con regla y compás; transformaciones; axiomatización; métodos de demostración; áreas y volúmenes; el sonoviso y su uso. Esta experiencia está en proceso de evaluación, haciendo notar de antemano que: los temas han sido sugeridos por los docentes; los docentes capacitados dan en sus clases la importancia del caso a la enseñanza de la Geometría; se han elaborado materiales impresos y sonovisos. Este proyecto ha sido financiado por la Universidad del Quindío, el Centro Experimental Piloto (CEP) y por los propios docentes.

MATEMATICA Y REALIDAD: Unos Ejemplos

Emma Castelnuovo
Roma, Italia

Quisiera, con esta comunicación, destacar cómo un problema clásico concerniente a volúmenes puede motivar a los alumnos hacia el concepto de función o hacia ramas científicas como la biología.

Me refiero particularmente a estudiantes con edades entre 11-14 años, pero el argumento que voy a presentar se puede desarrollar más profundamente con alumnos de un ciclo superior.

El problema es el siguiente: construir recipientes en forma de paralelepípedo con base cuadrada utilizando una hoja de papel como superficie lateral. Se trata de doblar la hoja en cuatro partes iguales. Pero -es claro- que se puede doblar de dos maneras diferentes, y por lo tanto, se realizan dos paralelepípedos diferentes. Imaginando pegar una base, se invita a los alumnos a observar los dos recipientes. Si se parte de una hoja "normal" de papel (dimensiones 20 x 30), y se pregunta "¿tienen los dos recipientes el mismo volumen?". La pregunta parece a los muchachos (y también a muchos adultos) totalmente estúpida. "Es claro -dicen- porque el papel es siempre el mismo". Se repite la construcción utilizando una hoja más estrecha (por ejemplo 10 x 30). Igual reacción. Una hoja todavía más estrecha lleva a dudar. "Verdad -dice alguien- esta vez parece que los volúmenes no son iguales; pero ¿por qué?". Esta falta de observación tan frecuente contrasta fuertemente con unas experiencias que tuve la oportunidad de conducir en un ambiente obrero. Los obreros, sobre todo si están acostumbrados a cargar objetos pesados, cuando se les presenta el segundo caso, dicen: "está claro que el recipiente más bajo y ancho es mucho más pesado que el otro". Y hay siempre unos que añaden "pero, si en este caso los volúmenes son diferentes, deberían ser diferentes también en el primer caso". Sería suficiente este ejemplo para concluir que la experiencia concreta ayuda también a ver con los ojos del espíritu...

Y ahora vamos a ver cómo el problema de los recipientes conduce de un modo natural al concepto de función. En efecto, el hecho de que los volúmenes resultan diferentes depende de la fórmula

$$V = b^2 a$$

donde la "influencia" de la base es más grande que la de la altura. El estudio de esta fórmula lleva a diferentes funciones según se considera constante una de las tres variables. El caso más sencillo es el de la proporcionalidad directa, cuando b = constante. En este caso, la fórmula es del tipo

$$y = kx \qquad \text{donde } k = b^2.$$

Para destacar esta ley (que frecuentemente los alumnos enuncian diciendo que sólo se verifica cuando al crecer una variable crece también la otra) es verdaderamente interesante hacer descubrir una propiedad de muchas hojas (como rosas, laureles,...): tomando las medidas del largo y del ancho máximo de 5 ó 6 hojas, más o menos jóvenes de la misma rama, se verifica una proprocionalidad directa, que se puede evidenciar con una gráfica. Este hecho dice que las hojas crecen por semejanza.

Esta experiencia de botánica lleva a considerar otros hechos naturales donde la proporcionalidad no se verifica (como el crecimiento de la cabeza de un niño en relación de su altura, el aumento de las piernas de un caballo con relación con su cuerpo -es un famoso ejemplo de Galileo-,..), y a darse cuenta, desde un punto de vista biológico del porqué de estos hechos.

APROXIMACION Y LINEALIDAD: UN PRIMER ENFOQUE A TRAVES DEL LABORATORIO DE MATEMATICAS

Fernando Castro Gutiérrez
Universidad Nacional Abierta (UNA)
Maturín, Venezuela

En el presente trabajo se reseñan las experiencias realizadas por el autor con grupos de estudiantes del último año del bachillerato. El objetivo es sentar las bases para construir conceptos ligados a la linealidad y la aproximación a través de experiencias de laboratorio. Se comienza con diversas actividades que llevan una idea muy fecunda: la comparación por cuociente. Por esta vía es posible llegar a la derivada como herramienta de aproximación. Del seguimiento hecho a los estudiantes que participaron en las experiencias se deduce que es positiva esta etapa de incubación de conceptos a través de vivencias de laboratorio.

LA RESOLUCION DE PROBLEMAS EN EL CURRICULUM DE FORMACION DE PROFESORES

Fernando Cerdán, Luis Puig
Universitat de València
València, España

En este trabajo se discuten los principios teóricos y la investigación que han acompañado al diseño de un curso de resolución de problemas integrado en el currículum de formación de profesores de educación general básica (5-14 años) en España, que ha sido realizado por los autores en la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de Educación General Básica de Valencia. La tarea de resolución de problemas no se concibe como la obtención del resultado correcto, sino como la producción de aprendizaje significativo sobre la situación constituida en problema, de modo que lo que se pretende desarrollar es un estilo de conducta que lo haga posible. Además, al ser un curso destinado a la formación de profesores, los alumnos han de ser considerados desde la triple perspectiva de resolutores de problemas, estudiosos del proceso de resolución e instructores en ello, por lo que el curso procura que sientan progresivamente su paso por los estados de 'resolutor', 'resolutor consciente', 'resolutor-observador', 'resolutor-observador-investigador', y 'observador-investigador-profesor'.

MATEFOBIAS

Alberto Correa
Universidad Interamericana de Puerto Rico
Puerto Rico

Factores que determinan la necesidad de la educación matemática

La educación en el área de las matemáticas está determinada por tres factores principales que son:

a) Ampliación del conocimiento (creación de nuevos conocimientos matemáticos).

b) La tecnología (aplicación del conocimiento).

c) El ser humano y sus procesos de desarrollo (el ser humano como protagonista de la historia).

Ahora bien, la educación matemática ha estado siendo determinada y orientada por los factores de ampliación de conocimientos y tecnología, descuidándose el factor humano en sus contextos de desarrollo.

Nuestros modos y estilos de enseñar las matemáticas han originado la producción de tres tipos de estudiantes: Matefóbicos, mateapáticos y matefílicos.

Ahora bien, definiremos operacionalmente a estos tipos de estudiantes de la siguiente manera:

1) El estudiante matefóbico, es quel que siente gran temor por las matemáticas, lo cual le impide aprender la asignatura. En esta categoría hay un gran número de estudiantes.

2) El estudiante mateapático, es aquel que es indiferente a las aventuras matemáticas, lo cual le impide aprender efectivamente la asignatura. En esta categoría hay también muchos estudiantes.

3) El estudiante matefílico, es aquel que siente afecto y vive las aventuras matemáticas, lo cual le favorece en el aprendizaje de la asignatura. En esta categoría no hay un gran número de estudiantes.

Los educadores en matemáticas y agentes de cambios humanizantes en nuestro contexto social y cultural debemos curar al estudiante matefóbico, despertar al mateapático y cultivar el desarrollo de estudiantes matefílicos.

Debemos considerar tres elementos como entes esenciales para mejorar la calidad y la excelencia de la educación en matemáticas que son:

a) Estimular y desarrollar efectos hacia el estudio de las matemáticas en los estudiantes.

b) Desarrollar e implementar modelos de enseñanza para las matemáticas; dando una mayor participación a los estudiantes en el proceso aprendizaje - enseñanza de la asignatura.

c) Utilizar recursos computacionales que faciliten el proceso aprendizaje - enseñanza de las matemáticas (calculadoras, computadoras y robots).

CONCEPTOS, RESULTADOS Y TECNICAS. UN RECURSO PARA MEJORAR LA COMPRENSION EN MATEMATICAS

Cipriano Cruz, María Itriago
Universidad Central de Venezuela (U.C.V.)
Caracas, Venezuela

Se quiere demostrar que si se proporciona al estudiante un organizador o codificador general y si se le entrena para utilizarlo, se puede mejorar significativamente el nivel de comprensión. La experiencia se está llevando a cabo en un curso de repitientes de Análisis Matemático I, en la Facultad de Ingeniería de la U.C.V., durante el Segundo Semestre de 1986. El diseño del organizador naco como una respuesta a la interrogante ¿Cómo estudiar Matemáticas? que, a menudo, se formulan los estudiantes que obtienen bajo rendimiento en el área. Para este estudio se toman los dos grupos de práctica de una Sección. Al inicio del semestre se administra a los dos grupos un Pre-Test que consiste en estudiar un texto dado y contestar luego un Test de Comprensión. En el Pre-Test, la mitad de los sujetos en ambos grupos recibe indicaciones escritas para realizar la búsqueda de las partes importantes del Texto. Durante el semestre, el grupo experimental es entrenado para usar el organizador en el estudio y en la toma de notas de clase. Se obtiene M y T (a 0.05; 0.01) para los subgrupos que reciben instrucciones diferentes en el Pre-Test y para los grupos control y experimental en el Pre y Post-Test.

COMMUNICATING ABOUT MATHEMATICS: LANGUAGE PROFICIENCY, LANGUAGE USE, AND MATHEMATICAL UNDERSTANDING

Linda Davenport
Interface Education Network and Portland State University
Oregon, U. S. A.

This study was designed to examine the relationship between language skills and mathematical understanding, especially for language minority students. Forty high school algebra students participated in the study. Twenty of these students were native English speakers, and twenty were students whose first language was Spanish but who spoke some English and were receiving instruction in English. Students participated in one of several small group discussion sessions in which topics from their algebra class were presented. Students were audio-recorded as they participated in the discussion. Transcripts were produced for each student, which were subsequently analyzed for use of mathematical terminology. Information on English language proficiency and mathematics understanding was collected using standardized test data available in student files. A multiple regression analysis was used to examine the relationship between the use of mathematical terminology and mathematics achievement, while controlling for English language proficiency level, ethnicity, and gender. Use of mathematical terminology was found to be associated with mathematics achievement. Results suggest the importance of language development within the mathematics classroom, particularly for language minority students.

MATEMATICA E REALIDADE DO ALUNO

Vânia Maria Pereira dos Santos, Márcia Siqueira da Silva (licenciada), Sílvia Rugani R. de Castro (licenciada) e Wanderley M. Rezende (licenciado)
Universidade Federal do Rio de Janeiro - (UFRJ)
Rio de Janeiro, Brasil

Esta pesquisa originou-se da consulta bibliográfica e da análise dos questionários, redações e entrevistas de alunos num trabalho de campo sobre Problemas de Aprendizagem na Escola, onde surgiu um questionamento: "Existe um distanciamento entre a realidade do aluno e a Matemática ensinada na escola?" Começamos a trabalhar, em 1985, tendo como objetivos verificar se existe ou não tal distanciamento, bem como questionar o enfoque com que se trabalham os conceitos em sala de aula. Percebemos que não existe uma definição clara do que seja realidade do aluno, mas sim caracterizações da mesma nos aspectos: social, de condições materiais de existencia, psico-biológicos e de realidade do aluno enquanto linguagem e sua relação con "seu" mundo. Pretendemos situar a Matemática com relação a estes aspectos, e investigar por exemplo: -se a escola utiliza a intuição matemática e alguns conceitos práticos que o aluno traz, -se o aluno percebe a aplicação de conceitos e

instrumentos matemáticos em problemas da vida diária. Estamos utilizando como instrumentos: questionários, debates, entrevistas, testes de critério e discussões-livre. Como turma piloto temos uma turma de 8ª serie, de 30 alunos; sendo que pretendemos estender a pesquisa em 1987 a uma amostra maior de alunos da rede oficial. Estamos, no momento, registrando os dados já coletados, relatando conclusões sobre a realidade do aluno e em fase de validação do teste de critério (de 4 operaciões). Financiada pelo CNPQ e CAPES/MEC (PADCT).

THE DYNAMICS AND CONSEQUENCES OF THE MODERN MATHEMATICS REFORM MOVEMENT FOR BRAZILIAN MATHEMATICS EDUCATION

Beatriz S. D'Ambrosio
Brazil

Findings are reported from a study of the mechanisms of transfer of knowledge from developed to developing countries, through a case study of Brasil and its adoption of the modern mathematics curriculum. The modern mathematics curriculum constitutes an example of an educational innovation that was generated in the industrialized world and, through an international mechanism of knowledge diffusion, reached almost every developing country.

Qualitative methods, primarily document analysis and semi-structured interviews were the major technques used for data collection.

The results include a description of the dynamics of transfer of information about the new math curriculum to Brazil and its consequences for Brazilian mathematics education. With respect to the dynamics of transfer the role of each of the following transfer agents (among others) is analyzed: foreing aid agencies, foreign experts, students studying abroad, international conferences, publications, and publishing companies. The development of local leadership in the innovative process is also discused. With respect to the mathematics curriculum in Brazil, the results include a historical account of the development of the Brazilian curriculum over the past 25 years. Social, cultural and political forces that helped shape this curriculum are discussed and the study serves to illustrate the importance of taking into consideration such forces in the transfer of educational innovations from one country to another. Also, the lasting influences for Brazilian education of the curriculum innovations of the 60s are elucidated. Finally, the study includes a list of recommendations for curriculum innovations in the future. The intent of this study is that future initiatives in this area proceed more efficiently in light of previous experiences, without repeating the mistakes committed in the past.

INJECTIVE AND SURJECTIVE MAPS: COGNITIVE ACQUISITION OF SOME ASPECTS OF THE FUNCTION CONCEPT

Gontran Ervynck
Katholieke Universiteit Leuven, Campus Kortrijk (KULCK)
Kortrijk, Belgium

The objective of this talk is to focus attention to the cognitive acquisition of injectivity and surjectivity among a group of first year undergraduate students (mathematics and physics majors) at our university. Our results are based on a series of tests during the academic year 1985-1986. A first result is that the function concept, as a correspondence between two sets, is often not properly understood. As to the understanding of injectivity and surjectivity, we noticed that it shifted gradually from a visual image towards a verbal formulation and finally a formal definition, although the final stage is not always attained. An interesting fact is that the visual image is always built up using Venn-diagrams and never using a Cartesian coordinate system, revealing a lack of integration of set theory with the theory of real functions. The students' ability to convert theoretical knowledge into practical results has been tested too in a series of exercises. As an outcome we remarked that understanding properly surjectivity is more difficult than understanding injectivity, and applying them in concrete situations is still more difficult. The former was unexpected and seems difficult to explain; maybe it is due to the fact that a visual image of an injective function is more complete than that of surjective one. Among secondary difficulties which arose occasionally we perceived problems with the use and meaning of quantifiers.

ANALISIS DE ALGUNAS DE LAS CAUSAS DEL FRACASO EN MATEMATICAS

Manuel Fernández Reyes
Sociedad Canaria de Profesores de Matemática "Isaac Newton"
Islas Canarias, España

Hace referencia a las Matemáticas que generalmente se enseñan a alumnos de 8 a 15 años (3°, 4°,...8° de Educación General Básica y 1° de Enseñanzas Medias, en mi país). Se comentarán, para su discusión posterior, las siguientes:

No cubrir debidamente las etapas de aprendizaje. No ir generalizando y aplicando los conceptos en una secuencia ininterrumpida. Tardía introducción al lenguaje simbólico como instrumento de expresión precisa y generalizadora. Supresión de pasos, abundancia de "sobreentendidos" y de "casos particulares". Ocultación del concepto tras el algoritmo. Excesivo tiempo de exposición del profesor, que resta a los alumnos el necesario para que piensen y busquen soluciones a los problemas y cuestiones planteados. Uso poco frecuente de material didáctico. No dar una visión global de ciertas nociones fundamentales; por ej., la de proporcionalidad. El "enciclopedismo" de los programas. La falta de coordinación entre el profesorado de los distintos niveles. No programar detalladamente la interdisciplinariedad. La falta de acuerdo en lo que debe considerarse "problema real". No atender debidamente el cálculo mental en todos los niveles. El desconocimiento por parte del alumnado del significado de expresiones del lenguaje ordinario que envuelven conceptos matemáticos. La esclavitud de los libros de texto. La falta de una verdadera formación pedagógica del profesorado.

INFORMAL ANALYSIS OF TECHNIQUES OF DEMONSTRATION FOR STUDENTS OF FORMAL DISCIPLINES

John A. Fossa
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Rio Grande do Norte, Brasil

1. Perceived lack among university students of an intuitive understanding of the basic modes of reasoning used in Mathematics.
2. Informal analysis of these basic modes of reasoning as an aid to their intuitive understanding.
a) Problems with regard to conditionals: the basic modes of argumentation and the technique of conditionalization.
b) Problems with regard to universal generalizations: the abstract representative of a generalization, abstract proofs, and counterexamples. c) Indirect proofs, the technique of reductio ad absurdum. d) The technique of Mathematical Induction: importance of the basis and presentation of the hypothesis and the induction step as the result of applying techniques for generalizations and conditionals. e) Miscellaneous techniques: proof by cases, working backwards, and the question of the applicability of already demonstrated theorems to a given proof.
3. Some reflections on the interrelation between Formal and Informal Logic and its consequences for the teaching of Logic to students of Mathematics.

AN INTEGRATED WORKSHOP FOR PRIMARY SCHOOL TEACHERS OF MATHEMATICS

John A. Fossa, Manuel Claudemir S. Caldas
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Rio Grande do Norte, Brasil

1. Brief description of the current state of the teaching of Mathematics in Natal: material deficiencies, student related deficiences, and teacher related deficiences.
2. Objective of the Workshop: amelioration of the teaching of primary school Mathematics

(grades 5-8) by (1) providing instruction in Mathematics and Educational Methods to overcome some of the teacher related deficiencies an (2) discussing the use of alternative ways of presenting the curricula, curricula change,and the use of alternative materials in order to prepare the teacher to attack the material and student related deficiencies.
3. Description of the Workshop: a) Classroom phase: Arithmetic, Algebra, Geometry, History of Mathematics, Educational Psychology and Pedagogy taught in an integrated fashion with an eye to their inmediate application in the classroom; the material is taught, as much as possible, through the use of activities and discussion. b) "Accompaniment phase": various group and individual projects that center about the professor in his classroom. 4. Stastical Description of the composition of the members of the first three Workshops.
5. Preliminary results.

USO SISTEMATICO DE TECNOLOGIA EDUCATIVA AUDIOVISUAL EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

José M. Galdón, Javier Domínguez, Francisco Merino, Cristina Ramírez
Grupo AG de Tecnología Educativa
Madrid, España

La iniciación al Análisis Infinitesimal se comienza en España en el segundo año de la enseñanza media, con jóvenes de 14-15 años. Conceptos tales como "Límite de una sucesión, Límite de una función real", "Continuidad y derivabilidad", etc., presentan serias dificultades en su formalización.
Hemos estudiado y creado "software" audiovisual integrado en un Paquete Multimedia, compuesto de:

- -33 Diatapes (800 slides-18 cassettes)
- -100 Transparencias-retroproyector.
- -Video didáctico.
- -Texto con refuerzo.

La utilización de estos recursos de forma sistemática ha ayudado a motivar, reforzar y recuperar a muchos alumnos, desde que en 1980 aplicamos el método, diseñando un aula con el"hardware" necesario para el uso sistemático.

PERFECCIONAMIENTO A DISTANCIA DE DOCENTES DE MATEMATICA DE LA ESCUELA PRIMARIA: UN PROGRAMA EXITOSO INICIADO EN 1978 EN CANADA

Claude Gaulin
Université Laval
Québec, Canada

Se describirá la filosofía, el funcionamiento y las actividades del programa PPMM que está celebrando su décimo año de existencia en la Universidad Laval de Québec. El PPMM es un conjunto de cursos de perfecionamiento a distancia de docentes de matemática de nivel primario. Esos cursos tipo taller están organizados en una red de centros regionales bajo la responsabilidad de "animadores" locales que han recibido entrenamiento especial en la universidad. Los materiales de apoyo de los seis cursos existentes han sido producidos y revisados muchas veces en la universidad por grupos formados por didácticos de la matemática, de matemáticos y de docentes con mucha experiencia a nivel primario. Los cursos se desarrollaron con un enfoque constructivista, el uso de materiales concretos, trabajo sistemático en pequeños grupos y un desarrollo de actitudes críticas acerca de los currículos oficiales y de los libros de texto utilizados.

INFLUENCIAS MUTUAS ENTRE: ESTUDIO DE LAS FRACCIONES, LENGUAJE ALGEBRAICO Y GEOMETRIA

Joaquín Giménez
Universidad de Barcelona
Barcelona, España

La presente comunicación es una reflexión fruto de los trabajos en los campos citados, en el Ciclo 11-14 años, realizados con los profesores I. Batlle, C. Burgués, y J. Partegás (Fracciones y Geometría, en los últimos seis años) y F. Castells, y J. Batallé (Algebra en los dos últimos cursos). Las experiencias positivas, a partir de materiales manipulables, juegos y problemas, llevadas a cabo en diversas escuelas, tienden a plantear una propuesta curricular de generalización común, válida para este ciclo educativo, que permite aunar los esfuerzos en distintos aspectos de las Matemáticas, no olvidando peculiaridades de los distintos conceptos y constructos propios de cada ámbito. Se quiere contribuir así a crear un marco que facilite el encuentro de objetivos educativos comunes en futuros proyectos interdisciplinares. En ese contexto, se observa como el papel de un estudio de las fracciones, estrictamente vinculado al constructo parte/todo -aún siendo fundamental-puede dificultar ese trabajo de generalización. Se analiza el valor de la fracción como magnitud, y la necesidad (y dificultades) del conocimiento de los diversos constructos de fracción en la resolución de problemas algebraicos y geométricos. Se observa la falta de transferencia al campo de las fracciones/decimales de problemas comprendidos con números naturales. Se mostrará a partir de los materiales utilizados en la escuela (1987).

MATHEMATICS FOR THE LINGUISTIC LEARNER

Janice M. Green
Hiram College
Ohio, U. S. A.

Mathematics lessons are usually presented in an expository/lecture form with the information in mathematical language containing many symbols not common to everyday language; the lessons are auditory and symbolic. Consequently, to learn mathematics well a student must "fit" that teaching style with the same learning style.

Learning styles vary among students, and it was conjectured that the frustrated, fearful, highly anxious students of mathematics--those with mathophobia--possess learning styles markedly different from an auditory-symbolic/quantitative style.

A learning style test was administered to 38 adults who were enrolled in a basic mathematics course designed to prepare them for the college mathematics courses traditionally required for non-majors. None of these people had auditory symbolic results either as a major (dominant style) or a minor (adequate style). Twenty-six percent, on the other hand, had major scores in visual linguistic and over 90% had minors in this area. There were also indications that most needed concepts "reasoned" out to gain understanding rather than being presented rules to memorize.

Hence, both the textbook and the classroom approach were changed. The text has no pages with more than one-third of the information in symbols, and a "conversational" approach to concepts is used to develop "discovery" by the students. The classroom presentation is still an oral approach, but to enhance the strong visual linguistic style, explanations are also written in words. The latter "crutch" is gradually removed so that, by the end of the course, the classroom presentation is very similar to a traditional class.

The students have reacted favorably to this approach; anxiety and avoidance definitely decrease. Professors who subsequently teach these same students recognize a difference in both knowledge and attitude when compared with those who did not take the course.

Future research will be done in high and middle school environments to determine whether teaching styles would make a difference there.

LA YUPANA INCAICA EN LA ESCUELA ELEMENTAL

Clara Lucía Higuera Acevedo
Universidad de la Amazonia
Florencia, Colombia

A partir de la experiencia del INIDE (Perú), divulgada en Seminarios para Maestros de Matemática, en nuestro país, se ha adaptado la yupana de los incas como material concreto de apoyo en el aprendizaje do las operaciones básicas en la escuela elemental y de manera parecida a como se utiliza el ábaco chino. La construcción y su manejo constituyen un divertido juego para el niño y se ha constituído en fuente de reflexión en los maestros sobre el desarrollo del cálculo y de las nociones lógico-matemáticas en el niño. Por otra parte, permite apreciar el gran valor de este instrumento como legado patrimonial de una gran cultura precolombina americana y crear inquietudes sobre su conocimiento. Estudio iniciado en 1986 que continúa en curso.

UNA PROPUESTA DE DESMI(S)TIFICACION DEL CONOCIMIENTO MATEMATICO POR LA CONSTRUCCION DE LENGUAJE Y MODELOS MATEMATICOS - EXPERIENCIA Y PRODUCCION DE MATEMATICA EN EL AULA

Antonio José Lopes
Sociedade de Educação Matemática/G.E.R.P.
São Paulo, Brasil

Trabajos recientes de varias corrientes han discutido buenas y malas ideas del presente y del pasado. Son trabajos de óptimo nivel y de mucho valor para el profesor de los niveles primario y secundario. A partir de la reflexión sobre varias de estas corrientes identificamos algunos puntos comunes entre ellas que se diferencian de nuestra postura: 1) la R.P. disociada de los aspectos socioafectivos; 2) una visión internalista de la Matemática; 3) un lenguaje imperativo para el profesor, seguido de "recetas" para resolver mejor los problemas; 4) tendencia a valorizar problemas curiosos en detrimento de situaciones problematizables; 5) tendencia a adecuarse a programas, libros y procesos de evaluación, a nuestro ver, incompatibles con los presupuestos "más abiertos" de resolución de problemas. Ante esto proponemos la recuperación del concepto de EXPERIENCIA MATEMATICA donde los dos objetivos principales son la producción de Matemática, por el grupo de alumnos. Esto implica que no separamos Resolución de Problemas de Modelaje, de Construcción de Lenguaje, de Juego Lúdico, de Investigación Histórica y del Placer. En esta propuesta que discutimos a partir de la producción de alumnos, el aula es un Laboratorio de Matemática, donde las propuestas son aceptadas dentro de su límite de validez y donde la evaluación del proceso es contínua y considerada como parte de los resultados. El objetivo general de esta filosofía de la educación es llevar a alumno a la autonomía en relación con la construcción de su conocimiento.

LA EXPERIENCIA MATEMATICA EN EL AULA, UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE ALGEBRA

Antonio José Lopes
Sociedade de Educação Matemática/G.E.R.P.
São Paulo, Brasil

Este trabajo pretende señalar algunos caminos para la Enseñanza- Aprendizaje de álgebra en la escuela primaria. Parte del desarrollo histórico del álgebra, tal como fue categorizado por J. Piaget y R. García:
"...Intra-operacional hasta Viete, Inter-operacional a partir de Galois, Trans-operacional a partir de Galois...".
En esta propuesta, que llamaré "Experiencia Matemática en el Aula", tal como preconiza I. Lakatos en su "Proofs and Refutations", identifico tres momentos, no necesariamente distintos, para la enseñanza- aprendizaje del álgebra :

.Prealgebrización
.Modelaje
.Construcción de estructuras

Experiencias con < variación / (de)codificación

Los items que presentamos más abajo ilustran sugerencias de actividades que facilitan la ocurrencia de los 3 momentos: a) propuestas de actividades lúdicas o de juego lógico, que permitan al alumno la vivencia de las 3 etapas habitualmente utilizadas para clasificar el desarrollo del lenguaje algebraico: retórica, sincopada y simbólica; b) utilización del Error como materia prima, para la construcción de estructuras y modelos; c) exploración de sofismas algebraicos y trucos para el cálculo mental; d) modelaje de situaciones problema y fenómenos físicos; e) construcción de estructuras algebráicas, en las etapas finales del primario.

DEMOSTRACIONES MATEMATICAS CON LA AYUDA DEL COMPUTADOR: UN EJEMPLO ELEMENTAL

Jorge M. López
Universidad de Puerto Rico
Río Piedras, Puerto Rico

Resumen: Si $x = x_n 10^{n-1} + x_{n-1} 10^{n-2} + \dots + x_1$ (n un entero positivo, $x_n \neq 0$ y $x_1, \dots x_n$ enteros del 0 al 9) es la representación decimal del entero positivo x, definimos $f(x) = x_n^3 + \dots + x_1^3$. Si se itera la función f para un entero positivo x, eventualmente los valores obtenidos serán atraídos por ciertas órbitas. La demostración de este hecho constituye un ejemplo elemental de una demostración matemática en la que la computadora juega un papel esencial. El resultado se generaliza y se presentan varios problemas abiertos.

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATIC..: UN PUNTO DE VISTA PRAGMATICO

Jorge M. López
Universidad de Puerto Rico
Río Piedras, Puerto Rico

Tradicionalmente la matemática se ha enseñado como una interminable presentación de "destrezas" que presumiblemente son importantes para el desarrollo del conocimiento matemático en el estudiante. Este modo de enseñanza convierte la pedagogía matemática en una caricatura que se queda muy corta de lo que deben ser la metas de la educación preuniversitaria. Se ha comprobado que la mejor forma de impartir el conocimiento matemático en los niveles educativos elementales consiste en dotar el contenido curricular de una amplia selección de actividades de índole manipulativa que sirvan para desarrollar la intuición y la imaginación de los niños y para dar sustancia a la presentación del formalismo matemático tradicional. La matemática no debe ser el estudio de "destrezas" sino más bien el estudio de "problemas". Para reafirmar significativamente la forma en que se imparte el conocimiento matemático hay que lograr, entre otras cosas, la integración de los aspectos metodológicos implícitos en la preparación de los maestros con el contenido matemático de los cursos que reciben estos mismos maestros. En este trabajo se presentan los detalles de un proyecto que atiende la integración aducida en la oración anterior, el cual se realiza actualmente como un esfuerzo combinado de las facultades de Educación y de Ciencias Naturales de la Universidad de Puerto Rico. Se presentará una muestra de materiales desarrollados en este proyecto.

ESTUDIO SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMATICA EN LA REPUBLICA DOMINICANA

Eduardo Luna, Sarah González de Lora
Universidad Católica Madre y Maestra
Santiago, República Dominicana

El estudio sobre La Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática en la República Dominicana se realizó en tres etapas bien diferenciadas:

Primera etapa:

Evaluación nacional en gran escala de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Este estudio se realizó en el período 1982-85 y en el mismo participaron profesores y estudiantes en el octavo grado del sistema escolar dominicano. Esta evaluación siguió los lineamientos del Segundo Estudio Internacional de Matemática (SEIM) llevado a cabo a principios de la década del 80 por The International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

En el EAMRD se hizo, en primer lugar, un análisis del curriculum propuesto en matemática para el octavo grado, basado en los programas oficiales vigentes y en los libros de texto aprobados. Luego se recolectaron datos en 116 escuelas, con 160 profesores-aulas, y 5342 estudiantes distribuidos en todo el país. Los profesores de matemática suministraron informaciones sobre su preparación académica, sus métodos de enseñanza y sobre la oportunidad que habían tenido los estudiantes para aprender los temas de matemática que se enseñan en el octavo grado. Se administraron cuestionarios a los estudiantes al principio y al final del año escolar. Además se recolectó información socioeconómica de las familias de todos los estudiantes que participaron en el estudio, así como informaciones acerca de las actitudes de los estudiantes y profesores frente a la matemática. Por otro lado, también se obtuvieron informaciones acerca de los aspectos administrativos y organizativos de las escuelas por medio de un cuestionario que contestaron los directores de las escuelas participantes. El diseño del estudio y gran parte de los instrumentos utilizados fueron adaptados del SEIM.

Los hallazgos fundamentales de esta etapa fueron:

a) Existe un grave problema de calidad en el sistema educativo dominicano, los rendimientos promedio de los estudiantes son sumamente bajos en todas las áreas contempladas en el curriculum de matemática y esto es así en casi todos los sectores del sistema escolar dominicano. Solamente en un pequeño número de escuelas privadas los rendimientos se acercan a los observados en los países desarrollados de acuerdo con los datos generados por el SEIM.

b) Se observó un patrón de enseñanza de la matemática muy deficiente en lo relativo al contenido y a los métodos de enseñanza utilizados.

c) El profesor de matemática del estudiante típico de este nivel no tiene un entrenamiento académico suficiente. Sólo el 24% ha recibido el entrenamiento requerido para enseñar en ese nivel; 35% sólo posee diploma de bachiller.

d) Libros de texto deficientes; además, un bajo porcentaje de estudiantes posee libros de texto.

e) Existe una fuerte correlación entre el rendimiento de los estudiantes y el nivel socioeconómico de sus familias.

Segunda etapa

Período de observación de clases. En esta etapa también se realizó un estudio comparativo de los datos generados por el EAMRD y el SEIM. Esta etapa se realizó en el período junio de 1985 - agosto de 1986.

Durante esta etapa se ejecutó un estudio cuyo objetivo era determinar el estado de factores escolares que inciden en la educación matemática a nivel de octavo grado en la República Dominicana. Se desarrollaron instrumentos para la observación de clases y luego se seleccionaron doce profesores de matemática que laboraban en doce escuelas en el área urbana y rural del municipio de Santiago. Se recolectaron datos acerca del ambiente de la clase, el estilo de enseñanza del profesor, el contenido de matemática enseñado, las formas como se presenta el contenido, el tipo de participación de los estudiantes en la clase y la distribución del tiempo de clase. Además, se realizaron entrevistas personales con los profesores y se cuestionó a los mismos acerca de su formación profesional y experiencia como docentes, el patrón de repaso que siguen con sus alumnos, y sus opiniones acerca de cuales factores limitan el rendimiento en matemática de sus estudiantes.

Algunos hallazgos fundamentales de esta etapa fueron los siguientes:

a) Los resultados de las observaciones de clases realizadas en esta etapa constataron algunos problemas de los ya detectados por el estudio nacional realizado en la primera etapa y señalaron otros problemas. El patrón de enseñanza de la matemática observado es muy deficiente en lo relativo al contenido, las formas de presentación del mismo y la distribución del tiempo de clases. Aún cuando los datos recolectados en la primera etapa muestran que la mayor parte del tiempo se dedica al desarrollo del contenido, dicho tiempo se utiliza principalmente en copiar en la pizarra o dictar dichos contenidos. En consecuencia, la transmisión de los contenidos es muy lenta e ineficiente.

b) Los profesores indicaron que no podían suponer que los estudiantes dominaban los temas enseñados en años anteriores y que eran prerrequisitos para sus clases. Este hecho los lleva a emplear tiempo en repasar y re-enseñar dichos temas. Esta práctica limita el tiempo de que disponen los profesores para enseñar adecuadamente los temas contemplados en el programa de octavo curso.

c) A pesar de que los profesores de República Dominicana opinaron que la enseñanza de varios temas a este nivel debía ser intuitiva y basada en actividades prácticas, de hecho las informaciones que ellos proporcionaron indicaron que en sus clases hacían todo lo contrario. Estas informaciones revelan una tendencia hacia una enseñanza abstracta de la matemática.

Tercera etapa

Estudio experimental sobre una posible estrategia de bajo costo para el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la República Dominicana. Este estudio se llevará a cabo en el período agosto 1987 - agosto 1988.

En esta etapa se realizará un estudio experimental cuyo objetivo es determinar el efecto de un material de enseñanza de alta calidad y bajo costo (con profesores en servicio entrenados en la utilización del mismo) en el rendimiento de los estudiantes de octavo grado.

Para este estudio se diseñaron 26 lecciones de matemática sobre dos temas contemplados en el programa de octavo curso: números enteros y mediciones. Para cada una de estas lecciones se diseñó una guía para el profesor y una hoja que contiene las respuestas de los ejercicios. En cada lección se distribuye el tiempo de clases en las siguientes actividades: repaso, desarrollo, práctica guiada, ejercicios. Cada lección contiene además un conjunto de ejercicios de tarea que los estudiantes deben resolver en sus casas.

En agosto de 1987 se entrenarán 50 profesores en el manejo de estas lecciones. Estos profesores fueron divididos en dos grupos: un grupo de 25 participará en un entrenamiento de 90 horas de duración (3 semanas), y el otro en un entrenamiento de 12 horas (tres días).

En el período septiembre de 1987 - mayo de 1988 estas lecciones serán utilizadas por los profesores con sus alumnos; a cada alumno se le entregarán todos los materiales necesarios para el estudio de las lecciones. Durante el desarrollo de cada unidad (números enteros, mediciones), los profesores serán observados por lo menos tres veces. A todos los estudiantes de las aulas que participarán en este estudio experimental, se les administrará un pre-trest y un post-test en cada unidad con el fin de medir el rendimiento y aprovechamiento de los estudiantes. Deseamos señalar que los resultados preliminares de este estudio experimental muestran que la estrategia diseñada podría mejorar sustancialmente el aprendizaje de la matemática en nuestras escuelas.

APLICACIONES DEL CALCULO VARIACIONAL DE EULER EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE BERNOULLI

Fernando Manzano
PCcenter
Santo Domingo, República Dominicana

En este trabajo se presenta:

Aplicaciones del Cálculo variacional de Euler, en la solución de problemas de Bernoulli y en la optimización del diseño de unidades de almacenamiento magnético.

Exposición computarizada de imágenes

1. Fundamentos Teóricos
    - Funcionales
    - Proximidad de Curvas
    - Distancia
    - Continuidad del Funcional
    - Variación del Funcional
    - La Ecuación de Euler
2. Planteamiento de Bernoulli
3. Aplicación al acceso aleatorio en Discos Mágneticos

EDUCATIONAL ACTIVITIES FOR HIGH SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS AND STUDENTS AT WESTERN CAROLINA UNIVERSITY

Charles J. Martin
Western Carolina University
North Carolina, U. S. A.

This paper describes some of the efforts of faculty over the last 8 years at WCU to work with school systems in a rural economically depressed large mountainous region of western North Carolina. In particular, we focus on computer training programs for teachers, a microcomputer based network which links over 60 schools to WCU and its faculty, summer programs forgifted students and other outreach activities carried out in the schools during the academic year.
We describe in detail our efforts to date, the evaluation and follow-up, and the efforts we are about to embark upon. This paper should be of interest to faculty from college in rural areas whose mission includes educational outreach.

A DEVELOPMENTAL MATHEMATICS PROGRAM AT WESTERN CAROLINA UNIVERSITY.

Charles J. Martin
Western Carolina University
North Carolina, U. S. A.

This paper describes the developmental mathematics program for high risk students at Western Carolina University. A testing and placement program, begun in 1975, and ongoing, is examined longitudinally. Placement policies, and remedial programs, for high risk students, are described.

A follow-up of students from the last five years is presented. A prototype, in use in local high schools, is also described.

COMPUTER COMPETENCIES FOR TEACHERS IN NORTH CAROLINA

Charles J. Martin
Western Carolina Universiy
North Carolina, U. S. A.

In 1984, the State of North Carolina decided that all in-service and pre-service teachers at all levels, K-12, will need to demonstrate that they can use the computer as a tool in their classroom.

In this paper we examine the competencies required by the state and we examine the program this university has put together to meet this challenge. We compare the program with requirements used in other states for certification of teachers of computer science.

FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA CONTRIBUIÇÃO PARA A PEDAGOGIA DA MATEMATICA

Maria do Carmo D. Mendonça
FUNBEC
Brasil

Temos nos preocupado, em como algo a ser ensinado pode ser mais bem aprendido e verificado quais outras variáveis, além das de ordem cognitiva, influem na aprendizagem. Alterando a metodologia tradicional procuramos estratégias para solucionar três problemas principais:

1. Apontar as experiências mais efetivas para inserir no aluno a predisposição para a aprendizagem.

2. Especificar as condições básicas para que se dê o conhecimento.

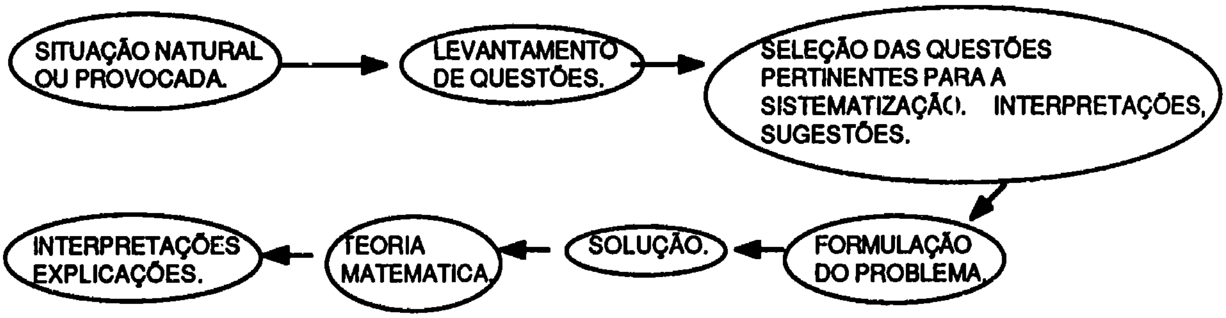
3. Desenvolver no professor, atitudes que favoreçam as soluções dos problemas citados acima.

Essas considerações gerais valem para todas as disciplinas, em especial para a Educação Matemática nas I^eras séries do 1° Grau que será a questão tratada nesse trabalho.

Diferentes sistemas interpretativos sobre ensino-aprendizagem e as evidências da nossa prática educativa nos tornaram convictos de que o conhecimento é produto da ação mental ativa e autônoma do aluno na interação com coisas e pessoas que o despertam para o conhecimento. Fizaeram-nos reconhecer que os fatores culturais e pessoais levam a diferentes interpretações da realidade e focalizá-los nos ajuda a investigar "como" o aluno compreende, quais conhecimentos já possuídos podem ser sistematizados e influe no desejo de aprender. Em nossa prática na sala de aula, verificamos que o aluno "pode" pensar, crirar e tem recursos próprios originais.

Daí vem a proposta pedagógica que enfatiza o princípio dinâmico de colocar o aluno frente a situações problemas ou seja, problematizar sobre situações provocadas pelo professor ou situações que se originam da realidade social.

Esta estratégia pedagógica segue o esquema:



POSSIBILIDADE DE MUDANÇA DE CONHECIMENTO

A ênfase foi dada ao fato de que o aluno, interagindo com o professor e o ambiente a sua volta, participe da formulação do problema e a solução ocorre através de explorações e descobertas realizadas pelo aluno. As interpretações das experiências decorridas é, quando possível representada em linguagem matemática. Daí temos a situação de partida matematizada (TEORIA). As conclusões realizadas são discutidas sobre a situação inicial.

Reconhecemos que na nossa prática educativa, nem sempre somos feièis a esse esquema desejado. A prática não é "limpia" pelo contrario, é cheia de contradições. O mais importante nesse processo é verificar que essa estratégia de ensino é boa na medida em que incentiva a criança a pensar com aoutonomia e enovar segundo suas habilidades ao mesmo tempo que sugere ao professor repensar seu papel de estimulador da construção do conhecimento da criança.

GEOMETRIC TRANSFORMATIONS: A POWERFUL TOOL FOR UNDERSTANDING AND APPLYING SCHOOL GEOMETRY

Michael H. Millar
University of Northern Iowa
Iowa, U. S. A.

Report on the author's experiences over a number of years in teaching geometric transformations to prospective elementary and secondary school teachers, participants in National Science Foundation-sponsored institutes for secondary school mathematics teachers, and secondary school teachers in Jamaica, W.I. These experiences, along with surveys and analysis of the literature, indicate that while the topic of geometric transformations has been given some attention in recent curricular reform, little has been done with it. They appear to show that mathematics educators have not given significant attention to the systematic development of the topic in elementary and secondary schools, and have not recognized the potential in using transformational geometry for providing a new viewpoint to understanding basic geometric concepts, giving alternative proofs to classical geometric theorems, and helping solve a wide variety of construction problems in geometry. The author will give a number of examples to show the power of transformational geometry for enriching the curriculum of school geometry both in its inmediate application to geometry and also in other areas such as algebra, analysis, art, and physics. Results of the author's 1985-1986 examination of how geometric transformations have been considered in a number of American secondary school mathematics texts will be discussed.

GRADE SUCCESS FOR STUDENTS IN A KELLER-TYPE PROGRAM

Philip R. Montgomery
University of Kansas
Kansas, U. S. A.

Over the past ten years, the precalculus courses at the University of Kansas have been taught in a variety of formats ranging from small classes to large lectures and, most recently, to a form of self instruction which we denote by SIMPL (Self-Instructed Mastery Plan). This study looks at one measure of success of this type of instruction; grades received by students in this and in subsequent courses. The results of this study indicate that students in the SIMPL format tend to receive the same percentage of passing grades (A, B or C) as those received by students in other formats. Further, the percentages at the unsatisfactory level (D or F) received by the SIMPL students are considerably lower. In another part of the study, students who successfully completed one of the precalculus courses and who subsequently enrolled in the following algebra course were sudied. The percentage of students who received passing grades in this subsequent course was 25% to 30% higher for those students from the SIMPL format than for those students from a more tratitional format. The study includes a comparison of SIMPL with

each of the two formats, regular classroom and large lectures, and a comparison between the regular classroom and large lecture formats. The costs of operating in this self-instructed format are much lower than the costs for any of the more traditional formats. Thus, given that the quality of instruction is equivalent to other methods of instruction, this method gives an attractive alternative method of instruction.

EL ORDENADOR EN LA ESCUELA

Julio Mcsquera
Venezuela

En esta ponencia presentamos algunos de los lineamientos generales que sirven de base a un material, que estamos desarrollando, sobre la introducción de microordenadores en la escuela dirigido a docentes de educación básica y secundaria.

Dividiremos nuestra presentación en tres puntos: Primero, planteamos que la introducción de microordenadores en la escuela ocasiona un problema de competencia profesional entre educadores y profesionales de la informática. Segundo, que todo intento de introducción de micros en la escuela debe ir precedido o acompañado de un proceso de desmitificación de dichas máquinas y su uso. Y por último, que debemos atacar pronta y decididamente los nuevos problemas introducidos por las ciencias de la información en el uso del lenguaje.

Una de nuestras premisas es que el docente es el profesional de la enseñanza. En particular el docente en matemáticas es el profesional de las matemáticas escolares y miembro de la comunidad matemática. La manera como se han venido introduciendo los micros en las escuelas ha puesto a los profesionales de la informática en posiciones que le corresponden a los educadores. Ante esto sostenemos que son los educadores quienes deben decidir, asesorados por profesionales de la informática, cuándo y cómo introducir los micros en la escuela.

La mayoría de las publicaciones sobre el uso de micros en la educación no son más, a nuestro juicio, que mera propaganda. Los docentes deben aprender a distinguir entre un trabajo científico y la propaganda elaborada por los vendedores y contructores de ordenadores. Estos últimos con sus ejércitos de gurúes de la informática han creado una serie de mitos en torno a los micros y sus posibles usos en la educación. Es importante que los docentes tengan acceso a materiales y formas de organización que les permitan adquirir y desarrollar elementos teóricos y prácticos que les lleven a adoptar una posición crítica ante la introducción de micros en la escuela.

La introducción de las ciencias de la informática en la escuela, a nuestro juicio, contribuye al deterioro del uso del lenguaje. Si no queremos que nuestros niños del futuro hablen una mezcla de español con inglés, docentes, políticos, lingüistas y profesionales de la computación deben sentarse a discutir seriamente la elaboración de un vocabulario que nos permita escribir, hablar y enseñar informática y cibernética en español. Terminaremos estas líneas con unas palabras del filósofo argentino Rodolfo Kusch, "No tiene sentido esgrimir la tecnología como utopía".

SECCIONES PLANAS DE UN CONO (CONICAS)

José Luis Muñiz, Julio César Silvera
Liceo 25 "José Belloni". Administración Nacional de la Enseñanza Pública. (A.N.E.P.)
Montevideo, Uruguay

El trabajo consiste en: 1) Representación de: circunferencia, elipse, hipérbola, parábola y cono sobre madera (plano), con clavos (puntos) e hilos (rectas envolventes). 2) Dando fundamento teórico a las representaciones, se efectuaron esquemas de la construcción por puntos de las cónicas. 3) Se presentan además intersecciones del plano con el cono, a efectos de visualizar las cónicas. La tarea fue propuesta en un instituto de enseñanza secundaria, en el tercer año del ciclo básico (edad promedio de los alumnos: 14 años) donde el contenido programático del curso va desde la resolución y discusión de ecuaciones de segundo grado, al estudio de la geometría del espacio; dentro de ese programa, hay un item dedicado a las cónicas: como lugar geométrico, sus propiedades métricas y construcciones. Por ser un tema relativamente árido, y por llevar la tarea en cuestión poco tiempo, es que fue decidido llevarla a cabo conjuntamente con el educando. La experiencia fue positiva ya que lograron desarrollar los aspectos creativos de los adolescentes, fue formativa e informativa a la vez ya que además de que el proceso enseñanza-aprendizaje se consolidó fuera del aula, se logró visualizar las cónicas, obteniéndose así una mayor asimilación. La conclusión fundamental es que mediante este trabajo se consiguió el fin último de la enseñanza: la enseñanza personalizada.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS--uma análise de fatores envolvidos

Lilian Nasser (Projeto Fundão[1]- IM - UFRJ)
Río de Janeiro, Brasil

A resolucão de problemas tem sido una preocupação constante dos pesquisadores em educação matemática talvez porque, há muito se acredita que o objeto principal do ensino da Matemática é desenvolver habilidades para resolver problemas. A pesquisa nessa área é

(1) financiado pela CAPES/ MEC (Brasil)

dificultada, pelo fato de ser impossível descrever, com palavras, um método que inclua todas as componentes envolvidas, independentemente de suas especificações e diversidades.

Neste trabalho, fazemos uma análise dos fatores detectados como influenciadores na resolução de problemas em Matemática, que classificamos em: -fatores inerentes ao problema; -fatores inerentes a pessoa que vai resolver o problema; -fatores relacionados ao professor; -fatores relacionados aos processos (cognitivos e físicos) usados. Concluímos que alguns comportamentos observados são comuns, tais como: alunos fracos usam apenas a estratégia de tentativa e erro para resolver problemas; -alguns métodos e estratégias são repetidos pelos alunos ao resolver problemas com a mesma estrutura; -em geral, os alunos são incapazes de dominar as diversas variáveis envolvidas em um problema; -a habilidade de resolver problemas é desenvolvida quando o aluno é levado a tentar reslover vários tipos de problemas, diferentes dos tradicionais, sem instrução específica prévia.

NUEVO PLAN DE ESTUDIOS PARA ESCUELAS NORMALES

Teresa Navarro de Mendecuti
Escuela Nacional de Maestros
México

Este nuevo plan se puso en marcha por primera vez en septiembre de 1984 y a pesar de que se consideró como la culmunación de algo que se había venido discutiendo desde tiempo atrás en diferentes congresos y seminarios sobre educación normal, la llamada "profesionalización del magisterio" no ha tenido hasta ahora el éxito esperado.

Inicialmente se presenta un marco teórico y una breve historia de los cambios esenciales en educación normal; un esbozo del marco jurídico y luego una encuesta entre alumnos y maestros que llevan todavía el Plan 75 (más de 1000 estudiantes) y con los que llevan ya 3 años con el plan 84 (sólo 150 estudiantes).

LA ABSTRACCION-GENERALIZACION EN EL PROCESO MATEMATICO

José Ambrosio Ochoa Olvera
Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ)
Querétaro, México

El mito que ha perseguido a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas lo ha llevado a una apologización del conocimiento, donde se presupone que sólo personas dotadas de gran capacidad intelectual pueden acceder a ellas. Consideramos a la abstracción-Generalización como dos esquemas de asimilación esenciales en la formación de pensamiento matemático ante todo como una forma de acción; habría que preguntarse si la didáctica de nuestro sistema preuniversitario fomenta u obstaculiza la construcción de dichos esquemas y en todo caso, como propiciar la ruptura o continuidad de tales prácticas. El objeto de estudio gira entorno a identificar los factores que inhiben o dificultan el verdadero aprendizaje de esta disciplina,y en base a ello delinear una didáctica que tienda a superar los obstáculos. El trabajo se realiza en Esc. Preparatoria de la UAQ, como primera aproximación. El pensamiento lógico matemático como señala Piaget se adquiere a veces con dificultades que dan lugar a una serie de aprendizajes, a menudo confundidos con los aprendizajes auténticos. Nosotros consideramos que estos seudocomportamientos son los que generalmente, disminuyen los índices de reprobación. No es nuestro interés dejar de reconocer el alto índice de reprobación que existe en esta materia, pero consideramos que la reprobación no es un indicador confiable para descriminar entre los sujetos que sí aprendieron y los que no aprendieron matemáticas. Consideramos que epistemológico de las matemáticas, de las teorias del conocimiento y del aprendizaje nos permitirán la elaboración teórica del problema didáctico que rebase las pretensiones utilitarias de aportar soluciones inmediatas a la reprobación masiva de esta asignatura en los niveles medio superior y superior.

WORKING WITH UNDERPREPARED POST-SECONDARY STUDENTS IN A UNIVERSITY SETTING

Arthur B. Powell, Martin R. Hoffman
Rutgers University, Queens College
New York, U. S. A.

Mathematics educators throughout the Americas have become aware of an increasing number of students leaving secondary schools with underdeveloped facility in computation and algebra. In many post-secondary institutions developmental mathematics courses have been established; however, their ability to provide effective and efficient remedial instruction to prepare students to enter college-level mathematics courses have been mixed. For several years, we have worked with university students in a developmental mathematics setting and have developed an innovative and successful approach for teaching computation through an awareness of algebra. We will present the theoretical and pedagogical framework of our approach, the course content and some problem-solving activities, and specific techniques that allow students to acquire powerful insights and understanding of mathematics. As part of the presentation, participants will be invited to examine activities wich are illustrative of the approach. Participants also will be invited to exchange their experiences on and describe their approaches in working with development mathematics students.

EVALUACION: PRUEBAS DE CRITERIO Y NORMALIZADAS

Israel Quiñones Santiago
Universidad Interamericana de Puerto Rico (UIA)
Arecibo, Puerto Rico

La educación es un proceso de producir cambios deseables de conducta, entonces ese proceso debe estar orientado hacia unos objetivos de instrucción específicos. Estos generarían cambios de conducta deseables mediante la realización de actividades de enseñanza predefinidas a lograr dichos objetivos. Para ver si ocurre algún aprendizaje, necesitamos "contabilizar" los cambios producidos como resultado de esas actividades, por lo tanto, el instrumento usado para evaluar ese proceso es extremadamente necesario e importante.

La evaluación se define como el proceso mediante el cual se determina hasta que punto se han logrado los objetivos terminales o capacitantes. Esto se logra estableciendo una comparación entre una norma establecida y "algo" de valor desconocido. Este estudio analiza y compara ambos métodos evaluativos de pruebas de criterio y normalizadas mediante el uso de técnicas estadísticas sencillas (desviación estándar, distribución normal, promedio, etc.).

EL ROL DEL CONOCIMIENTO SEMANTICO EN EL DESARROLLO DE LA DEMOSTRACION MATEMATICA

Ana Helvia Quintero
Universidad de Puerto Rico
San Juan, Puerto Rico

Temprano en el desarrollo de la matemática se estableció el método deductivo como la forma de justificar las verdades de esta disciplina. Hoy en día una de las razones que se aducen para incluir algunos tópicos matemáticos en el currículo es que los mismos ayudan a desarrollar el razonamiento deductivo. Al examinar el método de enseñanza para lograr este fin observamos que el mismo se limita a que el maestro desarrolle demostraciones deductivas frente al grupo como ejemplo de éstas. Se espera que el estudiante aprenda a desarrollar demostraciones a base de estos ejemplos.

Varios estudios (por ejemplo Balacheff, 1985; Fischbein y Kedem, 1982; Hoffer, 1983; Senk, 1985; William, 1980) demuestran que este método de enseñanza tiene un impacto superficial en la comprensión del método deductivo por la mayor parte de los estudiantes. De hecho, los que enseñamos a nivel universitario sabemos que la mayor parte de nuestros estudiantes no entienden lo que es un sistema deductivo.

Este estudio demuestra que esta limitación tiene raíces profundas. Los estudiantes tienen dificultad con tareas previas al desarrollo de una demostración: desarrollo y justificación de una hipótesis.

El hecho de que el nivel de ejecución de los estudiantes de escuela superior y los universitarios (antes de tomar cursos de concentración en matemática) fue casi igual indica que el currículo de escuela superior y los cursos introductorios en la Universidad no están atendiendo el desarrollo de destrezas en la generación y justificación de una hipótesis.

Cómo desarrollar la habilidad de generar y justificar una hipótesis es una pregunta que debemos estudiar con más detenimiento. Este estudio apunta a la importancia del conocimiento semántico en este proceso. El tipo de representación mental que hace el estudiante de la situación bajo estudio es crucial en la generación y justificación de una hipótesis.

Aunque el conocimiento semántico juega un papel importante en generar y justificar una hipótesis, no es el único factor envuelto. En este estudio se observó que algunos estudiantes trabajaban en forma más consciente en la generación de hipótesis. Con el fin de investigar el efecto de este último factor en el comportamiento de los estudiantes, se entrevistaron nuevamente algunos estudiantes que sobresalieron tanto al generar, como al justificar sus hipótesis, así como por el método tan cuidadoso que siguieron para llegar a su conclusión.

Observamos que hay dos tipos de desarrollo que están afectando la generación y justificación de la hipótesis. Por un lado, el estudiante está desarrollando sistemas conceptuales que permiten el desarrollo de hipótesis cada vez más sofisticadas. Por otro lado, el estudiante está desarrollando conocimiento de control o metaconceptual que le permite envolverse en la generación de hipótesis en forma más consciente.

<u>Implicaciones para la Enseñanza</u>

El desarrollo de una demostración matemática es una tarea compleja. Para comenzar uno tiene que desarrollar un argumento que valide la aseveración. Este argumento tiene que ser deductivo.

Este estudio muestra que el validar una aseveración por sí es una tarea difícil. Al principio uno no la debe complicar aún más pidiendo que la misma siga todos los cánones de una prueba deductiva. Debemos pues desarrollar la habilidad de demostrar en etapas. Debemos comenzar permitiendo al estudiante formular y justificar hipótesis. Una vez el estudiante tiene experiencia en esta tarea se deben introducir métodos más formales de demostración.

Esta labor no se debe limitar al curso de geometría. En todos los cursos debemos promover la generación y justificación de hipótesis. Poco a poco, y a medida que el estudiante madura, debemos comenzar a introducir los métodos más formales de la matemática.

COMO ENSEÑAR LOS SISTEMAS NUMERICOS

Nicolás Ramos Gandía
Colegio Regional de Arecibo, Universidad Interamericana de Puerto Rico (UIA)
Arecibo, Puerto Rico

En este trabajo se presenta una estrategia utilizada para enseñar los sistemas numéricos a estudiantes de matemática básica a nivel universitario. Partiendo del término primitivo conjunto, de la definición de conjunto cerrado, la operación unión de conjuntos, de los números naturales y utilizando un razonamiento inductivo (no riguroso), más bien , intu'tivo, se construyen los sistemas numéricos. Además, se enfatiza en el desarrollo de los números a través de la historia. Finalmente, se presenta un modelo de ejercicio para medir el aprendizaje de los estudiantes.

THE FUNCTIONAL APPROACH IN MATHEMATICAL THINKING

Boris D. Rakover
St. John Fisher College
New York, U. S. A.

Among the very difficult mathematical problems at any level of education are, in our opinion, TRANSCEDENTAL EQUATIONS AND INEQUALITIES. There are many mathematical and applied scientific problems being reducible to them. Our findings and large teaching experience proved the following statement: ELEMENTARY TRANSCENDENTAL FUNCTIONS AND THEIR PROPERTIES ARE THE KEY FOR THE CONCEPTUAL PART OF ANY TRANSCENDENTAL EQUATION OR INEQUALITY. We are considering the entire procedure of solving an equation or inequality as a two-part process. The first part is formal it is based on the knowledge of a certain number of formulas and methods, which can be memorized or found in a guidebook. The second part is a natural thinking process which can not be described anywhere and must be formed during the mathematical education period. The second part is related to the problems: a) What are the possible values of the unknown(s)? b) What are the limitations introduced by the function(s) involved in the case? c) Is one side affecting the other side if they are connected hy a sign of equality or inequality? d) What are the changes of the domain or number of solutions if the original problem in subject to some performances? The ability to solve classes of transcendental cases allow to achieve a high level of math background.

IMPLICACIONES DE LA DEPENDENCIA TECNOLOGICA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA Y LA INFORMATICA EN EL INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

Carlos Rondero Guerrero, Jesús Colín Miranda, Víctor Montiel Cortés
Academia de Matemática (ESIME-IPN)
México

En este trabajo, se presenta un análisis histórico-descriptivo de cómo la dependencia tecnológica influye en la concepción de la educación, en la práctica educativa y particularmente en la enseñanza de la Matemática.

Siendo México un país dependiente, el Instituto Politécnico Nacional como su institución más importante de educación tecnológica, no escapa a los efectos reproductores de la dependencia ideológico-educativa.

La Matemática y la Informática son dos disciplinas científicas fundamentales en el desarrollo evolutivo de un país como el nuestro, y por tanto, incidentes en la búsqueda de su independencia.

Tomando en cuenta aspectos tales como la herencia cultural y la identidad nacional, así como las experiencias compartidas con otros países, existe la posibilidad de lograr en la unión, la fortaleza necesaria para enfrentarnos juntos al gran reto que conlleva el aceptar ser interdependientes, pero romper prácticamente con el estigma del subdesarrollo.

ACCIONES DESARROLLADAS EN EL SUBPROGRAMA DE ACTUALIZACION DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

Delia Norma Sanguinetti de Saggese, Alicia Torelli de Nocera
Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba
Córdoba, Argentina

Estas acciones se desarrollan como un subprograma del proyecto REC (Reforma Educacional de la Provincia de Córdoba, República Argentina) enmarcado en el Proyecto Principal de Educación en América Latina y el Caribe de UNESCO. "La finalidad de esta reforma- expuso el Sr. Ministro Profesor Jorge H. Peyrano- es la de constituir progresivamente un nuevo sistema capaz de dar efectiva respuesta a los problemas educativos fundamentales y de correlacionarse y anticiparse a las necesidades de desarrollo social, económico y cultural de la provincia. Partiendo de la realidad misma, la Reforma Educacional permitirá superar la desarticulación del sistema vigente y sus anacronismos e incongruencias, con el fin de mejorar la calidad de la enseñanza que se imparte y responder a las necesidades educativas no satisfechas de amplios sectores de la población, que se han visto marginados de sus beneficios". Este subprograma de actualización de la enseñanza de la Matemática en la escuela primaria, comenzó en 1984, con los directivos y docentes de 6 escuelas de la Ciudad de Córdoba y por efecto multiplicador alcanzó en 1985 a 27 escuelas urbanas y 20 urbano-marginales, para extenderse progresivamente y abarcar en 1987, a los 22.000 maestros de toda la provincia.

A GEOMETRIA NA ESCOLA PRIMARIA

Maria de Fátima Saraceno e outros
Universidade Federal do Rio de Janeiro - (UFRJ)
Rio de Janeiro, Brasil

Este trabalho está ligado a um projeto mais amplo: PROJETO FUNDÃO[2] da UFRJ. Participam 2 professores da UFRJ, 3 secundários, 2 primários e I aluna do curso de formação de professores. A partir das experiências dos professores concluimos que a dificuldade em ensinar Geometria na escola secundaria provém do fato dos alunos de 11 a 16 anos não dominarem seus conceitos fundamentais. Há, portanto, necessidade de melhorar o ensino de Geometria na escola primária. Em1986 analisamos a proposta curricular no Rio, e os livros textos mais adotados. Fizemos levantamento com 80 professores para saber o que realmente ensinam e qual a metodologia utilizada. Entrevistamos 30 crianças de 5 a 11 anos para verificar os conceitos geométricos que têm formados e seu vocabulário. Observamos que muitos professores não ensinan geometria por desconhecimiento do assunto ou de sua importância. Outros as ensinam com erros conceituais ou sem atrativos. Resolvemos então, elaborar um material didático, composto de atividades que visam a ampliação do universo do aluno através da observação e construção de formas geométricas, estimulando o aluno a pensar e criar, sempre partindo do seu vocabulário. Contamos com a ajuda de uma psicóloga. A medida em que as atividades vão sendo redigidas, são testadas por professores do PROJETO em suas escolas, sofrendo muitas vezes uma reformulação. Pretendemos no futuro fazer uma divulgação do material, mostrando a necessidade do ensino da geometria na escola primária e avaliá-lo.

CONSTRUCTING WRITTEN ALGORITHMS - a case study

Analúcia Dias Schliemann, Clara Melo Santos, Solange Ferreira Canuto
Universidade Federal de Pernambuco
Pernambuco, Brasil

Studies on mathematical knowledge have shown that children develop their own mental computation strategies which rely on the same principles that govern school written algorithms. However, no research seems to have documented the spontaneous invention of written

[2] Financiado por la CAPES/MEC (Brasil)

algorithms. In this paper we report one such case. The subject was a 14 years old boy registered at he fourth grade of a Brazilian public school. Most of the mathematical instruction he was receiving involved the four basic operations using written school algorithms. He was asked to solve, using whatever means he wanted, a series of 170 additions involving numbers from 21 to 29 with numbers from 11 to 19. After solving 76 problems through mental decomposition he developed and consistently used a written algorithm in which the numbers to be added were decomposed into tens and units, and the units were decomposed into five plus what was left. A fairly consistent notational system was used throughout. The steps toward the construction of the algorithm, its relationship with memorized facts and mental strategies, and its application to other cases are analyzed. The relevance of the results to mathematical education is discussed.

LA ELABORACION DE PRUEBAS DE MATEMATICAS PARA EL NIVEL PRIMARIO RURAL DE GUATEMALA: DESAFIOS, EXITOS, FRACASOS, RESULTADOS

Patrick B. Scott
Universidad de Nuevo México
Nuevo México, U. S. A.

Los Programas Latinoamericanos de Educación (LAPE) mediante un contrato con la Agencia Internacional para el Desarrollo (AID) han estado trabajando con el Programa Nacional de Educación Bilingüe (PRONEBI) del Ministerio de Educación de Guatemala. Como parte de las actividades que se han realizado, se ha colaborado en la elaboración, aplicación y análisis de pruebas de rendimiento en matemáticas, según las Guías Curriculares nacionales para el nivel primario.

Se ha experimentado mucho con el formato de los tests para aprovechar al máximo los recursos de papel y tinta, a la vez que se están tomando en cuenta las dificultades que los niños rurales indígenas tienen al enfrentar pruebas escritas en su segundo idioma. Además se han traducido algunas de las pruebas del español a idiomas indígenas.

Los resultados obtenidos a nivel de pre-primaria y primer grado son bastante altos, pero en dichos niveles las pruebas se presentan oralmente. En las pruebas escritas del segundo, tercer y cuarto grados, aunque el rendimiento general no es muy alto, los alumnos están rindiendo a más o menos el mismo nivel en ambos idiomas. Los resultados han sido positivos con ítems que tienen que ver con operaciones básicas, indicando que hay una necesidad de poner más énfasis en conceptos y aplicaciones.

Ha sido un desafío presentar los resultados a los maestros en una forma que sea útil para ellos. Se ha elaborado un formato para rendir informes en el cual se indica muy sencillamente para

cada objetivo de qué se trata el objetivo y cuál por ciento de alumnos ha contestado correctamente al ítem (o a los ítems) que tienen que ver con el objetivo.

LA ETNOMATEMATICA: UN RESUMEN DE LA LITERATURA, EJEMPLOS DE SU PRACTICA, DIRECCIONES PARA EL FUTURO

Patrick B. Scott
Universidad de Nuevo México
Nuevo, México, U. S. A.

Desde una perspectiva las Etnomatemáticas pueden definirse como las matemáticas del ambiente. Desde otra perspectiva relacionada son la manera particular en que grupos culturales específicos realizan las tareas de clasificar, ordenar, contar y medir. La concepción de "Etno" que se usa es muy amplia. Ubiratán D'Ambrosio, quien originó el término Etnomatemática, ha incluido en su concepción de Etno a los "grupos culturales identificables, como por ejemplo, las sociedades nacionales-tribales, los grupos sindicales, los niños cuyas edades oscilan dentro de ciertos rangos de edades, los sectores profesionales, etc.". En Latinoamérica ya se están realizando varios intentos de estudiar y aplicar las Etnomatemáticas. En Guatemala el hecho de habérsele dado consideración a las Etnomatemáticas ha tenido como resultado la enseñanza del sistema numérico de los Mayas. En Brasil, Carraher y Schliemann han comparado el uso de las matemáticas dentro y fuera del contexto escolar por grupos urbanos tales como carpinteros y comerciantes ambulantes. También en Brasil, Sebastiani ha estudiado entre grupos indígenas las matemáticas que intervienen en la construcción de casas, la artesanía, la pesca y la siembra. Yáñez y Jerez, en Ecuador, han analizado el sistema numérico de los Quichua. Han encontrado que las matemáticas tienen una naturaleza espiral/circular, y que se usan dispositivos tales como el "hauri", el "graneo" y el "contador de Cañar" con fines matemáticos. La Yupana, una especie de ábaco incaico, se usa para enseñar a los niños a calcular en el Perú y se han traducido muchos términos indígenas ralacionados con las matemáticas.

Actualmente está surgiendo una metodología de las Etnomatemáticas que consta de lo siguiente:

1. Estudiar las manifestaciones de las matemáticas (usos o tradiciones matemáticas "congelados" o "escondidos"),

2. Preparar y aplicar materiales curriculares, y

3. Construir un puente entre las Etnomatemáticas y las matemáticas que se imparten en la escuela.

CONSTRUCCION DE UNA CASA INDIGENA - UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE MATEMATICA

Eduardo Sebastiani Ferreira
IMEC - UNICAMP
Campinas, Brasil

En marzo de 1986 se realizó en Río Branco (Acre) el III Curso de formación de monitores indígenas de la región, organizado por la Comissão Pró-Indio y por la coordinación de Assuntos Indígenas do Estado do Acre. Estaban reunidos 32 (treinta y dos) monitores de las siguientes naciones indígenas: Apurinã, Kakarai, Katuquina, Makineri, Yaminawa, Poyanagua, Iawanawa, Kakarari y Kulina, la mayoría de ellos eran responsables de la educación en sus áreas, correspondiente a los cuatro primeros años de escolarización.

La primera semana fue dedicada a la matemática, quedando bajo mi responsabilidad la formación de estos monitores para que actuasen en sus áreas como educadores en esta disciplina. Iniciamos las clases dando nociones de etnomatemática.

Se hacía necesaria una preparación para la investigación de campo y una actuación práctica, pero nos encontrábamos en la ciudad, lejos de la vida cotidiana de cada monitor y yo debía usar el conocimiento de esa vida cotidiana. Fue considerado entonces el problema de la construcción de la casa, a pesar de ser éste un conocimiento típicamente masculino, las mujeres (eran tres) aceptaron la propuesta. El objetivo final era la construcción de la maqueta de la casa indígena, pasando por la planta, donde era relatado todo el método de construcción y descodificación de los conceptos matemáticos usados. Iniciamos entonces haciendo la planta del salón de clases y fueron introducidos los conceptos de escala, figuras geométricas y sus áreas. Para las medidas del salón de clase se usó como unidad primeramente el palmo, que es la unidad usada en las áreas indígenas involucradas. Apareció entonces la necesidad de la medida patrón y fue introducido el metro, sus múltiplos y submúltiplos, y también el metro cuadrado.

Pasamos entonces a la construcción de la casa. Cada uno dibujó la planta de su casa utilizando la escala palmo/centímetro y tuvimos entonces 32 (treinta y dos) plantas de casas, planta básica, vista de frente y de lado (con las características propias de las áreas de cada monitor). Estas plantas se diferenciaban muy poco las unas de las otras, pues ya tienen una gran influencia de la cultura blanca en la construcción, conservando aún algunas características de sus culturas.

Las plantas de las casas fueron ampliamente discutidas en el salón de clases, ocurriendo allí un intercambio de conocimientos entre los monitores sobre el "saber hacer" de sus comunidades. Muchos tuvieron que rehacer las plantas porque los colegas, al intentar "leer" el dibujo, no percibían lo que éste de hecho intentaba transmitir.

Terminadas las plantas calculamos las áreas construidas, buscamos las figuras geométricas que aparecían, etc.

El paso siguiente fue la construcción de la maqueta. Surgió el problema del material a ser utilizado para la construcción de la maqueta, ya que en las casas son usados troncos de árboles, lianas y hojas de palmeras y en el salón de clase debíamos utilizar el material a nuestro alcance. Como la maqueta es una réplica en tamaño pequeño y es usada sólo para el estudio espacial de la construcción, ya que preservan las proporciones, el material utilizado no es necesariamente el mismo que se emplea en la construcción de las casas. Se utilizaron entonces palitos de helado, hilo, cola y papel.

Estas maquetas fueron construidas en grupo, cada uno formado por monitores de la misma nación. Finalmente contamos con 9 (nueve) maquetas con sus especificaciones de cada área. Trabajamos allí con figuras geométricas espaciales, volumen de sólidos y se introdujo el metro cúbico y sus submúltiplos.

Durante esta semana fue mostrado a los monitores cómo utilizar el "saber hacer" de su comunidad (su conocimiento étnico) para desarrollar en la escuela un módulo de enseñanza.

EL USO DE CALCULADORAS PARA UNIVERSITARIOS CON DEFICIENCIAS MATEMATICAS

Myriam Steinback
Macalester College
Minnesota, U. S. A.

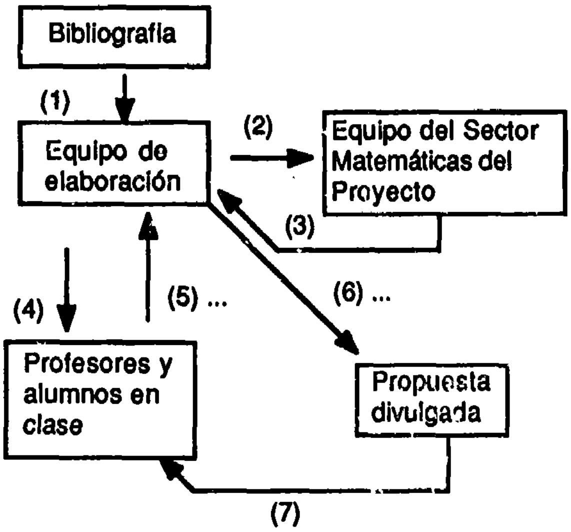
El desarrollo de materiales para usar con universitarios con deficiencias matemáticas se va a exponer. La calculadora se utiliza como base para el material del curso, haciéndola una "máquina" de funciones, funciones inversas y composición. El ensayo en la clase con exámenes anteriores y posteriores demostró que tanto el diseño como la calculadora son beneficiosos para dichos estudiantes. Los exámenes comprobaron mejoría en lo mecánico - i.e. sumas, restas, multiplicación y división, así como en la solución de problemas. Los estudiantes fueron capaces de resolver problemas matemáticos que anteriormente ni siquiera hubiesen intentado. Las aplicaciones usadas en los materiales fueron basadas en su utilidad diaria. (1980).

LA ENSEÑANZA DE LOS NUMEROS DECIMALES

Lucia Tinoco
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro, Brasil

Las dificultades de los alumnos en el aprendizaje de los números decimales, especialmente en la división, y a la inexistencia de una propuesta adecuada para la enseñanza de este tema, indujeron al equipo del Proyecto Fundao a elaborar, experimentar y divulgar este trabajo.

Metodología adoptada



En el diagrama de al lado se hace énfasis en la actuación de los maestros en las clases y en la reformulación permanente del trabajo partiendo de sus observaciones

Peculiaridades de la propuesta:

1. Utilización de la notación posicional del sistema decimal de numeración para la escritura, el ordenamiento, la adición y la sustracción de los números decimales.

2. Uso de la representación gráfica de las fracciones decimales.

3. Integración de los conceptos y técnicas de los números decimales con sus aplicaciones en los sistemas de mediciones y en la vida diaria de los alumnos.

4. Enseñanza de la división. Se consideraron dos casos:

A) Divisor NATURAL

- el cociente es un decimal finito;
- el cociente es un decimal periódico.

En el caso particular de que el dividendo también es natural, surge la noción de fracción como cociente (el número racional).

B) Divisor NO NATURAL

En este caso la división es transformada en otra que tenga el mismo cociente pero cuyo divisor sea natural por medio de la multiplicación de los dos términos de la división por una potencia de diez conveniente.

En los dos casos se estudia el resto de la división cuando se trunca el cociente.

Este enfoque del algoritmo de la división es bien asimilado por los alumnos ya que el mismo es muy sencillo.

Este trabajo ha sido presentado a cientos de profesores brasileños y utilizado en varias escuelas donde se enfatiza la enseñanza del sistema métrico, la división de decimales y sus apliaciones a situaciones reales.

AVALIAÇÃO DE PROPOSTA DIDATICA PARA O ENSINO DE FRAÇÕES

Lucia Tinoco
Universidade Federal do Rio de Janeiro - Instituto de Matemática e equipe
com mais 7 professores da UFRJ e 5 professores de 1º e 2º graus do Rio de Janeiro
Río de Janeiro, Brasil

Proposta didática para o ensino de Frações na 5ª serie do 1º grau foi elaborada e testada pela equipe do Projeto Fundão/Matemática, nos anos de 1982/83 . Essa proposta foi amplamente aplicada na rede escolar e reformulada em 1984/85. É hora de avaliar objetivamente a eficiência da aplicação de tal proposta para a aprendizagen de Frações, uma vez que os resultados obtidos, embora muito bons, advêm de avaliações informais. Iniciou-se então, em junho de 1986, pesquisa sobre aquisição do conceito de Fração em conjuntos discretos e contínuos, equivalência, comparação, adição e subtração de Frações. O teste elaborado está em fase de validação por meio de entrevistas de 30 alunos, para, em1987, ser aplicado a uma amostra de 500 alunos de escolas públicas, escolhidas aleatoriamente em regiões socio-econômicas distintas. Metade da amostra terá trabalhado as Frações com o material do Projeto e a outra metade não. Os dados serão tratados com a assessoria de estatístico do IM/UFRJ. A pesquisa tem o apoio da SESU/MEC (Projeto Nova Universidade) e do PADCT/CAPES (Subprograma Educação para a Ciência).

PROYECTO FUNDÃO - DESAFIO PARA LA UNIVERSIDAD

Lucia Tinoco/Vânia Santos
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro, Brasil

El Proyecto Fundão empezó en 1983, proveniente de experiencias en Matemática y Física.

Presenta una ruptura del aislamiento: universidad x escuela secundaria. Sectores: Matemática, Física, Química, Biología, Geografía.

Coordinación: María Laura Leite Lopes y núcleo compuesto de un coordinador por sector y un representante de la Facultad de Educación.

Equipo: profesores de la UFRJ, profesores de las escuelas secundarias (MULTIPLICADORES), y alumnos de Licenciatura (PASANTES). Objetivos: Valorización del profesor; investigación en enseñanza de las Matemáticas y Ciencias.

Principios: equilibrio continuidad x innovación, equilibrio academicismo x pragmatismo, interdisciplinaridad, corresponsabilidad, institucionalización.

Campos de acción: investigación, actualización de profesores, formación académica del equipo, formación de profesores (2° y 3° niveles), currículos.

Actividades: investigación en equipos, experimentos de enseñanza, organización de cursos y reuniones de profesores, participación en congresos.

Sector Matemáticas

Equipo actual: 8 profesores del Instituto de Matemática / UFRJ, 23 "multiplicadores", 12 "pasantes". Desde 1982, participaron 41 "multiplicadores", 14 profesores del IM, 39 "pasantes", atendiendo directamente cerca de 88 escuelas, 4100 alumnos. Indirectamente más de 20000 alumnos del estado de Río de Janeiro y otros.

Actividades:

1) Investigación: seminarios de profesores del equipo, y expertos invitados para tratar temas de Matemática y de Educación en general; intercambio con otros grupos en congresos y participación de profesores visitantes; orientación de alumnos que se inician en la investigación científica; elaboración, experimentación, evaluación y divulgación de trabajos en: fracciones, números racionales,

geometría, calculadoras, números decimales, cuatro operaciones, resolución de problemas, proporciones, evaluación, realidad x enseñanza de las matemáticas.

Importante: participación de los multiplicadores en todas las etapas del trabajo aumenta su credibilidad.

2) Formación de profesores - reformulación de la Licenciatura, complementación de la formación de los pasantes, actuación en las escuelas normales.

3) Actualización de profesores: programación de reuniones, cursos y creación de centros de estudios en escuelas.

Preocupaciones: caracter temporal del Proyecto, diversidad de tareas, caracter inicial de la Educación Matemática.

SOME RESULTS ON ITERATED SUMS OF THE DIGITS OF MULTIPLES OF SEVEN

Irvin E. Vance
New Mexico State University
New Mexico, U. S. A.

The paper looks at patterns, conjectures, and proofs. Also generalization of the results.

RELACION, INTEGRACION Y SINTESIS, FACTORES DETERMINANTES DE UNA MEJOR COMPRENSION EN MATEMATICA

Nelly Vázquez de Tapia
Universidad de Morón-Instituto Provincial Superior de Formación Docente #34
Morón, Argentina.

La falta de relación e integración de temas en la enseñanza de la Matemática, constituye un serio obstáculo para el logro de una adecuada comprensión. El estudio de los temas en forma aislada y parcializada obliga al aprendizaje de reglas particularizadas en lugar de reglas generales muy fuertes que permiten una visión totalizadora del problema y permiten a los alumnos establecer las relaciones que los conducen al descubrimientos de las reglas particulares. Experiencias realizadas desde 1963 han mostrado una notable ganancia en tiempo y en comprensión. A título de ejemplo se muestra el problema de la división desde el campo de los naturales al campo de los complejos y el estudio de las propiedades de los cuadriláteros.

LA MATEMATICA Y EL MUNDIAL

Alicia Villar
Instituto de Profesores Artigas, Administración Nacional de Educación Pública
Montevideo, Uruguay

Objetivos: con este trabajo se pretende relacionar la Matemática con la vida real, con otras disciplinas, y que "entre" a los alumnos en forma más amena, es decir jugando.. Población a la que está dirigido: 1º año de Enseñanza Media (el trabajo puede hacerse más intenso y profundo con lo cual se atendería a estudiantes de 5º año).

Todo ha sido realizado en torno a problemas con números naturales, a saber:

1º Arreglos, permutaciones combinaciones.
2º Operaciones con naturales. Concepto de factorial.
3º Divisibilidad, etc.
4º Nociones de probabilidad.. Todos los problemas se plantearon con temas relacionados con el mundial de fútbol que tuvo lugar en México, junio de 86. La idea es motivar a los alumnos con temas de actualidad. Se relacionó con Historia y Geografía. Metodología diversa. Se realizó durante el año 86.

POLIGONOS. (Trabajo de computación)

Alicia Villar, Alicia Buquet, Greisy Winicki
Instituto de Profesores Artigas, Administración Nacional de Educación Pública
Montevideo, Uruguay

En este trabajo se hace el estudio de polígonos regulares, para trabajar con él en el computador. Se puede realizar tanto en LOGO como en Basic. Usamos el computador como herramienta didáctica en la enseñanza de las matemáticas. Paso a Paso se van estudiando todos los polígonos regulares, y de ese modo los inscribimos y circunscribimos en la circunferencia. Se incluyen problemas y ejercicios. De ese modo llegamos a enseñar la noción de pi, repasamos áreas y perímetros de los diferentes polígonos regulares, y por ello, preparamos el concepto de número real, de pares de sucesiones monótonas convergentes, de límites, y área de la circunferencia. Puede enseñarse a nivel elemental, según el curso, o profundizarse todos los conceptos. El nombre original de dicho trabajo fue: "Descubriendo con LOGO el número pi".

PARTE VI

EXPOSICIONES Y POSTERS

Alberto Alonzo:	Libro de Texto para Escuelas Secundarias del Estado de México.
Roberto Baldino:	Materials para Frações.
Ary Barradas:	Diskettcom.
Enrique Calderón:	El Estuche de Matemáticas.
Cipriano Cruz:	Folletos de Exámenes de Admisión. Folletos de Exámenes de Curso de Iniciación en Enseñanza.
John del Regato y Mary Gilfeather: Presentado por Beatriz D'Ambrosio	Mathematics Pentathlon.
Manolo Fernández:	Números (7 revistas). Técnicas de Trabajo Intelectual Aplicadas a la Matemática.
José Galdón:	Tecnología Educativa Audiovisual en la Enseñanza de la Matemática.
Clara Higuera:	Material paraVisualizar los Angulos que Determinan Longitud y Latitud en el Globo Terráqueo.
Eduardo Luna, Sarah González:	30 Monografías del Estudio "La Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática en la República Dominicana".
María del Carmen Mendoça:	Juegos Pedagógicos. Revista de Enseñanza de las Ciencias.
José Luis Muñiz, Julio César Silvera:	Secciones Planas de un Cono (Cónicas).
Lilian Nasser:	Resolução de Problemas-Uma Análise de Fatores Envolvidos.

Leandra Tapia:	Libros de Texto.
Lucia Tinoco:	O Ensino de Números Decimais.
Alicia Villar:	Trabajos de Síntesis.
Martha Villavicencio:	Libros de Texto para la Enseñanza de Matemática en Quechua y Aimara para el Nivel Primario.

PARTE VII

COMITE INTERAMERICANO DE EDUCACION MATEMATICA

El nuevo Comité Ejecutivo del Comité Interamericano de Educación Matemática elegido durante la VII CIAEM está formado por los siguientes miembros:

Presidente Honorario:	*Marshall H. Stone* (260 Lincoln Avenue, Amherst, Massachussets 01002, United States of America)
Presidente:	*Eduardo Luna* (Centro Latinoamericano de Investigación y Desarrollo en Educación Matemática, Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, Apartado Postal 822, Santiago, República Dominicana).
Vice-Presidentes:	*Fidel Oteiza* (Departamento de Matemática y Ciencias de la Computación, Universidad de Santiago de Chile, Santiago, Chile).
	Patrick B. Scott (College of Education, University of New Mexico, Alburquerque, NM 87131, U. S. A.).
Secretario:	*Angel Ruiz Zúñiga* (Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica).
Vocales:	*Martha Villavicencio* (Dirección de Investigación, INIDE, Van de Velde 160, Urbanización San Borja, Lima, Perú).
	Carlos E. Vasco (Depto. de Matemática y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia).

Vocal ex-oficio, ex-presidente: *Ubiratán D'Ambrosio* (UNICAMP, Caixa Postal 6063, 13081 Campinas, S. P. Brasil).

Miembro ex-oficio, representante del ICMI: *Emilio Lluis* (Instituto de Matemáticas, UNAM, Circuito Exterior, C. U., 04510, México D.F., México).

COMITE ORGANIZADOR LOCAL DE LA VII CIAEM

Presidente: Eduardo Luna

Miembros: Sarah González
Dulce Rodríguez
Belkis Guerrero
Xiomara Pimentel

El comité organizador local desea agradecer el apoyo constante ofrecido por Ubiratán D'Ambrosio, Claude Gaulin, Edward Jacobsen (UNESCO) y Daniel Morales Gómez (IDRC).