Memorias de la **XII** Conferencia Interamericana de Educación Matemática

Historia y Prospectiva de la Educación Matemática

Eduardo Mancera Martínez

César Augusto Pérez Gamboa

CIAEM
Comité Interamericano de Educación Matemática

edebé méxico

Historia y Prospectiva de la Educación Matemática

XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática

Editores

Eduardo Mancera Martínez
César Augusto Pérez Gamboa

CIAEM Comité Interamericano de Educación Matemática

edebéméxico

edebé méxico

D.R. © 2007 por Edebé Ediciones Internacionales, S. A. de C.V.
Ignacio Mariscal 8. Col. Tabacalera.
06030 México, D.F.
editorial@edebe.com.mx

Director General: Manuel Borbolla Pérez-Porrúa.
Director Editorial. Mariano de la Fuente Fernández.
Edición: César Augusto Pérez Gamboa.

Primera edición: julio de 2007.

ISBN: 978-968-9166-00-9

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial Mexicana. Reg. No 2820.

Impreso en México

Comité Interamericano de Educación Matemática

El **Comité Interamericano de Educación Matemática** (CIAEM) se fundó en el año 1961 en Bogotá, Colombia. Sus primeros años estuvieron ligados a la "Reforma de las Matemáticas Modernas", planteada en el inicio de la segunda mitad del siglo pasado y tuvo relevancia en los niveles de educación básica de casi todo el mundo. El CIAEM promovió la discusión de los fundamentos de aquella Reforma procurando la participación de representantes de todos los países del continente, para cambiar los *currícula*, elaborar o traducir textos, entrenar profesores, entre otros aspectos.

La realización de la **Primera Conferencia Interamericana de Educación Matemática** contó con la participación de importantes matemáticos como Marshall Stone, Gustave Choquet, Sven Bundgaard, Laurent Schwartz, y Laurent Pauli.

El CIAEM desde sus orígenes se concibió como un organismo regional asociado a la ***International Comission on Mathematical Instruction*** (ICMI), y contó con el apoyo de instituciones como la *National Science Fundation* (EEUU), la Organización de Estados Americanos (OEA) y la UNESCO para realizar varias reuniones con la intervención de matemáticos y educadores de primera línea.

Uno de los principales propósitos de las **Conferencias Interamericanas de Educación Matemática** (que también tienen como siglas: CIAEM) ha sido potenciar los vínculos entre los educadores matemáticos de las Américas. Este anhelo, se ha reiterado cada vez que las CIAEM han convocado y realizado sus magnos eventos internacionales.

El CIAEM ha realizado sus eventos cada cuatro años, tiempos necesarios para poder determinar resultados de investigación de calidad, así como promover y dar espacio para que los educadores matemáticos puedan asistir a otros congresos relevantes como el ***International Congress of Mathematics Education*** (ICME), y el **Congreso Iberoamericano de Educación Matemática** (CIBEM), que se realizan, también, cada cuatro años.

Es de especial relevancia la celebración del ***11 International Congress on Mathematical Education*** (ICME 11) del 6 al 13 de julio del 2008, en la ciudad de Monterrey, México. Es la primera vez que este congreso se efectuará en América Latina. Constituye este evento en una oportunidad muy valiosa para hacer progresar a la Educación Matemática en la región. El CIAEM apoyará plenamente este evento con todos los medios de que dispone.

En perspectiva, el CIAEM orientará sus esfuerzos en los próximos años a potenciar la Educación Matemática en la región americana: continuar siendo un puente para los educadores matemáticos de las Américas, y buscará, en particular, fortalecer los esfuerzos para robustecer como perspectiva estratégica la resolución de problemas y la formación de educadores.

Las conferencias

Primera Conferencia – I CIAEM
Tuvo lugar del 4 al 9 de diciembre de 1961, en la ciudad de Bogotá, Colombia, con la participación de representantes de 24 países, totalizando 48 participantes. La comisión organizadora internacional fue presidida por Marshall H. Stone (EEUU) y su secretario fue Howard F. Fehr (EEUU). El presidente de la organización local fue Pablo Casas y el secretario, Germán Zabala.

Segunda Conferencia – II CIAEM
Se realizó en Lima, Perú, entre el 5 y el 12 de diciembre de 1966. Hubo 29 países representados con un total de 84 participantes. La comisión organizadora internacional tuvo los mismos presidente y secretario que la anterior. La comisión local quedó constituida por Francisco Miró (presidente honorario), José Reategui (presidente), José Luis Krumdieck (vicepresidente), César Carranza (secretario), Víctor Latorre (tesorero) y Jorge Sáenz (prosecretario).

Tercera Conferencia – III CIAEM
Realizada en noviembre de 1972 en Bahía Blanca, Argentina, la conferencia contó con 22 países representados y 209 participantes. El comité ejecutivo local estaba compuesto por: Renato Völker, Angel Hernández, Luis Santaló, José María Arago, Raúl Chiappa y Margarita de Chouhy Aguirre

Cuarta Conferencia – IV CIAEM
Con la presencia de 281 participantes, representando a 22 países, se desarrolló en diciembre de 1975, en Caracas, Venezuela. La comisión organizadora local fue constituida por el Comité Venezolano de Educación Matemática: José Alejandro Rodríguez (presidente honorario), Mauricio Orellana Chacón (presidente), Saulo Rada Aranda (vicepresidente) y Tania Calderón de Guédez (secretaria).

Quinta Conferencia – V CIAEM
Tuvo lugar en Campinas, Brasil, en febrero de 1979. Contó con 569 participantes de 28 países. La organización local fue presidida por: Omar Catunda (presidente honorario) y Ubiratan D'Ambrosio (presidente). En la comisión internacional de programa figuraban los nombres de: Emilio Lluis (México), Enrique Góngora (Costa Rica), Saulo Rara Aranda (Venezuela) y Ubiratan D'Ambrosio (Brasil). La comisión nacional estaba formada por: Eduardo Ferreira, Gilberto Queiroz, Graziela del Rosario Suarez, Henry G. Wetzler, Itala Loffredo D'Ottaviano, Juares S. Mazzone, Kleber Marques, Luis Roberto Dante, Maria do Carmo Ville, Maria Elizabeth B. Prado, Maria Laura L. Lopes, Marineuza G. Soares, Oswaldo Sangiorgi, Palmeron Mendes, Renate Watanabe y Ubitaran D'Ambrosio.

Sexta Conferencia – VI CIAEM
Se desarrolló en noviembre de 1985 en Guadalajara, México, con 180 participantes de 24 países. Quedaron encargados de la organización local: Emilio Lluis (CIAEM), Edmundo Ponce Adame, Alejandro Dueñas Durán y Gilberto García García.

Séptima Conferencia – VII CIAEM
En julio de 1987, con sede en Santo Domingo, República Dominicana, se desarrolló la VII Conferencia, con 316 participantes de 22 países. Fue organizada por Eduardo Luna (presidente), Sarah González, Dulce Rodríguez y Xiomara Pimentel. El comité internacional de programa estaba formado por Ubiratan D'Ambrosio (Brasil), Claude Gaulin (Canadá) y Eduardo Luna (República Dominicana).

Octava Conferencia – VIII CIAEM
Tuvo lugar en Miami, EEUU, en agosto de 1991 y contó con la presencia de 141 participantes de 21 países. La organización local quedó encargada a Gilberto Cuevas, Robert Kelly, Angela Abramson y Piyush Agrawal. El comité de programa estaba compuesto por: Eduardo Luna (República Dominicana), Ubiratan D'Ambrosio (Brasil), Patrick Scott (EEUU), Fidel Oteiza (Chile), Angel Ruiz (Costa Rica), Emilio Lluis (México) y Claude Gaulin (Canadá).

Novena Conferencia – IX CIAEM
Tuvo lugar en la ciudad de Santiago, Chile, en agosto de 1995, con 1080 participantes de 17 países. La comisión organizadora local fue dirigida por Fidel Oteiza y Patricio Montero.

Décima Primera Conferencia -XI CIAEM
La primera conferencia del milenio ocurrió en julio de 2003 en la ciudad de Blumenau (Brasil) y contó con la presencia de 600 participantes de 18 países. El tema central de la conferencia fue: Educación y desafíos y perspectivas matemáticos. La organización local estuvo a cargo de la profesora María Salett Biembengut.

Décima Segunda Conferencia XII CIAEM
XII CIAEM Querétaro (México), en 15-18 de julio de 2007. Coordinación general: Eduardo Mancera Martínez, organización local: Roberto Ramírez Ramírez.

Comités Ejecutivos del CIAEM

1961-1966
Marshall Stone (EEUU) – Presidente
Bernardo Alfaro (Costa Rica)
Alberto González Domínguez (Argentina)
Alfredo Pereira Gómez (Brasil)
José Tola Pasquel (Perú)

1966-1972
Marshall Stone (EEUU) – Presidente
César Abuauad (Chile)
Ricardo Losada (Colombia)
Manuel Meda (México)
Leopoldo Nachbin (Brasil)
Luis Santaló (Argentina)
Juan Jorge Schaffer (Uruguay)
Edgardo Sevilla (Honduras)
José Tola Pasquel (Perú)

1972-1975
Marshall Stone (EEUU) – Presidente Honorario
Luis Santaló (Argentina) – Presidente
Howard Fehr (EEUU) – Vice-presidente
Enrique Góngora (Costa Rica) – Secretario

1975-1979
Marshall Stone (EEUU) – Presidente Honorario
Luis Santaló (Argentina) – Presidente
Ubiratan D'Ambrosio (Brasil) – 1o Vicepresidente
Saulo Rada (Venezuela) – 2o Vicepresidente
Enrique Góngora (Costa Rica) – Secretario
Emilio Lluis (México) – 1o vocal
César Carranza (Perú) – 2o vocal
John Kelly (EEUU) – 3o vocal

1979-1987
Marshall Stone (EEUU) – Presidente Honorario
Ubiratan D'Ambrosio (Brasil) – Presidente
Claude Gaulin (Canadá) – Vicepresidente
Emilio Lluis (México) – Vicepresidente
Luis R. Dante (Brasil) – Secretario

1987 – 1991
Marshall Stone (EUA) – Presidente Honorario
Eduardo Luna (República Dominicana) – Presidente
Fidel Oteiza (Chile) – Vicepresidente
Patrick Scott (EEUU) – Vicepresidente
Angel Ruiz Zuñiga (Costa Rica) – Secretario
Martha Villavicencio (Perú) – vocal
Carlos Vasco (Colombia) – vocal
Ubiratan D'Ambrosio (Brasil) - ex-presidente
Luis Santaló (Argentina) - ex-presidente
Emilio Lluis (México) – Representante de ICMI

1995-1999
Fidel Oteiza (Chile) – Presidente
Carlos Vasco (Colombia) – Vicepresidente
Edward Jacobsen (EEUU) – Vicepresidente
Patricio Montero (Chile) – Secretario
Ubiratan D'Ambrosio (Brasil) - ex-presidente
Luis Santaló (Argentina) - ex-presidente
Eduardo Luna (República Dominicana) – ex-presidente

1999-2003
Carlos Vasco (Colombia) – Presidente
Alicia Villar (Uruguay) – Vicepresidente
Maria Salett Biembengut (Brasil) – Vicepresidente
Eduardo Mancera (México) – Secretario

Ubiratan D'Ambrósio (Brasil) - ex-presidente
Luis Santaló (Argentina) - ex-presidente
Eduardo Luna (República Dominicana) – ex-presidente
Fidel Oteiza (Chile) – ex-presidente.

2003-2007
Maria Salett Biembengut (Brasil) – Presidente
Angel Ruiz (Costa Rica) – Vicepresidente
Eduardo Mancera (México) – Vicepresidente
Patrick Scott (EEUU) – Secretario

Ubiratan D'Ambrósio (Brasil) - ex-presidente
Eduardo Luna (República Dominicana) – ex-presidente
Fidel Oteiza (Chile) – ex-presidente.
Carlos Vasco (Colombia)- ex-presidente

Índice de contenidos

Parte 1.
Desarrollos teóricos de la investigación internacional en educación matemática

Parte 2.
Ideas potentes e investigaciones en educación matemática

Tópico 1. Análisis del currículum y propuestas para la instrucción de las matemáticas.

Cvetka Rojko
Cambios de la educación tecnologica en Eslovenia y los nuevos enfoques en la enseñanza de la matemática
Eslovenia
José María Chamoso
Análisis de la interacción profesor-alumno en el aula de matemáticas: actividades, autonomía e incidentes.
España
Domingo Yojcom
Análisis del uso actual del sistema de numeración vigesimal en Guatemala
Guatemala
Irma Fuenlabrada y María Fernanda Delprato
Por los caminos de la feria
México – Argentina
Eliana Rojas
La relevancia de los contextos en la enseñanza de la Matemática, lo social y lo cultural. Paradigmas encontrados.
Chile – USA
Gelsa Knijnik
Educação matematica e cultura camponesa na lta pela terra no Brasil
Brasil
Dario Fiorentini
Desarrollo profesional del maestro de matemáticas a partir de la reflexión, colaboración y investigación sobre la práctica
Brasil
Karly Alvarenga
Un análisis de algunas metodologías de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Brasil
Alicia Ávila
En matemáticas... ¿qué nos dejaron las reformas de fin del siglo XX?
México

Tópico 2. Planteamientos teóricos y proceso de aprendizaje y enseña en la Educación Matemática.

Carlos Vasco
La cronotopía: más acá y más allá de la geometría
Colombia
Carlos Sánchez
Euler y el entrañable encanto del quehacer matemático
Cuba
Nelson Hein
Modelaje Matemático: Aspectos teóricos y prácticos
Brasil

Tópico 3. Influencias de los avances de la tecnología en la Educación Matemática.

Parte 1

Desarrollos teóricos de la investigación internacional en educación matemática

Actividad matemática y evaluación[1,2]

Guy Brousseau
con la colaboración de Ginger Warfield

Resumen
Entre 1974 y 1978 la Teoría de las Situaciones ha permitido observar y modelar los efectos locales del uso sistemático de pruebas de logro académico sobre las decisiones didácticas de los profesores de matemáticas, y también los efectos de estas decisiones sobre los logros mismos. El modelo permitía prever ciertas consecuencias de la reiteración del proceso: la sub evaluación de los resultados, el encajonamiento en métodos conductistas, la disminución efectiva de la competencia de los alumnos y, en respuesta, la presión creciente que se ejercería sobre los actores, profesores, alumnos y padres, y que realimentaría el proceso. El resultado de estos primeros estudios fue comunicado a la Conferencia Interamericana de 1979. Posteriormente, el modelo ha podido aplicarse a otros dominios y a otros actores de la educación. El involucramiento de diversas instituciones científicas, políticas y sociales en la enseñanza, ha amplificado los efectos de estos fenómenos a través de una multitud de proposiciones y reformas poco apropiadas, las cuales conducen siempre a más individualización y a más explicaciones y soluciones sicológicas, y siempre a más dificultades. Estos nuevos resultados fueron expuestos a la comunidad científica en el ICME de 1996, en Sevilla. El fenómeno ha tomado proporciones que conducen a buscar hoy soluciones cada vez más radicales y alejadas del punto focal de la enseñanza: la relación didáctica a propósito de un saber preciso, en condiciones determinadas. Hoy, los retroinnovadores creen poder "restablecer" las condiciones "iniciales" mediante el uso exacerbado de estas pruebas, uso asociado a coerciones más fuertes y rechazando todas las reformas y los progresos logrados desde hace treinta años.

Las teorías de las situaciones

La Teoría de las Situaciones Matemáticas se basa en la modelación de las interacciones entre un grupo de personas –los *agentes*- y un *medio* (milieu), que conducen a los agentes a manifestar y a aprender un comportamiento característico de un conocimiento matemático preciso (el medio es la parte del ambiente que interviene en el modelo). Hemos buscado modelos de situaciones matemáticas para los principales conocimientos de la escolaridad obligatoria, los hemos experimentado y observado entre 1970 y 1998 en el marco del proyecto COREM del IREM de Burdeos.

Esta teoría (TSM) apareció en 1969 en una perspectiva a la vez constructivista y estructuralista. Pensábamos que sería posible enseñar las matemáticas usando solamente estas situaciones matemáticas, presentadas y conducidas por maestros, quienes a su vez podrían así aprender con sus estudiantes.

Más adelante, las dificultades –observadas empíricamente- revelaron contradicciones en esta conjetura. Las situaciones matemáticas constructivistas pueden llevar a los alumnos a producir conocimientos, pero no pueden transformar estos conocimientos en saberes: una "institucionalización" es necesaria. Tuvimos que revisar nuestra posición y completar nuestro modelo.

Las situaciones matemáticas están incluidas en las situaciones didácticas que a su vez ha sido necesario modelar (TSDM, 1980).

---

1 Traducido del Francés por David Block y Grecia Gálvez.

2 Advertencia: en abril del 2007, después de la redacción de este artículo, me he enterado de la aparición de la obra de Sharon Nichols y David Berliner *Collateral Dammage: How High Stakes Testing Corrupts America's Schools*, que trata del mismo tema aunque desde un punto de vista bastante diferente. Para tomar en cuenta esta importante contribución, haría falta algo de tiempo más. La Conferencia que dictaré en Querétaro será por lo tanto diferente del presente texto.

Las contradicciones del constructivismo radical y la imposibilidad de utilizarlo para la enseñanza, aparecieron entonces claramente.

La retroinnovación

Desde hace algunos años, se ha visto aparecer en Francia, como antes en otros países, en particular en los Estados Unidos de América, proposiciones para restablecer las concepciones educativas, los programas escolares y los métodos que estaban vigentes a principios del siglo XX.

El argumento principal de estos movimientos es “un descenso insoportable del nivel de los alumnos” que se debería a una cierta debilidad de los servicios públicos de enseñanza bajo la influencia nefasta de los “pedagogos”, de diversos ideólogos y de las corrientes de pensamiento de los años setenta. Los retroinnovadores presentan como novedades las soluciones del pasado. Estos movimientos se apoyan en interpretaciones simplificadas de evaluaciones recientes así como en representaciones muy seductoras pero falsas de las prácticas y de los resultados antiguos. Aunque las motivaciones de estos movimientos sean esencialmente políticas y aunque éstos rechacen de antemano todos los estudios y todos los debates científicos, he reunido algunos de mis resultados, ya antiguos pero al parecer poco conocidos, relativos al uso de “evaluaciones a través de pruebas” y a algunos de sus efectos.

Mis resultados provienen de investigaciones muy diversas llevadas a cabo entre 1969 y 1990 y tienden a mostrar que, si bien la constatación de lo que hacen los alumnos es legítima e indispensable, la interpretación de estos hechos y sus uso para la toma de decisiones didácticas, pueden tener muy malas consecuencias debido a la debilidad de la cultura didáctica común y a las insuficiencias de nuestras investigaciones científicas en este dominio.

La aparición de nuevos medios de evaluación rápida

En los años sesenta, a propósito de la cuestión racial, en Estados Unidos se realizó un gran estudio estadístico para determinar las responsabilidades de los diferentes agentes de la educación, en los éxitos y los fracasos escolares (National Longitudinal Study of Mathematical Abilities). Esta indagación se basó en el uso de *tests de evaluación* establecidos por equipos que utilizaron las *taxonomías de objetivos de Bloom*. El uso de estos dos instrumentos técnicos, fue difundido y banalizado. Esto suceso fue el anuncio de una evolución radical de la forma del control político de la difusión de los conocimientos el cual en adelante tendió a pasar de las manos de los ilustrados a las manos de los ciudadanos.

Bajo la influencia de los modelos industriales (PERT)[3], esta forma de control llevaría progresivamente a *determinar* los conocimientos que hay que enseñar y a *evaluar* los conocimientos adquiridos, mediante un único medio, el de los “tests característicos”. Los currículums mismos, cuya función supuesta era describir la actividad de los alumnos y proporcionar los instrumentos prácticos para la enseñanza, en principio quedaban bajo la responsabilidad de los maestros, pero tendían a enmarcarse en la pedagogía por objetivos. El principio de programación de estos métodos es la regla de la Información Previa Suficiente (RIPS), tomada en préstamo de la teoría de la comunicación: “para ser inteligible, un mensaje debe utilizar un repertorio de términos y una sintaxis conocidos por su destinatario”, de donde, para ser aprendido, todo conocimiento nuevo debe ser construido con conocimientos *adquiridos* previamente. La presentación estándar de los artículos y de las teorías matemáticas, por ejemplo, obedece a esta regla: sólo puede usarse para demostrar un enunciado aquello que ha sido admitido, definido o demostrado previamente. Aplicada a la enseñanza, esta regla implica

[3] Programa de Evaluación y Revisión Técnica.

que el profesor no puede pedir a los alumnos que produzcan una respuesta si él no la ha enseñado previamente… Tomada al pie de la letra esta regla prohibiría plantear problemas. Esta regla condena a la enseñanza a presentar los conocimientos siguiendo un orden sistemático en el cual el sentido y la adaptación a las condiciones existentes no juegan ningún rol. Sin embargo, este orden de introducción de los conocimientos no guarda relación con los procesos efectivos, personales o históricos que producen conocimientos matemáticos.

Los conocimientos y los saberes

La Teoría de las Situaciones Matemáticas (1969) destacaba claramente la importancia de distinguir las condiciones que determinan diferentes roles de los conocimientos en los procesos matemáticos y en los aprendizajes. Un mismo conocimiento matemático se manifiesta, según las situaciones matemáticas, mediante comportamientos diferentes, procedentes de procesos de aprendizaje diferentes y, por ello, estos comportamientos juegan un rol complejo e importante en las situaciones de enseñanza. Para describir la acción de un actor, esta teoría distinguía modelos de acción (o esquemas) informulables por el actor, instrumentos de formulación y de comunicación, instrumentos de prueba y conocimientos de referencia para el sujeto (conocimientos institucionalizados o *saberes*).

¿Cómo consideran las nuevas formas de evaluación a las diferentes formas de conocimiento? Para responder a las necesidades de nuestro estudio hemos reagrupado estas formas en dos grandes funciones: los *conocimientos* y los *saberes*[4]. Los conocimientos se manifiestan en las decisiones del agente en situaciones inciertas (sus actos, sus palabras, sus explicaciones), los saberes aparecen como referencia, conocimientos seguros, admitidos, e institucionalizados. Los saberes son los medios culturales de identificación y de reconocimiento de los conocimientos.

Los saberes y los conocimientos son necesarios y complementarios, pero son aprendidos, o adquiridos espontáneamente, según procesos diferentes, en circunstancias diferentes. Por ejemplo, en el siglo XVIII, la comunidad de matemáticos, *conoce* la noción de función, pero le es necesario esperar un siglo para que este concepto de función se convierta en un *saber* para ella, definido de manera categórica.

Las taxonomías de objetivos distinguían bajos niveles taxonómicos, que comprendían adquisiciones de conocimientos simples (acordarse de palabras, de hechos aislados), su comprensión, sus aplicaciones, y altos niveles taxonómicos que concernían al análisis, la síntesis, el juicio, es decir, sistemas de acciones complejas. En un momento dado de un estudio los conocimientos de bajo nivel corresponden más bien a saberes y los de alto nivel a conocimientos.

La "racionalización" de la evaluación por medio de tests parecía ignorar de qué manera los profesores y los alumnos podrían utilizar sus resultados. Se creía, o se fingía creer, que los profesores y los alumnos harían buen uso de ella.

Las preguntas que surgen

Las numerosas preguntas que se planteaban parecían proceder únicamente de la especulación.

* ¿Qué puede hacer el profesor cuando juzga que los resultados son insuficientes? (por ejemplo, ¿cuál es la significación objetiva de una tasa de éxito del 30%? ¿del 60%? ¿del 90%?)
* ¿Esta significación es independiente de la etapa del proceso de aprendizaje en curso, en la cual se proponen estas pruebas? (¿al final del aprendizaje? Pero entonces ya no hay ninguna decisión didáctica que tomar, ¿durante el aprendizaje? Entonces, ¿qué decisiones pueden ser tomadas?).
* Empíricamente, ¿cómo interpretan los profesores las evaluaciones?

[4] Utilizando una distinción antigua en las lenguas latinas.

* ¿Qué previsiones sobre los resultados pueden hacer los profesores?
* ¿Las evaluaciones formales representan bien a aquellas que utilizan tradicionalmente los profesores, sean éstas formales o informales?
* ¿Pueden representarlas? ¿completarlas?
* ¿Representan estas evaluaciones menos bien o mejor los conocimientos de los alumnos?
* Si los profesores utilizan estas evaluaciones informales, ¿conservarán la misma sensibilidad a sus “indicadores” habituales?
* ¿Qué rol jugarán estas evaluaciones en las relaciones de los profesores con sus alumnos, con los padres, entre los padres y los alumnos, entre los profesores de diferentes niveles con los responsables de la enseñanza?
* ¿Cómo van a reaccionar los diferentes agentes de la enseñanza a estos resultados?
* ¿Cuáles serán las consecuencias, a largo plazo, del uso banalizado de estas evaluaciones? ¿Qué influencia tendrán sobre las prácticas de los profesores, sobre los conocimientos de los alumnos, sobre los currículums y sobre la organización de la enseñanza?
* ¿Este uso permitirá incrementar la ambición de los programas de matemáticas o la hará disminuir? ¿Qué rol jugarán estas evaluaciones más fáciles y más numerosas en las investigaciones sobre la enseñanza?

Investigaciones puntuales y observacioens empíricas (1978)

Mediante investigaciones experimentales y observaciones precisas, hemos podido establecer algunos resultados.

a) Los profesores pueden prever, aunque muy aproximativamente, los resultados globales, e incluso a veces individuales, de sus alumnos, pero sólo para los saberes institucionalizados (las preguntas de bajo nivel taxonómico). La dificultad de prever los resultados de pruebas de alto nivel está ligada a la ausencia de medios de enseñanza confiables para alcanzar estos objetivos[5].

b) Aparentemente es la única forma de conocimiento para la cual pueden considerar, sobre el mismo modelo, pruebas de control y ejercicios de aprendizaje.

d) En caso de dificultades, el abanico de respuestas de los profesores comprende:
   * Diversas estrategias de evitación, como los efectos “Topaze” y “Jourdain”
   * Deslizamiento metadidáctico, por ejemplo la enseñanza de la heurística (problem solving methods), etcétera.
   * Supercherías epistemológicas como el abuso de las *analogías*, etc.
   * La arborescencia de las posibilidades de reacción de los profesores está indicada en el cuadro de abajo.

d) Pero finalmente las dificultades conducen sobre todo a:
   * la descomposición del objetivo en objetivos más simples y más cerrados;
   * la repetición de la etapa, ya sea con todos los alumnos, o solamente con los alumnos que no han tenido éxito.
   * la partición del saber y a su fragmentación en una multitud de parcelas de saber.
   * la partición de grupos escolares (en clases o subrgupos por niveles)
   * Y, generalmente, a los dos últimos a la vez.

---

[5] Este estudio ha sido sugerido por un estudio mexicano de los años setenta, cuya referencia he perdido.

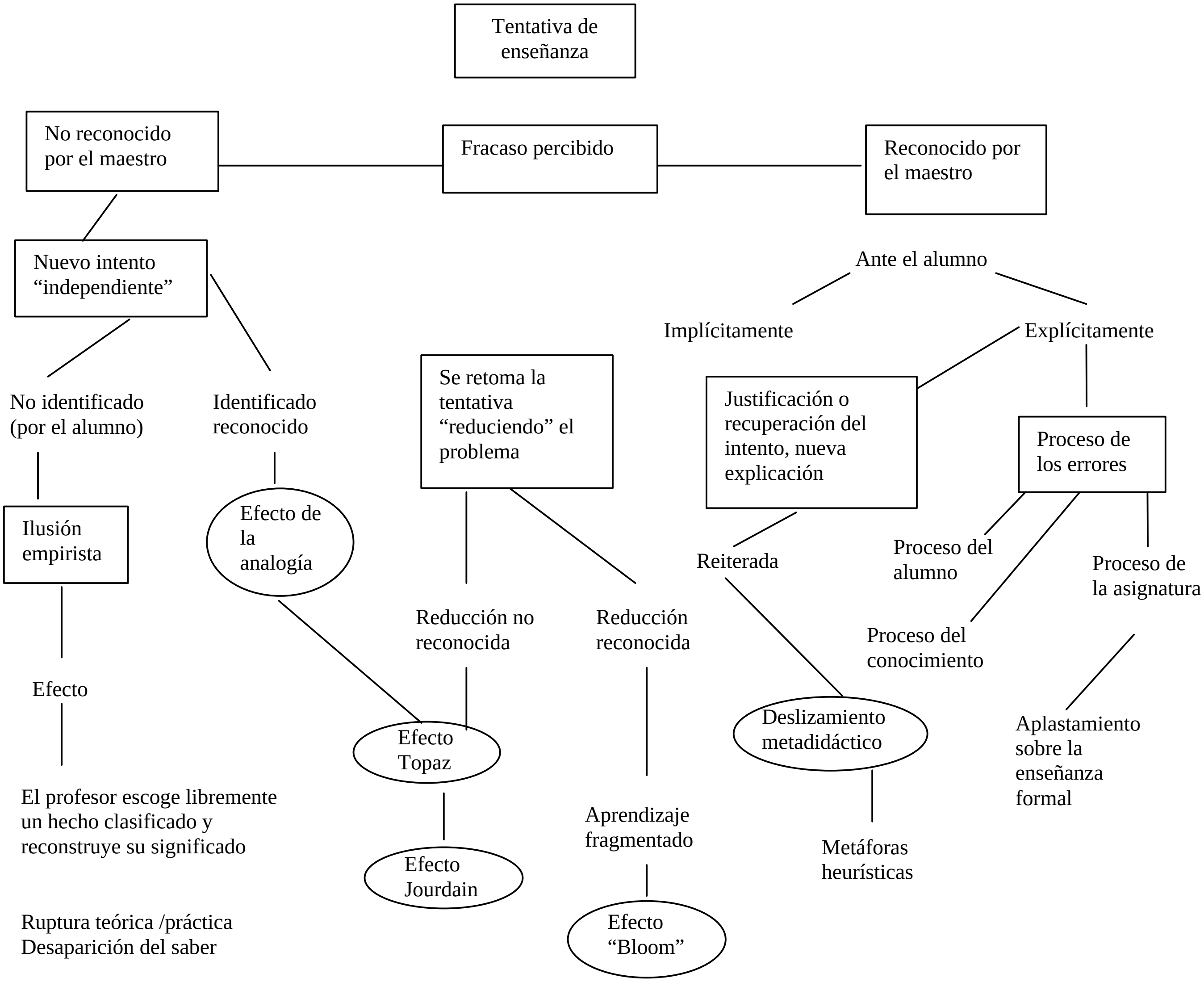


Figura 1. Las respuestas didácticas clásicas (no selectivas) ante los fracasos de los alumnos-

Los procesos didácticos se dibujan

Apoyándonos en el estudio de *concepciones epistemológicas espontáneas de los profesores* y en la cultura didáctica clásica que les está asociada, hemos estudiado algunas conjeturas.

Las evaluaciones institucionales de cohortes de numerosos alumnos deben utilizar pruebas fáciles de aplicar, de corregir y de comparar. Sin embargo, a través de esos métodos se pueden evaluar únicamente saberes (cada ítem tiende a evaluar *un* conocimiento, necesariamente identificado, en un contexto reducido independiente de su funcionamiento, y por lo tanto en su función de "saber").

Las respuestas clásicas de los profesores son: la repetición de la explicación inicial, la búsqueda rápida de una información complementaria precisa determinante, ejercicios de entrenamiento, la segmentación del saber en "saberes más simples", es decir, más cerrados, la segmentación de clases en grupos de niveles y la búsqueda vana de una homogeneidad ilusoria. La segmentación de los saberes está basada en la organización deductiva de los textos matemáticos y en la regla RISP.

Hemos modelado esas condiciones para prever sus efectos a largo plazo. *Previmos que terminarían por producir efectos contrarios a los que se buscaron y, por consiguiente, que los procesos evocados aquí arriba serían recurrentes*.

Al descuidar o subestimar el papel de los conocimientos en situación, las pruebas sub evalúan los conocimientos de los alumnos.

Cuando se retoma una enseñanza que fracasó, los *conocimientos* desarrollados en las tentativas anteriores suelen ser ignorados, considerados como dificultades suplementarias y combatidos con explicaciones suplementarias y con entrenamiento. Al no poder evaluar la comprensión efectiva a través de pruebas, ésta pasaría a un segundo plano y sería sustituida por saberes explicativos o bien meta. El solo aprendizaje de textos no favorece, para la mayoría de los alumnos, la capacidad para resolver problemas. A la inversa, el entrenamiento en la resolución de problemas no mejora los resultados en las evaluaciones institucionales más que de una manera incierta. La enseñanza de conocimientos sobre los problemas (problem solving method) no mejora el logro en las pruebas de conocimientos y mejora poco el desempeño global en los problemas (provoca deslizamientos metadidácticos poco efectivos).

Estos trabajos han conducido a formular la hipótesis de que las evaluaciones institucionales no pueden sugerir correcciones pertinentes en el curso del aprendizaje, no al menos siguiendo las prácticas didácticas clásicas. Los efectos a largo plazo de semejante uso de las evaluaciones eran previsibles: el estudio fue publicado en 1978 y los hechos continúan confirmándolo.

Hoy en día, la enseñanza es percibida entonces más como un "remedio" a la ignorancia, que como una aculturación a una práctica positiva. Los alumnos con dificultad se convierten entonces en "enfermos" (que multitudes de salvadores improvisados se proponen socorrer, casi siempre sin otra legitimidad que la de competencias muy periféricas, pero consideradas centrales por diversos *lobbys*). Exponer las investigaciones que han mostrado estos resultados, me sacaría del marco de esta presentación[6].

Observación de las consecuencias previstas

Desviaciones

a) Debido a que los objetivos y los resultados tienden a ser expresados a través de los mismos "ítems", éstos tienden a confundirse. Esta confusión conduce automáticamente a un descenso recurrente de las expectativas y de los resultados. Las pruebas son incluso utilizadas directamente como medios de enseñanza (enseñanza a través de fichas). Finalmente pueden ser considerados como el objeto mismo de la enseñanza como un saber.

---

[6]
a) La Teoría de las Situaciones ha permitido en primer lugar prever la existencia –inesperada en la perspectiva clásica- de obstáculos epistemológicos en matemáticas y por lo tanto de obstáculos didácticos. La hipótesis de crecimiento continuo de los conocimientos, en pequeñas dosis, ha sido probada de esta manera como una hipótesis falsa, o al menos muy costosa al final.
b) Para obtener resultados iguales, muy frecuentemente el tiempo de enseñanza de un objetivo descompuesto en subobjetivos es mayor que el del objetivo inicial.
c) Numerosas investigaciones han alimentado indirectamente el estudio de las consecuencias del uso ingenuo de las evaluaciones formales. Por ejemplo, los estudios de la resolución "quién llega a 20" han mostrado:
   - la *aparición de modelos implícitos* (teoremas en acto) que los modelos de aprendizaje S-R no podían ni prever ni describir.
   - que sin fases de validación, la reiteración de razonamientos análogos no se aceleraba, al contrario, se hacía más lenta a lo largo de las repeticiones… etc.
   - El estudio de los fracasos selectivos en matemáticas (1980) mostró la importancia del rol del *contrato didáctico*.

Crecimiento artificial de los objetivos y de las dificultades
Para intentar cernir mejor las insuficiencias de los saberes que sus pruebas detectan, los investigadores en educación multiplican las pruebas, éstas dan lugar a objetivos de diversas categorías (metacognitivos), a nuevas ocasiones de errores, y finalmente a nuevas enseñanzas, etc. El número de objetivos relativos a la enseñanza de una misma noción aumenta exponencialmente en la medida en que los investigadores introducen nuevas pruebas para revelar nuevos errores de los cuales se extraen nuevas exigencias.

Tensiones intra-escolares acrecentadas
Los profesores de un nivel escolar piden aligeramiento de los objetivos mientras que los del nivel siguiente les reclaman aprendizajes más firmes (de saberes) y suficientes para no tener que “retomar” la enseñanza (y sobre todo los *conocimientos*).

Condición crítica: proteger las fases del aprendizaje contra la evaluación continua

Si las evaluaciones formales se utilizan *en el curso de las fases de aprendizaje*, los errores legítimos de los alumnos se interpretan erróneamente como fracasos de una fase de enseñanza. Entonces los conocimientos enseñados se fragmentan en saberes independientes para permitir una *trivial poursuit* (productos de la pedagogía por objetivos) o, en el mejor de los casos, los conocimientos se articulan como un texto (axiomatización de las exposiciones) que excluye la actividad matemática del alumno. El uso de evaluaciones formales en situaciones inapropiadas restringe los comportamientos didácticos de los profesores y de los alumnos, así como sus concepciones didácticas y epistemológicas, en un sentido más conductista.

Evolución de la cultura epistemológica y didáctica espontánea hacia formas simplistas
Los conocimientos y los saberes juegan papales dialécticamente complementarios. Un conocimiento tiende a desaparecer si no es rápidamente identificado por medio de un saber. Recíprocamente, un saber es inutilizable para tomar decisiones si no se acompaña de conocimientos. Ciertas reacciones al papel excesivo que se concede a las pruebas conducen de manera sorprendente a restar importancia al aprendizaje de los saberes.

Por otra parte, si el aprendizaje de los saberes no reposa más en la práctica de la actividad matemática, esta actividad tiende a aparecer como inútil. Se vuelve más difícil para los profesores hacer aceptar problemas un poco abiertos como medios legítimos de enseñanza. Sin embargo los problemas son indispensables para estimular en los alumnos una actividad que simule la actividad matemática.

Evidentemente es necesario y legítimo constatar los resultados de una enseñanza, incluso y sobre todo en el curso del aprendizaje. Pero es necesario interpretar al desarrollo mismo y no al saber o al alumno, ya que la prueba hace lento al proceso en curso, lo objetiva y lo deforma.

En resumen el uso *abusivo* de la evaluación formal conduce a un desmenuzamiento de las enseñanzas y provoca el alargamiento del tiempo de enseñanza y de aprendizaje, el aligeramiento de los proyectos educativos y el endurecimiento de los aprendizajes. Cada una de esas medidas conduce a la disminución efectiva de los resultados de la enseñanza. Es decir, a lo contrario de lo que se propuso.

Otras consecuencias, otras causas

Hemos evocado más arriba cómo la evaluación formal favorece la segmentación de los alumnos e in fine la *individualización* radical de la enseñanza. La idea de que el enseñante ideal sería un preceptor que se adapta continuamente a las innumerables especificidades de un alumno único sustituye la de una institución –la escuela- que organiza la participación de los alumnos en una cultura común, en beneficio de sus intereses recíprocos.

Sobre esta idea se articulan concepciones epistemológicas del "conocimiento" estrechamente reducidas a sus componentes psicológicos e incluso neurofisiológicos. Estas concepciones ignoran las dimensiones temporales y colectivas de la construcción de los conocimientos tal y como las muestra la historia, la epistemología y la didáctica de las matemáticas. La cultura matemática se transmite a través de actividades en las que la componente social es sin duda muy importante a pesar de las apariencias.

Habitualmente, la práctica conduce al sistema escolar a mejorar o a rechazar las decisiones inadecuadas (al menos eso se cree). Sin embargo, la regulación de los fenómenos que han sido evocados arriba parece que no se produce. ¿Por qué? Los fracasos repetidos han motivado *cascadas de reformas* que, lejos de corregirse, frecuentemente han conjugado los efectos negativos de su puesta en práctica, debido a que son sustituidas de manera precipitada por otros proyectos igualmente improvisados. Al grado en que la *innovación* se ha convertido en un criterio de valor en sí mismo: nada puede ser bueno si no es nuevo, tendencia que ha motivado a su opuesta, la retroinnovación: nada puede ser bueno si es reciente. Por otro lado, todos los intentos de estudios científicos *directos* de los fenómenos didácticos se han topado con una cierta *hostilidad* tanto de parte de los matemáticos como de los profesores.

Al contrario, la utilización de la evaluación formal se desarrolla y se vuelve cada vez más densa. La creencia de que es posible mejorar empíricamente la enseñanza sin necesidad de conocer su funcionamiento se acentúa. Acabamos de mostrar que esta esperanza es engañosa. Una metáfora dudosa puede estigmatizar el comportamiento de nuestras sociedades respecto a este asunto: los cocheros dan latigazos a las locomotoras para intentar hacerlas ir más rápido.

Qué papel juegan en estos procesos las numerosas instituciones interesadas en beneficiarse de una parte del interés público por la educación de sus niños.

Conclusiones

La práctica abusiva de las evaluaciones que se hacen en el curso mismo de los aprendizajes presentan los más grandes peligros. Para poder tomar de mejor manera buenas decisiones didácticas en acuerdo con los agentes de la educación, es indispensable que dispongamos de mejores conocimientos científicos de los fenómenos de difusión de los conocimientos. Y que estos saberes estén mejor compartidos con el público.

La posibilidad de comunicar su experiencia es la principal característica de la humanidad, es lo que más ha influido en su evolución en comparación con otras especies. El arte didáctico data de varios millones de años. Cada uno de nosotros *conoce* y práctica este arte. Además, reconocer por principio en cada uno esta capacidad de aprender y de enseñar es tan esencial, tan indispensable para la vida social, como reconocerlo dotado de razón. Esta confianza no hace más que volver más aparentemente inútil todo conocimiento científico sobre este arte. A pesar de y a causa de este conocimiento espontáneo, finalmente sabemos muy pocas cosas sobre este tema.

BibliografÍa

H. Piéron. Examens et docimologie. PUF, Paris, 1963.
National longitudinal studies of 1972
Bloom Taxonomies d'objectifs
Brousseau, G. Evaluation and Learning Theory in School Situations; The Fifth Conference IACME, Campinas, Brazil, 1979
Brousseau, G Les déséquilibres des systèmes didactiques. Communication à ICME, Séville 16 Juillet 1996
Post Addendum
Sharon Nichols et David Berliner. Collateral dammages: How High-Stakes Testing Corrupts America's Schools. Harvard Education press, Cambridge (2007)

Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental

Michèle Artigue
Université Paris7 Denis Diderot

Introducción

Hace más de veinte años, el primer estudio propuesto por la Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI) tenía por tema: la influencia de los ordenadores sobre las matemáticas y su enseñanza. La conferencia asociada a dicho estudio tuvo lugar en 1985 en Strasbourg y la obra que resultó fue reeditada, bajo el auspicio de la UNESCO en 1992 (Cornu & Ralston, 1992). El estudio trataba la cuestión de la influencia considerando tres dimensiones: la influencia sobre las prácticas matemáticas, sobre los procesos de enseñanaza y aprendizaje de las matemáticas, sobre los planes de estudio y la formación de profesores. Se señalaba que la influencia sobre las matemáticas y las prácticas matemáticas no necesitaba probarse más pero que la situación era mucho menos clara para la enseñanza. La obra, anunciaba el prefacio, presentaba numerosas proposiciones de mejoras curriculares apuntando a sacar provecho de estas nuevas maneras de hacer matemáticas, se daban numerosos ejemplos de experimentaciones éxitosas pero, según los autores, faltaba reconocer que "todas estas sugerencias permanecían fundamentalmente especulativas en lo que se refiere a su puesta en escena a gran escala, es decir en su conversión en un plan de estudio bien desarrollado y probado, y concebido para profesores y alumnos ordinarios[1]" (p.3). Los autores agregaban que, para superar este estado, era necesario desarrollar la investigación y las experimentaciones, particularmente en contextos realistas.

En el pasado mes de diciembre, en Hanoi, se ha tenido la conferencia asociada al segundo estudio ICMI dedicado a este tema y con la encomienda de revisar el primer estudio[2]. En 25 años nuestros conocimientos han seguramente progresado de manera significativa pero en lo que se refiere al éxito de proyectos a gran escala, es necesario admitir que la situación no ha considerablemente evolucionado. Herramientas como las calculadoras, los programas computacionales de geometría dinámica, las hojas de cálculo plantean siempre problemas a nuestros sistemas educativos, aún cuando la evolución tecnológica ofrece perspectivas radicalmente nuevas, con además de la cosificación de objetos matemáticos en formas directamente manipulables, de la visualización de fenómenos y de la simulación, nuevas formas de interacciones sociales y didácticas.

Sin embargo, se observan evoluciones innegables que no se limitan a los países dichos desarrollados como lo mostró bien el « Diversity Panel » en la conferencia de Hanoi. Además, se plantean cuestiones que estaban ausentes en el primer estudio, por ejemplo esta del control que pueden tener las instituciones sobre las evoluciones o del carácter benéfico de las influencias observadas. A través de estas interrogaciones, se perfilan unas cuestiones fundamentales: ¿Qué esperamos ahora de la enseñanza de las matemáticas? ¿Qué consideramos como un progreso, una regresión, un fracaso? Está claro que hoy no sabríamos dar respuesta a tales preguntas sin tomar en cuenta el hecho tecnológico. Es lo que, al menos en parte, motivó la elección de este tema para mi contribución en este congreso.

Otra razón es que desde hace más de veinte años, me he interesado en estas preguntas, tanto como profesora e investigadora, y desearía compartir con ustedes las reflexiones que me inspira esta experiencia. Para ubicarme mejor, evocaré en primer lugar unos episodios de esta experiencia

1 Traducción del autor.
2 El texto de discusión asociado a este estudio es accesible en el sitio de ICMI: www.mathunion.org/ICMI/ .

personal. Más allá de ser sólo una experiencia personal, me parece reflejar la evolución de los trabajos en este dominio, marcados al mismo tiempo por la evolución tecnológica, la evolución de los contextos y la evolución de la investigación en matemática educativa en un sentido amplio. Me centraré despuès sobre lo que hoy se conoce como la aproximación instrumental de las cuestiones de integración tecnológica, aproximación que contribuí a desarrollar.

De la programación a los recursos en línea : trayectoria de una investigadora

Al inicio de los años 80's comencé a trabajar en este dominio como joven universitaria utilizando la informática, principalmente a través de actividades de programación, en una sección experimental físico-matemática de primer año de universidad. En esa época, las posibilidades gráficas ofrecidas por la tecnología eran muy limitadas. Pero afortunadamente, la situación evolucionó rápidamente, y percibí en estos avances el medio de hacer accesible para los estudiantes principiantes una aproximación cualitativa de las ecuaciones diferenciales, reservada en aquella época a los estudiantes de maestría (Artigue y Rogalski, 1990). Este primer proyecto de investigación fue un éxito, pero rápidamente entendí que su generalización no iba ser evidente. Su éxito exigía en efecto un cambio importante en el estatus dado al registro gráfico (Artigue, 1992). Incluso en el contexto ecologicámente protegido de nuestra investigación, habíamos podido medir la fuerza de la resistencia cultural a este cambio, fuerza tanto más grande que, por razones evidentes de coherencia, este cambio de estatus no podía estar limitado al sólo tema de las ecuaciones diferenciales. Nos había sido necesario usar toda nuestra legitimidad de matemáticos expertos en el ámbito, para lograr convencer a nuestros colegas en la experimentación realizada.

Poco tiempo después, como miembro del IREM París 7, me involucré en un segundo proyecto, esta vez con alumnos de nivel medio (13, 14 años) de bajo rendimiendo. En este nuevo proyecto, el programa computacional Euclides, derivado de Logo y ofreciendo macro-construciones geométricas, era utilizado para reconciliar a estos alumnos con las matemáticas. Una vez más éste proyecto fue un éxito, pero el programa computacional presentaba límites evidentes comparado con los programas computacionales de geometría dinámica como Cabri-géomètre, que aparecían en el mercado y muy rápido se volvió obsoleto. Dicha investigación también llamó mi atención sobre los cambios, que una utilización eficaz de tales herramientas requería en las prácticas de profesores y a poner seriamente en duda la pertinencia de las estrategias de formación contínua de los profesores en este dominio. De forma evidente, subestimaban los complejidad del trabajo del profesor en entornos informáticos y no sostenían el desarrollo de nuevas competencias técnico-matemáticas y de manejo de clase requeridas por los profesores (Artigue, 1991, 1998).

A principios de los años 90's, se inició un tercer episodio cuando la Dirección de la Tecnología del Ministerio de la Educación Nacional me solicitó colaborar, en tanto que experta en la disciplina de la Matemática Educativa, en los trabajos de un grupo de profesores, expertos en la utilización de calculadoras y programas computacionales. Dicho grupo trabajaba para identificar el potencial ofrecido por los programas computacionales de cálculo formal o CAS para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la enseñanza secundaria, y debían preparar las evoluciones curriculares que la introducción de tales herramientas a nivel bachillerato (grados del 10 al 12) pudieran necesitar. Era un nuevo tipo de tecnología para la enseñanza, mucho más perturbador de sus normas y valores que las calculadoras gráficas, entonces obligatorias en el bachillerato o incluso que los programas computacionales de geometría dinámica. Era también una tecnología mucho más compleja. El contraste entre el discurso idealista de los expertos del grupo, totalmente coherente con la literatura de la época sobre los CAS y lo que mostraban las observaciones llevadas a cabo en sus clases, se volvió una pregunta de investigación (Artigue, 1997). Y esto fue el comienzo de la aproximación instrumental la cual retomaré en la segunta parte de este texto.

En estos últimos años, mi relación con la tecnología ha tomado nuevas vías. En efecto, he tenido la responsabilidad de dirigir un proyecto regional con un alcance de más de 5000 estudiantes y de 100 profesores, concerniente al uso de recursos en línea. Es necesario saber, que en Francia las regiones tienen la responsabilidad de los "liceos" (enseñanza media superior). Estas pagan por los edificios, los libros, las computadoras. Hace tres años la región Ile de France, la más grande del país, decidió poner en marcha un nuevo proyecto, pagando el acceso a recursos en línea en matemáticas a alumnos de primer año de bachillerato viviendo en zonas socialmente desfavorecidas. Por medio de dicho proyecto, se trataba de compensar el acceso limitado que estos alumnos tenían a los diversos sistemas de acompañamiento escolar que existen en Francia, por razones financieras evidentes. La región decidió también que este proyecto debía ser seguido y evaluado por un equipo universitario y así nuestro IREM fue contactado. Este proyecto era un desafío al menos por dos razones: su tamaño y la tecnología utilizada. Hasta entonces sólo habíamos participado en estudios que consideraban un número límitado de clases. Dichos estudios también consideraban programas computacionales abiertos, micromundos, muy distantes de los recursos en línea utilizados en esta experimentación. Experimenté un sentimiento de regresión dramática, debido a la baja calidad de la interacción con el saber matemático que estos recursos a priori permitían. No obstante, aceptamos este desafío porque nos parecía necesario interesarnos en estos productos cada vez más presentes en el universo escolar y paraescolar. Dentro de algunos años podrían tener mayor influencia sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que los micromundos habían alcanzado tener en más de veinte años. Este proyecto nos confrontó a cambios importantes en la economía y la ecología de los procesos de aprendizaje, y a cambios diferentes de estos hasta entonces observados y estudiados. Asimismo, nos obligó a trabajar nuevamente la aproximación instrumental para adaptarla a este nuevo contexto tecnológico[3].

La última experiencia que mencionaré es también muy reciente, puesto que ha comenzado en el 2004, con la creación de la red de excelencia Europea Kaleidoscope y del equipo de investigación europeo TELMA (Technology Enhanced Learning in Mathematics) que es uno de sus componentes. Una de las ambiciones de Kaleidoscope es el desarrollo de herramientas, permitiendo la mejora de los intercambios y el desarrollo de proyectos cooperativos en el dominio del aprendizaje con tecnologías dígitales. El equipo de investigación TELMA reagroupa seis equipos de cuatro paises, y se centra en las matemáticas. Una de las hipótesis hechas por sus miembros es que la multiplicidad y el carácter fragmentado de los marcos teóricos utilizados en el dominio del « technology enhanced mathematics learning » es un obstáculo para la comunicación y la capitalización de los conocimientos. En consecuencia, buscamos conectar los marcos teóricos y las aproximaciones que utilizábamos respectivamente a través del desarrollo de una metodología y de herramientas conceptuales específicas. No entraré en los detalles de este trabajo ni del proyecto ReMath que le sucedió, sólo dire que es un trabajo fascinante que influencia profundamente mi visión de las necesidades teóricas en la Matemática Educativa y de la manera en la que pueden satisfacerse[4].

Este itinerario, si bien es particular, no es extraordinario, y entre los participantes de este congreso, otros sin duda comparten historias parecidas, donde los proyectos de investigación se encadenan llevados por la evolución tecnológica, las demandas institucionales así como por la sensibiliad del investigador, combinando trabajo teórico y experimental. A continuación voy a presentar un ejemplo de tal combinación: el desarrollo de la aproximación instrumental.

---

[3] Las publicaciones relativas a este proyecto son accesibles en su sitio web: hhttp://pcbdirem.math.jussieu.fr/SITEscore/accueil.htm

[4] Las publicaciones relativas a estos proyectos son accessibles en los sitios web de TELMA y ReMath: http://telma.noe-kaleidoscope.org y www.remath.cti.gr

La aproximación instrumental: nacimiento y desarrollo

Como mencionado anteriormente, fui parte de un grupo de expertos que trabajaban sobre la integración de CAS en la enseñanza media superior. Rápidamente, un proyecto de investigación fue puesto en marcha, financiado por el Ministerio. Dicho proyecto puso en evidencia la diferencia entre el discurso de los expertos sobre el potencial de los CAS para el aprendizaje de las matemáticas y la realidad en las aulas. Asimismo nos permitió identificar posibles causas de esta diferencia y tres de entre éstas llamaron particularmente nuestra atención (Artigue, 1997):

* la oposición entre técnico y conceptual que aparecía en la literatura existente y se reflejaba en el discurso de los expertos,
* la poca atención dada a los cambios en la economía de las prácticas matemáticas inducidas por la utilización de CAS,
* la subestimación de las cuestiones instrumentales.

Un segundo proyecto sucedió al primero, esta vez implicando varios equipos, en el momento en que la calculadora simbólica TI-92 era comercializada (Guin y Trouche, 2001). Dicho proyecto nos permitió poner a prueba nuestras conjeturas y profundizar nuestra reflexión. Para conducir de la mejor manera este trabajo, consideramos necesario tomar distancia del discurso usual sobre los CAS y de los marcos teóricos congnitivos y constructivistas que lo sostenían. Necesitábamos un discurso que permitiera considerar conceptos y técnicas en sus relaciones dialécticas, un discurso menos centrado en el alumno y que tratara las cuestiones de integración en su dimensión sistémica. De la misma manera, debía permitirnos considerar la dimensión instrumental de los procesos de aprendizaje.

Estoy perfectamente consciente que estas necesidades podrían haber sido satisfechas de diferentes maneras. Siendo nosotros investigadores franceses, familiarizados con la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD en adelante) desarrollada por Chevallard (Chevallard, 1992, 1999, 2002), (Gascón, 1998), habituados a colaborar con investigadores en Ergonomía Cognitiva (Rabardel, 1995), (Vérillon y Rabardel, 1996), naturalmente se impuso la idea que una concatenación apropiada entre la TAD y las perspectivas desarrolladas por Rabardel y Vérillon en la Ergonomía Cognitiva pudieran darnos el marco de pensamiento buscado. Es así como nació la aproximación instrumental.

Los inicios de la aproximación instrumental

Más precisamente, para el desarrollo de esta aproximación, la TAD nos dió un marco macro-teórico:

* centrado en la noción de institución, sensible a las normas y valores institucionales y a la manera en la que éstas influencen a los procesos de enseñanza y aprendizaje,
* concibiendo los saberes matemáticos en tanto que objetos relativos, emergentes de prácticas matemáticas institucionalmente situadas, y sensible a la influencia de las herramientas de las prácticas sobre los saberes que emergen de éstas,
* y, lo no menos importante, desarrollando una visión positiva de las técnicas y reconociendo, a través de la noción fundamental de praxeología, el rol clave que las técnicas juegan en las construcciones conceptuales y teóricas.

La TAD analiza, en efecto, las prácticas matemáticas en términos de praxeologías. En su nivel más fino, el de las praxeologías puntuales, una práctica matemática remite necesariamente a un tipo de tareas que dicha práctica permite realizar por medio de una técnica, que es una manera de hacer y no necesariamente algorítmica, ni siquiera algoritmizable. La dupla (tipo de tarea, técnica) constituyen la parte práctica de la praxeología, la *praxis*. Pero lo que postula la TAD, es que casi siempre, esta *praxis* está acompañada de un dirscurso que permite comunicarla, explicarla en vistas de una justificación y que especialmente es el caso de las praxeologías que viven en las instituciones escolares. Este es el discurso que Chevallard llama la tecnología, remitiéndose al sentido etimológico del término, y designa por teoría el discurso más o menos elaborado que estructura y justifica en su turno a la tecnología. Tecnología y teoría constituyen el elemento teórico de la práctica y una praxeología es de hecho una cuádrupla (tipo de tarea, técnica, tecnología, teoría). Es una combinación de *praxis* y *logos.* En otros términos, técnico y conceptual son dimensiones constitutivas y en un cierto sentido indisociables. Estas praxeologías puntuales, más o menos completas en la realidad institucional, se organizan así mismas en praxeologías locales unificadas en torno a una misma tecnología, posteriormente en regionales unificadas en torno a una misma teoría. Se entiende entonces que la TAD nos haya parecido un marco conceptual capaz de hacer frente a las necesidades teóricas que experimentábamos, las de un análisis sistémico amplio que sobrepasara al sujeto que aprende, sensible al rol que juegan la técnicas en las prácticas humanas, al desarrollo conceptual que emerge de éstas y a las herramientas de estas prácticas.

Por su parte, la Ergonomía Congnitiva, nos dió distinciones y herramientas particularmente bien apropiadas para estudiar el rol que las tecnologías digitales juegan en los procesos de aprendizaje:

* la distinción fundamental entre el objeto tecnológico: el artefacto, y el instrumento en que va a transformase para un individuo, un colectivo o una institución,
* la atención dada a la complejidad de las génesis instrumentales que aseguran esta tranformación del artefacto en instrumento, la distinción hecha entre las dos dimensiones estrechamente interelacionadas de estas génesis: la instrumentalización dirigida hacia el artefacto, la instrumentación dirigida hacia el sujeto, y los esquemas de uso y acción instrumentada que acompañan estas génesis,
* la importancia dada al hecho de que las herramientas de la actividad matemática, sean las que sean, modelan los procesos de aprendizaje, sus formas, pero también los conocimientos y saberes que ellas producen,
* el reconocimiento que dichas herramientas tienen una función prágmatica, porque ellas permiten actuar sobre el mundo y transformarlo, pero también una función epistémica, participando en nuestra comprensión del mundo, y una heurística, influenciando la manera en la cual nos organizamos y controlamos nuestras acciones.

La TAD, como la gran mayoría de las teorías didácticas, aún siendo sensible a las herramientas y a los diversos ostensivos que sostienen las prácticas, ha sido desarrollada en una cultura, que es la cultura de las herramientas tradicionales de la actividad matemática. Dicha teoría nos parecía, y todavía aún nos parece, menos desarrollada sobre las cuestiones instrumentales que la Ergonomía Cognitiva que, trabajando sobre los aprendizajes en el mundo del trabajo no puede subestimar los efectos de la evolución tecnológica sobre las prácticas profesionales. Por su parte, la Ergonomía Congnitiva no nos parecía ser mucho sensible a los problemas de la legitimidad existentes en los sistemas educativos, y al hecho de que la legitimidad científica y social no son suficientes para asegurar la legitimidad didáctica. Por esta razón, la concatenación de estas dos aproximaciones nos pareció potencialmente productiva.

Personalmente trabajé y desarrollé esta aproximación, primero analizando las génesis instrumentales de la TI-92 en las clases de 1ro. S (grado 11), en colaboración con B. Defouad (Defouad, 2000). Más especificamente estudiamos el tema de la variación de funciones, el cual es emblemático en Francia de la enseñanza del análisis en el bachillerato. No entraré en los detalles de estos trabajos pero quisiera mostrar como esta aproximación ha modificado mi visión de las cuestiones de integración tecnológica, dándome la impresión de comprender mejor las causas de los efectos limitados de los esfuerzos institucionales realizados y cómo pudieran provocarse cambios significativos en el futuro.

Para mostrar lo anterior, utilizaré la distinción entre el valor epistémico y el valor pragmático de las técnicas que introducimos en la aproximación instrumental, inspirados por distinciones similares hechas para los esquemas de acción instrumentada por Vérillon y Rabardel. Las técnicas tienen un valor pragmático en el sentido de que éstas producen resultados que transforman el mundo, pero también poseen un valor epistémico en el sentido de que nos ayudan a comprender los objetos matemáticos que movilizan. Esta distinción fue para mí un catalizador y, una vez que lo tuve integrado, no pude ver las cuestiones de integración tecnológica de la misma manera, ver tampoco de la misma manera las resistencias de los profesores, los debates recurrentes sobre la utilización de calculadoras en la esducación básica y el lugar que se le debe dar a la maestría de técnicas operatorias como esta de la división. Todo esto podía ser replanteado en términos de perturbación de los equilibrios tradicionales entre el valor epistémico y pragmático de las técnicas y así surgía una nueva visión de la integración (Artigue, 2002).

Esta perturbación se puede analizar de la siguiente manera: las tecnologías informáticas trastornan los equilibrios tradicionales entre el valor epistémico y pragmático de las técnicas, equilibrios que se han establecido progresivamente al filo de la historia, en una cultura de lápiz y papel, aunque los cálculos han estado durante todo el tiempo instrumentados por diversas herramientas: ábacos, tablas numéricas, herramientas gráficas, etc. Los sistemas educativos encuentran dificultades evidentes para reaccionar de manera apropiada a estos trastornos. Pero estas dificultades no son independientes de la manera en las que, generalmente, estos sistemas tiende a adaptarse a las evoluciones tecnológicas, sólo viendo a la tecnología como un coadjuvante pedagógico o didáctico. Burdamente expresado, lo que se le pide a la tecnología, es permitir aprender más rápido y mejor, más o menos las mismas matemáticas. Esta posición, ella misma está implicitamente sustentada por una visión de las matemáticas como el campo de conocimiento universal, por excelencia, tanto en el tiempo como en el espacio. Estas visiones sostenidas por la cultura, inducen, como bien lo muestran las investigaciones didácticas, un uso educativo de las tecnologías jugando sobre el potencial pragmático en detrimento de su potencial epistémico. Pero lo que da la legitimidad educativa a una técnica, no es sólo su valor pragmático, sino también su valor epistémico. Y en esto reside una diferencia esencial e irreductible entre el mundo de la escuela y el mundo exterior. Convertir una tecnología en legítima y matemáticamente útil desde un punto de vista educativo, sea cual sea la tecnología en cuestión, supone, si excluímos el caso de las formaciones más profesionales, modos de integración que permiten un equilibrio satisfactorio entre el valor epistémico y el pragmático de las técnicas instrumentadas asociadas. Y esto, como también lo muestra la investigación, si se examinan sus resultados con esta perspectiva, necesita que las tareas propuestas en los planes de estudio, no sean simples adaptaciones de lo que se hace con lápiz y papel. Desgraciadamente, tales tareas no son creadas tan fácilmente cuando se entra en el mundo de la tecnología con una cultura de lápiz y papel. De este punto de vista, la investigación que ha sido llevada a cabo en Grenoble con Cabri-géomètre, estudiando durante varios años la evolución de escenarios contruídos por profesores, que tenían diversas relaciones con las tecnologías informáticas y participaban en un mismo grupo de trabajo, es particularmente instructiva (Laborde, 2001).

La aproximacion instrumental nos hizo particularmente sensibles a estas cuestiones y por eso a los límites de la ayuda que los documentos curriculares como la literatura de investigación existente, aportaban a los profesores para permitirles poner en marcha de manera razonada y eficaz la integración tecnológica deseada por la institución. Los primeros trabajos que hemos efectuado sobre los CAS han mostrado, por ejemplo, una vida particular, de las técnicas instrumentadas dentro de las clases experimentales. Dichas técnicas eran legítimas pero no trabajadas oficialmente; no eran parte de los procesos de entrenamiento y de rutinización, como lo eran las técnicas en lápiz y papel. Tampoco eran objeto de una institucionalización. El discurso tecnológico en el sentido de la TAD que las enmarcaba era limitado y esencialmente descriptivo. Aparentemente, éstas no estaban concernidas por las evoluciones del contrato didáctico que daba pauta al avance del conocimiento en la clase. Se quedaban en un estado artesanal y no llegaban a adquirir, convenientemente seleccionadas y trabajadas, un estatus de técnicas expertas. Estas características condujeron a B. Defouad a llamarlas técnicas semi-oficiales. Pero tales características son incompatibles con una integración eficaz de los CAS, porque incompatibles con el alcanze de un equilibrio satisfactorio entre lo pragmático y lo epistémico. Cuando finalmente lo comprendimos, también comprendimos cómo podíamos ayudar a los profesores implicados en esta investigación, ayudándolos a organizar una génesis instrumental e institucional que sustentaría las génesis individuales esperadas, a organizar el trabajo de selección y de mejoramiento de las técnicas instrumentadas, a desarrollar un discurso tecnológico combinando saberes matemáticos y saberes *artefactuales* que no existía en ninguna parte para sustentar su institucionalización, a organizar la evolución de la relación de estas técnicas a lo largo del avance de los conocimientos, al interior de la clase. En las clases experimentales concernidas, los efectos de este trabajo fueron evidentes. Pero esta investigación también nos mostró que las necesidades matemáticas de una instrumentación apropiada de los CAS no eran necesidades fáciles de satisfacer en el contexto curricular existente y que la generalización de esto que habíamos logrado hacer vivir y hacer matemáticamente productivo, en el contexto ecológicamente protegido de nuestras experimentaciones, no podía ser extendido facilmente a todo el sistema.

Aproximación instrumental : más allá de los CAS

En los últimos diez años, la sensibilidad a las cuestiones instrumentales en la comunidad didáctica han aumentado considerablemente, favorecida por el desarrollo de aproximaciones socio-culturales y el acento que dichas aproximaciones ponían en el rol de las mediaciones semióticas en los procesos de aprendizaje. La aproximación instrumental que habíamos desarrollado ha sido cada vez más utilizada por investigadores que trabajaban en el dominio de los CAS. Dan cuenta de ello los recientes coloquios CAME[5] y diversas publicaciones[6]. También ha sido utilizada esta aproximación por investigadores que trabajaban con otras tecnologías: programas computacionales de geometría dinámica (Laborde y al., 2006) y hojas de cálculo por ejemplo (Haspekian, 2005b). Paralelamente, otras construcciones se desarrollaron combinando las ideas ofrecidas por las investigaciones de P. Rabardel y de P. Vérillon cada vez más conocidas en el escenario internacional con las de las teorías de la actividad que les son subyacentes y ya compartidas por muchos investigadores en matemática educativa. Es el caso, por ejemplo, de los trabajos de investigadores italianos con los cuales colaboro al interior de los proyectos europeos TELMA y ReMath citados anteriormente. En lo que prosigue, me centraré en dos extensiones de esta aproximación en las cuales estuve particularmente involucrada: la primera tiene que ver con la hoja de cálculo y ha sido llevada a cabo por M. Haspekian en el marco de su tesis (Haspekian, 2005a), la segunda concierne a los recursos en línea y al proyecto regional ya citado.

La hoja de cálculo es un artefacto informático en el cual los usos son a priori múltiples. Inicialmente fue concebida para automatizar los cálculos contables y permitir las simulaciones en este dominio. Actualmente ha migrado de manera significativa fuera de este hábitat. En la enseñanza, se observa un movimiento similar. Los primeros usos escolares de la hoja de cálculo han sido contables pero se han ido extendiendo progresivamente. Por ejemplo, en Francia, la hoja de cálculo es ahora asociada a la enseñanza de las matemáticas desde los primeros años de secundaria (grado 7) y su uso es preconizado en aritmética, cálculo, estadística y probabilidad a lo largo de la escolaridad media. El programa de la sección Humanidades en primero (grado 11) le otorga una importancia particular y las competencias adquiridas son evaluadas en la prueba del baccalauréat para esta sección. En su tesis, M. Haspékian se centró en la enseñanza obligatoria y en un dominio particular: el álgebra. Existía una

---

5 CAME: Acronimo para el Grupo Internacional Computer Algebra in Mathematics Education.

6 Ademas del libro (Guin y Trouche, 2001) ya citado y de los actas de los congresos CAME, se pueden considerar por ejemplo los diversos articlos publicados en la revista International Journal of Computers for Mathematical Learning por L. Trouche, J.B. Lagrange y J. Monaghan, en los años recientes.

razón simple para esta elección: el hecho de que las investigaciones didácticas las más conocidas concernientes a la hoja de cálculo estaban inscritas en este dominio y tendían a presentar la hoja de cálculo como un artefacto que ayudaba a superar las dificultades, bien conocidas, de la transición entre la aritmética y el álgebra (Bednarz, Kieran y Lee, 1996), (Kieran y Yerushalmy, 2004).

M. Haspekian realizó su investigación combinando diferentes perspectivas. Después de haber analizado la hoja de cálculo con las herramientas de la aproximación instrumental, procedió a un estudio de la literatura existente, adoptando como filtro esta misma aproximación. Posteriormente, y teniendo como base dicho estudio, desarrolló una ingeniería didáctica (Brousseau, 1997), con el objetivo de abordar simultáneamente una introducción a la hoja de cálculo y una inicialización al álgebra con alumnos de segundo año de secundaria (grado 7). Decidió realizarlo en condiciones compatibles con el plan de estudio en vigor en Francia (es decir con un número limitado de clases). Por otra parte, también realizó un estudio sistemático de los recursos de la hoja de cálculo propuestos a los profesores de la enseñanza obligatoria, por el sitio web del Ministerio de Educación Nacional. Finalmente, vía cuestionarios y entrevistas, intentó comparar los usos de la hoja de cálculo de futuros profesores en IUFM[7] y de formadores a cargo de la tecnología en estos IUFM.

¿Qué se destaca de esta investigación? El estudio instrumental mostró que objetos matemáticos como estos de variable y fórmula son asociados en la hoja de cálculo con una pluralidad de objetos, ninguno de estos coincidiendo exactamente con su corespondente matemático. Como se escribe en (Haspekian & Artigue, 2007) partiendo del ejemplo siguiente:

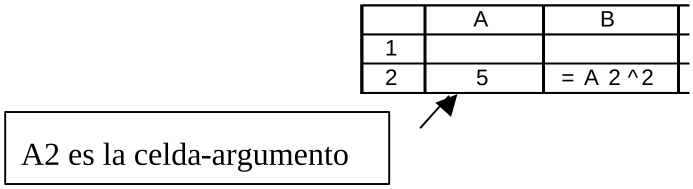


Figura1.

“Existe, aún ahí, una variable escrita con la ayuda de símbolos (propios del lenguaje de la hoja da cálculo) y que se refiere, como en lápiz/papel, a un conjunto de valores posibles. Pero aquí, este conjunto referente pasa por un intermediario importante, la celda- argumento, que es al mismo tiempo:

* referencia abstracta, general : representa la variable (es a ésta que se refiere la fórmula haciéndole jugar el rol de variable),
* referencia concreta particular: aquí es un número (cuando no hemos editado nada, ciertas hojas de cálculo atribuyen el valor 0) pero esto puede ser también otra fórmula,
* referencia espacial/geográfica (es una dirección espacial en la hoja de cálculo)
* referencia material (es una casilla de la hoja de cálculo, ciertos alumnos la ven como una caja).

Así, la variable “letra” es transpuesta en la hoja de cálculo en una celda argumento embarcando con ella, además de la representación abstracta, general, otras tres representaciones sin equivalentes en el contexto del papel. Para hacer visible esta diferencia, hemos introducido la denominación “variable-celda” (véase la figura 4.2).

[7] IUFM : Instituto Universitario de Formación de Maestros.

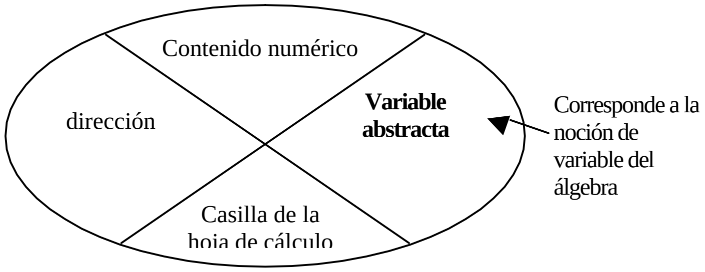


Figura 4.2. La "variable-celda".

Además, siguiendo las funcionalidades utilizadas en la hoja de cálculo, van a emerger otras nociones de variable 'variable-columna', 'variable-línea', 'variable-nombre', cada una dotada de características propias. »

Análisis similares fueron realizados en la tesis, sobre la noción de fórmula, tomando en cuenta la instrucción de recopiar, sobre la distinción existente entre referencia absoluta y relativa, distinción puesta en relación con la diferencia entre variable y parámetro en matemáticas. Esta diversidad de objetos y las diferencias que presentan con los objetos matemáticos existentes, pueden ser eficazmente utilizadas para hacer evolucionar la relación a las nociones de variable y de fórmula en los estudiantes (cf. (Willson, Ainlry & Bills, 2005) por ejemplo), pero la aproximación instrumental conduce a pensar que una tal utilización no va, necesariamente, ser fácil y requiere que la institución se haga cargo de las génesis instrumentales asociadas, combinando su gestión con la progresión de los conocimientos algebraicos propuesta por los planes de estudio. El estudio que realizó M. Haspékian de la literatura de investigación muestra que, hasta estos últimos años, dicha literatura ha quedado relativamente poco sensible a estas cuestiones. En las publicaciones, las variables matemáticas de las tareas propuestas a los estudiantes son cuidadosamente descritas, pero lo que se refiere a las génesis instrumentales y a su gestión por parte del profesor, queda implícito. Por ejemplo, la manera en la que es introducida la instrucción de recopiar y es acompañada su instrumentación con alumnos principiantes en álgebra no se precisa, y el lector no tiene los medios para comprender cómo se organizan las relaciones entre esta instrucción y la noción de fórmula. ¿Es un conocimiento previamente construído en otro ambiente sobre la noción de fórmula, el que ayuda a los estudiantes a darle sentido a la acción de recopiar y a reconocer el invariante que existe detrás de una expresión formal, que cambia de una línea a la otra? ¿Es la acción de recopiar que, en sentido inverso, es utilizada para construir este invariante y una noción de fórmula que sobrepasa el contexto de la hoja de cálculo? Los vínculos, en la práctica, son sin duda de naturaleza dialéctica pero generalmente son considerados transparentes, establecidos de manera natural. No es el caso, en lo absoluto, y el profesor tiene que jugar un rol muy importate para organizar y dirigir la mediación instrumental.

El análisis de los recursos destinados a los profesores de secundaria, puestos en línea en los sitios académicos y accesibles vía el sitio Educnet del Ministerio, muestran implícitos aún más fuertes. Más de la tercera parte de los recursos (35%) son hojas de actividades en bruto sin documentos guías y únicamente el 19% de los recursos precisan conocimientos de pré-requisito concernientes a la hoja de cálculo. Sin embargo, un análisis sucinto muestra que para la gran mayoría de dichos recursos tales prérequisitos son necesarios. De hecho, como se señala en la tesis, la naturaleza misma de los recursos contribuyen a este fenómeno. Más del 90% de las proposiciones de tareas o de sesiones de clase están aisladas y no se inscriben en una progresión matemática y/o de la hoja de cálculo. Entonces, parece difícil que dichas proposiciones consideren de una manera o de otra las cuestiones de instrumentación. Por otra parte, en decalaje con esto que mostraba la literatura de la investigación, el álgebra no es el dominio privilegiado. Sólo el 14% de los recursos están directamente ligados al aprendizaje del álgebra y, de hecho, es la estadística el dominio que domina. Las entrevistas llevadas a cabo con formadores TICE[8] en los IUFM quienes son, de manera privilegiada, los diseñadores de los recursos para los profesores, muestra que esta característica se refleja en sus prácticas. Consideran la hoja de cálculo mucho más eficaz para reforzar la enseñanza de la estadística descriptiva en el programa de secundaria o para el estudio de problemas funcionales, una vez instaladas las bases del lenguaje algebraico. Encuentran mucho más delicado utilizar la hoja de cálculo para fortalecer la introducción al mundo algebraico. Es efectivamente, en este tipo de uso que las cuestiones de génesis instrumental se plantean con una mayor importancia, lo que confirma la ingeniería didáctica exploratoria puesta en marcha con alumnos del séptimo grado en la tesis.

Estos análisis condujeron a M. Haspekian a introducir la noción de distancia instrumental. Se puede conjeturar que una tecnología es interesante para la enseñanza de las matemáticas porque crea una distancia en relación a los ambientes de trabajo previamente existentes, abriendo así nuevas potencialidades. Sin embargo, es necesario que esta distancia se mantenga institucionalmente aceptable para que la tecnología pueda ser eficazmente utilizada. ¿Cómo calificar y cuantíficar esta distancia instrumental? ¿Cómo lograr distinguir sus elementos productores de sus elementos problemáticos? En (Haspekian & Artigue, 2007), nos propusimos estructurar el análisis en torno a dos polos: por un lado la transposición informática (Balacheff, 1994) y por el otro la legitimidad institucional. La transposición informática es en efecto una fuente esencial de distancia instrumental por las transformaciones de los objetos matemáticos, de sus representaciones ostensivas y de los medios de acción sobre ellos que necesariamente produce. Hay sin embargo que notar que la consideración de las normas y valores de la cultura de referencia es necesaria para comprender cuáles pueden ser los efectos didácticos, positivos y negativos, de estas transformaciones.

Si consideramos este primer polo, es claro que, para el universo intermediario entre aritmética y álgebra que crea la hoja de cálculo (puès es aritmética en sus estrategias de resolucion de problemas, pero algebraica en su organización simbólica), la hoja de cálculo crea una distancia instrumental a priori productiva si se compara con la cultura algebraica lápiz-papel que tiende a oponer estos dos mundos. Pero esta productividad depende de la capacidad de la institución y de los profesores para gestionar una distancia instrumental en términos de objetos y lenguajes que puede ser una posible fuente de dificultades cuando debuta la enseñanza del álgebra. Si nos situamos más adelante en la escolaridad, estas dificultades pueden debilitarse y se comprende que la hoja de cálculo puede ser vista como una herramienta performante para permitir a personas, por ejemplo estudiantes en el área de humanidades o adultos en situación profesional, resolver problemas tradicionales del álgebra con una cultura algebraica muy limitada.

Si consideramos el polo de la legitimidad, es interesante comparar los CAS y las hojas de cálculo, puès las segundas se pueden asociar a una cultura algebraica mínima y los primeros a una cultura algebraica bastante elaborada. Por eso se podría pensar que plantean problemas de legitimidad diferentes, y que los CAS se vuelvuen mas facilmente legítimos. Como se explica en el texto ya citado, las cosas son menos sencillas:

"La cultura CAS es mucho más cercana de la cultura algebraica usual que la cultura de la hoja de cálculo puesto que los CAS manipulan formalmente ecuaciones e inecuaciones. Pero dicha cercanía no les da por ende, ni obligatoria, ni fácilmente, la legitimidad, porque lo que ambiciona la enseñanza no

8 TICE: Tecnología de la Información y de la Comunicación para la Enseñanza.

es una práctica instrumentada eficaz; las prácticas instrumentadas deben ayudar a un aprendizaje cuyos valores son definidos esencialmente sin consideración instrumental. Proporcionando herramientas particularmente eficaces para resolver las tareas emblemáticas de la parte introductoria del álgebra, los CAS pueden hacerse cargo del trabajo tradicionalmente devuelto al alumno para permitirle aprender el álgebra. Se plantea entonces la pregunta didáctica delicada de la construcción de una génesis instrumental que sirva a los aprendizajes matemáticos deseados. De este punto de vista, la hoja de cálculo que no permite el cálculo formal puede ser menos perturbadora y por ende menos problemática. Pero se plantean las cuestiones siguientes: ¿Perciben los profesores esta herramienta como pertinente para los aprendizajes algebraicos que ellos quieren desarrollar? ¿O por el contrario, consideran que permitir al estudiante vivir en un mundo intermediario entre la aritmética y el álgebra, puede ser un obstáculo para los cambios de modos de funcionamento matemático deseados? ¿Es ésta una de las razones, por las cuales encontramos en Francia tan pocos recursos para la introducción al álgebra, una de las razones por las cuales prefieren los autores valorar y legitimar la hoja de cálculo en este dominio decendiendo a niveles inferiores problemas de optimización y de funciones típicos del álgebra a nivel bachillerato? ¿Y si encontramos gran cantidad de recursos sobre la estadística, no es porque el domino de la estadística esta particularmente bien adaptado a la hoja de cálculo, la cual ha sido inicialmente concebida para gestionar las tablas de números y efectuar simulaciones numéricas, y tambien porque las prácticas que ésta favorece son coherentes con una enseñanza de la estadística que quiere ser experimental y exploratoria?”

No puedo, en el espacio de esta conferencia, entrar en los detalles del análisis pero espero haber mostrado cómo la aproximación instrumental, por la manera en la que orienta el cuestionamiento didáctico, por las herramientas conceptuales que otorga para sostenerlo, ayuda a abordar la dimensión tecnológica de la enseñanza de las matemáticas, de una manera nueva y a problematizarla, a expresar los aspectos importantes de la integración tecnológica, considerados por mucho tiempo como transparentes. Los desarrollos más recientes de esta aproximación se interesan a nuevos objetos tecnológicos y para terminar esta presentación de la aproximación instrumental, desearía hacerles entrever las nuevas cuestiones que dichos objetos suscitan.

La aproximación instrumental : de los CAS y las hojas de cálculo a los recursos en línea

La aproximación instrumental se interesó primero a las tecnologías que hoy podemos calificar de clásicas: CAS, hojas de cálculo, programas computacionales de geometría dinámica, calculadoras gráficas y simbólicas. No es sino recientemente que dicha aproximación se ha interesado a una nueva categoría de artefactos, cada vez más presentes en entornos educativos: los recursos en línea o tutoriales. En mi equipo de investigación, DIDIREM, este trabajo ha sido particularmente desarrollado en el marco del proyecto regional evocado al principio de este texto. Este cambio tecnológico plantea las preguntas de instrumentalización de manera renovada:

¿Qué significa para un estudiante transformar tales recursos tutoriales en un instrumento de aprendizaje y qué tipo de instrumentos se obtienen?

¿Qué significa para un profesor transformar tales recursos tutoriales en un instrumento profesional y qué resulta?

¿Qué tienen en común estas génesis instrumentales con éstas que hemos estudiado desde hace ya más de una década? ¿En qué se diferencían? ¿Y porqué? ¿Qué nuevos fenómenos didácticos resultan de estas diferencias? ¿Cómo gestionarlos?

Los resultados que hemos obtenido hasta ahora son todavía muy fragmentarios, pero algunas regularidades comienzan a emerger, y las diferencias con lo que ya conocíamos, son evidentes. La aproximación instrumental, hasta aquí, había centrado su atención en los objetos matemáticos y en las representaciones ostensivas asociadas, buscando comprender las dimensiones productivas y problemáticas de la transposición informática. Cuando se consideran tutoriales y se busca interpretar en términos de génesis instrumental las observaciones realizadas con alumnos, no son estos efectos de la transposición informática que parecen los más importantes, sino aprendizajes instrumentales de tipo táctico o relativos al contrato didáctico. Esto tendería a confirmar que se produce, como lo conjetura L. Souchard (Souchard, 2006), aún si se queda implícito, un desdoblamiento institucional y qué lo mas visible en las génesis instrumentales, es la adaptación de los alumnos a este desdoblamiento. Del punto de vista del profesor, la génesis experimental supone en este caso por lo menos una reorganización de las praxeologías didácticas. ¿En qué momento(s) del estudio va elegir por ejemplo utilizar tal herramienta, cómo va a organizar y a guiar el trabajo de los alumnos en clase o fuera de clase, cuáles reglas va a instaurar en relación a los usos? ¿Qué estatus institucional va a darse a estos usos? En el proyecto regional, todo esto ha sido dejado a la elección de los profesores sin que se dispongan de referentes para anticipar los posibles efectos de sus decisiones. Además de esto, y no de manera independiente, se plantea la cuestión de las praxeologías matemáticas implementadas en el artefacto y de su relación con éstas sostenidas por la institución escolar, de las diferencias eventuales y de su gestión.

Lo anterior constituye un nuevo espacio de estudio y de preguntas que se abre a la aproximación instrumental, obligandónos a diferenciar de mejor manera las génesis instrumentales del profesor y del alumno, a hacer intervenir en su análisis nuevas dimensiones ligadas al hecho de que estas tecnologías implementan no sólo interacciones matemáticas sino también interacciones didácticas. Así, el análisis de las distancias instrumentales y de sus efectos potenciales también se encuentra renovado (Artigue & al., 2006).

Conclusión

En esta conferencia en la cual me interrogué sobre las tecnologías informáticas y la enseñanza de las matemáticas, desée mostrar lo que la aproximación instrumental que se ha desarrollado en la última década podía aportar a la reflexión didáctica. Haciendo tal elección, necesariamente he mostrado una visión muy parcial de los avances de la investigación en este dominio de la tecnología, si se considera la evolución de las problemáticas, de los marcos teóricos, del desarrollo tecnológico o de las prácticas efectivas. La conferencia de Hanoi, asociada al estudio ICMI en curso ha dado una visión mucho más amplia y espero que la obra que resultará de este estudio y deberia ser publicada en 2008, permitirá a un gran público, más allá del sólo público de los investigadores en Matemática Educativa, construirse una visión clara de los conocimientos y del *saber-hacer* con que disponemos hoy, para abordar estas cuestiones tecnológicas complejas y sin cese renovadas.

Agradecimiento: Agradezco mucho a Avenilde Romo Vazquez quien se encargó de la traducción de este texto.

Referencias

Artigue M & Rogalski M. (1990). Enseigner autrement les équations différentielles en DEUG. In Commission interIREM Université (ed), *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année*, p. 113-128. Lyon : LIRDIS.

Artigue M. (1991). Analyse de processus d'enseignement en environnement informatique. *Petit X*, n°26, 5-27.

Artigue M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view : cognitive difficulties and teaching practices. In, E. Dubinski & G. Harel (eds), *The concept of function – aspects of epistemology and pedagogy,* p. 109-132. MAA Notes n°25. Mathematical Association of America.

Artigue M. (1997). Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage, *Educational Studies in Mathematics,* n°33, 133-169.

Artigue M. (1998). Teacher training as a key issue for the integration of computer technologies, in D.Tinsley & D.C.Johnson (eds), *Information and Communication Technologies in School Mathematics,* 121-130, Chapman & Hall, London.

Artigue M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning,* n°7,245-274.

Artigue M. y Grupo TICE IREM Paris 7 (à paraître). L'utilisation de ressources en ligne pour l'enseignement des mathématiques au lycée : du suivi d'une expérimentation régionale à un objet de recherche. In N. Bednarz & al. (Eds.), *Actes du Colloque EMF 2006,* Université de Sherbrooke.

Balacheff N. (1994). Didactique et Intelligence Artificielle, *Recherches en didactique des mathématiques*, 1994, p. 9-42, La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.

Bednarz N., Kieran C., Lee L. (Eds) (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching;* 1996. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Brousseau G. (1997). *Theory of Didactical Situations.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 77-111.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en anthropologie du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19/2, 221-265.

Chevallard Y. (2002). Organiser l'étude. In J.L. Dorier y al. (Eds), *Actes de la Xème Ecole d'été de didactique des mathématiques,* pp. 3-22 & 41-56. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Cornu B., Ralston A. (eds) (1992). *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching.* Science and Technology Education. Document Series 44. Paris: UNESCO.

Defouad B. (2000). *Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation d'une calculatrice symbolique en classe de première S.* Tesis de Doctorado. Université Paris 7.

Gascón J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/1, 7-37.

D. Guin, L. Trouche (Eds) (2002). *L'instrumentation de calculatrices symboliques : un problème didactique.* Grenoble : La Pensée Sauvage (version inglesa publicada por Kluwer en 2004).

Haspekian, M. (2005a). *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques, Etude du cas des tableurs.* Tesis de doctorado, Université Denis Diderot, Paris 7.

Haspekian, M. (2005b). An "instrumental approach" to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol 10, n°2, 2005, p.109-141.

Haspekian M., Artigue M. (2007). L'intégration d'artefacts informatiques professionnels à l'enseignement dans une perspective instrumentale : le cas des tableurs. In, M. Baron, D. Guin, L. Trouche (Eds), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage*, pp.37-63. Paris : Editions Hermès.

Kieran C., Yerushalmy M. (2004). Research on the role of technological environments in algebra learning and teaching. In, K. Stacey, H. Chick and M. Kendal (eds), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study*, pp. 95-152. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Laborde C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabry-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6/3, 283-317.

Laborde C., Kynigos C., Hollebrands K., Strässer R., Teaching and Learning Geometry with Technology, in A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, p. 275-304, 2006, Rotterdam: Sense Publishers.

Rabardel P. (1995). *L'homme et les outils contemporains.* Paris : A. Colin.

Souchard L. (à paraître). L'analyse de logiciels tutoriels pour l'enseignement des mathématiques. In N. Bednarz & al. (Eds.), *Actes du Colloque EMF 2006,* Université de Sherbrooke.

Vérillon P., Rabardel P. (1995). Cognition and artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education* vol.X(1), 1995, p.77-101.

Wilson K., Ainley J., Bills L. (2005). Spreadsheets, pedagogic strategies and the evolution of meaning for variable. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.) *Proceedings of the twenty-ninth conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4, 2005, p. 321-328. Melbourne, Australia.

Parte 2

Ideas potentes e investigaciones en educación matemática

Tópico 1

Análisis del currículum y propuestas para la instrucción de las matemáticas

La resolución de problemas matemáticos y el empleo de herramientas computacionales

Luz Manuel Santos Trigo
msantos@cinvestav.mx

Resumen
Las propuestas recientes del currículum matemático sugieren que los estudiantes utilicen herramientas computacionales en sus experiencias de aprendizaje. Sin embargo, ante el notable desarrollo de la tecnología y el reconocimiento de que distintos instrumentos pueden ofrecer diferentes caminos y oportunidades para los estudiantes en los procesos de comprender y resolver problemas matemáticos, se hace necesario investigar el potencial que ofrecen algunas de esas herramientas en el aprendizaje de los estudiantes. ¿Qué tipo de representaciones y formas de razonamiento muestran los estudiantes cuando emplean herramientas computacionales en el estudio de las matemáticas? ¿Cómo se caracterizan los procesos que exhiben los estudiantes al transformar artefactos como Excel, el software dinámico o la calculadora simbólica en herramientas de aprendizaje y de resolución de problemas? Estas preguntas orientan la discusión sobre la relevancia de utilizar distintas herramientas computacionales y proporcionan información relevante sobre las transformaciones curriculares y enfoques de instrucción que el empleo de tales herramientas demandan.

Summary
Recent curriculum proposals recognize the importance for students to use diverse computational tools; however different tools may offer distinct opportunities for students to represent and solve mathematical problems. Thus, it is important to investigate not only the types of tools that help students construct mathematical knowledge; but also to document the type of reasoning that students develop as a result of using those tools. What types of representations and ways of reasoning do teachers and students show when they incorporate the systematic use of computational tools in problem solving activities? This question is used to organize and discuss elements of a framework to address issues related to the use of those tools in instructional practices.

Introducción

¿Qué conocimiento matemático se debe estudiar en el nivel preuniversitario? ¿Qué procesos del pensamiento matemático[1] deben desarrollar los estudiantes en ese nivel? ¿Qué significa pensar matemáticamente? ¿Cómo organizar o estructurar una propuesta curricular? ¿Qué escenarios de instrucción favorecen o promueven la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes? ¿Cuál es el papel del uso de distintas herramientas computacionales en la comprensión y resolución de problemas? ¿Qué significa que los estudiantes aprendan o construyan el conocimiento matemático? Éstas son algunas preguntas que han guiado el desarrollo de la educación matemática en los veinte años recientes y han inspirado la formulación de programas de investigación sobre aspectos que involucran el desarrollo de marcos conceptuales que caractericen los procesos de aprendizaje de los estudiantes, la resolución de problemas, el uso de la tecnología y las propuestas curriculares (Schoenfeld, 1985; Santos, 2007; Lehrer & Chazan, 1998; Kelly & Lesh, 2001; English, 2002).

[1] El consejo nacional de profesores de matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés) identifica a la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones y las representaciones como los procesos inherentes del quehacer de las matemáticas.

Entre las reflexiones importantes alrededor de los temas de investigación en la educación matemática se destaca el reconocimiento de que aprender matemáticas va más allá de que el estudiante domine un conjunto de reglas, algoritmos, fórmulas o procedimientos para resolver listas de problemas rutinarios. Se resalta que durante el proceso de aprender matemáticas, los estudiantes necesitan desarrollar una disposición y forma de pensar consistente con la práctica o el quehacer de la disciplina.

En este contexto, los estudiantes constantemente buscan y examinan diferentes tipos de relaciones, plantean conjeturas, utilizan distintos sistemas de representación, establecen conexiones, emplean varios argumentos y comunican sus resultados (Santos y Vargas, 2003). Con esta visión, las reformas recientes sobre la educación preuniversitaria sugieren estructurar el currículum alrededor de (i) líneas de contenidos que comprenden el desarrollo del pensamiento numérico, algebraico, geométrico, y aspectos relacionados con la actividad de medir, ordenar y el manejo de información (estadística); y (ii) de procesos inherentes del quehacer de la disciplina donde se destaca la resolución de problemas, el razonamiento matemático, las conexiones matemáticas, el empleo de representaciones y la comunicación de resultados (NCTM, 2000). Además, se reconoce que un factor importante en el crecimiento y evolución de las matemáticas y el aprendizaje es el poder que ofrece el empleo de distintas herramientas tecnológicas en la resolución de problemas y comprensión de las ideas matemáticas. De hecho, el NCTM (2000) identifica el uso de la tecnología como un principio que le debe dar soporte a las propuestas curriculares:

Las computadoras y las calculadoras cambian lo que los estudiantes pueden hacer con las representaciones convencionales y expanden el conjunto de representaciones con las que pueden trabajar. Por ejemplo, los estudiantes pueden mover, invertir, reducir, visualizar relaciones a través de programas de utilidades o software dinámico. … pueden manipular expresiones, e investigar conjuntos complejos de datos usando hojas de cálculo. Cuando los estudiantes aprenden a utilizar estas nuevas herramientas versátiles, pueden también analizar las formas en que algunas representaciones que se realizan empleando la tecnología difieren de las representaciones convencionales (p.68-69).

Estos componentes apuntan a una visión de las matemáticas que promueve el estudio de diversas líneas del pensamiento matemático desde la educación básica y rompe con el esquema de proponer un arreglo por asignaturas (aritmética, álgebra, geometría, trigonometría, cálculo, etc.). Es decir, los estudiantes constantemente reflexionan sobre conceptos e ideas fundamentales que involucran variación, medición, estimación, ponderación, comparación, búsqueda de patrones, lugares geométricos, y comunicación de resultados durante todo el periodo de la enseñanza preuniversitaria.

Así, por ejemplo las ideas de variación o cambio que aparecen en las experiencias de los estudiantes a nivel primaria, eventualmente se transforman en las ideas poderosas del cálculo (Camacho & Santos, 2004a). La actividad de identificar y describir el camino o huella que dejan partes de una figura al mover ciertos componentes dentro de una configuración llega a ser una estrategia importante para distinguir y analizar propiedades de lugares geométricos que aparecen en el estudio de la geometría analítica.

En esta perspectiva destaca la necesidad de conectar las líneas de contenidos con los procesos del quehacer de la disciplina y resulta importante investigar el papel e impacto del uso de herramientas tecnológicas en el aprendizaje de los estudiantes.

Es importante reconocer que existen varios tipos de artefactos tecnológicos que el estudiante puede utilizar durante sus experiencias de aprendizaje. Cada artefacto puede ofrecer distintas oportunidades a los estudiantes para representar, identificar, examinar y comunicar resultados matemáticos (Santos, 2003). Por ejemplo, el empleo de las hojas de cálculo "Excel" puede resultar una herramienta poderosa para que los estudiantes representen información en forma tabular y gráfica que permite investigar patrones de parámetros asociados a un fenómeno o situación. Además, es una herramienta eficiente para realizar cálculos u operaciones asociados al comportamiento de problemas o situaciones particulares.

Los modelos de explicación que los estudiantes pueden desarrollar a partir del uso de esta herramientas se basan en representaciones discretas del fenómeno. Un ambiente donde se promueva el empleo de calculadoras simbólicas puede ayudar a los estudiantes a explorar el comportamiento de expresiones generales a partir de la consideración y análisis de casos particulares o encontrar una expresión que describa el patrón o comportamiento de una relación numérica o algebraica.

Con la ayuda de la calculadora los estudiantes pueden también analizar la conexión entre las representaciones algebraicas de ciertos fenómenos y sus gráficas correspondientes (Moreno & Santos, 2004). Aquí, el uso de la herramienta propicia que los estudiantes construyan modelos de explicación basados en representaciones continuas de la situación o problema.

> *El software dinámico resulta una herramienta útil en la construcción de representaciones "exactas" de entidades geométricas (puntos, segmentos, rectas, círculos, polígonos, medianas, etc.) y permite visualizar de manera precisa el comportamiento de partes de cierta configuración o representación del problema (Santos, 2004). Aquí los estudiantes tienen la oportunidad de mover elementos de estas configuraciones y observar cambios o invariantes en el proceso de análisis del problema. La observación de invariantes en una representación resulta fundamental en el desarrollo de conjeturas y en el proceso de argumentación y comunicación de esas conjeturas por parte del estudiante.*

En particular, el uso de software dinámico como Cabri Géomètre, Sketchpad o Geometry Inventor ofrece una herramienta poderosa para examinar relaciones geométricas desde diversos ángulos (Goldenberg & Cuoco,1998). Por ejemplo, resulta difícil imaginar el lugar geométrico que describe un punto una línea u otro objeto geométrico cuando se mueve dentro de una configuración. El uso de este tipo de software permite fácilmente trazar el camino que deja parte de la configuración (punto, segmento, triangulo, etc.) cuando se mueve con respecto a otros elementos dentro de esa misma configuración y cómo consecuencia ofrece la oportunidad al estudiante de analizar y describir tal lugar geométrico en términos de propiedades. Además, los estudiantes pueden realizar variaciones precisas e instantáneas de sus propias representaciones visuales que se producen bajo el uso de este tipo de software. Esto les permite realizar constantes exploraciones y probar sus ideas matemáticas y conjeturas en una forma visual, eficiente y dinámica. Arcavi & Hadas (2000) afirman que:

Los ambientes dinámicos no sólo permite a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y visualizarlas, sino que también les permite transformar esas construcciones en tiempo real. Este dinamismo puede contribuir en la formación de hábitos para transformar (mentalmente o por medio de una herramienta) una instancia particular, para estudiar variaciones, invariantes visuales, y posiblemente proveer bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones (pp. 26).

Así, el empleo del software puede funcionar como una herramienta de gran utilidad para que los estudiantes participen en procesos de búsqueda y formulación de conjeturas o relaciones y argumentos o justificaciones matemáticas (Santos & Espinosa, 2002). Sin embargo, ante la variedad de artefactos disponibles es necesario identificar no sólo las ventajas que le puedan brindar al estudiante durante la comprensión de las ideas matemáticas y la resolución de problemas, sino también caracterizar las representaciones, estrategias y formas de razonamiento que exhiban los estudiantes como resultado de usar tales herramientas en sus experiencias de aprendizaje.

Un ejemplo sobre el empleo del software dinámico

Se presenta un problema donde se muestra que el uso de la herramienta puede ayudar a los estudiantes a construir una representación que permita identificar, explorar propiedades matemáticas y buscar extensiones y formas de sustentarlas. Se destacan fases importantes asociadas con el proceso de resolución.

El problema

Sea Q un punto de la función $f(x)=\frac{1}{x}$ *(en el primer cuadrante). Una recta tangente a la gráfica que pasa por el punto Q genera (con los ejes) un triángulo rectángulo. ¿Cuáles deben ser las coordenadas del punto Q para que la longitud de la hipotenusa sea máxima o mínima?* (Arcavi, 2005, p.44).

Representación y comprensión del problema

¿Cómo representar la función $f(x)=\frac{1}{x}$ gráficamente? ¿Cuál es el dominio de $f(x)$? ¿Cómo representar y relacionar los elementos del dominio con los valores de la función? Este tipo de preguntas resultan relevantes para que los estudiantes puedan construir una representación gráfica o geométrica del problema. Con el uso del software dinámico los estudiantes pueden situar sobre el sistema Cartesiano el punto P sobre el eje X y encontrar el valor correspondiente $\frac{1}{x}$ sobre el eje Y para determinar el punto Q (véase figura 1).

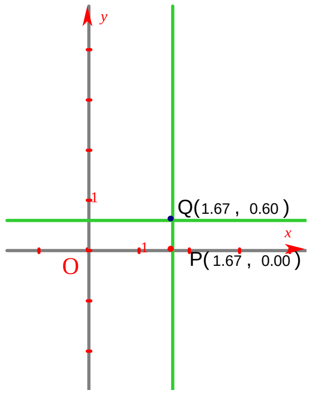


Figura 1. Representación del punto Q (x, 1/x) sobre el plano

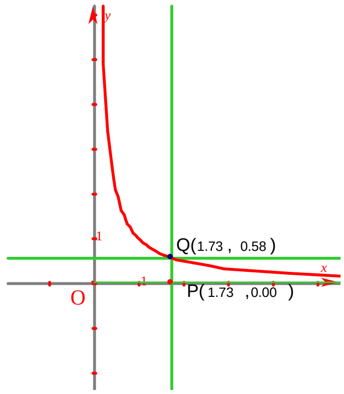


Figura 2: El lugar geométrico de Q cuando P se mueve sobre el eje X

En Camacho y Santos (2004a) se muestra que un aspecto importante en la representación gráfica de objetos matemáticos y relaciones entre ellos es el uso de cierta notación que permita distinguir y comunicar las propiedades y comportamientos de esos objetos. Si nos planteamos cuál es el lugar geométrico del punto Q cuando el punto P se mueve a lo largo del eje X, el software permite encontrar el camino que deja el punto Q (véase figura 2).

Búsqueda de relaciones

Construyamos ahora la recta PR, la cual forma con los ejes un triángulo rectángulo. Se observa que al mover el punto P sobre el eje X, la inclinación de la recta PR con respecto al eje X cambia (véase figura 3). ¿Cómo se puede medir esa inclinación? ¿Cómo se determina la pendiente de la recta PR? ¿Existe alguna relación entre la recta PR y la recta tangente $f(x)$ en el punto Q? ¿Nos ayudará conocer el significado geométrico del concepto de derivada puntual, es decir, interpretar la derivada de $f(x)$ en el punto Q?

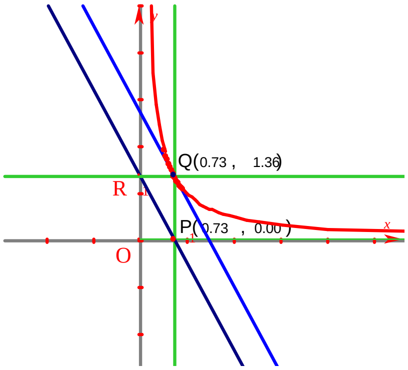


Figura 3: Trazo de la línea tangente a $f(x)$ como la paralela a PR que pasa por Q.

Se observa que para cualquier posición de $P(x,0)$, se tendrá que las coordenadas del punto R serán $(0,\frac{1}{x})$ y la pendiente de la recta PR será $\frac{-1}{x^2}$. Esta pendiente corresponde a la de la recta tangente a $f(x)=\frac{1}{x}$ en el punto $Q(x,\frac{1}{x})$. Esto es porque $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ (la interpretación geométrica de la derivada). Así, para trazar la recta tangente a $f(x)$ en el punto Q, es suficiente trazar la recta paralela a la recta PR que pase por el punto Q (véase figura 3).

Justificando relaciones

Las representaciones dinámicas del problema permiten identificar invariantes o relaciones al mover objetos dentro de la representación. ¿Existe alguna relación entre los puntos O, R, y S? (véase figura 4).

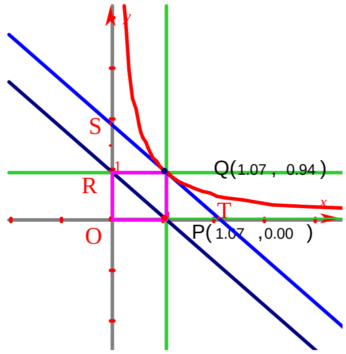


Figura 4: ¿Qué relación existe entre los puntos O, R, y S?

Aplicando criterios de congruencia de triángulos se observa que los triángulos RQS, OPR y PTQ son congruentes y por lo tanto R y P son puntos medios de los segmentos SO y OT respectivamente. Con esta información se tiene que ST = 2RP, que se sustenta aplicando el teorema “un triángulo STO, si R y P son puntos medios de los lados SO y TO respectivamente, entonces la recta PR que pasa por los puntos medios es paralela a la recta ST y se cumple que la longitud del segmento RP es la mitad de la longitud del lado del triangulo ST”.

Examinado las variaciones gráficamente

Se observa que cuando el punto P se mueve sobre el eje X, la longitud del segmento PR cambia. ¿Cómo varía la longitud de la diagonal PR del rectángulo OPQR? ¿En qué posición alcanza un valor mínimo? Con la ayuda del software, se puede representar la relación entre la posición del punto P y el valor correspondiente de la longitud de la diagonal (véase figura 5).

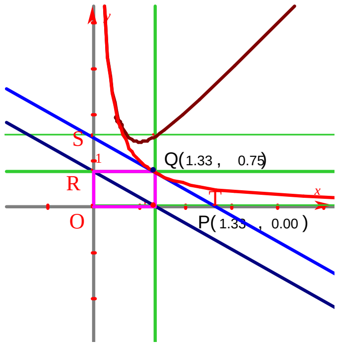


Figura 5: Representación gráfica de la variación de PR cuando P se mueve a lo largo del eje X.

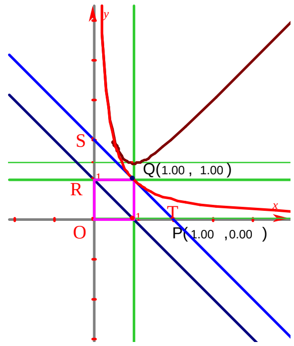


Figura 6: ¿Cuándo la longitud del segmento PR es mínima?

Se observa además que, al mover el punto P sobre el eje X en una posición el rectángulo OPQR, se convierte en cuadrado y es en esa posición donde la longitud de la diagonal es mínima. Es decir, cuando Q tiene coordenadas $Q(1,1)$ la longitud de la diagonal es mínima (véase figura 6).

Conexiones

Se observa también, que para cualquier posición del punto Q, el área del rectángulo OPQR es siempre una unidad, es decir el área del rectángulo que se forma para cualquier posición de Q es constante. Algebraicamente se tiene que las dimensiones del rectángulo se pueden expresar como x y $\frac{1}{x}$ y por lo tanto el área del rectángulo OPQR será $(x)\left(\frac{1}{x}\right)=1$. También se cumplirá que el área del rectángulo OTUS siempre será 4 unidades cuadradas para cualquier posición del punto Q (véase figura 7).

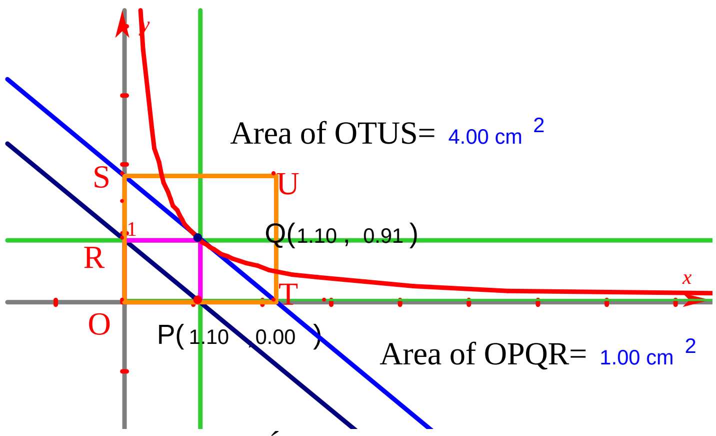


Figura 7: Área del cuadrado OTUS

La relación entre las áreas de las figuras que se forman al trazar la recta tangente que pasa por un punto Q de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ se puede expresar de la forma siguiente:

Si Q es un punto de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *en el primer cuadrante). La recta tangente a la función que pasa por Q corta a los ejes y genera un triángulo rectángulo. Para cada posición de Q el triángulo rectángulo generado tiene un área de dos unidades cuadradas.*

¿Qué ocurre con el área de esos triángulos cuando se considera la función $f(x)=\dfrac{n}{x}$ para $n=2,3,\ldots$?

Utilizando el software de geometría dinámica se puede explorar algunos casos particulares y observar el comportamiento del área de los triángulos que se forman. La figura 8 muestra el valor del área que se forma en el primer cuadrante cuando la función es $f(x)=\dfrac{3}{x}$ y al analizar otros casos (lo que se realiza fácilmente con el uso del software) es inmediato conjeturar que:

El área del triángulo que se forma tiene el doble del área del rectángulo que se forma al trazar la rectas perpendiculares desde el punto Q a ambos ejes.

Esta conjetura puede sustentarse al observar que las coordenadas del punto Q en $f(x)=\dfrac{n}{x}$ son $Q\left(x,\dfrac{n}{x}\right)$ y que el área correspondiente del rectángulo que se forma al trazar rectas perpendiculares desde Q es $x\left(\dfrac{n}{x}\right)=n$. Otra vez, el empleo del software genera información valiosa para analizar el caso general.

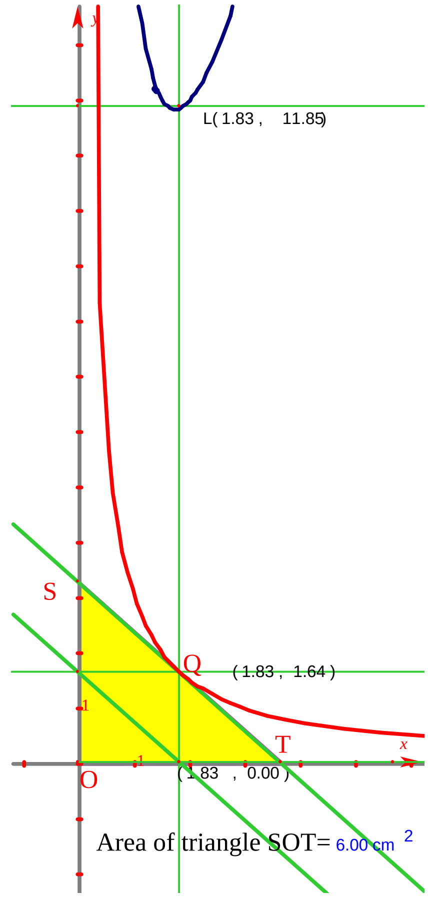


Figura 8: ¿Cuál es el área del triángulo OTS cuando $f(x)=\frac{3}{x}$?

Hemos visto a lo largo del desarrollo de esta segunda actividad, que en el camino de representar el problema en forma dinámica, utilizando el software, aparecen resultados importantes: la relación entre la pendiente de la recta tangente a la hipérbola $y=\frac{1}{x}$ y la pendiente de la recta PR. Con esta información, el trazo de la recta tangente a la función en Q es inmediato. Se constata además que la representación del problema ofrece la oportunidad de buscar y explorar una serie de relaciones matemáticas.

Sobre los marcos conceptuales y las herramientas computacionales

Interesa discutir estudios en educación matemática que han documentado el desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes bajo la perspectiva de la resolución de problemas. En particular las preguntas relevantes que le dan estructura a esta revisión incluyen ¿Cómo promover un ambiente de aprendizaje en el salón de clases donde los estudiantes tengan oportunidad de revelar sus ideas y participar en el proceso de construcción del conocimiento matemático? ¿Cómo caracterizar y explicar el desarrollo del aprendizaje de los estudiantes? ¿Qué significa pensar matemáticamente? ¿Qué es la resolución de problemas y cómo se relaciona con el aprendizaje de los estudiantes?

En este contexto, se identifican los temas y resultados importantes que han orientado el desarrollo de la investigación en el área de la resolución de problemas como propuesta para que los estudiantes aprendan matemáticas. En los últimos 30 años la resolución de problemas ha sido reconocida como una actividad fundamental en el aprendizaje de los estudiantes. Numerosos proyectos de investigación en esta área han enfocado la atención sobre temas donde se destacan:

I. El quehacer matemático y su relación con el aprendizaje.
II. Las creencias de los maestros y alumnos acerca de las matemáticas y en particular acerca de la resolución de problemas.
III. El desarrollo de marcos conceptuales que den cuenta de las competencias de los estudiantes en la resolución de problema.

I. El quehacer matemático y su relación con el aprendizaje

Una meta importante en la instrucción matemática es crear un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes tengan oportunidad de participar activamente en el proceso de construcción del conocimiento matemático.

Así, caracterizar lo que significa aprender la disciplina es un aspecto fundamental que conlleva necesariamente a reflexionar sobre las ideas y conceptos fundamentales de la disciplina y el desarrollo del quehacer matemático. Por ejemplo, el trabajo de Schoenfeld (1985) documenta las cualidades importantes del quehacer de la disciplina y su relación con el aprendizaje de los estudiantes. En particular, reconoce que para que los estudiantes vean a las matemáticas como una actividad con sentido, éstos necesitan aprenderla en un salón de clase que refleje un *microcosmos* de la cultura matemática. Es decir, que se promuevan los valores propios de la disciplina en las actividades de aprendizaje del salón de clases.

Romberg y Kaput (1999) en la misma dirección plantean que sin importar el contenido específico, el propósito de enseñar matemáticas puede ser descrito, en términos prácticos, como enseñarles a los estudiantes a emplear las matemáticas, a construir y comunicar ideas, usarlas como una herramienta analítica poderosa para resolver problemas y apreciar y describir los patrones que se encuentran en diversos contextos.

Devlin (1994) identifica a las matemáticas como la ciencia de los patrones:“Es una forma de ver al mundo físico, biológico y sociológico que habitamos y el mundo de nuestras mentes y pensamientos” (p. 6).

Así, el poder matemático consiste no solamente en detectar, construir, inventar, entender, o manipular patrones; sino también en ser capaz de comunicar esos patrones a otros. En esta dirección, el quehacer matemático se puede caracterizar como la actividad de encontrar y examinar patrones asociados o productos de esos mundos. Estos patrones pueden ser numéricos, entre figuras o formas, patrones de movimiento y en general patrones de comportamiento de relaciones. Además, los patrones pueden ser reales o imaginarios, visuales o mentales, dinámicos o estáticos, cualitativos o cuantitativos, de interés utilitario o de carácter recreativo. El referente de estudio de estos patrones puede ser el mundo que nos rodea o una reflexión pura de la mente del individuo. Santos (2002a; 2004c) muestra que el uso de tecnología resulta una herramienta útil en la búsqueda de distintos tipos de patrones.

II. Las creencias de los maestros y alumnos acerca de las matemáticas y en particular acerca de la resolución de problemas.

Un aspecto notable en el aprendizaje de los estudiantes es que tengan oportunidad de revelar sus ideas y formas de razonamiento al interactuar con distintas situaciones o problemas. Es decir, el conocimiento previo que traen los estudiantes al escenario de instrucción, donde se promueve la resolución de problemas, desempeña un papel crucial en términos de lo que se valora en el proceso de resolución y entendimiento de los problemas.

Es común que los estudiantes crean que poseen recursos limitados que no les permite pensar distintas formas de solución o proponer preguntas relevantes que les permita investigar conexiones entre distintas representaciones (Schoenfeld, 1998). Es aquí donde el ambiente de instrucción debe ofrecer oportunidades para que los estudiantes mismos reconozcan que es posible que participen activamente no sólo en los procesos de reflexión acerca del uso de distintas representaciones y métodos de solución, sino también en la actividad misma de proponer problemas (Camacho, et al, 2004).

En esta dirección, los estudiantes deben reconocer que las matemáticas son más que estudiar un conjunto de reglas, definiciones y procedimientos que necesitan aplicar en la solución de algunos problemas. Esto incluye aceptar que es una disciplina en la que es fundamental plantear conjeturas, utilizar una variedad de representaciones, buscar diferentes métodos de solución, plantear preguntas y emplear distintos argumentos para comunicar soluciones o resultados (Santos, 2007). En este sentido, las creencias tanto de los profesores como de los alumnos deben reflejar los aspectos que se muestran en el quehacer de la disciplina (Santos, 2004).

III. El desarrollo de marcos conceptuales que den cuenta de las competencias de los estudiantes en la resolución de problema.

Lester (2005) argumenta que un marco teórico es una estructura básica de ideas (abstracciones y relaciones) que sirven como base [para justificar y explicar] un fenómeno a investigar. Estas abstracciones y las (supuestas) interrelaciones entre ellas representan [y ayudan a explicar] los aspectos relevantes del fenómeno [de cómo es estudiado] y determinado dentro de la perspectiva de investigación que ha sido adoptada (p. 458).

¿Qué aspectos fundamentales dan cuenta del quehacer de la disciplina?¿Cuáles son las dimensiones del pensamiento matemático? Estas preguntas han sido parte de la agenda de investigación en la resolución de problemas. En particular, el programa de investigación desarrollado por Alan Schoenfeld durante la época de los noventa aporta información valiosa acerca de lo que caracteriza el proceso de resolver problemas. Schoenfeld identifica cuatro categorías importantes que caracterizan el proceso de aprender matemáticas: (i) los recursos básicos que comprende el entendimiento de definiciones, hechos, reglas y procedimientos junto con las distintas formas de accederlos; (ii) las estrategias heurísticas, que incluyen el empleo de diagramas, el análisis de casos particulares, el relajamiento de condiciones y el planteamiento de submetas; (iii) las estrategias de monitoreo que permiten al estudiante evaluar y controlar constantemente el proceso de solución de problemas; y (iv) las creencias y en general las concepciones que muestren los estudiantes acerca de las matemáticas y en particular hacia la resolución de problemas.

Es importante mencionar que la abundante literatura incluye la construcción de marcos teóricos que dan cuenta de los aspectos esenciales alrededor de la resolución de problemas y además sugiere algunas ideas para implementar la actividad de resolución de problemas en el salón de clase (Whimbey & Lochhead, 1976; Schoenfeld, 1985, 1998; Curcio, 1987; Silver, 1987; Charles, & Silver, 1988; NCTM, 2000, Santos, 2007, 2001, 2003, 2004; Perkins, 1995; PMENA, 2001, 2002, 2003, 2004). Sin embargo, también es importante reconocer que la mayoría de los trabajos publicados en los últimos 10 años se basan en investigar las competencias de los estudiantes para trabajar problemas o actividades que incluían fundamentalmente el empleo de lápiz y papel. Por ejemplo, en el programa de investigación de Alan Schoenfeld se explora y documenta el trabajo que muestran estudiantes y matemáticos al interactuar con conjuntos de problemas no rutinarios (Schoenfeld,1998). En los procesos de solución de esos problemas no incluye el uso de herramientas tecnológicas. Es decir, los resultados son producto del trabajo de los participantes basado exclusivamente en el uso de lápiz y papel.

¿Qué tipo de transformaciones y ajustes se requieren en los marcos teóricos cuando se incorporan herramientas digitales en el estudio de las matemáticas? Este tipo de preguntas orientan la discusión sobre la importancia de examinar constantemente los principios, métodos y resultados de la investigación en educación matemática. En particular, se reconoce que el empleo de distintas herramientas digitales influye directamente en la forma de desarrollar y comprender las ideas matemáticas. Artigue (2002) afirma que el uso de herramientas computacionales en la práctica matemática ha cambiado no solamente los métodos que se emplean en la disciplina, sino también los temas y problemas que se investigan. De manera similar, el empleo sistemático de este tipo de herramientas ofrece a los estudiantes distintas oportunidades para aprender y reconstruir el conocimiento matemático (Heid, 2002).

En esta línea de ideas, resulta importante documentar y analizar los diferentes elementos del razonamiento matemático que desarrollan y exhiben profesores y estudiantes al desarrollar actividades de aprendizaje en escenarios de resolución de problemas que promuevan el uso sistemático de distintas herramientas digitales. Lester (2005) indica que cuando un investigador decide utilizar un marco teórico particular también decide seguir la agenda pragmática de investigación reconocida en esa teoría o marco teórico. Es decir, el investigador acepta y utiliza las convenciones y formas de argumentación y experimentación asociadas con ese marco.

Santos y Barrera (2007) proponen evaluar los principios y métodos asociados con los marcos teóricos a partir de analizar temas alrededor de:

la visión del conocimiento matemático (¿qué significa desarrollar o construir y comprender matemáticas?),

el tipo de problemas que promueven el aprendizaje de la disciplina (¿qué es lo que caracteriza un problema? ¿qué tipo de actividades promueven el aprendizaje?),

las formas de explicar el aprendizaje de los estudiantes (¿cómo se construye o aprende el conocimiento matemático?, ¿cómo generan o producen nuevos conocimientos los estudiantes?).

las prácticas de instrucción que promueven el aprendizaje de los estudiantes (¿qué formas de interacción y desarrollo de actividades fomentan la construcción y comprensión del conocimiento matemático de los estudiantes?) y

las formas de evaluación del conocimiento matemático (¿cómo evaluar las competencias de los estudiantes?

Es decir, se reconoce la importancia de incorporar en la agenda de investigación en educación matemática aspectos o temas directamente relacionados con el análisis de los marcos teóricos relevantes que sustentan distintos programas de investigación. En este contexto, se hace necesario desarrollar formas y herramientas que nos permitan evaluar y contrastar la relevancia y pertinencia en el uso de esos marcos de investigación.

Comentarios finales

Es sabido que una de las metas más importantes en la instrucción matemática, es la de propiciar un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes tengan oportunidad de participar directamente en los procesos de construcción y demostración de relaciones matemáticas. El empleo sistemático de algunas herramientas puede ayudar a los estudiantes a utilizar representaciones de objetos matemáticos que faciliten la búsqueda de relaciones. Para conseguir esto, es necesario que los profesores conozcan el potencial de esas herramientas y sean capaces de identificar diferentes estrategias que les permitan utilizarlas en sus prácticas de enseñanza.

Un elemento importante que ayuda a la selección de las herramientas a utilizar en la instrucción, se relaciona con las formas de razonamiento y las estrategias de solución que se surgen en la resolución de problemas con la ayuda de la tecnología. Como consecuencia de lo anterior, es necesario que los profesores reflexionen y exploren el potencial de las herramientas. Para orientar el desarrollo de su práctica profesional, los profesores deben hallar respuestas a cuestiones tales como: ¿cuáles son los aspectos del quehacer matemático que resultan significativos al emplear el software dinámico en la resolución de problemas?, ¿qué tipo de representaciones y formas de razonamiento emergen en los procesos de resolución de problemas con el uso del software dinámico?, ¿qué relación existe entre los acercamientos o procesos de solución que se realizan con lápiz y papel y aquellos donde se utiliza el software dinámico?

En este artículo se ha intentado mostrar el potencial del software dinámico en la solución de dos tipos de problemas o actividades con características esencialmente distintas. Se destaca que el uso del software de geometría dinámica permite construir una representación del problema en términos de las propiedades de los objetos del problema. En el ejemplo se muestra que las facilidades del software permiten representar gráficamente la función como un lugar geométrico para así establecer conexiones entre la pendiente de una de las diagonales del rectángulo que se forma al proyectar el punto Q sobre los ejes coordenados y la pendiente de la recta tangente de la función en el punto Q. De esta forma, la representación del problema se analiza en términos de preguntas que eventualmente generan una serie de resultados o relaciones matemáticas. En particular, el estudio de la variación continua de la longitud de la diagonal del rectángulo se presenta desde el punto de vista gráfico, sin hacer uso de recursos algebraicos. Desde esta perspectiva, el empleo de la herramienta no sólo facilita la representación dinámica de los problemas que involucran variación, sino que ofrece la oportunidad a los estudiantes de conectar distintos contenidos y buscar nuevas relaciones o resultados (Camacho y Santos, 2004b).

De manera general, se observa que el uso del software dinámico puede resultar una herramienta poderosa para los estudiantes en términos de generar representaciones dinámicas del problema que les permitan identificar relaciones matemáticas. Se destaca que durante la construcción y análisis de las representaciones dinámicas, los estudiantes deben pensar el problema en términos de preguntas que los conduce al planteamiento de conjeturas o relaciones. Este ciclo de visualizar, reconocer y argumentar son procesos fundamentales del quehacer de la disciplina que los estudiantes pueden practicar sistemáticamente con la ayuda de este tipo de herramientas.

Finalmente, se resalta la importancia de presentar distintos argumentos matemáticos que le den sustento a las conjeturas y en algunos casos generar nuevo conocimiento matemático.

Referencias

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the learning of mathematics*, 25, 2, pp.42-47.

Arcavi, Abraham., & Hadas, Nurit. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, pp.25-45.

Camacho, M. & Santos, L.M. (2004a). El estudio de fenómenos de variación haciendo uso de herramientas tecnológicas. *Revista UNO*, Vol. 37, pp. 105-122, España.

Camacho, M. & Santos, M. (2004). La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas. *Números*, vol. 58, pp. 45-60, España.

Camacho, M., Depool. R., & Santos, M. (2004) Promoting students' comprehension of definite integral and area concepts through the use of derive software.*Proceedings of the XXVI Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 447-454. University of Toronto, Canada.

Charles, R. & Silver, E. (1988) (Eds.). *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. Reston VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Curcio, F. (1987) (Ed.), *Teaching and learning: A Problem-solving focus*. Reston VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Devlin, K. (1994). *Mathematics. The science of patterns*. NY:Scientific American Library.

English, L. (Ed.) (2002). Handbook of international research in mathematics education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goldenberg, P. & Cuoco, A. (1998). What is dynamic geometry? In R.Leher & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, pp. 351- 367. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, A., E. & Lesh, R. (Eds.), *Handbook of research design in mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lehrer, R. & Chazan, D. (Eds.) (1998). Designing learning environments for developing understanding of geometry and space. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundation for research in mathematics education. *ZDM* 2005 Vol.37, 6, p.458.

Moreno, L., & Santos, M. (2004). Students' exploration of powerful mathematical ideasa through the use of algebraic calculators. *Proceedings of the XXVI Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 135-141. University of Toronto, Canada.

National Council of Teachers of Mathematics (2000*). Principles and standards for school mathematics*. Reston VA: The Council.

Perkins, D. (1995). Outsmarting IQ. *The emerging science of learnable intelligence*. N.Y:The Free Press.

PMENA, 2001, 2002, 2003, 2004. *Proceedings of the 23, 24, 25. 26 annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Columbus OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Romberg, T.A., & Kaput, J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. En E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), Mathematics clasroom that promote understanding (pp. 3-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Santos, M (2004). Exploring the Triangle Inequality and Conic Sections Using Dynamic Software for Geometry. *Mathematics Teacher*, Vol 97, No 1, pp. 68-72.

Santos, M. & Espinoza H. (2002). Searching and exploring properties of geometric configurations via the use of dynamic software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 33(1), pp. 37-50.

Santos, M. & Vargas, C. (2003). Más allá del uso de exámenes estandarizados. *Avance y Perspectiva*, 22, pp. 9-22.

Santos, M. (2001). Potencial didáctico del softaware dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. *Avance y Perspectiva*, 20, pp. 247-258. Este trabajo también lo publicó la revista *expresiones* de la Dirección General de Educación Tecnológica Industria, pp. 5-17.

Santos, M. (2002). Students' use of mathematical representations in problem solving. *Mathematics and Computer Education Journal*, pp. 101-114, Spring Issue.

Santos, M. (2002a). Students' use of technological tools to construct conceptual systems in mathematical problem solving. En F. Hitt (Ed.), *Representation and mathematics visualization*, pp. 111-125. Working Group Representation and Visualization: PMENA.

Santos, M. (2003). Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. Vol X, No2. pp. 195-212.

Santos, M. (2004b). The role of dynamic software in the identification and construcction of mathematical relationships. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 23 (4), pp, 399-413.

Santos, M. (2004c). The Role of Technology in Students' Conceptual Constructions in a Sample Case of Problem Solving. *Focus on Learning Problems in Mathematics.* Spring Edition, vol 26, 2, pp. 1-17

Santos-Trigo, M. & Barrera-Mora, F. (2007). Contrasting and looking into some mathematics education frameworks. *The Mathematics Educator*, 10(1), pp. 81-106.

Santos T. L.M. (2007). *Resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. Mexico, DF: Trillas.

Schoenfeld, A., H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A., H. (1998). Reflections on a course in mathematical problem solving. *Research in Collegiate Mathematics Education III*., pp. 81-113.

Silver, E. A. (1987), Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem-solving instruction, In Alan H. Schoenfeld (Ed), *Cognitive science and mathematics education*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 1-31.

Whimbey, A. & Lochhead, J.(1976). *Problem solving & comprehension*. 6th edition, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Nota: El autor agradece el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por medio del proyecto Conacyt 47850, donde se investiga el uso de distintas herramientas computacionales en la resolución de problemas matemáticas en el nivel medio superior.

Los estándares de matemática para la escuela primaria de guatemala[1]

Leonel Morales Aldana
Universidad de San Carlos de Guatemala, Guatemala

Palabras clave
Estándares de matemática, currículo de matemática.

Introducción

En las últimas décadas de acelerados avances tecnológicos, la exigencia de adaptación a las nuevas tendencias y conocimientos hace de la educación un pilar *sine qua non* del cual depende la buena vida de cada ciudadano. La era de la información y de redes comerciales globales afecta a todos los países. Ninguna nación está libre de la demanda por una adecuación educativa, desde los países más desarrollados hasta los menos desarrollados. Lo único que difiere es el alcance, el tipo de reforma que cada nación quiera hacer. Cada país ha reformado su sistema educativo según sus expectativas y todos empiezan su reforma normalmente en respuesta a cambios profundos en la sociedad y/o la economía. Mientras más dinámica es la sociedad con expectativas altas de cada ciudadano, más son las demandas dentro de un marco de reforma. Suecia inició su reforma en los años cincuenta, Finlandia en los setenta y Estados Unidos en los ochenta y noventa. Las reformas en otros países, como en Asia, África y el hemisferio occidental, han respondido a condiciones económicas y demandas ciudadanas diferentes y se han suscitado en décadas más recientes. En Centro y Sur América, las reformas son un fenómeno de los últimos 20 años. Países como Chile, Colombia, Ecuador, Honduras y Guatemala, para mencionar unos, han liderado los procesos de reforma educativa.

Guatemala entró en una etapa de reforma educativa a partir del 29 de diciembre de 1996. En esa fecha, el Estado guatemalteco firmó el Acuerdo de Paz Firme y Duradera en el que se compromete a realizar una reforma educativa que "responda a la diversidad cultural y lingüística de Guatemala, reconociendo y fortaleciendo la identidad cultural indígena, los valores y sistemas educativos mayas y de los demás pueblos indígenas, el acceso a la educación formal y no formal, e incluyendo dentro de las currículas nacionales las concepciones educativas indígenas" (Acuerdo sobre Identidad y Derechos de los Pueblos Indígenas). En la educación se ve el viaducto por el que se puede llegar a tener una sociedad inclusiva con participación ciudadana en una cultura de paz basada en el estado de derecho que dé lugar a un desarrollo humano y económico sostenible.

Las mesas negociadoras, como los signatarios de los Acuerdos de Paz de 1996, estaban conscientes de las deficiencias del sistema educativo nacional y su reforma tendría que llevar un curso específico de reestructuración para debidamente responder a una realidad incluyente y verdaderamente guatemalteca. Por este lado, la reforma educativa es una respuesta a las presiones sociales, culturales y políticas que se conformaron alrededor de las mesas negociadoras del Acuerdo de Paz Firme y Duradera que pondría fin a un conflicto armado de más de 30 años cuyas causas incluían una desigualdad educativa a lo largo de líneas étnicas, que a su vez significaba desigualdad de oportunidades y participación política y social, y que conllevaba desigualdad en los beneficios que los ciudadanos derivaban de la sociedad.

---

[1] Programa financiado por la Agencia de Estados Unidos para el Desarrollo Internacional (USAID/G).

Por otra parte, los negociadores previeron la necesidad de conducir a la nación en curso de un desarrollo económico sostenible que respondiera a los desafíos de una economía global cada día más dependiente de los avances tecnológicos. Guatemala actualmente aspira a un desarrollo económico que permita un crecimiento más equitativo que no ponga en peligro la ecología y los recursos naturales del país. Por lo tanto, la reforma educativa exige una conexión directa entre la educación y desarrollo para "el mejoramiento de las condiciones socioeconómicas de vida de las comunidades, a través del desarrollo de los valores, contenidos y métodos de la cultura de la comunidad, la innovación tecnológica y el principio ético de conservación del medio ambiente".

Reforma educativa

Dada la coyuntura nacional de la cual emana su exigencia, la reforma educativa se torna en un proyecto de nación que pretende asegurar para todos los ciudadanos una mejor calidad de vida en un ambiente de democracia y paz con participación amplia en la vida social, política y económica y mayor equidad.

El Acuerdo Sobre Identidad y Derechos de los Pueblos indígenas pide que se constituya una Comisión Paritaria de Reforma Educativa (COPARE), integrada por representantes del gobierno y representantes de los pueblos indígenas, que diseñe el plan y estrategia. La COPARE entrego su informe *Diseño de Reforma Educativa/Tunuk´ik jun K´ak´a Tijonïk* en 1998. Este diseño (con su marco contextual, marco filosófico, marco conceptual, condiciones fundamentales para la reforma y sus etapas de cumplimiento) establece las bases de partida para realizar una reforma profunda e integrada, y se conforma la Comisión Consultiva para la Reforma Educativa para que apoye al Ministerio de Educación en su ejecución.

La COPARE establece seis políticas de transformación curricular:

1. Fortalecimiento de la formación integral para la democracia, la cultura de paz y el desarrollo sostenible.
2. Renovación curricular.
3. Fomento de la calidad educativa.
4. Descentralización curricular.
5. Fortalecimiento de la educación extraescolar.
6. Desarrollo de valores.

En relación con los estándares educativos, las políticas de renovación curricular y de fomento de la calidad y en cierta medida, la descentralización curricular son las que más nos conciernen. Sin embargo, es alrededor de la renovación curricular que todo gira y el trabajo de la Comisión Consultiva centra sus esfuerzos en esta política.

El Currículum Nacional Base tiene sus lineamientos en los acuerdos logrados por la Comisión Consultiva a través de los diálogos de consulta municipales. Los diálogos se realizan a nivel nacional y a nivel local para obtener insumos de la población sobre la transformación curricular durante 2000-2001. De este marco surgen aspectos claves que caracterizarán al nuevo CNB.

La Comisión Consultiva para la Reforma Educativa realiza una labor de consulta con la población del país para recabar propuestas sobre el tipo de educación que Guatemala desea para sus ciudadanos. Durante 2000-2001 se realizan los Diálogos y Consensos a nivel nacional y local con la participación de todos los sectores de la población, y los Cuatro Pueblos de Guatemala, Maya, Ladino, Garifuna y Xinca. Los diálogos dieron lugar a una introspección nacional sobre el tipo de ciudadano que Guatemala quiere forjar y permitió la construcción de una visión de un guatemalteco concebida por la población guatemalteca. El resultado de estos diálogos fue plasmado en el *Marco General de la*

Transformación Curricular y Currículum Básico para la Educación Primaria, Nivel de Concreción Nacional.

El nuevo CNB

El Currículum Nacional Base de Guatemala (CNB) recoge las aspiraciones de una nación. Se fundamenta en la importancia del desarrollo del potencial humano en todos, y en su participación en los procesos interactivos de construcción de una nación democrática con justicia social, Estado de Derecho y un desarrollo económico sostenible tomando en cuenta la diversidad étnica de nuestro país.

Siguiendo los lineamientos del Diseño de la Reforma y los del Marco General de la Transformación Curricular el CNB establece seis principios que marcan su dirección: equidad, pertinencia, sostenibilidad, participación y compromiso social, y pluralismo. De éstos los más significativos quizá son: equidad, pertinencia y participación, por su importancia en la creación de una nación integral. La pertinencia integra los aspectos que se observan en cada expresión étnico-cultural de los Pueblos de Guatemala. La equidad garantiza que la participación sea más amplia y más significativa.

El CNB se distingue por ser un currículum basado en competencias. Se enfoca en las competencias que permiten la formación de un ciudadano preparado para llevar una buena vida basada en valores y para integrarse a la vida económica del país en forma positiva. Las competencias incluyen contenidos declarativos o conceptuales, procedimentales y actitudinales. Además, el Curriculum posiciona al estudiante en el centro del proceso de aprendizaje y propone que de esta forma el estudiante participe en la construcción de su realidad.

En gran parte el CNB integra la concepción de la educación expresada por el informe de la comisión liderada por Jacques de Lors, *La educación encierra un tesoro* donde se proclaman cuatro pilares de la educación: aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a ser y aprender a convivir con todos. También incorpora, sin embargo, el quinto pilar que El Proyecto Regional de Educación para Latino América y el Caribe (PRELAC) proclama para la región: *aprender a emprender*. La PRELAC sostiene que "es necesario para el desarrollo en las personas de una actitud proactiva e innovadora, que les permita hacer propuestas y tomar la iniciativa, lo cual es imprescindible para una educación que pretenda contribuir a la construcción de un futuro posible y sostenible.” (Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe “Educación para Todos, Educación Ambiental y Educación para el Desarrollo Sostenible).

Estándares

La evaluación es parte de la calidad educativa. La COPARE enumera nueve estrategias en la política de fomento de la calidad educativa. Entre ellas:

1. Desarrollo de mecanismos de evaluación del sistema educativo
2. Fortalecimiento del sistema nacional de evaluación del rendimiento
3. Definición de sistemas de indicadores de calidad de la educación.

El marco establece que la evaluación debe mantener una función formativa en la cual también toman parte los mismos estudiantes, así como los padres y las madres de familia. Sin embargo, la competencia se debe evaluar desde sus tres tipos de contenido. Por lo tanto, requiere el establecimiento de un sistema nacional de evaluación del rendimiento escolar que proporcione información sobre logros de tal manera que se pueda mejor orientar el proceso educativo.

Los estándares, entonces, vienen a ser referencias para las evaluaciones a nivel nacional. Con ellos se desarrollan los criterios que guiarán las pruebas estandarizadas a nivel nacional, con las que se puede monitorear el desarrollo de la calidad educativa y modificar el sistema, según las necesidades, para alcanzar la mejor educación posible. El Sistema Nacional de Evaluación e Investigación Educativa (SINEIE) del MINEDUC desempeña un papel muy importante en la creación y el desarrollo de reactivos o ítems y las pruebas nacionales.

Los esfuerzos del Ministerio de Educación han logrado incrementar la cobertura de los servicios de educación primaria (Educación en Guatemala, marzo 2005, USAID). Por lo tanto, ahora el MINEDUC inicia un esfuerzo por mejorar la calidad educativa no sólo a nivel primario sino también a nivel medio. Con el apoyo del Programa Estándares e Investigación Educativa de USAID, el ministerio inicia un proceso de elaboración de estándares educativos para la etapa de preprimaria y entre primero y sexto de primaria en cinco áreas fundamentales: Comunicación y Lenguaje-1 (idioma materno), Comunicación y Lenguaje-2 (segunda lengua), Matemáticas y Medio Social y Natural (Medio Social y Natural se convierte en Ciencias Sociales y Ciencias Naturales y Tecnología en el segundo ciclo, de 4to a 6to grado). Los estándares de cada grado establecen los criterios de referencia para las evaluaciones del rendimiento de los estudiantes, las evaluaciones, a su vez, orientan la planificación de los docentes.

En la formulación de estándares participan dos direcciones técnicas del MINEDUC, la Dirección de Calidad y Desarrollo Educativo (DICADE) y la Dirección General de Educación Bilingüe Intercultural (DIGEBI). La DICADE maneja el desarrollo curricular a nivel nacional; la DIGEBI vela por la pertinencia cultural y lingüística

Los estándares buscan establecer en enunciados claros y sencillos los conocimientos mínimos que todos los estudiantes deben alcanzar en cada grado, sintetizando los contenidos declarativos y procedimentales que establece el Currículum Nacional para cada área en cada grado. De esta forma se sientan las metas mínimas a alcanzar por todos que asegurará un nivel mínimo de calidad. Sólo de esta manera podremos garantizar que la educación se imparta equitativamente en todo el país, sólo así podremos evaluar el rendimiento académico de cada región, de cada departamento, de cada localidad.

Proceso de construcción de estándares en Guatemala

Una de las acciones iniciales para lograr el desarrollo de estos estándares educativos consistió en la elaboración de una lista preliminar de estándares de contenido, con base en el Currículo Nacional Base (CNB) y en las Orientaciones para el Desarrollo Curricular (ODEC). Se conformaron equipos para la elaboración de esas listas, con integrantes de la DICADE y la DIGEBI, docentes en servicio y expertos de área. Se continuó con una consulta nacional a docentes, padres, alumnos, autoridades e instituciones relacionadas con la educación guatemalteca. En esta consulta se llevaron a cabo 45 talleres y participaron aproximadamente 1,150 personas. Se analizaron las opiniones recabadas en esas consultas, se realizó un trabajo de gabinete, para llegar a una propuesta. Ésta se analizó en el Encuentro Nacional de Estándares Educativos, donde se reunieron expertos nacionales, especialistas en estándares a nivel internacional, docentes, alumnos, padres, autoridades y representantes de instituciones relacionadas con la educación.

Posteriormente, se contrataron especialistas de áreas quienes hicieron una revisión de la lista preliminar y los resultados de las consultas, para hacer otra lista que fue consensuada con autoridades, técnicos y funcionarios del Ministerio de Educación, y posteriormente presentada a maestros, alumnos y padres. Se analizaron las observaciones y las propuestas y se llegó a la versión final.

Estándares de matemáticas

Por las características multiculturales, multilingües y multiétnicas de nuestro país y por la riqueza de la matemática desarrollada por los Mayas en la época precolombina, se pone especial atención en incluir los temas de pertinencia cultural. Incluyendo definiciones, algoritmos, sistemas de medida y geometría que se utilizaron en el pasado por los pueblos mayas y otros conocimientos que son utilizados actualmente por los pueblos de herencia maya.

En todos los idiomas mayas (más de 20) que se hablan en el país, los nombres de los números son de base veinte, lo que hace necesario que la escuela primaria desarrolle dos sistemas de numeración: decimal y vigesimal.

Otra de las áreas con mucha influencia es en las medidas, especialmente en los calendarios. El calendario Cholq´ij, de 260 días, el Calendario Ab o agrícola de 360 días y la Cuenta Larga de Tiempo, medida desde el día de la creación del mundo maya, son medidas del tiempo que se utilizan en diferentes comunidades del país, razón por la que se hace necesario que los niños conozcan los calendarios mayas y el calendario gregoriano. También en las medidas de longitud, área y capacidad existen términos que aún son utilizados y tienen un origen maya.

Estamos ahora en la etapa de llevar los estándares a las comunidades, de crear modelos didácticos para desarrollar la matemática maya y las partes más novedosas de los estándares y el currículo.

Bibliografía

Acuerdos de Paz. Gobierno de Guatemala, 1996.

Diseño de la Reforma Educativa, Comisión Paritaria de Reforma Educativa, Guatemala, 1998.

National Council of Teachers of Mathematics, 2005, Principles and Standards for School Mathematics, USA.

National Council of Teachers of Mathematics, 1991, Curriculum and evaluation Standard for School Mathematics, USA.

Ministerio de Educación y Ciencia, 2005, PISA 2003, Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas, Madrid.

Ministerio de Educación y Ciencia, 2000, PISA. La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos. Un nuevo marco para la evaluación, Madrid.

Ministerio de Educación, 2005, *Currículum Nacional Base*, Guatemala.

Morales Aldana, Leonel, 1994, *Matemática maya*, Ed. Gran Aventura, Guatemala.

Componentes		Pre-primaria (6 años)	Primer grado	Segundo grado	Tercer grado	Cuarto grado	Quinto grado	Sexto grado
Formas, patrones y relaciones	*Álgebra*	***Estándar 1*** Se ubica y orienta en su medio familiar y escolar.	**Estándar 1** Identifica orden, posición y tiempo entre personas y objetos.	**Estándar 1** Reproduce y crea figuras utilizando patrones de: tamaño, forma, posición y tiempo.	**Estándar 1** Representa el movimiento de objetos y personas utilizando diferentes sistemas.	**Estándar 1** Reproduce patrones y figuras con patrones, relacionados con su entorno natural y cultural.	***Estándar 1*** Construye y crea patrones y figuras con patrones, relacionados con su entorno natural y cultural.	***Estándar 1*** Rota, traslada y aplica simetría a patrones y modifica y crea series numéricas.
	Geometría	***Estándar 2*** Dibuja líneas y formas, siguiendo trazos.	***Estándar 2*** Identifica características y propiedades cuerpos geométricos en objetos del entorno natural y social.	***Estándar 2*** Identifica y construye cuerpos geométricos usando elementos de su entorno familiar y escolar.	***Estándar 2*** Construye cuerpos geométricos, clasificándolos de acuerdo a sus propiedades y características.	***Estándar 2*** Aplica propiedades de ángulos, rectas, planos, polígonos y sólidos en la resolución de problemas geométricos.	***Estándar 2*** Identifica y construye elementos geométricos, y utiliza sus propiedades en la aplicación de rotación, traslación y simetría.	***Estándar 2*** Aplica rotación, traslación y simetría a diferentes cuerpos geométricos.
Matemática, ciencia y tecnología	*Medidas*	***Estándar 3*** Utiliza unidades de moneda y tiempo en situaciones cotidianas.	***Estándar 3*** Identifica: las unidades para longitud, volumen y peso en las medidas tradicionales, Sistema Inglés y Sistema Métrico Decimal; las diferentes monedas; las unidades de tiempo y calendarios gregoriano y maya Cholq´ij.	***Estándar 3*** Utiliza: las unidades para longitud, volumen y peso en las medidas tradicionales, Sistema Inglés y Sistema Métrico Decimal; las diferentes monedas; y las unidades de tiempo en situaciones de su entorno natural y cultural.	***Estándar 3*** Realiza mediciones de longitud, peso, volumen, moneda y de periodos de tiempo con base en calendario gregoriano y maya Cholq´ij en situaciones de su entorno natural y cultural.	***Estándar 3*** Aplica equivalencias, dentro de cada sistema, para medidas de moneda, temperatura, longitud, superficie, volumen, peso, tiempo y calendarios gregoriano, maya Cholq´ij y maya Ab´ o solar, en situaciones de su entorno natural y cultural.	***Estándar 3*** Utiliza múltiplos y submúltiplos dentro de cada sistema para medidas de longitud, superficie, volumen, peso, moneda, temperatura, tiempo, calendarios gregoriano, maya Ab´ y la cuenta larga, en situaciones de su entorno natural y cultural.	***Estándar 3*** Calcula equivalencias entre sistemas de medida para: longitud, superficie, volumen, peso, temperatura, moneda, tiempo, calendarios gregoriano, maya Ab´ o solar y cuenta larga, señalando la precisión de los resultados de las mediciones.
	Conjuntos	**Estándar 4** Clasifica elementos de su entorno natural, social y cultural.	***Estándar 4*** Clasifica y relaciona conjuntos dentro de su entorno social.	***Estándar 4*** Utiliza y relaciona propiedades de elementos, conjuntos y subconjuntos para la solución de problemas presentes en su entorno social.	***Estándar 4*** Realiza operaciones de unión e intersección entre conjuntos y subconjuntos en su entorno social.	**Estándar 4** Realiza operaciones de: diferencia de conjuntos, producto cartesiano y familia de un conjunto, y aplica sus propiedades en la resolución de problemas de su entorno.	**Estándar 4** Realiza operaciones de: diferencia de conjuntos, familia de un conjunto, producto cartesiano y relaciones binarias aplicándolos a situaciones de su entorno social y cultural.	**Estándar 4** Aplica diferencia simétrica, producto cartesiano, relaciones binarias y funciones en la resolución de problemas.

Componentes		Pre-primaria (6 años)	Primer grado	Segundo grado	Tercer grado	Cuarto grado	Quinto grado	Sexto grado
Sistemas Numéricos y operaciones.	*Números Naturales*	***Estándar 5*** Utiliza los números de 0 a 9 en el Sistema Decimal y 0 a 20 en el Sistema Maya.	***Estándar 5*** Lee, escribe y compara números naturales de 0 a 99 (en el sistema decimal), de 0 a 19 (en el maya) y los ordinales, de 1º a 10º en los dos sistemas.	***Estándar 5*** Utiliza los números: de 0 a 999 (en el sistema decimal), de 0 a 399 (en el maya) y ordinales de 1º a 20º en los dos sistemas.	***Estándar 5*** Utiliza y relaciona números: de 0 a 9,999 (en el sistema decimal), de 0 a 7,999 (en el maya) y los ordinales del 1º a 40º en ambos sistemas.	***Estándar 5*** Identifica y aplica las propiedades de números: de 0 a 99,999 (en el sistema decimal), de 0 a 159,999 (en el maya).	***Estándar 5*** Aplica las propiedades y relaciones de números naturales en los sistemas decimal y maya de 0 a 500,000.	***Estándar 5*** Aplica las propiedades y relaciones de los números enteros y naturales a situaciones de su entorno cultural.
	Aritmética	***Estándar 6*** Realiza sumas y restas utilizando material concreto.	***Estándar 6*** Realiza sumas y restas sin transformar, en el sistema decimal no mayores de 99, y en el Sistema Maya no mayores de 19, por medio de cálculos mentales, escritos y estimados, en situaciones de su entorno familiar.	***Estándar 6*** Realiza sumas y restas con y sin transformar, multiplicaciones (sin transformar) en el sistema decimal y sumas en el sistema maya.	***Estándar 6*** Realiza en el sistema decimal: sumas, restas, operaciones combinadas, proposiciones abiertas, multiplicaciones con producto menor que 1,000, y divisiones con un dígito en el dividendo y divisor y sumas y restas en el sistema maya.	***Estándar 6*** Realiza en el sistema decimal: operaciones básicas, potenciación (aisladas y combinadas), proposiciones abiertas con diferentes estrategias de cálculo, y la suma y resta en el sistema maya.	***Estándar 6*** Realiza en el sistema decimal: operaciones básicas, potenciación, raíces cuadradas exactas, operaciones combinadas y resuelve proposiciones abiertas aplicando diferentes estrategias de cálculo; y en el Sistema Maya realiza sumas, restas y multiplicaciones.	***Estándar 6*** Realiza en el sistema decimal: operaciones básicas, potenciación, radicación, operaciones combinadas, resuelve proposiciones abiertas aplicando diferentes estrategias de cálculo; y en el Sistema Maya realiza sumas, restas y multiplicaciones
	Números Racionales	***Estándar 7*** Identifica las fracciones ½ y ¼, utilizando material concreto.	***Estándar 7*** Identifica las fracciones ½, 1/3 y ¼, utilizando material concreto.	***Estándar 7*** Representa las fracciones con numerador y denominador de 1 a 10 por medio material concreto, gráficas, la recta numérica y numerales.	***Estándar 7*** Ordena y compara decimales (hasta décimo) y fracciones de igual denominador y las relaciona con situaciones de su entorno cultural.	***Estándar 7*** Realiza cálculos aritméticos entre fracciones, decimales (hasta centésimo), razones y proporciones, asociados a situaciones de su entorno cultural.	***Estándar 7*** Realiza cálculos aritméticos entre fracciones, decimales, razones, proporciones directas e inversas, regla de tres simple y compuesta y porcentajes, asociados a situaciones de su entorno cultural.	***Estándar 7*** Aplica propiedades de los números racionales en el cálculo de: operaciones básicas, porcentaje, descuento, interés simple, regla de tres simple y compuesta a situaciones de su entorno cultural.

Componentes		Pre-primaria (6 años)	Primer grado	Segundo grado	Tercer grado	Cuarto grado	Quinto grado	Sexto grado
Incertidumbre, comunicación e investigación matemática	*Resolución de Problemas*	***Estándar 8*** Representa gráfica y verbalmente sus razonamientos.	**Estándar 8** Usa reglas de juegos, instrucciones, y relaciones de causa y efecto al jugar y resolver problemas.	**Estándar 8** Modifica y crea reglas de juegos, instrucciones, relaciones de causa y efecto y las aplica a juegos y resolución de problemas de su entorno cultural.	**Estándar 8** Identifica y resuelve problemas de su entorno utilizando diferentes estrategias.	***Estándar 8*** Plantea y resuelve problemas por medio de cálculos numéricos utilizando diferentes estrategias.	***Estándar 8*** Plantea y resuelve problemas en el conjunto de números naturales y racionales que impliquen operaciones básicas, proporciones directa e inversa, regla de tres simple, porcentaje e interés simple.	***Estándar 8*** Plantea y resuelve problemas en el conjunto de números naturales y racionales que impliquen conversiones, proporciones directa e inversa, regla de tres simple y compuesta, porcentaje, descuento e interés simple.
	Estadística	**Estándar 9** *Recolecta datos relacionados con su entorno cultural.*	**Estándar 9** *Organiza en tablas los datos recolectados.*	**Estándar 9** *Recopila y organiza datos relacionados con su entorno cultural.*	**Estándar 9** *Recopila, organiza y grafica, datos relacionados con su entorno natural y cultural.*	***Estándar 9*** Recopila, organiza, grafica, interpreta y calcula la media de datos de hechos y eventos de su entorno natural y cultural.	***Estándar 9*** Calcula la media, moda y representa por medio de tablas de frecuencia, gráficas de barras y circulares la información estadística de hechos de su entorno natural y cultural.	***Estándar 9*** Calcula la media, rango, moda y representa por medio de tablas de frecuencia, gráficas de barras y circulares la información estadística de hechos de su entorno natural y cultural.
	Probabi lidad	**Estándar 10** Identifica eventos posibles e imposibles en su entorno cultural.	**Estándar 10** *Identifica eventos posibles, imposibles y probables en su entorno cultural*	**Estándar 10** *Calcula la probabilidad de eventos posibles, imposibles y probables.*	**Estándar 10** *Calcula la probabilidad de un evento en un conjunto de eventos.*	**Estándar 10** Calcula la probabilidad de que sucedan dos eventos a la vez.	**Estándar 10** Calcula las combinaciones de eventos y la probabilidad de cada una de ellas.	**Estándar 10** Calcula la probabilidad de un evento, sabiendo que ya sucedió otro.

Un modelo de innovación curricular en matemática: resultados de su implementación en el contexto educacional chileno

Gonzalo Villarreal Farah
Universidad de Santiago de Chile, Centro Comenius
gvillarr@comenius.usach.cl

Fidel Oteiza Morra
Universidad de Santiago de Chile, Centro Comenius
foteiza@comenius.usach.cl

Resumen

Este artículo analiza los resultados de la implementación de un modelo de innovación curricular en matemática que se implementa en la actualidad en escuelas públicas de Chile. Los resultados provienen del proyecto Enlaces Matemática[1]*. Esta información se complementa con datos del estudio conducente al grado de doctor realizado por uno de los autores*[2]*. Este proyecto se basa en el modelo interactivo para el aprendizaje matemático desarrollado por el Centro Comenius de la Universidad de Santiago (Oteiza & Miranda, 2004), cuyo modelo ha sido diseñado, desarrollado y probado desde las salas de clases. De los antecedentes analizados se concluye que para lograr cambios en las prácticas docentes y mejoras en el logro de aprendizajes, se requiere de un modelo curricular que integre en forma natural diferentes recursos para el profesor y el alumno, los que consideren el total de contenidos del currículo vigente. Además, se requiere un proceso de acompañamiento y apoyo permanente, que se centre en la apropiación del modelo por parte de los participantes y que apoye en los cambios de roles involucrados. Se muestra, en forma consistente, que los alumnos participantes del proyecto obtienen mejores resultados que alumnos que no participan en éste. Esto permite inferir sugerencias y recomendaciones en los procesos de innovación curricular, cambio de prácticas docentes, cambios de roles en los actores del proceso educativo y estrategias para apoyar a docentes y alumnos en la apropiación de estas innovaciones.*

Palabras claves

Innovación curricular, aprendizaje matemático, educación pública chilena, TIC.

Introducción

La educación está en la mente de todos los que en este momento hacen política pública. Tanto el discurso como los esfuerzos de Gobierno muestran que es un sector estratégico e imprescindible para el desarrollo nacional. Los diagnósticos recientes (OCDE, 2004) coinciden en que, si bien se han realizado acciones e inversiones importantes, los resultados no han sido los esperados y se han obtenido logros desiguales, pues las diferentes pruebas nacionales e internacionales de medición de logros de aprendizajes en matemática son significativamente deficitarias.

La reforma curricular, impulsada en la última década, requiere cambios en las metodologías utilizadas por los docentes, dejando en manos de estos, sus escuelas y comunidades, la estrategia y desarrollo de los proyectos que permitan implementar dichos cambios en sus aulas. Esto, si se miran las condiciones reales de trabajo de los docentes, respecto a número de horas frente a cursos, número de alumnos por sala, recursos disponibles, entre otros, junto con la prioridad entregada al mejoramiento de

---

1 Proyecto financiado con fondos del Centro de Educación y Tecnología del Ministerio de Educación de Chile y el Centro Comenius de la USACH. Más antecedentes en: http://www.comenius.usach.cl/enlacesmat

2 Programa de Doctorado de "Multimedia Educativa" de la Universidad de Barcelona. Tesis dirigida por la profesora Begoña Gros y realizada por Gonzalo Villarreal Farah.

logros de aprendizajes de los estudiantes, la implementación de la reforma termina por verse imposibilitada en la práctica.

Según Ávalos, respecto a la formación y desarrollo profesional docente señala que: “sin embargo, no se llega a formular una política integrada y coherente de formación y desarrollo profesional docente para el mediano plazo”, centrándose esta política en promover los aprendizajes de los alumnos y la calidad en las escuelas, planteándose las acciones de los docentes como “emergentes”, según las propias demandas de estas políticas (Ávalos, 2003).

Los cambios sociales y las necesidades externas hacia la educación son variadas y crecientes. Diferentes autores, al referirse a los factores que están cambiando profundamente la sociedad contemporánea, señalan como los principales: el impacto de la revolución causada por la tecnología de la información, el impacto de la globalización, y el impacto del conocimiento científico y tecnológico (Cox en Hevia, 2003, Brünner 2003).

En particular, un aspecto reconocido en la literatura, es que el aprendizaje de la matemática es complejo para los estudiantes, entre otros aspectos, ya que no lo visualizan, es abstracto y con una simbología propia (Onrubia, Cochera y Barberà, 2001). Se requiere que la matemática sea generalizable y más visible, de manera que los alumnos al utilizarla hagan explícito su conocimiento, se propongan conjeturas y las pongan a prueba, se generen modelos, se discuta y verifiquen las ideas sobre los problemas planteados y soluciones encontradas (Oteiza y Villarreal, 2005).

Un problema identificado en la enseñanza de la matemática, se refiere a que los docentes no han sido formados en la estrategia de resolución de problemas; si bien dicen conocerla, no saben cómo enseñarla, hacerla explícita a sus alumnos y cómo trabajar las estrategias y heurísticas asociadas. En la literatura se sabe la importancia del uso de esta estrategia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática (Schoenfeld, 1989, Polya, 1979, Goldenberg, 2000, Jonassen, 2000a, Jonassen, 2000b, Villarreal, 2005). También se sabe, por su naturaleza, lo difícil que es su implementación (Gaulin, 2001, Lacasa y Herranz, 1995, Pifarré y Sanuy, 2002, Monereo, 2000, Rizo y Campistrous, 2002). En particular, se requiere una propuesta que asuma estos desafíos y entregue herramientas y recursos a profesores y alumnos, y ofrezca una manera de trabajar y avanzar en la estrategia de resolución de problemas.

Por otra parte, se sabe que múltiples son los avances en materia educacional que ha estado impulsando el Ministerio de Educación de Chile. En particular el proyecto *Enlaces*3, ha permitido establecer vínculos de colaboración, trabajo y confianzas entre el Ministerio de Educación, Universidades y establecimientos educacionales, permitiendo conocer mejor la realidad del sistema educacional nacional. Recientemente el gobierno chileno ha anunciado el aumento de computadoras en las escuelas, y su propósito es llegar a tener diez alumnos por computadora en un periodo de tres años. En forma adicional se habilitarán 7 000 salas con proyector, una computadora y un telón, junto con el desarrollo de recursos digitales en las áreas de matemática, lenguaje y ciencias de los grados primero al cuarto.

Esto es un impulso y una demostración de confianza a lo que el proyecto *Enlaces* ha realizado en los últimos 15 años. Sin embargo, al mismo tiempo ha generado la necesidad de buscar estrategias que permitan hacer usos efectivos de dichos recursos.

De este modo, es importante contar con soluciones curriculares, acordes con los planes y programas vigentes, con capacidad para facilitar procesos de aprendizajes pertinentes, además que hagan uso efectivo de las tecnologías de la información, que tienen grandes posibilidades de ser percibidas como adecuadas y necesarias en la situación actual del país.

---

[3] Proyecto de informática educativa, desarrollado por el Ministerio de Educación de Chile por más de 15 años, es un esfuerzo pionero en el mundo para generalizar el uso de la tecnología informática en la educación pública.

Metodología

Como fue ya señalado, este artículo se basa en un proyecto que aplica el modelo interactivo para el aprendizaje matemático. Este modelo fue desarrollado entre los años 2001 y 2004 en el marco del proyecto de desarrollo curricular *Aprender matemática creando soluciones*, llevado a cabo por el Centro Comenius de la Universidad de Santiago de Chile (Oteiza, Araya & Miranda, 2004). El modelo interactivo se entiende como una formulación teórica (ideal) acerca de los elementos básicos que constituyen una situación apropiada de enseñanza y aprendizaje del conocimiento matemático y de la interrelación dinámica que existe entre dichos elementos. En la sección donde se describe el marco conceptual se entrega más información acerca de los conceptos básicos que sustentan el modelo.

Enlaces Matemática

El proyecto *Enlaces Matemática*, financiado por el Centro de Educación y Tecnología del Ministerio de Educación de Chile y el Centro Comenius, trabajó en el año 2005 con más de 70 profesores involucrando a 2 800 alumnos de 2º año de enseñanza media (grado 10). El año 2006 se amplió la participación a más de 100 docentes, beneficiando esta vez a más de 4 200 alumnos de 2º y 3º año medio (grados 10 y 11). En el año 2007 se está implementando con unos 120 docentes y una población de 6 000 alumnos de 1º a 4º año medio (grados 9 al 12). De esta manera, en el año 2007 se está cubriendo todos niveles de la enseñanza secundaria chilena con programas educativos basados en el modelo interactivo que hacen uso intensivo de la tecnología informática.

En este proyecto se entrega materiales para los alumnos (guías, ejercicios, problemas, proyectos), materiales para el profesor (sugerencias metodológicas y didáctica, material de evaluación, explicaciones de la teoría en que se basan las actividades), materiales concretos para la sala de clases (transparencias, palitos de madera, juegos didácticos, fichas, entre otros), además de recursos informáticos. Todo ello se hace sobre la base de un apoyo profesional cercano para los profesores y un acompañamiento y monitoreo a su trabajo tanto presencial como virtual. Cabe señalar aquí que en cada nivel se considera la totalidad de los contenidos oficiales para el año escolar y el apoyo se realiza con un profundo respeto y valoración de la autonomía profesional que cada profesor tiene en su sala de clases.

Marco conceptual

Modelo interactivo para el aprendizaje matemático

Uno de los pilares conceptuales de este trabajo es sin duda el modelo interactivo para el aprendizaje matemático. El modelo fue desarrollado en el marco del proyecto FONDEF D00I1073 *Aprender matemática creando soluciones* entre los años 2001 y 2004 (Oteiza, Araya & Miranda, 2004). De acuerdo con Oteiza y Miranda (2004), en su aplicación práctica el modelo sirve como procedimiento para orientar las decisiones de quienes generan situaciones de enseñanza y aprendizaje de la matemática, de los docentes en su acción de facilitación de los aprendizajes, y de quienes evalúen los aprendizajes alcanzados por los estudiantes. Consecuentemente, en su formulación se encuentran orientaciones y criterios para adoptar decisiones en relación con los diferentes momentos involucrados y, cuando corresponde, las orientaciones están referidas a los diferentes actores que participan en el proceso.

La visión más sintética que se puede ofrecer de la forma de pensar y de actuar que el modelo sugiere se acerca mucho a la expresión acuñada por Davis (1967) en el Madison Project: “conjetura – trata, pon la idea a prueba – observa lo que sucede y... aprende cómo seguir”.

Las ideas principales que caracterizan el modelo son: centrarse en la actividad del alumno; basarse en fundamentos teóricos y prácticos; entregar herramientas al profesor, profesora y alumnos; trabajar aspectos multidimensionales del aprendizaje; considerar diversos momentos para el aprendizaje (exploración, generación de conjeturas, formalización y práctica); basarse en el nuevo currículo de matemática chileno; usar tecnología de información y telecomunicaciones; incluir propuestas innovadoras de evaluación de aprendizajes que van más allá de las evaluaciones basadas en papel y lápiz, aunque éstas también son usadas por supuesto.

A partir de esto, se desarrolló un curso de actualización profesional, del cual a continuación se presenta un resumen de los principales servicios y recursos:

* *Curso de actualización docente:* puesta a prueba de un modelo de programa semi-presencial de actualización profesional a los docentes participantes, para que desarrollen las competencias pedagógicas requeridas.
* *Lanzamiento de unidad:* reuniones con los docentes en los cuales se trabaja en cada una de las unidades los contenidos involucrados, además de transferir las sugerencias metodológicas y didácticas para dicha unidad y los recursos que la componen.
* *Talleres matemática con tecnología:* son reuniones en las que se trabajan los recursos tecnológicos considerados en el modelo, para trabajar en las diferentes unidades, con una mirada desde los contenidos matemáticos.
* *Materiales:* para el alumno, para el profesor, material concreto, material de referencia, evaluaciones.
* *Acompañamiento y apoyo en aula:* visitas programadas a cada sala en las que cada profesor recibe el apoyo de un profesional que realiza demostraciones en aula, en el uso de las TIC en el laboratorio y sesiones de trabajo para aclarar aspectos de la aplicación del modelo, apoyar las necesarias adaptaciones que los materiales requieren a situaciones específicas y apoyo en la realización y entrega de los trabajos calificados.
* *Acompañamiento virtual:* los profesores participan de un espacio virtual en el cual se les acompaña de forma permanente en la implementación del modelo en sus salas de clases. Este espacio permite la realización de discusiones pedagógicas en el marco del modelo, del conocimiento especializado matemático y del uso de las tecnologías. Adicionalmente, por medio de actividades y trabajos calificados, se les orienta y acompaña en acciones que le permiten preparar, discutir y analizar la forma en que se implementa el modelo y sus recursos en cada sala de clases.

Recursos del modelo

En esta sección se presentan los recursos utilizados en el modelo, tanto como materiales y recursos tecnológicos. A continuación se describe el material didáctico utilizado en el modelo interactivo.

El material didáctico considera: *material para el profesor*, *material para el alumno*, *material de referencia*, *material concreto* y *recursos tecnológicos.*

El *material para el profesor* explica en forma detallada la propuesta pedagógica, cada una de las actividades de aula diseñadas y los énfasis y precauciones que debe considerar el profesor al ponerlas en práctica con sus estudiantes. Incluye, además, el material de evaluación, materiales de apoyo adicional y una descripción completa del *modelo interactivo para el aprendizaje matemático*.

El material para el alumno incluye las guías de trabajo para apoyar la exploración, comprensión y apropiación de los conceptos y conocimientos relevantes establecidos en el programa oficial del Ministerio de Educación.

Las principales características de las guías de trabajo son:

* Permiten el trabajo individual o en pequeños grupos de alumnos.
* Están dirigidas e interpelan directamente a los alumnos, dejando claramente establecido lo que el estudiante debe hacer (por ejemplo, leer, analizar, escribir una conjetura, trazar una línea entre dos puntos, comparar dos cantidades, explicar por qué sucede algo, etcétera) en un lenguaje claro y comprensible para su nivel de lenguaje y conocimiento.
* Disponen de un espacio específico y adecuado para que los estudiantes escriban sus respuestas, realicen los cálculos necesarios o hagan sus diagramas o dibujos requeridos por la actividad.
* Tienen una extensión apropiada para permitir el trabajo en clases, de modo que exista un inicio, un proceso y un cierre claro para cada una de ellas y que éste no se extienda más allá de tres clases por cada guía.
* Orientan e incentivan el trabajo independiente de los alumnos, ya sea en sus casas o en otros espacios del establecimiento.
* Trabajan con modelos matemáticos generales que le permitan al estudiante comprender situaciones y aplicar el conocimiento en diferentes contextos.

El *material de referencia* es un material que contiene una presentación de los contenidos matemáticos propiamente tal.

El *material concreto* corresponde diferentes recursos manipulativos, que apoyan el trabajo de distintos contenidos. Este se compone de fichas, transparencias para proyectar, palos de madera, dados, “juego de los factores”, material de cuadrados y rectángulos que permite ayudar a trabajar el contenido de factorización, entre otros.

El *material de evaluación para los alumnos* hace entrega de distintos instrumentos de evaluación para diagnosticar y medir los avances de los estudiantes.

Los *recursos tecnológicos* son *applets*, *software*, templates y otros dispositivos digitales para apoyar el uso de la tecnología informática en forma pertinente y adecuada a las actividades de aprendizaje diseñadas. Estos instrumentos están intencionados desde algunas guías que sólo funcionan con tecnología o son propuestas al docente en el material del profesor, allí se describe cómo y cuándo utilizarlas.

Resultados

Antecedentes generales

En el proyecto participaron un total de 100 salas4 de segundo y tercero medio (grados 10 y 11 respectivamente). De estos, el 53% son establecimientos municipalizados (establecimientos financiados en un 100% con aporte del estado) y 47% de establecimientos particulares subvencionados (financiados con aportes del estado y de los padres y/o de otras instituciones). Estas salas se encuentran en tres de las trece regiones que componen el territorio nacional, todas del sector centro del país.

En Chile, el 93% de los estudiantes asiste a colegios municipalizados o particulares subvencionados, distribuyéndose la matrícula aproximadamente en un 50% para cada grupo.

Los docentes participantes del proyecto, en su mayoría (73% tiene una edad entre 35 y 54 años, más del 78% tiene 13 o más años de experiencia docente y un 43% tiene más de 20 años de experiencia docente. Un 84% de los docentes es titulado como profesor de matemática y solo un 10% tiene estudios adicionales.

La tabla 1 presenta un resumen de los establecimientos incorporados al proyecto, señalando número, salas, alumnos y tipo de dependencia, organizado por regiones.

[4] Se entiende por sala a un grupo compuesto por su profesor(a) y sus estudiantes.

Tabla 1. Total de establecimiento por región y dependencia.

Región	Establecimientos	Salas	Alumnos	Salas Municipales	Salas Subvencionados
Quinta	18	36	1.520	25	11
Sexta	11	19	812	9	10
Metropolitana	23	45	1.925	19	26
Total	**52**	**100**	**4.257**	**53**	**47**

La tabla 2 presenta en detalle datos de los establecimientos y alumnos, organizados por región y nivel.

Tabla 2. Total de establecimiento y alumnos por región, nivel y dependencia.

Región	Salas		Alumnos		Salas Municipales		Salas Subvencionados	
	Segundo	Tercero	Segundo	Tercero	Segundo	Tercero	Segundo	Tercero
Quinta	19	17	779	741	13	12	6	5
Sexta	9	10	372	440	4	5	5	5
Metropolitana	22	23	935	990	11	8	11	15
Total	**50**	**50**	**2.086**	**2.171**	**28**	**25**	**22**	**25**

Evaluación docente

La prueba aplicada, tanto de pre y post test a los profesores, contempló 28 ítems, con los contenidos trabajados tanto en segundo como en tercero medio5 (grados 10 y 11). Los profesores rindieron pruebas según el nivel en el cual se encontraban participando en salas del proyecto. En promedio participaron un 80% de los docentes. Esta evaluación, equivalía a un 30% de la calificación final del curso de actualización curricular en la que participaban estos docentes.

La tabla 3 muestra los resultados generales de los docentes, por nivel, tanto para las pruebas de pre y post test.

Tabla 3: Resultados por nivel pre y post test pruebade profesores de segundo y tercero medio.

Nivel	Pre test	Post test	Diferencia
Segundo medio	66,21%	76.02%	9.81%
Tercero medio	81.79%	89.29%	7.50%

Se puede observar que los profesores de ambos niveles tienen mejoras estadísticamente significativas y en particular, los de segundo medio tienen un mayor aumento en logros entre pre y post test, con 9,8%, sin embargo, los mejores resultados los tienen los docentes de tercero medio que en el post test obtienen un 89,3% del logro.

La tabla 4presenta los resultados del pre y post test aplicado a profesores que participaron en salas del proyecto de segundo medio, según unidad (contenido).

Tabla 4. Porcentaje de logros en prueba de pre y pos test para profesores de segundo medio.

Test	Nº Prof.	PRC*	Operatoria	Probabilidades	Circunferencia	Semejanza	Modelos
Pre test	39	66,21%	76,50%	58,97	52,99%	65,38%	72,44%

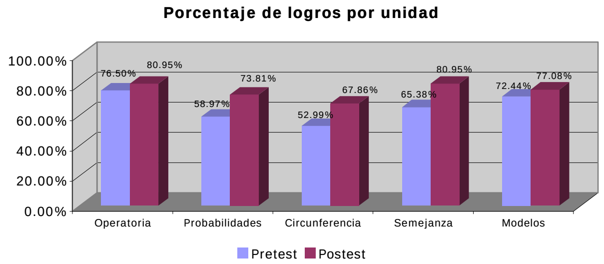
[5] *Contenidos segundo medio:* "Operatoria de expresiones algebraicas", "Probabilidades", "La circunferencia y sus ángulos", "Semejanza de figuras planas", "Modelos matemáticos de situaciones reales". *Contenidos tercero medio:* "Euclides y trigonometría", "Función cuadrática y raíz cuadrada", "Probabilidades", "Desigualdades e inecuaciones".

Post test	42	76,02%	80,95%	73,81	67,86%	80,95%	77,08%
Diferencia		**9,81%**	**4,45%**	**14,84%**	**14,87%**	**15,57%**	**4,64%**

*PRC: porcentaje de respuestas correctas

La figura 1 muestra los resultados comparativos entre pre y post test, en todas las unidades, para los resultados de los profesores de salas de segundo medio.

Figura 1. Resultados de logros por unidad pre y post test en profesores de segundo medio.



Se observa que en el post test los docentes mejoraron en forma significativa el logro de sus resultados con un porcentaje de respuestas correctas en promedio de 9,8%. Las mayores diferencias se observan en las unidades que tenían en el pre test más bajos resultados. De esta manera, hay una diferencia a favor del post test en todas las unidades, destacándose Semejanza de figuras planas con 15,6%, la de Circunferencia y sus ángulos con 14,9% y Probabilidades con 14,8%, que corresponden a aquellos contenidos con mayores dificultades para los docentes, según información que se posee a nivel nacional. De igual manera se destaca que las unidades con mejores resultados en el post test son: Operatoria y Semejanza de figuras planas con 81,0%.

La tabla 5 presenta los resultados del pre y post test aplicado a profesores que participaron en salas del proyecto de tercero medio, según unidad (contenidos).

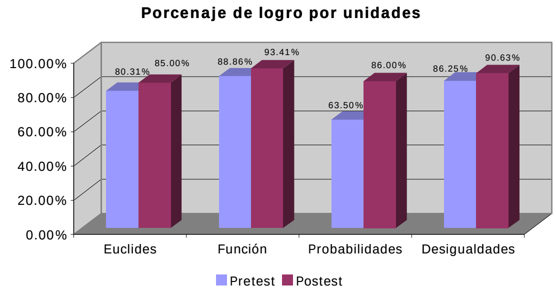
Tabla 5. Porcentaje de logros en prueba de pre y post test para profesores de tercero medio.

Test	Nº Prof.	PRC*	Euclides	Función	Probabilidades	Desigualdad
Pre test	40	81,79%	80,31%	88,86%	63,50%	86,25%
Post test	40	89,29%	85,00%	93,41%	86,00%	90,63%
Diferencia		7,5%	4,69%	4,55%	22,5%	4,38%

*PRC: porcentaje de respuestas correctas

La figura 2 muestra los resultados comparativos entre pre y post test, en todas las unidades, para los resultados de los profesores de tercero medio.

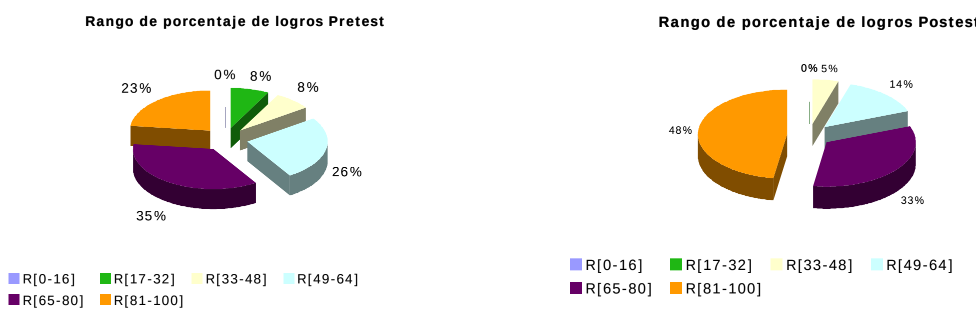
Figura 2. Resultados de logros por unidad pre y post test en profesores de tercero medio.



Se observa que en el post test los docentes mejoraron en forma significativa el logro de sus resultados con un promedio de porcentaje de respuestas correctas de 7,5%. Las mayores diferencias se observan en las unidades que tenían en el pre test más bajas. De esta manera se observa una diferencia a favor del post test en todas las unidades, destacándose Probabilidades con un aumento de 22,5% y el resto de las unidades con un aumento cercano al 5%. De igual manera se destaca que las unidades con mejores resultados en el post test son: Función Cuadrática y raíz Cuadrada con un 93,4% y Desigualdades e Inecuaciones con un 90,6%.

La figura 3 muestra la distribución de los porcentajes de logros en las pruebas de pre test y post test para segundos medios.

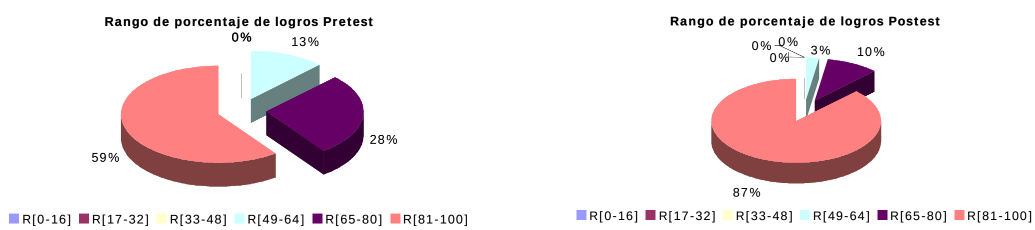
Figura 3. Resultados por rango de porcentaje de logros pre y post test en profesores de segundo medio



Se observa que un 42% de los docentes obtienen porcentajes de logros menores a 64% en el pre test, sin embargo, en el post test el porcentaje de docentes en este rango baja a un 19%. Por otra parte, en el pre test un 58% de los docentes tiene porcentajes de logros sobre los 65%, el cual se incrementa significativamente a un 81% de los docentes que tiene logros en el post test. Finalmente en el rango superior de logros, es decir igual o superior a 81%, en el pre test sólo un 23% de los docentes se encuentra en él, frente a un 48% de los docentes en el post test, con una diferencia de 25%.

La figura 4. muestra la distribución de los porcentajes de logros en las pruebas de pre test y post test para terceros medios.

Figura 4. Resultados por rango de porcentaje de logros pre y post test profesores de tercero medio.



Se puede observar que en un 13% de los docentes, los porcentajes de logros son menor a 64% en el pre test; sin embargo, en el post test el porcentaje de docentes en este rango baja significativamente a un 3%. Por otra parte, en el pre test un 87% de los docentes tiene porcentajes de logros sobre los 65%, el cual se incrementa significativamente a un 97% de los docentes que tiene logros en el post test igual o superior a 65%. Finalmente se observa que en el rango superior de logros, es decir, igual o superior a 81%, en el pre test un 59% de los docentes se encuentra en este rango, frente a un 87% de los docentes en el post test, con una diferencia de 28%.

Evaluación alumnos

Descripción sitios experimentales

En forma adicional, a los datos de número de establecimientos, salas y alumnos presentados anteriormente en las tablas 1 y 2, se presenta la siguiente tabla con el número de salas y alumnos de segundo medio que participan en el proyecto, tanto en salas experimentales como control. Las salas experimentales o salas proyecto, hicieron uso del modelo interactivo para el aprendizaje matemático, las salas control hicieron uso de estrategias y metodologías habituales utilizadas en sus respectivos establecimientos.

Tabla 6. Número de salas y alumnos de segundo medio.

Región	Proyecto		Control	
	Salas	Nº Alum.	Salas	Nº Alum.
Quinta	19	779	6	270
Sexta	9	372	5	225
Metropolitana	22	935	24	1080
Total	50	2.086	35	1.575

La tabla 7 presenta el número de salas y alumnos de tercero medio que participan en el proyecto, tanto en salas experimentales como control.

Tabla 7. Número de salas y alumnos de tercero medio.

Región	Proyecto		Control	
	Salas	Nº Alum.	Salas	Nº Alum.
Quinta	17	741	4	180
Sexta	10	440	7	318
Metropolitana	23	990	21	945
Total	**50**	**2.171**	**32**	**1.440**

Resultados prueba de pre test

La tabla 8 presenta el porcentaje de respuestas correctas en pre test de segundos y terceros medios. Esta prueba mide los contenidos que los alumnos deberían manejar como conductas de entrada para el nivel que están ingresando.

Tabla 8. Porcentaje de respuestas correctas prueba de pre test segundo y tercero medio por grupo.

Grupos	PRC 2º Medio	PRC 3º Medio
Control	36,43	31,73
Experimental	38,31	35,08
Total	**37,75**	**33,8**

Los grupos control y experimental de segundo medio tienen resultados muy cercanos. De igual manera la diferencia entre el grupo control y experimental en tercero medio es de 3,4%, a favor de este último, que no es estadísticamente significativo.

La tabla 9 presenta el logro de aprendizajes en el pre test de segundos y terceros medios, según establecimientos municipalizados y subvencionados.

Tabla 9. Porcentaje de respuestas correctas pre test segundo y tercero medio según tipo de dependencia.

Tipo de dependencia	Segundo medio		Tercero medio	
	Control	Experimental	Control	Experimental
Municipal	37,85	33,72	33,5	32,89
Particular Subvencionado	35,05	41,19	30,26	36,90

Se puede observar que tanto en segundo como en tercero medio en los liceos municipalizados hay una diferencia de 4,1% y 0,6%, respectivamente, a favor del grupo control, sin embargo hay una diferencia de 6,1% y 6,6%, respectivamente, a favor de los colegios experimentales de colegios subvencionados.

Resultados prueba de unidad

La tabla 10 presenta el logro de aprendizajes de los alumnos de segundo medio, en las pruebas de unidad. Estas pruebas corresponden a instrumentos proporcionados por el proyecto mediante un sistema computacional. Los docentes lo pueden imprimir, multicopiar, aplicar a sus alumnos y posteriormente ingresar las respuestas de cada uno de ellos, para este fin, el sistema proporciona diferentes reportes en tiempo real. Las pruebas de unidad son aplicadas a los alumnos una vez que estos han trabajado el total de contenidos de una undad temática.

Cabe señalar que se presentan aquellos resultados donde hay un número apropiado de establecimientos que ingresaron dichos resultados.

Tabla 10. Porcentaje de logros en pruebas de unidad y número de alumnos que la rinde de segundo medio.

Unidad	Control		Experimental		Diferencia
	Nº Alumnos	PRC	Nº Alumnos	PRC	
Operatoria de expresiones algebraicas	1.055	45,5%	1.581	49,5%	4%
Semejanza de figuras planas	574	37,5%	1.243	46,4%	9%
Probabilidad y estadística	125	50,2%	884	53,1%	3%

Se observa que en las tres pruebas de unidad el grupo experimental obtienen mejores resultados que el grupo control, destacándose la unidad de Semejanza de figuras planas, con una estadísticamente significativa de 9% a favor del grupo experimental.

La tabla 11 presenta el logro de aprendizajes de los alumnos de tercero medio en las pruebas de unidad. Cabe señalar que se presentan aquellos resultados donde hay un número apropiado de alumnos cuyos profesores aplicaron la prueba y subieron sus respuestas al sistema. Estos son datos obtenidos del sistema de evaluación implementado, en el que los profesores ingresan las respuestas de sus alumnos y el sistema entrega diferentes reportes en forma automática.

Tabla 11. Porcentaje de logros en pruebas de unidad y número de alumnos de tercero medio.

Unidad	Control		Experimental		Diferencia
	Nº Alumnos	PRC	Nº Alumnos	PRC	
Euclides y Trigonometría	766	34,2%	1.488	50,8%	17%
Función Cuadrática y raíz Cuadrada	290	32,7%	680	52,0%	19%
Probabilidades	298	29,0%	163	56,7%	28%

En las tres pruebas de unidad el grupo experimental obtiene resultados estadísticamente significativos mejores que el grupo control, destacándose la unidad de Probabilidades, con una diferencia de 28% a favor del grupo experimental.

Resultados prueba final

Al grupo experimental y control se aplicó una prueba final que midiera el total de contenidos tratados por cada sala. Se construyó un sólo instrumento con el total de contenidos a trabajar en el nivel, asociándosele un tiempo de respuesta. Es así como los alumnos de salas que trabajaron el total de contenidos respondían el total de la prueba en los tiempos definidos. Aquellos que vieron menos contenidos se les entregaron pruebas que incluían sólo estos temas y se dispuso de tiempos proporcionales en relación al número de unidades trabajadas.

Para la aplicación, asistieron a las salas experimentales y control profesionales de las Universidades participantes, quienes aplicaron las pruebas y posteriormente tabularon sus resultados.

La tabla 12 presenta el logro de aprendizajes en la prueba final de segundo y tercero medios.

Tabla 12. Porcentaje de respuestas correctas prueba final segundo y tercero medios por tipo de grupo.

Grupos	PRC 2º Medio	PRC 3º Medio
Control	44,21	34,56
Experimental	48,26	47,39
Diferencia	4,1	12,8

En ambos niveles, los grupos experimentales tienen mejores resultados que los gruposcontrol. Existe una diferencia estadísticamente significativa a favor del grupo experimental en tercero medio, con una diferencia de 12,8%, a favor de este último.

La tabla 13 presenta el logro de aprendizajes en la prueba final de segundo y tercero medios, según establecimientos municipalizados y subvencionados.

Tabla 13. Porcentaje de logro de aprendizajes, prueba final segundo y tercero medio. logros según tipo de dependencia.

Tipo de dependencia	Segundo medio		Tercero medio	
	Control	Experimental	Control	Experimental
Municipal	46,29	42,38	31,68	43,79
Particular Subvencionado	42,38	53,30	36,47	50,69

En todos los grupos y niveles, con excepción de las salas control de segundo medio de establecimientos municipalizados, obtienen mejores resultados los grupos experimentales. En efecto, tanto en los colegios subvencionados de segundo y tercero medio y en los municipalizados de tercero medio, el grupo experimental tiene mejores resultados que el grupo control, con diferencias estadísticamente significativas que van entre 10,9% y 14,2% a favor del grupo experimental, encontrándose las mayores diferencias a favor de los grupos experimentales en el nivel de tercero medio.

En forma sistemática y en las distintas evaluaciones realizadas a nivel nacional, como lo son la prueba SIMCE[6] y PSU[7], los alumnos de establecimientos particulares subvencionados tienen mejores

[6] SIMCE es la sigla para el Sistema de Medición de la Calidad del Aprendizaje mediante el que se miden en Chile los logros alcanzados por todos los estudiantes de un determinado nivel, aplicado todos años a alumnos de grado 4 y año por medio, intercalando a alumnos de grado 8 y 10.

[7] PSU es la sigla para la prueba de selección de ingreso a la universidad, que se aplica a todos los alumnos egresados de cuarto año medio (grado 12), que deseen continuar estudios universitarios.

resultados que los alumnos de establecimientos municipalizados. Sin embargo, durante la implementación de este proyecto durante tres años, se ha obtenido que los establecimientos municipalizados de grupos experimentales, en este caso de segundo y tercero medio, tienen resultados iguales o mejores, estadísticamente significativos, que los establecimientos subvencionados de grupo control. Este último aspecto, junto a los mejores resultados de los grupos experimentales, es uno de los logros más relevantes del proyecto.

Conclusiones

La implementación del modelo interactivo para el aprendizaje matemático en el contexto del proyecto *Enlaces Matemática*, permitió observar que es factible, aunque difícil, lograr un cambio cultural en relación a cómo se realiza el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática actualmente. En particular, se ha demostrado que es factible cambiar los roles, tanto del profesor como del alumno, observándose cambios significativos a lo que es una sala de clase tradicional.

Se ha avanzado sistemáticamente en una estrategia de innovación curricular que comenzó con alumnos de grado 10 los años 2004-2005, para luego implementarse en los grados 10 y 11 durante el año 2006, para que el año 2007 se implemente con alumnos de los grados 9 al 12.

Esta experiencia ha permitido observar que hay un cambio cultural respecto a la disposición hacia la matemática y tiende a generar un pensamiento optimista, desde la perspectiva que todos pueden aprender matemática.

Los materiales permiten “nivelar hacia arriba” el trabajo del docente y los logros de aprendizaje. Por medio de los recursos disponibles y acompañamiento a los docentes, se dispone para estos del conocimiento matemático del más alto nivel.

En el marco del modelo interactivo, se ha generado un texto distinto a los tradicionales, diferenciando el texto del profesor, del alumno y el de referencia (con la matemática propiamente dicha), de calidad, evaluado interna y externamente[8], pertinente para profesores y alumnos, basado en la reforma educacional y principalmente integrado con diferentes recursos (material concreto y tecnológico) y estrategias de acompañamiento a los docentes.

Se pudo medir que los profesores participantes del proyecto mejoraron en el conocimiento de los contenidos matemáticos que trabajaron con sus alumnos. Estos participaron de un proceso de evaluación, consistente en un pre y post test, aplicados en marzo y diciembre del 2006, respectivamente, que medía sus conocimientos en contenidos que los profesores trataban en los niveles en que éstos participaban en las salas proyectos. Tanto en el post test de la prueba de segundo medio como de tercero medio, los profesores mejoraron significativamente los resultados, con un 9.8% y un 7.5%, respectivamente. Se destaca que aquellos contenidos más deficientes en el manejo de los docentes, como geometría y probabilidades, aumentaron entre 15% y 23%. Además, en comparación con el pre test, se observa un aumentó del 25% en el número de profesores que obtuvieron en el post test sobre 81% de logros de aprendizajes. Cabe señalar que estos resultados son logrados no en el marco de un proceso de formación directa de los docentes, sino en un proceso de acompañamiento y apoyo en la implementación del modelo interactivo, que involucra cambios e innovaciones en las prácticas docentes, en la apropiación de un modelo de innovación curricular y en la incorporación de diferentes recursos, tanto para profesores como alumnos.

---

[8] En forma sistemática se ha evaluado el modelo y sus distintas componentes, al interior del Centro Comenius-USACH. Además, en forma externa, un grupo de profesionales, altamente calificados, de educación matemática de la Pontificia Universidad Católica de Chile, por encargo del Centro de Educación y Tecnología, Red Enlaces, del Ministerio de Educación de Chile, evaluó el modelo interactivo para el aprendizaje de matemática, concluyendo con altas valoraciones a su metodología, coherencia, logros de aprendizajes y buena recepción por parte de profesores y alumnos.

Respecto a los logros de aprendizajes de los alumnos, se trabajó con un grupo experimental que utilizó el modelo interactivo para el aprendizaje y un grupo control que no implementó dicho modelo, ni tampoco hizo uso de los recursos proporcionados por el proyecto. Se puede señalar que en todas las unidades los alumnos de los grupos experimentales tienen mejores resultados que los del grupo control, destacándose los resultados de tercero medio en donde los alumnos de cursos experimentales superan entre 17% y 28% a los de grupo control. En las pruebas finales, que incluyen la totalidad de contenidos que fueron trabajados por los alumnos, las salas experimentales, tanto en segundo como en tercero medio, tienen mejores resultados que los alumnos de salas control, con un aumento del 4% y 13%, respectivamente. Además, 20% y 10% más de alumnos de salas experimentales, de segundo y tercero medio, respectivamente, tienen más de 48% de logro de aprendizajes, en relación a alumnos del grupo control.

Un aspecto de interés nacional, ha sido mejorar y disminuir la brecha entre los estudiantes de establecimientos municipalizados (financiados sólo con aportes del estado) y los particulares subvencionados (financiados con aportes del estado, de los padres y/o de otras instituciones). En este aspecto, se puede señalar que los resultados de los establecimientos municipalizados, tanto de segundo como de tercero medio, de salas experimentales son superiores a las salas particular subvencionadas del grupo control.

Los resultados son significativamente superiores en tercero medio (grado 11), pues las evaluaciones finales de los grupos experimentales son superiores a las de los grupos de control, tanto en establecimientos municipalizados como particular subvencionados. Al ser primer año en que se implementa el proyecto en este nivel, no es factible de analizar tendencias; sin embargo, algunas explicaciones podrían deducirse, a la luz de los resultados de la evaluación docente, ya que estos educadores tienen mejores resultados que los profesores que trabajan en salas de segundo medio, tanto antes de iniciarse el proyecto como al final, con una diferencia en el pre test de 15.3% y en el post test es de 13.3%, a favor de los docentes de tercero medio. Otra explicación podría ser que un 15% más de docentes de tercero medio, en relación a los de segundo medio, señala en cuestionario que se les aplicó, que prepara sus clases siempre o frecuentemente.

Se ha podido observar, de forma sistemática en los distintos años en que se ha implementado el proyecto, que los establecimientos con mejores resultados son aquellos que han realizado una adecuada apropiación del modelo por parte de los profesores y alumnos, y han logrado un apoyo e interés permanente por parte de sus equipos directivos.

En cuestionario aplicado a los docentes, entre 44% y el 50% señala trabajar frecuentemente o siempre con sus alumnos en el laboratorio de computación haciendo uso de software matemático proporcionado por el proyecto y más del 80% señala usar estos recursos. Este es un aspecto altamente valorado por ellos y en particular por los alumnos. Se ha podido observar y según información proporcionada por los profesores, que por medio del uso de estos recursos es factible incentivar más a los alumnos, lograr que estos trabajen autónomamente y, en especial, aquellos que tienen mayor resistencia a la matemática se motivan en forma significativa. El uso e integración de estos recursos no ha sido fácil y nos muestra que se debe seguir trabajando desde la coordinación de este proyecto en mejorar su uso.

Si bien se disponen de numerosos recursos tecnológicos, pensados desde la disciplina, descritos y acompañados de sugerencias en el material del profesor de cómo y cuándo usarlos con múltiples y variados accesos (disco compacto, web, plataforma virtual), desarrollo de talleres para los docentes que muestran los recursos tecnológicos y los apoyan para conocerlos y saber cómo usarlos, sin embargo, existen diferentes elementos que hacen complejo un uso mejor y adecuado. Alguno de estos motivos son: no siempre el equipamiento es el adecuado, en calidad y cantidad; es complejo lograr que la sala “funcione” y exista una coordinación entre profesores y los coordinadores de laboratorios de *Enlaces*, de manera que la sala esté preparada adecuadamente para el trabajo que se realice; otra dificultad es el número de alumnos por computadora (3 a 4); en algunas ocasiones existe la imposibilidad de trabajar con cursos completos (40 o 45 alumnos) por falta de espacio; otro se refiere al temor persistente de algunos docentes o falta de capacidad de preparar las clases para su desarrollo en el laboratorio. Estos elementos conspiran en una integración adecuada de la tecnología.

De todas maneras, el Centro Comenius de la Universidad de Santiago de Chile, dispone de experiencias exitosas en la incorporación de las tecnologías, no sólo el uso de laboratorios de computación, sino también el de computadoras con proyectores en la sala de clases, uso de pizarras interactivas, incorporación de computadoras portátiles, entre otros, que permiten mostrar que efectivamente es posible su incorporación en los procesos educativos.

Según los profesores, en cuestionario que se les aplicó al final del proyecto, los alumnos mejoran, entre otros aspectos, las siguientes habilidades y competencias, gracias a la implementación del modelo interactivo: manejo y uso de recursos tecnológicos; autoestima y trabajo colaborativo; trabajo por descubrimiento; argumentación, formalización y razonamiento matemática; planteamiento y resolución de problema; conjeturar, analizar y cuestionar; lectura comprensiva; y búsqueda de información en variados medios.

La mayoría de los docentes, según cuestionario aplicado, señala que por la implementación del proyecto, en su establecimiento se mejoraron las condiciones tecnológicas (mejoras en equipos computacionales e Internet) y se adquirieron nuevos equipos (proyector *datashow*, computadoras, pizarras interactivas).

Profesores y alumnos valoraron el modelo, los materiales, el apoyo de los profesionales que los acompañaban y en particular el espacio de formación docente que responde a sus reales necesidades.

Existen deficiencias del proyecto que son factibles de mejorar, para lo cual se está proyectando algunas adecuaciones de la implementación del modelo. Éstas se refieren principalmente a: un cambio fundamental a la implementación del proyecto que dejaría de centrarse en una sala de clases (un profesor y sus alumnos), hechos que los hace sentirse aislados al interior de su colegio, para convertirse en una estrategia de trabajo con el departamento de matemática, jefes técnicos, directivos y coordinadores de recursos tecnológicos (coordinadores de laboratorios de computación en el proyecto *Enlaces*). De esta manera se mira en forma más integrada el proyecto con los actores que son relevantes y aumentan las posibilidades de mejorar sus resultados y una apropiación por parte del colegio y no sólo de algunos pocos profesores.

Una segunda adecuación es el proceso de automatización para disponer de instrumentos de evaluación y sus reportes en línea, vinculando estos resultados con contenidos y sugerencias para docentes y alumnos.

Además, se requiere mejorar el apoyo en uso de recursos tecnológicos; en este sentido se trabajará directamente en dos líneas, una donde el Centro de Educación y Tecnología, Red Enlaces, del Ministerio de Educación de Chile, para cada nivel participante del proyecto, entregará una computadora portátil y un proyector *(datashow)* para la sala de clases, de esta manera se desarrollará un modelo de uso que mejore la implementación del proyecto. Además, en una segunda línea, se aumentará el apoyo directo a los docentes, implementando talleres de uso de tecnología en el marco del modelo en cada colegio, así como el trabajo que se realice en la plataforma virtual.

Otro aspecto, se refiere al mejoramiento y sistematización del apoyo realizado en el proceso de acompañamiento tanto presencial como virtual, junto con disponer de mejores medios (foros de discusión, videos, entre otros), para poder hacer más explícito lo que se espera de una adecuada implementación del modelo interactivo y del tratamiento de los distintos contenidos.

Bibliografía

Ábalos, B. (2003). La formación de profesores y su desarrollo profesional. Prácticas innovadoras en busca de políticas. El caso de Chile.en Cox, C., editor. *Políticas educacionales en el cambio de siglo*, Editorial Universitaria. Santiago, Chile.

Brünner, J. (2003). *Informe Capital Humano en Chile*. Santiago Chile: Universidad Adolfo Ibáñez. Escuela de Gobierno. Santiago, Chile.

Cox, C. (2003). El nuevo currículum del sistema escolar, en Hevia, R. *La Educación en Chile Hoy*. Ediciones Universidad Diego Portales, Santiago, Chile.

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. Sigma. Nº 19. En http://www.berrikuntza.net/edukia/matematika/sigmaaldizkaria/sigma_19/TENDENCI.PDF

Goldenberg, P. (2000). Thinking (And Talking) About Technologyin Math Classrooms. En *Education Development Center*, Inc. http://www2.edc.org/mcc/iss_tech.pdf

Jonassen, D. (2000a). *Computers as mindtools for schools*. EE.UU.: Prentice-Hall.

Jonassen, D. (2000b). Toward a Meta-Theory of Problem Solving. *Educational Technology: Research & Development,* 48 (4), 63-85.

Lacasa, P. & Herranz P. (1995). *Aprendiendo a aprender: Resolver problemas entre iguales*. Madrid: Ministerio de Educación y ciencia CIDE.

Monereo, C. (2000). *Estrategias de aprendizaje*. Madrid: Visor.

OCDE. (2004). Revisión de políticas nacionales de educación, Chile. Paris: OCDE.

Onrubia, J., Cochera, M., y Barberà, E. La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. En Coll, C. Palacios, J. y Marchesi, A. (2001). *Desarrollo psicológico y educación. Psicología de la educación escolar.* Madrid: Alianza.

Oteiza, F. & Villarreal, G. (2005). *Enlaces Matemática: Una experiencia de transferencia al aula*. Primer encuentro de proyectos de innovación tecnológica, Centro de Educación y tecnología Ministerio de Educación. Santiago, Chile.

Oteiza, F., Araya, R.& Miranda, H. (2004). *Aprender matemáticas creando soluciones: Material del profesor*. Santiago, Chile: Editorial Zig-Zag.

Oteiza, F. & Miranda, H. (2004). *Modelo interactivo para el aprendizaje matemático*. Santiago, Chile: Editorial Zig-Zag.

Pifarré, M. y Sanuy, J. (2002). La resolución de problemas entre iguales: incidencias de la mediación del ordenador en los procesos de interacción y el aprendizaje. *Infancia y Aprendizaje.* 25 (2), 209-225.

Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. Mexico: Trilla. (1ª Edición 1957).

Rizo, C. y Campistrous, L. (2002). *Didáctica y solución de problemas*. UNESCO. En http://www.unesco.cl/pagina_ciencia_02/Documento/didactica_y_solucion_de_problemas.doc

Schoenfeld, A. (1989). *La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas.* En Resnick, L. y Klopfer, L. (1989). Curriculum y Cognición .Buenos Aires: Aique.

Villarreal, G. (2005). La resolución de problemas en matemática y el uso de las TIC: resultados de un estudio en colegios de Chile, *Edutec. Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, Núm. 19./julio 05 http://edutec.rediris.es/Revelec2/revelec19/Villarreal.pdf

Enseñanza del álgebra mediante representaciones gráficas en la solución de problemas

Rosa del Carmen Flores Macias, Raúl Castellanos Cruz
Universidad Nacional Autónoma de México

Palabras clave
Álgebra, matemáticas, solución de problemas.

La enseñanza del álgebra debe considerar el proceso de aproximación y comprensión de dos conocimientos nuevos para los alumnos: el simbolismo específico y la resolución de problemas por medio del uso ecuaciones (Alcalá, 2002).

Diferentes autores (Lins citado por Kieran, 1989; Kieran y Filloy, 1989; MacGregor y Stacey, 2000; Pizón y Gallardo 2000) señalan las siguientes dificultades de los alumnos al comprender el lenguaje algebraico:

* *Generalización equivocada de procedimientos aritméticos.* Uso de procedimientos aritméticos, haber aprendido a pensar y operar con números específicos.
* *Resistencia a emplear ecuaciones.* En la primaria, los alumnos casi nunca usan ecuaciones, por ello cuando se les pide representar los problemas con una ecuación, los alumnos primero lo resuelven y luego intentan adivinar la ecuación.
* *Dificultades en el empleo de los signos y expresiones.* Dos dificultades centrales en el aprendizaje del álgebra son la "condensación" (cuando se tiene más de un significado para una expresión) y la "evaporación" (una pérdida del significado de los símbolos).
* *Falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y procedimientos que se usan para resolver problemas.* La confianza en métodos intuitivos y el que se centren en conseguir "de alguna forma" la respuesta va en contra que presten atención al método que utilizan.
* *Equivocaciones en la interpretación de las variables.* La experiencia de los niños en la escuela con las letras de ecuaciones se reduce a fórmulas como $A = b \times h$, esto puede provocar que los alumnos traten las letras en ecuaciones como incógnitas con un valor fijo más que como números generalizados o como variables.
* *Desconocimiento del significado de la igualdad.* Los alumnos manejan el signo de igual como un mandato operacional, una señal de hacer algo. Ignoran el significado de la igualdad como un equilibrio entre los dos miembros de la ecuación.
* *Omisión parcial de la incógnita.* Los estudiantes no perciben la incógnita en el segundo miembro en ecuaciones, por ejemplo en: $x + 2x = 3 + x$, ignoran la "x" del miembro derecho y presentan como resultado de la ecuación anterior, $3x = 3$.
* *Interpretación equivocada de la concatenación de términos algebraicos.* La concatenación en aritmética denota adición, por ejemplo 45 significa $40 + 5$; sin embargo en álgebra se refiere a la multiplicación, por ejemplo $5b$ es $5 \times b$, lo que confunde a los alumnos.
* *Conjunción de términos no semejantes.* En álgebra los términos diferentes deben tratarse en forma independiente, es común que el estudiante ignore las diferencias, por ejemplo: $3 + 5x= 8x$.
* *Inversión incorrecta de operaciones.* Los alumnos desconocen el procedimiento que lleva a la transposición de términos en una ecuación, además la realizan con una regla incorrecta.

* *Diferenciación de la incógnita y de su coeficiente.* Decodifican a x como x^1, ante la expresión x + x =, el estudiante comete el error de sumar los coeficientes en lugar de las “x” y resuelven $x + x = x^2$.

Tradicionalmente se ha tratado de atender a estas dificultades enseñando a los alumnos a resolver problemas en tres pasos: Primero aprenden las ideas, requisitos y habilidades en situaciones descontextualizadas; luego aprenden procedimientos al margen de la solución de problemas; y finalmente (y si el tiempo lo permite), en supuestos problemas de la “vida real” donde además se requieren conocimientos adicionales. Como alternativa se propone que desde el principio los alumnos resuelvan problemas a partir de sus modelos (dibujos, diagramas) que les permitan una interpretación significativa. El proceso de solución de problemas así será visto como resultado de la evolución en los conocimientos de los alumnos y no pensado como una situación de todo o nada (Lesh y Doerr, 2002).

Los modelos de los alumnos revelan su interpretación de los problemas (adecuadas o inadecuadas), de las cantidades que consideran relevantes, de las relaciones que son importantes, de las reglas que creen que gobierna las operaciones (Lesh y Doerr, 2002). Estos modelos juegan un papel central en la comprensión del álgebra pues pueden constituir un puente hacia la comprensión de los aspectos conceptuales implicados en la comprensión de un problema y su consecuente solución mediante una ecuación (Flores, 2005).

Considerando los antecedentes mencionados se propone un programa para apoyar el paso de la aritmética al álgebra basado en el empleo de modelos gráficos que propicien interpretaciones significativas de problemas algebraicos en alumnos con bajo rendimiento en matemáticas.

Método

Participaron 12 alumnos de un programa de apoyo para alumnos con bajo rendimiento (Programa Alcanzando el Éxito en Secundaria, PAES).

Se utilizó un diseño cuasi-experimental pretest- postest con grupo control. El grupo experimental (seis alumnos) participó en el programa de álgebra y el control (seis alumnos) continuó con sus actividades en el PAES. Los alumnos se asignaron considerando su disponibilidad de tiempo.

Procedimiento

En la pre evaluación se analizó el tipo de solución que los alumnos de los grupos emplearon para resolver 9 problemas de tipo algebraico seleccionados de su libro de texto, con distinto grado de dificultad (ver anexo 1). La evaluación se realizó de forma individual, sin límite de tiempo.

Se desarrollaron 10 sesiones de 50 minutos de duración. Los alumnos practicaron problemas correspondientes a diversas situaciones. Emplearon lápiz, papel y el tablero de fichas para modelar. En términos generales la intervención se conformó de tres fases.

Fase 1

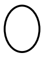
Asignación de alumnos a los grupos y pre evaluación.

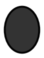
Fase 2

Aplicación del programa. En cada sesión se resolvía un problema para que los alumnos aprendieran a representarlo mediante ecuaciones. Se empleó un modelo propuesto por Pizón y Gallardo (2000) que se adaptó para hacerlo significativo para los alumnos. Asimismo, considerando sus dificultades para estructurar sus acciones, se apoyó el aprendizaje con una estrategia de solución de problemas (ver anexo 2). Para modelar las relaciones en una ecuación de dos miembros, se empleó un tablero (rectángulo de 65 cm. por 41 cm. dividido en dos partes iguales, lado izquierdo, lado derecho, con un signo igual en medio) y fichas que representan los elementos de la ecuación de la siguiente manera:

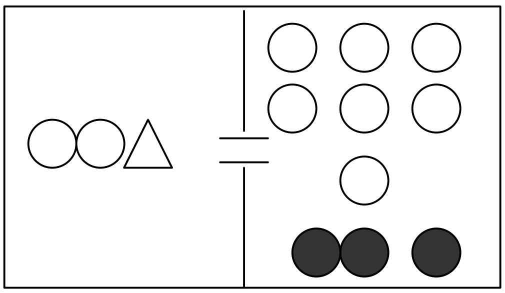
 Representa una incógnita con signo positivo.

 Representa una incógnita con signo negativo.

 Representa la unidad con valor positivo.

 Representa la unidad con valor negativo.

Un ejemplo de cómo modelar una ecuación por medio del tablero es el siguiente:
$2x = 7 - 3$



Al trabajar en el tablero los alumnos aprendieron que:

* Para despejar la incógnita se aplica un valor inverso en ambos miembros e una igualdad, esta se mantiene pero los miembros se modifican. Usualmente sólo se dice a los alumnos, por ejemplo, “si está sumando pasa restando”, lo que dificulta comprender el procedimiento en la ecuación. En el modelo, al pasar una ficha de un lado a otro de la ecuación cambia de color, lo que simula el cambio al signo que implica la operación inversa.
* En el caso de la multiplicación o división, el cambio a la operación inversa se representó señalando que cuando la literal y la incógnita están juntas, se indica una multiplicación y que la ecuación se transforma agregando a ambos lados de la igualdad el inverso correspondiente. La división que se representó separando el dividendo y el divisor con una barra del mismo material que las fichas.
* Para representar la anulación entre términos emplearon dos fichas de la misma figura y diferente color, colocadas en el mismo lado de la ecuación.

Para aprovechar la riqueza de la interacción social durante el aprendizaje y facilitar la adopción de la estrategia de solución de problemas se adaptó la metodología de enseñanza recíproca (Pallincsar y Brown, 1985) en la que se distribuyen diferentes actividades en el grupo para dar en conjunto una solución.

Una sesión típica iniciaba leyendo el problema y discutiendo de qué trataba. Los alumnos procedían a resolverlo con su propio modelo de solución, algunos alumnos lo resolvían con dibujos (palitos y bolitas), y otros de forma aritmética, posteriormente se utilizaba el modelo propuesto (tablero de fichas) para generar la ecuación y resolverla. El grupo representaba la solución por medio del tablero y, a la par, el tutor y los alumnos escribían en el pizarrón la ecuación algebraica conforme a lo que se realizaba en el tablero, esto con el fin de que los alumnos comprendieran la ecuación haciendo un vínculo con lo que realizaban en el modelo. Gradualmente, los alumnos tomaron el control y la responsabilidad completa en la solución del problema.

Fase 3

Post evaluación de los grupos: Ambos grupos resolvieron los mismos problemas presentados en la pre evaluación. Algunos de los alumnos del grupo experimental pidieron usar el tablero y se les permitió.

Resultados

Para realizar el análisis de las soluciones de los alumnos, se adaptó la propuesta de Flores (2005) para identificar los niveles de conocimiento. Estas categorías fueron:

1. *No canónica.* En esta solución, el alumno aplica su conocimiento de una clase de problema que no corresponde al que se le plantea.
2. *No algorítmica.* En la solución generalmente se modela, mediante objetos o marcas gráficas, los elementos y las relaciones matemáticas contenidas en el problema.
3. *Aritmética.* La solución se basa en las operaciones aritméticas.
4. *Algebraica con modelo.* Se representan el problema mediante una ecuación y se calcula el valor de la incógnita tomando el modelo como apoyo.
5. *Algebraica.* El alumno representa el problema mediante una ecuación
6. *No solucionó.* El alumno no intenta una solución y deja sin resolver el problema.

En la tabla 1 y 2 se observan las diferencias en la solución de los alumnos del grupo control y experimental en la post evaluación. Si bien se observa una evolución en las soluciones de ambos grupos, las soluciones del grupo experimental muestran mayores cambios, aunque no todos los alumnos del grupo experimental llegan a hacer una representación mediante una ecuación algebraica y recurren a la solución aritmética.

--Insertar Tabla 1---

--Insertar Tabla 2--

Conclusiones

Las diferencias en las soluciones del grupo experimental, evidencian que la comprensión de las demandas involucradas en una representación algebraica es un proceso evolutivo a largo plazo. En las soluciones de los diversos problemas, se lograron identificar las transiciones entre las representaciones, se observó de la pre evaluación a la post evaluación, el paso de representaciones aritméticas a representaciones algebraicas, o de representaciones no canónicas a representaciones aritméticas.

Con base en los resultados obtenidos se pudo analizar, de acuerdo con Flores (2002), que la construcción de una representación de un determinado problema se inicia cuando el alumno comprende un problema y lo representa poniendo en juego los conocimientos ya existentes o construye otros nuevos. El tipo de solución que un alumno utiliza depende en gran medida de sus modelos, estos juegan un papel central en la comprensión del álgebra pues pueden constituir un puente hacia la comprensión de los aspectos conceptuales implicados en la representación de un problema y su consecuente solución mediante una ecuación (Flores, 2005).

Vergnaud (1990) señala que las diferencias entre una solución algebraica y una aritmética son complejas pues la primera requiere una representación simbólica con letras de las relaciones expresadas en el problema para generar una ecuación y resolver la incógnita. Por esta razón consideramos que es muy importante que los alumnos cuenten con la posibilidad de modelar un problema lo que les permita tomar conciencia de las similitudes y diferencias entre ambas formas de solución.

Referencias

Alcalá, M (2002). La construcción del lenguaje matemático. México: Grao.

Flores, M. R. C. (2002). El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación. Aguascalientes: Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Flores, M. R. C. (2005). El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. Educación Matemática 17, 2, 7 -34.

Kieran, C. y Filloy, Y. (1989). EL aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las ciencias. 7(3), 229 - 240.

Kieran, C. (1997). Mathematical concepts at the secondary school level: the learning of algebra and function. En T. Nunes y P. Bryant (Eds...) Learning and teaching mathematics: An international perspective (133 – 157). East Sussex UK: Psychology Press.

Lesh, R. y Doerr, H. (2002). Beyond constructivism, models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching. USA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Mac. Gregor, M. y Stacey, K (2000). Incógnitas con valores cambiantes y múltiples referentes en el álgebra de los alumnos. Educación matemática. 12(3), 30 - 40.

Pizón, M. y Gallardo, A. (2000). Semántica versus sintaxis en la resolución de ecuaciones lineales. Educación matemática, 12(2), 81 – 96.

Pallincsar, A. S. y Brown, A. L. (1985). Reciprocal teaching of comprehension fostering and monitoring activities. Cognition and Instruction, 1, 117 – 175.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. En J. Kilpatrick y P. Nesher (eds.) Matheamtics and cognition (pp 14 – 30). Cambridge: University Press.

Tabla 1. Porcentaje de alumnos del grupo experimental que respondieron los problemas* en la pre y post evaluación en cada categoría.

Tipo de solución		Problemas								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Aritmética	*Pre*	*100*	*100*	*100*	*100*	*33.33*	*100*	*100*	*100*	
	Post		**16.66**	**16.66**			**16.66**		**16.66**	
Algebraica con modelo	*Pre*									
	Post	**33.33**	**16.66**	**33.33**	**33.33**		**16.66**	**33.33**	**33.33**	**16.66**
Algebraica	*Pre*									
	Post	**66.66**	**66.66**	**33.33**	**66.66**	**66.66**	**66.66**	**66.66**	**66.66**	**81.33**
No solucionó	*Pre*					*66.66*				*100*
	Post					**33.33**				

* El número de problema corresponde a la lista que se presenta en el anexo 1

Tabla 2. Porcentaje de alumnos del grupo control que respondieron los problemas* en la pre y post evaluación en cada categoría.

Tipo de	Problemas

Solución		1	2	3	4	5	6	7	8	9
No canónica	*Pre*									
	Post						**16.66**			
No Algorítmica	*Pre*									
	Post				**16.66**	**16.66**	**33.33**			
Aritmética	*Pre*	*83.33*	*50*	*50*	*50*	*16.66*	*50*	*16.66*	*83.33*	
	Post	**50**	**66.66**	**81.33**	**33.33**	**33.33**	**50**	**66.66**	**66.66**	
Algebraica con Modelo	*Pre*									
	Post									
Algebraica	*Pre*									*33.33*
	Post									**66.66**
No solucionó	*Pre*	16.66	50	50	50	83.33	50	83.33	16.66	66.66
	Post	**50**	**33.33**	**16.66**	**50**	**50**		**33.33**	**33.33**	**33.33**

* El número de problema corresponde a la lista que se presenta en el anexo 1

Anexo 1: Problemas

1. Monedas.

Andrés tenía en su mochila 8 monedas del mismo valor, además, su hermano con motivo de su cumpleaños, le da $19. En total Andrés tiene ahora en su mochila $59. Ahora necesita saber el valor de las monedas que tenía al principio.

2. Convivio.

Josué tiene $15 más que César y juntos tienen $48 para hacer un convivio. Necesitan saber cuánto aporta cada uno para dicho convivio.

3. Excursión.

Jennifer y sus compañeros de la escuela realizaron una excursión al Ajusco que se encuentra a 37 Km de la ciudad de México. Cuando habían recorrido 13 Km el autobús se descompuso y planearon seguir a pie, pero necesitan calcular lo que tendrán que caminar.

4. Bolígrafos.

Sabiendo que todos los bolígrafos valen igual, calcula el precio de cada uno si por la compra de 3 azules, 10 rojos, y 7 negros pagas $60. Y calcula cuánto se gasta en los bolígrafos de cada color.

5. Número.

Cinco veces un número menos su doble es igual a 42, ¿cuál es el número?

6. Sueldo.

El sueldo fijo de Raúl es $20 por semana, además, él gana $2 por cada hora de tiempo extra que trabaja. Esta semana trabajó 8 horas extra y quiere saber cuánto ganará para que no lo hagan "guaje".

7. Canarios.

El papá de Carlos, que es aficionado a los pájaros, tenía en su casa 8 jaulas con canarios, en cada jaula había siete canarios. Pero a Carlos le daban pena y un día les abrió la puerta de la jaula para que vivieran libres, los canarios se escaparon y se fueron volando a un árbol cercano. El papá quiere seguir alimentándolos y necesita conocer los canarios que se fueron al árbol.

8. Flores.

Por ser el cumpleaños de Mónica, sus tres amigas le regalaron un ramo con el mismo número de flores. Cristina le regaló un ramo de rosas, Rosy otro de claveles y Elizabeth uno de alcatraces. Con ellas Mónica formó un gran ramo de 36 flores, pero necesita saber la cantidad de flores da cada tipo que tenía su ramo.

9. Amigos.

Para ir a Six Flags, siete amigos necesitan $525 y acuerdan poner la misma cantidad de dinero, tú quieres ir con 6 amigos. ¿Cuánto pondrá cada quien para juntar la misma cantidad?

Anexo 2: Componentes de la estrategia de solución de problemas

Pasos de la estrategia	Acciones	Autoinstrucciones
Análisis y planificación	1. Leer.	Leo el problema.
	2. Expresar lo que se comprendió del problema.	Lo platico.
	3. Identificar la interrogante.	Digo la pregunta.
	4. Identificar los datos numéricos que se emplearán en la solución.	Busco los datos.
Ejecución y monitoreo de La solución	5. Modelar el problema en el tablero.	Represento la ecuacion con las fichas.
	6. Solucionarlo.	Por medio del tablero busco mi solución.
	7. Vincular la representación del tablero con la ecuación escrita.	Con apoyo del tablero escribo mi ecuación.
	8. Realizar la ecuación.	Escribo.
		Resuelvo.
Evaluación de la solución	9. Comprobar la ecuación.	Compruebo mi operación.
	10. Comprobar la correspondencia entre resultado y pregunta.	Compruebo mi resultado.
	11. Redactar el resultado relacionándolo con la interrogante.	Escribo completa la respuesta.

Cambios en la educación tecnológica en Eslovenia y los nuevos enfoques en la enseñanza de la matemática

Cvetka Rojko
El Instituto Nacional de Educación de Eslovenia
cvetka.rojko@zrss.si

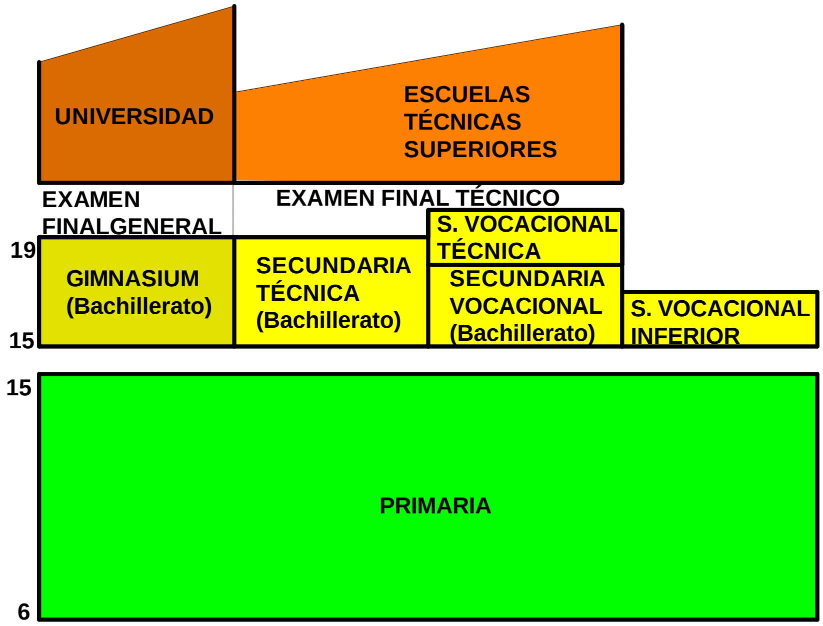
Introducción

En este artículo presentamos las nuevas pautas en la enseñanza de la matemática en Eslovenia. Se plantean los cambios en la educación tecnológica (bachillerato técnico y vocacional), pero no como una parte aislada de la educación, sino como ejemplo de los nuevos principios de la enseñanza de la matemática en todos los niveles de la educación.

Se presenta brevemente el sistema educativo de Eslovenia, las razones de los cambios del currículo, los nuevos enfoques en la enseñanza de la matemática, ejemplos de clase y actualización de profesores; veremos las experiencias positivas y los problemas en la preparación del nuevo currículo, así como los planes para el futuro.

El sistema educativo de Eslovenia

El siguiente diagrama ilustra el sistema educativo de Eslovenia.



La única educación obligatoria es la primaria, para niños con edades entre seis y quince años. Para estudiantes con edades entre quince y diecinueve es posible elegir la secundaria general (gimnasio) o la secundaria tecnológica vocacional o técnica. La secundaria vocacional dura tres años y la secundaria técnica cuatro. Es posible también hacer la educación vocacional y, si se quiere, seguir después con la secundaria técnica que, en este caso, dura dos años más. Al final de este periodo, el alumno puede optar por hacer un examen general, con opción a entrar a la universidad, o un examen técnico, con opción para entrar a una escuela técnica superior. Existe también la secundaria vocacional inferior para los estudiantes que no terminaron la primaria.

La educación secundaria general y la tecnológica están separadas. Tienen diferentes objetivos. Con la educación vocacional o técnica la gente obtiene un oficio y puede ir trabajar. Por ejemplo, con la educación vocacional puede adquirir el oficio de mecánico o el de albañil; con la educación técnica puede convertirse en técnico en áreas como la enfermería o la construcción (en este caso obtendría un título que lo equipararía con un maestro albañil). Con la secundaria general no se obtiene un oficio ni un título como técnico, este sistema se diseñó para aquellos que desean seguir una carrera universitaria.

Las razones de los cambios en el currículo

Con la entrada de Eslovenia a la Unión Europea fue necesario adaptar el sistema educativo. La Comisión Europea diseñó orientaciones básicas, como marco de acción para todos los países miembros. Unas de la más importante es la idea de dar a cada habitante la posibilidad de una educación de toda la vida, con mas libertad de oportunidades y con más posibilidades y formas de educación. Definió también las competencias clave[1] como el indicador de conocimiento más importante. Tales competencias son:

* Comunicación en la lengua materna.
* Comunicación en lenguas extranjeras.
* Competencia matemática y las competencias básicas en ciencia y tecnología.
* La competencia digital.
* Aprender a aprender.
* Las competencias sociales y cívicas.
* El sentido de la iniciativa y el espíritu de empresa.
* La conciencia y la expresión culturales.

Siguiendo estos lineamientos, en Eslovenia se elaboró el documento *Puntos de partida para la preparación de los programas educativos, vocacionales y técnicos*. En éste se tomó en cuenta tanto el conocimiento en su significado más elemental, como también las destrezas, la opinión, la metacognición, la motivación y la evolución del estudiante. En el documento se demandan conexiones más fuertes entre las diferentes áreas escolares (ínterdisciplina) y una cooperación más estrecha entre la escuela y el medio ambiente. Finalmente, otro principio importante que se maneja en los puntos de partida es el currículo abierto, que otorga más libertad a las escuelas, a los profesores y a los estudiantes.

En el área de la matemática tomamos en cuenta los problemas de la educación tecnológica. Es necesario explicar en este punto qué población llega a estas escuelas. Generalmente, los estudiantes que llegan a este sistema no han tenido mucho éxito en la primaria; Esto debido a que poseen una menor capacidad de reflexión abstracta, poseen problemas de aprendizaje o viven una problemática social que produce una inadecuada comunicación con el medio ambiente. Estos alumnos, especialmente en las escuelas vocacionales, son orientados hacia labores más prácticas, donde pueden desempeñarse mucho mejor.

Para tener una mejor idea de la situación en la práctica, realizamos una encuesta entre los profesores de matemática del bachillerato tecnológico sobre los problemas en la enseñanza en estos programas educativos.

Podemos clasificar las opiniones de los profesores en dos grupos:

[1] http://europa.eu/scadplus/leg/es/cha/c11090.htm

Problemas conectados con los estudiantes:
* Baja motivación.
* Habilidades y conocimiento bajos al inicio de la secundaria.
* Pocos hábitos de trabajo.

Problemas conectados con las reglamentaciones:
* Diferentes normativas (por ejemplo el número de alumnos en clase).
* Reglas de acreditación.
* Otras reglas.

En la encuesta solamente algunos profesores manifestaron:
* Una necesidad de cambiar los métodos de enseñanza.
* La necesidad de una actualización de profesores.

No se hizo una discusión profunda de los problemas relacionados con la normatividad, pues sólo podíamos recomendar al Ministerio de Educación los cambios y las mejoras. No es posible formarse una opinión de los problemas relacionados con la enseñanza si no se comprende la problemática del estudiante. Por tal motivo, la discusión se centró básicamente en la problemática del estudiante.

Tomando en cuenta la población específica del sistema tecnológico, podemos deducir que hay problemas para entender los conceptos matemáticos en los niveles simbólico y abstracto. Por ejemplo, para un estudiante de este nivel, decir que se tiene la función lineal $y = 0.12x + 11$ no significa nada. Para los estudiantes es sólo una serie de números y símbolos matemáticos. Si se les pregunta cuál es el valor de la función si $x = 40$, normalmente no sabrían responder, o calcularían el valor sin tener idea de lo que significa.

Sin embargo, si les planteamos un problema como el siguiente:

El pago mensual por el servicio de teléfono celular es de 11 euros al mes y 0.12 euros por minuto de llamada. ¿Cuánto se necesita pagar al mes si hablamos 40 minutos?

Para ellos, encontrar la respuesta es muy sencillo, lo cual nos lleva a pensar que no tienen problemas con el concepto de función lineal, pero necesitan algo concreto de donde asirse.

Lo anterior se debe a que, por lo general, la enseñanza de la matemática se hace en un nivel muy simbólico y abstracto; y los estudiantes (sobre todo de este sistema) no pueden entender de esta manera. Es muy posible que hayan perdido el interés y la motivación; que no estén dispuestos a trabajar con algo que no entienden y esto los lleve a tener pocos conocimientos al finalizar la primaria. No obstante, pueden trabajar con situaciones más concretas, relacionadas con su oficio o con la vida cotidiana. Se sienten seguros con este tipo de situaciones pues para ellos es algo completamente diferente, muestran interés en el trabajo y se muestran creativos.

Esta idea de conectar la matemática con su oficio fue probada, en un proyecto piloto, en tres escuelas. Los resultados fueron muy satisfactorios y se incluyó esta conexión en el nuevo currículo de matemática. A partir del estudio que hicimos sobre las necesidades de los estudiantes, ¿qué conocimiento y cuáles competencias necesitan los estudiantes que egresan de la secundaria?, echamos a andar dos proyectos más en los que se prepararía a estudiantes y maestros para los cambios curriculares. Uno tuvo que ver con el uso de tecnología (calculadoras graficas); y el otro con la diferenciación de objetivos.

Con respecto al uso de tecnología encontramos que hay una demanda generalizada en el ámbito laboral del uso de la tecnología informática. Esto significa que los estudiantes deben conocer esta tecnología y usarla para resolver problemas matemáticos en su trabajo. Tenemos, también, que algunos estudiantes no son muy hábiles para operar simbólicamente y les es difícil resolver problemas matemáticos más complejos. Pero en su trabajo, y fuera de éste, tienen a su disposición la tecnología para abordar los problemas. Por tanto, es importante que entiendan los conceptos y los resultados obtenidos, y que puedan presentar sus ideas y utilizar los resultados. En el proceso de resolución de problemas deben ser capaces de usar tecnología. El uso de la tecnología posibilita que los alumnos aborden problemas más complejos.

El proyecto concerniente a la diferenciación de los objetivos tiene como intención responder la pregunta, ¿qué conocimientos y competencias necesitan los estudiantes al terminar la secundaría? Si el alumno tiene la intención de trabajar al término de la secundaria vocacional, necesita menos matemática teórica; pero si piensa continuar estudiando, necesita estudiar una matemática más sistemática y abstracta. Por esta razón, los alumnos deben tener la posibilidad de aprender una matemática básica. Sin embargo, todos los alumnos deben tener la opción de aprender una matemática más avanzada.

Algunos oficios necesitan más matemática que otros. Por ejemplo, los estudiantes de mecánica o de albañilería deberían saber funciones trigonométricas y vectores; pero para otros oficios como el de cocina no es necesario. Las escuelas pueden elegir algunas materias necesarias para su programa educativo.

Los nuevos enfoques en la enseñanza de la matemática

Tomando en cuenta todo lo anterior, diseñamos el nuevo currículo de matemática con base en competencias, incluyendo un enfoque inductivo-deductivo de la enseñanza. Se puso énfasis en tres aspectos: conexiones de la matemática con el oficio y otras áreas de conocimiento; el uso de tecnología; y diferenciación de objetivos.

A continuación presentamos las competencias que deberían desarrollar los estudiantes:

* Entendimiento de los conceptos matemáticos básicos y su aplicación.
* Habilidad de recolectar, organizar y analizar datos.
* Habilidad para el uso de herramientas matemáticas en la comunicación.
* Habilidad para el uso de la tecnología en los procedimientos matemáticos.
* Habilidad de interpretación y valoración critica del uso de la matemática en el campo profesional.
* Habilidad de resolver problemas matemáticos.
* Habilidad de planear y organizar los procedimientos de trabajo.
* Habilidad de cooperación y trabajo en equipo.
* Responsabilidad ante el conocimiento y el aprendizaje.
* Aceptación de la matemática como valor cultural.
* Confianza en las propias capacidades matemáticas y el desarrollo de la autoestima.

Estas competencias son la base del nuevo currículo y se deben diseñar las actividades propias para desarrollarlas en clase, así como los instrumentos para evaluarlas.

Podemos tener la conexión de la matemática con otras áreas en tres modos diferentes:

* Para enseñar un nuevo concepto matemático usamos el contexto del oficio de los alumnos o de la vida cotidiana. Esto debido a que los alumnos no pueden pensar de manera abstracta, pero pueden pensar en el contexto de la situación, puesto que la conocen bien. De este modo pueden ver el sentido de la matemática y aprenden mejor la situación a la que se enfrentan. Es importante que el profesor de matemática conozca el oficio de sus estudiantes, al menos para que pueda cooperar con los profesores del oficio en el diseño de las actividades conectadas con el oficio.

* En las materias del oficio pueden usar los conceptos matemáticos que los estudiantes ya conocen. Esto ayuda a los alumnos a ver la aplicabilidad de la matemática. Aquí es importante que el profesor del oficio sepa cómo y cuándo los alumnos estudiaron este concepto en la clase de matemática.
* Es posible también enseñar algunas materias de matemática junto con el oficio, por ejemplo, en el tratamiento de datos. Es posible realizar esto en algunos proyectos interdisciplinarios donde colaboran los profesores de las diferentes áreas.

¿Que tecnología podemos usar en este nivel educativo? Para lograr los objetivos, sugerimos incluir en el currículo:

* El uso de calculadoras numéricas y gráficas;
* El uso de software de geometría dinámica (u otro software para construcciones geométricas que los alumnos usen en sus oficios, esto para las escuelas vocacionales);
* El uso de software para construcciones en tres dimensiones;
* El uso de sistemas algebraicos computarizados (esto para las escuelas técnicas);
* Uso de diferentes software para aprender la materia específica de matemática;
* Uso de otro tipo de software que se usa en los diferentes oficios y posibilita el aprendizaje y la enseñanza de la matemática. Pero también, se puede usar otra tecnología que no esté conectada directamente con el desarrollo o el uso de los conceptos matemáticos como correo electrónico, Internet o salón virtual.

En la diferenciación de los objetivos (en las escuelas vocacionales) seguimos algunos criterios.

Criterios para definir el conocimiento básico:

* Necesidad de tener un conocimiento especifico para el desempeño del oficio,
* Necesidad de tener un conocimiento especifico para el desarrollo en el nivel vocacional.

Criterios para definir el conocimiento para seguir adelante:

* Necesidad de tener un conocimiento especifico para la continuación en el oficio,
* Necesidad de tener un conocimiento especifico para la continuación de la educación.

Tomamos en consideración qué tan difícil podría ser un cierto objetivo para los estudiantes; esta dificultad depende de:

* El nivel de abstracción.
* El nivel de simbolización.
* El nivel de complejidad.
* El nivel de problematización.

Ejemplo de clase

La siguiente actividad fue tomada de la escuela de construcción. Es un buen ejemplo de la enseñanza de la matemática en el contexto del oficio. Incluye el uso de la tecnología, el programa *Graph*: un programa que se puede bajar gratuitamente de la red.

En la última parte de la hoja de aprendizaje se presenta el diseño de una actividad hecha por el profesor del oficio especialmente para la construcción de escaleras.

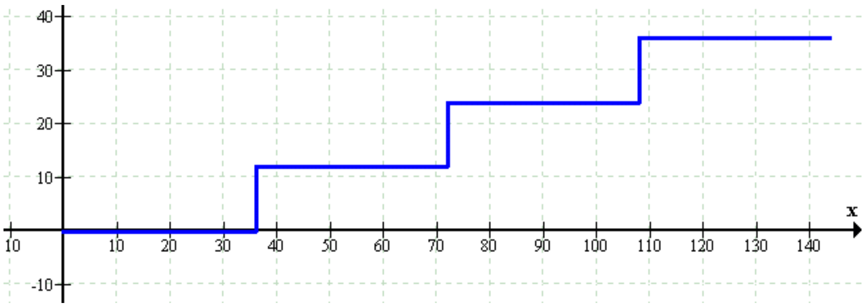
Hoja de aprendizaje

Conexiones de la matemática y otros campos en lecciones de matemática con uso de una gráfica de programa

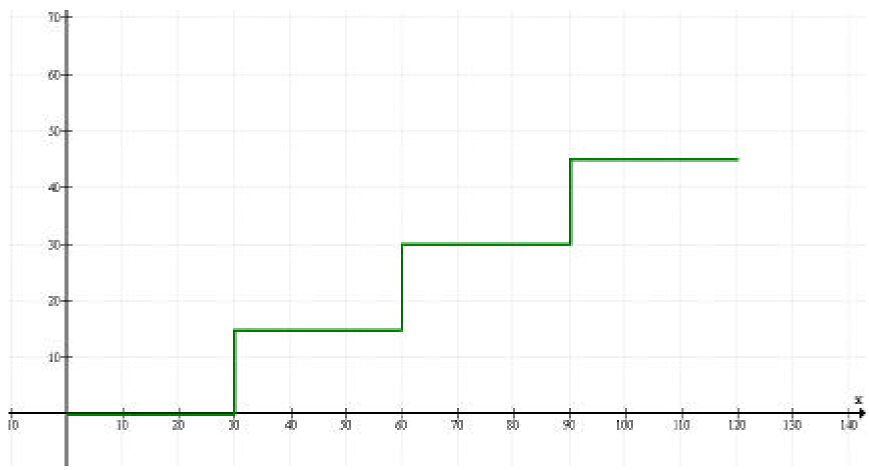
Tarea 1:

¿Qué propósito tienen las siguientes escaleras? Escribe la respuesta en el recuadro y guarda cada cambio que hagas al documento.

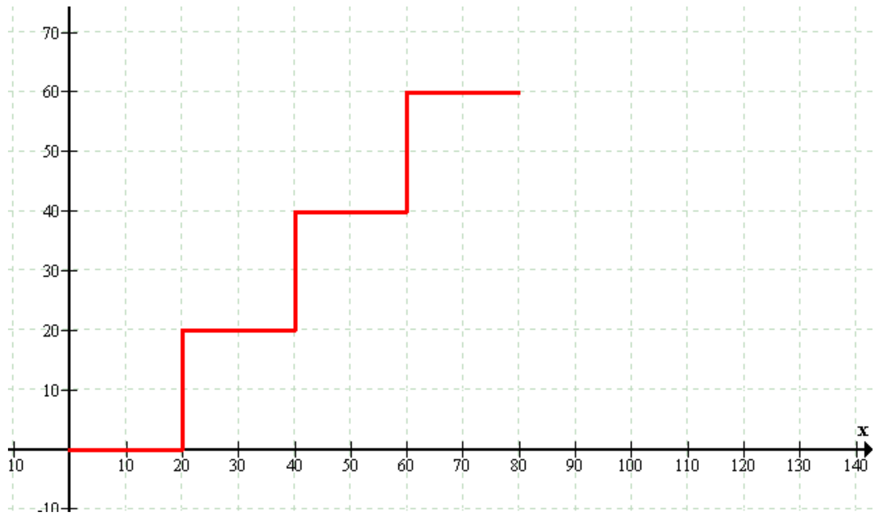
a)	



b)	



c)	



Tarea 2:
Escribe la respuesta en el recuadro y guarda cada cambio que hagas al documento.

a) Continúa dibujando las escaleras (haz doble clic en los iconos).

stopnice_a.grf stopnice_c.grf stopnice_b.grf

b) **Estima** la pendiente de las rectas que se encuentran en los dibujos de las escaleras.

a)		**b)**		**c)**	

c) **Calcula** la pendiente de las rectas, toma los datos necesarios de los dibujos.

a)		**b)**		**c)**	

d) **Dibuja** las rectas con la pendiente calculada y escribe las ecuaciones de las rectas de manera explícita.

(para dibujar, da doble clic en los iconos de arriba).

a)		**b)**		**c)**	

e) **Estima** el ángulo, en grados, que forman las escaleras con respecto a la horizontal.

a)		**b)**		**c)**	

f) **Calcula** el ángulo α usando las razones trigonométricas.

(por ejemplo: $\tan \alpha = \frac{N}{P}$).

a)		**b)**		**c)**	

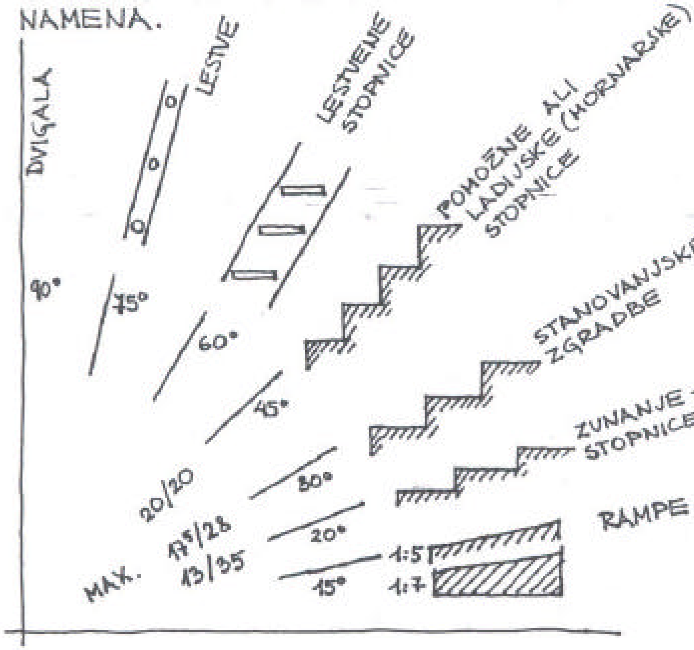
g) **Compara** los ángulos estimados con los calculados.

h) **¿Cómo se relaciona** la pendiente de las rectas con $\tan \alpha$?

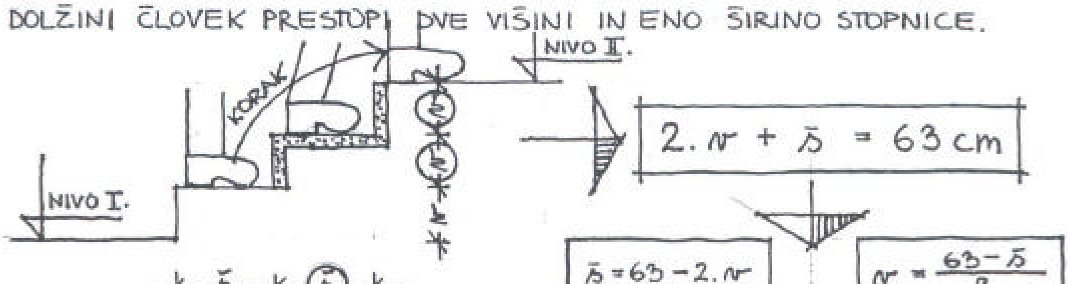
Preparado por: **Maja Capuder Štembal, u.d.i.a., SGGEŠ LJUBLJANA**

STOPNICE

NALOGA: STOPNICE OMOGOČAJO PREHOD Z ENEGA NA DRUGI VIŠINSKI NIVO. NAKLON STOPNIC JE ODVISEN OD NJIHOVEGA NAMENA.



ODNOS MED VIŠINO IN ŠIRINO STOPNIC JE ODVISEN OD DOLŽINE KORAKA ODRASLEGA ČLOVEKA, KI JE PRIBLIŽNO 63 cm. ZA ŠOLE IN VRTCE LAHKO UPOŠTEVAMO TUDI DOLŽINO 61 cm. V TEJ DOLŽINI ČLOVEK PRESTOPI DVE VIŠINI IN ENO ŠIRINO STOPNICE.



VELJAVNOST ENAČB:

$2 \cdot v + š = 63$ cm

v (cm)	š (cm)	
13	37	VHODNE
14	35	
15	33	STANOVANJSKE
16	31	IN JAVNE ZGR.
17	29	
18	27	POMOŽNE
19	25	
20	20	MORNARSKE

$š = 48$ cm $- v$

v (cm)	š (cm)	
6	42	
7	41	ZUNANJE
8	40	VRTNE IN
9	39	PARKOVNE
10	38	STOPNICE
11	37	
12	36	

Es posible que para los profesores de matemática la tarea 1 no tenga mucho sentido, pero para los alumnos de la escuela de construcción sí tiene sentido responder este tipo de preguntas. Porque esto viene de las reglas y las normas de la construcción de escaleras. Podemos ver estas reglas y normas en la última parte del ejemplo. En la ilustración se observa el nombre que tiene cada tipo de escalera dependiendo del grado de inclinación. Al final se presentan dos ecuaciones que deben ser válidas para el largo y el alto de los escalones: $2v+s=63cm$ o $v+s=48cm$; la ecuación depende del tipo de escalera. Los alumnos conocen estas relaciones y reglas, es por ello que no tienen problemas para resolver la tarea 1.

En la tarea 2 inciso (a) cuando el alumno escoge uno de los archivos, accede al programa *Graph*, donde están las escaleras construidas como en los dibujos de la tarea 1. Para continuar dibujándolas necesita escribir condiciones para x y y. En éste y en los incisos que siguen se tiene la matemática que los estudiantes deben aprender.

Es especialmente importante que las actividades vengan de un contexto real y no salidas de la imaginación del profesor. Solo así tendrán sentido para los alumnos y éstos pueden pensar en la matemática que subyace en éstas situaciones.

Actualización de profesores

Para conectar las actividades con el oficio correspondiente, el profesor de matemática debe relacionarse con los profesores del oficio con el fin de entender el oficio, su forma de trabajo y de aprender, las situaciones que se están estudiando, y obtener un material adecuado y realista para la preparación de las actividades de aprendizaje. Al proceder de esta manera el profesor será capaz de entender a sus alumnos y para ellos será más fácil entender a su profesor y la matemática que enseña.

Para que los alumnos puedan desarrollar las competencias definidas, el profesor debe diseñar diferentes actividades y construir un ambiente de enseñanza adecuado.

Esto significa, que los profesores deben cambiar su forma de enseñar y darle a los estudiantes un papel más activo.

No es fácil para los profesores adoptar rápido esta forma de enseñanza, sino que se trata de un proceso lento que implica formación y actualización de profesores.

Conclusión

En el proceso de cambio del currículo, surgieron muchos problemas para tener un entendimiento similar de los nuevos conceptos entre los diseñadores del currículo de las diferentes materias. Fue necesario hacer un esfuerzo para ajustar las cosas.

Sin embargo, en el grupo de matemática se dio rápidamente una buena cooperación, y esto permitió tomar en consideración todos los pasos necesarios para el diseño del currículo: el análisis de la situación de las escuelas; el análisis de las necesidades de los alumnos; y la instrumentación de los proyectos piloto.

La parte más dura ha sido la formación y la actualización de profesores. Y actualmente el esfuerzo se está poniendo en este aspecto para que haya un cambio real en la manera de enseñar y que permita que el currículo viva en las escuelas.

Para desarrollar un modelo centrado en el aprendiz que apoye la obtención de los objetivos anteriores se está diseñando un proyecto piloto internacional, “Educación matemática en las manos de los aprendices” con la cooperación de México, Sudáfrica y Eslovenia.

Bibliogafia

Rojko C. … et al. (2003). Katalog znanja kljucne kvalifikacije Matematika. Srednje poklicno izobraževanje. (Catálogo del conocimiento para matemática en la secundaria vocacionál) Ljubljana.

Rojko C. … et al. (2007). Katalog znanja Matematika. Srednje strokovno izobraževanje. (Catálogo del conocimiento para matemática en la secundaria técnica) Ljubljana.

Rojko C. … et al. (2007). Katalog znanja Matematika. Poklicno tehniško izobraževanje. (Catálogo del conocimiento para matemática en la secundaria vocacionál tecnica) Ljubljana.

Razvojni projekt (2002 – 2004). Diferenciacija ciljev pri matematiki za doseganje vertikalne prehodnosti na srednjih poklicnih šolah. (Proyecto de desarrollo: Diferenciación de los objetivos).

Inovacijski projekt (2002 – 2004). Kako naj se ucim matematiko? (Proyecto de inovación: Cómo debo apreder matemática).

Razvojni projekt (2002 – 2004). Povezovanje matematicnih in drugih znanj v poklicnih šolah pri pouku matematike. (Proyecto de desarrollo: Conexiones de la matemática con otros conocimientos).

Razvojni projekt (2002 – 2004). Uporaba graficnega racunala za ucinkovitejše ucenje matematike na poklicni šoli. (Proyecto de desarrollo: Uso de las calculadoras graficas).

Análisis de la interacción profesor-alumno en el aula de matemáticas: actividades, autonomía e incidentes

J. Mª Chamoso, S. Vicente, J. Rosales y J. Orrantia
Facultad de Educación, Universidad de Salamanca, España
{jchamoso, sanvicente, rosales, orrantia}@usal.es

Introducción

Durante la escolaridad primaria los estudiantes deben aprender a enfrentarse a muchos tipos de tareas matemáticas. Una de las más importantes es la resolución de problemas por lo que gran parte de los esfuerzos docentes se dirigen a que los alumnos resuelvan problemas de manera rápida, eficiente y progresivamente más autónoma.

Por otro lado, los procesos psicológicos que configuran el desarrollo de la persona, tanto los considerados evolutivos como los atribuidos a aprendizajes específicos, son fruto de la interacción que esa persona mantiene con un medio ambiente culturalmente organizado (Palacios, Marchesi y Coll, 1990). Por tanto no es extraño que se trabaje en las aulas de forma interactiva ya sea entre los alumnos, con el profesor, entre docentes, con padres u otros miembros de la comunidad educativa. Analizar cómo se producen esas interacciones puede ser importante para mejorar la comprensión en las aulas.

El trabajo que se presenta a continuación se centra en la interacción que se produce entre profesores y alumnos cuando resuelven conjuntamente problemas aritméticos en sus aulas usuales de matemáticas. Incluye tanto una metodología de análisis de esa interacción basada en las teorías de análisis del discurso y en la teoría cognitiva de la tarea como los resultados obtenidos al analizar esa interacción en seis casos concretos: tres profesores expertos y tres principiantes. Además se recoge una serie de conclusiones del trabajo realizado.

Contexto teórico

Los problemas aritméticos de estructura aditiva

La resolución de problemas es uno de los aspectos más importantes del currículum de matemáticas en la mayor parte de los países del mundo. Uno de los tipos de problemas más sencillos que se trabajan en las aulas de escolarización obligatoria son los aritméticos que, además, suelen constituir la primera experiencia de los estudiantes de aplicar sus conocimientos matemáticos a la resolución de situaciones problemáticas. Del modo en que aprendan a hacerlo influirá, en buena medida, en cómo se enfrentarán a otro tipo de problemas (Vicente y Orrantia, 2007).

Algunas de las formas en que se clasifican los problemas aritméticos de estructura aditiva se basan en el número y el tipo de operaciones aritméticas necesarias para resolverlos, amplitud del enunciado entendida como número de palabras, orden en que se presentan los datos del problema, complejidad sintáctica, presencia de palabras clave, estructura matemática o consistencia (Heller y Greeno, 1978; Jerman, 1973; Jerman & Mirman, 1974; Lewis y Mayer, 1987). A continuación se van a considerar las dos últimas que son las que mejor se ajustan al estudio que se desea realizar.

Este tipo de problemas se clasifica, en función de la estructura matemática, en tres categorías (Heller y Greeno, 1978):

Mancera, E. y Pérez, C. Historia y Prospectiva de la Educación Matemática. Memorias de la XII CIAEM, pp. 79-97. © 2007 Edebé Ediciones Internacionales S.A. de C.V. Impreso en México.

a. Problemas de cambio: Son aquellos en que, a una cantidad inicial de elementos, se añade o quita una segunda cantidad con lo que queda una tercera como resultado final. La cantidad desconocida puede ser cualquiera de los tres conjuntos implicados: el inicial, el de cambio (la cantidad que se añade o quita) o el final. Por tanto hay 6 tipos diferentes dependiendo del conjunto que haya que determinar y si se trata de ganancia o pérdida.
b. Problemas de comparación: Son aquellos en que un conjunto, denominado de referencia, se compara con otro, el comparado, de manera que surge un tercero, la diferencia entre ambos. La cantidad desconocida puede ser el conjunto referente, el comparado o la diferencia. También hay 6 tipos diferentes en función del conjunto que haya que determinar y si se trata de ganancia o pérdida.
c. Problemas de combinación: Son aquellos en que dos cantidades se combinan para formar una tercera, un todo. La cantidad desconocida puede ser una parte, la otra o el todo. Dado que no existe diferencia conceptual entre cada una de las partes, únicamente se consideran dos tipos de problemas de combinación: aquellos en los que se trata de calcular una de las partes o en los que hay que hallar el todo (De Corte y Verschaffel, 1987).

La tabla I presenta un ejemplo de cada uno de los diferentes tipos de problemas según la clasificación anterior.

Clasificación de los problemas aritméticos de estructura aditiva en función de su estructura matemática	
Cambio	
Tipo 1	Juan tenía 5 canicas. En una partida ganó 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan?
Tipo 2	Juan tenía 8 canicas. En una partida perdió 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan?
Tipo 3	Juan tenía 5 canicas. En una partida ganó algunas canicas. Ahora Juan tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas ganó Juan?
Tipo 4	Juan tenía 8 canicas. En una partida perdió algunas canicas. Ahora Juan tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas perdió Juan?
Tipo 5	Juan tenía algunas canicas. En una partida ganó 3 canicas. Ahora Juan tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas ganó Juan?
Tipo 6	Juan tenía algunas canicas. En una partida perdió 3 canicas. Ahora Juan tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tenía Juan?
Comparación	
Tipo 1	Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Juan más que Pedro?
Tipo 2	Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Pedro menos que Juan?
Tipo 3	Pedro tiene 5 canicas. Juan tiene 3 canicas más que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Juan?
Tipo 4	Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 3 canicas menos que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
Tipo 5	Juan tiene 8 canicas. Juan tiene 3 canicas más que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
Tipo 6	Pedro tiene 5 canicas. Pedro tiene 3 canicas menos que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Juan?
Combinación	
Tipo 1	Juan tiene 3 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?
Tipo 2	Juan y Pedro tienen 8 canicas entre los dos. Juan tiene 3 canicas (o Pedro tiene 5 canicas). ¿Cuántas canicas tiene Pedro (o Juan)?

Tabla I: Ejemplos de cada uno de los diferentes tipos de problemas aritméticos según la clasificación de Heller y Greeno (1978)

Se considerará una segunda clasificación de los problemas aritméticos en función de su consistencia de manera que pueden ser consistentes o inconsistentes (Lewis y Mayer, 1987). Se basa en la estructura superficial del problema, es decir, en que las palabras clave reflejen fielmente la operación que permite resolverlo. Por ejemplo si en el enunciado del problema aparece el término 'más', su pertenencia a una categoría determinada dependerá de si el problema se resuelve directamente con una adición o con una sustracción. Su diferencia más importante es que, en los consistentes, esas palabras clave permiten deducir la operación necesaria para resolverlos sin necesitar comprenderlos mientras que los inconsistentes requieren una comprensión profunda de la situación problemática que suele obligar a que el resolutor haga uso de su conocimiento matemático.

A partir de los ejemplos de la tabla anterior (véase tabla I) se puede decir que los problemas de tipo 1, 2 y 4 de cambio, los 2, 3 y 4 de comparación, y el de tipo 1 de combinación son problemas consistentes mientras que los demás son inconsistentes.

El discurso en el aula

Actualmente se considera que el conocimiento matemático se adquiere por construcción condicionada por contextos socioculturales (Hatano, 1996). La comunicación es una condición para que se produzca conocimiento en el aprendizaje (Bishop, 1985). Aunque los estudiantes razonan de muchas formas para dar sentido a su trabajo matemático, la verbalización es una herramienta para pensar y el conocimiento de los estudiantes de cómo y cuándo participar en clase es un indicador importante de su conocimiento de qué son las Matemáticas (por ejemplo Barnes, 1976; Bauersfeld, 1995; Mercer, 1994; Vygotsky, 1978, 1979).

Por ello, el estudio pedagógico de la construcción social del conocimiento requiere un modelo sociocognitivo de la interacción educativa que centre la unidad de análisis en la actividad conjunta del educando con sus mediadores sociales (educadores y compañeros) y físicos (medios, materiales, organizaciones espacio-temporales), los cuales también se encuentran socialmente conformados.

Centrándose en la interacción entre profesores y alumnos, el vehículo principal que utilizan para construir cualquier conocimiento social y académico es el discurso (Green y Dixon, 1993). Ese discurso incluye no sólo el establecimiento de las normas sociales sino también la composición de una cultura de aula que determina qué se considera válido desde el punto de vista matemático (Williams y Baxter, 1996).

Muchos investigadores han realizado trabajos con el objetivo de estudiar el aprendizaje matemático que se produce en ese discurso. Aunque el discurso convencional de la clase sigue, frecuentemente, la forma de la secuencia iniciación del profesor-respuesta del estudiante-evaluación del profesor (IRE) que refleja un punto de vista transmisionista del conocimiento, también se han conseguido aspectos constructivistas. Por ejemplo, el profesor puede preguntar a un estudiante para que éste explique su respuesta, clarificarla diciéndola de otra forma, pedir que la exprese de otro modo, requerir una explicación, proponer un ejemplo aparentemente disconforme o pedir a otro u otros estudiantes que examinen y evalúen la respuesta criticándola (Inagaki, Hatano y Morita, 1998).

El estudio del discurso entre profesores y alumnos en las aulas de matemáticas ha considerado unidades de análisis diferentes en función del objetivo de cada investigación. Por ejemplo Inagaki, Hatano y Moritas (1998) lo descompusieron de manera que cada intercambio comunicativo se definía como el discurso total de cada estudiante hasta que el profesor u otro alumno tomaban la palabra. Por el contrario Nathan y Knuth (2003) lo disociaron en unidades de análisis más pequeñas al utilizar un esquema de codificación que etiquetaba cada contenido del intercambio.

Un aspecto del discurso: Los incidentes

Los investigadores que han analizado la interacción entre profesores y estudiantes cuando trabajan conjuntamente en el aula de matemáticas se han centrado en diferentes aspectos. Uno de ellos ha sido el análisis de los incidentes entendidos como el desfase que ocurre entre lo que se espera que pase y lo que efectivamente sucede. En general, se consideran los casos negativos relacionados con la meta prevista del contenido que se trabaje sin tener en cuenta los problemas de disciplina. Es decir, se considera incidente a toda manifestación pública (en el sentido de que se integra en la dinámica de la clase) de un alumno o de un grupo de alumnos relacionada directamente con el conocimiento que se trate, que produce un desfase en el objetivo de enseñanza fijado. De esa forma no se consideran incidentes cuando los alumnos responden correctamente (Rogalski, 1999, citado por Roditi, 2001).

Un ejemplo de incidente se produce cuando uno o varios estudiantes dan una respuesta equivocada y el profesor considera que se puede perder de vista el objetivo previsto. Desde el punto de vista del aprendizaje, eso no debería ocurrir. Si sólo se trata de uno o unos pocos, detenerse con ellos puede aburrir a otros pero, si los ignora, se arriesga a que desatiendan la explicación en ese momento o en días sucesivos. El profesor debe gestionar todos los aspectos.

Los tipos de incidentes relevantes que Roditi (2001) pudo observar en las clases de su estudio fueron:

1. Los errores cometidos (E), que incluye las respuestas que no están de acuerdo con lo que el profesor esperaba que se respondiera.
2. Los alumnos hacen preguntas (Q), utilizan proposiciones que indican caminos diferentes a los que el profesor esperaba o introducen nuevos elementos en el proceso de resolución de un problema.
3. Las respuestas incompletas (I) o aquellas que no están suficientemente argumentadas.
4. Los estudiantes preguntados permanecen en silencio (S).
5. Los alumnos responden y el contenido está a otro nivel (P), es decir, el nivel matemático del estudiante es insuficiente para responder correctamente.
6. Los estudiantes están en desacuerdo entre ellos pero nadie está equivocado (D). Ante una pregunta del profesor, por ejemplo, varios pueden responder simultáneamente y alguno de ellos puede estar en desacuerdo con otros compañeros.

Roditi (2001) también consideró el escenario de la secuencia de los incidentes y describió tres posibilidades:

1. El incidente se produce sobre un hecho que no está en el campo matemático de la secuencia (HC).
2. El incidente se produce sobre un hecho matemático dentro del campo matemático de la secuencia que no se corresponde con el objetivo o estrategia del profesor (CHS).
3. El incidente se produce sobre un hecho matemático dentro del campo matemático de la secuencia y se inscribe en la estrategia del profesor (S).

En cada incidente, el profesor interviene o ignora la reacción de uno o varios alumnos de la clase. Esa intervención resulta de una elección. Por ejemplo el profesor, ante el error de un alumno, puede corregirlo y pedir que lo diga correctamente, dar pistas, recordar casos similares, pedir que lo diga otro estudiante... Cada una de esas posibilidades son maneras diferentes de gestionar los incidentes. Esa gestión se caracteriza por la autonomía de reflexión permitida y depende de cada alumno, profesor, conocimiento, actividad... En cuanto a la manera de gestionar los incidentes, Roditi (2001) consideró las siguientes posibilidades:

1. El profesor ignora la reacción de un alumno o de toda la clase (I).
2. El profesor responde en lugar del estudiante (R) para introducir una técnica nueva, analizar, acelerar el ritmo de la clase...
3. El profesor recupera y enriquece una pregunta o una respuesta (E) y la plantea a toda la clase o la responde él mismo.
4. El profesor pregunta a otro alumno, cambia de interlocutor (C).
5. El profesor guía al alumno (G).
6. El profesor facilita la ejecución de la tarea (F) indicando un método, recordando algo conocido, descomponiendo la tarea...; se distingue del caso anterior por la autonomía que se deja al alumno que, en este caso, es mayor.
7. El profesor pide que se haga un análisis, un estudio (A) como, por ejemplo, pide que se piense ante un error, una respuesta incompleta, un silencio o un desacuerdo.
8. El profesor reprende, de forma impersonal, la expresión de un alumno (N) como, por ejemplo, poniendo en la pizarra una respuesta incorrecta para ver si los compañeros la critican.

Esa tripleta formada por los tipos de incidentes, su lugar en el escenario y la gestión de los mismos es lo que constituye una adaptación. Cada una de ellas se puede analizar por sus consecuencias en el aprendizaje y como práctica profesional que depende de las representaciones que los docentes tienen de su tarea. Hay dos aspectos importantes en los incidentes: Cómo son tanto desde un punto de vista cualitativo como cuantitativo (reflejan la práctica profesional porque, por ejemplo, una clase magistral tendrá pocos incidentes) y cómo se gestionan (reflejan el comportamiento del profesor en determinados aspectos del aula).

El sistema de análisis

Para estudiar las interacciones entre los profesores y los alumnos mientras resolvían problemas de matemáticas se ha utilizado un sistema de análisis que comprende dos dimensiones diferentes. Por un lado considera las teorías cognitivas de la tarea, es decir, se basa en los modelos que indican los procesos cognitivos que los alumnos han de poner en marcha para realizarla con éxito. Por otro, recoge las aportaciones de diversos estudios sobre el análisis de la interacción entre profesores y alumnos en algunas áreas de conocimiento.

Referido a la teoría cognitiva de la tarea, la psicología cognitiva lleva tiempo estudiando qué procesos cognitivos son necesarios para resolver problemas aritméticos con éxito. A pesar de la discrepancia que genera la implicación de determinados componentes en el proceso de resolución (para una revisión ver Vicente y Orrantia, 2007), todos los modelos de resolución de problemas aritméticos están de acuerdo en que, para resolver uno de ellos, es necesario operar con el conocimiento matemático y, más concretamente, con la estructura parte-todo subyacente a los tipos diferentes de problemas (Briars y Larkin, 1984; Riley, Greeno y Heller, 1983; Kintsch y Greeno, 1985; Reusser, 1988; Vergnaud, 1985). Por otra parte hay que tener en cuenta que, en los problemas inconsistentes, suele ser necesario tener que aplicar el conocimiento conceptual para conseguir resolverlos lo que obliga a que el estudiante comprenda el texto, seleccione los datos necesarios y aplique su conocimiento matemático.

El sistema de análisis diseñado tiene ciertas semejanzas con el de Nathan y Knuth (2003). Contempla las características específicas de la resolución conjunta de problemas aritméticos y permite analizar de manera precisa: a) qué se hace en cada momento de la interacción y b) quién lo hace. La

Tabla II muestra las diferentes actividades que se realizan en el proceso de resolución de un problema aritmético acompañadas de ejemplos ilustrativos. Para ello se segmentó la interacción en episodios, ciclos e intercambios.

Tipos de actividades desarrolladas en cada episodio	
Episodio de comprensión	
Actividades	Ejemplo
Lectura	"Daniel tiene 19 canicas, Cristina tiene 16 más. ¿Cuántas canicas tiene Cristina?
o Activación de conocimientos previos	"… vosotros sabéis que muchas veces cuando se va a comprar, vienen por metros completos; tienes que comprar la pieza entera porque no te lo venden a metros…"
	"¿Sabéis qué es una cuba?
o Definición de significado de palabras	"…en estas nuevas cubas metálicas. Punto."
o Sintaxis	
	"Las cubas que tenía eran de madera"
Construcción e integración de proposiciones	"Quería cambiar las cubas"
o Construcción de conjuntos	"...ha jugado una partida y ha ganado unos pocos tazos y al haber ganado unos pocos tiene 48, entonces, ¿cuántos tazos ha ganado?"
o Construcción del modelo de la situación	"Si te pone que tiene más, ¿para qué lo restas?
o Selección de datos	
o Estrategia de la palabra clave	(A partir de un dibujo) "¿Cuántos patos había en la charca?"
	"El avión tiene que ir de aquí hasta aquí *(señalando en el dibujo que ha hecho en la pizarra)*, pero antes para aquí y aquí"
Relaciones entre conjuntos	
o Figurativa	(A partir de un esquema hecho en la pizarra)
▪ Figurativa situacional + modelado	"El problema compara conjuntos, no"
▪ Figurativa situacional	"¿En quién entran más, en la de madera o en la de metal?"
	"… si en la cuba de madera caben 26 litros menos que en la metálica, en la metálica caben los 158 de la cuba de madera más los 26…"
▪ Figurativa	
o Semántica	
Estructura parte-todo	
o Pregunta clave	
o Transformación	
Episodio de resolución	
Actividades	Ejemplo
Elección del algoritmo	"Hay que quitar 36 de los 48"
Ejecución del algoritmo	"nueve más seis, quince"
Expresión del algoritmo	
o Expresión verbal (con o sin etiqueta)	"Cuarenta y nueve más dieciséis"
o Expresión numérica (con o sin etiqueta)	49 + 16
o Expresión pública en pizarra (con o sin etiqueta)	**El niño escribe 49 + 16 en la pizarra**
Cálculo mental y escrito	

Tabla II: Sistema de análisis.

Se entiende como episodios las estructuras generales que reflejan un objetivo que profesor y alumnos comparten de manera consciente. Para el estudio efectuado se consideraron dos tipos: comprensión y resolución. Los cuales pueden agrupar uno o varios ciclos.

Los ciclos pueden ser monologales o dialógicos. Son segmentos en los que el profesor realiza una acción dirigida a desarrollar una parte concreta de la tarea, no necesariamente consciente, y del que se puede extraer un contenido público, esto es, una información compartida por profesor y alumnos que surge del discurso. De esta manera un ciclo puede estar dedicado, por ejemplo, a seleccionar un dato o a activar los conocimientos previos necesarios para comprender una parte del enunciado. Generalmente empiezan con una pregunta y concluyen cuando se resuelve o el discurso se dirige a otra parte de la tarea. Para ello el sistema establece una serie de recursos discursivos mediante los cuales los profesores llevan a cabo las actividades de forma efectiva. Además se tiene en cuenta si es el profesor o es el alumno el que lleva el control de la interacción (autonomía).

Finalmente los intercambios son secuencias de Indagaciones, Respuestas (correctas o incorrectas) y Evaluaciones que componen los ciclos y los episodios. La Tabla III recoge un ejemplo de fragmento analizado.

TRANSCRIPCIÓN	IRE	EPISO	CONTENIDOS PÚBLICOS	ACTIVIDAD	RECURSOS	AUTONO
P: Bien. ¿Entendemos lo que nos dice el problema? **A:** Sí.		COM	(1) Tenemos que entender lo que dice el problema	Regulación	Supervisión	1
P: A ver. Este... ¿qué tenía este bodeguero? Ana, ¿Qué tenia este bodeguero? **A:** Uhm... **P:** ¿Qué tenía? **A:** Cubas con vino **P:** ¿Cubas de? **A:** De vino.	I R- I R I R		(2) El bodeguero tenía cubas de vino	Construcción e integración de proposiciones	Construcción de conjuntos	2
P: Sí, cubas de vino, pero ¿de qué? **A:** De madera. **P:** De madera. Tenía cubas de madera.	I R E		(3) Las cubas de vino eran de madera		Construcción de conjuntos	2
P: Y las quiere cambiar por cubas... **A:** De me... Metálicas. **P:** Por cubas metálicas.	I R E		(4) Las quiere cambiar por cuba de metal		Construcción del modelo de la situación	2
P: Lo que ocurre es que las cubas de madera, hacen o caben en ellas ¿cuántos litros? **A:** 158 litros. **P:** Claro: en las cubas de madera caben 158 litros;	I R E		(5) En las cubas de madera entran 158 litros		Selección de datos	2
P: aquí tenemos una cuba de madera *(dibujándola en la pizarra)*, y en esa cuba caben 158 litros. ¿De acuerdo?	Ap		Rep (5) En las cubas de madera entran 158 litros			2
P: Las va a cambiar, ¿Y las va a cambiar, por qué? **A:** Poooor cubas de metal. **P:** Por cubas de metal; por cubas de metal,	I R E		Rep (4): Las quiere cambiar por cubas de metal		Construcción del modelo de la situación	2
P: que yo no sé, pero el problema sí nos lo dice si son más grandes o más pequeñas; ahí nos dicen si son más... si caben más litros en las de madera o caben más litros en las metálicas. Yo no sé en cuál de las dos caben más litros, ahí nos lo dicen: no sé en cuáles caben más ni sé en cuáles caben menos, pero si leo el problema...¡lo voy a saber! ¿De acuerdo? **P:** ¿En cuáles caben más? **A:** En las de metal. **A1:** En las metálicas. **P:** En las metálicas caben más	I R+ R+ E	COM	(6) En las cubas de metal caben más litros	Estructura parte-todo	Pregunta clave	1
P: Luego si yo sé los litros que caben en las cubas de madera y en las metálicas caben más, podré saber las que caben en las metálicas; y cuando ya sepa lo que caben en una cuba podré saber lo que caben... ¡en cuatro!	Ap		(7) Puesto que (5) y (6), podremos saber cuantos litros entran en 1 y luego en 4 cubas metálicas	Relaciones entre conjuntos	Estructura semántica	1

Tabla III: Ejemplo de aplicación del sistema de análisis al estudio de un fragmento correspondiente a un profesor experto.

El estudio

El objetivo era describir la interacción que se desarrolla entre un profesor y sus alumnos cuando resuelven un problema conjuntamente en una clase usual de matemáticas. Para ello se analizaron las interacciones de tres profesores expertos y tres principiantes con sus respectivos alumnos cuando resolvían conjuntamente problemas aritméticos en sus aulas usuales de matemáticas.

Muestra y recogida de información

La muestra fueron 6 docentes, 3 de ellos estudiantes que cursaban Magisterio en Educación Primaria en la Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca (España) y los otros 3 maestros en ejercicio con más de 20 años de experiencia docente en Educación Primaria de diferentes centros de la provincia de Salamanca (España). Cada uno de ellos disponía del texto del problema y se les indicó que debían resolverlo con sus alumnos en una sesión de aula del mismo modo que lo hacían habitualmente cuando desarrollaban sesiones de ese tipo. Al comienzo de cada sesión se colocó una grabadora que recogiera lo que se dijera. Posteriormente se transcribió literalmente la interacción.

La tarea

El problema que se utilizó fue el siguiente:

> *Un bodeguero quiere renovar las cubas de vino porque este año ha comprado más uvas. En las cubas de madera que tiene caben 158 litros. Pero en estas cubas de madera caben 26 litros menos que en unas nuevas cubas metálicas. Averiguar cuántos litros cabrán en cuatro cubas metálicas.*

Al tratarse de un problema de comparación incluye tres conjuntos (véase figura 1): el referente (las cubas de madera) y el diferencia (los 26 litros de capacidad que los distinguen), que son las partes, y el comparado, que es el todo (las cubas metálicas). Por otro lado el problema es inconsistente porque en el enunciado aparece el término "menos que" pero la operación aritmética necesaria para resolverlo es una suma, lo que dificulta su resolución a partir de los datos y la palabra clave, por lo que se obliga a utilizar el conocimiento matemático.

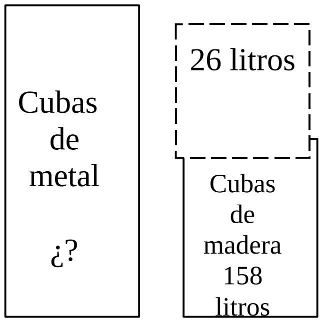


Figura 1: Representación esquemática de la estructura parte-todo de un problema de comparación

Análisis de la interacción

La trascripción fue analizada con el sistema de análisis anteriormente explicado por los miembros del equipo investigador, con un alto nivel de fiabilidad interjueces (0'92). Para ello, en primer lugar se segmentó en episodios, posteriormente en ciclos y, finalmente, en IREs. A continuación se analizó a qué actividad se dedicaba cada uno de los ciclos, qué contenido público se extraía y con qué recursos el profesor desarrollaba la actividad. Únicamente se analizó la interacción que correspondía a la estructura aditiva del problema.

Medidas

Para comparar la actuación de los expertos con los noveles se tuvo en cuenta la interacción que se produjo entre los profesores y los estudiantes en cada caso. Se consideraron tres medidas de análisis:

1. Los porcentajes de ciclos dedicados a cada una de las actividades de cada uno de los episodios en que se dividió la interacción.
2. El nivel de autonomía de los alumnos en la realización de cada una de esas actividades. Para ello cada uno de los ciclos se categorizó en diferentes niveles: desarrollados únicamente por el profesor (1), de responsabilidad compartida pero con predominio del profesor (2), de responsabilidad compartida pero con predominio de los alumnos (3) y desarrollados sólo por el alumno (4).
3. El tipo de incidentes o desencuentros que existieron en la interacción de cada docente con los estudiantes y cómo fueron solventados por los profesores.

Para gestionar esas medidas se tomó como referencia el porcentaje de ciclos que cada profesor dedicó a cada una de las actividades, en el caso de las dos primeras, y el porcentaje de IREs con respuestas negativas dentro del total, en el caso de la tercera.

Resultados

Se presentarán de forma independiente para cada una de las medidas consideradas.

Actividades

Se observó que, mientras los profesores expertos del estudio dedicaron la mayor parte de la interacción a la comprensión del problema (casi el 80% de los ciclos), los principiantes apenas lo hicieron en un 42% (véase figura 2). Esta diferencia se traduce en que las actividades propias del episodio de comprensión (construir conjuntos, generar el modelo de la situación del problema, establecer relaciones entre los conjuntos y aplicar el conocimiento conceptual) fueron aplicadas predominantemente por los expertos en el episodio de comprensión del problema mientras que los principiantes sólo lo hicieron parcialmente, completándolas en el de resolución. Es decir los principiantes, después de que preguntaran por la operación necesaria para resolver el problema, necesitaron realizar nuevamente actividades necesarias para comprenderlo lo que hace suponer que esos docentes en formación no habían conseguido la suficiente comprensión conjunta con los alumnos para que éstos pudieran resolver el problema con éxito (véase detalle en figura 3).

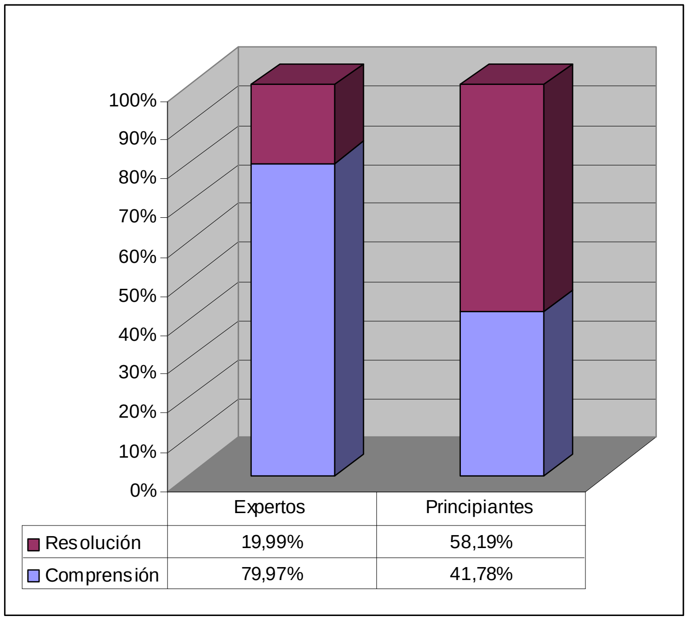


Figura 2: ***Porcentajes de ciclos dedicados a actividades de comprensión y resolución por los profesores expertos y principiantes***

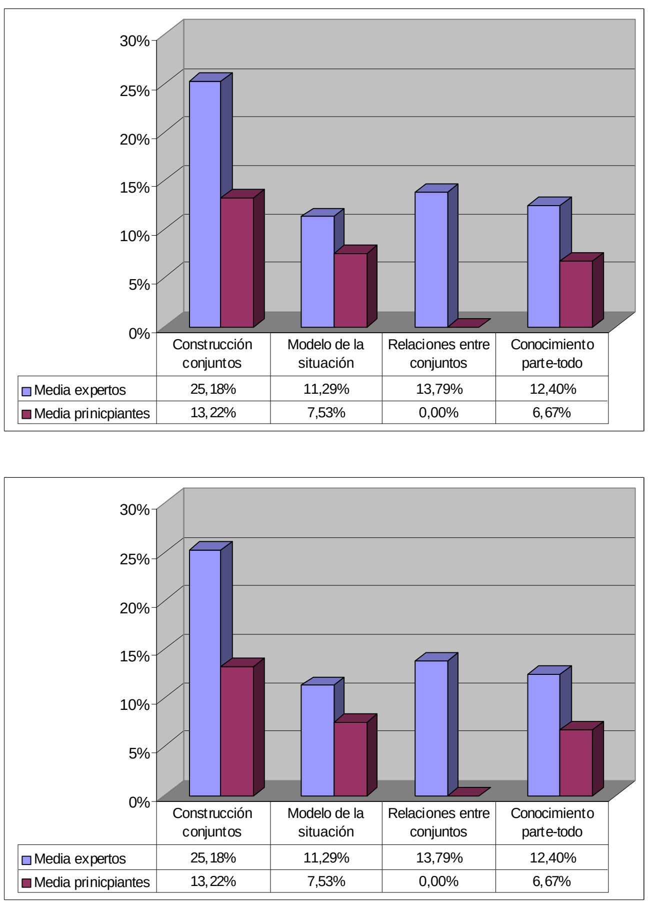


Figura 3: ***Porcentajes de ciclos dedicados a actividades de comprensión y resolución por los profesores expertos y principiantes en el episodio de comprensión (izquierda) y resolución (derecha).***

Autonomía

Referido al nivel de autonomía que ambos grupos de profesores cedieron a los alumnos, los expertos fueron los que, en mayor medida, permitieron que éstos participaran en la construcción de los contenidos públicos del desarrollo de la sesión (véase figura 4). Concretamente el predominio del control de los estudiantes de la interacción con los expertos fue de casi un 45% de los ciclos, si bien los ciclos en los que los alumnos participaban de forma autónoma no llegó al 3%. Por el contrario los profesores principiantes dejaron que los alumnos participaran con mayor peso que los profesores en apenas un 15% de los ciclos.

Un análisis más detallado posibilita observar en qué actividades cada uno de los tipos de profesores permitió un mayor nivel de autonomía a los alumnos y en cuáles fueron ellos mismos los que desarrollaron las actividades. Los profesores expertos fueron los que permitieron mayor participación a los alumnos en el episodio de comprensión, concretamente en la construcción de conjuntos, en la creación del modelo de la situación del problema y en el razonamiento parte-todo, y en el episodio de resolución en el razonamiento parte-todo y en la selección del algoritmo (véase figura 5).

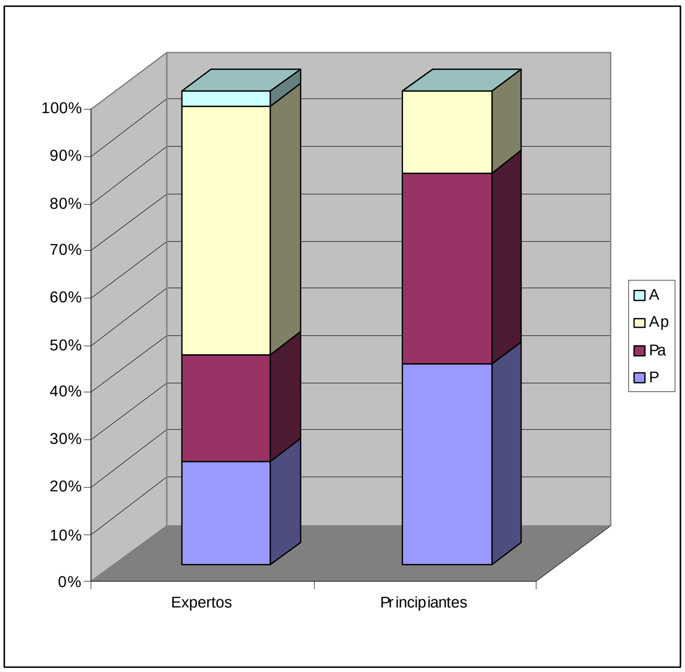


Figura 4: ***Autonomía permitido por los profesores expertos y principiantes***

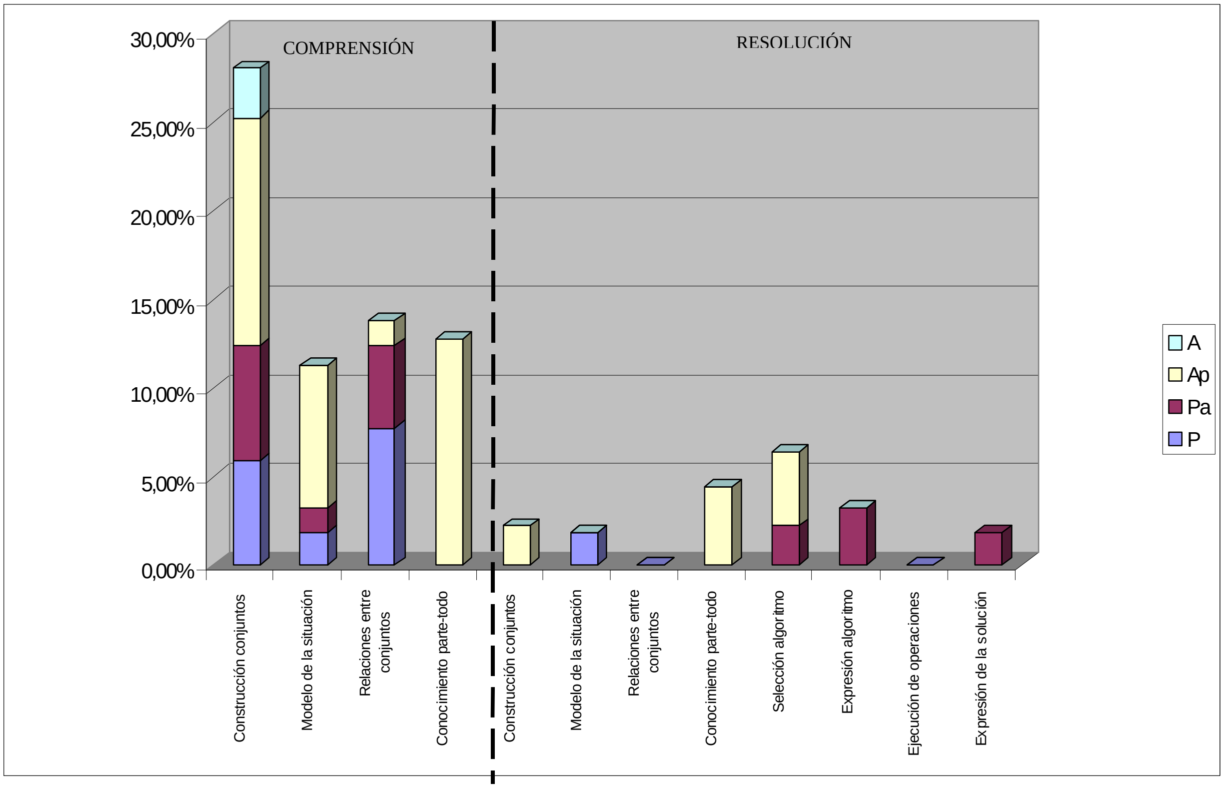


Figura 5: ***Autonomía por actividades permitido por los profesores expertos***

Por el contrario los profesores principiantes desarrollaron predominantemente la mayor parte de los ciclos y únicamente permitieron una mayor participación de los alumnos en tres momentos: la construcción de conjuntos en el episodio de comprensión, y la selección de la operación y la expresión del algoritmo en el de resolución. Además, resulta llamativo que las actividades características del episodio de comprensión que estos profesores realizaron en el de resolución se desarrollaron permitiendo un escaso nivel de participación a los alumnos, inferior incluso al de esas actividades durante el episodio de comprensión, lo que contrasta con el resultado obtenido en los profesores expertos que sí permitieron a los estudiantes un mayor protagonismo en los ciclos dedicados a comprender el enunciado del problema (véase figura 6).

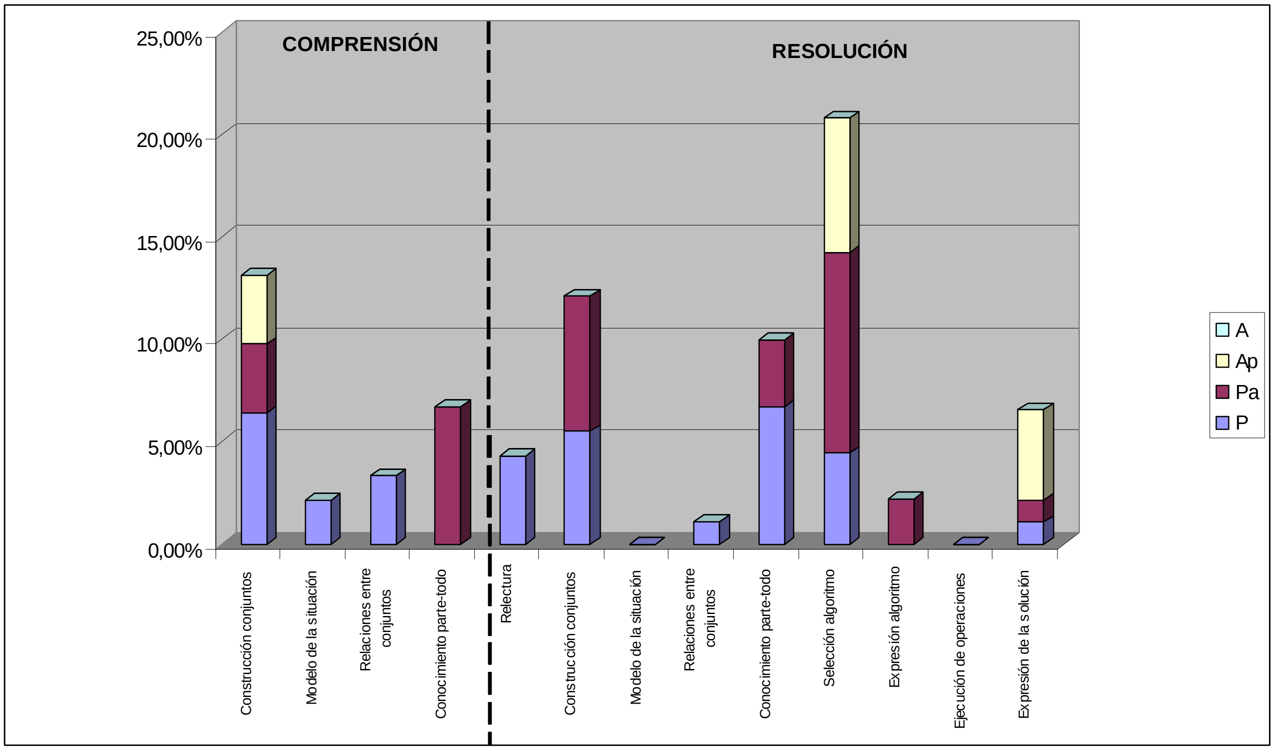


Figura 6: Autonomía por actividades permitido por los profesores principiantes

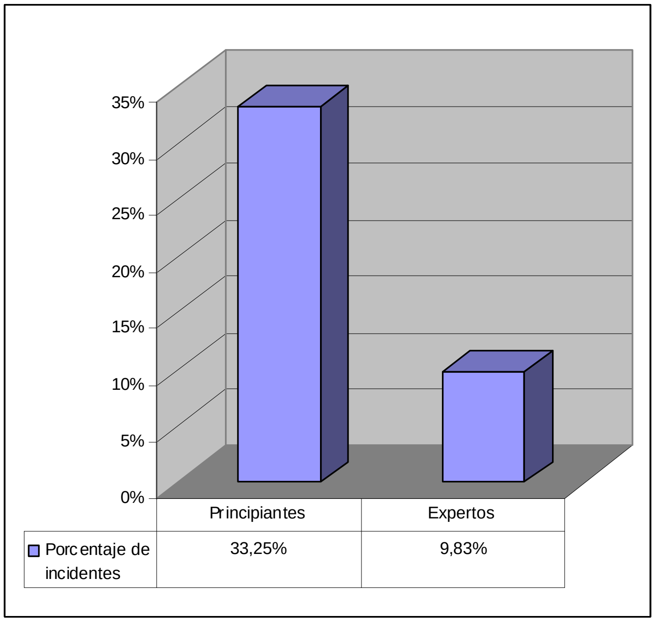


Figura 7. Porcentaje de respuestas erróneas suscitadas por los profesores expertos y principiantes

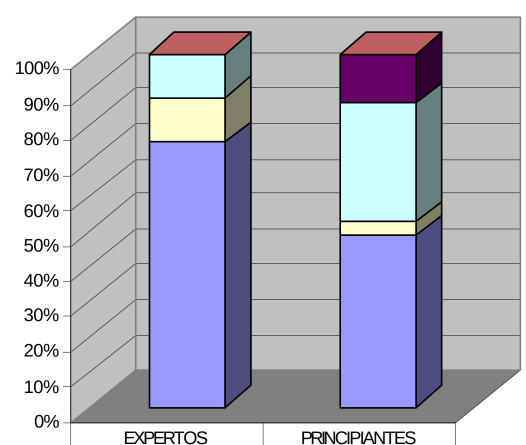
Incidentes

Respecto a la tercera medida del estudio, los resultados muestran tres aspectos de interés. El primero es que los profesores expertos obtuvieron menos respuestas incorrectas de los alumnos que los noveles (10% frente a 33% respectivamente, véase figura 7).

Un segundo aspecto fue el modo de cerrar los ciclos en los que surgían incidentes entre los profesores y los alumnos. Los profesores expertos los concluían siempre con una respuesta correcta de los alumnos lo que no siempre sucedía con los principiantes. Es decir los expertos garantizaban que cada ciclo concluyera con el establecimiento de un contenido público compartido con los alumnos mientras que los principiantes cambiaban de ciclo, y de actividad, sin conseguir que sus alumnos llegaran a una respuesta correcta que indicara comprensión conjunta de la actividad realizada (véase tablas IV y V en el Anexo).

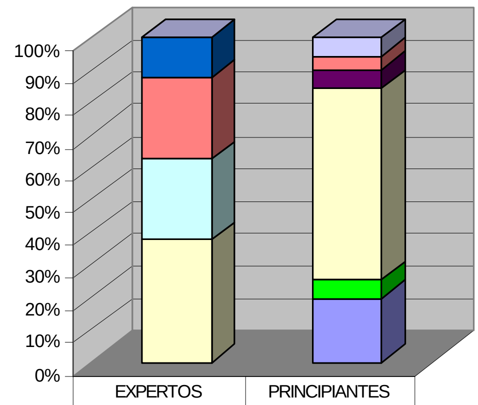
Finalmente, como tercer aspecto, tres de cada cuatro incidentes de los profesores expertos estuvieron provocados por un error en la respuesta de los alumnos y, los demás, fueron silencios o respuestas incompletas de los estudiantes. Por el contrario el porcentaje de incidentes surgidos en las interacciones de los principiantes con sus alumnos causados por silencios y que profesor y alumnos operaban a distinto nivel fue de casi un 50% (véase figura 8). Sin embargo no hubo diferencias significativas en cuanto al tipo de incidentes en las interacciones entre profesores expertos y principiantes y sus respectivos alumnos.

En cuanto al modo de gestionar los incidentes (véase figura 9), los profesores expertos básicamente mostraron cuatro comportamientos: enriquecían la pregunta, facilitaban la tarea, cambiaban de alumno pero seguían el mismo razonamiento y pedían a los alumnos un análisis más profundo. Los principiantes, en cambio, mostraron comportamientos adicionales como ignorar la respuesta del alumno, responder por él o reprenderle, y en menor medida, facilitar y guiar la tarea. En definitiva, mientras que los expertos gestionaron los incidentes de manera que aseguraron una mayor comprensión del alumno (fomentando el análisis, enriqueciendo las preguntas y facilitando la tarea), los principiantes adoptaron comportamientos que comprometían el desarrollo de la tarea.



	EXPERTOS	PRINCIPIANTES
Desacuerdo no error (D)	0,00%	0,00%
Otro nivel (P)	0,00%	14,00%
Silencio (S)	12,50%	33,00%
Respuestas incompletas (I)	12,50%	3,70%
Preguntas (Q)	0,00%	0,00%
Errores (E)	75,00%	48,00%

Figura 8. Porcentaje de incidentes de cada uno de los tipos señalados por Roditi



	EXPERTOS	PRINCIPIANTES
Reprende (N)	0,00%	5,40%
Análisis (A)	12,50%	0,00%
Facilita (F)	25,00%	3,70%
Guía (G)	0,00%	5,40%
Cambiar alumno (C)	25,00%	0,00%
Enriquecer pregunta (E)	37,50%	55,50%
Responder (R)	0,00%	5,40%
Ignorar (I)	0,00%	18,50%

Figura 9: Porcentaje de la gestión de incidentes según Roditi

Conclusiones

En función de los resultados obtenidos, en el estudio se pueden extraer una serie de conclusiones sobre el sistema de análisis y sobre cómo los profesores principiantes y expertos gestionaron la interacción cuando resolvían problemas aritméticos de estructura aditiva:

El sistema de análisis, que considera tanto la teoría cognitiva de la tarea como la interacción, permitió analizar de manera minuciosa, válida y fiable qué hacen los profesores cuando resuelven problemas de matemáticas con sus estudiantes, cómo lo hacen, y quién asume la responsabilidad en cada actividad de la tarea.

Cuando los profesores resolvieron problemas conjuntamente con sus alumnos, los expertos adoptaron comportamientos dirigidos a que los estudiantes comprendieran el problema en mayor medida que los principiantes, que se mostraron menos sistemáticos. Esta observación se deduce de que los expertos no comenzaron el episodio de resolución hasta conseguir crear una representación completa del problema y de haber operado con el conocimiento matemático necesario para resolverlo, al contrario que los principiantes que, una vez comenzado el episodio de resolución, se veían obligados a volver al de comprensión para que los alumnos fueran capaces de resolver el problema. Además los expertos, al contrario que los principiantes, cedían parte del control a los estudiantes en procesos fundamentales de la comprensión del problema como la aplicación del conocimiento matemático. Es decir mientras que los expertos podían comprobar que los alumnos habían comprendido el problema, los principiantes no lo podían asegurar pues eran ellos los que resolvían el problema en su mayor parte.

Los profesores principiantes mostraron más desencuentros que los expertos (más del triple). Su modo de gestionarlos, a diferencia de los expertos, presentó comportamientos que no favorecían la comprensión como cambiar de ciclo a pesar de no haber obtenido una respuesta correcta de los alumnos o gestionar los incidentes ignorando sus respuestas, reprendiéndoles o respondiendo por ellos.

Estas observaciones se considera que pueden ayudar para mejorar la formación de los futuros docentes.

Referencias

Barnes, D. (1976): *From communication to curriculum.* Harmondsworth, England: Penguin.

Bauersfeld, H. (1995): "Language games" in the mathematics classroom: Their function and their effects. En Cobb, P y Bauersfeld, H. (ed.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*, 271-291. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Bishop, A. (1985): The social construction of amending – a significant development for mathematical education? *For the Learning of Mathematics 5, 1*, 24-28.

Briars, D. J. & Larkin, J. H. (1984): An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction 1*, 245-296.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1987): The Effect of Semantic Structure on First Graders' Strategies for Solving Addition and Subtraction Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education 18, 5*, 363-381.

Green, J. & Dixon, C. (1993): Introduction to special issue. Talking knowledge into being: Discursive and social practices in classrooms. *Linguistics and Education 5, 3-4,* 231-239.

Hatano, G. (1996): A conception of knowledge acquisition and its implications for mathematics education. En Steffe, L.; Nesher, P.; Cobb, P.; Goldin, G. A. y Greer, B. (eds.), *Theories of mathematical learning*, 197-217. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Heller, J. I. & Greeno, J. G. (1978): *Semantic processing in arithmetic word problem solving*. Paper presentado en Midwestern Psychological Association Convention. Chicago.

Inagaki, K.; Hatano, G. y Morita, E. (1998): Construction of Mathematical Knowledge Through Whole-Class Discussion. *Learning and Instruction 8, 6,* 503-526.

Jerman, M. E. (1973): Problem length as a structural variable in verbal in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics 5*, 109-123.

Jerman, M. E., & Mirman, S. (1974): Linguistic and computational variables in problem solving in elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics 5,* 317-362.

Kintsch, W. & Greeno, J. (1985): Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review 92*, 109-129.

Lewis, A. B. & Mayer, R. E. (1987): Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology 79, 4*, 363-371.

Mercer, N. (1994): The quality of talk in children's joint activity at the computer. *Journal of Computer Assisted Learning 10*, 24-32.

Nathan, M. J. & Knuth, E. J. (2003): A study of whole classroom mathematical discourse and teacher change. *Cognition and Instruction 21, 2*, 175-207.

Palacios, J.; Marchesi, A. y Coll, C. (1990): *Desarrollo psicológico y educación I*. Madrid: Alianza.

Reusser, K. (1988): Problem Solving Beyond the Logic of Things: Contextual Effects on Understanding and Solving Word Problems. *Instructional Science 17*, 309–338.

Riley, N. S., Greeno, J., & Heller, J. I. (1983): Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*, 153-196. New York: Academic Press.

Roditi, E. (2001): *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Étude de pratiques ordinaries*. Tesis Doctoral. Université Paris 7 – Denis Diderot.

Rogalski, J (1999): *Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant.* Conférence donnée lors du stage national COPIRELEM, 3-5 mai 1999 a Limoges.

Vergnaud, G. (1985): Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. *Psychologie Française 30, 3-4*, 245-252.

Vicente, S. y Orrantia, J. (2007): Resolución de problemas y comprensión situacional. *Cultura y Educación 19, 1*, 61-85.

Vygotski, L. S. (1978): *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press.

Vygotski, L. S. (1979): *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Grijalbo.

Anexo
Secuencias profesores expertos

	Regulación	Propos. aisladas	Propos. aisladas	Propos. aisladas	Selección datos	Propos. aisladas	Preg. clave	Int. Global propos	Pseudo evaluación	Pregunta clave	Selecc. datos	Pregunta clave		Selección de datos	Pregunta clave	Elección operaciones
TMS3	IRE +	**IRE –** IRE + IRE +	IRE +	IRE +	IRE +	IRE +	IRE +	Ap	IRE + IRE + IRE +	IRE +	IRE +	IRE +		IRE + **IRE –** **IRE** – IRE + IRE + IRE + IRE + IRE +	IRE +	IRE + IRE +

	Planifi.	Selecc datos	Lectura	Repres figurat	Lectura	Repres figurat	Selecc. datos	Preg. clave	Supervisión	Transformación	Int. Lineal.	Palabra clave	Int. Lineal.	Selecc. datos	Int. Lineal.
TRR4	Ap	IRE +	Ap	IRE + IRE + IRE + IRE +	Ap	IRE + IRE + IRE +	IRE +	**IRE -** **IRE -** IRE +	IRE + IRE + IRE +	IRE + IRE +	IRE + IRE +	IRE + IRE +	IRE + **IRE –** IRE + IRE +	**IRE** – IRE +	IRE + IRE + IRE +

	Relectura	Pseudo eval.	Palabra clave	Relect.	Repres figurat	Relect.	Selecc. datos.	Relect.	Regulación	Selecc. datos		Elecc. Operac.	Elecc. Operac.	Elecc. Operac.	Expres. algoritmo
TRR4	IRE +	IRE + IRE +	IRE + IRE +	IRE +	**IRE –** IRE +	IRE +	IRE +	IRE +	**IRE -** **IRE -** IRE + IRE +	**IRE –** **IRE** – IRE +		IRE +	IRE +	**IRE -** IRE + IRE +	IRE +

	Planificación	Lectura	Lectura (cto prev)	Lectura (cto prev)	Int. Lineal propo	Lect ctos previos	Lectura	Represent. figurativa	Const. Propos.	Repres. figurat	Propos. aislada	Represen figurat.	Lectura	Transforma	Transforma	Pregunta clave
TMC4	Ap	Ap	Ap	IRE + **IRE –** IRE +	Ap	IRE +	Ap	IRE +	**IRE –** IRE +	Ap	Ap	IRE + IRE +	Ap	IRE +	IRE +	IRE +

	Selección de datos	Repres. Figura.	Lectura	Selección de datos	Lectura	Transform		Ejecución operac.	Expresión resultado	Integrac. Propos.
TMC4	IRE +	Ap	IRE + IRE + IRE + IRE +	IRE +	Ap	IRE + IRE +		IRE + IRE + IRE + IRE + IRE + IRE + IRE +	IRE +	IRE +

Tabla IV: Secuencia de ciclos de los profesores expertos con sus IREs constituyentes

Secuencias profesores principiantes

TPM5	Planificación	Lectura	Planificación	Selecc. datos	Selecc. datos	Transform	Pregunta clave		Elección operaciones	Expre. resultado
	Ap	Ap	Ap	IRE +	IRE +	**IRE - IRE -** IRE + **IRE -** IRE + **IRE –** IRE + **IRE –** IRE + **IRE –**	IRE +		IRE + IRE + IRE +	IRE +

JAV3	Lectura		Selecc. datos	Transformación	Ejemplificación	Transform	Elección operaciones	Selecc. datos	Trans-formac	Elección operaciones	Palabra clave	Selecc. datos	Elección opera.	Transform	Elección opera.	Ejecución operaciones
	Ap		**IRE –** **IRE –** IRE +	**IRE - IRE -** **IRE -** **IRE -**	**IRE –** IRE + **IRE -**	**IRE -** **IRE -**	**IRE -** **IRE -** **IRE -**	Ap	Ap	**IRE -** **IRE -** **IRE -**	**IRE –** IRE +	**IRE –** IRE +	**IRE –** IRE + IRE +	Ap	Ap	IRE + IRE + IRE +

TPV2	Planificación	Lectura	Prop. aisladas	Prop. aisladas	Lectura	Prop. aisladas	Lectura	Prop. aisladas	Prop. aisladas	Lectura	Int.lineal Propos.	Lectura	Selecc. datos	Lectura	Lectura	Prop. aislada	Lectura
	Ap	Ap	IRE +	Ap	Ap	Ap	IRE +	Ap	Ap	Ap	Ap	Ap	IRE +	Ap	IRE +	IRE +	Ap
	Sel. datos	Lectura	Prop. aisladas		Elección de operaciones	Justif. Elecc. Operaciones	Prop. aisladas	Relectura	Elección operaciones	Elección operaciones	Relectura	Elección operaciones	Relectura	Elección operaciones	Int. Pro Pal cla	Expres. Result.	Expres. Result. etiqueta
	Ap		Ap		IRE +	**IRE -**	IRE + IRE +	Ap	IRE +	**IRE –** **IRE -**	Ap	**IRE –**	Ap	IRE +	**IRE -**	Ap	IRE +
	Relectura	Elecc. Operac	Estruc. semántic	Selecc datos	Preg clave	Elección operac.	Expresión Resultado										
	Ap	IRE +	Ap	Ap	IRE +	IRE +	IRE +										

Tabla V: Secuencia de ciclos de los profesores principiantes con sus IREs constituyentes

Análisis del uso actual del sistema de numeración vigesimal en Guatemala

Domingo Yojcom Rocché

Introducción

Esta investigación fue desarrollada en cinco comunidades indígenas de Guatemala, con el objeto de analizar y comprender críticamente el uso actual del Sistema de Numeración Vigesimal. Muestra la relación que existe entre las prácticas sociales vivenciadas por las comunidades Maya[1]-q'eqchi' con los procesos matemáticos de contar, calcular y medir; utilizados en distintos niveles de profundización y apropiación, los cuales generalmente son determinados por factores que fomentan y/o deterioran el uso de este sistema de numeración. El sistema vigesimal es utilizado en diferentes ámbitos, pero principalmente en la familia, la escuela, el comercio y las ceremonias mayas.

Este trabajo consta fundamentalmente de cuatro partes. La **primera parte** contiene la contextualización y la justificación del problema, el objetivo general y los objetivos específicos que orientaron la investigación. La **segunda parte** se refiere al marco teórico utilizado. La **tercera parte** describe las características del método, las técnicas (entrevista, observación y análisis documental) y los procedimientos utilizados. La **cuarta parte** trata sobre el análisis e interpretación de datos basados en la fundamentación teórica y en los objetivos específicos. Además, presenta algunas consideraciones finales que podrán servir al lector para recapitular de forma sintética los aspectos esenciales de esta pesquisa y las referencias bibliográficas que fueron utilizadas para desarrollar esta investigación.

I. El problema y su contextualización

La investigación fue desarrollada en cinco comunidades rurales maya - q'eqchi' del municipio de Cobán del departamento de Alta Verapaz[2] de Guatemala, estas comunidades son: Laguna Chiquita, Kuxpemech, Peña Blanca, Gancho Caoba II y Sa'multeken II. En donde el 98% de la población pertenece a la etnia maya – q'eqchi', siendo el 81,62% monolingüe q'eqchi'. Su principal actividad productiva es la agricultura, dedicándose principalmente al cultivo de maíz y frijol para el consumo familiar y al cultivo del cardamomo[3] para generar ingresos económicos. La situación socio-económica de las comunidades según la Secretaría General de Planificación y Programación de la Presidencia – SEGEPLAN - (2001) es de pobreza y extrema pobreza. Dentro de los elementos que considero relevantes para referirse a la cultura maya - q'eqchi en la actualidad, se encuentran: el idioma, el vestuario, la alimentación, el conocimiento, el arte, las creencias, las costumbres y tradiciones.

---

[1] La población maya ubicada en Guatemala está conformada por 22 grupos étnicos: Mam, K'iche', Kaqchikel, Q'eqchi', Tz'utujil, Mopan, Ch'orti', Poqomam, Achi', Poqomchi', Awakateko, Chalchiteko, Sakapulteko, Uspanteko, Ixil, Q'anjob'al, Chuj, Popti', Sipakapense, Tektiteko, Itza', Akateko.

[2] El departamento de Alta Verapaz está localizado al norte de la República de Guatemala a 15º 29' 00" latitud norte y 90º 19' 35" longitud oeste. Tiene una extensión de 8686 km^2 (8% del territorio nacional). Este departamento está integrado por 16 municipios, uno de ellos es Cobán que cuenta con 261 comunidades (SEGEPLAN, 2001).

[3] El cardamomo es una especie nativa de la India y el Sureste Asiático, planta cuyas semillas son aromáticas que se utilizan para fines culinarios. Pertenece a la familia Zingiberaceae, su nombre científico es *Elettaria cardamomum*.

Mancera, E. y Pérez, C. Historia y Prospectiva de la Educación Matemática. Memorias de la XII CIAEM, pp. 99-108. © 2007 Edebé Ediciones Internacionales S.A. de C.V. Impreso en México.

En busca de la calidad educativa y de la pertinencia cultural en los procesos educativos, la Asociación Xch'ool Ixim[4] desarrolla actualmente una propuesta curricular de *Educación Basada en la Cultura Maya-Q'eqchi'* en las cinco comunidades mencionadas anteriormente. Asimismo, considera que para sustentar social, pedagógica y científicamente esta propuesta, es pertinente analizar las necesidades y exigencias de las comunidades que atiende, así como tener en cuenta sus conocimientos para la conformación del currículo escolar para el nivel primario. Y para poder contribuir eficazmente con la formulación del currículo de matemática pertinente a la cultura actual de los q'eqchi', consideré necesario contar con una descripción de los usos actuales del sistema de numeración vigesimal en las cinco comunidades q'eqchi' del municipio de Cobán, lo cual obedeció a tres **razones fundamentales**: a) Es un compromiso adquirido con la institución Xch'ool Ixim, como parte de su plan de acción. b) Para responder a mis inquietudes personales, a las inquietudes de mis colegas e instituciones educativas que se interesan por el fomento de la enseñanza del sistema vigesimal. c) Para sustentar social, pedagógica y científicamente la propuesta curricular de educación basada en la cultura maya-q'eqchi'.

Tomando en cuenta las razones anteriores, esta investigación fue conducida a través de un **objetivo general** "*analizar y comprender críticamente el uso actual del sistema de numeración vigesimal en cinco comunidades de Cobán, Alta Verapaz*", y tres **objetivos específicos**, enumerados en este orden: 1) Determinar los ámbitos en donde se utiliza el sistema vigesimal en las cinco comunidades q'eqchi' de Cobán. 2) Caracterizar y describir la

relación que se da entre los usos matemáticos del sistema de numeración vigesimal (conteo, cálculo y medición) y las prácticas sociales dentro de la familia y comunidad. 3) Analizar los factores que contribuyen al fomento/deterioro del uso del sistema vigesimal. Para cumplir este cometido, los objetivos me llevaron a plantear el marco teórico que a continuación describo.

II. Referencial teórico

En esta investigación se considera la **cultura** como el medio donde una sociedad genera valores y conocimientos para comprender e interpretar su realidad espiritual y material, que son transmitidos generacionalmente; es entonces la forma de vida que hace que un pueblo se diferencie de otros, con características propias como: el idioma, la indumentaria, la culinaria, el arte, la ciencia, las creencias, entre otros. Esta definición no esta desvinculada de la definición que hay de **cultura maya** que se concibe como: el conjunto de valores espirituales y materiales creados, aprendidos y practicados por un grupo social, con características particulares reflejadas en el idioma, el pensamiento, la ciencia, la tecnología y las interrelaciones sociales.

Es probable que cuando se hable de cultura maya, nos traslademos al período clásico maya (siglo III al IXd.C.) y nos encontremos con uno de los aportes de este periodo denominado **sistema de numeración vigesimal,** el cual es parte de la ciencia matemática maya, que facilitó el cómputo del tiempo, el cálculo y el desarrollo de las demás ciencias. Cabe anotar que aún sigue vigente en las comunidades mayas, siendo un tema de actualidad, útil y funcional.

Se le denomina sistema de numeración vigesimal porque se basa en el número veinte. Los símbolos que se utilizan en este sistema son únicamente tres: el punto que representa el valor numérico uno, la barra que representa el cinco y la concha que representa el valor cero. La combinación de estos tres símbolos y su ubicación en posiciones determinadas hace posible la escritura de cualquier cantidad.

---

[4] Xch'ool Ixim significa *"corazón de maíz"*, es una organización Q'eqchi' que nació en el seno de las comunidades rurales, fue fundado en 1993 en la comunidad de Peña Blanca, actualmente trabaja en 31 comunidades rurales de Alta Verapaz ejecutando pequeños proyectos de desarrollo.

Para comprender mejor este sistema de numeración presento los principios que lo sustentan y su equivalencia con el sistema decimal:

1º. Principio. Este sistema sólo emplea tres símbolos como base para representar cualquier cifra, y éstos son: el punto (•), la barra (▬) y la concha, (). La escritura de las cantidades en este sistema se puede resumir así: a) El punto (•) se puede escribir hasta 4 veces en cada posición. b) La barra (▬) se puede escribir hasta 3 veces en cada posición. c) La concha () se puede escribir las veces que se quiera en cada posición o casilla; pero generalmente se escribe una sola vez para evitar confusiones en la escritura, ya que su valor absoluto sigue siendo cero.

2º. Principio. El cero (), indica complementariedad y ausencia de determinada unidad en la cuenta (analizado desde el punto de vista aritmético).

3º. Principio. Veinte unidades de un mismo orden forman una unidad de un orden inmediato superior. Por ejemplo: 20 unidades simples constituyen una veintena (jun k'aal); 20 veintenas forman cuatro centenas (jun oq'ob'); 20 cuatro centenas son iguales a ocho millares (jun chuy); 20 ocho millares equivalen a ciento sesenta millares (jun kala'), etcétera.

4º. Principio. El valor de cada cifra cambia según la posición que ocupa. Por lo tanto, una cifra puede poseer dos valores: a) un valor absoluto que se refiere a la expresión en sí, y b) un valor relativo que se refiere a la posición que ocupa.

El sistema de numeración vigesimal es posicional, cuyas posiciones se cuentan de abajo hacia arriba, nominándose: primera, segunda, tercera, cuarta, ... hasta el infinito. Por lo tanto, un punto en la primera posición equivale a 1; un punto en la segunda posición tiene un valor de 20; un punto en la tercera posición equivale a 400, etcétera. Las posiciones también se conocen como casillas o niveles.

Tabla 1 – Relación entre el Sistema de Numeración Decimal y el Sistema de Numeración Vigesimal

SISTEMA DECIMAL		SISTEMA VIGESIMAL		
Potenciación	**EQUIVALENCIA (Valor)**	**Posición**	**Símbolo Maya**	**EQUIVALENCIA (Valor)**
... ∞	... ∞	... ∞	... ∞	... ∞
20^5	3 200 000	Sexta	•	3 200 000
20^4	160 000	Quinta	•	160 000
20^3	8 000	Cuarta	•	8 000
20^2	400	Tercera	•	400
20^1	20	Segunda	•	20
20^o	1	Primera	•	1

Fuente: Diseño del investigador, 2005.

El sistema vigesimal analizado en esta investigación es un ejemplo vivo y claro de la **Etnomatemática** existente en Guatemala, porque el aporte de la etnomatemática en este trabajo se sustenta en las diferentes formas de hacer ciencia en las culturas; que no sólo vincula el conocimiento con los avances actuales, sino también con los aspectos culturales de cada sociedad.

Guatemala posee una riqueza cultural y debido a sus características, existe una **diversidad cultural** que el propio Estado ha reconocido, "Guatemala es un país multiétnico y pluricultural"; por lo que se considera necesario fortalecer la multiculturalidad y la interculturalidad, para que las personas y los grupos sociales posean su propia identidad y sean sujetos de su propio desarrollo. Esta aspiración, necesariamente implica un verdadero diálogo entre personas y entre culturas, que debería ser tomado en cuenta en los currículos escolares. Dicho **currículo** debería ser considerado la “praxis” por desarrollar en los centros educativos tomando en cuenta no solo aspectos filosóficos, psicológicos, pedagógicos y didácticos, sino también aspectos políticos, sociales y culturales. Esta praxis sólo es posible con la colaboración de todos los actores involucrados en los procesos educativos.

III. El método

Opté por el **método de tipo etnográfico** para llevar a cabo esta investigación; porque desde hace cinco años me encuentro trabajando con los maestros[5] que laboran en las escuelas de las cinco comunidades, esta situación se convirtió para mí en una ventaja; ya que tuve una buena aceptación de las personas al momento de realizar las observaciones y entrevistas. Este método me permitió tener una presencia y participación constante dentro de las comunidades, que podría caracterizar de la siguiente manera: convivencia social, conocimiento de la lengua y su forma de vida mediante la interacción. Esta participación me facilitó el acceso a fuentes de información informal. Además, el método etnográfico permitió diseñar la metodología acorde a las necesidades de la investigación, posibilitó además la elaboración de instrumentos necesarios para la recopilación de datos, a través de observaciones y entrevistas, estudios sobre la documentación existente y grabaciones de audio. El método también permitió trabajar en diferentes espacios sociales en donde se desarrollan las actividades; dividí estos espacios en familiar y comunal, lo que abarca desde las estadías con familias, visitas a las escuelas para la observación del trabajo pedagógico de los maestros, participación en las ceremonias espirituales mayas y días de mercado, hasta la participación en trabajos de campo como el corte y la transacción del cardamomo Por ello, los sujetos, incluyendo padres de familia, maestros y alumnos, se tornaron en los principales colaboradores de esta investigación. En este trabajo privilegié las técnicas de: análisis documental, observación y entrevista, interrelacionadas entre sí para desarrollar el contenido de esta pesquisa.

El **Procedimiento Metodológico** esta dividido en dos partes: la recolección de datos, y el tratamiento y análisis de datos. La **primera parte** abarca: a) *Elaboración de criterios de observación*, en donde se delimita claramente los objetivos, los espacios sociales (ámbitos de uso del sistema vigesimal), y la forma de registrar los datos. b) *Elaboración de instrumentos* para llevar a cabo el trabajo de campo, tales como: ficha de observación, entrevista estructurada y paralelamente la realización del análisis documental. c) *Recopilación de datos*, en base a los criterios establecidos y los instrumentos diseñados, esta fase fue realizada de la siguiente manera: el **Análisis Documental** se hizo en dos niveles; el primer nivel o nivel externo, consistió en la descripción física de los documentos (referencias bibliográficas y clasificación); el segundo nivel o nivel interno, encaminado a la descripción o análisis de su contenido, que fue realizado a través de resúmenes. En tanto, la **observación** fue realizada de manera cuidadosa, sin intervenir directamente en las actividades, a fin de no modificar los patrones de conducta de los sujetos observados. Y por último, la **entrevista** referida en esta investigación fue realizada con personas de comunidades rurales, que no tienen ese calificativo de “expertas”, estas entrevistas fueron grabadas y recopiladas en cintas.

La **segunda parte** contiene a) *Tabulación de datos*, este proceso implicó escuchar varias veces las cintas de las entrevistas en Idioma Q’eqchi’ y luego hacer la trascripción al Idioma Español y vaciar la información contenida en las fichas utilizadas durante las observaciones, lo que conllevó a una revisión

[5] En Guatemala se utiliza el término “maestro” (profesor) para designar a la persona que está facultada para realizar el trabajo docente con los alumnos del nivel primario o enseñanza fundamental.

minuciosa de los datos tabulados, b) *Análisis de datos*, la interpretación de los instrumentos, implicó reflexiones profundas y críticas de los ámbitos de uso actual del sistema de numeración vigesimal.

IV. Análisis de datos

Atendiendo los objetivos específicos de esta investigación, el análisis de los datos fue realizado en tres bloques:

a) Ámbitos de uso del sistema vigesimal en cinco comunidades Q'eqchi'
b) Descripción de los usos matemáticos y las prácticas sociales del sistema de numeración vigesimal
c) Factores que contribuyen al fomento/deterioro del sistema vigesimal

a) Ámbitos de uso del sistema vigesimal en cinco comunidades Q'eqchi'

Por "ámbito" se entiende en esta investigación a los espacios sociales o a las dimensiones sociales en que los individuos se desenvuelven. Tomando en cuenta la coyuntura actual de las cinco comunidades q'eqchi' y considerando los objetivos de la investigación, no utilicé ninguno de las clasificaciones hechas por otros autores, por ejemplo la utilizada por Braudel (1998), sino que determiné los ámbitos en que se relacionan los maya-q'eqchi' (el maya-q'eqchi' de esta zona, generalmente divide sus actividades en familiares y comunales). Así que, utilizando la lógica de trabajo de este grupo, el ámbito de uso del sistema de numeración vigesimal lo dividí en: familiar y comunal. El ámbito familiar abarca el espacio físico que ocupa su hogar y su trabajo, donde el individuo está en contacto directo con los miembros de su familia. El ámbito comunal abarca todo el espacio físico de su comunidad (la escuela, los grupos organizados, las otras familias, los lugares ceremoniales, los cerros y las montañas) así como la interacción con otras comunidades ajenas a la suya (en los días de mercado, en las transacciones de comerciales, en los días festivos, etcétera.).

La investigación demuestra que el **sistema de numeración vigesimal** es parte del conocimiento numérico que sigue **vigente** en: el hogar, la escuela, el mercado, el terreno (en la siembra, cosecha y otras actividades), la comunidad, la tienda, el calendario maya, tanto en el área urbana como en el área rural. El 56,52% de las personas entrevistadas consideran que el conocimiento numérico es útil en cualquier momento de su vida; mientras que el resto especificó tan solo algunos momentos; aquí se confirma entonces la importancia de la numeración en la vida de los q'eqchi'. El uso del sistema vigesimal se refleja en diferentes espacios, y su **importancia** estriba en la vinculación con las prácticas sociales, las cuales pueden ser resumidas de la siguiente manera: a) Para cuantificar los bienes materiales como necesidad humana. b) Instrumento para resolver situaciones-problemas o para conocer otras ciencias; así como para la administración económica de las familias y la organización del tiempo. c) Medio de conservación de la cultura.

Para los q'eqchi' **los números poseen significación** especial, aquí analizaremos los números que fueron mencionados con mayor frecuencia en las entrevistas, tales como el: **3, 4, 7, 13 y 20**. El **tres** es el número mínimo de puntos de sustento para que descanse algo firmemente en ellos, y significa Oxib' K'ub' (los tenamastes). Esto es, para levantar el cielo se crearon tres cerros en el centro del mundo. Y así como el cielo descansa en los 3 cerros, descansa el comal sobre las 3 piedras en el fuego de la casa que se llaman oxib' k'ub'. Entonces, el tres es el número femenino de lo sagrado (oxloq': muy sagrado, de ox: tres y loq': sagrado) y del centro. Por eso, ahora se cree que para que un trabajo sagrado esté bien hecho y sus resultados estén estables se repite tres veces.

El **cuatro** representa los horcones de la casa, los cuatro puntos cardinales, y el cruce de los cuatro caminos hacia las esquinas del mundo, entradas al 'más allá'. El Popol Vuh de la versión Recinos, libro sagrado de los K'iche', menciona los cuatro rincones y los cuatro puntos de la bóveda del cielo y de la faz de la tierra; además este libro narra que el hombre fue formado con cuatro colores de maíz (rojo, amarillo, blanco y negro); a su vez cuatro fueron los primeros hombres formados y creados: B'alam-K'iche', B'alam-Akab', Mahukutah e Iki-B'alam. El cuatro es el número masculino de lo sagrado y la creación.

Ahora, el número **siete** representa el hogar o la familia para los q'eqchi', porque el siete es la combinación de tres y cuatro, de fuego y horcones, de mujer y hombre. Otra de las concepciones sobre el siete es, según lo manifestado por los sujetos durante las entrevistas, que el mundo fue creado por 7 creadores y que "antiguamente se echaba 7 granos en cada mata de maíz". Éstas y otras explicaciones indican la relación de este número con el origen de la vida.

El **trece** es también la base del sistema numérico maya, es el que origina todas las formas trecenales de marcar el tiempo y el punto de partida de los calendarios de la cultura maya; una madre de familia detalló la importancia del número trece durante la entrevista y dijo que el número 13 significa *k'ajb'ak*[6] en las siembras, la echada de los huevos de los animales, en caso de los pollos y de los chuntos (pavos). Al momento de sembrar el maíz, se siembra primero 13 matas en el centro del terreno "corazón de la siembra", y al llegar el momento de la tapisca[7] son las primeras matas que son cosechadas. Cuando se guardan las mazorcas, se colocan en el centro las mazorcas producidas por las trece matas; a los trece días después de la tapisca, se guarda ese maíz en medio de los demás. Asimismo agrega, que al fecundar a un niño, los siguientes trece días no se debe tener relación sexual, como símbolo de respeto al igual que en la siembra (eso si hay una planificación familiar). Los niños nacen a los 13 meses, esto se refiere a los meses del calendario maya. Cada mes tiene 20 días, esto es 13 x 20 = 260 días; o sea que es equivalente a los 9 meses del calendario gregoriano 9 x 30 = 270 días.

La importancia del número **veinte** dentro de la cultura maya, es innegable, por ejemplo uno de los entrevistados enfatizó que el número 20 es especial, porque para él "el número 20 se encuentra en el calendario maya, que corresponde a los días del mes, además que es la base del sistema de numeración"; éstas y otras explicaciones hacen comprender la importancia de los números en la vida de los q'eqchi' en la actualidad.

En materia de **aprendizaje del Sistema Vigesimal,** fueron detectados distintos ámbitos dentro de las comunidades, el 30% considera que sólo podrían aprender a contar en q'eqchi' en una escuela maya, porque es la que promueve la cultura, y es allí donde deben aprender los niños. Otros sin embargo, consideran que este aprendizaje podría darse además de la casa y la escuela, "en cualquier área donde haya gente q'eqchi'", inclusive en el campo de trabajo o en algunos libros. Es importante resaltar el valor cultural que desempeña la escuela en estas comunidades, por eso es necesario que el currículo tenga pertinencia social y cultural.

b) Descripción de los usos matemáticos y las prácticas sociales del sistema de numeración vigesimal

Para relacionar las prácticas sociales con el sistema de numeración vigesimal, inicio este análisis abordando el **uso de los idiomas al realizar cálculos**, por ejemplo, de todas las personas entrevistadas, solamente una de ellas no sabía contar en q'eqchi', comentó al respecto que la época en que creció, se utilizaba el idioma español para contar, así que no pudo aprender a contar en q'eqchi'. Esta situación

[6] K'ajb'ak significa rito, pero puede interpretarse como una preparación espiritual que se realiza 4, 7 ó 13 días antes de alguna conmemoración o celebración especial (por ejemplo la siembra de maíz, empollamiento de huevos, etc.) y como agradecimiento posterior a las conmemoraciones o celebraciones.

[7] Tapiscar es una acción de recolectar la cosecha de maíz, cuando el grano haya madurado y secado.

reafirma la imposición del idioma español o la castellanización en las escuelas públicas hasta 1990, el uso de los idiomas mayas tomó auge a partir de esta década cuando se firmaron los Acuerdos de Paz en 1996 y fue reafirmado con la declaración oficial de la Ley de Idiomas en 2003, creada según el decreto número19-2003 del Congreso de la República de Guatemala.

En cuanto a la **preferencia por el uso del idioma** q'eqchi' y español en el momento del conteo, el 44% de las personas respondieron que prefieren utilizar el idioma q'eqchi' en el momento de realizar sus cuentas porque en la casa regularmente se cuenta en q'eqchi y es bueno aprender como contaban los antepasados; en tanto el 22% prefieren el español al momento de realizar sus cuentas y cálculos, porque según ellos es más fácil contar en español que en q'eqchi', y como no saben contar bien en q'eqchi' por eso no tienen otra opción, más que hacer uso del español. Ahora bien, el 35% prefieren contar en ambos idiomas, dependiendo de las necesidades y circunstancias del momento.

En relación con la **época de aprendizaje del conteo en q'eqchi',** una buena parte de los sujetos adquirieron sus conocimientos básicos sobre el conteo en q'eqchi desde sus primero años de vida en la casa; en cambio, aquellos que aprendieron en las escuelas varía el año de su aprendizaje, unos desde que estaban en primero y segundo primaria, a los 7 y 8 años; y otros hasta cuarto y quinto primaria a los 13 ó 14 años, esto depende del centro de estudios al cual asisten o asistieron.

En lo que tiene que ver con la **forma de realización de cuentas,** el 78% de los sujetos hacen sus cálculos y operaciones mentalmente. Y el 61% hacen uso de instrumentos para realizar sus cuentas y cálculos; dentro de los instrumentos más utilizados: piedras, granos de maíz, granos de frijol, dedos, palitos. Otra parte afirma que realizan sus cálculos de forma combinada, se puede deducir que este grupo de personas posee cierta ventaja en comparación con los otros, porque la representación simbólica de las cantidades ayuda a minimizar el tiempo en la realización de cuentas relativamente grandes. Aunque la realización de cálculos de forma escrita no es ajena a los errores.

Los **q'eqchi' actuales cuentan diferentes cantidades** en su idioma, debido a los diversos niveles de dominio del conteo en el sistema vigesimal. Así pues, las cantidades más grandes que conocen son el *jun chuy* = 8,000, *oob' o'q'ob'* = 2000 y el *jun o'q'ob'* = 400. Esto manifiesta que manejan con mucha facilidad la primera posición del sistema vigesimal (1 al 19), de forma fácil pero no elocuente la segunda posición (20 al 399), con gran dificultad la tercera posición de (400 al 7999). De la cuarta posición solo mencionaron el 8000, por lo que deduzco que es la única cantidad que manejan de esta posición.

Durante las **observaciones hechas** en los sembradíos de cardamomo en el momento de la cosecha, transacciones del cardamomo, estadías con familias, ceremonia, días de mercado y en las escuelas, noté que las personas de las comunidades utilizan el idioma q'eqchi y el idioma español en la realización de conteos, cálculos y mediciones; en cuanto a los sistemas de numeración utilizados en la cotidianidad se observa el sistema decimal y el vigesimal. El sistema decimal es más utilizado en la realización de cálculos (algoritmos), mientras que el vigesimal se utiliza más en los conteos.

c) Factores que contribuyen al fomento/deterioro del sistema vigesimal

Para facilitar la comprensión de estos datos separé los factores que contribuyen de los factores que deterioran el uso del sistema vigesimal. Los **factores que contribuyen al fomento del conteo en Q'eqchi'** pueden ser clasificados en:

1. *Factores familiares* que comprende: a) Orientación de los padres y madres de familia, para no dejar (olvidar) el legado de los antepasados. b) Aceptación y reconocimiento de la identidad como q'eqchi', que ayuda a utilizar su idioma y su conocimiento matemático, esto es notorio en las reuniones cuando se expresan y dicen "laa'o aj q'eqchi' " (nosotros los q'eqchi'), "laa'o aj

ralch'och' " (nosotros los indígenas, o nosotros los hijos de la tierra), "laa'o aj mayab' " (nosotros los mayas). c) Convivencia familiar, en donde se inculca el respeto a la naturaleza y el respeto a los ancianos, porque ellos proporcionan el sustento diario, la sabiduría y las experiencias.

2. *Factores comunales* en donde encontramos: a) El uso del sistema vigesimal principalmente en el conteo en las comunidades q'eqchi', está ligado a la interacción con otras personas, por ejemplo en los juegos. b) La exigencia que se hace a los niños para el aprendizaje de este sistema en la escuela y el fomento de la práctica en los salones de clases. c) Conservación de las prácticas y costumbres en las comunidades, como por ejemplo la siembra y cosecha de maíz, construcción de casas, pedida de mano de la novia, entre otros. d) Los actos ceremoniales, conservan su riqueza cultural y su carácter espiritual y sagrado, que se distinguen por el uso del sistema vigesimal y el sistema trecenal. e) Presencia de escuelas mayas en la región, en donde se aborda no sólo la aritmética sino que también nociones de astronomía y geometría.
3. *Factores externos* que esencialmente son: a) Distancia de las comunidades a la cabecera departamental o la poca accesibilidad a estas comunidades, hace que se conserve mejor sus tradiciones, costumbres, el idioma y su modo de vida en general. b) Ley nacional de idiomas de Guatemala, conocida y difundida por las comunidades, se torna un factor importante en la motivación del uso del idioma y de los sistemas de numeración maya.

Contrariamente a los factores anteriores, también hay **factores que contribuyen al deterioro del conteo en Q'eqchi'**, estos también son divididos en tres grupos, para su fácil apropiación:

1. *Factores familiares* que se refleja en la preferencia por el uso del idioma español en algunas familias, esta actitud es notoria en algunos padres de familia.
2. *Factores comunales* que son determinados por: a) Predominio del idioma español sobre el idioma q'eqchi', esto fue una de las características de las escuelas públicas del siglo pasado, que aún tiene sus efectos en las generaciones actuales. b) El desuso de algunas medidas, como por ejemplo la unidad de medida de 'peso' que se utiliza actualmente en las comunidades es la libra, que vino a reemplazar las unidades de medidas antiguas. c) La priorización del idioma español en el desarrollo de algunas clases en la escuela, esta situación puede ser atribuida al tipo de tema abordado o por la escasez de material didáctico existente en el idioma q'eqchi'. d) Los textos disponibles en las escuelas en su mayoría están escritos en español con más énfasis en el sistema decimal que el vigesimal.
3. *Factores externos* que pueden ser enumerados en: a) Escasez de libros publicados que contengan temas relacionados con la cultura y especialmente a la numeración maya en el idioma q'eqchi'. b) Los medios de comunicación, como la prensa escrita y la radio. Observé durante la estadía con las familias que casi todas las familias cuentan con una radio; y las emisoras radiales que escuchan regularmente promueven programas en español. c) Influencia de otras comunidades, esto se da cuando se carece de identidad colectiva. d) Comercialización de productos que requiere de intermediarios para su comercialización, y éstos regularmente poseen conocimientos sólo del sistema decimal para su conteo y medición. e) Presencia de escuelas no mayas, como el caso de las escuelas del Programa Nacional de Autogestión y Desarrollo Educativo (PRONADE) del sector oficial, que sólo priorizan la enseñanza del sistema decimal. f) El choque de culturas, el acontecimiento histórico experimentado por las comunidades mayas hace más de 500 años, aún no ha sido superado, sus efectos siguen vigentes; porque se nota en algunas personas el rechazo de las ideologías extranjeras.

Consideraciones finales

Atendiendo los objetivos propuestos para esta investigación planteo las siguientes consideraciones finales, buscando analizar y comprender críticamente el uso actual del Sistema de Numeración Vigesimal en las cinco comunidades Q'eqchi' de Cobán, Alta Verapaz. Considero que la metodología empleada ofrece una visión holística y contextualizada del fenómeno estudiado, y toma en cuenta la participación y el conocimiento de niños, jóvenes y adultos de ambos géneros de las cinco comunidades, así como de algunos matemáticos, antropólogos y sociólogos.

En lo que respecta al primer objetivo específico, he constatado que el sistema de numeración vigesimal se utiliza actualmente en el ámbito familiar y comunal, tales como: en los hogares o familias, escuelas, lugares de sembradíos, centros ceremoniales, mercados y en las tiendas comunales; en donde la mayoría de personas se interactúan diariamente con diferentes niveles de conocimientos, necesidades y capacidades matemáticas. De los ámbitos mencionados anteriormente, la escuela es considerada como el centro fundamental para la enseñanza-aprendizaje del sistema de numeración vigesimal; porque además de propiciar la práctica de los valores y conocimientos del pueblo maya-q'eqchi', se convierte en un espacio de integración y práctica de la interculturalidad, en donde los niños no sólo aprenden a valorar los elementos de su cultura sino también los elementos culturales de otras culturas.

En cuanto a las capacidades o habilidades matemáticas (conteo, cálculo, medición) establecidas en el segundo objetivo específico, he constatado que actualmente son utilizadas en diferentes niveles de apropiación, por ejemplo, no se reflejan conocimientos profundos de cálculos y mediciones que puedan ser detectados o practicados con facilidad, aunque no se excluyen las nociones específicas sobre cálculos y mediciones mayas que poseen algunas personas. Sin embargo, el conteo en q'eqchi es bastante notorio porque forma parte de su identidad y de su práctica cotidiana y es de fácil aplicación para los comunitarios cuando responde a sus necesidades individuales, pero una vez que sobrepasa el ámbito de uso personal, el conteo también se vuelve confuso como en el caso de las cantidades superiores a la primera posición.

Las actividades cotidianas de los q'eqchi' están envueltas básicamente en la resolución de situaciones – problemas que requieren de conteos y cálculos sencillos; y la combinación del sistema vigesimal con el sistema decimal se convierten en medios esenciales para afrontar dichos desafíos; sin embargo, la práctica social más ligada al uso del sistema vigesimal es el cultivo del maíz (siembra y cosecha) y las distintas ceremonias mayas que se realizan en las comunidades.

En relación al tercer objetivo específico, encontré una diversidad de factores que fomentan el uso del sistema vigesimal en las comunidades, éstos pueden ser enumerados de la siguiente manera: la valorización de la propia identidad; las condiciones adecuadas que presenta el medio social; la exigencia de la escuela en cuanto al aprendizaje de este sistema; y las políticas actuales del país vinculadas con la reforma educativa. Cada uno de estos factores está interconectado con otros que dan sentido a esta apreciación. Pero además de los factores favorables, he detectado también algunos factores que deterioran el uso del sistema vigesimal, y éstos pueden ser clasificados según su impacto en la sociedad como: el predomino del idioma español sobre el idioma q'eqchi'; el uso de unidades de medidas extranjeras, como la libra, la vara y la yarda; los medios de comunicación oral y escrito que en su mayoría escritos en idioma español; y poca disponibilidad de textos escritos en idioma q'eqchi' en las comunidades.

Por último quisiera agregar que el conocimiento sobre el ámbito de uso del sistema de numeración vigesimal es de vital importancia para la conformación de una propuesta curricular educativa pertinente, tanto a nivel a local como nacional.

Bibliografía

BRAUDEL, Fernad (1966). *Las Civilizaciones Actuales.* Traducción de J. Gómez y Gonzalo Anes. Décima reimpresión. Madrid: Editorial Tecnos, 1998.

CASÁUS, Marta; GIMÉNEZ, Carlos. *Guatemala Hoy: reflexiones y perspectivas interdisciplinares.* Madrid: Ediciones UAM, 2000.

CENTRO AK' KUTAN. *Evangelio y Culturas en Verapaz.* Colección testimonios. Guatemala: Editorial Lascasina y Ak' Kutan, 1994.

COVO, Javier. *Los Mayas – en las rocas.* Primera edición, Colección "Mono-gramas". México, D. F.: Editorial Dante, 1986.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática. Elo entre as tradições e a modernidade.* 2a edição. Belo Horizonte: Autentica, 2002.

_________. *Why Ethnomathematics? Or What Is Ethnomathematics And How Can It Help Children In Schools?* Disponible en: <www.sites.uol.com.br/ vello/ubi.htm - 81k –>. Acceso: 8 de noviembre 2004.

FLEURI, Reinaldo. *Multiculturalismo e interculturalismo nos processos educativos.* In: Ensinar e aprender: sujeitos, saberes e pesquisa/ Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino ENDIPE). Rio de Janeiro: DP&A, 2000. Disponible en: http://www.ced.ufsc.br /nucleos/mover/pdfs/FLEURI_2000_Multi_interculturalismo_proc._ens.pdf. Acceso: septiembre 2005.

GARCES, Guillermo. *Pensamiento Matemático y Astronómico en el México Precolombino.* Primera edición. México, D. F.: Instituto Politécnico Nacional. 1982.

GEERTZ, Clifford. *A Interpretação das Culturas.* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1989.

GUORON, Pedro (2001). *Ciencia y Tecnología Maya. Maya' No'jb'äl.* Segunda Edición. Guatemala: MINEDUC/DIGEBI, 2003.

HATSE, Inge; DE CEUSTER, Patrick. *Cosmovisión y Espiritualidad en la Agricultura Q'eqchi'.* Textos Ak Kutan No. 18. Alta Verpaz: Ak' Kutan. 2001.

LÓPEZ, Rosario. *Análisis Documental.* Biblioteca Museo Arqueológico Nacional, España, 2000. Disponible en: <www.geocities.com/zaguan2000/ 503.html - 30k> Acceso en: 15 de Julio 2004.

MCLAREN, Peter. *O Multiculturalismo Crítico.* Tradução de Bebel Orofino Schaefer. São Paulo: Editora Cortez, 1997.

MORALES, Leonel. *Matemática Maya.* Consultoría de Etnomatemática. Guatemala: Ministerio de Educación, 2000.

MUGRABI, Edivanda; DOXSEY, Jaime. *Introdução à Pesquisa Educacional.* Universidade Federal do Espíritu Santo. Núcelo de Educaçâo Aberta e a Distância. Vitoria: UFES, 2003.

PINECHE, Piedad (1990). *Sacerdotes y Comerciantes. El poder de los mayas e itzaes de Yucatán en los siglos VII a XVI.* Primera reimpresión. México, D. F,: Fondo de Cultura Económica, 1993.

PINEDO, Christian. *Pitágoras y los Números.* CEFET - Pato Branco PR – Brasil. Disponible en: http://geocities.yahoo.com.br/christianjqp/. Acceso: 13 de febrero de 2006.

RAXCHE', Demetrio. *Las ONGs y las Relaciones Interétnicas.* Primera edición. Guatemala: Editorial Cholsamaj, 1995.

RECINOS, Adrian. *Popol Vuh. Las Antiguas Historias del Quiche.* México, D. F.: Editorial Concepto.

SACRISTAN, José Gimeno. *Poderes Instáveis na Educação.* Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

_________. *O currículo uma reflexão sobre a prática.* Traducção de Ernani F. da Fonseca Rosa. Terceira edição. Porto Alegre: Editora ARTMED, 2000.

SCHELE, Linda; FREIDEL, David (1990). *Una selva de Reyes. La Asombrosa Historia de los Antiguos Mayas.* Traducción de Jorge Ferreiro. Primera reimpresión. México D.F.: Fondo de Cultura Económica, 2000.

SEGEPLAN (Secretaría General de Planificación y Programación de la Presidencia). Estrategias para la Reducción de la Pobreza (ERP). Alta Verapaz, 2001.

UNESCO. *Declaración Universal de la UNESCO Sobre la Diversidad Cultural.* 31ª reunión de la Conferencia General de la UNESCO, París, 2001. Disponible en: http://portal. unesco.org/culture/es/ev.phpURL_ID=8270&URL_DO=DO_TOPIC&URL_SECTION=201.html. Acceso: 2 de Marzo de 2006.

VALDES, Claudia; CHAN, Elena. *Comparación y Uso Actual del Sistema Vigesimal y Decimal Occidental.* Guatemala: Universidad Rafael Landivar, 1994.

XCH'OOL IXIM. *Estatutos.* Documento legal actualizado en el 2005. Alta Verapaz, 2005.

_________. *Plan de acción del proyecto de seguimiento " Educación Basada en la Cultura Maya Q'eqchi'" con el enfoque de la Pedagogía del Texto (2005-2008).* Alta Verapaz, 2006.

YOJCOM, Domingo. *Estadísticas 2003.* Informe de las Comunidades de Xch'ool Ixim. Alta Verapaz: Xchool Ixim, 2003.

Por los caminos de la feria

Irma Fuenlabrada
María Fernanda Delprato

Palabras clave
Indígenas, comercio, matemáticas.

Introducción

El analfabetismo de comunidades indígenas condicionaría la resolución de problemas matemáticos subyacentes en relaciones comerciales que asumen organizaciones artesanales comunitarias. Sin embargo, el uso que estos adultos hacen de los números, sus funciones y sus relaciones, no sólo encuentran su origen en la exclusión del dominio de la simbolización matemática (y sus peculiares modos de apropiación y de acceso a la misma desde esta exclusión) sino, en cómo y de qué manera los criterios sociales de la cultura de origen respaldan decisiones que asumen estos grupos en la resolución de los problemas aritméticos que enfrentan.

En esta presentación se informa sobre el análisis cualitativo (estudio en caso)[1] sobre una organización de artesanas *p'urhépechas* del estado de Michoacán (México) y su participación en ferias (documentada mediante entrevistas semi-estructuradas a la lider del grupo y registros de observación), en tanto espacio crucial para la comercialización de su mercancía. En este proceso analítico se retomaron estudios sobre 'modos de ser culturales' (Lizarzaburu y Zapata Soto, 2001) subyacentes en organizaciones productivas de subsistencia de comunidades indígenas: sentido de solidaridad, reciprocidad, distribución y autoridad por el 'Don de dar' (Torres, 1995); así como aquellos referidos a soluciones 'prácticas' de sujetos con escasa escolaridad a problemas matemáticos involucrados en entornos laborales (Agüero, 2003; Knijnik, 1996).

Caminar hacia la feria

Andando en la feria se gestan conocimientos matemáticos que regulan diversos momentos que anteceden y suceden a la feria como espacio crucial de la comercialización. Caminar hacia la Feria, demanda decisiones previas (**situaciones de pre-venta**): gestiones para acceder a materia prima para producir (***gestión de créditos***), ponderación de variables para poner un "precio justo" de venta (***fijación de precios***).

La producción de mercancía para la venta está sujeta a su dinámica que está ligada a momentos específicos del año: ferias asociadas a festividades religiosas (Domingo de ramos, Día de muertos). Estos momentos escasos requieren grandes producciones que demandan una fuerte inversión en materia prima resuelta por la organización mediante la ***gestión de créditos*** para su compra, ya que su carácter de organización de subsistencia les impide respaldar una mayor producción con reinversión de ganancias acumuladas ausentes.

---

[1] Avances de la indagación realizada en el marco del proyecto "Conocimientos aritméticos cotidianos y prácticas sociales y productivas" en los años 2005-2006, M en C. María Fernanda Delprato, CREFAL (México) conjuntamente con la M. en C. Irma Rosa Fuenlabrada Velázquez, DIE-CINVESTAV (México).

Esta gestión introduce a la organización en “papeles para obtener créditos”, aprendiendo a comparar beneficios (seleccionan los créditos que cobran menos intereses); a generar mecanismos transparentes de distribución y de uso del crédito (individualizan los montos de cada artesana y se compra individualmente materia prima); a sostener la posibilidad del otorgamiento documentando su uso (buscan intermediarios para hacer recibos de compras de materia prima) y demostrando confiabilidad (realizan seguimiento del cumplimiento de pagos de deudas de cada artesana).

La ***fijación de precios*** ha evolucionado en la organización procurando responder a esa intuición del productor de … *"yo sé que cuesta tanto trabajo para hacerla…"*, es decir, fijar un “precio justo” que sea medida pertinente del valor de ese producto de mi trabajo humano. Mediante intervenciones de personas externas a la organización (capacitadores) se ha reflexionado sobre componentes a considerar, incorporando las ideas de “valor de la mano de obra” e “inversión en materia prima”.

Este proceso se complejiza cuando el individuo tiene que asignarle un valor a su mano de obra, máxime cuando jornadas laborales “coexisten” con actividades domésticas. Por ende, esta fórmula de fijación de precios no tiene un carácter operativo, debido a información faltante para su ejecución (ausencia del cálculo de costos de materia prima de cada pieza y de mano de obra) o a limitadas posibilidades de cálculo de las artesanas. Por otro lado, la presencia de precios comunes (no diversificados en función del tiempo de trabajo de cada artesano) supone cuantificaciones no apegadas a esa fórmula sino al conocimiento de precios competitivos (por experiencia de venta) y al trabajo con un rango de números que faciliten el cálculo (múltiplos de cinco). Es decir, su adopción en la organización no conllevaría su aplicación como procedimiento de cálculo sino como reguladora de decisiones sobre precios relativos. O sea, constituiría fundamentalmente un criterio para comparar precios: el mandil más caro lleva “puntada más fina” (tipo de trabajo como indicador de horas trabajadas); la hora de trabajo de alfarería vale menos, a pesar del desgaste físico que acarrea –"*…esa es cosa pesado…"*– para compensar el autoabastecimiento de materia prima; una olla de mayor tamaño es más cara (tamaño como indicador del tiempo de trabajo y de materia prima requeridos). La consideración de las componentes del precio (mano de obra, materia prima) posibilitaría entonces tomar estas decisiones, es decir, establecer un orden de los precios de diversas piezas.

Al interior de la organización también existen situaciones de reventa de mercancía comprada a miembros de la misma organización por aquellos integrantes que “salen” a ferias, fijándose el precio de reventa agregándole al precio de compra una mínima ganancia. El criterio que prima aquí es una “concepción de ganancia” que reúne no sólo la idea de compensación de costos sino también cuestiones de orden social (el “don de dar” al otro mediante “darle” la posibilidad de venta de su mercancía a un precio justo).

Caminar en la feria

Caminar en la Feria, en cambio, supone decisiones signadas por la inmediatez del espacio de venta (**situaciones de venta**) que demanda respuestas rápidas a cuestiones reiteradas: “cuánto va a ser” (***cálculo del total de cada venta***), “cuánto es lo menos” (***regateo***), “me sale o no me sale” (***control de ganancias***).

La producción y comercialización en una organización de mujeres, no deben estar reñidas con lo doméstico como mundo femenino. El “salir” se convierte en un paso que dan mujeres solas o no sujetas al mandato masculino, creando la posibilidad de salida de las otras al cargar la producción de todas. Por ello, existen diversos tipos de ventas: principalmente reventa y venta mediante intermediarios de la propia organización y, ocasionalmente, la venta en consignación (mediante museos y casas de artesanías). Las dos primeras situaciones (compra y reventa, y venta mediante intermediarios) son dispares por la demanda o no (respectivamente) de rendición a otro de las ventas realizadas.

Tanto las mercancías compradas para reventa como las ventas realizadas en las ferias no son registradas, siendo imposible un control estricto de mercancía que “sale y no sale”. A través de la experiencia de venta directa este saber circula entre las revendedoras de modo implícito, empírico y los productores tienen sólo un acceso mediado por argumentaciones de las revendedoras cuando deciden comprar mercancía para llevar a las ferias.

En la venta en la feria existen demandas matemáticas más específicas: calcular el total de cada venta, decidir descuentos en situaciones de regateo y controlar las ganancias obtenidas.

El ***cálculo del total de cada venta*** generalmente es resuelto por la presidenta e inmediatamente distribuye los montos correspondientes a las vendedoras del puesto, evitando así la elaboración de un registro. Esta ausencia de registro y el uso en cambio de la distribución inmediata, conlleva un modo específico de control de ganancias individuales (“con el dinero que se tiene en la bolsa”).

El ***regateo***, o negociación del precio de venta, es iniciado y/o aceptado en el marco de lo que se define por “mayoreo” en una organización de subsistencia (por lo menos dos piezas), porque al no haber un execedente en los precios establecidos no hay descuentos cuando sólo se vende una pieza. Para que el cliente se acerque y se genere la posibilidad de negociación (y, por ende, de venta) se omite la exhibición en forma escrita de los precios de mercancías "*…porque sino nomás lo ven el precio y piensan que eso ya es precio fijo"*.

Un primer rasgo del procedimiento de cálculo aplicado es que opera sobre los precios de cada pieza y no sobre el total de la venta. Así, si se venden varias piezas (dos de $15 y una de $35) a una de ellas se le aplica un descuento: "*Te la voy a dejar a esa"* (señala la más grande) *"a treinta"*; o a cada una se le aplican descuentos diferenciados: "*Y si llevarías de esos precios* ($100, $70 y $40), *te lo dejaría en noventa el de a cien; y te lo dejaría a la que era de a setenta, te lo dejaría este… en sesenta y cinco; la que es de a cuarenta te lo dejaría en treinta"*. Esto se vincularía a que se busca retener y operar sobre distribuciones y costos individuales para “facilitar” y “controlar” el cálculo y para diferenciar el monto del descuento según el valor de la pieza. Paradójicamente esta estrategia tiene como límite la pérdida de control del monto total del descuento realizado en una venta. Esta búsqueda de eficacia se evidencia también en que los montos del descuento van de 5 en 5 según el valor de las piezas, para así operar siempre con múltiplos de 5 –precios y descuentos–; y son aplicados en rangos (precios próximos: en ollas de $40, $35 y $20, se descuenta $5; en las de $60 y $50, $10) o a un precio individual.

Si a pesar de todos estos recaudos para reducir la complejidad del cálculo –debido a los cálculos sucesivos que conlleva una negociación– se pierde el control, la opción es confiar en los cálculos del comprador: "*Y en veces le digo al cliente, si a mí no me viene a la cabeza, le digo: ‘Saca la cuenta y te confío’ "*.

Hay excepciones al descuento sólo en ventas “por mayoreo” vinculadas a la consideración de otro criterio: el tipo de cliente. Así, se hacen descuentos si se vende una sola pieza a lugareños (identificables por su atuendo y por sus observaciones o preguntas vinculadas al uso doméstico de las ollas: *pero es sin asa, cuántos litros entran*) o como atención a miembros de la gestión de las ferias.

También inciden el espacio y el momento de venta: existen precios diferenciados según el lugar de venta porque hay en ellos clientes diferentes; en los últimos días de la feria se aceptan precios menores para no regresar con mercancía de costoso traslado (alfarería).

La exposición de piezas que participan del concurso en las ferias se considera que "*es buen* (buena) *venta lo que se vende ahí"* pues el precio sería el doble dado que los clientes potenciales son extranjeros o dueños de locales de venta de artesanías. En cambio, en los puestos de la feria el precio de venta es menor (aunque se puede negociar); y en los pueblos cercanos es aún menor porque son personas que realizan un uso “doméstico tradicional” de la alfarería. Estos usos son adjudicados a la “gente de la raza”: "*La gente mismo raíz de nosotros, un poquito más precio"* (más barato). *"Porque ya saben que ellos quieren para cocinar. Y es poco de recursos, y así"* (se ríe). Los precios varían entonces según la valoración de las posibilidades monetarias de quien compra.

Esta variación del monto de precios en situaciones de regateo advierte sobre la dificultad de efectuar un estricto ***control de ganancias***. El procedimiento de control no es mediante la cuantificación de la relación costo-beneficio, sino que se va estimando a partir del dinero que se va obteniendo en las ventas buscando centralmente ir compensando la inversión inicial (por la compra de mercancía) y los costos de venta. Este procedimiento quizás obedece a la inscripción como una actividad de subsistencia[2] y a la consideración de otros componentes de la ganancia. Como señalábamos, la ***concepción de ganancia*** parece no estar restringida a lo monetario, sino a una ganancia de orden social otorgada por el prestigio que otorga el generar o "dar" oportunidades de venta para sus "compañeras" de la organización. Asimismo también se considera como parte del "ganar" el poder acceder mediante trueque a la reinversión en nueva mercancía para vender en la comunidad.

Finalmente, la intermediación en la venta demanda la rendición de ventas realizadas, reconociéndose los límites de la memorización y recuperando la escritura numérica como recurso auxiliar para una retención más eficaz. Por ello, se registran las ventas realizadas de textiles usando "etiquetas" como soporte para rendir piezas vendidas de cada artesano (son despegadas y guardadas para confeccionar una lista de ventas: nombre de cada artesana, prenda y precio). La escritura aparece así como medio de retención y de comunicación siendo reconocida también como estrategia de transparencia: "*Y por eso ellos están conformes de lo que… Nomás yo tampoco lo voy anotando cuánto*".

Caminar luego de la feria

Caminar luego de la Feria (**situaciones de post-venta**), finalmente, requiere distribuir entre los miembros de la organización exigencias (***distribución de costos***) y beneficios del haber estado allí (***distribución de premios***). Este momento sería uno de los modos de andar que distingue centralmente a la producción comunitaria de la personal, en este "después" la mirada colectiva se dirige a pensarla, se ocupa de reparar con justicia lo sucedido. Distribuir para compensar, distribuir para socializar, parece dar continuidad a la dimensión colectiva de esta organización de producción y de comercialización.

La ***distribución de costos*** de reventa se realiza sólo entre los miembros de la organización participantes, dadas las posibilidades de ganancia dispar que genera esta actividad: "*...nosotros hacemos más dinero y ellos hacen menos*". Entre los "revendedores" existen procedimientos de distribución distintos: igualitarias (traslados de mercancías y compensaciones de costos), diferenciadas (costo de "la plaza" –derecho por uso de espacios de venta con posibilidades de venta dispar según su ubicación–) y costos asumidos en forma individual ("viáticos").

La distribución de los traslados es igualitaria, llamativamente, a pesar de la disparidad en la cantidad de mercancía llevada por cada artesana, pues se asume esta disparidad como una

---

[2] "Todas las alfareras dicen que hacer las ollas es para ellas una 'ayuda'. Si vemos el tiempo de elaboración que implica cada olla, más lo que es la obtención de la materia prima, hay una falta de lógica económica en el sentido de capitalización y/o ganancia real por el producto del trabajo. (…)

En la lógica no capitalista, de no acumulación, del valor de uso y de reciprocidad que es observada en general entre los grupos étnicos americanos (Dominique Temple, 1991; Stefano Varese, 1979), existe una necesidad pragmática, de orden cotidiano y ordinario, de tener cierta liquidez para cubrir parte de sus necesidades básicas y de servicios, que seguramente reflejan cada día más, procesos de transición hacia las economías capitalistas y que permean, incluso a las economías de autosubsistencia, como han sido hasta ahora, las de los pueblos indígenas y campesinos en general.

En el caso de pueblos con estructuras culturales diferentes, la única forma de cubrir esta necesidad de liquidez eventual dentro del sistema social establecido que predomina, es a través de la comercialización de sus productos o de la explotación de su fuerza de trabajo, en el caso que sean emigrantes.

Así, la confección de ollas y comales, que en sí mismas están caracterizadas por su valor de uso, cobran, parcialmente, un valor de cambio mediante una liquidez somera y efímera, pero al fin, necesaria." (Torres, 1995, pp. 47-48) responsabilidad individual no compensable: "*Es cuenta de ella. (…) Pero tenemos que pagar lo mismo"*.

La diferenciación en la distribución de costos de “la plaza” parece haber sido adoptada del criterio de cobro existente entre los organizadores de la feria.

Si bien prima como criterio la distribución de costos entre aquellos miembros que participan de la reventa, como habitualmente convive con espacios de venta por intermediación de las revendedoras (mercancía llevada a concursos, textiles), existe la posibilidad de ***colaboración*** de los miembros restantes: *"...eso es de una voluntad de ellos. Ellos deciden (…) No es que yo les digo: ‘Tú tienes que dar esto’ ".*

Esta posibilidad está asociada a ganancias individuales de los miembros restantes derivadas de la obtención de premios en concursos: *"...si nos va bien* (en) *las, los concursos, ellos también, así con buena voluntad me ayudan con más".* La colaboración se realiza por rubro (textil, alfarería) y según el monto de los premios: *Y ellos lo dan más porque de ellos es más el premio.*

Esta colaboración demanda a las revendedoras retener los costos de reventa en la feria. Con este propósito y para transparentar la comunicación de estos costos, se recurre a mecanismos de retención que la “socializan” mediante la memorización con un par (tesorera) y el uso de recibos como documentos. Esta práctica de uso de “documentos” muy posiblemente haya sido adoptada de la exigencia de organismos crediticios de presentar recibos como constatación de gastos.

La presencia de mecanismos de ***distribución de premios*** ya presupone una ruptura con su lógica del mérito individual[3]. La organización participa porque los premios permiten absorber costos y generan una visibilidad de la producción de la organización que otorga mayores posibilidades de gestión de recursos diversos (capacitaciones, proyectos especiales, recepción de ayudas o préstamos). Sin embargo, han generado mecanismos para adoptar estas posibilidades de los premios sin desconocer que es obtenido por sus integrantes en calidad de miembros de la organización y no como artesanos individuales. Por ello, acordaron distribuirlo para evitar tensiones en la organización y fomentar el interés en participar:

> *(relato sobre la primera ganadora de la organización) "...Me dice: ‘Elvia’. Le digo: ‘¿Qué?’. ‘Pues yo creo que yo no me quedo solita con esto. Esto lo vamos a repartir. Yo me quedo con los diez pesos y en diez pesos que se reparte de los que vinieron a acompañar, a participar’. (…) ‘Para que no haiga problemas, para que no haiga jaloneo, para que somos parejos y el día que gane el otro fulana lo vuelve a hacer lo mismo y esto así se va a quedar’. Y así, hasta por ahorita."*

Los premios se distribuyen dándoles primero la mitad al ganador, la otra mitad se junta con la de otros premios distribuyéndose el total entre los participantes que no han sido ganadores de ningún premio porque *"nosotros* (los ganadores) *ya estamos quedando con lo de nosotros"*. Esta distribución no contempla compensaciones para las artesanas que llevan las piezas al concurso debido a que “ganan” con la reventa.

Este criterio puede ser flexibilizado considerando la ganancia que supuso la pieza según su espacio de venta (en el puesto de la feria o en la exposición del concurso), o sea, según su precio de venta; dándose más de la mitad del premio al ganador como una compensación de la disparidad de precios de venta. Asimismo, parte del monto a distribuir puede ser destinado para compensar gastos de las intermediarias, pero esta decisión es voluntaria.

Estos diversos procedimientos requieren implementar cálculos para determinar los montos diferenciados correspondientes a cada participante del concurso y/o vendedor. Como alternativa a los

[3] “Los estímulos económicos a través de los concursos en los que participan las alfareras, han jugado un papel singular al interior del grupo y de la comunidad. No sólo han sido estímulos en cuanto a mejorar la calidad alfarera y la innovación en el diseño y la creatividad expresiva, sino que también han permitido la recreación de principios de distribución y reciprocidad étnica.” (Torres, 1995, p.51)

límites personales de cálculo de la presidenta o quizás como modo de control de la distribución, se delega este cálculo a alguno de los participantes beneficiarios que tenga mayor escolaridad.

Referencias bibliográficas

Agüero (2003) El pensamiento práctico de una cuadrilla de pintores. Estrategias para la solución de problemas en situaciones matematizables de la vida cotidiana. Tesis de doctorado Universidad Autónoma de Aguascalientes: México.

Knijnik (1996) Exclusao e Resistencia. Educacao Matemática e Legitimidade Cultural. Porto Alegre (Brasil): Artes Médicas

Lizarzaburu y Zapata Soto (2001) Pluriculturalidad y aprendizaje de la matemática en América Latina. Experiencias y desafíos. Madrid: Ediciones Morata, PROEIB-ANDES, DSE.

Torres (1995) Alfarería, organización de mujeres indígenas y aprendizajes. CREFAL-PEMT-OEA: México.

La relevancia de los contextos en la enseñanza de las matemáticas: lo social y lo cultural, paradigmas encontrados

Eliana D. Rojas, PhD
University of Connecticut. Storrs, CT.

En 1989 el Concejo Nacional de Profesores de Matemáticas Norteamericano –*Nacional Council of Teachers of Mathematics* (NCTM)– en su documento *Currículum and Standards for School Mathematics*, declaraba que los diseños curriculares del sigloXXI, destinados a la enseñanza de las matemáticas, deberían caracterizarse tanto por una oferta fuertemente apoyada en la solidez del contenido matemático como por cambios fundamentales en las metodologías de enseñanza y evaluación del aprendizaje de esos contenidos. Al mismo tiempo, los centros de investigación hacían un llamado a las comunidades de educación superior, especialmente a aquellas que ofrecen programas de formación del profesor de matemáticas, a aunar esfuerzos con las instituciones educacionales y a formar comunidades de investigación y aprendizaje conjunto, con el fin de mejorar la efectividad de la enseñanza de las matemáticas.

Es en este contexto que en el primer semestre del año 2000, el NCTM publica un conjunto de recomendaciones especialmente diseñadas para identificar estándares de metodologías de enseñanza y de evaluación para la enseñanza de las matemáticas. A la vez, el documento se concentra en alertar a la comunidad educativa de los riesgos que estarían emergiendo en esta sociedad de globalización de la información, mediada por una tecnología de avanzada, donde no solamente cambian las necesidades en términos de desarrollo del conocimiento y definición de destrezas con las que deberían graduarse los estudiantes sino que los ambientes en los que se definen estos estándares académicos, la sala de clases y su cultura y sus dinámicas de comunicación. Ya entonces, el NCTM reconoce que estarían cambiando las características que definirían los grupos humanos que conformaban las salas de clase de matemática tradicionalmente reconocidas como homogéneas. Las nuevas comunidades, que obedecen a la movilización masiva de seres humanos, se caracterizan por su heterogeneidad en términos de su diversidad cultural, social y lingüística. Esto está generando la necesidad de identificar procesos y prácticas nuevas, modelos y programas de instrucción y evaluación de la enseñanza de las matemáticas, diseños curriculares, y programas de formación docente que se caracterizarían por el compromiso al cambio y desarrollo profesional permanente, así como su compromiso a la exploración de prácticas y experiencias relevantes que validen la riqueza de los ambientes multiculturales y multilingüe (Rojas, 2007).

El NCTM en su Standard "*Equity*" (pg., 142) apuntaba a la obligación de las organizaciones educacionales de gobierno y universitarias (encargadas de los estándares—diseño de materiales, la formación, la evaluación, el perfeccionamiento) a que la misión y objetivo final de los programas y diseños curriculares tuviesen como prioridad la validez de la solidez de los contenidos matemáticos (*Principles and Standards for Schools Mathematics*, 2000). El NTCM enfatiza además que la sociedad necesita a cada estudiante, por lo que cada estudiante, individualmente, debe estar expuesto a oportunidades y experiencias de aprendizaje que le permitan alcanzar los objetivos recomendados por las organizaciones locales. Este compromiso debe considerar a todo individuo-estudiante sin importar su idiosincrasia, su origen étnico, cultura, tendencia política de su comunidad, o su estatus socio-económico. En este nuevo contexto, el fin debe considerar el facilitar a cada miembro de la comunidad escolar la oportunidad de llegar a ser lo que el "*council*" califica como "matemáticamente alfabetizado", (*mathematically literate*). Además, en el contexto de la realidad de las necesidades del conocimiento de hoy, tanto como de la interpretación avanzada que ofrece la investigación científica – pedagógica de lo que es importante en el aprendizaje matemático, estas experiencias de aprendizaje matemático deben concentrarse en el quehacer de los procesos de resolución de problemas.

Krulik, predecía el principio de la *resolución de problemas* como un tema de importancia central en los procesos de desarrollo del aprendizaje matemático (Krulik, 1980, p. xiv). La década de los ochenta se caracteriza por este énfasis que se manifiesta primeramente en el documento "*Agenda for Action*", en el que se implica que la Resolución de Problemas debe ser el enfoque y el canal de acción en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar, (NCTM, 1980, p.1). Esta preocupación del NCTM, se ratifica años más tarde en la publicación *Everybody Counts* (National Research Council, 1989) y luego en los estándares curriculares (*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* ; NCTM, 1989). En estos documentos se enfatizaba la *resolución de problemas* como la herramienta de enseñanza de las matemáticas que facilitaría, no solamente los entendimientos de los conceptos matemáticos, sino también el instrumento de apreciación por parte de los estudiantes de la validez y pertinencia de alcanzar los conocimientos matemáticos. Por otra parte, el resolver problemas matemáticos puede utilizarse como un vehículo de crecimiento y desarrollo social personal. A través de problemas y situaciones matemáticas en un salón de clases, los profesores pueden guiar a los estudiantes en discursos de relevancia y responsabilidad social o cívica; de reconocimiento e interpretaciones de la historia, la ciencia; de los temas de sus necesidades y de validación a sus experiencias.

Podríamos entender que desde esta perspectiva podemos inferir que al aceptar la "resolución de problemas" como vía optima de desarrollo del conocimiento matemático, el principal objetivo de la enseñanza de las matemáticas debe ser entonces conseguir que los estudiantes desarrollen al máximo sus competencias en términos de las capacidades envueltas en estos procesos. Al concepto de *resolución de problemas* se le ha dado múltiples significados. Este varía desde el concepto del problema que se interpretaría como la acción o el "trabajo de ejercicios aritméticos" hasta lo que se define como la actividad matemática del profesional matemático mismo: "el hacer matemáticas". Por otro lado, nacional e internacionalmente, los movimientos de reforma en educación matemática se han establecido conforme a la manera en que grupos individuales en periodos determinados han visualizado las matemáticas. En muchos casos, estas visiones tienden a variar dependiendo principalmente de cómo los grupos de personas planean usar las matemáticas.

Una visión popular acerca de la naturaleza de las matemáticas es aquella que la define como el uso de símbolos abstractos combinados con un conjunto de reglas y estrategias para resolver problemas. Cooney (1994, p. 12) señalaba que algunos profesores "describen la enseñanza de las matemáticas como un proceso *paso a paso*". Esta visión algorítmica de las matemáticas revela un conocimiento práctico que toca sólo superficialmente la concepción de las matemáticas. Dicho enfoque visualiza las matemáticas sólo como verdades absolutas. En el caso de los estudiantes, por ejemplo, ellos las definirían como el conjunto de acciones que les otorga la habilidad y conocimiento en torno a competencias básicas tales como sumar, restar, multiplicar y dividir. En ambos casos esta visión limitada de las matemáticas refleja severas fallas en las experiencias formativas matemáticas tanto de los profesores como de los estudiantes. Las investigaciones muestran que, especialmente en salones de clases de escuelas concentradas en comunidades de bajos ingresos, los estudiantes identifican las matemáticas con prácticas repetitivas y más que nada aritméticas.

Entendemos además que las situaciones sociales tienen gran influencia en algunos de estos aspectos relacionados con la visión que se tiene de la naturaleza de la matemática. Una de las razones más importantes por la que se discute la naturaleza de las matemáticas en los ambientes socio-políticos y económicos, se relaciona más que nada con la necesidad de justificar la finalidad de su enseñanza, el porqué. Tanto los padres como las empresas quieren que los estudiantes se preparen para responder a las necesidades de aplicación y manejo del conocimiento matemático con el que ellos se enfrentarán en el futuro, en la enseñanza superior como en sus vidas profesionales y del trabajo. Mirado desde esta perspectiva, la matemática escolar es vista como -*no más que*- un conjunto de procesos concentrados en técnicas de manejo efectivo de ciertas reglas y herramientas cognitivas prácticas que nos llevarían a responder casi intuitivamente a situaciones matemáticas previamente contextualizadas. Esta se definiría como la visión algorítmica de las matemáticas. Esta regla nos limita a un currículo basado en una noción de la matemática escolar que propone una concepción más pragmática de la matemática, la llamada indiscriminadamente *"matemática aplicada",* que recomendaría la resolución de problemas enfocada en "situaciones de la vida real", donde las prácticas de enseñanza de las matemáticas se concentran principalmente en la adquisición y dominio de las destrezas básicas para responder a los problemas. Por años los textos de matemática escolar siguieron un protocolo claramente diseñado a *moldear* destrezas. En este caso los estudiantes sí necesitarían principalmente saber las cuatro operaciones.

Otro factor social que emana de la discusión del *qué* es lo que los estudiantes necesitan saber al egresar de su experiencia escolar se refiere a competencias de "razonamiento" y "análisis" desarrolladas durante la actividad de resolución de un problema. Nos es muy familiar el llamado ya casi habitual de la empresa requiriendo funcionarios preparados para responder a situaciones problemáticas. La necesidad de salirse del marco de referencia habitual, del patrón "fórmula" y aplicar destrezas de intelectualidad creativa. Aludiendo a Polya (1945) la acción de pensar puede estrenarse y generarse; la geometría por ejemplo debe verse como el arte de resolver problemas -a través del análisis que parte de axiomas sumando lemas y pequeños teoremas para llegar a conclusiones y todo esto con el uso lúdico de "regla y compás" -, lo que debería haber cambiado con el uso apropiado de herramientas tecnológicas. Los alcances que la tecnología a la que se tiene acceso hoy, tiene como instrumento de enseñanza de las matemáticas sobrepasan los límites de las posibilidades en los procesos de enseñanza – aprendizaje en el salón de clases de matemáticas. Desde este punto de vista la naturaleza de las matemáticas se definiría como el conjunto de acciones que envuelve el pensar, razonar y responder a la naturaleza de un mundo vivo y cambiante alrededor nuestro.

Quizás la mejor perspectiva acerca de la naturaleza de las matemáticas sería que las matemáticas se han formalizado en algoritmos y reglas, pero que cada vez que alguien razona y trata de resolver cualquier tipo de problema, está entrando en el campo de la matemática. Schoenfeld (1982, p.32) decía "*la matemática es una disciplina de análisis claro y lógico que nos ofrece herramientas para describir, teorizar, y enfrentarse con el mundo (y más tarde, mundo de ideas) de una manera coherente e inteligente*." Siguiendo nuestro análisis nos debemos preguntar entonces: ¿Qué ideas acerca de las matemáticas uno lleva consigo (arrastra) a su propio quehacer matemático?, y ¿cómo es que estas creencias individuales y personales modelan, estructuran la forma en que uno hace matemáticas y por lo tanto de cómo enseña matemáticas? Es aquí donde algunos autores asumen un punto de vista 'constructivista' en relación a cómo se construyen las percepciones y el quehacer individual matemático en los estudiantes.

Individualizar la enseñanza para los estudiantes, construir su e*structura (marco conceptual) matemática* a partir de sus creencias, intuiciones, y experiencias, y construir el aprendizaje nuevo sobre esos cimientos (*scaffolding*) (Gibbons, P. 2002) a partir de la identificación de estos conocimientos previos, ayudará a los profesores en las etapas de reconocimiento e identificación de acciones a tomar en términos curriculares y de evaluación.

Estas etapas de identificación de los estudiantes en términos de reconocimiento de lo que el estudiante trae consigo a la sala de clases, han probado dar validez y efectividad a las elecciones curriculares necesarias en los procesos enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Además refuerza el sentimiento de control sobre lo que se sabe y lo que se debe aprender. Schoenfeld (1992) se refiere a la "cultura de la sala de la clase de matemáticas" como "*una parte de una fórmula (prescrita), no negociable, y no relacionada con el resto del mundo*". (p. 190). En este "nicho" suceden dinámicas de diálogo, de comunicación, de pensamiento y acción subconsciente, percepciones internas vs. externas, interpretaciones y conjeturas, explicaciones de estas interpretaciones, y transmisión de un conocimiento "a mi manera", dentro del contexto de lo personal. Por ejemplo, nuestro propio conocimiento acerca de cómo procesamos nuestra actividad de pensar. ¿Cuán efectivos y precisos somos en cuanto a responder, describir nuestras ideas, nuestros propios pensamientos? Tomamos decisiones con respecto a nuestras respuestas, y sólo cuando controlamos los ambientes, es decir "entendemos" reconocemos o no lo que el otro sabe, por lo tanto, podemos "adivinar lo imprevisto" de lo qué el otro piensa y hacer conjeturas acertadas.

Según Schoenfeld, una buena respuesta a un problema, exige el uso eficiente de lo que uno sabe: "si no se tiene una clara idea de lo que se sabe, uno tiene que aceptar que va a encontrarse con serias dificultades para resolver un problema (p. 190)" o para responder a un problema. En otras palabras, nuestro enfoque ante una tarea específica, y nuestro entendimiento de cómo resolver o manejar esa tarea, son afectados por el grado con el cual uno pueda responsablemente ser capaz de evaluar aquello que uno sabe, para entender lo que necesita aprender, y al mismo tiempo, controlar lo que es capaz de aprender. Así, dependiendo el nivel de madurez intelectual, podemos estimar con mayor o menor exactitud, el número que representa una cantidad de manzanas en una canasta, o de habitantes en nuestro pueblo natal, al punto que nuestras apreciaciones pueden ser extremadamente exageradas si no entendemos o estamos familiarizados con el contexto en el que enfocamos nuestros estimados. Por ejemplo, estudiantes en mi sala de clases secundaria con un 80 % hijos de inmigrantes, clasificados como *English Language Learners* (ELLs)[1], estimaban "*más de un millón de personas* ", en una ciudad de 200 mil; o "*como tres libras en un paquete de arroz de un kilo*"; "*camino como 30 millas, vivo a 10 cuadras", peso como 40 libras* y otras (Rojas, 2005).

¿Cuán bien podemos recabar la información respecto a lo que estamos haciendo y cómo lo estamos haciendo?; ¿cuán conscientes estamos de lo que estamos pensando?; ¿cómo progresamos con respecto al conocimiento del problema que estamos trabajando?; ¿cómo podemos usar ese conocimiento para guiarnos en los procesos conscientes e inconscientes de la resolución de esos problemas?; ¿cómo usar los comentarios, ideas, observaciones que se van acumulando para guiar en un continuo nuestro progreso en el proceso de resolver el problema?. En el caso de trabajar con problemas con los cuales los estudiantes no están familiarizados, tanto en sus procesos como en su lenguaje académico[2] o en su trasfondo natural-vernacular[3], es importante dar espacio a la posibilidad de que los estudiantes los trabajen en conjunto, dar paso a los errores y a la discusión armónica en torno a los errores. Estas experiencias exponen a los estudiantes a procesos de pensamiento y acción respecto a cómo un problema sería resuelto o podría resolverse. Cuando los alumnos reflexionan interna y externamente acerca de sus aprendizajes, es cuando se produce ese conocimiento acerca de sus propios pensamientos y es el factor que afectará su conocimiento.

A este proceso se le conoce como "*metacognition*". Como resultado de sus experiencias de enseñanza y aprendizaje, los estudiantes desarrollan creencias acerca de cómo y qué son las matemáticas, y esas creencias pueden tener un efecto negativo o positivo en el comportamiento y en las respuestas respecto a los procesos de aprendizaje matemático. (p. 195). El profesor tiene la responsabilidad de estimular ambientes de comunicación y expresión y por lo tanto facilitar los procesos *desenredando* los conceptos, *dilucidando.* Una actividad creativa en salones de clases de diversidad cultural y lingüística tiene que ver con la creación de diarios matemáticos, incluyendo

---

[1] *English Language Learners (ELLs)*: Se refiere a estudiantes para los cuales el Ingles no es su lenguaje primario.

[2] *Lenguaje Académico*: El lenguaje hablado y escrito que se refiere a la terminología puramente en el contexto de la matematica.

[3] Lenguaje Natural: El lenguaje hablado y escrito cotidiano-vernacular, no necesariamente académico.

diccionarios, donde el uso de *cognates*[4] entre el lenguaje académico matemático y el lenguaje natural, es analizado, comparado e interpretado previo a la unidad a enseñarse o a la lección.

El lenguaje matemático en inglés y el lenguaje matemático en español, por ejemplo, tienen raíces similares (latín – griego etc.) que una vez identificados facilitan el proceso de predisponerse a lo cognitivo. Ejemplo: *tabla – table; triángulo – triangle; parábola – parabola mediana – median - middele line; puntos medios- middle points; razón – ratio; fracción – fraction ; área – area* etc. (Rojas, 2006). Estos instrumentos sirven, además, como portafolio diferenciado de evaluación y seguimiento tanto de las limitaciones como de los avances de los estudiantes.

Los conceptos matemáticos, asimismo, necesitan ser explícitamente aclarados y conceptualizados (*scaffolded*). La investigación demuestra que el conocimiento se trasfiere de un lenguaje a otro, (Thomas & Collier, 2002; Freeman I. & Freeman D., 1998) por lo tanto el dominio de los contenidos matemáticos básicos previos operan como *"colchón de seguridad"* en el andamio en que se construyen los nuevos conocimientos. Al mismo tiempo es importante manejar las interpretaciones de tal manera que se aclaren específicamente las interpretaciones de conceptos de doble significado o de significado disímil. Por ejemplo: *tabla – table, razón – ratio, mediana – median etc.*

Lo metacognición, entonces, tiene el potencial de transformar el significado de los aprendizajes matemáticos de los estudiantes y reformular sus experiencias en los salones de clases. La creación de una cultura propia de las matemáticas en la sala de clases, propicia instancias de procesos metacognitivos, "un microcosmo de cultura matemática" (Schoenfeld , 1988), alienta a los estudiantes a pensar en las matemáticas como parte integral de su vida diaria, promueve en los estudiantes la posibilidad de hacer conexiones entre conceptos matemáticos dentro de diferentes contextos sociales, cívicos y académicos y desarrolla un sentido de comunidad de aprendizaje entre compañeros y con sus profesores, en problemas complejos pero pertinentes.

Esta visión de la sala de clase de matemática como una comunidad de aprendizaje matemático, propicia elementos de encuentro entre disciplinas tradicionalmente no reconocidas como matemáticamente compatibles -estudios sociales o idiomas por ejemplo, u otras áreas o disciplinas diversas. Incluso algunas ciencias (ciencias biológicas, astronomía, química, etc.) han sido tradicionalmente vistas, por los estudiantes y la comunidad, como disciplinas desasociadas de las matemáticas. En estos ambientes se crea una cultura en la que las conexiones entre lo que los estudiantes están aprendiendo y aplicando a experiencias de aprendizaje tradicionalmente reconocidas sólo como matemáticas, y aquellos conocimientos asociados a otras asignaturas, representan en la actividad escolar el conjunto de las aplicaciones interdisciplinarias que se transforman en la relación con el quehacer de la vida diaria del estudiante.

En este contexto, la función del profesor también se extiende a una actividad más allá de su disciplina y surge la necesidad de interactuar con otros docentes en el quehacer académico diario. Además, se establecen normas de colegiatura que han reflejado incremento en el reconocimiento a la validez de las distintas asignaturas tanto como a la interdisciplinaridad de los diversos contenidos. Aquí podríamos definir una nueva concepción de sala de clases donde surgen y se reconocen diferentes culturas educativas donde los profesores utilizan objetivos *metacongnitivos* con cada estudiante, y donde los estudiantes se identifican con lo que aprenden y lo relacionan a una parte integral del quehacer diario.

Entendemos entonces que en el ámbito del aprendizaje de las matemáticas, el estudiante de hoy se enfrenta a un doble desafío: el cómo aprender matemáticas dentro de ambientes de escaso nivel de alfabetización y el desafío de desenvolverse entre comunidades de altos grados de diversidad académica y cultural. El construir conceptos matemáticos sin un conocimiento fundamental previo –

---

[4] *Cognates*: Es importante reconocer la dualidad de la interpretación del concepto. Puede ser Falso o contradictorio.

equivalente al de sus compañeros de aula por ejemplo- es prácticamente imposible para alumnos de contextos en desventaja socioeconómica, especialmente en cuanto a enfrentar el tema de desarrollo del conocimiento matemático a través de resolución de problemas. Por años he visto incomodidad y frustración de mis estudiantes "matemáticamente privilegiados" ante problemas simples, y como al "descifrarlos" lentamente adquieren la confianza necesaria para enfrentarlo. En estos casos, el manejo del lenguaje en que se comunica la información es de vital importancia. Tal conocimiento es indispensable para el proceso de hacer conjeturas, suposiciones, relaciones, y poder procesar y retener nueva información de forma efectiva. Muy a menudo, estas circunstancias conllevan a instancias de frustración tanto para el estudiante como para el profesor.

El NCTM visionario de las nuevas necesidades y desafíos, ya en el año 1980 declaraba la necesidad de poner mucha atención al tema del lenguaje. La expresión y comunicación de ideas en matemáticas se había manifestado por generaciones como un factor ajeno al desarrollo del conocimiento matemático. Mas tarde expresaba "Las estrategias de enseñanza así como actividades especialmente diseñadas (y desarrolladas con la ayuda de un especialista en lenguaje) deben ser incorporadas dentro de los programas de enseñanza de las matemáticas a nivel secundario" –recomendaba- "si queremos que todos los estudiantes tengan la oportunidad de desarrollar su potencial matemático sin importar el nivel de manejo del lenguaje de instrucción" (NCTM, 2000). El Consejo no sólo apuntaba a los problemas de diferencias de nivel de dominio en el manejo del idioma por razones de segundo idioma, sino que, además, reconocía las marcadas diferencias entre el dominio del lenguaje académico, versus el social, dependiendo del status del grupo social y o diversidad cultural y lingüística del estudiante.

El tema de las reformas, en lo que tiene que ver con el modo en que se enseñan las matemáticas así como con el *cómo* se evalúan los procesos de desarrollo del conocimiento matemático, demuestra que estos cambios son más y más necesarios, si queremos asegurar que todos los estudiantes tengan acceso a una base matemática sólida desde el principio de su experiencia educativa. Esta necesidad de acumular información relacionada con las diferencias individuales en el procesamiento y asimilación del conocimiento matemático para acomodarlo a las necesidades particulares de los estudiantes, no es exclusivo de estudiantes tradicionalmente clasificados como "en desventaja o con necesidades especiales", es un tema importantísimo en cada uno de los ambientes educativos nacionales e internacionales. Aún más, en tiempos en que los procesos de cambio de la cultura escolar dentro del discurso comprensivo en la sala de clases, recomienda trabajar con grupos diversos y heterogéneos atendiendo a la individualidad de los aprendizajes que la investigación reconoce como factor de correlación positiva en el proceso de entendimiento y asimilación de los aprendizajes matemáticos: el alumno aprende de las observaciones de las dificultades de sus compañeros.

Una actividad que estimula (o desafía) positivamente a mis estudiantes a participar en mi sala de clases es el requerirles elaborar por escrito su propia interpretación de los conceptos después de ser definidos y expuestos por mí. Luego de definirlos individualmente por escrito, los estudiantes se acomodan a trabajar en grupos de no más de tres. Cada uno tiene la obligación de demostrarlo a su equipo, y todos, la responsabilidad de que cada uno se "apropie" de ese conocimiento. Voluntariamente o al azar uno o dos estudiantes del curso exponen a sus compañeros este nuevo conocimiento (Rojas, in press).

En las últimas décadas, la Educación Matemática se considera como actividad de investigación continua, de desarrollo permanente y de enseñanza-aprendizaje. Como actividad de investigación implica la búsqueda intencional y sistemática de paradigmas de comprensión de los fenómenos tradicionalmente discursivos asociados a la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Esta ha evolucionado en forma considerable durante los últimos años. Se le vincula con la producción de innovaciones curriculares, la implementación de nuevas alternativas metodológicas, y cada vez más se manifiesta en la producción de nuevos textos, libros y materiales didácticos social y culturalmente pertinentes.

Tradicionalmente la actividad relacionada con la enseñanza de las matemáticas a nivel escolar se ha concentrado en el profesor de matemáticas. La formación del profesor de matemáticas en términos del desarrollo de sus capacidades matemáticas ha sido responsabilidad mayormente de las escuelas de ciencias básicas matemáticas con una alta concentración de académicos científicos matemáticos enfocados en contenido. Estos están significativamente divorciados de los departamentos de formación pedagógica y tienen muy escasa conexión con los centros educacionales y/o de investigación pedagógica. Hoy en día se reconoce más y más, la necesidad de un serio acercamiento entre estas comunidades.

En los modelos de investigación pedagógica matemática en los Estados Unidos, el tema de colaboración interdisciplinaria entre todas las entidades vinculadas con los procesos de adquisición del conocimiento matemático, se visualiza como una variable indispensable en los procesos de formación y seguimiento de la carrera del y la docente en matemáticas. La formación del profesor de matemáticas establece una base interdisciplinaria que se fundamentaría en un fuerte dominio del conocimiento matemático además de técnicas de observación (*inquiry*) de las diferentes instancias de discurso, aprendizaje y evaluación de procesos matemáticos dentro de la sala de clases. Dichas acciones requieren de parte del profesor un conocimiento teórico y práctico tanto de los conceptos y acciones metodológicas de la enseñanza de las matemáticas como del manejo de principios y procesos que enmarcarían sus acciones de liderazgo e investigación en el aula, que le permitiría visualizar la sala de clases de matemáticas como una plataforma de observaciones y análisis de los discursos y actividades que iluminarían procesos de enseñanza aprendizaje significativos. Hoy en día, además, se estructuran los proyectos de educación y escuela, como comunidades de aprendizaje, esto se traduce en el reconocimiento de la realidad social, valores, lenguaje y cultura de la comunidad inmediata en la vida de los estudiantes.

En este contexto las responsabilidades del educador se extienden y por lo tanto su formación profesional está marcada por una nueva necesidad antropológica educativa que nos lleva a la necesidad de identificar la efectividad de las prácticas que envolverían a estos sectores tradicionalmente desasociados del contexto de la escuela, los padres. La comunidad va a la escuela, la escuela no va a la comunidad. La participación de los padres ha probado tener correlación positiva con el rendimiento de los estudiantes y su apreciación por las matemáticas (Rojas & Hartsock, 2006).

Atender a esa demanda es imprescindible. Al conseguir el desarrollo profesional permanente del docente a través de la investigación crítica y reflexiva, al aplicar el conocimiento derivado de la investigación en sus propias aulas, con extensión a la comunidad, en sus experiencias pedagógicas matemáticas inmediatas; al desarrollar y modificar conceptos y teorías educativas conceptuales a través de actividades, observaciones e investigaciones dentro de su realidad y la de sus estudiantes y sus historias, el profesor fundamenta sólidamente su práctica educativa al mismo tiempo que lo dignifica y valora en su quehacer académico-científico profesional. Promueve además propuestas alternativas con posibilidades de elaborarlas e implementarlas sobre la base de las tendencias actuales en Educación Matemática a la vez que establece una plataforma de creatividad e investigación científica con efectos más amplios que los de su quehacer en la sala de clase.

La Educación Matemática tradicionalmente enfocada en la formación del profesor de matemáticas y cuyos contenidos curriculares de formación matemática se dirigían esencialmente desde los centros de formación matemática para científicos matemáticos, desasociados de las Escuelas de Educación, nace hoy como un área de formación y desarrollo científico educativo, que busca elementos de encuentro y asume responsabilidades de liderazgo investigativo compartido entre ambas entidades. Sin embargo, en algunos países de Latinoamérica, la Educación Matemática como área de investigación ha tenido un desarrollo menor. Manteniendo la desasociación entre las unidades académicas pertinentes, se han desentendido de la necesidad de integrar, contenido, currículo y práctica, optando por una formación de contenido científico y didáctico de menor calidad.

Por ejemplo, las características particulares de regiones en Latino América como la Novena Región de la Araucanía en Chile, parecerían no ser favorables a la implementación de este nuevo paradigma educativo. Puesto que los índices de rendimiento escolar de los estudiantes de la Novena Región de la Araucanía están en los últimos lugares de las regiones del país. Asimismo, los índices de pobreza son los más altos de Chile. Se debe considerar, además, que en la región conviven dos etnias donde el reconocimiento hacia una de ellas (minoría) no es un valor prioritario para los individuos que conforman la mayoría. Esto ocurre porque no se piensa en apoyar procesos que conduzcan a adquirir técnicas para un aprendizaje más creativo y autónomo, que nos ayudara a incorporarnos con mayores probabilidades de éxito en el mundo del trabajo o estudios superiores. Ello exige un serio compromiso a repensar nuevas formas menos tradicionales de enfrentar estas necesidades.

Sin embargo, realidades similares en regiones educativas internacionales, sirven hoy de plataforma para elaborar interesantes instancias de investigación en la búsqueda de prácticas efectivas que puedan acercar los logros de aprendizaje matemático de dicha población estudiantil (que representaría la diversidad cultural y lingüística), a los resultados de aprendizaje matemático de los estudiantes en circunstancias más tradicionales. En México, Guatemala, Perú y otros países Latinoamericanos y del Caribe, la diversidad cultural, lingüística y socioeconómica en salas de clases de matemáticas en instituciones educativas públicas está altamente representada. En casi todos los casos también reconocidos dentro de las estructuras políticas de desarrollo educativo desde el gobierno central. La discusión en términos de medidas de reforma que estimulen proyectos de investigación y desarrollo profesional dirigidos a contextualizar las experiencias de enseñanza y aprendizaje tanto de los profesores como de los estudiantes parecen ser una preocupación permanente (Rojas, 2007).

En los Estados Unidos la inmigración desde Latinoamérica y el Caribe en los últimos veinte años ha aumentado en forma exponencial. Se espera que en el año 2020, más de 40% de la población escolar sea de ascendencia hispanoamericana. Las entidades científicas y colegios profesionales junto al gobierno federal, hacen un llamado permanente a la educación superior a centrar sus esfuerzos en facilitar procesos de investigación y cambios en sus proyectos de formación docente, tanto como de perfeccionamiento profesional docente, con el solo fin de abordar seriamente este problema. Como consecuencia, un buen número de investigaciones se centra hoy en temas de aprendizaje y enseñanza basados en el principio de aceptación, integración, reconocimiento y valorización de la diversidad lingüística y cultural del país.

Es importante señalar que los resultados derivados de dichas investigaciones tienen un alcance más allá de las restricciones derivadas de las características de estas comunidades. Las comunidades escolares definidas por variables disímiles, urbanas suburbanas, rurales (independientemente de la distribución racial y/o lenguaje) han considerado las recomendaciones y modelos derivados de dichas investigaciones, (*Sheltered Instruction Organizational Protocol* SIOP), como contribuciones válidas en cualquier sistema que se interese en mejorar las competencias de sus profesores de matemáticas, administradores, y comunidad circundante, y al mismo tiempo mejorar los resultados de sus estudiantes en los exámenes estandarizados al nivel local estatal, y nacional. Es más, dada la realidad de movilidad social y de transnacionalidad que conforman los grupos humanos escolares hoy en día, crece la necesidad de comunicación y colaboración entre las naciones y sus sistemas educativos, no tanto para transferir modelos exitosos, sino para aprender los unos de los otros.

Es claro que el uso del lenguaje en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha tomado un valor significativo y definitorio. Como ya lo mencionábamos, esto se traduce en grandes desafíos por identificar procesos, prácticas y experiencias efectivas en la vida escolar matemática del estudiante de hoy. La formación del profesor de matemáticas a nivel primario tanto como secundario, esta siendo cuestionada y debe reflejar la realidad y pertinencia correspondiente a la región y comunidad que sirve. Entendemos que estos desafíos son más intensos aún cuando se trata de incorporar y servir con equidad y calidad a *toda* la comunidad.

Hoy en día además, las matemáticas y el tema de resolución de problema presentan un desafío mayor, especialmente cuando se trata de atender a nuestras comunidades identificadas como de alto riesgo tanto por su condición socioeconómica como lingüística y cultural. La resolución de problemas y el discurso investigativo científico de hoy están sumergidos en lenguaje: preguntas, descripciones, explicaciones, hipótesis, debates, clarificaciones, elaboraciones, verificaciones y el compartir – y comunicar resultados. La investigación sostiene que el potencial para aprender y mejorar las destrezas lingüísticas a la vez que se aprenden matemáticas y ciencias, es muy significativo (Buxton, 1998; Crawford, 1995; Kang & Pham, 1995; Kessler, Quinn, & Fathman, 1992; Laplante, 1997). Los estudiantes adquieren apreciación de las matemáticas al reconocerlas como un conector de lenguaje y aprenden lenguajes al reconocerlos como la expresión de las matemáticas.

Los estudiantes de diversidad social, lingüística, y cultural tienen gran desventaja y dificultad, con respecto a sus compañeros de cultura y posición social dominantes, al interpretar los significados de conectores lógicos propios del discurso matemático y científico. Los conectores lógicos, por ejemplo, se definen como palabras y frases, tales como, *si, porque, sin embargo, y en consecuencia, etc.*, que señalan relaciones lógicas entre las partes de un texto, elementos definitorios en la comprensión de lectura y comunicación de la información.

En matemáticas y ciencias, conectores lógicos señalan similitudes y contradicciones; causa y efecto; razón y conclusión; secuencias cronológicas o lógicas; elementos definitorios en la comprensión y solución de un problema. Las instancias de asimilación y comunicación de la información matemática se traducen en una seria limitación para los estudiantes si no manejan el discurso lingüístico correspondiente.

El lenguaje de las matemáticas incluye vocabulario de discurso especializado e incorpora vocabulario diario que puede tomar distinto significado en las matemáticas, por ejemplo *igual, racional, irracional, columna, tabla* etc. En otra dimensión, las operaciones matemáticas pueden ser señaladas en varias formas, clasificándolas como “culturalmente dependientes”, estas contradicciones producen serias desconexiones y frustraciones entre los estudiantes al no poder procesar los conceptos sin la continuidad, pertenencia y rapidez de sus compañeros.

Por otro lado, estas preocupaciones han llevado a los investigadores a producir instancias de investigación en salas de clases de matemáticas tanto como en las comunidades que sostienen una diversidad lingüística y cultural, como la que mencionábamos, que ha producido efectos e instancias de investigación de la enseñanza y evaluación del aprendizaje matemático, que aportan resultados y preguntas sorprendentes, en términos de la relación entre el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de lenguajes y culturas, y el desarrollo de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Algunos autores y practicantes señalamos que la advertencia de estas nuevas necesidades y la búsqueda de respuestas nos ha dado información que nos permite, más que nunca, afirmar con responsabilidad que no hay excusa para no aprender matemáticas. Que los problemas no se centran en los estudiantes y su condición social, lingüística ni cultural, que lo definitorio son los ambientes en los que se facilitan o restringen los procesos de comunicación práctica y la reproducción del conocimiento matemático escolar.

Algunos resultados de la investigación incluyen:

* Los efectos de la utilización de lenguaje primario-materno (L1) en la enseñaza de las matemáticas favorecen los aprendizajes de matemáticas. (Transferencia de los conocimientos matemáticos de un lenguaje a otro).
* Dependencia cultural de las prácticas y patrones de aprendizaje de las matemáticas. (Los estudiantes están “marcados” por sus primeras experiencias de aprendizaje).
* La participación de la familia en relación a la escuela y su efecto en el aprendizaje de las matemáticas.

* Los aprendizajes de las matemáticas mejoran si el lenguaje utilizado en casa es incorporado.
* El lenguaje utilizado el la casa del estudiante puede jugar un rol muy importante en el aprendizaje científico-matemático del estudiante, independiente de si el profesor esté o no familiarizado con este lenguaje. (Kang & Pham, 1995; Latham, 1998).
* Relevancia del currículo. Lo que se enseña debe estar enmarcado en experiencias significativas del estudiante.
* Reconocimiento del conocimiento previo. Construir sobre el conocimiento adquirido. Efectividad uso y aplicación de instrumentos tecnológicos.
* La sala de clases de matemáticas ofrece una oportunidad única para el desarrollo del lenguaje científico académico.

Las convenciones del lenguaje social son altamente contextualizadas, lo que les permite a los jóvenes en general, con o sin problemas con el lenguaje de la mayoría, inferir significados e interpretar claves visuales y el lenguaje del cuerpo. El lenguaje académico es más abstracto, y palabras comunes pueden tomar un significado muy especializado. En el discurso académico es generalmente responsabilidad individual del estudiante, el construir su propio significado y se apoya en su propio entendimiento de ambas cosas, su interpretación del lenguaje y los conceptos.

Ambos lenguajes son importantes, pero aunque un estudiante puede tener relativa fluidez en su lenguaje social, debe ser explícitamente expuesto (enseñado) al uso del lenguaje académico. “En la sala de clases de matemáticas” –postula Schoenfeld- “ambos lenguajes deben construirse conjuntamente.” (Schoenfeld, 1992, Moschkovich, J. N. 2000). Hoy en día, dadas las necesidades y la rapidez con que avanza la información y resultados, no podemos arriesgar y separar ambos recursos de información y comunicación del aprendizaje matemático.

Los estudios sugieren que el aprendizaje de un segundo lenguaje tiene las mismas características y procesos como las del aprendizaje del primer lenguaje. Se dice que el cerebro pareciera estar “*hard wired*” o programado para aprender *n* lenguajes, los procesos son los mismos, no importa si es la segunda o tercera lengua. (Petito, 2003; Thomas & Collier, 2002; Collier, 2004). Estas investigaciones están basadas, entre otras, en la aplicación y respuesta a estímulos simbólicos (de símbolos) en el cerebro y al seguimiento por parte de los investigadores de sus reacciones. Estos resultados han despertado gran interés por parte de los educadores matemáticos, especialmente aquellos envueltos en un quehacer académico en salas de clases lingüística y culturalmente diversas, quienes ven aquí una gran oportunidad para descifrar importantes enigmas en términos del comportamiento y respuestas del cerebro en los aprendizajes simbólicos matemáticos. La relación entre los aprendizajes de un segundo lenguaje y la matemática como una vía de comodidad y conciliación de estos aprendizajes, inspira debates significativos entre *los que apoyan y practican* la enseñanza en ambientes bilingües/multiculturales y/o duales. (Fillmore y Snow, 2002).

Coincidimos entones en que las perspectivas teóricas recientes se enfocan en el aprendizaje de las matemáticas como un proceso que intrínsecamente envuelve el uso de lenguaje. Tales nociones emanan de descripciones del proceso de enseñanza matemática como un proceso que debe enfocarse en el “*darle sentido*” a lo que se enseña (Lampert, 1990; Schoenfeld, 1992, 2001), y la necesidad de desarrollar normas *socio-matemáticas* de discurso y comunicación en el salón de clases (Cobb, Wood, & Yackel, 1993). Debe además facilitar prácticas de comunicación de las matemáticas en las que se debe *modelar y argumentar matemáticas* (U.C. ACCORD Mathematics working group, October 2000, p. 10).

También concordamos en que los currículos basados en *Estándares* coinciden en propiciar la discusión y análisis de problemas y situaciones matemáticas, para lo cual el profesor debe desarrollar en el estudiante una capacidad matemáticamente analítica pertinente además de organizacional, y de interpretación y representación del problema, donde deben resolverse y comunicarse los resultados.

Esto requiere, además, el uso y dominio de un lenguaje, para el servicio de la interpretación y comunicación de las matemáticas (Moschkovich, 2000).

En el contexto de la escuela norteamericana, el sistema educacional es diferencialmente efectivo dependiendo de las condiciones sociales de sus estudiantes, su grupo étnico, el lenguaje de origen, el género y las características demográficas (Oakes 1990a, 1990b; Secada 1992). Iniciar a los estudiantes en un currículo basado en temas complejos con el propósito de desarrollar el lenguaje académico al mismo tiempo que los conceptos matemáticos, les envuelve en experiencias relacionadas con su propia realidad y conocimiento previo, su cultura, y su lenguaje, y creará estudiantes seguros y positivos que valoren las matemáticas y se valoren a sí mismos como matemáticos (Garcia, 1997; Chang 2001; Valdés 2001, Herrera, Socorro, G. Marry Kevin, G. 2005; Rojas 2005).

En el contexto anterior, Echevarria, Vogt & Short (2000, 2004) describen un modelo guía de enseñanza -*Sheltered Instruction Organizational Protocol*- (*SIOP),* en el que se propician instancias similares al concepto "*nicho*" de Schoenfeld, -"sheltered" se traduce literalmente como "cobijado." El modelo *SIOP* se define como un protocolo de instrucción y evaluación que se caracteriza por proveer al docente recomendaciones y técnicas que puede utilizar en la implementación y evaluación sistemática de sus actividades de instrucción. Originalmente diseñado como un instrumento de evaluación docente, el instrumento se utiliza luego como guía para optimizar los procesos de instrucción a estudiantes lingüística y culturalmente diversos (*English Language Learners- ELLs)*.

El modelo se concentra en treinta y tres ítems de evaluación, organizados alrededor de tres categorías: *Preparación, Instrucción y Revisión-Evaluación.* Seis indicadores bajo la sección *Preparación,* examinan el proceso de planificación de una lección incluyendo los objetivos de lenguaje o lenguajes y contenido, el uso de material suplementario, y la relevancia y validez de las actividades. La *Instrucción* se subdivide en seis categorías basadas en la construcción del conocimiento nuevo sobre los conocimientos previos *–prior knowledge* -utilizando unidades de lenguaje comprensibles para los alumnos -c*omprehensible imput*- (Krashen, 1988), estrategias, interacción, práctica/aplicación, y transmisión de la lección. Como parte de *Revisión/Evaluación*, cuatro indicadores consideran si el profesor repasó el vocabulario y los conceptos del contenido, si evaluó el aprendizaje de los estudiantes y si les proveyó de respuestas a sus inquietudes- intervenciones.

El diseño de las lecciones se planifica diferencialmente en torno a unidades temáticas, los temas se construyen a partir de las experiencias y cultura histórica de los/las jóvenes. La diversidad lingüística es reconocida, evaluada y considerada en cada objetivo de las unidades y explícitamente demostradas en la lecciones (Echevarria, Vogt, Short, 2004, Echevarria y Graves, 2003). Envolver a los estudiantes en conversaciones relacionadas con lo que se enseña, "*conversaciones instruccionale*s" a la vez conectándolas con su quehacer personal estimula la seguridad, confianza y creatividad. Estos son elementos críticos en el desarrollo de la sensibilidad matematica (Goldenberg y Patthey-Chavez, 1995).

Algunos estudios muestran que los estudiantes cuyos profesores implementaron el SIOP como guía para planificar sus lecciones o unidades y como estrategia para reflexionar y mejorar la efectividad de su enseñanza, mostraron un mejoramiento significativo en los aprendizajes esperados; tanto en el desarrollo del lenguaje académico como en los contenidos correspondientes (Echevarria, et. al, 2002). Diecisiete profesores de salas de clase regulares *ELL,* que siguieron el modelo *SIOP* de instrucción y lo utilizaron como instrumento de evaluación y efectividad de su instrucción sugieren que: "*…el conocimiento previo de la organización de la lección, el manejo de los indicadores de evaluación y el hecho de que el grupo de profesores trabajó en colaboración en el diseño de las estrategias de enseñanza y en el análisis del proceso de evaluación, les permitió reflexionar de antemano, y al mismo tiempo, sobre la enseñanza/aprendizaje y la evaluación personal…" Lo que… "creó conciencia de las necesidades de mis estudiantes, de mis colegas, de los míos, y pudimos acomodar, adaptar y mejorar nuestras prácticas mas efectivamente…". "…se creó un ambiente de amistad y confianza que yo no esperaba…"* (Rojas E, notas).

En el caso de los Estados Unidos, además, el país tiene una población de estudiantes de ascendencia latinoamericana y caribeña que conforma la población minoritaria de mayor crecimiento en los últimos años, y tal como América Latina y el Caribe, con una preocupación cada vez mayor por los problemas de *equidad e igualdad* de oportunidades en la oferta relacionada con formación matemática. A su vez, esta realidad se repite a nivel internacional marcando una necesidad de comunicar experiencias que ofrezcan prácticas efectivas que intenten disminuir estas diferencias.

Tenemos que reconocer que las reformas actuales en educación en ciencias y matemáticas están en peligro de dejar estos problemas no catalogados e identificados de manera específica. Mientras tanto se reconoce explícitamente la preocupación a nivel internacional por una "educación para todos" estos esfuerzos no han tomado seriamente la responsabilidad de indicar qué aspectos de la reforma propuesta realmente tienen significado para los estudiantes viviendo en extrema o mediana pobreza o lingüística y culturalmente diversos.

Todos los anteriores principios de reformas, que reconocemos son en principio bien intencionados, asumen que un currículo de alta calidad y actividades creativas, auténticas en línea con estándares rigurosos, deben resultar en mejoramiento y altos rendimiento. Históricamente, sin embargo, los detalles relacionados con la reforma educativa en este país (USA) han sido basados en su aplicación en el contexto de medioambiente tradicionales, con la supuesta generalización de que pueden ser traspasados a los ambientes no-tradicionales, (urbanos, rurales, bilingües/ESL etc.). Pero en efecto las reformas raramente alcanzan efectivamente a toda la comunidad, en parte, porque estas no se han conceptualizado en relación a las comunidades de estudiantes diversos o a la noción de cultura dinámica, en constante cambio.

¿Cómo se podría re-conceptualizar le reforma educativa en las áreas de las matemáticas basada en los estudiantes de ambientes pobres, de alto riesgo, y minoritarios?

Una ruta que sería posible seguir es preguntar qué se sabe de los temas relacionados con equidad y acceso en estas comunidades especiales, y en especial, en este caso, sobre la comunidad latina. ¿Qué sabemos de su historia, de su cultura escolar, de su cultura matemática, de sus ambientes, de sus estructuras, de sus políticas económicas y sociales? ¿Qué sabemos acerca de reformas educativas en regiones compatibles con las características y realidades de una población diversa de estudiantes y de profesores tanto en las ciencias como en las matemáticas? ¿Cómo podemos colaborar para establecer avenidas de encuentro, de comunicación, de apoyo, entre regiones desasociadas por cuestiones no necesariamente relacionadas a las realidades específicas de jóvenes y sus familias? ¿Cuánto podemos aprender de ambos, y de todos los distintos sistemas?

Los profesores, en colaboración con las familias, cualquiera sea el contexto, pueden fácilmente interpretar y definir el concepto de equidad educativa relacionada con las necesidades dirigidas a satisfacer procesos de enseñanza aprendizaje para estudiantes de sus comunidades, ya sean de diversidad cultural o de niveles socioeconómicos. Fácilmente pueden descifrar el contexto donde estos aprendizajes y experiencias se desarrollan. Trabajar con sus interpretaciones y apreciaciones, identificar indicadores de éxito y fracaso, debe de ser práctica permanente. Es en ellos en quienes debemos centrar nuestros esfuerzos y confianza para una colaboración de mentoría mutua. Y guiarnos a través de procesos que apoyan y refuerzan temas de aprendizajes matemáticos significativos.

El concepto de equidad, desde una visión científica, no debe reducirse a enfocar estándares y objetivos a un grupo exclusivo, si no que por definición debe incluir al todo. En educación, especialmente en ciencias y matemáticas, este todo ha estado orientado por una definición de excelencia basada en estándares dirigidos a acomodar las necesidades de grupos de élite, incluso entre estos mismos subgrupos, denominados por la literatura como *"grupos de alto riesgo"*. Los efectos de tales diferencias en la interacción académica de los estudiantes y en las muchas dificultades que los estudiantes y profesores confrontan en la sala de clases, es un tema reconocido por la mayoría de los educadores matemáticos.

Los profesores, como cualquier ser humano envuelto en comunicación y enseñanza, toman lo que un niño esta tratando de decir a través del filtro de su propio conocimiento, historia y expectativas. Estos filtros incluyen conceptualizaciones, con respecto a qué, por ejemplo, constituye una explicación, o una narrativa aceptable, o qué tipo de conocimiento previo, experiencias, y capacidades apoyan el razonamiento científico. Y, con las mejores intenciones, malinterpretan a los jóvenes estudiantes que dicen y hacen las cosas en formas diferentes a las esperadas. Son niños diferentes a ellos, a menudo pobres y minorías y además muchos de ellos no hablan el idioma establecido.

Más y más estudios documentan estas dificultades (Kozol, 1991; Michaels y R. Sohmer, 2001; Michaels y Bruce, 1989; Rosebery y Warren, 1999; Moses, 2001). Dichos estudios muestran a los profesores e investigadores, no importa cuan dedicados y bien intencionados, azorados, al oír el discurso desorientado y fuera de tópico de niños minoritarios y de extrema pobreza. Niños con un discurso confuso, más concretos que abstractos en su pensar, mágicos y sobrenaturales, en vez de lógicos o racionales, con extrema carencia en el manejo del vocabulario esencial, y poco "científicos" en la forma que enfrentan sus problemas, en como usan el lenguaje, y en como entienden los problemas. En varios de estos casos, los profesores e investigadores han reevaluado y revisado sus primeras interpretaciones una y otra vez para poder encontrar alguna profundidad y coherencia en el pensamiento y uso del lenguaje de los niños y jóvenes. En muy pocos casos se ha intentado validar las experiencias desde el reconocimiento a las historias y experiencias de los jóvenes y sus familias intercambiablemente, desde sus raíces. Tanto los educadores, los alumnos y la comunidad escolar toda está desorientada.

A través del exégesis de los sistemas políticos, sociales y educativos se pueden re-interpretar las estructuras sociales individuales. Estas experiencias pueden asociarse a las nuevas estructuras sociales emergentes y construir modelos educativos que respondan en conjunto a los múltiples contextos culturales.

El grado de multiplicidad y variedad de experiencias a la que sometamos a los jóvenes y en el momento de su desarrollo en que estas prácticas sean aplicadas serán variables definitorias en cuanto al impacto que éstas tendrán en la capacidad de ellos para desenvolverse como adultos responsables en un mundo global, multiétnico-multicultural. Además de preguntas relacionadas con identificar a quién o quienes serán responsables en exponerles a estas experiencias, se agrega el tipo de entrenamiento y conocimiento que estas personas requerirán para hacer efectiva esta transformación. Sabemos que a la educación, en todos sus procesos y estructura, le corresponde un rol fundamental. La innovación y modificación curricular, la didáctica y transformación de estas experiencias debe partir desde las bases, la comunidad y la escuela.

La comunidad la integra una masa crítica, la familia, que desconoce primero el lenguaje de comunicación de la nueva cultura y segundo, los valores de sobrevivencia básica en esta nueva sociedad, y los estudiantes, los jóvenes educandos, quienes asumen un rol de mediadores entre la familia la escuela y la sociedad. Por ello, la diversidad de nuestras comunidades nos ofrece una oportunidad única de desarrollar en nuestros/as jóvenes competencias de interacción, participación y compromiso para reparar y construir un mundo más solidario, más comprometido y más humano. El entender que damos paso a "*comunidades de aprendizaje internacionales*" donde cada individuo y su comunidad aporta con su historia, sus experiencias y sus interpretaciones de ellas. Cada uno cuenta. La asimilación, el "*melting pot*", ese irreverente sueño norteamericano, deja de ser, muere en la historia.

Bibliografia

Brenner, M. E. (1994). A communication framework for mathematics: Exemplary instruction for culturally and linguistically diverse students. In B. McLeod, (Ed.), Language and learning: Educating linguistically diverse students (pp. 233-268). Albany, NY: SUNY Press. (1994).

Buxton, C.A. (1998). Improving the science education of English language learners: Capitalizing on educational reform. Journal of Women and Minorities in Science and Engineering, 4(4), 341-369.

Chang, N.C., Maia, T.V. (2001). Grounded Learning of Grammatical Constructions. In 2001 AAAI Spring Symposium on Learning Grounded Representations. Retrieve from web: June 29/07.

Crawford, J. (1995). Bilingual education: History, politics, theory and practice (3rd Ed.). Los Angeles, CA: Bilingual Educational Services, Inc.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1993). Discourse, mathematical thinking, and classroom practice. In E. Forman, N. Minick, & C. A. Stone, (Eds.), Contexts for learning: Sociocultural dynamics in children's development (pp. 91-119). New York, NY: Oxford University Press.

Cooney, Thomas J. (1994). Teacher Education as an Exercise in Adaption. In Douglas B. Aichele and Arthur F. Cosford (Ed.), Professional Development for Teachers of Mathematics (pp. 9-22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Collier, V. (2004, December). How to Close the Academic Achievement Gap for Linguistically and Culturally Diverse Learners. Paper presented: "Effective Leadership for a Multilingual Community of Learners: No English Language Learner Left Behind". University of Connecticut. Neag School of Education. Storrs, Ct.

Thomas, W.P., & Collier, V.P.(2002). A national study of school effectiveness for language minority students' long-term academic achievement, Final report: Project I.I. Santa Cruz, CA: University of California, Center for Research on Education, Diversity, and Excellence.

Echevarria J., Vogt M. E. & Short Deborah J, (2000). Making Content Compressible for English Language Learners. Allyn & Bacon. Needham Heights, MA.

Echevarria, J., & Graves, A. (2003). Sheltered Content Instruction, Boston, MA: Allyn & Bacon, Publishers.

Echevarria, J., Vogt, M., & Short, D. (2004) Making Content Comprehensible for English Learners: The SIOP Model (Second Edition). Needham Hts., MA: Allyn and Bacon.

Freeman Yvonne S. and E. David (1998). ESL/EFL Teaching: Principles for Success Portsmouth, NH: Heinemann.

Fillmore, L. W., and Snow, C. E. (2002). What teachers need to know about language. Santa Cruz, CA: Center for Applied Linguistics.

Gibbons, P. (2002) Scaffolding Language, Scaffolding Learning. Portsmouth, NH: Heinemann.

Garcia, E. (1999) Understanding and Meeting the Challenge of Student Diversity (Second Edition). Boston, MA: Houghton Mifflin Company.

García, E. (1997). Effective instruction for language minority students: An exploratory study of six high schools. In A. Darder, R. D. Torres, & H. Gutierréz (Eds.), Latinos and education (pp. 362-372). New York: Routledge.

Goldenberg, C., & Patthey-Chavez, G. (1995). Discourse processes in instructional conversations: Interactions between teacher and transition readers. Discourse Processes, 19, 57-73.

Herrera, Socorro, G. Marry Kevin, G. (2005). Mastering ESL and Bilingual Methods. Differentiated Instruction for Culturally and Linguistically Diverse (CLD) Students. Allyn & Bacon. Pearson Education. Inc. Boston, MA.

Kang, H., & Pham, K.T. (1995, March). From 1 to Z: Integrating math and language learning. Paper presented at the 29th annual meeting of the Teachers of English to Speakers of Other Languages, Long Beach, CA. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 381 031).

Kessler, C., Quinn, M.E., & Fathman, A.K. (1992). Science and cooperative learning for LEP students. In C. Kessler (Ed.). Cooperative language learning: A teacher's resource book (pp. 65-83). Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall Regents.

Kozol, J. (1991). Savage inequalities: Children in America's schools. New York: Crown Publishers, Inc.

Krulik, S. (Ed.) (1980). Problem solving in school mathematics. (1980 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics).(p. xiv), Reston, VA: NCTM.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. American Educational Research Journal, 27, 29-64.

Latham, A.S. (1998). The advantages of bilingualism. Educational Leadership,
56(3), 79-80.

Laplante, B. (1997). Teaching science to language minority students in elementary classrooms. New York State Association for Bilingual Education Journal, 12, 62-83.

Michaels, S. & Bruce, B.C. (1989). Discourses on the seasons. Technical Report, Reading Research and Education Center. Champaign, IL: University of Illinois.

Michaels, S. & R. Sohmer. (2001) "Discourses" that Promote New Academic Identities. In Li, D. (Ed), *Discourses in Search of Members*, pp. 171-219. New York: University Press of America.

Moschkovich, J. N. (2000) Learning mathematics in two languages: Moving from obstacles to resources. In W. Secada (Ed.), Changing the faces of mathematics (Vol. 1): Perspectives on multiculturalism and gender equity. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Moses, R. P. (2001). Radical equations: Math literacy and civil rights. Boston MA: Beacon Press.

National Research Council. (1989). Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education. Washington, DC: National Research Council.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). Professional Standards for teaching Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (1995). Assessment Standards for School Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). An agenda for action. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1989) Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2000) Principles and Standards for School Mathematics, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Oakes, J. (1990a). Multiplying inequalities: The effects of race, social class, and tracking on opportunities to learn mathematics and sciences. Santa Monica, CA: Rand Corporation. ED 329 615.

Oakes, J. (1990b). Opportunities, achievement, and choice: Women and minority students in science and mathematics. Review of Research in Education, 16, 153-222.

Petitto, L. A. & Kovelman, I. (2003). The Bilingual Paradox:How signing-speaking bilingual children help us to resolve it and teach us about the brain's mechanisms underlying all language acquisition.. *Learning Languages*, Spring Vol.8, No.3, pp.5-18. *Retrieve from Home Page: June 28/2007.*

Polya, G (1945), How to Solve it. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rojas, Eliana D. & Hartsock Ximena (2006). The relationship between parent Involvement with Homework and Mathematics Achievement of Hispanic Linguistically and Socially Diverse Learners. *Boletín de Investigación Educacional. Coordinación de Investigación y Publicaciones de la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile*. Santiago, Chile.

Rojas, D. Eliana (In Press). Mathematics as an Equalizer for Latino Diverse Gifted Learners. Chapter in *Castellanos, J. and DeWitt, C.* "A Kaleidoscope of Special Populations in Gifted Education: Considerations, Connections, and Meeting the Needs of Our Most Able Students" a three volume. Corwin Press. US.

Rojas, D. Eliana (2005) *Mathematics and Science Learning for Emigrant Children: The Ecology of Classroom Discourse.* International Society of Language Studies. (ISLS). International Conference. Montreal, Canada.

Rojas D. Eliana (2007 February). A Study of Ancient Maya History, Culture and Its Mathematics: A Field Study Experience. Association of Academic Programs in Latin America and the Caribbean (AAPLAC) 8h Annual Conference. Yale University. New Haven, CT.

Rosebery, A. & Warren, B. (1999). Supporting teachers to develop theories of children in the particular. Conference on Teacher Professional Development, National Center for Improving Student Achievement and Learning, Madison, WI.

Schoenfeld, A.H. (1982). Problem-solving Research and Mathematical Education. In Frank K. Lester Jr and Joe Garofalo (Ed.), Mathematical Problem Solving: Issues in Research (pp. 27-37). Philadelphia: The Franklin Institute Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Secada, W.G. (1992). Race, ethnicity, social class, language and achievement in Mathematics. In D.A. Grows (Ed.) Handbook of research of mathematics teaching and learning. New York. Mac Millan.: 623-660.

Secada, W.G. & Berman, P.W. (1999). Equity as a value-added dimension in teaching for understanding in school mathematics. In E. Fennema & T.A. Romberg (Eds.), Classrooms that Promote Student Understanding in Mathematics (pp. 33-42).

Short, Debora & Spanos, George (1989). Teaching Mathematics to limited English Proficient Students. Eric Digests.

U.C. ACCORD Mathematics working group. (2000, October). Pathways to algebra for all of California's children. Oakland, CA: University of California Office of the President.

Valdés, G. (2001). Learning and not learning English: Latino students in American schools. New York: Teachers College Press.

Educação matemática e cultura camponesa na luta pela terra no Brasil

Gelsa Knijnik
Unisinos/Brasil

Introdução

Esta palestra tem por objetivo discutir questões relativas à educação matemática que se processa no Brasil no âmbito dos movimentos sociais camponeses organizados em torno da luta pela terra, em especial do Movimento dos Trabalhadores Sem Terra (MST), cujo Setor de Educação coordena um amplo trabalho educativo em todos os níveis de ensino, abrangendo 23 dos 27 estados brasileiros. Nessas múltiplas dimensões de seu trabalho educativo, a educação matemática tem recebido uma especial atenção, devido à importância da mesma para o desenvolvimento de seu projeto de uma reforma agrária que torne menos desigual a distribuição da riqueza do país. Uma das questões que tem se apresentado como mais relevante neste contexto da educação do campo diz respeito ao anseio legítimo dos movimentos sociais camponeses, de terem acesso aos saberes matemáticos hegemônicos —o que denominamos por matemática. O MST considera que em uma sociedade altamente tecnologizada, cada vez mais esses saberes têm se constituído em uma ferramenta importante no processo produtivo e mesmo nas atividades da vida cotidiana camponesa, possibilitando, também, que seus integrantes tenham acesso a níveis mais altos de escolarização que conduzam à formação de profissionais camponeses nas áreas da Educação, da Saúde, do Direito, etc. No entanto, o MST assume a posição de que a necessidade da apropriação dos conhecimentos que constituem a matemática acadêmica e a escolar precisa estar articulada a uma valorização da cultura dos homens e mulheres do campo, o que inclui o que vem sendo nomeado por “matemática camponesa”.

Nesse contexto, o pensamento etnomatemático tem servido para dar sustentação teórica à educação matemática desenvolvido pelo MST, ao mesmo tempo em que as investigações e práticas pedagógicas desenvolvidas nos diferentes espaços educativos em que o movimento atua têm possibilitado o aprofundamento de questões teóricas desse campo de conhecimento (Knijnik, 2006). As seções seguintes deste texto apresentam alguns dos elementos que têm instituído essa dinâmica vinculada à Etnomatemática.

Solo teórico

O pensamento etnomatemático que venho construindo, com base no trabalho empírico realizado junto aos movimentos sociais camponeses do Brasil, mais recentemente tem tido como solo teórico uma perspectiva pós-moderna, nos seus entrecruzamentos com as teorizações pós-estruturalistas, especialmente àquelas associadas à obra de Michel Foucault.

Em consonância com tais teorizações, tenho considerado que Etnomatemática pode se constituir em uma caixa de ferramentas que possibilita analisar: a) os discursos eurocêntricos que instituem a matemática acadêmica e a matemática escolar; b) os efeitos de verdade produzidos pelos discursos da matemática acadêmica e da matemática escolar; c) a questão da diferença na educação matemática, considerando a centralidade da cultura e as relações de poder que a instituem.

Operar com uma caixa de ferramentas assim configurada está em sintonia com as posições de autores como Santos (1995), que argumentam sobre a necessidade de pôr sob suspeição a educação hoje praticada no mundo ocidental, caracterizada por ele como centralmente eurocêntrica:

O mapa cultural que subjaz aos sistemas educativos da modernidade é, cartograficamente falando, um mapa com uma projeção de Mercator. A característica central desta projeção é que coloca o continente europeu no centro do mapa, inflacionando a sua dimensão em detrimento dos outros continentes. Em termos simbólicos, o mapa educativo da modernidade é um mapa de Mercator. A cultura eurocêntrica ocupa quase todo o tamanho do mapa e só marginalmente, e sempre em função do espaço central, são desenhadas as outras culturas (...). É este o mapa do imperialismo cultural do Ocidente. Neste mapa o conflito entre culturas ou não aparece de todo ou aparece como conflito solucionado pela superioridade da cultura ocidental em relação ás outras culturas (ibidem:26).

Estamos diante de uma questão que diz respeito à política do conhecimento, na qual está em disputa a definição de quais saberes são incluídos e quais excluídos nos processos de escolarização. Tal disputa está marcada por relações de poder-saber, relações que acabam legitimando e sendo legitimadoras de alguns discursos, que silenciam outros tantos, precisamente aqueles que dizem dos saberes, das racionalidades, dos valores, das histórias dos indivíduos, das culturas que colocamos na posição de "os outros".

Caberia perguntar, então, no que tange à matemática acadêmica e à matemática escolar, como certas racionalidades, determinados modos dos indivíduos e culturas lidarem com o espaço e o tempo e com os processos de quantificação –isto tudo que a civilização ocidental associa à noção de matemática– foram se constituindo como verdades, as únicas verdades passíveis de serem aceitas sobre em que consiste a matemática escolar.

Essas questões nos conduzem a pensar sobre as formulações de Wittgenstein (2004), que possibilitam problematizar a existência de uma única matemática –'a oficial'– associada à racionalidade moderna, marcada pelo eurocentrismo, pela abstração e pelo formalismo. Com o apoio das idéias do filósofo –e com o emprego de expressões por ele cunhadas– pode-se admitir a existência de distintas matemáticas. Tal afirmação teria como fundamento o argumento de que a cada uma delas corresponderia uma *forma de vida*, pondo em ação um *jogo de linguagem*, que guarda *semelhanças de família* com outros jogos, com outras *formas de vida*. Operar com as idéias wittgenstenianas no contexto da luta pela terra do sul do Brasil nos leva a assumir a existência de uma matemática camponesa –um jogo de linguagem que, com sua gramática, corresponde à uma forma de vida específica–, uma matemática diferente da matemática escolar eurocêntrica, mesmo que ambas possuam semelhanças de família.

A próxima seção apresenta evidências empíricas das idéias delineadas acima, que conformam o pensamento etnomatemático, assim como o tenho formulado.

Cubação da terra, matemática camponesa e matemática escolar

Na luta pela reforma agrária, a importância que possui o acesso a um lote –para nele viver e produzir– faz com que a prática de medição da terra –*cubação da terra*, na linguagem camponesa– ganhe centralidade na vida dos assentamentos: antes ainda de os órgãos oficiais realizarem a medição dos lotes destinados a cada uma das famílias assentadas, os camponeses precisam demarcar os espaços destinados à agrovila e à produção; ademais, o próprio planejamento do processo produtivo, que imediatamente precisa ser iniciado, exige que cálculos de áreas sejam feitos, mesmo que para isto as famílias assentadas não possam contar com o apoio de assistência técnica governamental. ¿Como a *forma de vida* camponesa envolvida com a luta pela terra praticado a *cubação da terra*? ¿Que sentidos podem ser atribuídos a tal prática?

O trabalho de pesquisa e assessoria que desenvolvo junto ao MST, desde 1991, tem apontado para uma multiplicidade de procedimentos da *cubação da terra*, distintos entre si, mas que mesmo assim são, muitas vezes, praticados em uma mesma comunidade, em especial quando esta é formada por famílias camponesas oriundas de diferentes regiões. Esta matemática camponesa é produzida por uma gramática que em muito se afasta daquela utilizada pela matemática acadêmica e por sua recontextualização na escola: a matemática escolar, mesmo que essas distintas matemáticas guardem entre si *semelhanças de família*. Como todas as narrativas, as que constituem a matemática camponesa são produzidas por uma linguagem carregada de significados que são culturalmente situados, são contingentes. A própria expressão *cubação da terra* e os modos de narrar os procedimentos desta prática camponesa são exemplos disto. Assim, neste texto, ao ser necessário (por limitações de espaço) descrever tais procedimentos através do uso de uma linguagem oriunda da matemática escolar, estou ciente do quanto nessa descrição a singularidade e os matizes que marcam a cultura dos que lutam pela reforma agrária estão sendo apagados. Com isto, se poderia dizer que a cultura camponesa é objeto de um 'seqüestro', pois é expressa por uma outra linguagem, diferente da que a constitui.

As descrições dos procedimentos da prática de *cubação da terra* a seguir apresentadas são, portanto, somente vestígios de tal prática, vestígios que restaram no processo de transmutação produzido pelo formalismo e abstração que a matemática escolar tem tomado emprestado da matemática acadêmica.

Os procedimentos da *cubação da terra* envolvem duas etapas. Inicialmente, há a medição das *divisas* —limites da porção de terra cuja área será determinada. A seguir, são postos em ação os cálculos que resultarão no valor da área procurado. Nas comunidades do sul do país, usualmente, a medição das divisas da terra é realizada com o uso de uma corda —também chamada *soga*. Os camponeses que efetuam a medição percorrem as divisas da superfície de terra, medindo-as por partes. Utilizam como unidades de medida as do sistema métrico decimal (o que nem sempre ocorre, por exemplo, no nordeste brasileiro, onde outras unidades de medida, próprias da cultura camponesa daquela região do país, são também utilizadas). Em geral, quando a superfície é muito acidentada, esta, para fins da medição, é subdividida. Através deste processo de medição, a área que será de fato calculada é a denominada *desenvolvida* ou *efetiva*: ela leva em consideração as ondulações, inclinações e acidentes altimétricos. Assim, as grandezas lineares são medidas no terreno segundo suas próprias inclinações. O valor resultante do cálculo da área efetiva difere, em geral, daquele que é encontrado na determinação da área topográfica, obtida através da projeção da superfície dada sobre um plano horizontal, o que produz uma área plana limitada pelo contorno da superfície. Mesmo que esta seja a área que interessa para fins de escrituração legal das terras, quando da solicitação de financiamento bancário para apoio a atividades relacionadas à produção ou construção de moradias, os camponeses nomeiam por *cubação da terra* o cálculo da área efetiva.

Determinadas as medidas das divisas da terra, os camponeses iniciam o processo de cálculo da área que ficou delimitada. No sul do país, dois são os procedimentos que têm sido observados na prática de *cubação de uma terra de 4 divisas*, o correspondente a um quadrilátero qualquer, isto é, um polígono de 4 lados. O primeiro procedimento associado a esta matemática camponesa consiste em inicialmente adicionar, dois a dois, os lados opostos do quadrilátero, encontrando-se a seguir a média destes pares de segmentos (isto é, dividindo-se por 2 cada uma das somas dos pares de lados). Após, realiza-se a multiplicação entre os dois valores obtidos. Neste procedimento, o quadrilátero inicialmente dado é transformado em um retângulo (através da determinação da média entre os lados opostos) e sua área é a seguir calculada, através da multiplicação da medida de um lado pela do outro (como realizado usualmente no cálculo elementar da área de um retângulo).

Este modo de operar com a *cubação da terra* praticado nos assentamentos do sul do país apresenta peculiaridades que merecem ser destacadas. A primeira diz respeito ao valor que é obtido através deste procedimento. Tal valor é sempre igual (no caso de a terra ter o formato retangular) ou superior ao que se obteria por métodos utilizados na matemática escolar – como, por exemplo, aquele que calcula a área de um quadrilátero através de um processo de triangulação (partição do quadrilátero em 2 triângulos, construídos com uma das diagonais do quadrilátero) e posterior aplicação da Fórmula de Heron (que determina a área de um triângulo a partir da medida de seus lados).

Um segundo aspecto a ser destacado consiste em uma referência histórica. Pesquisadores –como o egiptólogo Eric Peet– afirmam que há evidências históricas que os levam a afirmar que o método de cálculo de área acima descrito era usado já nos períodos ptolomaicos, romanos e cópticos do Egito, para fins de taxação. Mais ainda, Peet argumenta que os proprietários de terras do antigo Egito, diferentemente do que usualmente ocorre com os camponeses do sul do país, estavam cientes de que seus cálculos para determinação de área de um quadrilátero tinham um caráter aproximado, produzindo resultados numéricos superiores aos que efetivamente deveriam corresponder à superfície medida.

É interessante também observar a aplicação deste procedimento de *cubação da terra* quando a superfície tem o formato triangular. Como explicou a professora de uma escola de assentamento, “se a terra é do jeito de um triângulo, eles pegam a base e lá em cima eles tocam um zero”. Ao “tocar um zero” em um dos vértices do triângulo, os camponeses identificam o polígono de três lados com um quadrilátero, considerando que este tem um de seus lados nulo. Feita esta identificação, aplicam o procedimento descrito para a *cubação da terra de 4 divisas*.

Nos dias de hoje, o procedimento de cubação de uma terra com a forma de um quadrilátero –e também sua extensão para terras de formato triangular– vem sendo utilizado não só no sul do país. Encontra-se também presente em assentamentos do nordeste brasileiro e em comunidades rurais de diferentes regiões do Chile, conforme indicam estudos realizados nestes contextos.

Na cultura camponesa do sul do Brasil um outro procedimento na prática da *cubação da terra* é observado. Este, quando aplicado a uma superfície que corresponde a um quadrilátero qualquer, consiste em somar os quatro lados do polígono, dividindo a seguir o resultado por 4. Assim, o quadrilátero é transformado em um quadrado, cujo lado é a quarta parte do perímetro do polígono inicial. É calculada então a área do quadrado (elevando-se ao quadrado o valor da medida do lado), que será indicada como correspondendo à área do quadrilátero inicialmente dado. Este procedimento –chamado, em algumas comunidades, *esquadrejar a terra*– quando aplicado a uma superfície que já possui forma quadrangular, coincide com o modo anterior de cubar a terra. No entanto, em geral, para uma mesma superfície, os resultados obtidos através do esquadrejamento da terra são superiores ao obtidos pelo processo que já era utilizado no antigo Egito.

Além das estratégias acima descritas, há camponeses Sem Terra que têm se servido de um outro tipo de estratégia para dar conta de suas necessidades de definir uma superfície de terra para o plantio. Aqui, diferentemente dos outros dois procedimentos antes apresentados (no qual a porção de terra está dada e o necessário é determinar sua área), há um valor de área previamente definido e a questão consiste em demarcar, no solo, o espaço que corresponderá ao valor estipulado. Por exemplo, com o intuito de delimitar, para cultivo, uma “terra de 100 por 100” –expressão utilizada para significar uma superfície quadrada de lado 100 metros, que equivale à área de um hectare–, há assentados que utilizam como parâmetro para determinar o tamanho de tal superfície o *tempo de trator usado para carpir*, isto é, o tempo necessário para preparar a terra. Segundo um camponês, “a gente põe o trator em cima da terra. Trabalhando com ele 3 horas, dá certinho um hectare”. Nesta situação da vida cotidiana do campo, tempo e espaço estão identificados, mesclados: o tempo de 3 horas é um hectare, e um hectare são 3 horas. É o trator –mais precisamente os custos envolvidos em seu uso –que produz a relação, que estabelece uma estreita vinculação entre tempo e espaço. Para fins do cultivo em seu assentamento, possivelmente a hora de uso de trator seria um dado mais relevante que uma eventual precisão relativa à área a ser plantada: “uns metros a mais, uns a menos, não faz tanta diferença”, explicou o camponês. Na precariedade de recursos que são disponibilizados para dar impulso aos assentamentos da reforma agrária, diferença faz o custo da produção, principalmente aquela na qual é requerido maquinário. Estão implícitos em tal modo de operar com a demarcação de 1 hectare as especificidades do solo e do próprio trator que nele será usado. São elas que entram em jogo na definição do tempo de 3 horas. A experiência do camponês na labuta na terra dá a ele as indicações das modulações –temporais e espaciais– necessárias para os ajustes que deverá fazer em casa situação.

Para concluir

A prática da *cubação da terra* apresentada neste texto apontou para um dos modos de operar da racionalidade camponesa, que produz isto que temos chamado matemática camponesa. Conformam essa matemática outras práticas presentes na vida dos assentamentos, como, por exemplo, a *cubagem da madeira* (que envolve o cálculo do volume de um tronco de árvore). Todas elas têm as marcas da cultura camponesa Sem Terra, uma *forma de vida* instituída pelo empenho em subsistir no campo, pela luta por um projeto coletivo de mudança social, no qual a educação tem um importante papel a desempenhar.

Os movimentos sociais estão reivindicando que suas histórias e seus saberes também sejam merecedores de atenção, de inclusão no currículo escolar. Opor-se à destruição das histórias e dos conhecimentos de um determinado grupo social, opor-se ao epistemicídio –para usar uma expressão de Souza Santos– é nos rebelarmos contra a política do conhecimento dominante, é tentarmos produzir uma outra política do conhecimento, mais inclusiva, menos perversa em relação aos grupos que possuem outras *formas de vida* que não a hegemônica. É através de outras políticas do conhecimento que as identidades desses grupos podem ser reforçadas, produzindo efeitos no âmbito da inclusão social.

O MST tem reforçado tais “rebeliões” em seus modos de se oporem às políticas públicas brasileiras no âmbito da educação, produzindo fissuras no tecido curricular de suas escolas, em um processo que pode ser inspirador para outros contextos educativos.

Referências

Knijnik, G. (2006). Educação Matemática, culturas e conhecimento na luta pela terra. Santa Cruz do Sul: Edunisc.

Wittgenstein, L (2004). Investigações filosóficas. Petrópolis: Vozes.

Santos (1995). B. Novos mapas culturais, novas perspectivas educacionais. Porto Alegre: Sulina.

136

Desarrollo profesional del maestro de matemáticas a partir de la reflexión, colaboración e investigación sobre la práctica

Dario Fiorentini
FE/Unicamp, Brasil - dariof@unicamp.br

Introdução

O objetivo desta conferência é descrever e discutir o papel e o lugar das práticas reflexivas, investigativas e colaborativas no desenvolvimento profissional do professor, destacando suas contribuições para:

* a produção e o desenvolvimento de saberes e da cultura profissional a partir da prática;
* a construção de sua identidade em uma comunidade de prática;
* a construção de sua emancipação política e intelectual (resistência às políticas neo-liberais e de produção da própria existência enquanto intelectual do ensino);
* o desenvolvimento da profissionalidade interativa.

Para desenvolver e discutir as possibilidades e contribuições dessas práticas ao desenvolvimento docente, tomo como objeto de sistematização e análise o caso de um grupo colaborativo que venho coordenando há oito anos na Unicamp (Brasil) e que reúne professores escolares, futuros professores e formadores de professores interessados em refletir, investigar e escrever sobre a prática docente em matemática nas escolas. Antes disso, porém, tecemos algumas considerações sobre a problemática da profissão docente que motivou a constituição desse grupo.

Breve problematização da profissão docente e de seus saberes no contexto atual

Hargreaves (2001), ao falar da condição docente no contexto da pós-modernidade, situa o professor num triângulo de forças competitivas que fazem da docência uma *profissão paradoxal*.

Hoje, mais do que nunca, o professor e a educação passaram a ser vistos como peças chaves da formação do sujeito global que a sociedade da informação e da comunicação (SIC) requer. Decorrência disso, começaram a surgir em todo mundo reformas curriculares, configurando uma nova ortodoxia de reforma educacional, padronizando os saberes, habilidades e competências a serem adquiridos pelos jovens (Hargreaves, 2001).

Essas reformas estão a exigir que o professor seja *catalisador* dessa nova sociedade. Para isso, teria de aprender a ensinar de um jeito diferente do modo como aprendeu; desenvolver e aplicar estratégias de sala de aula cognitivamente profundas, emocionalmente envolvidas e socialmente ricas. Um docente que promove seu próprio aprendizado contínuo e construa organizações de aprendizagem; um agente de mudança qualificado, facilitando a aprendizagem cooperativa e metacognitiva; alguém versátil no uso das novas tecnologias e usuário de diversas técnicas de avaliação.

Os educadores, de outra parte, que vêem a docência como um campo de desenvolvimento intelectual e humano e de formação de valores, procuram assumir a função de contrapontos da SIC,

Mancera, E. y Pérez, C. Historia y Prospectiva de la Educación Matemática. Memorias de la XII CIAEM, pp. 137-147. © 2007 Edebé Ediciones Internacionales S.A. de C.V. Impreso en México.

sendo arautos dos princípios democráticos e do compromisso social, questionando e denunciando a perspectiva pragmática da SIC e suas ameaças à justiça e à igualdade social.

Mas, ao mesmo tempo que os professores são concebidos e valorizados, seja como os principais *catalisadores* da SIC seja como *contrapontos* dessa mesma sociedade, são, eles próprios, *vítimas* do sistema neoliberal (SNL), pois seus governantes, atendendo a uma política de "enxugamento" das despesas, têm cortado gastos com a educação pública, aumentando o número de alunos em classe, reduzindo ainda mais os salários e as condições de produção do trabalho docente. Isso os obriga, muitas vezes, a trabalhar em várias escolas e em três turnos, "caindo na armadilha de fazer mais para ganhar menos", gerando estresse e mal estar docente.

Neste contexto, os professores, segundo Hargreaves (2001), encontram-se presos a um triângulo de interesses competitivos e imperativos, os quais definem a luta sobre o que significa a profissão docente e sua própria viabilidade na sociedade pós-industrial.

A análise desenvolvida por Hargreaves (2001) nos motivou a realizar uma investigação com professores brasileiros de matemática que atuam em escolas públicas e privadas (Fiorentini et al., 2003). Os resultados deste estudo confirmam, principalmente, a condição de vítimas dos professores e sua luta em assumir o papel de contrapontos da sociedade atual. Um indício disso é o fato dos docentes da rede pública lecionarem, em média, 29 aulas semanais e possuírem de cinco a seis classes com aproximadamente 40 alunos, além de terem de trabalhar em várias escolas em estado de sucateamento. "...O principal problema do professor hoje é a quantidade de escolas que tem de trabalhar para que possa ter um salário regular, isso faz com que o profissional não prepare suas aulas nem tenha tempo para se atualizar" (Docente P8).

Dentre as dificuldades e insatisfações apontadas pelos docentes, destacam-se: a falta de trabalho em equipe na própria escola, indisciplina e falta de interesse dos alunos e problemas relacionados às condições estruturais ou à gestão escolar. Ensinar matemática, neste contexto, "requer competências e habilidades que vão além do que a formação ofereceu" (Docente P19).

Portanto, o desafio do professor escolar, hoje, é "conquistar o aluno que não quer aprender, que não quer vir para a escola e nem aprender Matemática (...) Tento de 'tudo', desde jogos, material concreto, resolução de problemas, trabalho de investigação de campo, até teatro ultimamente tenho feito" (Docente P11).

Em síntese, o estudo desenvolvido na região mais rica do Brasil mostra que os professores de matemática vivem uma situação de degradação do trabalho docente. E isso está provocando uma crise de identidade profissional a qual é evidenciada pelo desmoronamento, segundo Dubar (2002, apud Lüdke e Boing, 2004, p. 1167-8), "de uma maneira de praticar seu ofício e de definir e estruturar sua vida a partir dele, de seus valores e maneiras de ser e fazer".

O que os professores sabem fazer já não serve mais – necessitam mudar sem que seus saberes e práticas sejam tomados como ponto de partida para a mudança. Aos docentes não se lhes autoriza fazer reformas a partir da escola... Os novos saberes vêm de cima: dos especialistas, dos acadêmicos, dos burocratas... O professor, nesse contexto, é levado a viver em um universo de obrigações implícitas, de investimento pessoal, cercado de incertezas e dependente da criatividade individual e coletiva.

Essa crise do trabalho docente vem afetando também os centros de formação inicial de professores. Os conhecimentos e processos privilegiados na formação inicial já não dão mais conta de formar o professor para a realidade atual. Os professores recém-licenciados questionam, como mostra Rocha (2005), a formação profissional que adquiriram na formação inicial, por mais sólida que tenha sido em termos de conteúdos matemáticos e didático-pedagógicos, não sentem-se capazes de enfrentar os desafios e a realidade complexa da escola pública atual:

A academia é muito distante da realidade da sala de aula. Acredito que nenhum curso de graduação consiga ensinar alguém a ser professor, apenas o mune de ferramentas de ensino, mas como usar tais ferramentas é com o dia-a-dia. (...) A matemática que dá para ensinar para esse povo, e como ensina... é... eu estou tentando descobrir ainda. (...) Aqui eles jogam tudo, eles jogam cadeira, eles jogam carteiras, eles se jogam uns em cima dos outros... As saídas para isso?... Até o final do ano eu vou ter que descobrir (Professora Luiza).

Todos concordam que a teoria é importante, mas e a prática? Será que tudo funciona como estudamos na Universidade? Não, as coisas não funcionam assim e, eu tive muitas dificuldades até entender isso. A faculdade não nos prepara para enfrentar vários problemas que acabamos tendo de enfrentar depois que começamos a lecionar... (Professor Antonio).

Essa realidade não difere muito do que acontece em outros países. O investigador canadense Tardif (2002) nos diz que ainda é muito grande a distância entre os conhecimentos universitários e os saberes necessários à prática profissional. A prática profissional não é um campo de aplicação dos conhecimentos acadêmicos; na melhor hipótese, os professores os mobilizam e os transformam. Ou seja, a prática profissional "é um muro contra o qual vêm se jogar e morrer conhecimentos universitários inúteis, sem relação com a realidade do trabalho docente diário e nem com os contextos concretos do exercício da função docente…" (p. 257).

A busca de alternativas para enfrentar o problema

Como promover mudanças curriculares, tendo como referência outro modo de educar os jovens? Como promover uma prática social (escolar) que autorize (permita) aos docentes e alunos serem sujeitos ou protagonistas da renovação do currículo e da cultura escolar? Como formar docentes competentes para planejar e atuar neste tipo de prática? Vamos ouvir, primeiro, os professores da escola para saber que soluções vislumbram.

Os resultados da investigação de Fiorentini et al. (2003) mostram que os professores brasileiros reivindicam mudanças amplas e profundas da escola que vão desde mudanças da estrutura e da cultura escolar até à gestão da vida escolar a qual deveria prioritariamente comprometer-se com a função precípua de promover a educação de jovens e crianças. Reivindicam também uma cultura de trabalho colaborativo "em torno de um projeto coletivo elaborado e conduzido por todos os responsáveis da escola, incluindo a sociedade, de modo que os problemas didático-pedagógicos de sala de aula e da gestão escolar sejam discutidos por todos e as soluções buscadas conjuntamente" (p.17).

Além disso, consideram importante o intercâmbio entre professores da rede e entre estes e os professores universitários.

> *Tem momentos, no dia–a–dia da sala de aula, que estou sozinha lutando para que meus alunos gostem e aprendam matemática. Muitos artigos ou livros discutem assuntos que parecem ser baseados em alunos perfeitos, ideais e ficam distantes da realidade do adolescente da minha escola. Sugiro a formação de grupos de estudo com professores do Ensino Básico e que o governo os apóie e custeie. (Docente P22).*
> *... Melhorar a vida da escola tendo verdadeiramente grupos trabalhando em conjunto para um mesmo objetivo. Professores com número de aulas menores, para que tenham espaço dentro da escola para se reunir (de verdade) para discutir os problemas e suas possíveis soluções. Melhorar o trabalho docente de Matemática (Docente P5).*

Como indicam esses últimos depoimentos, os professores sentem-se isolados em seu trabalho e colocam esperança de solução para os problemas na união dos professores. Não reivindicam cursos de atualização presenciais ou à distância, em larga escala, como preferem as políticas neo-liberais. Preferem, ao contrário, serem protagonistas dos processos de mudança e da produção dos saberes necessários para implementá-la. Para isso, buscam parceiros interessados.

Esse problema perturbou, por longo tempo, meu grupo de investigação e demoramos para perceber que nem os professores da escola nem os formadores da universidade possuíam condições para, independentemente uns dos outros, dar conta do desafio de mudar as práticas escolares e formar professores competentes para enfrentar a realidade complexa da escola atual. Embora cientes de que o problema não se reduz à dimensão pedagógica –pois é também conseqüência da gestão escolar e das políticas públicas–, como formadores de professores não podíamos ignorar a complexidade do campo de trabalho do professor.

Isso nos motivou a organizar um grupo de estudo colaborativo envolvendo professores escolares e acadêmicos. Um grupo interessado em refletir, investigar e escrever sobre a própria prática pedagógica e docente nas escolas. Esperávamos, assim, que os professores da escola e da universidade e futuros professores poderiam, juntos, aprender a enfrentar o desafio de mudar as práticas escolares e de contribuir para o desenvolvimento de seus participantes.

A constituição de uma comunidade colaborativa de reflexão e investigação sobre a prática

Motivados pela realidade complexa da prática docentes nas escolas atuais, formamos na Unicamp um grupo chamado "Grupo de Sábado" (GdS) congregando, de um lado, professores de matemática da escola básica interessados em ler, refletir, investigar e escrever sobre a prática docente de Matemática nas escolas e, de outro, alguns formadores da Universidade (docentes, mestrandos e doutorandos) interessados em investigar o processo de formação continuada e de desenvolvimento profissional de professores em um contexto de trabalho colaborativo de reflexão e investigação sobre a prática.

Embora oriundos de comunidades diferentes e com interesses diversos, esses profissionais tinham como foco comum de estudo/trabalho do grupo a *prática pedagógica e docente em matemática* na escola básica. Distinguimos a *prática pedagógica* da *prática docente*, no sentido de que a primeira está diretamente relacionada às práticas didático-pedagógicas em torno do ensino e da aprendizagem da matemática em sala de aula e a segunda –a prática docente– ao trabalho do professor e às suas condições sociais, políticas, culturais, econômicas e profissionais.

Entretanto, o que unia os representantes dessas duas *comunidades de prática* (Wenger, 1991), não eram propriamente suas semelhanças, mas as diferenças, as quais não podem ser concebidas como carências ou deficiências, mas como *excedente de visão* (Bakhtin, 2000) de um grupo em relação ao outro, tendo em vista o lugar ou a comunidade de referência de onde cada um fala ou se posiciona discursivamente no grupo.

Bakhtin (2003, p. 21) diz que quando eu contemplo alguém "situado fora e diante de mim, nossos horizontes concretos efetivamente vivenciáveis não coincidem", pois, por mais próximo que eu possa estar em relação a ele, "sempre verei e saberei algo que ele, da sua posição... não pode ver". E o mesmo acontece com o outro em relação a mim, qualquer que seja o lugar de onde ele venha e se posicione. Nesse sentido, o encontro dialógico com um outro, oriundo de outro lugar e com experiências diferentes das minhas, representa uma instância potencial de transformação e desenvolvimento tanto para mim quanto para ele.

No caso do GdS, os professores escolares, desde a formação do grupo, têm negociado significados e perspectivas com os formadores/acadêmicos da Universidade sobre questões da prática pedagógica em matemática e da prática docente nas escolas públicas e privadas atuais. Embora os porta-vozes da academia tragam ao grupo questões que ajudam a produzir "estranhamentos" e problematizações à prática dos professores da escola básica, os professores, ao tomar como referência seu lugar nas escolas, manifestam um *excedente de visão* sobre os acadêmicos, por possuírem um saber de experiência relativo ao ensino da matemática nas escolas públicas e privadas. E, além disso, conhecem as condições de produção do trabalho docente nessas escolas, vislumbrando o que é possível ou não ser realizado na prática escolar e denunciando os limites e as idealizações freqüentes dos acadêmicos que geralmente não conhecem *por dentro* a complexidade de ensinar matemática na escola atual.

De outra parte, o *excedente de visão* dos acadêmicos em relação aos professores escolares é decorrente das análises, interpretações e compreensões que esses estabelecem sobre as práticas, experiências e saberes dos professores escolares. Análises essas feitas a partir de aportes teórico-científicos oriundos das ciências educativas e, em particular, dos estudos acadêmicos em educação matemática. Penso, porém, que o maior excedente de visão dos acadêmicos seja o domínio dos processos metodológicos de investigação. Nesse sentido, a presença dos acadêmicos no grupo torna-se importante, sobretudo na fase inicial de constituição do grupo, pois estes podem colaborar na orientação e apoio às investigações dos professores que têm como foco de estudo problemas e desafios da prática nas escolas. Assim, embora oriundos de comunidades diferentes, acadêmicos e professores escolares, passaram a constituir, juntos, uma outra *comunidade de prática*.

A expressão *comunidade de prática* foi cunhada por Lave e Wenger (1991) para designar uma prática social de um grupo de pessoas que comungam "um sistema de atividades no qual compartilham compreensões sobre aquilo que fazem e o que isso significa em suas vidas e comunidades" (p. 99). A partir deste conceito, Wenger (2001) desenvolveu uma teoria social da aprendizagem que tem como principal pressuposto o fato de que a aprendizagem é um fenômeno social que acontece mediante *participação* ativa em *práticas de comunidades* sociais e *construção de identidades* com essas comunidades. Ou seja, a aprendizagem é entendida como um fenômeno social que decorre da participação (que envolve *ação* e *afiliação a um grupo de trabalho*) direta em qualquer prática social, independentemente se essa prática é intencionalmente pedagógica, isto é, se for ou não organizada com o propósito de ensinar algo a alguém.

A prática que acontecia inicialmente no GdS, sobretudo no 1º semestre de funcionamento do grupo, pode ser caracterizada como uma *prática fronteiriça* (Weger, 2001, p. 147), pois ela se constituiu na interface ou na confluência de duas outras comunidades de prática que "usualmente vivem de costas voltadas um para o outro" (Ponte, 2006, p. 5): a universitária, de um lado, representada pelos formadores e acadêmicos, e a escolar, de outro, representada pelos professores de matemática da escola básica. Embora os acadêmicos não tivessem, desde os primeiros encontros, a intenção de ensinar algo específico aos professores ou de colonizá-los com seus ensinamentos, crenças e verdades, os professores escolares solicitavam, com freqüência, que estes compartilhassem e desenvolvessem algumas oficinas sobre temas como ensino-aprendizagem da álgebra elementar numa perspectiva de desenvolvimento do pensamento e da linguagem ou sobre a metodologia da investigação-ação...

A partir de 2004, o GdS passou a incluir também futuros professores, sobretudo aqueles em fase de práticas letivas, vislumbrando, de um lado, o desenvolvimento de projetos colaborativos com professores escolares e, de outro, a iniciação à socialização docente e construção da identidade profissional. Estes logo se destacaram no grupo pelo entusiasmo, vigor e criatividade em relação às possibilidades de mudança das práticas escolares, apresentando, como *excedente de visão* sobre os demais, suas habilidades relativas ao uso da informática no ensino da matemática.

As experiências desenvolvidas e investigadas, nos últimos anos no grupo, mostraram que algumas práticas educativas em matemática apresentam um ambiente mais efetivo de problematização do *ideário e dos saberes* didático-pedagógicos e conceituais dos professores e futuros professores, contribuindo, dessa forma, tanto para seu desenvolvimento pessoal e profissional quanto para a renovação e desenvolvimento do currículo escolar. Tais práticas foram por nós denominadas de *exploratório-investigativas*, pois se caracterizavam como problemas abertos que possibilitavam aos alunos e professores produzirem múltiplos significados, levantarem conjecturas ou hipóteses e explorarem relações de acordo com as possibilidades cognitivas de cada um. É mediante este processo que o professor e o próprio aluno passam a perceber uma outra matemática ou outras formas de produzir e aprender matemática na escola, sobretudo em classes heterogêneas.

As experiências desenvolvidas no Grupo mostram que, para problematizar e transformar o ideário e os sabres docentes do professor, não basta promover apenas discussões e reflexões sobre aspectos gerais do processo educacional. É preciso mergulhar fundo nas práticas cotidianas para perceber nelas (ou extrair delas) o diferente, a possibilidade de ruptura com o estabelecido, com as verdades cristalizadas pela tradição pedagógica ou com o que uma comunidade pensa que é matemática. Essas práticas exploratório-investigativas fornecem evidências concretas, tanto para os alunos fracassados escolarmente –pois percebem que também são capazes de aprender e fazer matemática–, quanto para os próprios professores, à medida que reconhecem que é possível produzir ou desenvolver uma outra prática curricular de ensino de matemática na qual os alunos são os principais protagonistas de sua aprendizagem.

A metodologia de reflexão, investigação e investigação-colaborativa sobre a prática

Como já dissemos anteriormente, o desenvolvimento de práticas exploratório-investigativas na prática escolar permite dar voz e visibilidade à variedade de idéias, raciocínios e saberes dos alunos quando realizam a atividade matemática em sala de aula. A análise e reflexão dos professores sobre o pensamento matemático dos alunos em mobilização durante as atividades de sala de aula representa um rico contexto de problematização e (re)significação da prática e do ideário dos professores. E é mediante esse processo compartilhado de reflexão e investigação sobre a prática que os professores promovem a renovação curricular do ensino da matemática escolar e o próprio processo de desenvolvimento profissional.

Jiménez (2002), em sua investigação de doutorado desenvolvida no Grupo, evidenciou que a reflexão coletiva e a investigação sobre a prática ganhava relevância e poder de mobilização e (re)significação dos sabres curriculares e docentes, quando os professores traziam registros e narrativas de episódios de aulas nas quais se faziam presentes as significações, argumentações e produções dos alunos da escola.

A partir desses resultados iniciais e tendo por base os estudos sobre investigação-ação colaborativa de Carr e Kemmis (1988) ou co-generativa de Greenwood e Levin (2000)[1], o grupo então sistematizou e sintetizou da seguinte forma sua metodologia de trabalho colaborativo mediado pela reflexão e investigação sobre a prática:

* O ponto de partida são problemas/desafios que os professores trazem para discussão/estudo do grupo.
* Estes problemas/desafios são compartilhados e todos buscam um entendimento sobre os mesmos (mediadas por leitura de literatura pertinente e da análise diferencial de todo grupo). Ou seja, a teoria não é o princípio ou a finalidade do trabalho coletivo, mas uma mediação necessária à problematização das práticas e à percepção de novas relações.
* Os docentes interessados, a partir dessas análises e compreensões iniciais, planejam alternativas e atividades de intervenção na prática escolar.
* Esses professores as desenvolvem em sala de aula, registrando, de maneira sistemática, os acontecimentos e as produções dos alunos.
* Esses registros/produções de sala de aula são analisados e interpretados por todo grupo.
* Os professores, com base nos registros e nas interpretações do grupo, produzem pequenas investigações sobre suas práticas, sendo a seguir relatas por meio de narrativas reflexivas escritas.
* Estas narrativas são lidas e discutidas pelo grupo e, depois de validadas, encaminhadas para publicação (Fiorentini; Jiménez, 2003, p. 8).

---

[1] Greenwood e Levin (2000) desenvolveram um processo investigativo que chamaram de *investigação co-generativa*, a qual consiste numa forma particular de investigação-ação em que investigadores acadêmicos colaboram com profissionais –chamados de *investigadores locais*– visando encontrar e sistematizar soluções para os problemas que encontram nas diferentes práticas profissionais.

Para entender melhor essa metodologia de trabalho do grupo, vamos, a seguir, esclarecer alguns conceitos que estão subjacentes, tais como reflexão e investigação sobre a própria prática, narrativas, investigação-ação colaborativa.

Embora exista muita polêmica e discordância sobre a natureza das investigações sobre a própria prática –se ela é, de fato, uma investigação ou não passa de uma reflexão sobre a prática– todos parecem concordar que o professor, ao refletir e sistematizar sua prática pedagógica, produz e renova saberes. Esse fato nos remete à seguinte pergunta: o modo de produção de conhecimentos (ou de investigar) do professor pode ser diferente do modo como os cientistas ou acadêmicos procedem? Haveria um caminho diferente ou o que muda é o modo de caminhar em busca do conhecimento? (Fiorentini e Lorenzato, 2006, p. 72).

Foi pensando numa problemática como essa que Lytle e Cochram-Smith (1999) desenvolveram um estudo sobre os vários modos e casos de investigação de professores escolares, nos Estados Unidos. Embora as autoras tenham encontrado muitas diferenças em relação ao modo acadêmico de produzir pesquisas, encontraram também alguns pontos comuns. Com base nessas diferenças e semelhanças, as autoras chegaram à seguinte definição do que seria a investigação dos professores:

> *um estudo sistemático e intencionado dos professores sobre seu próprio trabalho na sala de aula e na escola. (...) Com sistemático nos referimos fundamentalmente a formas ordenadas de reunir e registrar informações, documentar as experiências que acontecem dentro ou fora da aula e criar uma espécie de registro escrito. (...) Com intencionado indicamos que a investigação dos professores é uma atividade planejada, isto é, não espontânea (p.321).*

Embora investigação e ensino sejam práticas indissociáveis, seus objetivos podem ser diferentes. Mesmo professores experientes confundem estes objetivos, sobretudo quando o objeto de estudo do professor é sua própria prática pedagógica. Com efeito, o professor, *enquanto educador*, tem a função de desenvolver uma prática pedagógica significativa (exploratória, problematizadora, crítica...) que seja a mais eficaz possível do ponto de vista da educação/formação dos alunos. Porém, *enquanto investigador*, seu objetivo é sistematizar, analisar e compreender como acontece esse processo educativo dos alunos ou quais os limites e as potencialidades didático-pedagógicas dessa prática inovadora. Ou seja, a investigação visa extrair conhecimentos, lições, aprendizagens das expertiências docentes. Neste sentido, uma experiência educativa pode resultar em um fracasso pedagógico, mas, do ponto de vista investigativo, esta pode significar uma rica fonte de aprendizagem ou de produção de saberes sobre a prática docente.

O **processo de investigação**, de um lado, exige centralidade num foco de estudo e um recorte da prática pedagógica ou a delimitação de um problema de modo que este possa ser sistematicamente estudado. A **prática de ensino**, de outro, exige um movimento contrário, buscando abarcar a totalidade do fenômeno educativo. O professor, ao ensinar, procura contemplar as múltiplas dimensões e perspectivas da práxis pedagógica e, durante o ato educativo, não pode parar o processo de ensino para investigar uma questão específica. Embora ambas as práticas sejam reflexivas, isso não implica concluir que todo professor reflexivo é, por conseqüência, um investigador. A reflexão é uma condição necessária, mas não suficiente para o professor vir a ser investigador. É a própria natureza complexa e multifacetada da prática que exige do professor essa atitude e prática reflexiva. E é essa prática ou atitude que o faz perceber problemas em seu trabalho e levantar questões que podem levá-lo a um processo mais sistemático de investigação.

A investigação, além disso, exige leitura, registro de informações, uma descrição do fenômeno educativo; exige um certo distanciamento da ação e um tratamento interpretativo e analítico do fenômeno. Ser professor investigador, portanto, configura-se como uma opção profissional. Opção essa que exige do investigador envolvimento, tempo para dedicar-se a esse tipo de empreendimento, paixão, investimento intelectual e emocional e, sobretudo, muita disciplina e cuidado na coleta e tratamento de informações.

Em síntese, dizemos que o professor reflexivo poderá vir a ser também investigador de sua prática se ele tentar sistematizar suas experiências e socializar/compartilhar seus saberes com outros professores. Essa sistematização exige que o professor, a partir de uma determinada perspectiva (recorte, foco ou questão), faça registros escritos, organize suas idéias e revise suas práticas e as analise, buscando/produzindo, assim, uma melhor compreensão de seu trabalho docente.

Nos relatórios das investigações sobre a prática produzidos pelos professores do GdS –a maioria publicados nos três livros editados pelo Grupo– tem predominado o modo narrativo-reflexivo de dizer por escrito. Essa opção apóia-se teoricamente em Connely e Clandinin (2000), pois, para estes autores, as narrativas, representam um modo bastante fecundo e apropriado de os professores produzirem e comunicarem significados e saberes ligados à experiência. As narrativas diferem dos relatos de experiência, pois fazem menção a um determinado tempo (trama) e lugar (cenário), onde o professor é autor, narrador e protagonista principal. São histórias humanas que atribuem sentido, importância e propósito às práticas e resultam da interpretação de quem está falando ou escrevendo. Essas interpretações e significações estão estreitamente ligadas as suas experiências passadas, atuais e futuras.

Segundo Clandinin (1993), o professor, ao relatar suas experiências aos outros, aprende e ensina ao fazer isso. Aprende, porque, ao narrar, organiza suas idéias, sistematiza suas experiências e produz novos aprendizados. Ensina, porque o outro, frente às narrativas de experiências do colega, pode (re)significar seus próprios saberes e experiências:

> *Quando nós ouvimos as histórias dos outros e contamos a nossa própria, nós aprendemos a dar sentido às nossas práticas pedagógicas como expressões do nosso conhecimento prático pessoal, que é o conhecimento experiencial que estava incorporado em nós como pessoas e foi representado em nossas práticas pedagógicas e em nossas vidas (Clandinin, 1993, p. 1).*

O nosso papel de formador-investigador universitário no grupo não tem sido o de um colonizador dos profissionais a partir dos saberes teórico-científicos. Ao contrário, temos tentado nos situar como um interlocutor que colabora com os docentes da escola na busca de compreensão dos problemas da prática e de alternativas de solução. Por ser um estrangeiro das práticas escolares, temos nos limitado a problematizar e produzir estranhamentos em relação aos seus saberes experienciais, contribuindo, assim, para que os próprios profissionais os re-signifiquem ou re-elaborem. O conhecimento que é gerado nestes encontros de reflexão e investigação, portanto, não pode ser caracterizado como um saber acadêmico nem como um saber estritamente prático, embora tenha como ponto de partida a prática dos professores.

Sistematizando o desenvolvimento da profissionalidade docente

Em seus oito anos de existência, o GdS, enquanto comunidade de prática, firmou uma *aliança colaborativa* entre diferentes agentes profissionais (formadores, investigadores, professores escolares, futuros professores) e, juntos, aprenderam que refletir, analisar e problematizar a prática docente e pedagógica na escola é um poderoso ponto de partida ao desenvolvimento do professor e à transformação de sua prática.

Embora essa reflexão e problematização seja uma condição necessária para a mudança da prática, ela não é suficiente para promover o desenvolvimento da profissionalidade docente. Aprendemos no/pelo grupo que os professores precisam também investigar e escrever sobre a própria prática nas escolas, pontuando e problematizando suas possibilidades e constrangimentos em diferentes contextos. E isso pode ser potencializado mediante a colaboração de formadores e acadêmicos universitários interessados e comprometidos com a emancipação dos professores. Aprendemos, sobretudo, que a reflexão, a investigação e a escrita formam uma tríade processual e interdependente em que uma dinamiza e potencializa a outra.

O GdS produziu estudos de natureza variada. Alguns de interesse direto dos professores como é o caso dos três livros publicados com narrativas reflexivas sobre práticas e investigações em aulas de matemática. Outros de interesse dos formadores e acadêmicos —duas teses de doutorado, uma dissertação de mestrado e vários estudos de sistematização e teorização das práticas e produções do grupo.

Essa prática de produção cultural do grupo –resultante do processo de reflexão, investigação e escrita– nos mostra que os professores que participam do grupo conseguem se desenvolver enquanto profissionais do ensino, porque:

* estão conquistando autonomia no tratamento e enfrentamento de seus desafios e problemas escolares de sala de aula;
* estão contribuindo para a construção de uma cultura profissional com base em problemas da prática cotidiana, pois produzem saberes relativos à atividade profissional, a partir da perspectiva dos profissionais que atuam nestes contextos;
* estão contribuindo para a formação de novos professores, pois suas produções estão sendo objeto de estudo e análise dos futuros professores nos cursos de licenciatura;
* mantêm interlocução, em pé de igualdade, com os formadores de professores que atuam nas universidades e nas secretarias municipais e estaduais de educação;
* constroem, desse modo, sua identidade profissional e seus saberes tornam-se visíveis, adquirindo o reconhecimento público. (Fiorentini, 2006, p. 33-34).

No grupo e pelo grupo, o professor não apenas se apropria de novos saberes profissionais. Produz e compartilha, também, seus saberes e desenvolve um **saber práxico** próprio e diferente do formador que não mais vive a docência nas escolas, mas que é enriquecido por ele, pois o saber práxico é co-gerado dialogicamente a partir do estudo e da interação que acontece entre profissionais com diferentes saberes e olhares, sobretudo quando analisam e investigam conjuntamente os problemas da prática profissional. Podemos chamar ese processo de prática reflexiva e investigação de *investigação-ação colaborativa* (figura 1).

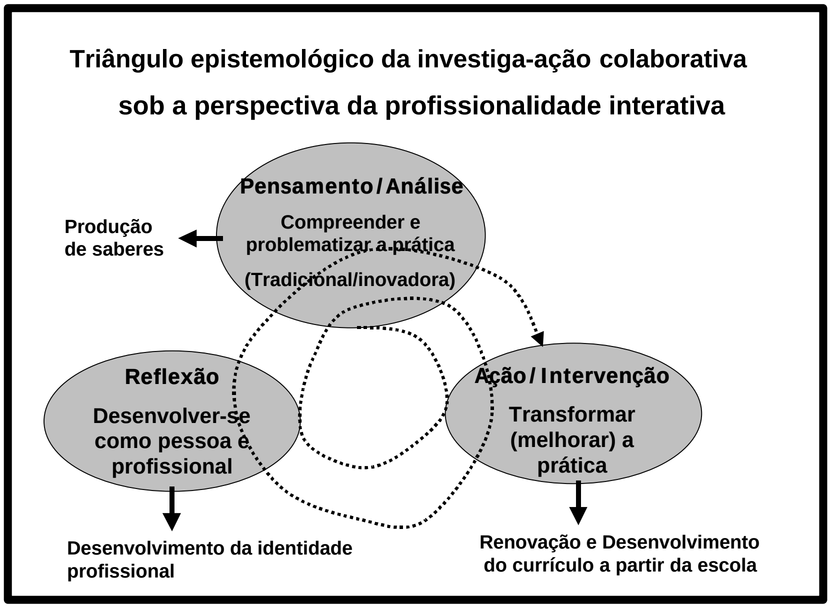


Figura 1: Espiral cíclica de pensamento, ação, reflexão e análise sobre a prática.

O grupo pode ser o espaço de formação e de constituição profissional do professor e de construção de sua identidade, pois é com o outro que ele se torna continuamente professor e resiste às condições adversas de trabalho e "re-existe" principalmente através da reflexão, da investigação e da escrita. O professor, nesse processo, adquire autonomia, tornando-se sujeito de sua profissão; alguém habilitado a participar do debate público e a desenvolver projetos e grupos de estudo dentro e fora da escola, produzindo inovações curriculares a partir da prática escolar.

Em síntese, professores, formadores e futuros professores, através da investigação-ação colaborativa podem constituírem, no sentido de Carr e Kemmis (1988) e Cochran-Smith e Lytle (1999), uma *comunidade auto-crítica de docentes-investigadores* que produzem e desenvolvem sistematicamente saberes docentes que transformam e justificam suas práticas pedagógicas, sendo interlocutores e *usuários críticos e reflexivos do saber elaborado por outros investigadores.* Essa aliança colaborativa tem-se mostrado, portanto, catalisadora de um processo que Fullan e Hargreaves (1997) chamam de *profissionalidade interativa,* a qual consiste no desenvolvimento da capacidade dos profissionais trabalharem colaborativamente num ambiente de diálogo e interação, onde discutem, analisam, refletem e investigam sobre seu trabalho, buscando compreendê-lo e transformá-lo e, nesse processo, desenvolvem-se como pessoas e profissionais.

Conclusões

Retomando o conceito de aprendizagem social em *comunidades de prática*, Wenger (2001) destaca que as aprendizagens podem acontecer, em primeiro lugar, para os *indivíduos participantes*, e interpreto que isso acontece num grupo colaborativo à medida que os participantes produzem, mediante reflexão e investigação conjunta sobre sua prática docente em matemática, inovações curriculares e saberes práxicos, habilitando-se a produzir, compartilhar, re-significar e socializar permanentemente o *repertório cultural* de sua comunidade de prática.

Em segundo lugar, *a comunidade*, como um todo, aprende e evolui à medida que suas práticas são sistematizadas, teorizadas e aprimoradas pela própria comunidade, mantendo e ampliando o número dos participantes capazes de compartilhar seu repertório cultural.

Em terceiro lugar, a aprendizagem social acontece também para as *organizações.* No nosso caso, a *Universidade*, enquanto organização social –e em particular os formadores de professores e os futuros– pode apropriar-se das reflexões, investigações e aprendizados produzidos pela colaboração a partir da sistematização da prática docente e pedagógica em matemática nas escolas. O mesmo acontece em relação à *comunidade escolar* e aos demais professores que podem encontrar nas produções do grupo, um conhecimento *práxico*, isto é, um saber que é ao mesmo tempo teórico e prático, pois é situado, contextualizado e reflexivo, teorizado e re-significado a partir de leituras, reflexões e investigações em diferentes contextos de prática. Mas isso implica, segundo Wenger (2001), manter interconectadas as comunidades de práticas, pois é através delas que uma organização sabe o que sabe, tornando-se eficaz e valiosa enquanto organização social.

Referências bibliográficas

BAKHTIN. Mikhail. *Estética da criação verbal*. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

CARR, W., & KEMMIS, S. *Teoria crítica de la enseñanza: La investigación-acción en la formación del profesorado*. Barcelona: Martínez Roca, 1988.

CLANDININ, J. D. Teacher Education as narrative inquiry. In: CLANDININ, J. D. et al. (eds.). *Learning to teach, teaching to learn: stories of collaboration in teacher education*. Teachers College, Columbia University, New York and London, 1993.

CONNELLY, F.M.; CLANDININ, D.J. *Narrative Inquiry*: Experience and Story in Qualitative Research. San Francisco: Jossey-Bass Publishers, 2000.

FIORENTINI, D. Uma história de reflexão, investigação e escrita sobre a prática escolar em matemática. In: FIORENTINI, D.; CRISTOVÃO, E.M. H*istórias e Investigações de/em Aulas de Matemática*. Campinas: Alínea Editora, 2006, p.13-36.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática*: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006, 226p.

FIORENTINI, D. et al. O desafio de ser Professor de Matemática hoje. XI CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *Anais*...Blumenau: FURB, CD-ROM, 2003.

FIORENTINI, D.; JIMÉNEZ, D. (org.) *Histórias de aulas de matemática*: compartilhando saberes profissionais. Campinas: Editora Gráfica FE/UNICAMP – CEMPEM, 2003. 89 p.

FULLAN, M. & HARGREAVES Andy. *Hay algo por lo que merezca la pena luchar en la escuela?* Trabajar unidos para mejorar. Sevilla: M.C.E.P, 1997.

GREENWOOD, D.J.; LEVIN, M. Reconstructing the relationships between universities and society through action research. In N. Denzin, & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook for qualitative research* (pp. 85-106). Thousand Oaks, Ca.: Sage, 2000.

JIMÉNEZ ESPINOSA, Alfonso. *Quando professores de matemática da escola e da universidade se encontram*: re-significação e reciprocidade de saberes. 2002. 237f. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) – FE/Unicamp. Campinas, SP.

LAVE, J.; WENGER, E. *Situated Learning*: Legitimate Peripheral Participation.

LYTLE, S.L. & COCHRAN-SMITH, M. Aprender de la investigación de los docentes: una tipologia de trabalho. In: Angulo Rasco, J.F. et al (1999). *Desarrollo profesional del docente: política, investigación y practica*. Madrid: Ediciones Akal. (p.320-338).

LÜDKE, Menga; BOING, Luiz Alberto. Caminhos da profissão e da profissionalidade docentes. *Educação & Sociedade*, v. 25, n. 89, p.1159-180, Set./Dez., 2004.

PONTE, J.P. Prefácio. In: FIORENTINI, D.; CRISTOVÃO, E.M. H*istórias e Investigações de/em Aulas de Matemática*. Campinas: Alínea Editora, 2006, p.5-6.

ROCHA, L.P. (*Re)constituição dos saberes de professores de Matemática nos primeiros anos de docência.* 2005.164p. Dissertação (Mestrado Educação). FE/Unicamp. Campinas.

TARDIF, Maurice. *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis: Vozes, 2002.

WENGER, Etienne. *Comunidades de práctica*: aprendizagem, significado e identidade. Barcelona: Paidós, 2001 (original do Inglês em 1998).

Uma metodologia de trabalho interdisciplinar

Adriano de Melo Ferreira (UEG)
Celso José Viana Barbosa (UEG)
Karly Barbosa Alvarenga (UEG)
Nyuara Araújo da Silva Mesquita(UEG)
Vanessa Carneiro Leite (Uni-Anhanguera)

Palavras chave
Interdisciplinaridade, pesquisa, equipe.

Introdução

Entre as décadas de 50 e 60 o fordismo teve seu ápice e se caracterizava por ser um método de produção em série, sendo um aperfeiçoamento do taylorismo. Traduzia uma filosofia onde o menos importante era a necessidade e interesse das pessoas. Tal movimento refletiu no interior do sistema educacional onde professores e alunos não podiam participar dos processos de reflexão crítica sobre a realidade. Os estudantes somente entravam em contato com conteúdos culturais abstratos, desconexos e, portanto, incompreensíveis com excessiva compartimentalização da cultura em matérias e temas com grande abundância de detalhes simples e pontuais. Assim, para sobreviver às salas de aula os estudantes "passam a acumular em suas mentes uma sobrecarga de fragmentos sem conexão uns com os outros, que só são aceitos baseados na repetição ou na autoridade" (Dewey apud Santomé, 1998, p.14). Tais conteúdos formaram um currículo descontextualizado e distante da realidade. Dessa forma os professores se preocupavam mais em serem obedecidos, seguirem os livros e tarefas pré-determinadas e propiciar uma memorização de dados, quase nunca compreendidos, de conceitos sem significado, tudo isso com o intuito de manter aparências e apresentar diários bem preenchidos e as notas escolares.

Há anos, principalmente no contexto atual do século XXI, esse modelo educacional, apesar de ainda ser muito praticado, não tem mais sustentação lógica, pois o mundo está passando por transformações profundas e rápidas, onde o conhecimento científico gera e distribui grandes quantidades de informação, influenciando sistemas políticos, sociais e econômicos e, conseqüentemente as formas de viver, pensar e aprender (Moraes, 2000, p.115). Se diante dessa realidade, a escola e os educadores insistirem num modelo tradicional como o apresentado acima, o prejuízo para a sociedade será enorme, pois formará cidadãos desprovidos das competências necessárias para compreender esta realidade, sendo impedidos de atuar para transformá-la. Seria o passo inicial de um processo de marginalização.

Esse novo contexto exige que o educando abandone a condição de mero receptáculo que se deixa preencher e se assuma como um ser que observa o mundo e a si mesmo, questionando os fatos e os conhecimentos. Deve interagir com o conhecimento de forma autônoma, flexível e criativa, sabendo onde buscar as informações, como selecioná-las e utilizá-las coerentemente. Para formar cidadãos com esse perfil, a escola deve atentar para a melhoria da qualidade pedagógica do trabalho docente.

A reforma curricular do Ensino Médio no Brasil proposta em 1999, por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, corrobora com a preocupação de formar indivíduos conscientes e críticos para o século XXI. Nesse documento propõe-se, para a educação básica, um currículo que interage e articula os conhecimentos interdisciplinarmente, o que significa "utilizar os conhecimentos de várias disciplinas para resolver um problema concreto ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista", realizando uma abordagem relacional na prática escolar e aproveitando a complementaridade, convergência ou divergência dos conhecimentos (Brasil, 1999 p. 36). A interdisciplinaridade é assumida, portanto, como uma das diretrizes para uma pedagogia da qualidade e "deve ir além da mera justaposição de disciplinas e, ao mesmo tempo, evitar a diluição delas em generalidades" (Brasil, 1999 p. 88). Para Fazenda (1992) o valor da interdisciplinaridade não está apenas na melhoria da formação geral e profissional, mas também por permitir a superação da dicotomia ensino-pesquisa e uma educação mais permanente.

Esse mesmo documento apresenta ainda uma organização dos conhecimentos por grandes áreas do saber e, considera que a Biologia, a Química, a Física e a Matemática integram numa mesma área de conhecimentos, chamada "Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias", pois, de acordo com os PCN+ do Ensino Médio, essas disciplinas têm em comum "a investigação da natureza e dos desenvolvimentos tecnológicos, compartilham linguagens para a representação e sistematização do conhecimento de fenômenos ou processos naturais e tecnológicos" (Brasil, 2002. pág. 23). Assim sendo, compartilham competências gerais, a saber: representar e comunicar; investigar e compreender e contextualizar sócio-culturalmente. Contudo, para propiciar uma verdadeira articulação entre essas disciplinas, deve-se desenvolver instrumentos de investigação comuns às mesmas, permitindo assim estudar e compreender os processos naturais, compartilhando conceitos e unidades (Brasil, 2002, p. 27).

Cientes das exigências desse novo paradigma educacional, e preocupados com a formação de professores que atuam no ensino dessa área, docentes da Universidade Estadual de Goiás e da Uni-Anhanguera, formaram um grupo de discussão, cujo principal eixo epistemológico é a interdisciplinaridade no ensino da referida área e tem por objetivo elaborar e implementar uma proposta interdisciplinar para o Ensino Médio. No momento, o grupo intitulado GREECIM (Grupo de Estudos em Ensino de Ciências e Matemática) é formado por cinco professores, que atuam na formação de docentes de Química, Física, Matemática e Biologia, em cursos de licenciatura na Universidade Estadual de Goiás (UEG), Universidade Católica de Goiás (UCG), Universidade Federal de Goiás (UFG) e na Faculdade Uni-Anhanguera e dois licenciandos em Matemática.Três destes professores, além de atuarem no Ensino Superior, também lecionam em turmas de Ensino Médio (EM), em escolas públicas. Pretendemos, posteriormente, ampliar o grupo com a participação de professores de outras áreas.

Metodologia

Nossa investigação não se baseia em um único método, mas nas etapas: de discussão e ação; de reflexão; de ação. A preocupação inicial do grupo tem sido saber, entre os tantos conteúdos desenvolvidos nas aulas de Química, Física, Biologia e Matemática do Ensino Médio, quais, por sua natureza, propiciam um ensino interdisciplinar. Utilizamos a análise documental como instrumento de busca e identificação de informações sob o enfoque da interdisciplinaridade. Esta análise foi feita a partir dos documentos norteadores da educação nacional (PCN), dos livros didáticos e planos de ensino elaborados por professores dessa área. Houve um consenso entre os integrantes do grupo, de que a Biologia seria inicialmente o "carro-chefe" dos temas e, portanto, a análise e discussões foram feitas na seqüência em que os conteúdos dessa disciplina são desenvolvidos no ensino médio.

Optamos pela abordagem qualitativa o que não exclui, necessariamente, a perspectiva quantitativa que vem de certa forma contribuir para o engrandecimento da pesquisa ao fornecer dados estatísticos que se configuram como importante suporte de interpretação da realidade estudada, pois segundo Gatti (2002).

> *É preciso considerar que os conceitos de quantidade e qualidade não são totalmente dissociados, na medida em que de um lado a quantidade é uma interpretação, uma tradução, um significado que é atribuído à grandeza com que um fenômeno se manifesta (portanto é uma qualificação dessa grandeza), e de outro ela precisa ser interpretada qualitativamente, pois, sem relação a algum referencial não tem significação em si (Gatti, 2002, p. 29).*

A análise de dados obtidos em uma pesquisa consiste em um processo de busca e organização sistemática das informações obtidas. Na pesquisa qualitativa pode-se conjugar diferentes técnicas e fontes variadas para obtenção dos dados, o que permite uma "descrição densa" da realidade estudada (André, 2004).

Decidiamos por uma estratégia de trabalho e depois tentamos outra que era mais objetiva e a que mais se adequou foi: iniciamos com a biologia e o responsável por ela nos enviou uma tabela contendo todos os tópicos trabalhados no EM, separados por série. Todos os outros componentes preencheram essa tabela com os tópicos relacionados à sua disciplina. Em uma outra etapa, cada um enviou, para todos os componentes, uma tabela apresentando os tópicos de sua área e os outros a preencheram de acordo com os conteúdos, de sua disciplina, que estavam relacionados com cada tópico elencado. Obtivemos assim 12 tabelas para cada série. Ao nos reunirmos verificamos a inter-relação dos conteúdos, debatemos e ao final de 4 meses, como resultado da triangulação de dados obtivemos 4 tabelas, das quais uma, a de 1o ano, é apresentada aqui. Identificamos conteúdos que, por sua natureza, podem ser desenvolvidos de maneira interdisciplinar no ensino médio, proporcionando uma visão específica e, ao mesmo tempo, global, das possibilidades de interação entre eles.

Após a explicitação de possíveis vínculos entre os conteúdos e aspectos comuns entre as disciplinas iniciamos a segunda etapa. Nesta pretendemos a ação direta dos resultados obtidos na primeira; levando-os para o espaço da sala de aula, especificamente da formação de professores, por meio das disciplinas de prática de ensino e estágio supervisionado curricular das licenciaturas.

É importante enfatizar que ambas as etapas são pautadas pela "discutibilidade" como um dos critérios validadores da prática científica, pois, segundo Demo (1981)"a discussão, logicamente, não pode admitir um ponto final, isto é, é algo sempre apenas discutível, exceto se introduzirmos em ciência o dogmatismo de uma posição tida por evidente. Aí temos, pois um limite lógico, que faz da ciência algo sempre inacabado" (Demo,1981, p. 17). Partimos da idéia de ciência como processo inacabado, discutível, pois trabalhamos a educação com enfoque dinâmico e acreditamos que o conhecimento não está situado no objeto ou no sujeito, mas na relação dinâmica entre eles. Todo o processo, desde a análise dos documentos, proposição de critérios, dúvidas, até a elaboração dos resultados foi feito a "quatro mãos", o que está proporcionado um grande aprendizado para todos os componentes do GREECIM.

O maior obstáculo encontrado até agora foi inter-relacionar os conteúdos de Matemática com outras disciplinas, pois a linguagem e os conceitos encontrados permeando-as foram limitados em comparação com a quantidade ministrada no EM, isto é, no EM são ministrados muitos conteúdos os quais não são diretamente necessários para desenvolver o conhecimento de Biologia, Química e Física.

Resultados

A partir do levantamento dos conteúdos das 4 disciplinas, ministradas no ensino médio, realizamos discussões sobre a interdisciplinaridade e as relações entre os conteúdos das diferentes disciplinas. A triangulação interdisciplinar dos dados foi apresentada em quadros para possibilitar uma visão ampla da relação entre os conteúdos. Apresentamos como exemplo os quadros de primeiro e segundo ano do ensino médio.

Na primeira tabela apresentamos os conteúdos que mais se destacaram para a compreensão das outras disciplinas. Como podemos notar são eles: proporção, função e gráficos, medidas, linguagem matemática incluindo classificação, tabulação, seriação, seleção de informações e agrupamento segundo características próprias de cada dado.

Tabela 1: Conteúdos que mais se destacaram nas aulas de Matemática em todos os anos do Ensino Médio com possibilidades de trabalho interdisciplinar no âmbito da grande área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias".

Conteúdos	Química	Física	Biologia
Proporção	- Matéria e Energia (1º) - Leis Ponderais (1º) - A quantidade de material (1º) - Estequiometria (1º)	- M. R.U(1º). - M.R.U.V. (1º). - 2a Lei de Newton (1º). - Movimento dos planetas(3a Lei de Kepler) (1º). - Conservação da Energia (10) - Temperatura e Dilatação (20) - Quantidade de calor (20) - Equação de Estado de um gás ideal (20) - Lei de Snell (2º). - Efeito Joule (3º). - Lei de Ohm (3º). - Equações do Transformador (3º).	- Origem do Universo(10) - Base molecular da vida (água, sais, carboidratos, lipídios, proteínas, ácidos nucléicos) (10)
Medidas	- A quantidade de matéria-(1º) OBS: Em quase todos os anos tal conteúdo é necessário.	- Medidas em Física (1º). - Sistema Internacional de Medidas (1º). - Escalas dos Termômetros (2º). OBS: Em quase todos os anos tal conteúdo é necessário.	OBS: Em quase todos os anos tal conteúdo é necessário.
Função / GRÁFICOS (Inequação -via gráficos; Equação)	- Mudanças de estado físico (1º) - Propriedades periódicas e aperiódicas (1º); - Forças intermoleculares e PF/PE (1º); - Transformações gasosas (1º); - Solubilidade (2º); - Propriedades coligativas (2º); - Entalpia (2º); - Cinética química (2º); - Equilíbrio químico (2º); - Desintegração radioativa (2º);	- M. R.U (1º). - M.R.U.V. (1º). - 2a Lei de Newton (1º). - Lançamento de projéteis (1°) - Energia Cinética (1°) - Comportamento dos gases (2°) - Lei de Ohm (3°) - Força elétrica (Lei de Coulomb) (3°) - Trabalho (gráfico da força pelo deslocamento) (1°)	- Seres aeróbios: respiração: gases (1º) - A intervenção humana no ambiente (3º) - Origem da Vida na Terra : (Teoria dos Coacervados) (1º) - A intervenção humana no ambiente (3º) - Fluxo de energia e matéria nos ecossistemas (3º) - Excreção (2º ano) - Vírus (20) - Fisiologia vegetal (20) - Respiração(2º) - Excreção(2º) - Fatores que regulam o tamanho das populações (3º) - Divisão celular: Mitose e Meiose(1º) - Metabolismo energético: Respiração e fermentação(1º) - Membranas e transportes: osmose, difusão, transporte ativo(1º) - Noções de Embriologia(1º) - Fisiologia vegetal (2º) - Fisiologia Humana: -Sistema Nervoso e Endócrino (2º) - Sistema esquelético e muscular (2º) - Digestão (2º) - Circulação(2º)

- Potência de base 10 - Classificar /selecionar/lógica - tabular - Linguagem matemática	- Tabela periódica dos elementos químicos(1º) OBS: Em quase todos os anos tal conteúdo é necessário.	- Corrente elétrica (30) (condutividade) - Física Quântica (30) OBS: Em quase todos os anos tal conteúdo é necessário.	- Base molecular da vida (água, sais, carboidratos,lipídios, proteínas, ácidos nucléicos) (1º) OBS: Em quase todos os anos tal conteúdo é necessário.

Tabela 2: Conteúdos estudados nas aulas de Matemática do 1º ano do Ensino Médio com possibilidades de trabalho interdisciplinar no âmbito da grande área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias".

Tema	Química	Física	Biologia
- Conjuntos	- Tabela periódica (1º)		- Introdução ao estudo dos seres vivos: a importância da sistemática (classificação) e seu histórico (2º);
Sistema Cartesiano (escala – quebra de padrões)	- Construções de gráficos e análise de dados (todos)	- Construções de gráficos e análise de dados (todos)	- Construções de gráficos e análise de dados (todos)
Relações/ Funções/ Gráfico	-- Relações de massa (1º) -- Estequiometria (1º) -- Mudanças de estado físico (1º) -- Propriedades periódicas e aperiódicas (1º); -- Forças intermoleculares e PF/PE (1º); -- Transformações gasosas (1º); -- Solubilidade (2º); -- Propriedades coligativas (2º); -- Entalpia (2º); -- Cinética química (2º); -- Equilíbrio químico (2º); -- Desintegração radioativa (2º);	- Relações espaço-tempo, velocidade-tempo, força-acelaração, trabalho-deslocamento, energia-trabalho (1º) - M. R.U (1º). - M.R.U.V. (1º). - 2ª Lei de Newton (1º). - Lançamento de projéteis (1°) - Energia Cinética (1°) - Comportamento dos gases (2°) - Lei de Ohm (3°) - Força elétrica (Lei de Coulomb) (3°)	- Membranas e transportes: osmose, difusão, transporte ativo (1º) - Noções de embriologia (1º) - Fisiologia vegetal (transporte de seiva) (2º) - Fisiologia humana: respiração e circulação (2º) - Ciclos biogeoquímicos (2º) - Dinâmica das populações: características e fatores que regulam o tamanho das populações (3º)
Módulo	-- Cinética química (2º);	XXX	XXX
Equações Modulares	XXX	XXX	XXX
Função Exponencial	-Radioatividade e Reações nucleares (2°)	- Física moderna (radiação e radioatividade) (3º);	- Evidências da evolução biológica (3º) - Mapeamento gênico(3º) - Os trabalhos de Mendel: 2ª Lei Mendeliana (3º)
Função Logarítmica	- Radioatividade e Reações nucleares (2°) - Funções inorgânicas (1°) - Produto iônico da água e pH (2°)	- Física moderna (radiação e radioatividade) (3º); - Ondas sonoras (Intensidade do Som) (2º)	- Evidências da evolução biológica (3^0) - Mapeamento gênico(3^0) - Os trabalhos de Mendel: 2ª Lei Mendeliana (3^0) - Reprodução humana (log. Associado ao pH)(1^0)
Seqüência /PA/PG	XXX	XXX	- Desenvolvimento de bactérias (2º) - Evolução Biológica: histórico das idéias evolucionistas (3º) - Dinâmica das populações: características (3º) - A intervenção humana no ambiente (3º) - Noções de embriologia (1º)
Porcentagem	- Reações químicas –Leis ponderais (1°) - Concentração de soluções (2º) - Estequiometria (1º)		- Base molecular da vida (principalmente ácidos nucléicos) (1º) - Os trabalhos de Mendel: 1ª Lei Mendeliana (3º) - Freqüência gênicas nas populações e princípio de Hardy-Weinberg (3º)

			- Dinâmica das populações (3º) - Mapeamento gênico (3º) - Interação entre genes não alelos (interação gênica) (3º) - Noções de probabilidade em Genética (3º)
Juros	XXX	XXX	XXX

Um aspecto importante e que, pode ser um dos fatores que dificultem a abordagem interdisciplinar no Ensino Médio, é o fato de que certos temas desenvolvidos em Matemática no 1º ano apresentam inter-relação com temas da Química, da Física e da Biologia, mas que os alunos somente estudarão no 2º ou 3º ano do Ensino Médio. É o caso, por exemplo, do conteúdo "Função Exponencial", cujos conteúdos inter-relacionados da Física (Física moderna -radiação e radioatividade) da Química (Radioatividade e Reações nucleares) e Biologia (Evidências da evolução biológica) só são abordados nas séries posteriores. E, mesmo conteúdos estudados na mesma série, geralmente são abordados em momentos diferentes do ano letivo, como o estudo da Porcentagem, que geralmente ocorre no final do ano letivo, enquanto Estequiometria (Química) e Base molecular da vida- principalmente ácidos nucléicos (Biologia), são abordadas no início do ano letivo. Os conteúdos cujas linhas e colunas estão marcadas com XXX significam que não encontramos até o momento, sua relação direta com a disciplina elencada.

Apesar dessas dificuldades, fazendo-se uma análise atenciosa, percebemos a possibilidade de temas concomitantes em todas as disciplinas constituintes da área de "Ciências da Natureza e Matemática" e isso não pode ser desconsiderado. Além disso, uma proposta que se pretende interdisciplinar não pode se preocupar apenas com a questão de tempo escolar ao selecionar seus conteúdos, mas sim, como lembram os PCN+ do Ensino Médio, *"devem ser selecionados os conteúdos e as estratégias que possibilitem ao aluno entender não só sua realidade particular, mas principalmente o contexto maior na qual essa realidade específica se insere."* (Brasil, 2002, p. 51).

Daí a importância de se pensar com o máximo de zelo nas atividades interdisciplinares que serão realizadas no âmbito escolar, que é a pretensão do GREECIM, no que se refere à continuidade de nosso projeto de pesquisa.

Considerações finais

A organização dos temas e inter-relações apresentadas constitui somente uma tentativa de sistematizar interdisciplinarmente conteúdos matemáticos. Portanto, não deve ser entendido como um manual pronto, acabado e que deve ser seguido. Mas, sim como orientações aos docentes formados e em formação que, de forma crítica, podem e devem melhorar as propostas apresentadas.

Conteúdos de Matemática aqui apresentados, cuja primeira análise, não vislumbrou uma abordagem interdisciplinar, certamente interagem com conteúdos de outras disciplinas não contempladas pela área de "Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias". Logo, a ampliação do grupo, com a inserção de professores de outras disciplinas, com certeza gerará mais discussão e ampliação de idéias.

No âmbito escolar, a criação de equipe interdisciplinar de professores e uma discussão, durante os planejamentos, similar à apresentada nesse artigo, podem favorecer um aprendizado mais global e significativo, sem compartimentar o conhecimento.

Nossos passos estão agora em direção a responder, com base nos dados encontrados, as questões: Que tipos de metodologias interdisciplinares de ensino podemos propor para a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias? Como implementá-las? A idéia é propor inicialmente metodologias interdisciplinares de ensino, que não firam o currículo que vem norteando as ações pedagógicas no Brasil.

Referências Bibliográficas

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio. Brasília, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio - Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2002.

DEMO, Pedro. Metodologia científica em ciências sociais. São Paulo: Atlas, 1981.

MORAES, M.C. O paradigma educacional emergente. 6ªa edição. Campinas: Editora Papirus, 2000.

FAZENDA, I.C.A. Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro: Efetividade ou ideologia. São Paulo: Edições Loyola. 1992.

SANTOMÉ, J. T. Globalização e Intedisciplinariedade - O curriculo Integrado. Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1998.

Tópico 2

Planteamientos teóricos y proceso de aprendizaje y enseñanza en la educación matemática

En matemáticas...
¿qué nos dejaron las reformas de fin del siglo XX?[1]

Alicia Ávila
Universidad Pedagógica Nacional México

A manera de introducción

En México, al igual que en muchos otros países del mundo occidental, se vivieron dos grandes reformas a la educación matemática en las últimas décadas del siglo XX. Estas reformas, de grandes dimensiones, pretendieron, cada una en su momento, modificar radicalmente la enseñanza de las matemáticas que tenía lugar en las escuelas. Algunos países alcanzaron logros a la luz de estas reformas; otros, en cambio, consiguieron muy escaso progreso. Sin embargo, las reformas dejaron su huella: ¿de qué naturaleza y qué tan profunda es esa huella? Abordaré este tema considerando el caso de la educación primaria mexicana

1. La huella de las reformas

La matemática moderna como saber a enseñar

Los programas y documentos oficiales que orientaban la enseñanza de las matemáticas en los años sesenta tenían en la base al sensual-empirismo. *Grosso modo*, la actividad matemática sugerida consistía en mostrar, ejemplificar, ejercitar y aplicar. Tales ideas parecían ajustar perfectamente con las de los profesores, probablemente también satisfacían las expectativas de los padres de familia. Pero al iniciar los años setenta se asumió una postura internacional consistente en considerar que la enseñanza vigente no conducía sino al verbalismo hueco y a la repetición memorística de ideas. Era una exageración y una simplificación de la realidad educativa, pero fue bajo tal creencia que la «matemática moderna» entró a los salones de clase. Dicha matemática pretendió desplazar la forma de pensar la enseñanza de esta disciplina instalada en las escuelas. Buscó sustituir el contacto con la matemática utilitaria y sus formas ostensivas, por la vinculación con la "verdadera matemática"; fueron dos las vías del intento: la inclusión de nuevos contenidos y el aprendizaje por descubrimiento. Para concretar tales ideas, muchas secciones de los libros del alumno presentaban situaciones problemáticas acompañadas de espirales interrogativas que desembocaban en la formulación del concepto previsto.

Los reformadores se orientaban por una noción cercana a la mayéutica socrática, según la cual, planteándoles las preguntas adecuadas, los alumnos descubrirían sobre la base de sus propios recursos intelectuales los conceptos que interesaba comunicar (Avila; 2006; 71).

La incorporación de tales ideas no fue uniforme en la práctica, acaso tampoco relevante. En virtud de las innovaciones promovidas, se enseñaron nuevos contenidos: las propiedades de las operaciones aritméticas, los números enteros, la suma sobre la recta numérica o la idea de variación proporcional; a la vez permanecían las fracciones propias y las impropias, la historia de las unidades de medida, el interés por la regla de tres e incluso la raíz cuadrada, temas todos que habían sido eliminados (o minimizados) en los programas oficiales. Es decir que una vez que los profesores hicieron su parte en

[1] Buena parte de los argumentos expuestos en esta conferencias fueron tomados de Avila 2004 (dir.) y Avila (2006).

la transposición, se yuxtapusieron nuevos y viejos contenidos de saber y se eliminaron otros que sobresalían como novedad; fue frecuente que se seleccionaran los "ligados a la vida real". El criterio de selección era precisamente el que la «nueva matemática» buscaba trascender. Pero los profesores lo mantuvieron.

En cuanto a la forma de hacer aprender los conocimientos, hubo quien, ignorando la propuesta, conservó la ostensión[2] como estrategia de enseñanza, así como la idea de que los niños aprenden si se les explica bien; también hubo quien, en coincidencia con las sugerencias oficiales, articuló la actividad bajo la intención de que los niños descubrieran los conceptos utilizando la mayéutica. El interés de quienes la aplicaban era que los niños razonaran. Quizá el razonamiento como objetivo del proceso educativo no derivó de las nuevas formas de enseñanza introducidas. Tradicionalmente, el razonamiento ha estado en boca de los profesores; «¡Que los niños razonen!», se oye decir a los viejos maestros. Pero cualquiera que sea su origen (y su significado), tal idea pareció haberse revitalizado con la entrada de las *nuevas matemáticas*.

En fin, que con la irrupción de la «matemática moderna» las relaciones didácticas tomaron múltiples formas; la promovida por los reformadores no constituyó sino una forma más de enseñar. Así, pues, no todo sucedió conforme lo esperaban los impulsores de la «matemática moderna». Y aunque no todas las que tuvieron lugar fueron versiones degradadas de las propuestas oficiales, tanto el vínculo con las "verdaderas matemáticas" como la capacidad de abstraer relaciones, generalizarlas y formalizarlas quedaron como deseos escasamente cumplidos. Tal hecho se reconoció 20 años después, cuando se introdujo la resolución de problemas como vía del aprendizaje en las escuelas.

En ese entonces, no existían los exámenes nacionales e internacionales que hoy parecen imprescindibles. El éxito o el fracaso relativo no fueron documentados en dichos términos; de hecho, se decidió volver a modificar los programas y textos oficiales con un conocimiento difuso acerca de lo que pasaba en las escuelas. Por supuesto se contaba con las críticas a la matemática moderna surgidas en los países que la habían impulsado originalmente. Nuevamente, con un afán justificatorio, se simplificarían y exagerarían las realidades sobre las que la nueva reforma se instalaría.

La resolución de problemas como *vía del aprendizaje*

Durante los años ochenta, se generó una nueva postura internacional, consistente en esta ocasión en señalar que la lógica y los conjuntos habían mostrado su ineficacia como contenidos de la educación básica. Muchos señalaron los graves daños que esta forma de enseñar había provocado en las jóvenes generaciones, fueron menos los que mostraron con datos específicos el escaso avance en la capacidad de razonar de los alumnos (Adda; 1981). La persistente insatisfacción por los resultados llevó una vez más a magnificar las bondades que pudiese traer una nueva forma de enseñar. De este modo, al iniciar los años noventa, en México se revivió la crítica a la exposición y al verbalismo que, supuestamente, la matemática moderna no pudo desterrar. Aunque en este caso el interés no fue modificar los contenidos de enseñanza, se eliminarían la lógica y los conjuntos por la razón antes expuesta (cf. SEP; 1993) y se postularía la resolución de problemas como vía de acceso al conocimiento significativo. Tal forma de aprendizaje y enseñanza se impulsó con un amplio aunque tardío programa de actualización de profesores (Block et. al: 1995) sustentado también en el «aprender resolviendo problemas».

Muy inspirada en las corrientes internacionales, y particularmente en la teoría de situaciones (Brousseau; 1986), la propuesta se fundamentaba en una idea que hoy es sentido común entre los educadores: los alumnos pueden aprender – en la interacción con situaciones problemáticas – sin que

[2] H.Ratsima Rajohn (1977) denominó introducción ostensiva de los objetos de enseñanza a la forma de presentación en la que todos los elementos y relaciones constitutivas de la noción prevista son proporcionados de un solo golpe por el profesor o el libro de texto.

sus profesores les trasmitan directamente los conocimientos. De este modo, al igual que en muchos otros países, las tareas centrales asignadas al profesor serían las siguientes:

a) diseñar actividades mediante las cuales los alumnos construyan los conceptos matemáticos; y
b) coordinar las discusiones en las que los niños interactúan con sus compañeros para explicar sus procedimientos, validar sus estrategias, o revisar sus hipótesis (cf. por ejemplo, SEP; 1994).

Con mucho menos énfasis se señaló que el docente debería formalizar los conocimientos y dar información a los alumnos cuando la necesitaran.

Hoy sabemos que la enseñanza que se buscaba impulsar no tiene sino presencia eventual en las escuelas[3]. Es cierto que los problemas matemáticos se incluyen con relativa frecuencia (Avila et. al; 2004), pero las más de las veces éstos no son útiles para construir conocimientos nuevos sino sólo para aplicar los que ya se tienen; a lo sumo, los docentes más devotos, plantean problemas que implican dos o más operaciones, "para que los alumnos razonen"; en los salones de clase permanecen la ostensión, la interrogación o la explicación como ejes de la actividad.

Los grados iniciales de la educación primaria son un caso aparte, ahí lo que se observa es un importante interés por el juego y la manipulación de material, se ha generado un constructivismo ingenuo que cree que por actuar se está aprendiendo (Avila; 2001). A tales formas de enseñanza se agregó otra resultante de la negociación entre las viejas y las nuevas ideas que algunos profesores parecen haber librado consigo mismos: la «devolución dosificada», consistente en conceder sólo breves tiempos a-didácticos a los alumnos.

En este tipo de organización didáctica - facilitada por el formato de los libros de texto - los problemas y preguntas obligan a construir soluciones de cierta complejidad; el supuesto es que los niños no cuentan con un modelo preestablecido para obtener dichas soluciones. Pero las preguntas y problemas pueden ser respondidos en tiempos relativamente cortos. De tal suerte que la clase transcurre en la alternancia entre tiempos en que se establece una relación personal con la situación y los episodios estrictamente didácticos en los que el profesor participa en función de los resultados de la actividad precedente.

De este modo, quienes instrumentan la «devolución dosificada» pueden controlar en intervalos de tiempo que les parecen razonables – en tanto disminuyen la incertidumbre propia de los tiempos de libertad intelectual - los resultados de la acción libre de los alumnos. La devolución dosificada se alterna con otras formas de enseñanza: la interrogación tipo mayéutica, la ostensión o el uso de la metáfora; otras veces se acompaña de un interés especial por la argumentación. Pero tal modalidad constituye sólo una entre diversas formas de enseñanza y es distinta de la aspiración oficial que buscaba amplios tiempos a-didácticos durante los cuales los niños resolverían tareas complejas sin la dirección de su profesor. Esta forma de organización didáctica acorta la distancia entre las propuestas oficiales y las acción habitual de los profesores; al tiempo que distancia la actividad en el aula de la imaginada por los reformadores, posibilita la permanencia de «la resolución de problemas como vía del aprendizaje» en las escuelas.

Al introducirse la reforma de los años 90, se declaró poco interés en modificar los contenidos de enseñanza. Sin embargo, la afirmación debe matizarse, porque las formas de presentación que dichos contenidos tomaron los distanciaron por completo de los vigentes en las escuelas. La nueva organización didáctica, marcó ocasionalmente distancias insalvables con las concepciones, conocimientos y destrezas de los profesores. Valgan como ejemplo sólo dos contenidos:

a) Los distintos significados de las fracciones - hoy preconizados esenciales para la cabal comprensión de dichos números - o bien pasaron desapercibidos, o bien resultaron incomprensibles para los profesores (Izquierdo; 2006);

---

[3] Véanse p.ej. Avila y otros. 2004; Avila; 2006; Block y Moscoso; 2005; Chávez; en proceso.

b) El acercamiento propuesto para los decimales, tendiente a hacer comprender que estos números son distintos de los naturales, ha sido intencionalmente eludido por un número importante de docentes (Avila; 2004).

Reformas curriculares: ¿por qué sólo unas cuantas huellas?

Las dos últimas reformas curriculares del siglo XX incorporaron algunos elementos novedosos en las prácticas de enseñanza. No lograron sustituir todo lo que buscaban, tampoco incorporar todo lo que pretendían; muchos contenidos de saber permanecen y conviven o desplazan a los que portan novedades. Las viejas formas de enseñanza también han permanecido. Igual se observa al profesor ostensista, que al que busca comunicar explicando o al que interroga como medio de hacer que sus alumnos aprendan. En cambio, la interacción directa con situaciones promotoras de conocimientos nuevos durante tiempos amplios - que se postularía acción cotidiana en las escuelas - tiene presencia muy eventual. En su lugar se hace presente la *devolución dosificada*.

¿Por qué muchos profesores no modifican sus concepciones y creencias?, ¿Por qué no aceptan que los alumnos pueden aprender matemáticas mediante caminos distintos de la ostensión, la interrogación o la explicación?, ¿Porque la reforma no fue introducida de manera pertinente?, ¿Porque la actualización de profesores no fue de las características requeridas? Las respuestas afirmativas serían verdades incompletas. La cuestión es más compleja. Sabemos hace tiempo que las representaciones son sumamente estables, que por simples razones de equilibrio personal no es posible modificarlas fácilmente (Robert y Robinet; 1989). Hoy también sabemos que los resultados positivos *favorecen* la adopción de una pedagogía compleja, como lo es la enseñanza mediante resolución de problemas. En sentido inverso, los resultados no exitosos tienen un peso decisivo en el retorno a la ostensión. Ante la dificultad, siempre estará el refugio constituido por la linealidad del sensual-empirismo.

Pero el éxito no es sólo cuestión de voluntad profesoral, está asociado también al conocimiento y a ciertas destrezas didácticas que – por distintas razones – muchos profesores no han desarrollado. Es escaso nuestro conocimiento sobre cómo ayudar a los docentes a cambiar sus concepciones y a desarrollar las destrezas necesarias para enseñar a través de la resolución de problemas. Lo que sí sabemos es que el apoyo que se les brindó durante la última década para lograr una y otra cosa les resultó insatisfactorio (cf. Ibarra; 2007; Gutiérrez, 2007).

Al margen de las reformas: las múltiples formas del trasmisionismo

Muchos profesores se reconocen a sí mismos como desconfiados de las reformas educativas promovidas por el Estado. Para algunos incluso resulta que estas reformas, al ser “únicamente modas”, luego se sustituyen por otras “nuevas modas”. A su entender, este hecho implica el reconocimiento de las instancias gubernamentales del error cometido al haber impulsado años atrás una cierta forma de enseñar las matemáticas. La reforma que llevó a la escuela las llamadas matemáticas modernas se expresaba como ejemplo contundente en tal sentido.

No obstante un rasgo común a todos estos profesores – la voluntad de trasmitir el conocimiento a los alumnos – la actividad matemática que se genera durante sus clases es diversa y desemboca en niveles de significación distintos. Según la creencia generalizada, el profesor que trasmite acepta pocas responsabilidades frente a sus alumnos: ostentar las nociones, hacer repetir, hacer ejercitar; se dice que no asume la responsabilidad efectiva de que sus alumnos aprendan. El profesor que trasmite es el que monologa y responsabiliza a sus alumnos de que el aprendizaje ocurra.

Pero quien busca transmitir directamente el conocimiento no necesariamente promueve contratos de este tipo. A unas ciertas reglas contractuales, que en principio delimitarían experiencias similares, pueden seguirle acciones de regulación que diferencian los términos efectivos de la relación didáctica.

Porque una progresión didáctica no transcurre linealmente, conforme a una intención inicial derivada de la postura pedagógica del profesor. Si bien es él quien en principio define los términos del contrato que celebra, la participación de los alumnos define la viabilidad, la ineficacia o incluso la obsolescencia del contrato. Ante la contingencia y los desequilibrios en la relación didáctica, el profesor se ve obligado a actuar, a realizar acciones para regular el equilibrio didáctico y, en el límite, a cambiar de contrato. Estas acciones equilibrantes determinan de manera importante la actividad matemática escolar ya que permiten conservar y acrecentar el significado o, por el contrario, despojar de él a los conocimientos matemáticos.

En efecto, hay profesores que sustituyen la lógica del aprendizaje por otra de obtención de respuestas, aunque éstas se negocien a la baja, mediante preguntas que al ser cada vez más simples sustentan su eficacia en la pérdida de significación. Para otros docentes el camino es ofrecer nuevas y distintas explicaciones, nuevas ostensiones, modificar los ejemplos, introducir contra-ejemplos, poner a discusión las dificultades. De esta forma, se alcanza una significación en los conocimientos que no es nada despreciable. Dicho de otro modo: las acciones para responder a los estancamientos, a las dudas, a los errores, diferencian notablemente los términos y los alcances de la relación didáctica (cf. también Aguayo; 2004; Avila, 2006).

A pesar de tal diversidad, hasta hoy las prácticas al margen de las reformas constituyen una zona obscura, la ideología de la innovación ha impedido examinar con detenimiento lo que ahí ocurre.

¿Hacia dónde orientar futuras reformas?

Grosso modo, he dado cuenta de las huellas dejadas en México por dos grandes reformas. Tengo la confianza de que comprender lo que ocurre en las escuelas permitirá generar acciones de mejora de la enseñanza más eficaces que las instrumentadas a fines del siglo XX. Porque hasta hoy, las reformas se han diseñado poniendo el acento en la construcción de nuevos currículos y nuevos materiales, y esto no ha traído suficientes progresos.

Actualmente hay consenso internacional en torno a que la resolución de problemas es la mejor forma de lograr aprendizajes matemáticos significativos. Teóricamente, la postura es incuestionable. Pero esta forma de enseñanza, al igual que la matemática moderna en su momento, fue poco comprendida por los profesores. Hoy, cuando aún está vigente, pruebas nacionales e internacionales constatan que los niños han progresado poco o casi nada en su capacidad de resolver problemas (véanse por ejemplo Eudave y Ávila 1994; INEE; 2006; PISA 2003;). Los estudios muestran una y otra vez que los niños y niñas que pueblan las escuelas siguen sin saber sumar, como el Juanito de Morris Kline (Kline; 1976). Creo, como ha señalado Michèle Artigue (2004), que esto se debe a que las distancias que separan las propuestas de reforma y las costumbres en la clase han hecho inasimilables las propuestas.

Se pone aquí de manifiesto el protagonismo de los docentes y la necesidad de re-pensar su acción y sus posibilidades reales de cambio, también su formación. Ante la insatisfacción por los resultados obtenidos, no resulta productivo volver sobre la postura simplista de elaborar nuevas reformas de papel y luego señalar a los maestros como los principales oponentes a la evolución. Las lecciones que nos dejaron las reformas de fin de siglo XX nos indican que no se trata de enfocarse únicamente al cambio, guiados por la ideología de la innovación; hacerlo es desconocer el peso de las tradiciones y costumbres y la continuidad que hay en las prácticas fundamentales de la escuela y correr el riesgo de echar al vacío los esfuerzos reformadores. Como nos ha advertido Guy Brousseau: "Al hacer de lo novedoso el criterio esencial para valorar las acciones propuestas, se destruyen las posibilidades de éxito de las mismas (…) Lo propio de la innovación es descalificar una práctica antigua para reemplazarla por otra, y no para corregirla (…) una innovación ahuyenta a otra, critica a la presente, pero no la regula (…) las modas pasan y regresan sin verdaderos progresos. La ideología de la innovación aniquila a la innovación. Brousseau; 2000; 31-32).

Entonces, ¿qué es lo que conviene hacer? Algunos analistas señalan que las mejoras a la enseñanza sólo pueden venir "desde dentro" del sistema. No estoy segura de esto. Aunque considero importante conservar lo mejor de las prácticas instaladas – hasta hoy ignoradas - también creo necesario encontrar un punto de equilibrio "mejorante" entre las reformas, los profesores y el aprendizaje de los estudiantes.

Creo en la utilidad de buenos textos, de buenos materiales, en la necesidad de introducir ideas que desestabilicen el sistema didáctico, puesto que este desequilibrio promoverá – eventualmente - equilibrios mejorantes: la devolución dosificada surgida en el período de la resolución de problemas es una muestra de ello. Pero la distancia entre lo nuevo y los viejo debe considerarse una variable crítica si se quiere mejorar lo que sucede en las clases de matemáticas (Artigue; 2004).

Encontrar las distancias que permitan un equilibrio mejorante, pasa por conocer a los profesores: sus acciones (buenas o no tan buenas), sus destrezas y sus torpezas, sus aciertos y sus desaciertos... así como las costumbres que a la vez que los impulsan los limitan.

Dicho de otro modo, creo que comprender lo que en la clase de matemáticas ocurre ayudará – si no a lograr que los maestros actúen como utópicamente los reformadores hemos imaginado – sí a elaborar reformas que no se transformen en "prescripciones inaplicables" (Brousseau; 2000).

En la acción docente que hoy se observa en muchos salones de clase hay modificaciones positivas importantes, también elementos que denotan la dificultad para gestionar la resolución de problemas en las aulas. La reforma está a medio camino. Subsanar las dificultades y avanzar en los logros alcanzados obliga a situarse en el punto que marcan los progresos observados y a dirigir la atención a cuestiones específicas de los procesos didácticos tal como ocurren en las aulas. Me parece fundamental considerar varios de ellos para la formación continua de los profesores:

* Las nociones de actividad y problema, cuyo significado es importante terminar de configurar;
* La formalización e institucionalización del conocimiento, que hasta hoy, cuando se opta por la resolución de problemas, casi no se realiza;
* El tratamiento de los problemas y las preguntas abiertas, porque resulta frecuente que los profesores las cierren;
* La realización de trabajo en pequeños grupos, que se muestra como uno de los puntos vulnerables en el proceso didáctico;

Este listado no tiene ni mucho menos la intención de resolver el complejo problema de la formación de los maestros; este tema debe discutirse con profundidad y deberán intervenir en él muchos actores. Sólo hago evidente con la enumeración lo indispensable de considerar la reforma realizada en las escuelas para cerrar el ciclo de mejora a la enseñanza iniciado en los años noventa; no son posibles buenos aprendizajes cuando muchos profesores:

a) no han acabado de entender cuándo una situación es problemática para sus alumnos;
b) confunden la manipulación de materiales con las construcción de conocimiento;
c) no tienen elementos para conseguir que el trabajo en pequeños grupos deje de mal-utilizarse;
d) o no se han percatado de que no formalizar los conocimientos genera una laguna enorme en el aprendizaje matemático.

Reflexión final

En los años setenta del siglo pasado se abrió una brecha entre lo que los maestros sabían y acostumbran a hacer y lo que se les pidió conocer y realizar. La reforma de los años noventa – a juzgar por los resultados obtenidos - no cerró la brecha.

Dudo de que la enseñanza habitual en los años sesenta fuese productora de saberes matemáticos significativos. Es probable que predominara el verbalismo sin sentido del que se le acusa desde hace décadas. No sería deseable – como salida ante los escasos resultados que hoy son contundentes – caer en la tentación de regresar al sensual-empirismo como camino para cerrar la brecha abierta. Hay otra manera de intentarlo: tomar a los maestros como blanco de la política estatal.

El reto es convertir la información sobre la reforma realizada en las aulas, en elemento constitutivo de una plataforma para pensar y probar estrategias de formación de los profesores en servicio. Porque la reforma no es un asunto cerrado, el ciclo no se ha concluido, aunque luego parece que los encargados de la política educativa así lo creen.

Tomar esta ruta implica sacudirse la ideología de la innovación y luchar contra las posturas gubernamentales que concentran sus esfuerzos en la producción de reformas de papel y se niegan a instrumentar políticas vigorosas y pertinentes de formación y actualización de profesores. También a considerar y mejorar las condiciones institucionales en que se da la enseñanza. Son dos elementos sin los cuales le mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas es poco menos que imposible.

Referencias

Artigue, Michèle, “Problemas y desafíos en educación matemática: ¿qué nos ofrece hoy la didáctica para afrontarlos?”, *Educación Matemática*, vol. XVI, no. 3. diciembre de 2005, pp. 5 – 28.

Avila, Alicia (2006). *Transformaciones y costumbres en la matemática escolar*. México. Paidós. Col. Educador.

Avila, Alicia (dir), L.M. Aguayo, D. Eudave, J.L. Estrada, M. Saucedo, A. Hermosillo, J. Maldonado y E. Becerra (2004). *La reforma realizada: la resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas*. México. SEP/SEByN.

Block, David (Coord.) (1995). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para Maestros*, México, Secretaría de Educación Pública,

Block, David y José Antonio Moscoso (2005). “Adaptar para utilizar. Formas de apropiación de innovaciones curriculares en matemáticas por maestros de primaria”. *Memorias del VIII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. COMIE. México. 29 de octubre - 2 de noviembre de 2005.

Brousseau, Guy (2000). “Educación y didáctica de las matemáticas”. *Educación Matemática*. 12-1. México. Iberoamétrica. Pp. 5-38.

Chávez, Yolanda (en proceso). *Usos de Enciclomedia en la clase de matemáticas. Tesis de maestría en Desarrollo Educativo*. México. UPN.

Gutiérrez, Carmen (en proceso). *Procesos de reflexión de un grupo de docentes de de primaria asistentes a un curso de matemáticas para fortalecer el manejo de los libros de texto y Enciclomedia*. Tesis de maestría en Desarrollo Educativo. México. UPN.

Ibarra, Adrián (2007). *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria: experiencias de los profesores.* Documento no publicado. México. UPN.

(2006). *El español y las matemáticas en la educación primaria*. México. INEE.

Izquierdo, Gloria (2006). Representaciones de los profesores de primaria sobre las fracciones y su enseñanza. Tesis para obtener el grado de Maestra en Desarrollo Educativo. México. UPN.

(2004). Learning for tomorrow’s World: First results from PISA 2003. París Francia. OCDE.

Ratsimba-Rajohn, Harrison, (1977). *Étude didactique de l’introduction ostensive des objets mathématiques*. Memoria de Diplomado e Estudios a Profunidad en Didáctica de Matemáticas. Universidad de Burdeos I.

Robert, Aline y Jacqueline Robinet, *Representations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement*, Cahier de DIDIREM no. 1. Institut de Recherche en Enseignement des Mathématiques (IREM)-Universidad de París VII, 1989.

Secretaría de Educación Pública, *Libro para el maestro. Matemáticas cuarto grado,* México. Secretaría de Educación Pública, 1994.

Secretaría de Educación Pública, *Plan y programas de estudio. Educación básica primaria*, México, Secretaría de Educación Pública,1993.

La cronotopía, antes y después de la geometría

Carlos Eduardo Vasco Uribe[1]

Introducción

En la ciudad de Crotona, al sur de Italia, un legendario personaje venido del Asia Menor, después de conocer la agrimensura egipcia, establece una cofradía de maestros y aprendices de lo que entonces se empezó a llamar "ta mathematika", las cosas que había que aprender. Dentro de ellas, estaban, además de la astronomía y la música, la aritmética y la geometría, cuya traducción directa es precisamente "agri-mensura": la medida de los campos.

Podríamos decir que ese legendario personaje se propuso un primer programa para lo que hoy seguimos llamando "geometría": podríamos llamarlo "el Programa aritmo-geométrico de Pitágoras", o "Programa de Crotona", que pretendía estudiar los números figurados, triangulares, cuadrados, rectangulares, oblongos, pentagonales, piramidales, cúbicos y prismáticos, ligando así inextricablemente la aritmética y la geometría.

En la ciudad de Alejandría en el siglo IV antes de nuestra Era, un paciente lector de manuscritos de las distintas escuelas matemáticas griegas, la eleática, la milesia, la pitagórica y la ateniense, se propuso otro programa ambicioso: unificar todo lo conocido entonces sobre la geometría en un tratado que alcanzó a 13 libros, algunos de los cuales comenzaban con definiciones, axiomas o nociones comunes y postulados que permitieran reconstruir por deducción lógica todas las proposiciones aceptadas en su época. Podríamos llamarlo "el Programa de sistematización geométrica de Euclides", o "Programa de Alejandría". Este programa se cultivó sin competencia durante casi 20 siglos, y se sigue cultivando hoy día en forma renovada después de la reformulación de los axiomas de la geometría por Hilbert a finales del siglo XIX.

En el siglo XVII se dieron dos revoluciones en la geometría. La primera y más estudiada en Occidente fue la revolución que produjo Descartes con la correspondencia entre ecuaciones algebraicas y lugares geométricos en el plano, con lo que nació la geometría analítica. El propósito de realizar este ambicioso objetivo podría llamarse "el Programa de geometría analítica de Descartes" o "Programa de Leiden", por la ciudad en donde se publicó el apéndice geométrico al "Discurso del Método" en 1637.

Por la misma época ocurrió también otra revolución silenciosa, proveniente de la tradición no escrita de los constructores de catedrales y de los canteros y picapedreros franceses, la de la geometría proyectiva de Desargues, con su rico lenguaje botánico de árboles y ramas, sombras y puntos en el infinito. Esta propuesta, no comprendida en su tiempo, se podría llamar "el Programa de la geometría proyectiva de Desargues" o "Programa de Lyon". Este programa fue continuado por Pascal y, más tarde, ya a finales del siglo XVIII y comienzos del XIX, por Monge, Gergonne, Poncelet y Chasles en Francia y por Möbius, Plücker y Jakob Steiner en Alemania. Éstos serían los cuatro primeros programas para lo que se suele llamar "geometría". Pero hubo otros más.

Gauss y la geometría diferencial

---

1 Profesor de Educación Matemática en el Programa de Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad del Valle en Cali y de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas en Bogotá, Colombia.

Después de Descartes y Desargues, fueron los trabajos de Gauss sobre la geometría de las superficies los que produjeron la gran revolución geométrica de comienzos del siglo XIX. Las curvaturas de las superficies no dependían ya de su inmersión en el espacio tridimensional ambiente, sino de mediciones de longitudes de caminos por operaciones diferenciales intrínsecas a la superficie misma. La geometría diferencial nació en 1827, de una vez tan hermosa como la Venus de Botticelli, con el trabajo de Gauss sobre teoría general de las superficies ("Allgemeine Flächentheorie"). A este estilo de trabajo podríamos llamarlo "el Programa de Geometría Diferencial al estilo de Gauss" o "Programa de Göttingen", continuado por Bernhard Riemann, quien escribió para su habilitación en Göttingen tres conferencias, de las cuales Gauss escogió para presentación pública la que versaba sobre geometría. Así leyó Riemann en 1854 su conferencia: "Sobre las hipótesis que subyacen a la geometría", en la que preparó el camino para la futura teoría de la relatividad general de Einstein.

Las geometrías de Lobatchevsky-Bolyai-Gauss

Con el fracaso de Lagrange para demostrar el quinto postulado de Euclides a partir de los otros cuatro y las nociones comunes, con el fallido trabajo de Gerolamo Saccheri en Pavía, quien creyó haberlo logrado, y con las consideraciones de Lambert, la geometría estaba lista para que el genio de Gauss, la visión de Lobatchevsky y el paciente trabajo de Bolyai produjeran hacia el año 1820, independientemente y casi simultáneamente, una geometría en la que no sólo existiera una paralela a una recta dada por cada punto exterior a ella, sino que todas las rectas pertenecientes a un haz de rectas que pasaran por un punto exterior a otra recta dejaran de cortarla. En honor a Gerolamo Saccheri, por la ciudad de Pavía, en donde vivió y enseñó, podemos llamar a este estilo de trabajo geométrico más allá y aun en contra de los axiomas de Euclides "el Programa de Geometría No-Euclidiana" o "Programa de Pavía".

Hamilton

En esa misma época, el escocés William Rowan Hamilton reformuló la mecánica clásica de Newton, D'Alembert y Lagrange, considerando –además del tiempo y de las tres coordenadas usuales de posición– también los momentos como tres nuevas dimensiones. Creó así nuevos espacios, hoy llamados "espacios de fase", y nuevas maneras de trabajar sobre ellos. En 1843 inventó los cuaternios, el primer cuerpo no conmutativo, al ocurrírsele agregar una dimensión real a las triplas que representaban las tres dimensiones del espacio, anticipándose a las necesidades del pensamiento espacio-temporal de la relatividad einsteiniana. Este estilo de trabajo anticipó el espacio-tiempo de Minkowski y las reformulaciones cuaterniónicas de la mecánica cuántica. Podríamos llamarlo "el Programa de la geometría multidimensional de Hamilton" o "Programa de Dublín". En él sitúo el comienzo de lo que llamaré "la cronotopía".

Grassmann

Por el mismo tiempo, en 1844, Hermann Grassmann inventó una manera de codificar el espacio por medio de su teoría generalizada de la extensión, la "Ausdehnungslehre", demasiado avanzada para su tiempo. El sueño de Leibnitz de un lenguaje simbólico configurado por caracteres semejantes a los caracteres chinos, llamado por él "Characteristica Universalis", tuvo un primer intento de realización en la mencionada teoría de la extensión o "Ausdehnungslehre" de Grassmann. A este estilo de trabajo geométrico abstracto lo podemos llamar "el Programa de la extensión generalizada de Grassmann" o "Programa de Stettin".

La topología combinatoria

La extraña invariancia de la suma del número de las caras y de los vértices menos el número de aristas de los poliedros, notada por Descartes y Euler y que hoy llamamos característica de Euler-Poincaré, llevó a la búsqueda de otros invariantes, como los números de Betti, a las triangulaciones de las superficies y a toda topología combinatoria se convertiría con los trabajos de Poincaré y Brouwer, Spanier, Alexander, Eilenberg y MacLane, en la topología algebraica actual. Por el lugar de nacimiento de la teoría de los grafos con la solución de Euler al problema de los puentes de Königsberg, podemos llamar este estilo de hacer topología "el Programa topológico combinatorio" o "Programa de Königsberg".

El Programa de Erlangen

El más famoso de todos los programas de trabajo en geometría es el llamado "Programa de los grupos de transformaciones de Félix Klein" o "Programa de Erlangen". En 1872, Félix Klein propone como lección inaugural a su primera cátedra en la Universidad de Erlangen la conferencia "Observaciones comparativas sobre nuevas investigaciones geométricas", más conocida como "Programa de Erlangen".

En él utiliza la conceptualización de los grupos que con Sophus Lie había aprendido recientemente de Camille Jordan en París, y así logra elaborar una escala de geometrías que van desde la topología, como geometría correspondiente al grupo de las transformaciones continuas, a la proyectiva, la afín y la euclidiana, con subgrupos cada vez más limitados, como el de las proyectividades y el de las afinidades, hasta llegar al grupo de las homotecias y al de las transformaciones rígidas.

La teoría de la relatividad de Einstein

La utilización de múltiples herramientas de la geometría de Riemann, de las transformaciones, de las matrices y determinantes, de los vectores y tensores permitió a Einstein concretar en símbolos sus ideas revolucionarias sobre la conjunción del espacio y el tiempo en una variedad cuadridimensional. Minkowski y Reichenbach propusieron el tratamiento del espacio-tiempo con el tiempo como variable en una dimensión imaginaria ortogonal a las tres dimensiones del espacio. Yo prefiero utilizar los cuaternios como la mejor manera de tratar el espacio-tiempo, dejando el tiempo como variable real y las tres dimensiones del espacio como tres dimensiones imaginarias ortogonales entre sí y con la del tiempo. No deja de ser atractiva la asociación de ideas que despierte la consideración del tiempo como la dimensión real de los procesos, mientras que las tres dimensiones del espacio estarían más relacionadas con nuestra imaginación.

De la teoría de la relatividad surgieron nuevas geometrías, riemannianas y pseudo-riemannianas, reales y complejas, elípticas e hiperbólicas. Pero ello significó que el nombre mismo "geometría" se quedara ya corto para el tratamiento de esas nuevas construcciones mentales.

Los que prefieren las raíces griegas a las latinas han propuesto para el espacio-tiempo la palabra "cronotopo", para resaltar –con las raíces griegas "chronos" y "topos" unidas entre sí– la fusión del tiempo y el espacio en una nueva construcción mental.

Así como la etimología de la palabra "geometría" refiere al tratado de las mediciones de la Tierra (o de las tierras), o sea a la agrimensura, propongo que la cronotopía sea el tratado de los aspectos lógicos y métricos del cronotopo y sus extensiones.

El regreso de la intuición temporoespacial

Desde la didáctica de la geometría en las investigaciones en educación matemática, que querían devolver su lugar a la geometría en los programas escolares, se empezó a ver la dificultad de estudiar física, ingeniería y arquitectura en las universidades sin haber estudiado geometría en los colegios.

Un programa de matemáticas que se había reducido a la aritmética en los grados primero a séptimo; al álgebra en octavo y noveno: a la trigonometría, la geometría analítica y el cálculo en los grados décimo y undécimo, no preparaba para los estudios de tecnologías, ingenierías, arquitectura o diseño. Ni siquiera para la física, que se reducía a lo que un profesor de décimo grado llamó “una matemática rara”, en la cual se podían hacer aproximaciones, cancelaciones e hipótesis intolerables para el rigor del matemático puro.

Era tiempo de regresar a la intuición espacial y, por qué no, a la temporal. Mejor todavía, a la intuición temporoespacial, que con la visualización y la gestualización se va integrando más en la corporalización de que nos hablan Piaget, Papert, Lakoff y Núñez.

Del pensamiento espacial o tópico al pensamiento temporoespacial o cronotópico

En la renovación curricular del Ministerio de Educación Nacional de Colombia que se inició en 1976, la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá nombró como asesor para el área de matemáticas al matemático genovés Carlo Federici, radicado en Colombia desde 1948. Dos años después, la misma Universidad me nombró a mí para remplazarlo en esa asesoría, labor que continué hasta 1993. Como marco teórico para los programas de la renovación curricular propuse una reconceptualización de las matemáticas escolares desde el punto de vista de los sistemas.

Un sistema matemático tiene tres aspectos diferentes: sus universos de componentes o elementos, sus transformaciones u operaciones y sus relaciones o nexos entre los componentes. Los llamo el *sustrato* del sistema, la *dinámica* del sistema y la *estructura* del sistema.

En un artículo para la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales que escribí en 1991, extendí estas ideas a todos los sistemas matemáticos. En particular, definí un sistema geométrico minimal como un sistema con al menos dos universos diferentes y al menos cuatro relaciones de incidencia, una interna a cada universo y dos que conectaran los elementos de uno de ellos con los del otro. A pesar del nombre “sistema geométrico”, era claro que en ese tipo de sistemas minimales no había nada de métrico.

En Colombia no hay actualmente un programa oficial para las matemáticas escolares, sino unos lineamientos generales del área de matemáticas, que se refieren al desarrollo de cinco tipos de pensamiento diferentes, aunque por supuesto relacionados: el numérico, el espacial, el métrico, el variacional y el aleatorio o estocástico. Hoy propondría que se hablara del pensamiento temporoespacial, más bien que sólo del espacial.

Respecto al pensamiento temporal, recuerdo que el Dr. Carlo Federici ponía como ejercicio en sus cursos de fundamentos de matemáticas encontrar todas las relaciones posibles entre dos eventos en el tiempo. Tenemos que acudir a la espacialización de lo temporal para hacerlo, pero es muy informativo ver cuántas relaciones posibles hay entre sólo dos eventos que ocurren en un tiempo unidimensional.

A través de ese ejercicio se ejercita el pensamiento temporal y se distingue más fácilmente lo que parece una sutileza: el intervalo temporal vacío entre los instantes inicial y final de un evento o proceso y el intervalo lleno o lapso de tiempo que dura ese evento o proceso.

Hay que notar que la palabra “intervalo” ya trae implícito lo espacial, pues se refiere al valle entre montañas: “inter-vallum”; en lo espacial, la palabra “intervalo” tiene también la ambigüedad de referirse a veces a la distancia entre dos picos de esas montañas y a veces al valle que ocupa esa distancia, o al camino más o menos tortuoso que va de un pico a otro por el valle.

Estos ejercicios de pensamiento temporal hacen claramente diferentes distintos significados de la palabra “tiempo”: el tiempo como estructura general de los procesos; el tiempo como una magnitud más precisamente llamada “duración”, ya sea considerada como cantidad de duración sin medirla todavía, o como medida numérica de esa magnitud: la duración de los procesos y eventos; el tiempo como artificio de ubicación de los instantes, eventos y procesos a partir de mojones, relojes y números, y el tiempo como “intervalación” o para decirlo con otra espacialización implícita, la “distancia temporal” entre dos de esos mojones.

Así se nota que la palabra “ubicación temporal” encierra también una disonancia, pues en latín, “ubi” significa “en dónde”, espacialmente hablando, no “cuándo”. Se debería pues hablar de “cuandicación” en vez de “ubicación temporal”.

Después de la teoría de la relatividad no se debería separar más lo espacial de lo temporal, y habría que hablar de intervalos temporoespaciales, sin olvidar que un intervalo temporoespacial lleno congela los movimientos de los cuerpos en el espacio en ciertas especies de trayectorias, lombrices o gusanos cuadridimensionales que codifican lo que para nosotros es un movimiento.

Este pensamiento temporoespacial es incorporado, corporalizado, inscrito en nuestro ser corporal y en nuestra movilidad, en los sentidos exteroceptivos e interoceptivos, especialmente en el aparato coclear, que se ha llamado “el sentido vestibular”, el cual nos indica la dirección vertical con respecto al campo gravitacional local y nos alerta sobre los cambios de velocidad. Es importante notar que el sentido vestibular no indica la ubicación espacial, ni la velocidad, sino la aceleración. No es pues un sentido “crónico” ni “tópico”, sino claramente “cronotópico”.

En un nuevo programa para el futuro de lo que solemos llamar “geometría’, la primera propuesta es que el comienzo del trabajo privilegiado para la invención y la reflexión matemática debería ser siempre ese mundo corporalizado de la intuición temporoespacial, lo que completa el cuadro de la visualización con la gestualidad y la corporalización. En esa visualización-corporalización se ubica (y se cuandica) el chispazo de la conjetura, el crisol de la conceptualización, el artificio gráfico o gestual para la expresión y la discusión entre colegas, así como la satisfacción estética del problema resuelto.

Al quedar tan limitada la palabra “geometría”, que con su alusión a la Tierra y a la agrimensura deja por fuera lo temporal y limita demasiado lo espacial, es necesario introducir la palabra “cronotopía” y el adjetivo “cronotópico” para señalar, como lo insinuamos arriba, con la unión raíces griegas “chronos” y “topos” los aspectos temporales y espaciales en su unidad.

Lo *-lógico y lo *-métrico (la *-logía y la *-metría)

Ya he insinuado en el recuento histórico una tercera propuesta: tener en cuenta la distinción clave para lo que podría ser un nuevo programa para esa cronotopía que solemos llamar “geometría”. Se trata de la distinción entre los aspectos lógicos y los aspectos métricos de los modelos y teorías cronotópicos.

Los aspectos lógicos son anteriores a y necesarios para los aspectos métricos, pero los métricos no son necesarios para los lógicos. Más aún, el pasar demasiado pronto a los aspectos métricos puede y suele obstaculizar el desarrollo de los aspectos lógicos, de suyo más importantes.

Uno de los problemas con la palabra “geometría” es que incluye de una vez los aspectos lógicos y los métricos en el nombre de la disciplina, tal vez porque la palabra “geología” ya está reservada para las ciencias de la Tierra.

Volvamos al ejemplo del pensamiento temporal al estilo Federici. Una cosa es el trabajo de encontrar las relaciones temporales entre dos eventos, que sería analizar uno de los aspectos lógicos de la estructura del tiempo, o sea “su *-logía”, en este caso “la cronología”, y otra cosa sería tratar de metrizar la duración de uno de esos eventos o la intervalación entre el final de un evento y el comienzo de otro posterior, que sería analizar aspectos métricos de la estructura del tiempo, o sea “su *-metría”, este caso “la cronometría”.

En el pensamiento espacial, una cosa es el trabajo de producir, comparar, clasificar y analizar las propiedades de las líneas y de las figuras puntuales, lineales, regionales, espaciales y ojalá temporoespaciales, que sería analizar uno de los aspectos lógicos de la estructura del espacio, o sea "su *-logía", en este caso "la topología" en el nuevo sentido más amplio, y otra cosa sería tratar de metrizar la distancia entre dos de esos puntos o la longitud de una de esas líneas o el área de una de esas figuras regionales, etcétera, que sería analizar aspectos métricos de la estructura del espacio, o sea "su *-metría", en este caso "la topometría". La cronotopía se desdobla pues en la cronología y la cronometría por el lado temporal y en la topología y la topometría por el lado espacial. Tenemos pues la ecuación que me sirve como definición de la cronotopía:

Cronología + Topología + Cronometría + Topometría = Cronotopía

Lo *-lógico y las reducciones proposicional y conceptual

Proposiciones y conceptos vs. fórmulas y términos

La *-logía de la cronología y la topología en el sentido amplio en que la propongo no se refiere únicamente al estadio final de pulimento de una teoría con una axiomatización y un despliegue hipotético-deductivo, por importante que este estadio sea. La *-logía está ya desde la visualización y la corporalización de los modelos mentales e imaginados a partir de las experiencias diarias, desde la aprehensión que Raymond Duval llama "operatoria" de lo experimentado o imaginado.

Las primeras proposiciones matemáticas de Tales, Pitágoras y demás geómetras griegos antes de Euclides no pueden llamarse propiamente "teoremas", pues no se deducían de unos axiomas o postulados formulados explícitamente. Eran relaciones matemáticas, conjeturas plausibles derivadas de distintas formas de visualización, gestualización, dibujo o construcción mecánica. No se podía pues propiamente demostrarlas, sino mostrarlas con el dibujo y el gesto, el lenguaje y la deixis. Se podían explicar, relacionar con otras y a lo más se podría argumentar a favor o en contra con razones intuitivas, de autoridad, o con ejemplos e inducciones empíricas.

Paralelamente, los términos utilizados en esas proposiciones, relaciones o conjeturas no estaban definidos cuidadosamente, sino que se utilizaban tal como circulaban en los lenguajes de la construcción, la agricultura y la agrimensura, el comercio, el arte o la religión. La introducción de términos técnicos y las definiciones explícitas de los mismos tuvieron que venir mucho después.

En un nuevo programa para lo que ahora llamamos "geometría", ese juego de la *-logía del cronotopo se extendería de la definición de los términos a la de los predicados y los operadores, no sólo para llegar a los primitivos no definidos sino para llegar a las distintas posibles definiciones en discursos escritos explícitamente formulados y regulados por distintos tipos de sintaxis, de semántica y de pragmática.

Lo *-métrico y el regreso de las magnitudes y las cantidades

El éxito del programa analítico de Descartes para lo que se suele llamar "geometría" se debió principalmente a la posibilidad de cerrar un cálculo de segmentos por medio de la multiplicación y la división, las cuales producían otros segmentos. Esto permitió reducir todas las magnitudes absolutas y relativas unidimensionales a la longitud de un segmento de recta. Recuérdese que en Euclides la multiplicación de segmentos producía un rectángulo y que su división producía una razón, que no era ni rectángulo, ni segmento, ni siquiera número.

La física de los siglos siguientes siguió tratando separadamente las magnitudes y las cantidades de cada magnitud, pero en las matemáticas el éxito de la geometría analítica hizo que se distrajera la atención a las distintas magnitudes y al tratamiento de las cantidades de las mismas.

Sobrevivieron sólo las distancias y las longitudes, confundidas muchas veces, y las áreas y los volúmenes, confundidos con las cabidas y las capacidades y reducidos a productos de dos o tres longitudes.

Ya a comienzos del siglo XX Max Wertheimer investigó las nociones de área de los estudiantes de secundaria y media y encontró que no tenían dicha noción, sino que identificaban las áreas con ciertas fórmulas para calcular las áreas de triángulos, rectángulos y círculos. Cien años después podríamos encontrar exactamente la misma situación. Todavía hoy consideraríamos a un estudiante como geométricamente competente si se sabe esas tres fórmulas de áreas, si no confunde el área con el perímetro y si puede convertir metros cuadrados a centímetros cuadrados; lo consideraríamos un genio matemático en potencia si se sabe la fórmula del área de la esfera, si no confunde el área de una bola con su volumen, y si cae en la cuenta de que no se pueden convertir metros cuadrados a centímetros cúbicos.

En un futuro programa para la cronotopía volveríamos al estudio fino de las magnitudes y las cantidades que propuso incansable e infructuosamente el Dr. Carlo Federici durante 50 años. Empezaríamos por distinguir el objeto cronotópico de sus características metrizables; para cada una de ellas precisaríamos la magnitud apropiada, distinguiríamos entre la cantidad respectiva como objeto métrico todavía anumérico, o sea sin asignarle todavía un número como medida, y luego le asignaríamos las distintas medidas numéricas de esa cantidad según procedimientos y sistemas métricos diferentes, hasta llegar al número rotulado o “número con letrero” que nos enseñó Carlo Federici como distinto del número natural, pues se trataría de un operador sobre una cantidad unitaria.

Así, en las futuras cronometría y topometría se tratarán precisamente las magnitudes, sus cantidades anuméricas y sus medidas numéricas, las unidades como cantidades anuméricas a las que se les asignará el número 1 y no se confundirán los patrones de medida con las unidades; el patrón de medida es un artefacto físico que permita un procedimiento, mientras que la unidad es una cantidad construída mentalmente que no tiene materia ni forma. Por ejemplo, un centímetro cuadrado no es un cuadrito de un centímetro de lado; eso puede ser un patrón para medir áreas por yuxtaposición, pero no es una unidad. El centímetro cuadrado como unidad no tiene materialidad de papel ni de plástico ni tiene forma cuadrada. Una unidad de área (o de volumen) no tiene forma.

En mis talleres de topometría he utilizado como unidades el centímetro triangular y el centímetro circular, que se podrían realizar en patrones como triángulos equiláteros de un centímetro de lado o como círculos de un centímetro de radio. Pero las unidades respectivas no tienen forma circular, ni triangular ni cuadrada. Más aún, si se hace el ejercicio topométrico, resulta que la fórmula para el área de un triángulo equilátero de lado L resulta ser L^2 en centímetros triangulares, y la fórmula para el área de un círculo de radio R resulta ser R^2 en centímetros circulares. No es raro pues que el área de un cuadrado de lado L resulte ser L^2 en centímetros cuadrados.

Así podríamos extender nuestras exploraciones cronotópicas partiendo de tomar una dimensión espacial como longitud y la otra como duración, como se hace en física y en cálculo, cuando se cambia del plano cartesiano (x, y) al plano (t, x), que si lo miramos con cuidado, ya es cronotópico. Luego podemos avanzar con la imaginación tridimensional, tomando dos dimensiones como espaciales y la tercera como temporal, para poder asegurarnos en vaivén que las formulaciones del cronotopo o espacio-tiempo de 4 dimensiones siguen teniendo asidero imaginativo. Pero no sólo se trata de asegurar un punto de partida para la comprensión de las teorías que superan los modelos mentales cronotópicos, ni un refugio seguro para regresar periódicamente de los viajes hiperespaciales a los que nos lleva la teoría digitalizada. Se trata también de salvaguardar la fuente de las conjeturas intuitivas, de los “insights” o chispazos iniciales de los que parten las ideas peregrinas, las relaciones insólitas o las transformaciones descabelladas que podrán luego matematizarse en formas nuevas. Sólo así podremos crear también nuevas matemáticas y desarrollar las existentes por nuevos caminos.

La cronotopía en la física

La cronotopía relativista ya no puede llamarse “geometría”, pues desborda la Tierra y pretende abarcar todo el universo, incluída la dimensión temporal, desde el “Big Bang” hasta la muerte térmica del universo o el “Big Crunch”.

Conceptualmente hablando, la cronotopía permite concebir directamente las vecindades cronotópicas del aparato detector y el fenómeno detectado con dimensiones temporoespaciales suficientemente amplias para albergar espacialmente tanto al dispositivo como al fenómeno, y lo suficientemente duraderas temporalmente para permitir un acoplamiento metaestable que permita producir una lectura. Allí viven las relaciones de incertidumbre de Heisenberg.

Ese es el mundo cronotópico que vislumbró Einstein cuando imaginaba que viajaba montado en la parte delantera de una locomotora que iba acelerando más allá de la velocidad del sonido, cuando ya él dejaría de oír el silbato de la locomotora, hasta llegar a la velocidad de la luz. Allí se hizo la pregunta crucial que transformaría la física del siglo XX: ¿Qué pasaba con el chorro de luz que emitía el faro delantero de la locomotora?

La cronotopía en la educación y en la investigación matemática

En la educación matemática el programa para la cronotopía indica la necesidad de superar la enseñanza puramente aritmética de la educación primaria, en la que lo que llamamos “geometría” se reduce al reconocimiento de figuras, para iniciar desde el comienzo con la cronotopía sintónica con el cuerpo de niños y niñas, con la visualización y el cultivo de la imaginación temporoespacial y los juegos cronológicos y topológicos de las definiciones nocionales y la exploración de relaciones y transformaciones, y para avanzar en los juegos cronométricos y topométricos con las cantidades anuméricas de magnitudes diferentes hasta llegar a los números rotulados o con letrero.

Así se puede aprovechar la exploración libre y guiada, la generación y puesta a prueba de conjeturas y aun la invención o reinvención de conceptos y relaciones cronotópicas y cronológicas con la ayuda de los programas de computación electrónica.

En la secundaria se invertiría la relación entre el álgebra y lo que llamamos “geometría”, pues ahora serían las conjeturas y problemas de la cronotopía los que exigirían aprender o inventar notaciones que se compararían con el álgebra de las hojas electrónicas computacionales y con el álgebra usual del bachillerato, ya no como disciplina de las matemáticas conceptuales sino como una herramienta más para la expresión, la comunicación, la exploración y la puesta a prueba de las conjeturas originadas en la visualización-corporalización cronotópica y la solución de sus problemas lógicos y métricos. La argumentación a favor o en contra de las conjeturas, las demostraciones y los contraejemplos y la argumentación a favor o en contra de los argumentos dados remplazarían los procedimientos rígidos de tratamiento simbólico en el tablero o el cuaderno. Los ejercicios de álgebra se dejarían como entretenimiento para aprender a manejar los sistemas de tratamiento simbólico de fórmulas y no como objeto directo de enseñanza de procedimientos y algoritmos sin sentido. Más bien que seguir redactando y proponiendo problemas como ejercicios, los profesores y estudiantes produciríamos problemas como acertijos y desafíos intrínsecos a la cronotopía, o relacionados con las demás áreas curriculares dentro del trabajo por proyectos integrados de varias áreas.

En la educación media y posmedia, sea técnica, tecnológica, profesional o académica, la geometría analítica, la trigonometría y el cálculo dejarían de ser el filtro y la tortura para expulsar estudiantes del sistema educativo, para animarlos más bien a continuar el ciclo de explorar, conceptualizar, conjeturar, poner a prueba las conjeturas, argumentar a favor o en contra, producir, visualizar, corporalizar y comprobar soluciones a problemas cronotópicos relacionados con la producción, la profesión o la disciplina académica escogida.

En la investigación matemática no se procedería de manera diferente a la que se iniciaría desde la primaria, la secundaria, la media y la universitaria. Es el mismo ciclo que parte de la visualización-corporalización cronotópica, que sigue el proceso de exploración, conceptualización, generación y puesta a prueba de conjeturas, argumentación y comprobación y termina con la vuelta a la visualización-corporalización de las soluciones. La diferencia estaría en el rigor de la argumentación, en la densidad de la conceptualización y en el formalismo de la expresión. Pero si queremos crear matemáticas nuevas, no podemos esperar a comenzar a hacerlo en los posgrados, sino que tenemos que comenzar desde niños y volver a hacernos niños para iniciar y concluir esos ciclos de investigación matemática.

El futuro programa para la que se suele llamar "geometría" parte pues de achicarnos como niños para poder pasar por esa humilde puerta de entrada al universo de las ciencias, las artes y las matemáticas que es nuestra imaginación temporoespacial, corporalizada en nuestros nervios, músculos y huesos (o tal vez sólo en nuestro sistema nervioso central), para ejercitar el pensamiento cronotópico al comienzo de cualquier aventurado viaje matemático, y nos propone regresar repetidamente a ese lugar privilegiado después de todos y cada uno de los periplos teóricos más abstractos y refinados, para encontrar allí y la satisfacción profunda del "insight", ese súbito "chispazo" que nos da la intuición cronotópica de la coincidencia de un modelo con una teoría y para encontrar también allí la fuente de las nuevas conjeturas y el punto de partida para otro emocionante periplo matemático.

Nuestra puerta de entrada al universo es ciertamente pequeña: es un ínfimo gusanito cuadridimensional cuyo hipervolumen es, a lo más, el medio metro cúbico de nuestro cuerpo (y tal vez sólo la milésima de metro cúbico de nuestro cerebro) multiplicado por la breve duración de nuestra vida.

En una frase en la que resuena la voz del Premio Nobel colombiano, Gabriel García Márquez, este nuevo programa para lo que solemos llamar "geometría", o sea para la cronotopía, al que podríamos llamar "Programa de Bogotá", nos propone no desperdiciar ni una sola de las continuas oportunidades de vivir esa maravillosa experiencia del pensamiento cronotópico desde la cuna hasta la tumba.

Euler y el entrañable encanto del quehacer matemático

Carlos Sánchez Fernández
Universidad de La Habana

Aquellos que aseguran que las ciencias matemáticas no expresan nada de lo bello están en un error. Las supremas formas de belleza son el orden, la conmensurabilidad y la precisión.
Aristóteles. Metafísica XIII.

Palabras claves
Historia de la matemática, Euler, inteligibilidad matemática.

Introducción

En una de las conferencias plenarias del ICME 8 realizado en Sevilla, su Presidente el Profesor Miguel de Guzmán, declaraba (Guzmán, 1996):

> *Euler es el gran maestro de todos los matemáticos posteriores a través de su obra. Y no solamente por el contenido, sino también por razón de la forma y modos de transmitir. La obra de Euler es en general, una muestra en ejemplos de lo que un buen enseñante de matemáticas debe hacer...*

Ahora que en todo el mundo se recuerda el tricentenario del nacimiento de Leonard Euler es oportuno buscar algunos de estos ejemplos y aprender de ellos cómo mejorar nuestra actividad educativa. El estilo de pensamiento de Euler y su afán como activista del quehacer matemático nos parece muy conveniente para enfrentar los retos de la Educación Matemática actual. Entre ellos, quisiéramos compartir algunas ideas y enfrentar los siguientes:

* Crear una asociación mental favorable hacia las matemáticas.
* Enseñar a apreciar la belleza y el encanto del quehacer matemático.

Ésta es la cuestión central que nos proponemos compartir con los asistentes a nuestra charla. Pero como disponemos de poco tiempo, ilustraremos nuestras ideas con la presentación de sólo un caso de los más simples y atractivos en los comienzos del cálculo infinitesimal: *El Problema de Basilea*. Hemos utilizado fuentes originales como la *Introducción al Análisis de los Infinitos* recientemente editada en castellano (Euler, 2000) y otras referencias actualizadas como (Dunham, 200, 2007, Sánchez y Valdés, 2004) que el interesado puede utilizar como complementación.

En nuestra conferencia presentamos una aproximación al problema de la inteligibilidad matemática en un marco teórico que privilegia la sinergia entre lo histórico, lo lógico y lo didáctico (Sánchez y Valdés, 1999). En resumen, nuestra presentación del problema de Basilea pretende conmemorar el tricentenario del nacimiento de Euler y al mismo tiempo mostrar cómo el conocimiento de la historia del pensamiento matemático se puede aprovechar para favorecer la inteligibilidad matemática y desentrañar algunos de los encantos que posee la Matemática.

Contexto de la obra de Euler

Nació Euler en la ciudad de Basilea, famosa por haber recibido en su universidad y conservar los restos en su catedral, de uno de los más grandes humanistas del renacimiento, Erasmo de Rotterdam (1469-1536). Quizás fueran las ideas progresistas de Erasmo en su obra *Sobre el método de estudio* (1511) contra el escolasticismo racionalista y con su insistencia en despertar ante todo el interés de los alumnos por el saber y la reflexión, las que impregnaron las obras de Euler de un estilo tan sugestivo y claro. Pero sin dudas que quién influyó más en su inclinación por las matemáticas fue Johann Bernoulli quién, junto a sus hijos y sobrinos que también fueron sus discípulos, marcó la vida científica de Euler no solo en su periodo de formación en Basilea, sino también más tarde en su madurez científica, durante sus largas estancias en las Academias de Ciencias de San Petersburgo (1727-41; 1766-83) y Berlín (1741-66).

Johann Bernoulli, conocido como un orgulloso pendenciero, pero también como el mejor enterado de los avances matemáticos de la época, pronto reconoció el talento de Euler, lo guió por los vericuetos de las Ciencias Matemáticas, mantuvo con él una amplia correspondencia y siempre lo consideró su alumno más brillante. Para dar muestra de ello, refiramos tres calificativos que aparecen en tres cartas dirigidas a Euler en tres momentos diferentes de su vida:

* 1728: “sabio y talentoso joven”
* 1737: “célebre y agudo matemático”
* 1745: “Incomparable Leonhard Euler-líder de los matemáticos”

Realmente, en 1745 no existía mortal que pudiera compararse a Euler como matemático. Como se sabe, su vida estuvo consagrada a las Ciencias Matemáticas, entendiéndose con esto no sólo análisis, geometría, álgebra y teoría de números, las clásicas ramas de la llamada matemática pura, que constituyen el 58% de su obra, sino también mecánica y física que representa el 28%, astronomía el 11%, arquitectura y artillería el 2% y hasta música y filosofía con el 1%. Y este 1% es significativo, porque a lo largo de su extensa vida Euler produjo más de 800 publicaciones. Sus obras completas *Opera Omnia* ya ocupan más de 80 volúmenes y aún no se han concluido. Sin lugar a dudas es el matemático más prolífico de la Historia. Pero, con ser importante la cantidad de trabajos, el aprecio se debe más a la **originalidad, belleza y agudeza** de su obra que a su volumen.

A finales de 1988 en la revista internacional *The Mathematical Intelligencer* apareció una convocatoria para elegir las 10 fórmulas más bellas de las matemáticas de todos los tiempos. Dos años después en la revista aparecieron los resultados(Wells, 1990), no sorprendió a muchos que en la relación aparecieran 4 fórmulas de Euler entre los 5 primeros lugares:

1. **La relación exponencial**: $\boxed{e^{p i}+1=0}$, donde aparecen las 5 constantes matemáticas más populares 0, 1, p , e, i, y que sirvió para comprender como definir los logaritmos de los números negativos.

2. **La fórmula de los poliedros convexos**: $\boxed{L+V-A=2}$, que enlaza los tres elementos principales del poliedro, las caras (L), los vértices (V) y las aristas (A).

3. **La fórmula de densidad de los números primos**: $\boxed{\sum_p \frac{1}{p}=\infty}$, que sirvió no sólo para dar una demostración nueva y directa de la infinidad de los números primos, sino que fue la primera tentativa de relacionar la aritmética, estudio de las cantidades discretas, con el Análisis, estudio de las cantidades continuas. Después de este trabajo de Euler la distribución de los números

primos fue objeto de numerosas especulaciones antes de que otras hipótesis más precisas fueran formuladas.

5. **El problema de Basilea**: $\boxed{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{p^2}{6}}$.

Detengámonos brevemente en la historia de este famoso problema con el objetivo de ilustrar como se expresa el encanto del quehacer matemático en el estilo de Euler.

El problema de Basilea

El interés de asignar un valor a las sumas infinitas nació en la edad antigua, ligado a especulaciones filosóficas y al cálculo de magnitudes geométricas y físicas. Estudiar si las sumas convergen hacia un número o si existe un valor plausible asignable a la suma de infinitos sumandos, ha sido uno de los retos de cualquier matemático que se precie. Y encontrar el valor preciso hacia el que converge una suma infinita de cierta dificultad siempre ha aportado prestigio y reconocimiento a su descubridor.

En el siglo XVII ya se conocía que la serie armónica,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\ldots,$$

formada por los inversos de los números naturales no es convergente; sus sumas parciales crecen indefinidamente sin estar acotadas por ningún valor finito.

También se conocía la suma de algunas series con términos simples, pero cuyas sumas parciales crecían con un aparente capricho. Por ejemplo, en 1672 el prestigioso físico y matemático Christian Huygens le planteó al joven abogado y diplomático Gottfried Wilhelm Leibniz este reto:

Calcular la suma de la serie de los inversos de los números triangulares

$$S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\ldots$$

La respuesta de Leibniz, tras unos pocos días, fue original y reflejó una mente ingeniosa:

$$S=2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\ldots\right]$$

Escribió esas fracciones sumandos de esta otra forma:

$$\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2};\quad \frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};\quad \frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4};\quad \frac{1}{20}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$$

Sustituyendo en la serie obtuvo:

$$S=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots\right]$$

O lo que es lo mismo:

$$S = 2\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \ldots\right] = 2 \cdot 1 = 2$$

Si la suma de los inversos de los números triangulares constituyó un problema fácil para Leibniz, no ocurrió lo mismo con la suma de los inversos de los números cuadrados.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots$$

El problema le fue planteado a Leibniz por Oldenburg, secretario de la *Royal Society* en 1673 y Leibniz se esforzó por hallar la suma exacta, pero no lo consiguió.

Leibniz comunicó a sus corresponsales Jacob y Johann Bernoulli el problema, y les dijo que en apariencia debía tener una solución tan simple como la de los números triangulares inversos. Y así lo pensaron Jacob y Johann Bernoulli, pero pronto se dieron cuenta de que algo no marchaba bien.

No fue difícil para los hermanos demostrar por comparación que su suma estaba acotada superiormente por la suma de la serie de los inversos de los números triangulares, es decir por 2:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{9} < \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{16} < \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \ldots, \text{ para } n > 1.$$

Pero el resultado preciso de la suma se les negaba, hasta tal punto que lanzan públicamente este grito de socorro:

> *Grande será nuestra gratitud si alguien encuentra y nos comunica lo que hasta ahora ha escapado a nuestros esfuerzos.*

Desde entonces al problema se le conoce como *Problema de Basilea*.

En 1729 Euler recibió una carta de su amigo Christian Golbach donde le señala un método de aproximación que lo lleva a estimar el valor entre 1,64 y 1,66. Goldbach reta a Euler para que lo mejore. En el momento de recibir este desafío, Euler, que contaba solo 22 años de edad, se encontraba en la Academia de San Petersburgo enfrascado en varios problemas concretos de cosmografía y de mecánica. Sin embargo, no se olvidó del reto y dos años más tarde, hizo pública una asombrosa aproximación de 6 cifras decimales exactas: 1,643934, transformando habilidosamente la serie en otra de convergencia mucho más rápida: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^{k-1}} + (\ln 2)^2$. Este fue un primer paso: se familiarizó con el problema y lo transformó para que fuera conmensurable y más precisa la aproximación a su valor exacto.

Varios años más tarde, un día que leía con interés una de las obras de Newton, la genialidad de Euler se desbordó al encontrar la idea de que el desarrollo en serie de la función seno estaba relacionado con la solución exacta del problema. Lo ingenioso será utilizar el desarrollo del seno no solo como sumas sino también como producto de infinitos factores. Newton, precisamente en esta obra, utilizaba con mucha eficacia la relación entre los coeficientes de las potencias y las raíces de los polinomios. Esto mismo intentará Euler con la serie de los inversos de los cuadrados.

Partiendo del desarrollo del seno: $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$

Euler introduce la función: $P(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \ldots$

Utilizando el hecho de que los ceros de la función $P(x)$ se producen para los valores en que el numerador se anula (con excepción de $x=0$, donde $P(0)=1$), es decir, para todo

$x = n \cdot p$ donde $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3\ldots$.

Entonces factoriza como si $P(x)$ fuese un polinomio

$$P(x) = \left(1 - \frac{x}{p}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{-p}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2p}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{-2p}\right) \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{p^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4p^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9p^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{16p^2}\right) \ldots$$

Compara los términos de 2° grado en ambas expresiones:

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{p^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \ldots\right)$$

Y despejando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{p^2}{3!} = \frac{p^2}{6}$$

He encontrado ahora y contra todo pronóstico ***una expresión elegante*** *para la suma de la serie que depende de la cuadratura del círculo...*
He encontrado que seis veces la suma de esta serie es igual al cuadrado de la longitud de la circunferencia cuyo diámetro es 1.

Así le comunicaba Euler su extraordinario hallazgo a Daniel Bernoulli, el hijo de Johann, en una carta fechada en 1735 y lamentablemente perdida. Se observa la importancia que le da Euler al valor estético del resultado hallado.

Este resultado puede considerarse una segunda etapa en el quehacer de Euler ante el problema de Basilea. Tras un largo periodo de incubación, con el uso de la analogía, su habilidad en la manipulación con las funciones elementales y su capacidad para interrelacionar los diferentes campos del saber matemático, consiguió el resultado exacto.

Pero Euler no se detiene aquí y como es costumbre en su quehacer matemático va a seguir buscando otra forma de demostración más precisa y concisa, además de procurar la generalización y la profundización del resultado encontrado. Utilizando las mismas herramientas, entre 1740 y 1744, va a encontrar la suma de las series de los inversos de las potencias pares de los números naturales hasta el orden 26:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{26}} = \frac{1315862}{11094481976030578125} p^{26}}$$

Ahora que su heurística (¡sin calculadora!) lo ha llevado a tamaña hazaña está listo para incluir todos estos resultados en una obra más didáctica, que contiene además una nueva demostración usando el desarrollo en fracciones simples de la función cotangente en lugar del desarrollo en potencias de la función seno. Así en el capítulo X del tomo primero de la *Introducción al análisis de los infinitos* (Euler, 2000) publicado en 1748, en la proposición 168, Euler escribe una de las más llamativas páginas de la historia de las matemáticas:

> *Se hace patente así que de todas las series infinitas contenidas en la forma general*
>
> $$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\&c.,$$
>
> *que, cada vez que n fuere número par, se podrían expresar mediante la periferia del círculo* p *; en efecto, la suma de la serie mantendrá siempre una proporción racional con* p *.*

Pero el espíritu inquieto y perspicaz de Euler no podría sentirse satisfecho con este resultado. No tiene todavía una fórmula general concisa. Además, faltaban las sumas en el caso de n impar. Así, en 1750 publica otro artículo donde señala valores aproximados de las series armónicas de orden impar $2k+1$, para $k=1,2,\ldots,7$, pero sin llegar a una expresión concisa para ellas. Y en su famoso *Tratado de Cálculo Diferencial* de 1755, al fin consigue exponer una elegante fórmula que relaciona el valor de las series armónicas de orden par con los números racionales de Bernoulli B_k:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=(-1)^{k-1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}B_{2k}p^{\,2k}}$$

y entusiasmado lanza la conjetura sobre el caso impar:

$$\boxed{¿\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k+1}}=\frac{p}{q}p^{\,2k+1}?}$$

Los esfuerzos de Euler para probar la validez de esta conjetura fueron vanos. Pero puede servirle de consuelo que aún hoy, 252 años después, no se ha conseguido ni validar ni refutar su conjetura. Lo más que se ha conseguido ha sido probar la irracionalidad de algunos de los valores de la series impares. En efecto, el primer resultado digno de señalar se obtuvo en fecha tan cercana a nosotros como 1976, cuando el francés Roger Apéry probó la irracionalidad para $n=3$. En el año 2000 se consiguió demostrar que existen infinitos valores de n impar para los que la suma es irracional. El último resultado hasta ahora conocido es de 2002, cuando el ruso Vladimir Zudilin, un joven investigador de la Universidad Lomonosov de Moscú, con técnicas muy finas de la teoría analítica de los números, probó que al menos uno de los primeros valores para 2k+1 = $5,7,9,11$ es también irracional.

La conjetura de Euler sigue siendo un misterio que atrae a los más osados.

Epílogo

¿Qué nos enseña Euler y la historia del problema de Basilea?

Ante todo que el cacareado rigor lógico depende del tiempo, de la madurez de las ideas en el enfrentamiento de los problemas. Que no puede pretenderse enseñar cómo es el quehacer matemático a través de la exposición formal y dogmática de los resultados y sus demostraciones.

Por otra parte, y no menos importante, que la belleza del quehacer matemático no está en lo que apreciamos superficialmente, que uno de sus valores inestimables reside precisamente en la búsqueda perseverante *del orden, la conmensurabilidad y la precisión* en las profundidades del pensamiento.

Solo después de realizar ese maravilloso viaje a las entrañas históricas y epistemológicas del pensamiento matemático y comprender su mecanismo de desarrollo, cómo se hace y para qué nos sirve la matemática, entonces y solo entonces, nos convertimos en sus admiradores incondicionales y estamos en condiciones de convencer a otros de sus encantos intelectuales.

Estoy seguro que a muchos nos ha pasado que en los primeros encuentros con la música llamada "culta" la hemos sentido fría, austera, enigmática. Su belleza la hemos ido percibiendo poco a poco, pero cuando aprendemos a apreciarla nos seduce para siempre. En la pintura, la literatura, el cine y en todas las expresiones artísticas podemos encontrar ejemplos semejantes. Cuando logramos despertar nuestros sentimientos estéticos hacia la obra, entonces nos deja una huella imperecedera. Y ¿por qué no puede ser igual o parecido en la matemática?

Y ¿quién debe guiar al joven ávido de saber por el camino hacia la residencia de las bondades de la matemática? ¿quién debe sensibilizar a los aprendices para que aprecien la verdadera belleza de las fórmulas y teoremas matemáticos? Por supuesto que los profesores de matemáticas. Y ¿cualquier profesor es capaz de lograr esto? Nos parece evidente que para ser un tal profesor se necesita una formación especial y un íntimo deseo de trasmitir la auténtica belleza de la Matemática.

Uno de los primeros maestros criollos de Cuba expresó con firmeza que "*instruir puede cualquiera, educar solo quién sea un evangelio vivo*". En muchos trabajos de Educación Matemática de las últimas dos décadas encontramos concordancia con estas palabras del presbítero José Agustín Caballero (1762-1835). Recomendemos un artículo reciente que nos atrajo significativamente desde su título: *Why the professor must be a stimulating teacher* (Alsina, 2001). En este sintético artículo se critican varios mitos y prácticas que existen en la enseñanza de las matemáticas, en particular se desmitifica la tradición del *self-made-teacher* que se ha extendido sobre todo en el nivel universitario. No basta ser un buen investigador, para ser un buen profesor. No es suficiente tener talento para el pensamiento lógico, para ser un comunicador eficaz. Quién pretenda ser un buen profesor de matemáticas tiene que sentir los valores del quehacer matemático y poseer la voluntad de comunicarlos de forma clara y seductora.

Como dijera un matemático del siglo XX investigador y educador de muchas generaciones de científicos de primer nivel y que no escatimó tiempo, ni esfuerzo para divulgar las bondades de la matemática, Andrei Nikolayevich Kolmogórov (1903-1987):

> *De los profesores de matemática tanto en la escuela media como en la superior, se debe exigir no sólo un conocimiento profundo de su ciencia. Enseñar bien las matemáticas puede sólo aquel que la ame con pasión y la comprenda como una ciencia viva, en desarrollo.*

Para aprender la matemática como una ciencia viva hay que tomar en cuenta el recurso de la historia. No han sido pocos los pensadores que han señalado la importancia de la dialéctica entre lo lógico y lo histórico para lograr la mayor eficacia didáctica. Recordemos al menos, el influyente libro de Imre Lakatos (1982) donde como apéndice, en la edición española, aparece una atractiva discusión sobre el enfoque deductivista y el enfoque heurístico del que reproducimos un fragmento a continuación:

> *El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece, las sucesivas formulaciones tentativas del teorema a lo largo del procedimiento probatorio se condenan al olvido, mientras que el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada.*

Nuestra propuesta parte del principio elemental de que una nueva cuestión de estudio debe presentarse formalmente al educando solo cuando éste se encuentre suficientemente motivado. Y para aproximarnos a este nivel de motivación consideramos que la historia de la matemática debe ser nuestra guía principal. Véanse más detalles en Sánchez y Valdés (1999).

El nuevo paradigma de la enseñanza de la matemática tiene que considerar toda la experiencia anterior y discriminar aquello que no aporta, lo que esconde la esencia, lo que impide ver la belleza del quehacer matemático y dejar lo relevante, lo pertinente, lo que trasciende no sólo del punto de vista lógico o práctico, sino también del punto de vista estético. Entonces, y solo entonces, el profesor podrá convencer a sus alumnos para que se dediquen a la búsqueda de aquello que el sabio Aristóteles calificaba como las supremas formas de belleza: el orden, lo conmensurable y lo preciso. Tenemos que partir de la premisa que nadie esta obligado a seguir el complicado sendero de las matemáticas, ni tampoco de usarla en la solución de sus problemas. Nosotros con pasión debemos mostrar a todos, expertos y aprendices, matemáticos y no matemáticos, las bondades de las ciencias matemáticas y su lugar en la sociedad del conocimiento que se construye hoy. En definitiva, nuestro reto principal es lograr trasmitir el auténtico y entrañable encanto del quehacer matemático. Usemos el recurso de la historia y en particular, el ejemplo del quehacer de Euler para enfrentarlo con éxito.

Referencias

Alsina, C. (2001) *Why the professor must be a stimulating teacher*, en Derek Holton (ed.) The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study, pags. 3-12, Kluwer Acad. Publishers. Netherlands

Euler, Leonhard. (2000) *Introducción al análisis de los infinitos*. Editores A.J. Durán y F.J. Pérez. SAEM Thales. Sevilla

Dunham, William (2000) *Euler el maestro de todos los matemáticos*. Ed. NIVOLA. Madrid

Dunham, William (ed.) (2007) *The Genius of Euler: Reflection on his life and work*. Mathematical Association of America. Washington DC.

Guzmán, M. de (1996) *El papel del matemático en la educación matemática*, en Actas de ICME 8, Sevilla.

Lakatos, I. (1982) *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Alianza Editorial, Madrid.

Sánchez Fernández, C., Valdés Castro, C.(1999) *Por un enfoque histórico-problémico en la educación matemática*, Revista Ciencias Matemáticas. Vol.17, N.2, pp. 137-148.

Sánchez Fernández, C. y Valdés Castro, C.(2004) *De los Bernoulli a los Bourbaki*. *Una historia del arte y la ciencia del Cálculo*. Ed. NIVOLA Madrid.

Wells, D. (1990) *Are these the most beautiful?* Mathematical Intelligencer. Vol. 12, N 3, 37-41

Modelaje matemático: aspectos téoricos y prácticos

Nelson Hein, Dr.Eng.
Universiade Regional de Blumenau
Blumenau – Santa Catarina - Brasil
hein@furb.br

Resumen
El modelaje matemático, proceso en la obtención de modelos, como método de enseñanza ha mostrado que puede contribuir en el proceso de aprendizaje del alumno, especialmente por constituir un recurso, en forma similar que en el nivel elemental, para la investigación científica. La verificación sobre el interés, la motivación y el aprendizaje momentáneo de los conceptos matemáticos de parte de los alumnos, si bien son necesarios, no son suficientes para atender la evaluación tanto de la eficacia como de la eficiencia del método más allá de los límites provistos por la escuela. Si se espera que el modelaje matemático promueva el conocimiento peremne es preciso que la investigación sobrepase el nivel de verificación; en consecuencia, resulta necesario disponer de un mejor fundamento teórico de los diversos entes involucrados en este proceso, comenzando por la teoría de modelos. Por caso, comprender tanto los tipos de modelos existentes como el grado de complejidad de los mismos, permitirán enfrentarnos con más fuerza al proceso de enseñanza y consecuentemente, evaluar el aprendizaje mediante el modelaje. Conforme a esto, en este trabajo se presentan consideraciones sobre la teoría de modelos y fundamentos de modelaje, tales como conceptos, clasificación, sistemas, modelos de optimización y proceso de modelaje.

Palabras-Clave:
Modelos matemáticos, modelaje matemático, sistemas.

Principios del proceso de modelaje

Concepto intuitivo de modelo

El ser humano siempre quiso entender el planeta y el mundo real de su entorno; situación reflejada en las imposiciones sobre la supervivencia que así lo han determinado. Rodeada de elementos materiales, la primera necesidad de la humanidad fue conquistar el dominio de su medio ambiente. La seguridad contra predadores y fenómenos naturales, la búsqueda de la alimentación, la organización social de los núcleos humanos, etcétera, despertaron los primeros cuestionamientos. Cuando las necesidades aumentaron el nivel de complejidad, se incrementaron las carencias por perfeccionar el proceso de comprensión del mundo; tal situación fue conducida y aún conduce, la abstracción y la representación de los entes y sus propiedades, y también a todos los interferentes de esa universalidad. En la imposibilidad de lidiar directamente con la complejidad del mundo, el ser humano se ha mostrado cada vez más hábil en la creación de metáforas para la representación y la resolución de su relación con ese mismo mundo. Tal proceso de búsqueda de una visión bien estructurada de la *realidad* (esclarecimiento) resulta, en esencia, un fenómeno que se denomina *modelaje*.

El modelaje es el proceso involucrado en la elaboración de un modelo. El concepto "*modelo*" puede tener diversos significados, por caso: modelo como *vehículo para una visión bien estructurada de la realidad* o bien, con los debidos recaudos, como *representación de la realidad* (Black, 1962).

Todos nosotros, en general, en numerosas situaciones hemos lidiado con modelosen momentos en los que no teníamos la menor conciencia al respecto. Al explicar un tema a una persona mediante fotografías o gráficos, o cuando representamos planos o sólidos mediante ecuaciones matemáticas, tan sólo transmitimos e interpretamos una realidad plausible mediante metáforas de sustitución o *modelos.*

La Geometría Euclidiana es un modelo que satisface un conjunto de axiomas, o bien, un modelo de contexto axiomático. Similarmente, en esta línea se pueden identificar otros modelos que cubren distintos campos, yendo desde las Transformadas de Laplace y su *Mecánica Celeste* hasta la Teoría Cuántica y el *Átomo de Bohr*. Por supuesto que no existen exclusivamente modelos axiomáticos, el contexto epistemológico es un digno ejemplo de eso. Al enfrentarse con situaciones reales o bien, abordando lo imaginario, la mente de un humano opera con estructuras de "sustitución" como una forma de permitir el raciocinio, estructuras que genéricamente denominamos "modelos" (Boyer, 1974).

Los modelos para ser implementables precisan prescindir de pequeños detalles. En este abordaje está presente la importancia del equilibrio, pues simplificación *versus* validación es un concepto esencial. Los modelos se traducen en representaciones simplificadas de la realidad que preservan, en ciertas situaciones y enfoques, una adecuada equivalencia (Biembengut y Hein, 2003).

El poder de representatividad es la característica del modelo que resulta deseable, en tanto que la capacidad de simplificación le confiere factibilidad operacional. Existen varios criterios de la medida de adecuación o adherencia del modelo a la realidad representada. En muchos casos, la representatividad del modelo se puede perfeccionar en forma interactiva. El proceso de verificación de la representatividad se denomina *validación del modelo,* constituyendo una etapa indispensable en cualquier procedimiento científico (Bassanezi, 2002).

Desdoblamiento del concepto –tratamiento de la eficiencia

El concepto de modelo como representación sustituta de la realidad tiene alcance limitado; pero el aspecto de la eficiencia es fundamental. Para obtener modelos eficientes, se necesitan por lo menos tres habilidades: foco holístico, tratamiento ecléctico de la dimensión del análisis y traducción adecuada, a saber:

Foco holístico

Cuando estamos procurando resolver un problema, la mayoría de las veces, es significativa la preocupación centrada en la concatenación y el manejo de los múltiples impactos de la solución sobre otros contextos. Si la solución puede crear otros problemas que puedan, luego, anular la contribución de nuestro esfuerzo, el foco holístico es indispensable.

Tratamiento ecléctico de la dimensión del análisis

Los métodos de resolución a utilizar deben disponerse libremente. La Epistemología y la Axiología no deben considerarse como bases de modelaje dicotómicas, pero sí complementarias. Una construcción de modelos es el proceso que tiene dos faces: la faz que articula la teoría (hipotética-deductiva) y la faz que representa la validación de la deducción (inductiva) en la práctica.

Traducción adecuada

Un buen modelo requiere una conveniente traducción contextual. Una buena traducción contextual se puede expresar mediante un correcto isomorfismo entre el fenómeno y su modelo; seguidamente se ilustra el proceso de traducción, resaltando su aspecto simplificador y estructurador.

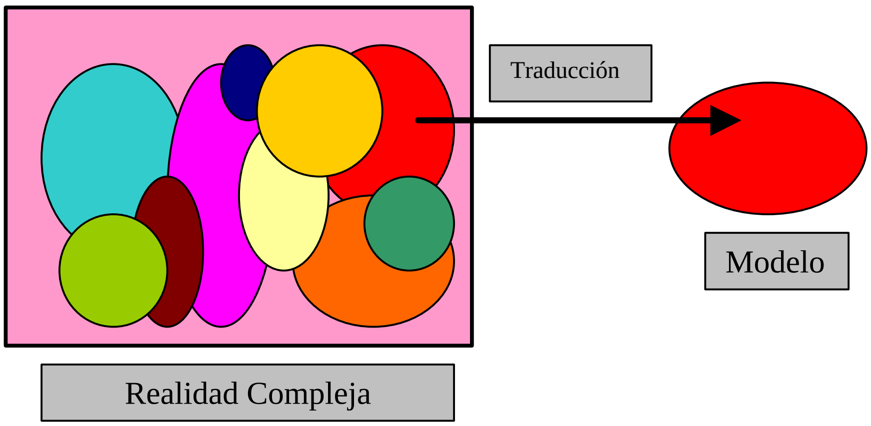


Figura 1 – Proceso de Traducción

Resulta claro que no es posible afirmar que todos los problemas son iguales. El proceso de traducción contextual debe ser capaz de identificar los elementos fundamentales de la cuestión y transportarlos para una representación capaz de ser manipulada por artifícios o métodos de resolución. Las dificultades de los procesos de traducción corresponden a naturalezas diferentes, pero, profundamente interferentes, por tanto, la traducción coopera con cierto abordaje de solución. En la medida en que la traducción produce una representación más o menos tratable por los métodos existentes, se define la usabilidad del modelo. El concepto que representa ese fenómeno de interferencia de la traducción en la posibilidad de solución se denomina *complejidad.*

Desdoblamiento del concepto –tratamiento de la complejidad

Para definir "complejidad" escogeremos la identificación de las propiedades que ocasionan e interfieren con el fenómeno; esta opción permite disponer de una visión bastante operacional sin perjudicar una posible profundización teórica. El primer aspecto a destacar en la constitución de la complejidad de un modelo es su "permeabilidad" al ambiente que lo circunda; un modelo simple tiene un perímetro de interferencia simple y bien definido. El segundo aspecto corresponde a su estructura interna; así, un modelo simple tiene estructura homogénea, morfología uniforme y número reducido de variables. El último aspecto engloba la dinámica, correspondiendo a la consideración de cómo se altera la estructura interna a lo largo del tiempo.

Analizando las tres dimensiones principales esbozadas previamente: Medio Ambiente, Dominio y Dinámica, postularemos que un modelo es simple cuando:

* presenta escasa influencia por las variaciones en su medio ambiente;

* es estructuralmente estable, homogéneo y tiene pocas variables; y
* tiene comportamiento fácilmente previsible.

Metamodelo sistémico

Concepto de sistema

La Ingeniería de Sistemas constituye un campo significativo de la contribución en el proceso de estructurar y sistematizar los esfuerzos del modelaje. Como quedó expresado anteriormente, el fenómeno de traducción para las entidades del mundo real es una actividad compleja y difícilmente, pasible de ser realizado en una sola etapa. El Metamodelo Sistémico[1] surge como una interesante propuesta en el sentido de auxiliar, en el más alto nivel, al proceso de traducción.

El concepto de *sistema* permite la configuración de útil pre-mapeamiento entre la realidad y el modelo de representación. Dentro del abordaje sistémico, modelar significa representar la realidad o los *sistemas originales* mediante otros *sistemas de sustitución*, estructurados y comparables, que se denominan modelos. Definimos *sistema* como cualquier unidad conceptual o física, compuesta de partes interrelacionadas, interactuantes e interdependientes.

Los sistemas son *componentes no atómicos* (considerando el punto de vista de la observación) de cierto universo. En general, tienen las siguientes propiedades, a saber:

* Simbiosis interna o propiedad de compartir funciones, que permite que cada parte sea indispensable dentro de la constitución del sistema;
* Simbiosis externa o propiedad de ser componente participante e indispensable (por lo menos en tesis) de un ecosistema social;
* Sinergia (efecto multiplicador), para que el sistema alcance un nivel de desempeño superior al correspondiente a sumar el desempeño de cada parte aislada;
* Homeostasis o capacidad de conservar su estado de equilíbrio; y
* Entropía negativa o capacidad de importar la energía necesaria de su ecosistema social para compensar la degradación entrópica natural y realizar auto-ajustes en dirección al equilíbrio organizacional en el medio ambiente (Hadlock, 1998).

Otro elemento fundamental en el concepto de *sistema* reside en la *concepción de la propiedad recursiva*. Las partes de un sistema pueden ser igualmente consideradas subsistemas con la misma naturaleza de propiedades previstas para el todo; la propiedad en cuestión permite una enorme flexibilidad en el razonamiento. Con esa herramienta, muchas situaciones complejas de la realidad, antes de un abordaje de gran dificultad, se pueden "organizar" conceptualmente con facilidad. En verdad, el abordaje sistémico facilitó bastante el proceso de representación de la realidad y consecuentemente, su mejor comprensión (Mariotti, 2000). Considerando estos conceptos, se puede llamar "modelo" a cada interpretación de un sistema formal creado axiomáticamente.

En el proceso de representación sustitutiva, hay numerosos factores a considerar. Ciertamente, es casi imposible tomar en cuenta todos los elementos intervinientes en un problema real. Como el objetivo básico del proceso es alcanzar una comprensión aceptable de la realidad, los modelos se deben formular para "*captar*" apenas los "elementos fundamentales" en el proceso de traducción, simplificando al máximo el método de resolución a utilizar (Biembengut & Hein, 2003).

---

[1] Empleamos el término metamodelo porque ese modelo es un importante abordaje que soporta la elaboración de otros modelos más específicos.

Los modelos presentan diversas ventajas, a más del hecho de simplificar la representación de un sistema determinado. Los modelos pueden revelar relaciones no aparentes, tanto como facilitar la experimentación (o el aprendizaje por ensayo y error controlado), situación que no es frecuentemente, viable en sistemas reales. Como la estructura del modelo no depende de los datos de operación o instancia, el análisis es altamente auxiliado. A fin de satisfacer los requisitos de *calidad*, los modelos cuantitativos de optimización exploran alternativas de máxima productividad y, en algunos de ellos, se determinan automáticamente valores de máxima competitividad.

Modelos de optimización

El contexto de los modelos de pptimización

Un modelo no es idéntico a la realidad, pero sí suficientemente similar o suficiente para que las conclusiones obtenidas mediante su análisis y/u operación, se puedan extender a la realidad; así, para formalizar tal modelo es indispensable definir:

* La estructura relacional del sistema representado;
* El comportamiento funcional de cada subsistema o componente atómico; y
* Los flujos interrelacionales.

Considerando que nuestro objetivo está centrado en la presentación de una propuesta de modelaje factible, procederemos a examinar las condiciones para ejecutar una buena traducción a la luz de la complejidad; a continuación, en la Figura 2 se sintetizan las tres dimensiones debatidas en el ítem que representan las posibilidades de aplicación práctica de abordaje sistémico (Bertalanffy, 1968; Suntherland, 1975).

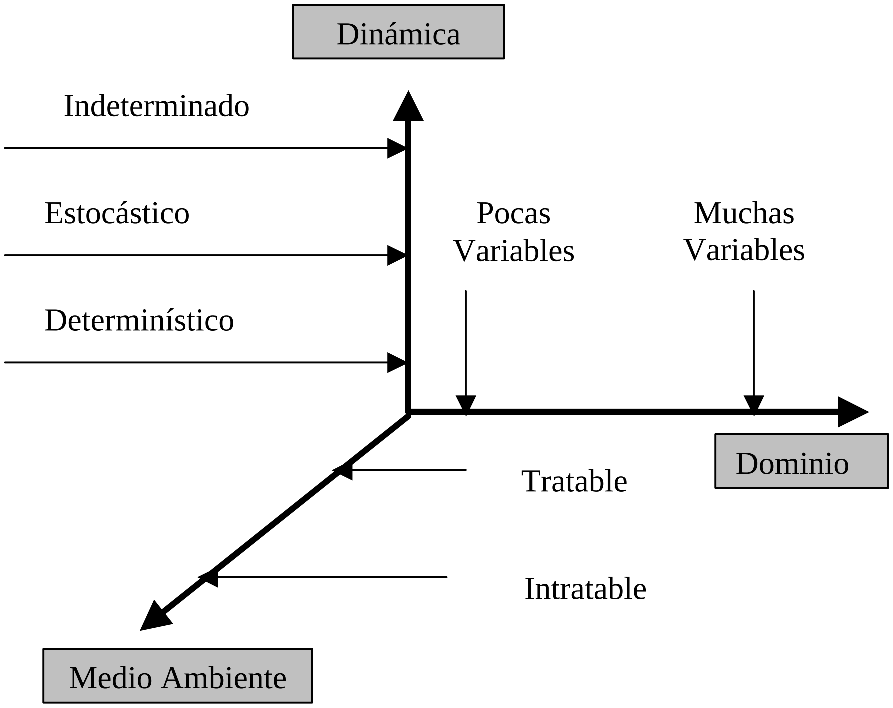


Figura 2 – Dimensiones de la Complejidad

El icono gráfico correspondiente a la Figura 2 se puede aplicar para el análisis de todo tipo de sistemas, incluso los socioeconómicos (que pueden representar tanto una sociedad como un país). Concentrándonos en el objetivo planteado al iniciar este trabajo, identificamos su área restringida en vista a la complejidad de traducción entre los dos planos, mediante la siguiente figura:

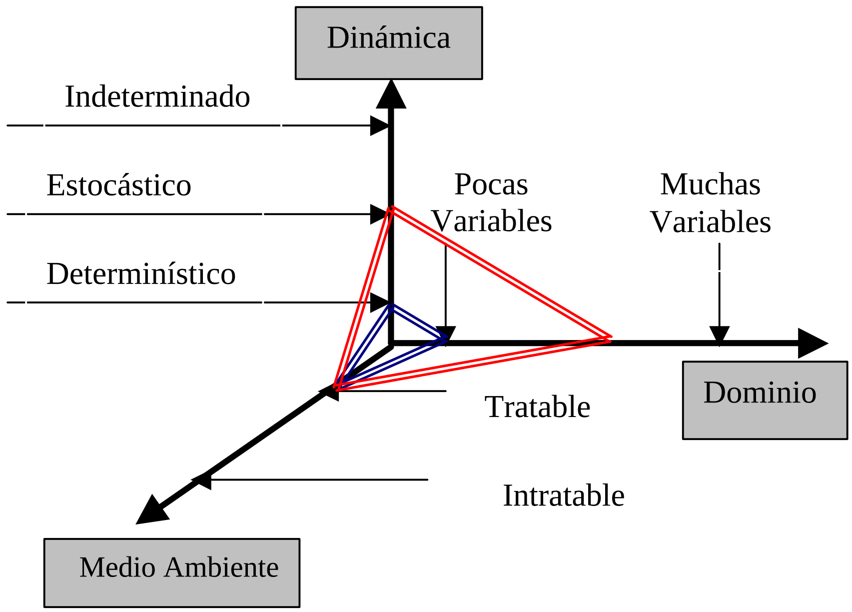


Figura 3 – Espacio Viable para Actuación en Modelos

El plano interior que define modelos determinísticos, tratables y de pequeño porte se denomina *Plano de Mecanismos*. La estructura relacional de los sistemas modelados se puede representar mediante diseños o símbolos, en tanto que el comportamiento funcional se puede representar mediante funciones de desempeño en las cuales las posibles entradas en los subsistemas se asocian a las salidas generadas por el mismo comportamiento.

De las mismas definiciones de modelo y objetivos, derivan las principales características de los modelos de optimización:

* referencia a la obtención de las *propiedades analíticas* del modelo;
* énfasis en una *mejoría medible* en el proceso. Aquí se involucran conceptos de optimización que hacen a las posibilidades del problema de disponer de más de una solución posible. Los modelos de optimización están regularmente amparados en variables cuantitativas bien definidas como el icono gráfico evidencia (Hein, 1999);
* se hace el *reconocimiento explícito* de las interacciones en el modelo y sobre el modelo mismo.

Ejemplo 1
Un *problema de optimización continua*, matemáticamente se puede formalizar así (Luenberger, 1984):
Minimizar f(x)

$$\textit{sujeta a:}\qquad \begin{cases} h_i(x) = 0, & I = 1,\dots, m_h, \\ g_j(x) \text{ £ } 0, & j = l ,\dots, m_g \\ x \text{ Î } \hat{A}^n & \end{cases}$$

Donde: $f\colon \Re^n \to \Re$, $h\colon \Re^n \to \Re$ y $g\colon \Re^n \to \Re$, son funciones continuas, generalmente diferenciables en problemas tratables de gran porte.

Ejemplo 2
Un *problema de optimización discreta* se puede entender como el deseo de obtener un conjunto $S^* \in F$ satisfaciendo:

$$C(S^*) \geq C(S),\ \text{"}S \in F \qquad \text{(problema de maximización)}$$
$$C(S^*) \leq C(S),\ \text{"}S \in F \qquad \text{(problema de minimización)}$$

Donde S corresponde a la Configuración del problema; S^* es la mejor dentro de todas las configuraciones conforme al criterio de optimización *C(S); F* es el espacio de las configuraciones y *C* es la función objetivo.

Si bien esta formalización es general, se volverá al modelo adoptando las nomenclaturas clásicas para las configuraciones *S* (o soluciones viables) y *F* (espacio de las soluciones viables).

Clasificación de modelos

Los modelos se pueden construir sobre diversas arquitecturas. Como existen muchos enfoques mediante los cuales se puede abordar el proceso de construcción de modelos, es posible distinguir varias clasificaciones, a saber:

Clasificación en cuanto a la naturaleza del modelo

Seguidamente se presenta un esquema para clasificar a los modelos considerando su naturaleza:

$$\textit{Modelos}\begin{cases} \textit{Concretos}\begin{cases} \textit{Físi}\cos \\ \textit{Geométri}\cos \end{cases} \\ \\ \textit{Abstractos}\begin{cases} \textit{Matemáti}\cos \\ \textit{Lógi}\cos \\ \textit{Esquemáti}\cos \end{cases} \end{cases}$$

Esquema 1 – Clasificación General de Modelos

Clasificación en cuanto a las propiedades de los modelos

Se puede abordar la clasificación de los modelos a partir de las propiedades que los mismos son capaces de representar; en relación a este aspecto, Ackoff y Sasieni (1971), destacan los grupos: modelos icónicos, modelos analógicos y modelos simbólicos.

En los *modelos icónicos* las propiedades relevantes de los objetos reales se representan como tales; en estos modelos una de las diferencias más significativas entre la realidad y el modelo, corresponde a la escala. Los modelos icónicos son *imágenes* de la realidad; ejemplos de estos modelos son las fotografías y los mapas. Los modelos icónicos son, en general, concretos y de manipulación experimental difícil.

Los *modelos analógicos* emplean un conjunto de propiedades inherentes al modelo para representar el conjunto de propiedades de la realidad; un ejemplo clásico de estos modelos es la sustitución de sistemas hidráulicos por eléctricos. Los grafos son modelos analógicos que utilizan grandezas geométricas y posiciones en el plano para representar diversas variables y sus relaciones, representando, en numerosas situaciones, *problemas de decisión.*

Los *modelos simbólicos* emplean letras, números y otros símbolos para representar las variables y sus relaciones. Frecuentemente, toman la forma de relaciones lógicas o matemáticas (ecuaciones). En general, todos los modelos y, especialmente, los modelos simbólicos se desarrollan en forma interactiva mediante aproximaciones. Los flujogramas y los Diagrama de Flujo de Datos (DFD) son típicos modelos simbólicos desarrollados, regularmente, en etapas de aproximación. Los modelos elaborados en las primeras fases del modelaje se denominan, en numerosas situaciones, *modelos conceptuales.* En estos modelos conceptuales, no extraña que las relaciones entre los elementos del sistema estén descriptas cualitativamente. Los Diagramas de Flujo de Datos y las Redes de Petri corresponden a ejemplos de modelos conceptuales. En optimización objetiva, cuando es posible, se realiza la construcción de modelos simbólicos pues permiten el tratamiento cuantitativo del sistema y también, de sus propiedades.

Clasificación en cuanto a las variables controladas

Otra distinción importante entre los modelos se puede efectuar a partir de la naturaleza de las variables involucradas. Existen modelos que presentan variables controlables, en tanto otros no. En general, los modelos con variables controlables son *explicativos* y los modelos con variables incontrolables son *descriptivos.*

Proceso de modelaje

Pasos para el modelaje

En forma bastante general, es posible resumir el *proceso de modelaje* o de construcción de modelos en la óptica operacional, conforme a los pasos sugeridos por el flujograma de la Figura 4.

La definición del problema corresponde a una de las fases más relevantes del proceso y comprende la clara percepción del desafío colocado. El problema se debe traducir en elementos palpables: Objetivos; Variables de decisión (o control) y Niveles de detalle.

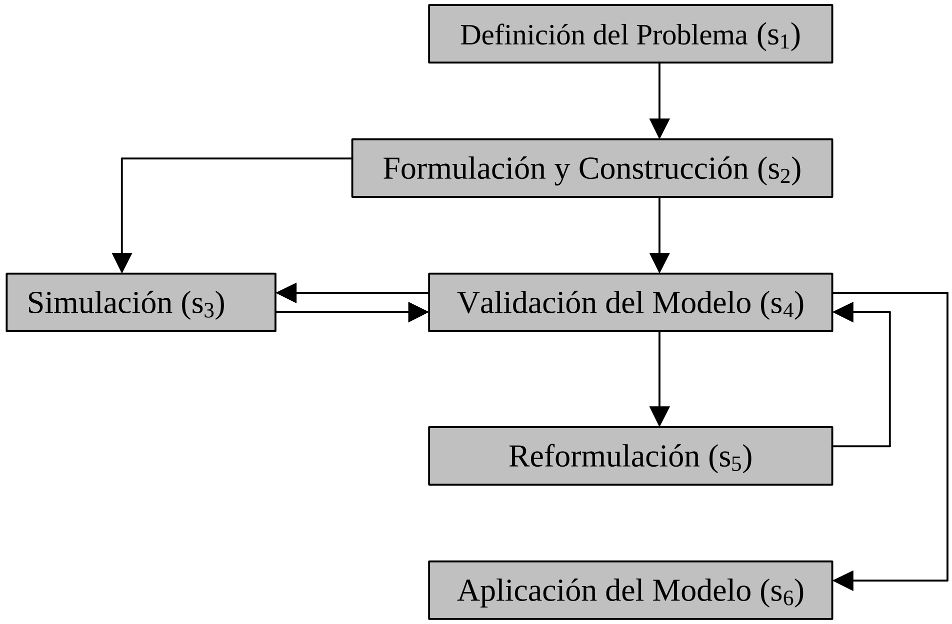


Figura 4 - Proceso de construcción de un modelo

Patrones para construir modelos de pptimización

A pesar de no considerar la técnica de construcción de modelos como "un tema artístico", difícilmente, sería posible reunir en un algoritmo específico y autocontenido todos los pasos indispensables para modelar un sistema genérico. Buscando el equilíbrio entre el arte y la técnica, podemos proponer una sistematización si no completa, por lo menos parcial de este proceso. Conforme a Ackoff y Sasieni (1971), pueden considerarse cinco patrones de construcción de modelos:

Patrón 1

cuando una estructura del sistema es suficientemente simple y evidente para ser comprendida por inspección. Aquí, el modelo puede ser construído con facilidad, hecho que no significa que no pueda ser muy difícil o bien imposible proceder a evaluar las variables no controladas y otros diversos parámetros. El número de variables controladas también puede tornar imposible la obtención de una solución práctica del problema. El patrón 1 de modelaje se aplica claramente a los sistemas pertenecientes al plano del mecanismo del icono gráfico de la Figura 3.

Patrón 2
cuando la estructura del sistema es relativamente aparente, una representación simbólica no es tan aparente. En tal situación, la búsqueda de un sistema análogo con estructura conocida es una buena opción. El sistema análogo podrá auxiliar a descubrir las propiedades del sistema en estudio.

La metodología de *Enfriamiento Simulado* se traduce en un buen ejemplo del Patrón 2, pues se investigan los máximos de una función compleja mediante una analogía con el proceso de recocido de ciertos materiales.

Patrón 3
cuando la estructura del sistema no es aparente, un análisis estadístico del mismo puede constituirse en un buen enfoque. Aquí, el sistema se considera como “una caja negra”, donde se conocen, con seguridad, las respuestas para determinados estímulos.

Patrón 4
cuando la estructura del sistema no es aparente y no es posible aislar los efectos de las diversas variables mediante un análisis estadístico. En este caso, un enfoque está centrado en el diseño experimental, con el propósito de determinar variables y correlaciones relevantes para reducir el caso al patrón 3.

Patrón 5
cuando verificamos las situaciones del patrón 4, pero las experimentaciones posibles sobre el modelo son limitadas para el fin deseado. En este esquema son significativos los modelos de conflictos y también de juegos de operaciones (Ackoff y Sasieni, 1971).

Una aplicación didáctica

Con el propósito de ilustrar la propuesta de modelaje expuesta precedentemente, se procede a presentar un simple modelo matemático destinado a la enseñanza, especifícamente en el contexto que se describe, que a su vez esta directamente vinculado a un tópico de optimización.

La situación planteada reside en intentar brindar una ayuda a un “lector de medidores” de agua y/o energía eléctrica, debido a que el mismo enfrenta diariamente los más variados tipos de situaciones, en cuanto a longitud de calles. Ejemplos de esta naturaleza abundan en las anchas avenidas de la Ciudad de San Pablo (Brasil), particulamente en la Avenida Paulista pero, también existen calles muy estrechas, como por caso, el famoso de la Calle 25 de Marzo, dentro de la misma ciudad. Consecuentemente, surge una pregunta: ¿Cómo el “lector de medidores” procede en estos casos? ¿Recorre totalmente un lado de la calle y después el otro lado o hace travesías regulares de un lado al otro lado de la calle?

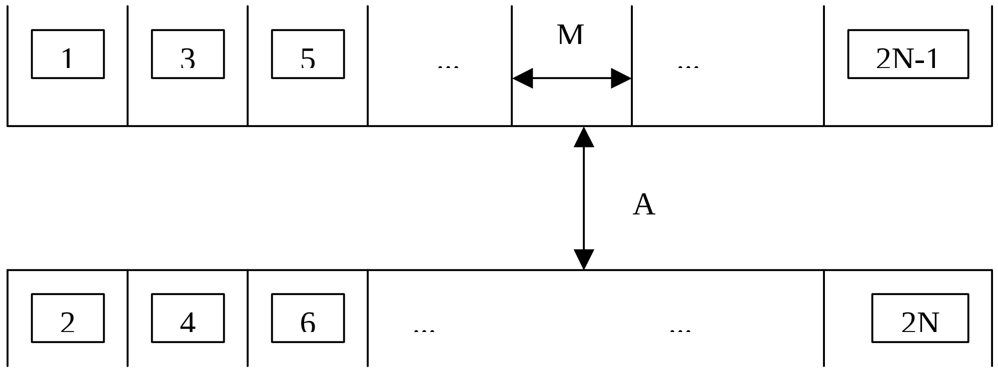
Las hipótesis vinculadas a esta pregunta, regularmente indican que si se trata de avenidas anchas el “lector de medidores” inicialmente recorra un lado y luego el otro lado, y cuando las calles sean estrechas realice travesías. Sin embargo, existe una pregunta adicional: ¿Cómo hace para elegir los criterios en cada situación?

Cuando se toma el concepto que apunta al “medio ambiente” del problema, evidentemente, se considerará un problema tratable; esto quiere decir que habrá un conjunto de hipótesis estructurales del problema que permitirán obtener una solución razonable. Así, por caso, las medidas de cada construcción ubicada sobre las aceras correspondientes a las calles serán idénticas; aunque si bien se conoce que en realidad esto no ocurre, pero si esta situación se respeta en forma absoluta, debería construirse un modelo para cada caso. Consecuentemente, la anchura de cada calle se tomará como fija, no existiendo, para nuestro modelo, variación alguna. Además de esto, una calle en cuestión tendrá salida, que no necesariamente deberá ser usada.

El dominio del problema contempla tres variables estructurales básicas, o sea: la anchura de la calle (A), la medida del frente de cada casa ubicada sobre la acera correspondiente a la calle (M) y el número de casas por calle (2N). Al problema en cuestión se lo puede clasificar como un problema con pocas variables homogéneas, hasta porque el número de casas es irrelevante, bajo la consideración que sea mayor que 2. Complementariamente se considerarán algunas otras variables, pero en carácter de apoyo.

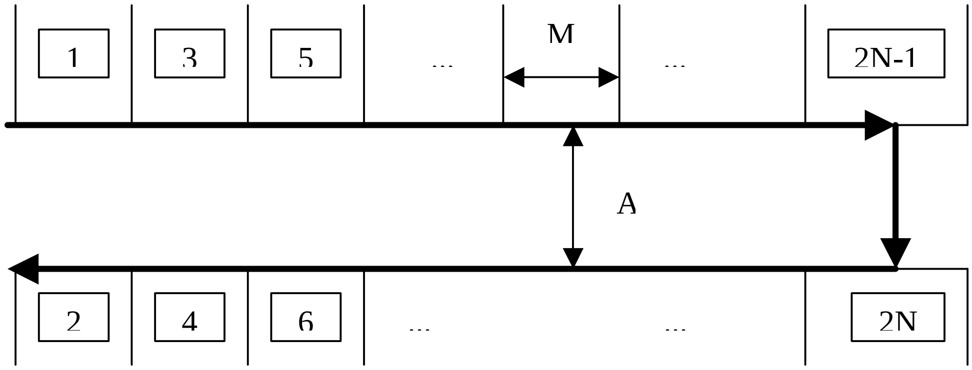
La dinámica del problema es de naturaleza determinística, en gran parte causada por las hipótesis de tratamiento del problema. No hay algo que justifique el uso de probabilidades en este problema; sin embargo, existe un punto curioso en cuanto a la indeterminación, que será explorada mejor y explicada con más detalle al llegar a la finalización del modelo.

La figura siguiente esboza la situación descripta previamente:

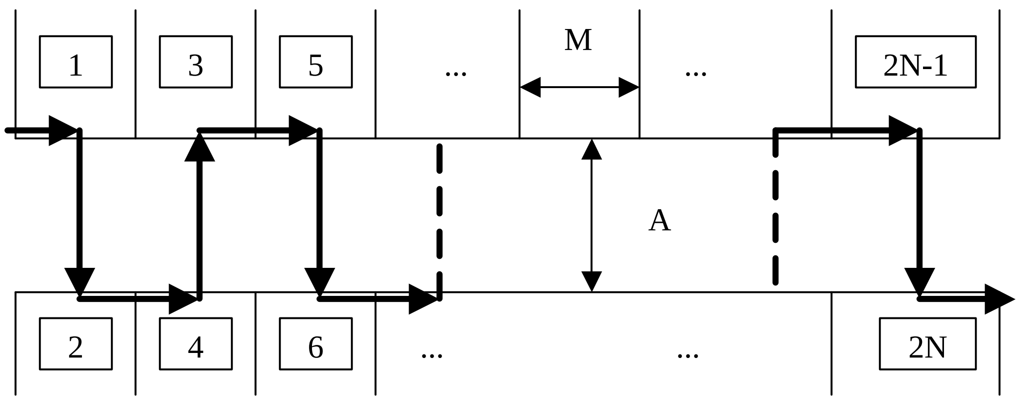


Las estrategias que se pueden aplicar son las siguientes:

I. Recorrer todo el lado de la calle, atravesar la calle en la última casa de la misma calle y regresar por el lado opuesto; consecuentemente, se describe el esquema:



II. Atravesar la calle cuando se ha completado la lectura en cada casa; el esquema que describe la estrategia sigue a continuación:



Matemáticamente se pueden probar ambas estrategias, particularmente una en relación a la otra:

Al efecto, designamos D_I a la distancia cuando se utiliza la estrategia I y D_{II} cuando se emplea la estrategia II, planteando la realización de la prueba, para N =2, en las condiciones que establecen:

$$D_I < D_{II}$$

A partir de los esquemas correspondientes al modelo particular se sabe que:

$$D_I = (2\,N\text{-}1)\,.\,M + A \quad y \quad D_{II} = N\,.\,A + N\,.\,M$$

Por lo tanto:

$$(2\,N\text{-}1)\,.\,M + A < N\,.\,A + N\,.\,M$$

$$2\,N\,.M - M + A < N\,.\,A + N\,.\,M$$

$$2\,N\,.\,M - N\,.\,M - M < N\,.\,A - A$$

$$N \,.\, M - M < N \,.\, A - A$$

$$M \,.\, (N-1) < (N-1) \,.\, A$$

$$M < A$$

Análogamente cuando $D_I > D_{II}$ resulta que $M > A$. El problema de la “indeterminación” pseudocorre en el instante en que $M = A$, o sea, en este caso cualquiera de las dos estrategias será óptima. Siendo así, no es posible clasificar al problema en cuestión como indeterminado, pero sí como de única solución, pues D_I y D_{II} son iguales.

Lo descripto previamente permite concluir que si la calle es ancha se debe recorrer en primer lugar un lado de la misma y luego, regresar por el otro lado; en tanto que si la calle es estrecha se debe atravesar la calle inmediatemente después de la última lectura. Si la anchura y el frente de las casas son iguales, cualquiera de las dos opciones es óptima. Pero, este modelo sugiere que existe movimiento de automóviles por las calles, hecho que no ocurre en calles muy estrechas. Hasta aquí la travesía era realizada en forma perpendicular a la calle a efectos de minimizar el riesgo de accidente por atropello; sin embargo, si este riesgo no existiera se podrá optar por “zigzaguear” entre una casa y otra, cabiendo preguntar: ¿Cuál será esta distancia?

La importancia de aplicaciones como la descripta anteriormente radica en la posibilidad de modificar las distintas variables intervinientes, parámetros y/o constantes y más generalmente los dominios (o contextos) aportando situaciones de similaridad que permitan enriquecer los enfoques de resolución de problemas de parte de los docentes en vistas a incrementar la formación de los aprendices, redundando en una mejor comprensión de situaciones con adecuadas interpretaciones contextuales de parte de los alumnos.

Conclusiones

El suceso del modelo depende de la adecuación de su traducción, o bien, de su “formulación”. El término propio “formular” empleado frecuentemente para expresar el proceso de construcción de modelos de optimización, trae consigo una carga *cuantitativa* y *matemática* de magnitud significativa. La adecuación pretendida depende, también, de los elementos que escapan al contenido estrictamente técnico, involucrando la percepción del constructor (o grupo de elaboración) del modelo, una facultad cognitiva de alto nivel. Las *fórmulas* (o *ecuaciones*) del modelo no existen como tales en la naturaleza, pues tienen que ser identificadas o creadas. El rigor de la traducción se obtiene mediante procesos poco rigurosos o conocidos, involucrando: intuición, experiencia, creatividad, poder de síntesis (Biembengut,1999).

Por ende, resultan dos consecuencias inmediatas para el desarrollo de modelos:

* La presencia de una enorme dificultad de modelar el *proceso de formulación*.
* La existencia de una marcada tendencia a considerar a la actividad de formulación de un modelo como *arte.*

El abordaje artístico del fenómeno de formulación tiene sus justificaciones, pudiendo traer en sí un malicioso elemento: desubicar el foco de desarrollo de las técnicas de modelaje para un contexto poco conocido y controlable. Si, por un lado, la construcción de un modelo es innegablemente una actividad de carácter subjetivo, pudiendo exigir características innatas del modelador, por otro lado, la mayoría de las veces, conjugar el verbo modelar implicará un esfuerzo de carácter absolutamente técnico. A pesar de lo genial y casi místico, en la mayoría de las situaciones reales, los factores predominantes de la elaboración serán conocimientos y habilidades, cuyo aprendizaje y desenvolvimiento estarán perfectamente al alcance de quien tenga interés en este tema.

En la fase de formulación del modelo deben definirse los tipos de variables a utilizar en la representación, así también como el nivel apropiado de agregación de tales variables. Además, en la formulación deben representarse las restricciones del problema, tanto cuantitativas como las restricciones de naturaleza lógica. El modelo deberá adecuarse a la naturaleza de los datos de entrada y de salida y, además, ser capaz de expresar las funciones de desempeño que posiblemente se exigirán durante el proceso. La formulación se completará estableciendo las hipótesis de representación que orientarán la elección y la posible utilización de modelos preexistentes y de técnicas de resolución (exactas, heurísticas, etcétera) para el caso planteado.

La construcción de modelos plantea la inclusión de parámetros y constantes que reflejarán la definición y dimensióna de las relaciones entre las variables del modelo (constantes de similaridad). En la fase de validación del modelo, corresponde comparar su comportamiento con la realidad y, si fuera necesario, actuar sobre tales elementos con el propósito de aproximar lo suficientemente posible el comportamiento del sistema modelo al del sistema real.

Referencias bibliográficas

ACKOFF, R. L., e SASIENI, M. W. *Pesquisa Operacional.* Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora, 1971.

BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégica.* São Paulo: Contexto, 2002.

BERTALANFFY, L. *General System Theory.* Nova Yorque: George Braziller, 1968.

BIEMBENGUT, Maria Salett, HEIN, Nelson. *Modelagem Matemática no Ensino.* 3 ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BIEMBENGUT, Maria Salett. *Modelagem Matemática & Implicações no Ensino-Aprendizagem de Matemática.* Blumenau: Editora FURB, 1999.

BLACK, Max. *Models and Metaphors: studies in language and philosophy.* New York: Cornell University Press, 1962.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

EMSHOFF, J. R. *A Computer Simulation Model of the Prisoner's Dilemma.* Behavioural Science, 1970.

HADLOCK, Charles R. *Mathematical Modeling in the Environment.* Washington: The Mathematical Association of America, 1998.

LOESCH, Cláudio, HEIN, Nelson. *Pesquisa Operacional: fundamentos e modelos.* Blumenau: Editora FURB, 1999.

LUENBERGER, D. G. *Linear and Nonlinear Programming.* Addison-Wesley, 1984.

MARIOTTI, Humberto. *As paixôes do Ego.* São Paulo: Palas Athena, 2000.

SUNTHERLAND, J. W. *Systems Analysis, Administration and Architecture.* Nova Iorque: Van Nostrand Reinhold Company, 1975.

La modelación matemática y su didáctica

J. Rigoberto Gabriel y Eloisa Benitez-Mariño
Universidad Veracruzana
jgabriel@uv.mx
elbenitez@uv.mx

Resumen
En este trabajo se presentan modelos matemáticos de optimización, en los cuales se destaca su relevancia y aplicación en varias ciencias. Se reflexiona sobre la importancia de trabajar con modelos matemáticos en los cursos de nivel superior y la de contextualizar la enseñanza de las matemáticas en relación con las licenciaturas.

Palabras clave
modelación, optimización, procesos, praxeología, APOE, nivel superior.

Introducción

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos es una gran problemática y representa un enorme reto para los investigadores en Matemática Educativa. En el nivel superior es una de las asignaturas con mayor índice de reprobación y en muchos casos genera deserción e incluso fracaso escolar. Sin embargo, los planes de estudios de varias licenciaturas e ingenierías consideran a las matemáticas como fundamentales en la formación de un profesionista.

Las materias de matemáticas que se cursan en el nivel superior son muy variadas, algunas de éstas son: Algebra y Trigonometría, Lógica y Conjuntos, Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Vectorial, Algebra Lineal, Geometría, Probabilidad y Estadística, Análisis Numérico, Ecuaciones Diferenciales, Investigación de Operaciones, Programación Lineal, Procesos Estocásticos, Matemáticas Financieras, etcétera.

En muchos casos estos cursos se imparten de una manera descontextualizada con la carrera que están cursando los estudiantes. En la mayoría de los casos, estos cursos son teóricos, pocas veces se hace énfasis en las aplicaciones y con escasa frecuencia se utiliza la tecnología. Algunos profesores imparten sus cursos de manera tradicional, escribiendo en el pizarrón los teoremas, demostrando algunos de ellos y resolviendo problemas, donde la manipulación simbólica es lo más importante.

Lo anterior genera un rechazo de los alumnos al estudio de las matemáticas, éstos utilizan como estrategia para aprobar los cursos, la memorización de los ejemplos que dio el profesor en clases. Algunas preguntas que los estudiantes tienen e incluso los egresados son: ¿Para que sirven las matemáticas? ¿Cómo se aplican las matemáticas en mi profesión? ¿Por qué es difícil aprender matemáticas? La respuesta a las anteriores preguntas requiere de una investigación exhaustiva, la cual nos conducirá al análisis de planes de estudio y de libros de texto, así como trabajar con profesores y estudiantes con la finalidad de detectar los problemas que se tiene actualmente en los cursos de matemáticas en el nivel superior y compararlos con los resultados de la investigación.

Se percibe a la modelación matemática como una fuerte base en los cursos de matemáticas en el nivel superior, donde el contenido matemático de dichos cursos debe ser congruente con los modelos matemáticos que se abordan. El uso de la tecnología, como calculadoras, computadores y software matemático (Cabri, Mathematica, Maple, Derive, MatLab y otros), ayuda a los estudiantes a visualizar e interpretar las soluciones de los modelos. Por lo anterior, pensamos que la modelación matemática es una alternativa viable para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en este nivel.

El interés de los estudiantes por la matemática aumenta conforme ven la relación que tiene ésta con la licenciatura o ingeniería que están cursando. La simulación presentada en una computadora de los fenómenos naturales, económicos y sociales, genera en los estudiantes un impacto positivo y la posibilidad de obtener información sobre dicho fenómeno.

Debemos reflexionar sobre la dificultad que representa hacer modelación matemática. Se requiere de un sólido conocimiento matemático y la habilidad para matematizar un fenómeno natural, económico o social, para después encontrar las soluciones del modelo matemático e interpretarlas correctamente, así como poder predecir el comportamiento del fenómeno e incluso controlarlo. Además se requiere tener la práctica de usar algún paquete matemático o la práctica de graficación que ayude en el manejo de los datos o para aproximar de manera numérica las soluciones.

Un proceso de modelación (analizado desde distintas perspectivas educativas y considerando que son procesos de estudio longitudinales y complejos) es un acumulado de praxeologías[1] integradas o artículadas y diferenciadas que nos permiten proponer un modelo matemático. Por lo anterior, el estudio de este proceso permite conocer más sobre las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Educación Matemática en Secundaria y la del Nivel Universitario (Bosch, García, Gascón, Ruiz; 2006).

Desde otra perspectiva la Teoría APOE (Acciones, Procesos, Objectos y Esquemas) de Ed Dubinsky (Tall, 1991; Dubinsky y McDonald, 2003), sugiere que un camino para que el estudiante adquiera un conocimiento matemático, es aquel que está integrado por una serie de diferentes acciones, las cuales nos conducen a procesos, que a su vez se realizan sobre objetos, con la finalidad de que el estudiante logre apropiarse de un esquema a través del cual logre un manejo adecuado y útil del concepto matemático. La teoría APOE se muestra como un marco teórico apropiado para describir cómo a través de la modelización matemática se puede observar la adquisición de un conocimiento matemático en los usuarios de la matemática, tanto como para analizar la capacidad para matematizar situaciones por parte de los estudiantes al analizar las estrategias empleadas para abordarlos.

Recientes estudios internacionales realizados en México nos alertan sobre la importancia de realizar investigación en esta área, entre ellos podemos mencionar “The First Results from the OCDE Program for Internacional Student Assessment PISA 2000: Knowledge and Skills for Life” and “The First Results from the PISA 2003: Learning for Tomorrow’s World”. Dada la importancia de abordar la problemática descrita anteriormente, estamos desarrollando una línea de investigación sobre “El impacto de los Modelos Matemáticos en la Formación Universitaria”.

Para el desarrollo de esta línea se consideran algunos estudios o líneas de investigación relacionadas con el tema. Asimismo, con la realización de un trabajo de investigación es ésta área conoceremos más acerca de los factores que influyen en el rendimiento escolar para contrastarlos con los que se conocen a través de resultados de investigación.

A continuación describimos brevemente algunos modelos matemáticos de optimización, junto con sus aplicaciones potenciales.

El problema del transporte

El departamento de transporte de una compañía tiene el problema de distribuir el producto de sus m plantas de producción a sus n almacenes, las producciones mensuales de las plantas son conocidas, al igual que los requerimientos de los almacenes, además se conoce el costo unitario de embarque de cada

[1] La Teoría Antropológica de los Didáctico: TAD, de Yves Chevallard (1985, 1990, 1999, 2001, 2002 y 2006) propone que toda actividad humana puede ser modelada mediante praxeologías (praxis + logos).

planta a cada almacén. El problema es determinar qué plantas deben abastecer a qué almacenes de manera que se minimicen los costos de transporte.

Representemos por x_{ij} el número de unidades de producto que se envían de la planta i al almacén j. El costo de transportar una unidad del producto de la planta i al almacén j lo denotaremos por c_{ij}. a_i es la cantidad del producto (oferta) que produce la planta i y b_j es la cantidad del producto (demanda) que requiere el almacén j.

Tabla 1

	Almacén *1*	Almacén *2*	…	Almacén *n*	Suministros
Planta *1*	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
Planta *2*	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
Planta *m*	c_{m1} x_{1m}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Requerimientos	b_1	b_2	…	b_n	

Si asumimos que la demanda es igual a la oferta entonces el Modelo Matemático que describe al problema del transporte es un problema de optimización de la siguiente forma:

Minimizar $$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a: $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \text{para} \quad 1 \le i \le m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \text{para} \quad 1 \le j \le n$$

$$x_{ij} \ge 0 \;\; \forall\; ij \quad con \quad 1 \le i \le m \quad 1 \le j \le n$$

El problema del transporte es un problema de programación lineal, el cual fue resuelto en la década de los cuarenta del siglo pasado. El modelo matemático requiere que el estudiante cuente con algunos conocimientos de economía. La solución de este problema es un método estándar conocido como el Método Simplex, en el cual solo requiere realizar operaciones aritméticas. El método de solución se vuelve complejo si el número de variables es grande. Por lo tanto se han desarrollado métodos de punto interior como alternativas cuando el número de variables es muy grande. Los paquetes matemáticos como Mathematica, Maple y MatLab cuentan con algoritmos para resolver problemas de programación lineal para un número muy grande de variables.

La parte teórica de la programación lineal requiere conocimientos y resolución de sistemas de ecuaciones. La teoría de dualidad en programación lineal suele ser muy complicada para los estudiantes. Por lo tanto, debemos reflexionar sobre cuál es la forma más adecuada de dar un curso de programación lineal.

Flujo en redes: caso estacionario

Una red dirigida (o una gráfica dirigida) N = [V, E] es un conjunto finito, no vacío de elementos llamados vértices y un conjunto E de pares ordenados de elementos distintos de V llamados lazos. Decimos E es una red con capacidad, si a cada lazo (v_i, v_j) en E, le corresponde un número real c_{ij} no negativo, el cual llamaremos la capacidad del lazo.

Un flujo en una red dirigida con capacidad, es una asignación de números reales x_{ij} a cada laso (v_i, v_j) en E, de manera que

$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}.$$

En la Figura 1 se presenta un ejemplo de una red dirigida con capacidad que cuenta con seis vértices y diez lazos. Observe que toda red tiene un vértice V_s al que llamamos fuente y un vértice V_d al que llamamos destino. Supongamos que la cantidad del fluido que entra en el vértice V_i es la misma cantidad que sale, es decir no se acumula fluido en los vértices. Tenemos que el Modelo Matemático que describe al flujo de redes par el caso estacionario es problema de optimización que tiene la siguiente forma:

$$\text{Minimizar} \qquad f = \sum_i x_{id}$$

$$\text{Sujeto a:} \qquad \sum_i x_{ij} - \sum_j x_{ji} = 0, \qquad \forall v_j \in V,\ j \neq s, d$$

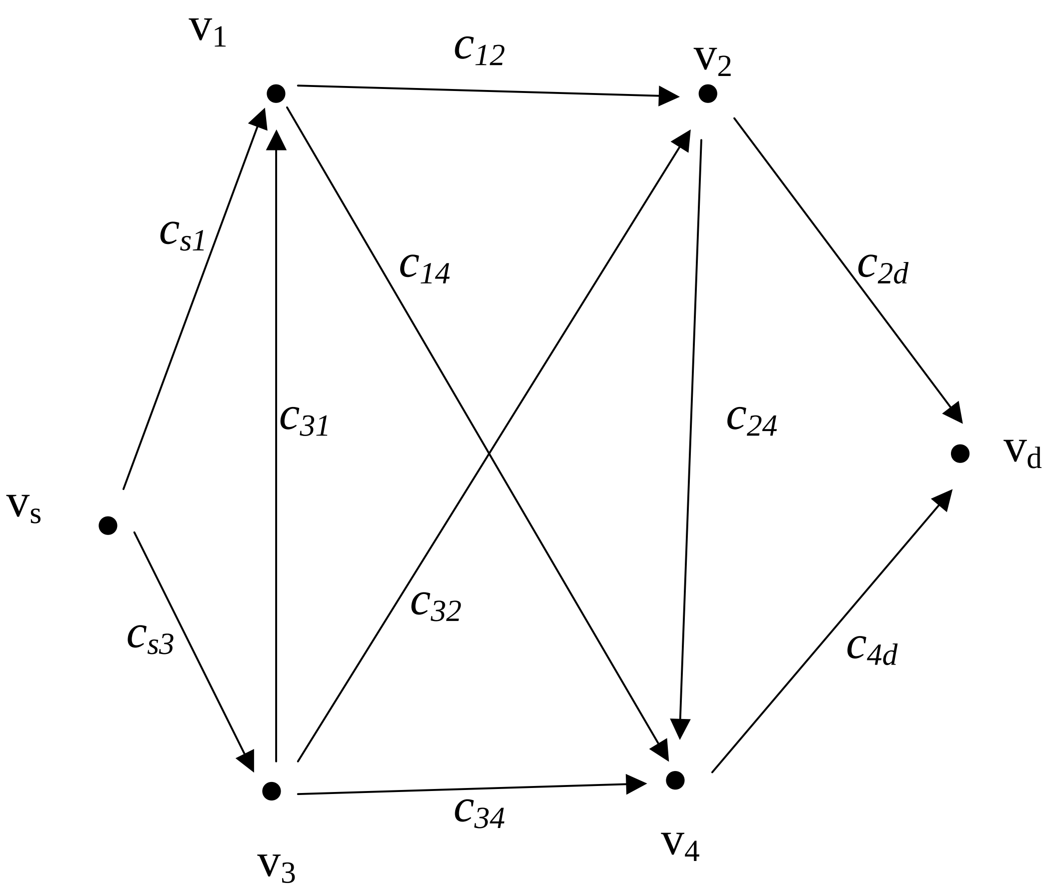
$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}, \forall i, j$$

Para dar una idea más clara de este problema, supongamos que tenemos una refinería, donde la Figura 1 representa una red de conducción para gas natural. La fuente donde se origina el gas está representado por V_s y el lugar de consumo es V_d. El problema consiste en encontrar el flujo x_{ij} en cada lazo (v_i, v_j), de manera que se maximice el flujo que llega a V_d.

El problema anterior puede ser estudiado mediante Programación Lineal y mediante Teoría de Gráficas. Existen otros problemas que se estudian mediante teoría de gráficas. Por ejemplo, si suponemos que un inversionista cuenta con una cierta cantidad. Los vértices de una gráfica representan distintos bancos en diversos países. Dichos bancos tiene distintas tasas de interés. Al pasar el dinero por un banco éste se incrementa por los intereses ganados. Se necesita encontrar una trayectoria en la red de manera que el vértice V_d , el flujo del dinero del inversionista, sea máximo.

Problemas de flujo en redes tienen aplicaciones en economía y en ingeniería. También se han desarrollado aplicaciones de la teoría de gráfica en redes sociales, donde los vértices representan a los actores políticos o sociales y los lazos nos dan relaciones (de amistad, poder, trafico de información, parentesco etcétera.) entre los actores. El interés en estos modelos es encontrar a los actores principales de la red, así como a los grupos de poder. En el caso de que la red tenga muchos vértices es necesario trabajar con software especializado para la visualización de la red y el tratamiento de la información.

Figura 1



Flujo en redes: caso continuo

En una red dirigida, el flujo a través de los lazos no necesariamente es constante, este puede variar con respecto al tiempo. Por ejemplo, consideremos un sistema de n reservaciones $R_1, R_2, \ldots, R_n$, ver Figura 2. El agua fluye de una fuente A_t (un río o una presa) a un tanque D_1. Denotemos por c_i con $1=i=n$ a la capacidad que tiene la reservación R_i. El agua fluye del tanque D_1 a cada reservación R_i a una razón de $r_i(t)$ con t en $[0,T]$. La demanda de agua d(t) es conocida y la razón máxima a la cual fluye el agua de reservación R_i al tanque de almacenamiento D_2 es f_i.

Si las reservaciones se llenan entonces el agua se regresa al tanque D_1. Sea $w_i(t)$ la razón de derramamiento del agua en R_i. Denotemos por $x_i(t)$ *a* la razón en la cual fluye el agua de la reservación R_i a D_2, en el tiempo t. Observe que $0 = x_i(t) = f_i$, para todo t en $[0,T]$, $i=1,2,\ldots,n$. Si suponemos que s_i es la cantidad de agua almacenada inicialmente en R_i entonces un problema de optimización para este sistema es:

Maximizar: $$\int_0^T [\sum_{i=1}^{n} x_i(t)]dt$$

Sujeto a: $$0 \le \int_0^t [r_i(t) - x_i(t) - w_i(t)]dt + s_i \le c_i$$

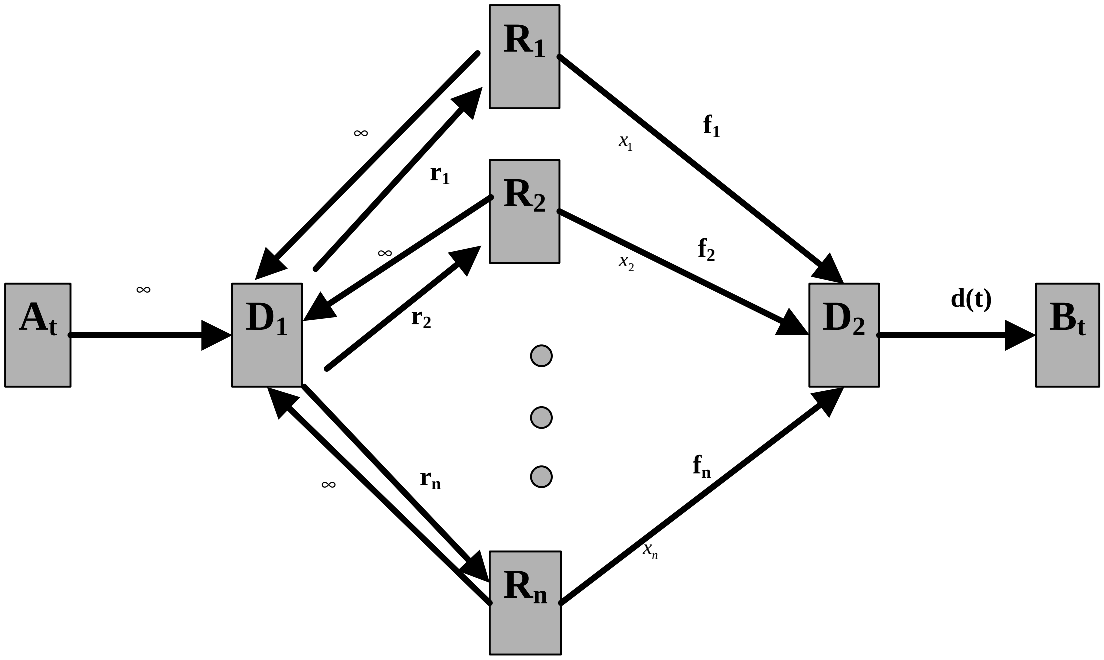
$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \le d_i(t)$$

$$0 \le x_i(t) \le f_i \quad con \quad 1 \le i \le n$$

En los ejemplos anteriores la solución de los problemas de optimización es un vector, es decir un elemento de R^m. En este caso la solución es una función y por lo tanto estamos optimizando en el espacio de las funciones continuas. Este modelo matemático es mucho más complicado y encontrar la solución sigue siendo un problema abierto. Existen algunos algoritmos que utilizan métodos numéricos para dar una aproximación a la solución, sin embargo sólo se aplican a casos particulares.

El flujo en redes para el caso continuo puede ser planteado como un problema de programación lineal infinita o también conocidos como optimización en espacios de dimensión infinita. Otros ejemplos que pertenecen a esta familia de programas son el problema de transferencias de masas de Monge-Kantorovich, el problema de capacidad general, los problemas semi-infinitos y problemas de control estocástico. Cabe hacer mención que los anteriores problemas tienen múltiples aplicaciones en diversas ciencias.

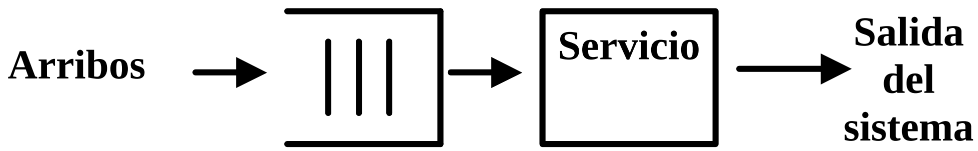
Figura 2



Un sistema de espera (colas)

En un sistema de espera o "cola" se tiene una unidad de servicio a la que llegan trabajos para ser procesados. Los trabajos (o clientes) llegan al sistema y se forman en una cola a esperar su turno de ser atendidos. Una vez que el trabajo es procesado, sale del sistema, ver Figura 3.

Figura 3



Este sistema se puede controlar de varias maneras. Por ejemplo en un problema de control de arribos el controlador estaría en la entrada del sistema para decidir si un trabajo que llega se admite o no. Por otra parte, en un problema de control de servicio el controlador ajustaría la "tasa de servicio" con la que se procesa cada trabajo.

Sea x_n es el número total de trabajos en el sistema al inicio de la n-ésima etapa. Denotamos por a_n a la acción de control que se toma en la n-ésima etapa; por ejemplo, si queremos controlar la cantidad de clientes que son atendidos por etapa, a_n representará tal cantidad. ξ_n representa el número de trabajos que llegan al sistema durante la n-ésima etapa.

En este caso, como la ξ_n es un variable aleatoria, es decir no podemos determinar cuántos trabajos llegarán en una etapa determinada entonces tenemos un problema de control estocástico, donde tenemos que el estado del sistema en el tiempo $n+1$ es

$$x_{n+1} = x_n - a_n + x_{n},$$

lo cual se interpreta de la siguiente manera: el número de trabajos x_{n+1} en la etapa $n+1$ es igual al número de trabajos x_n en la etapa n menos el número de trabajos atendidos, más el número de trabajos que llegan al sistema.

La solución de este problema consiste en encontrar los controles a_n en cada etapa del proceso. Estos problemas pueden ser estudiados con teoría de matrices. Sin embargo, la complejidad puede ser muy grande y se requieren matemáticas muy avanzadas. En el área de los procesos estocásticos existen muchos problemas abiertos.

Comentarios finales

La matematización de fenómenos naturales, económicos y sociales consta de varias etapas. Primero necesitamos familiarizarnos con el fenómeno y la terminología que éste utiliza. Los conocimientos matemáticos mínimos que serán utilizados tanto para modelar el fenómeno como para encontrar las soluciones de dicho modelo es la parte fundamental en el proceso de matematización. Se tiene la hipótesis que entre mas conocimiento matemático tenga un estudiante mejor será su desempeño en su profesión. Sin embargo el no tener contacto con la aplicación de las matemáticas o trabajar con ejemplos muy simples, genera un desconocimiento en el estudiante de cómo modelar situaciones reales.

Los retos en esta línea de investigación son enormes debido a que la modelación matemática no es un tema sencillo. Mas aún no podemos afirmar que el introducir la modelación matemática como herramienta de articulación de los cursos de matemáticas nos dará mejores resultados. Sin embargo, la experiencia nos indica que en los cursos donde se hace énfasis a las aplicaciones de las matemáticas, los estudiantes muestran más interés en las matemáticas e incluso quedan sorprendidos al ver el potencial que tienen las matemáticas en muchas áreas de las ciencias.

Referencias

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. Vol X, No. 2. (Versión original en Inglés publicada en 2003, en D. Holton et.al (Ed.), The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study, Kluwer Academic Publishers).

Anderson, E.J. y Nash, P. (1987). *Linear Programming in Infinite-Dimensional Space. Theory and appications.* New York, USA: Jhon Wiley & sons.

Bazaraa, M.S. y Jarvis, J.J. (1993). *Programación Lineal y Flujo en Redes.* México: Limusa.

Bosch,M.,García,F.J., Gascón,J., Ruiz, L. (Agosto,2006). "La Modelización Matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar", *Educación Matemática*, vol. 18, núm.2, pp.37-74.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Argentina: Aique grupo Editor S. A.

Hernández-Lerma, O. y Lassere, J.B. (1996). *Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria:* New York, USA: Springer-Verlag.

Martínez, E., Mejia, J. y Tapia, H. (1982). *Elementos de la programación Lineal*. México: CINVESTAV.

Dificultades en el aprendizaje de la matemática

Luis Roberto Moreno Chandler
Departamento de Matemática, Universidad de Panamá - CAIDDAM – Panamá1
luisro25@hotmail.com

Resumen
Las dificultades en el aprendizaje de la matemática constituyen una nueva y pujante línea de investigación en matemática educativa que aporta información significativa en torno al origen, efectos y alternativas para la intervención educativa; y en general respuestas a la problemática global de la enseñanza aprendizaje de la matemática en todos los niveles. Este escrito contiene una exposición breve de cinco taxonomías relativas a los factores de las dificultades en el aprendizaje de la matemática.

Introducción
Los resultados obtenidos en el aprendizaje de la matemática y las dificultades que experimentan los docentes y estudiantes en el proceso enseñanza aprendizaje constituyen un fenómeno alarmante para la comunidad educativa, constituida por estudiantes, padres de familia, docentes, administradores de la educación y la comunidad en general; razón por la que se ha originado la búsqueda de explicaciones a dicho fenómeno.

Se han identificado variados factores que dan origen a las dificultades en el aprendizaje de la matemática entre los que podemos mencionar: la aptitud negativa generalizada de la población hacia la matemática, la enseñanza inadecuada, carencia de materiales y recursos didácticos para el proceso enseñanza aprendizaje de la matemática y la formación didáctico- metodológica insuficiente de los docentes entre otros.

Las dificultades en el aprendizaje de la matemática es un tema cuyo estudio a sido postergado por los matemáticos educativos, psicólogos escolares, neurólogos, docentes de educación especial y por los sistemas educativos, al destinar pocos recursos para la investigación y acción pedagógica.

Constituye un deber impostergable que un grupo de docentes-investigadores en matemática educativa siente las bases para el estudio científico y organizado del tema a fin de propiciar el logro de los objetivos de la matemática en la enseñanza y la proyección social de la educación matemática.

En la actualidad las dificultades en el aprendizaje de la matemática constituyen un objeto de preocupación especial e intensiva, con un aumento del interés por parte de los investigadores, estudiosos, profesores y maestros que han de hacer frente a las dificultades y los problemas crecientes a medida que progresan los estudiantes en los niveles educativos de una ciencia considerada tradicionalmente como compleja y difícil.

[1] Comité de Atención e Investigación en Didáctica y Diferencias en el Aprendizaje de la Matemática - Panamá.

Mancera, E. y Pérez, C. Historia y Prospectiva de la Educación Matemática. Memorias de la XII CIAEM, pp. 205-215.

1. Objetivos de la matemática en la enseñanza

En el informe Cockroft (1985) se señalan algunos de los objetivos que sintetizan las tareas del docente de matemática:

1.1. Posibilitar que cada alumno desarrolle, dentro de sus capacidades, la comprensión y destrezas matemáticas exigidas para la vida adulta, para el trabajo y posteriores estudios y aprendizajes, teniendo siempre presente las diferencias o dificultades que algunas alumnas y algunos alumnos experimentarán para lograr una comprensión apropiada.

1.2. Proporcionar a cada estudiante la matemática que pueda necesitar para estudiar otras asignaturas.

1.3. Ayudar a cada alumno a desarrollar el gusto por la matemática misma y la conciencia del papel que ha jugado y seguirá jugando en el desarrollo, tanto de la ciencia y la tecnología, como de nuestra civilización.

1.4. Y, sobre todo, hacer consciente a cada alumno de que la matemática le proporciona un poderoso medio de comunicación y de ayuda para explorar, crear y acomodarse en las nuevas condiciones y crear nuevos conocimientos para la vida.

2. Proyección social de la educación matemática

Estos objetivos se complementan con la proyección social que conlleva la educación matemática y que Putman (1990) concreta en cuatro objetivos sociales:

2.1. Personas que sepan leer y escribir matemáticamente, ya que las demandas tecnológicas de la sociedad requieren cada vez más habilidades y comprensión de las mismas, así como la resolución de problemas complejos.

2.2. Aprendizaje para toda la vida, ya que cada vez es más frecuente cambiar de trabajo y la habilidad para resolución de problemas ayudará para explorar, crear, acomodar a las nuevas condiciones y crear nuevos conocimientos para la vida.

2.3. Oportunidad para todos, ya que la matemática ha llegado a ser un filtro para trabajar y para la participación en nuestra sociedad.

2.4. Y por último, ciudadanos informados, ya que el incremento de la complejidad y de las aportaciones de la técnica hace que la participación de los ciudadanos requiera de ciertos conocimientos para interpretar determinadas informaciones.

3. Conceptos fundamentales

Para iniciar el estudio de las dificultades en el aprendizaje de la matemática es importante tener una buena aproximación de los siguientes conceptos: aprendizaje, problemas de aprendizaje específico, educación especial, dificultades de aprendizaje, necesidades educativas especiales y adecuaciones curriculares. A continuación presentamos información básica para iniciar la elaboración de dichos conceptos.

3.1. Aprendizaje: En el contexto más amplio el aprendizaje siempre ocurre cuando la experiencia causa un cambio relativamente permanente en el conocimiento o la conducta de un individuo. Pensamos en disciplinas o habilidades que intentamos dominar tales como álgebra, cálculo diferencial e integral, español, física, química o karate. Pero el aprendizaje no se limita a la los centros de educación. Aprendemos todos los días de nuestra vida.

> *Proceso mediante el cual la experiencia causa un cambio relativamente permanente en el conocimiento o la conducta de un individuo. Anita E. Woolfolk.*

3.2. Problemas de aprendizaje específico: ¿Cómo se explica lo que está mal con un estudiante que no tiene retraso mental, no presenta perturbaciones emocionales o deficiencias educativas que tiene capacidades visuales, auditivas y lingüísticas normales y que aún no puede aprender a leer, escribir o realizar operaciones aritméticas? Una explicación es que tiene un problema de aprendizaje específico. Esta es una categoría nueva y polémica de estudiantes excepcionales de la cual no hay un acuerdo pleno en torno a la definición.

Problemas con la adquisición y el uso de lenguaje; se presenta comúnmente como dificultad para leer, escribir, razonar o para la matemática. - Anita E. Woolfolk.

3.3. Educación especial: "Identificación, evaluación y programas especiales para estudiantes cuyas dificultades para aprender requieren ayuda adicional para alcanzar su pleno desarrollo. Tales dificultades pueden ir desde disfunciones físicas, problemas de visión, audición o lenguaje, disfunción para aprender (desventaja mental) dificultades emocionales o de conducta, o un problema médico o de salud. Otros niños pueden tener dificultades más generales con la lectura, escritura, lenguaje o matemática, por lo que requieren de una ayuda extra". – Enciclopedia Microsoft Encarta 2001.

3.4. Dificultades en el aprendizaje, DA: ¿Qué significa DA? Algunas personas dicen que significa "dificultades para el aprendizaje". Otras que significa "diferencias de aprendizaje". ¿Qué es lo que **no** significa DA? Retrasado, tonto, flojo o persona con empleo mal pagado.

Es un término general que se refiere a un grupo heterogéneo de trastornos que se manifiestan por dificultades significativas en la adquisición y uso de la escucha, habla, lectura, escritura, razonamiento, o habilidades en matemática. Estos trastornos son intrínsecos al individuo, suponiéndose debidos a la disfunción del sistema nervioso central, y que pueden ocurrir a lo largo del ciclo vital. Pueden existir junto con dificultades de aprendizaje, problemas en las conductas de autorregulación, percepción social e interacción social pero que se constituyen por sí mismas en diferencias o dificultades de aprendizaje. Aunque las diferencias o dificultades pueden ocurrir concomitantemente con otras condiciones incapacitantes con influencias extrínsecas, no son el resultado de esas condiciones o influencias". – National Joint Committee of Learning Disabilities, 1988, (NJCLD).

3.5. Necesidades educativas especiales, NEE: Un estudiante presenta necesidades educativas especiales si por cualquier factor tiene diferencias o dificultades de aprendizaje mayores que el resto de los estudiantes para acceder a los aprendizajes que se determinan en el currículo que le corresponden para su edad, de forma que requiere, para compensar dichas diferencias, adecuaciones curriculares en una o varias áreas de ese currículo. Entre los estudiantes que presentan necesidades educativas especiales podemos mencionar los que presentan las siguientes características: deficiencia visual, deficiencia auditiva, deficiencias motoras, superdotación, disfunciones de aprendizaje, déficit de atención con hiperactividad, trastornos de personalidad, minorías culturales, etc. Las ayudas para atender las necesidades educativas especiales pueden brindarse en escuelas integradas o en escuelas especiales.

3.6. Adecuaciones curriculares: Son acciones que realiza el docente para ajustar la programación educativa y ofrecer experiencias apropiadas que atiendan las necesidades particulares de los estudiantes. Las adecuaciones curriculares pueden ser: De acceso, No significativas, y Significativas.

3.6.1. Adecuaciones curriculares de acceso: son las modificaciones o la provisión de recursos especiales, materiales o de comunicación dirigidas a algunos estudiantes (especialmente aquellos con deficiencias motoras, visuales y auditivas) para facilitarles el acceso al currículo regular o, al currículo adaptado.

3.6.2. Adecuaciones curriculares no significativas: se refieren a aquellas que no modifican substancialmente la programación del currículo oficial. Constituyen las acciones que los docentes realizan para ofrecer situaciones de aprendizaje adecuadas, con el fin de atender las necesidades educativas de los alumnos. Estas acciones incluyen la priorización de objetivos y contenidos, así como ajustes metodológicos y evaluativos de acuerdo con las necesidades, características e intereses de los educandos.

3.6.3. Adecuaciones curriculares significativas: consisten primordialmente en la eliminación de contenidos y objetivos generales que se consideran básicos en las diferentes asignaturas y la consiguiente modificación de los criterios de evaluación. La aplicación de este tipo de adecuación requiere de un análisis exhaustivo ya que no se trata de simples adaptaciones en la metodología o en la evaluación. La aplicación de este tipo de adecuación requiere de un análisis exhaustivo ya que no se trata de simples adaptaciones en la metodología o en la evaluación, sino que representan modificaciones muy importantes en el currículo.

4. Dificultades en el Aprendizaje de la Matemática, DAM

Para Martín Socas (1997), el aprendizaje de la matemática genera muchas dificultades a los alumnos y estas son de naturalezas distintas. Algunas tienen su origen en el macrosistema educativo, pero en general, su procedencia se concreta en el microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar.

Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores.

El término “dificultades en el aprendizaje de la matemática”, DAM, es un término reciente y relativamente moderno en el que destacan connotaciones de tipo pedagógico en un intento de alejarlo de su referente con matices neurológicos. Pero este concepto no siempre se ha interpretado así.

Los problemas del aprendizaje de las matemáticas han recibido tradicionalmente menos atención que los que se presentan en otros aprendizajes.

Martín Socas (1997), establece que:

> *Las dificultades y los errores en el aprendizaje de la matemática no se reducen a los menos capaces para trabajar con la matemática. En general algunos alumnos, casi siempre, y algunas veces, casi todos, tienen dificultades y cometen errores en el aprendizaje de la matemática. Estas dificultades que se dan en la enseñanza y aprendizaje de la matemática son de naturaleza diferente y se pueden abordar, desde distintas perspectivas.*

Algunas de estas perspectivas de estudio son presentadas en la obra “Dificultades en el Aprendizaje de la matemática: Un enfoque cognitivo” por la escritora Ana Miranda (1998) y son: la perspectiva neurológica, la perspectiva del desarrollo, la perspectiva educativa, y la perspectiva del procesamiento de la información.

¿De qué se tratan las DAM?

> *Se trata de dificultades significativas en el desarrollo de las habilidades relacionadas con la matemática”. – Semrud – Clikermann y Hynd (1992). “Estas dificultades no están ocasionadas por el retraso mental, ni por la escasa o inadecuada escolarización, ni por déficit visuales o auditivos”. – Smith y Rivera (1991). “Sólo se clasifica como tal, si se da una alteración o deterioro relevante de los rendimientos escolares o de la vida cotidiana”. – Keller y Sutton (1991).*

En la delimitación de las DAM se destacan principalmente tres tipos de criterios según Miranda (1986): Criterio de discrepancia, Criterio de exclusión y el Criterio de atención especializada.

Las dificultades de los trastornos del desarrollo de la matemática van a incidir en diversas actividades. Estas incluyen habilidades *"lingüísticas"* (como la comprensión y el empleo de nomenclatura matemática, comprensión o denominación de operaciones matemáticas, y la codificación de problemas representados con símbolos matemáticos), habilidades *"perceptivas"* (como el reconocimiento a la lectura de símbolos numéricos o signos aritméticos, y la agrupación de objetos en conjuntos), habilidades de *"atención"* (como copiar figuras correctamente en las operaciones matemáticas básicas, recordar el número que *"llevamos"* y que tenemos que añadir a cada paso, y observar signos de las operaciones) habilidades *"matemáticas"* (como el seguimiento de las secuencias de cada paso en las operaciones matemáticas, contar objetos y aprender las tablas de multiplicar). – APA (1990).

Es frecuente la aparición de forma superpuesta de trastornos del desarrollo del lenguaje de tipo receptivo, los trastornos del desarrollo de la lectura y escritura, los trastornos del desarrollo de la coordinación y las dificultades en atención y en memoria (Geary, 1993).

5. Factores de las DAM

Las dificultades con la matemática pueden derivarse de varios factores. Para empezar, debe tomarse en consideración la calidad y la cantidad de la instrucción. Es posible que los problemas de los estudiantes se deban más bien a una enseñanza deficiente que a trastornos de aprendizaje. Existen varias taxonomías sobre el origen de las DAM, entre las más conocidas podemos mencionar la de Fernández –Llopis y Pablo, la de Martín Socas, la de Julio Antonio González– Pienda y la de Coie y colaboradores.

5.1. Causas del bajo rendimiento en matemática

En la obra "Matemáticas básicas" las autoras Fernanda Fernández, Ana María Llopis y Carmen Pablo (1999) indican que la enseñanza aprendizaje de la matemática hay que tener en cuenta fundamentalmente tres variables: los alumnos, los contenidos de la matemática y las condiciones en que se enseña. Entre estas variables unas internas y otras externas se encuentran, lo que ellas denominan, causas del bajo rendimiento en matemática:

- 5.1.1. Causas internas:
  - 5.1.1.1. Alteraciones en el desarrollo intelectual.
  - 5.1.1.2. Alteraciones del lenguaje y la psicomotricidad.
  - 5.1.1.3. Alteraciones neurológicas.
  - 5.1.1.4. Perturbaciones emocionales.
- 5.1.2. Causas externas:
  - 5.1.2.1. Problemas socioambientales.
  - 5.1.2.2. Absentismo escolar.
  - 5.1.2.2. Enseñanza inadecuada.

5.2. Líneas generales de las DAM

Martín Socas (1997) plantea desde su perspectiva de matemático educativo cinco líneas generales de dificultades en el aprendizaje de la matemática que enunciamos a continuación:

- 5.2.1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.
- 5.2.2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.

5.2.3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de la matemática.
5.2.4. Dificultades asociadas a los procesos cognitivos de los estudiantes.
5.2.5. Y dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia la matemática.

5.3. Factores de las DAM

Por otro lado para Julio Antonio González-Pienda (1998), psicólogo educativo, las dificultades en el aprendizaje de la matemática son muy variadas y están relacionadas con una multiplicidad de factores que sintetizamos así:

5.3.1. Dificultades relacionadas con los procesos del desarrollo cognitivo y la estructuración de la experiencia matemática.

5.3.2. Creencias y actitudes sobre la matemática.

5.3.3. DAM relacionadas con la propia naturaleza de la matemática; sus procesos de conocimiento y su simbolismo entre las que sobresalen: abstracción y generalización; complejidad de los conceptos; estructura jerárquica de los conceptos matemáticos; y el carácter lógico.

5.3.4. El lenguaje matemático.

5.3.5. Causas internas de las DAM. Al explicar las causas internas al propio sujeto de las DAM y el origen y significado que tienen las notables diferencias en las competencias matemáticas de los estudiantes, se da gran variedad de propuestas para poner de manifiesto la complejidad de los factores que entran en juego. Entre éstas están las posibles alteraciones neurológicas.

5.3.6. DAM relacionadas con la organización, la enseñanza inadecuada y la metodología.

5.4. Factores de riesgo en el desarrollo matemático

Los factores de riesgo o riesgos son una serie de variables que aumentan la probabilidad de que se produzcan dificultades. La vulnerabilidad y el grado de resistencia ante las adversidades y los problemas varían de unos individuos a otros. Coie y colaboradores (1993) presentaron la siguiente relación de factores:

5.4.1. Constitucionales.
5.4.2. Familiares.
5.4.3. Emocionales e interpersonales.
5.4.4. Intelectuales y académicos.
5.4.5. Ecológicos.
5.4.6. Acontecimientos de la vida no normativos que generan estrés.

5.5. Causas de los problemas de aprendizaje de la matemática

Desde una perspectiva docente y con fundamento en una investigación realizada en Panamá por Alejandro Hernández Espino y Luis Roberto Moreno Chandler (2001), se plantean las siguientes causas de los problemas de aprendizaje de la matemática:

5.5.1. Factores didácticos-metodológicos: Contempla la ausencia de materiales y recursos didácticos; abuso de la metodología tradicional; insuficiente formación en matemática de un significativo grupo de docentes de básica general; docentes altamente calificados en matemática, en premedia, media y superior, pero carentes de variedad de medios para compartir los conocimientos con sus estudiantes.

5.5.2. Factores socio-económicos: Incluye el desconocimiento de los problemas sociales de los estudiantes; bajo ingreso económico familiar, ausencia de materiales y equipos necesarios para la enseñanza-aprendizaje de la matemática; creciente población estudiantil con familias disfuncionales con múltiples carencias; etc.

5.5.3. Factores políticos: Contempla la falta de continuidad en los proyectos educativos; cambios en los planes y programas sin una adecuada justificación; la política educativa depende del partido gobernante y no responde plenamente a los intereses y necesidades de la población.
5.5.4. Factores culturales: Incluye aspectos tales como las influencias étnicas; la actitud social y colectiva de la población hacia la matemática y la poca importancia que le prestan, los ciudadanos, a la educación matemática como un instrumento de trabajo y superación.
5.5.5. Otros factores: Se puede considerar en este sentido la combinación de los factores antes mencionados y los factores psicológicos involucrados en el proceso enseñanza aprendizaje de la matemática.

6. Efectos de las DAM

Los efectos de las dificultades en el aprendizaje de la matemática son diversos y van más allá del área académica específica (Corn, 1989) afectando áreas como la atención, la impulsividad, la perseveración, el lenguaje, la lectoescritura, la memoria, la autoestima o las habilidades sociales.

Las dificultades de los trastornos del desarrollo de la matemática van a incidir en diversas actividades.

> *Estas incluyen habilidades "lingüísticas" (como la comprensión y el empleo de nomenclatura matemática, comprensión o denominación de operaciones matemáticas, y la codificación de problemas representados con símbolos matemáticos), habilidades "perceptivas" como el reconocimiento a la lectura de símbolos numéricos o signos aritméticos, y la agrupación de objetos en conjuntos), habilidades de "atención" (como copiar figuras correctamente en las operaciones matemáticas básicas, recordar el número que "llevamos" y que tenemos que añadir a cada paso, y observar signos de las operaciones) y las habilidades "matemáticas" (como el seguimiento de las secuencias de cada paso en las operaciones matemáticas, contar objetos y aprender las tablas de multiplicar). - APA (1990 a, p. 49.*

A continuación presentamos un cuadro en el que se muestran algunos grupos significativos de efectos de las dificultades en el aprendizaje de la matemática, adaptado de Alexandra Klein (Corn et al., 1989, p. 15) citado en la obra "Manual de Dificultades en el Aprendizaje: Lenguaje, Lecto-escritura y Matemáticas", de Jesús Nicasio García:

Efectos de las Dificultades en el Aprendizaje de la Matemática	
Área de dificultad	**Muestra de conductas**
Atención selectiva	▪ Parece no intentarlo. ▪ Se distrae por estímulos irrelevantes. ▪ Conexiones y desconexiones. ▪ Se fatiga fácilmente cuando intenta concentrarse.
Inconsistencia	▪ Resuelve los problemas un día pero no al otro. ▪ Es capaz de un gran esfuerzo cuando está motivado.
Área de dificultad	**Muestra de conductas**
Perseverancia	▪ Tiene dificultades en cambiar de una operación o pasar a otra.

Impulsividad	▪ Trabajar demasiado rápido. ▪ Comete muchos errores por descuido. ▪ No usa estrategias de planificación. ▪ Cálculos imprecisos. ▪ Desatención u omisión de símbolos.
Auto-monitorización	▪ No examina el trabajo. ▪ No puede indicar las áreas de dificultad. ▪ No revisa previamente las pruebas.
Lenguaje / Lectura	▪ Tiene dificultades en la adquisición del vocabulario matemático. ▪ Confunde centenas / centésimas, MCM / MCD, el nombre factor / el verbo factor, 4 menos x / cuatro menos que x, antes / después, más / menos. ▪ El lenguaje oral o escrito se procesa lentamente. ▪ Tiene dificultades para decodificar símbolos matemáticos.
Organización espacial	▪ Tiene dificultades en la organización del trabajo en la página. ▪ Pierde las cosas. ▪ Tiene dificultades para organizar el cuaderno de notas. ▪ Tiene un pobre sentido de la orientación.
Memoria	▪ No memoriza la tabla de multiplicar. ▪ Experimenta ansiedad de test. ▪ Invierte secuencias de números o letras. ▪ Tiene dificultades para recordar algoritmos, estaciones, meses, etc.
Orientación en el tiempo	▪ Tiene dificultad con el manejo de la hora. ▪ Olvida el orden de las clases. ▪ Llega muy pronto o muy tarde a clase.
Área de dificultad	**Muestra de conductas**
Habilidades grafo-motrices	▪ Alineación de números inapropiada. ▪ Necesita más tiempo para completar el trabajo. ▪ Produce trabajos sucios, con tachaduras en vez de borrar. ▪ No puede escuchar mientras escribe.

Auto-estima	▪ Cree que ni el mayor esfuerzo le llevará al éxito. ▪ Es muy sensible a las críticas. ▪ Se opone o rechaza la ayuda.
Habilidades sociales	▪ Es ampliamente dependiente. ▪ No capta las claves sociales. ▪ No adapta la conversación de acuerdo con la situación o con la audiencia.

7. Sugerencias para la intervención

Tomando en consideración la pluridimensionalidad y complejidad de las DAM y consecuentemente de la misma intervención, es importante determinar los componentes o elementos básicos y articularlos en una organización que posibilite una acción eficaz.

Podemos establecer los siguientes componentes: evaluación inicial, elaboración del programa, aplicación del programa y evaluación de la intervención.

En relación con el diagnóstico de los trastornos del cálculo el DSM IV, APA, p. 54; presenta tres criterios que consideramos prudente resaltar:

Criterios para el diagnóstico de trastorno del cálculo	
A	La capacidad para el cálculo, evaluada mediante pruebas normalizadas administrada individualmente, se sitúa sustancialmente por debajo de la esperada, dados la edad cronológica del sujeto, su coeficiente intelectual y la escolaridad propia de su edad.
B	El trastorno del Criterio A interfiere significativamente el rendimiento académico o las actividades de la vida cotidiana que requieren capacidad para el cálculo.
C	Si hay un déficit sensorial las dificultades para el rendimiento en cálculo exceden de las habituales asociadas a él.

Históricamente se han practicado diversas estrategias a seguir para la enseñanza en el aula de matemática a alumnos con DAM. Klein (1989) incluye las siguientes: Clarificación de la estructura de las exigencias, Estructuración de cada sesión de clase, Estimular la participación activa e independiente en el proceso de aprendizaje, Aplicar principios de la enseñanza terapéutica, y Evaluar las pruebas y exámenes.

Conclusiones / recomendaciones

* Es impostergable la capacitación de los docentes de matemática en torno a las DA y DAM.
* Organismos e instituciones educativas deben invertir recursos en investigaciones en las DAM para propiciar programas de intervención en el aula.
* Contamos con abundante información de resultados de investigaciones y programas de intervención en torno a las dificultades en el aprendizaje de la matemática en la educación inicial y básica general, pero se cuenta con poca información en torno a las dificultades en los restantes niveles

educativos; es por ello que un grupo de especialistas en matemática educativa en compañía de otros profesionales de áreas afines debemos abordar la temática.

* Un grupo creciente de docentes – investigadores trabajan con interés en la temática a fin de conformar equipos de investigación que posibiliten la intervención en las DAM.

Reflexión

Todo educador sueña con un mundo ideal donde lo que aprenden los alumnos el sosegado reflejo de lo que se les enseña. La realidad le obliga a aceptar (o por lo menos tolerar) que el mundo es imperfecto, aunque nunca pierde la esperanza. Hay algo de paraíso perdido en esta búsqueda de lo perfecto, pero también una equivocación sobre qué es –y qué podría ser- aprender, si se aplica este término con toda seriedad.

Silbert, Carnine y Stein (1981) destacan la importancia de la evaluación continua:

Un control riguroso de la evolución del alumno o alumna es primordial. Cuanto antes detecte el docente la deficiencia de una habilidad en un alumno o alumna, más fácil será remediar esta deficiencia. Por cada día que pasa sin ser corregido, lo que un alumno hace, en esencia, es practicar cómo hacer algo de forma incorrecta, para poder solucionar esta confusión, el docente deberá dedicar por cada día de ejercitación incorrecta, varios días de reaprendizaje. Así pues, un control riguroso es un componente esencial de una instrucción eficiente.

Referencias bibliográficas

AGUILERA, Antonio – Coordinador (2004): *Introducción a las dificultades del aprendizaje.* España: McGraw-Hill Interamericana de España, S. A. U. pp. 338.

AZCOAGA, Juan; DERMAN, Berta y P. Angélica IGLESIAS (1997): *Alteraciones del aprendizaje escolar. Diagnóstico, fisiopatología y tratamiento.* Tercera reimpresión. España: Ediciones Piados Ibérica, S. A. pp. 281.

BOGGINO, Norberto (2003): *¿Problemas de aprendizaje o aprendizaje problémico? Estrategias didácticas para prevenir dificultades en el aprendizaje.* Tercera edición. Argentina: Homo Sapiens Ediciones. pp. 122.

DEFIOR CITOLER, Sylvia (1996): *Las dificultades de aprendizaje: Un enfoque cognitivo. Lectura, Escritura y Matemáticas.* España: Ediciones Aljibe, S. L. pp. 236.

DOCKRELL, Julie y John McSHANE (1997): *Dificultades de aprendizaje en la infancia. Un enfoque cognitivo.* España: Ediciones Piados Ibérica, S. A. pp. 244.

FARNHAM – DIGGORY, Sylvia (1998): *Dificultades de aprendizaje.* Tercera edición. España: Ediciones Morata, S. L. pp. 215.

FERNÁNDEZ BAROJA, Fernanda; LLOPIS PARET, Ana María y Carmen PABLO MARCO (1999): *Matemáticas básicas: dificultades de aprendizaje y recuperación.* España: Aula XXI / Santillana. pp. 311.

FISHER, Gary y Rhoda CUMMINGS (1992): *Supera tus dificultades de aprendizaje.* México: Editorial Pax México / Librería Carlos Cesarman, S. A. pp. 119.

GARCÍA, Jesús Nicasio (1998): *Manual de dificultades de aprendizaje: Lenguaje, Lecto – Escritura y Matemáticas.* Tercera Edición revisada. España: NARCEA, S. A. de Ediciones. pp. 285.

GARCÍA SÁNCHEZ, Jesús – Nicasio (2001): *Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica.* España: Editorial Ariel, S. A. pp. 283.

GONZÁLEZ – PIENDA, Julio Antonio y José Carlos NÚÑEZ PÉREZ – Coordinadores (1998): *Dificultades del aprendizaje escolar.* España: Ediciones Pirámide, S. A. pp. 433.

HERNÁNDEZ ESPINO, Alejandro y Luis Roberto MORENO CHANDLER (2001): *El laboratorio taller de matemática: Una alternativa para superar los problemas de aprendizaje de la matemática en la educación básica general y la educación media.* Tesis de maestría. Panamá: Universidad Especializada de las Américas. pp. 239.

HULME, Charles y Susie MACKENZIE (1994): *Dificultades graves en el aprendizaje. El papel de la memoria de trabajo.* España: Editorial Ariel, S. A. pp. 175.

MAJOR, Suzane y Mary Ann WALSH (1977): *Actividades para niños con problemas de aprendizaje.* España: Ediciones CEAC, S. A. pp. 131.

MENIN, Ovide – Coordinador (1997): *Problemas de aprendizaje. ¿Qué prevención es posible?* Argentina: Homo Sapiens Editores. pp. 168.

MERCER, Cecil D. (1987): *Dificultades de aprendizaje 1 y 2.* España: Grupo Editorial CEAC, S. A. pp. 298 / 275.

MIRANDA, Ana; FORTES, Carmen y María Dolores GIL (1998): *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas: Un enfoque evolutivo.* España: Ediciones Aljibe, S. L. pp. 215.

MOLINA GARCÍA, Santiago (1 997): *El fracaso en el aprendizaje escolar I: Dificultades Globales de tipo adaptativo.* España: Ediciones Aljibe, S. L. pp. 361.

MOLINA GARCÍA, Santiago y otros (1998): *El fracaso en el aprendizaje escolar II: Dificultades específicas de tipo neuropsicológico. Dislexia, Disgrafía, Discalculia y Disfasia.* España: Ediciones Aljibe, S. L. pp. 364.

NIETO HERRERA, Margarita (1999): *Casos clínicos de niños con problemas de aprendizaje. Mis vivencias personales.* Segunda reimpresión. México: Editorial El Manual Moderno, S. A. de C. V. y Méndez Editores, S. A. de C. V. pp. 220.

ORTIZ GONZÁLEZ, María del Rosario (2004): *Manual de dificultades de aprendizaje.* España: Ediciones Pirámide (Grupo Anaya, S. A.). pp. 210.

RICO, Luis – Coordinador (1997): *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* España: I. C. E. Universitat Barcelona – Editorial Horsori. pp. 254.

SANTIUSTE BERMEJO, Víctor y Jesús A. BELTRÁN LLERA – Coordinadores (1998): *Dificultades de aprendizaje.* España: Editorial Síntesis, S. A. pp. 335.

SUÁREZ YÁNEZ, Andrés (1998): *Dificultades en el aprendizaje. Un modelo de diagnóstico e intervención, ejemplificado con un caso de dificultades en lectoescritura.* España: Aula XXI / Santillana. pp. 206.

WOOLFOLK, Anita (1999): *Psicología educativa.* Séptima edición. México: Prentice Hall Hispanoamericana, S. A. – Pearson Educación. pp. 662.

Aprender la estadística desde la interdisciplinariedad

Daniel Eudave Muñoz
Departamento de Educación
Universidad Autónoma de Aguascalientes

Palabras claves
Educación estadística, campos conceptuales, educación superior.

Planteamiento

La estadística es en la actualidad una disciplina necesaria en prácticamente todos los campos profesionales. En el ejercicio de muchas profesiones universitarias son necesarias varias competencias que tienen que ver con la estadística, como por ejemplo: *crear, manejar, analizar e interpretar información* y *tomar decisiones con un riesgo conocido*.

El papel que la estadística juega dentro del conjunto de saberes de cada profesión puede ser diferente, esto es, la estadística adquiere su sentido *junto con* o en *interacción de* otros saberes y, de igual forma, la estadística puede ser la fuente de significado para otras áreas del desarrollo profesional de los estudiantes. Así tenemos, por ejemplo, que en el caso de la Universidad Autónoma de Aguascalientes, México, en el caso de las licenciaturas de Medicina, Mercadotecnia y Asesoría Psicopedagógica, las áreas curriculares en las que la estadística es un componente esencial son, al mismo tiempo, algunas de las áreas fundamentales del ejercicio profesional: diagnóstico epidemiológico, diagnóstico clínico y metodología de la investigación biomédica, para Medicina; investigación de mercados, en la carrera de Mercadotecnia; diagnóstico psicopedagógico, evaluación educativa, metodología de la investigación educativa, en la licenciatura en Asesoría Psicopedagógica.

Los planes de estudio de estas licenciaturas, así como los programas de las asignaturas, *tienden hacia* un enfoque integrado de la enseñanza de la estadística muy similar al sugerido por Wilks (2006) y Stroup et.al (2004) para las profesiones no-estadísticas, en el que se privilegia el método estadístico más que conceptos y procedimientos aislados. Sin embargo, no es un enfoque del todo explícito ni sistemático, pues aún subyacen dos concepciones curriculares antagónicas: una que considera que la enseñanza de la estadística se debe centrar en el entrenamiento de los procedimientos de cálculo de las medidas de resumen y en la ejecución pulcra de los procedimientos implicados en la aplicación de los métodos de análisis inferencial y multivariado; y la otra plantea que la estadística debe incorporarse como una herramienta de apoyo a los métodos y procedimientos que tienen que ver con la investigación aplicada, que en cada profesión tiene diferentes objetivos y usos, aunque en común compartan el método estadístico.

En esta investigación se analiza esta problemática, poniendo énfasis en los aprendizajes obtenidos por los estudiantes, sus características, riquezas y limitaciones.

Marco teórico

Las investigaciones sobre las dificultades y errores de los estudiantes al enfrentar problemas de estadística, se han orientado por lo general a aspectos intrínsecos de los conceptos en cuestión: su cálculo, su significado en sí (esto es, *en solitario*), los problemas o deficiencias en el desarrollo y en la enseñanza (ver, por ejemplo, la reseña de Batanero y colaboradores, 1994). Muy pocos señalan la naturaleza compleja de la conceptualización (interconexión entre lo procedimental, conceptual, representacional), así como la necesidad de integrar varios conceptos a fin de comprenderlos de manera conjunta, y el papel que desempeñan estos en las situaciones y los contextos.

En este trabajo se hace una explicación de los aprendizajes estadísticos a partir de las relaciones entre diferentes conceptos y de su interdependencia con las situaciones en las que aparecen: esto es ver el aprendizaje como campos conceptuales. Según la teoría de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud (1990), un concepto no toma su significación en una sola clase de situaciones y una situación no se analiza con la ayuda de un solo concepto. Es necesario proponerse como objetos de investigación conjuntos relativamente grandes de situaciones y de conceptos, clasificando los tipos de relaciones, las clases de problemas, los esquemas de tratamiento, las representaciones lingüísticas y simbólicas y los conceptos matemáticos que organizan este conjunto.

Según este autor, el proceso de conceptualización es gradual y parte de nociones que se configuran paulatinamente a partir de la acción del sujeto sobre su entorno hasta llegar a la definición formal de un concepto, que se logra cuando hay una apropiación de los sistemas de representación correspondientes. En este proceso son decisivas las situaciones en las que se presenta un conjunto de conceptos, ya que en buena parte son éstas las que van configurando su sentido. La noción de *situación* tiene para Vergnaud, el sentido de *tarea*. La idea es que toda situación compleja se puede analizar como una combinación de tareas de las que es importante conocer la naturaleza y la dificultad propias.

Por lo tanto, para comprender los aprendizajes logrados por los sujetos, es necesario explorar *la acción de los estudiantes en situación*, y la organización de su conducta, esto es, la identificación de *esquemas* al momento de enfrentar distintas tareas matemáticas o estadísticas, configuradas con base en las diferentes situaciones relevantes para cada conjunto de conceptos.

Para este trabajo se define *el campo conceptual de la estadística descriptiva* como el conjunto de situaciones cuyo tratamiento involucra la *obtención, manejo y análisis de datos numéricos* referidos a una muestra o una población, lo mismo que los métodos especiales para cada caso. El campo conceptual de la estadística descriptiva es además un conjunto de conceptos interconectados: azar, probabilidad, medición, muestreo, distribuciones de frecuencias, moda, mediana, media, rango, varianza, desviación estándar, asimetría y apuntamiento (Eudave, 2005).

Metodología

Se seleccionaron 12 alumnos de tres licenciaturas: Medicina, Mercadotecnia y Asesoría Psicopedagógica. Se llevaron a cabo *entrevistas centradas en tareas* (Goldin, 2000), para identificar los conceptos, esquemas y tipos de representación que conforman el perfil de los aprendizajes estadísticos logrados por los estudiantes. El centro de atención de este estudio es el análisis de las conceptualizaciones explícitas e implícitas y sus múltiples relaciones.

Lo primero que se hizo, a fin de identificar (o construir) el campo conceptual de cada alumno, fue partir de una situación: *el análisis de datos*. Algunos conceptos *en solitario* resultaron relevantes para los alumnos, pero el verdadero sentido de los datos y los procesos y conceptos estadísticos afloró cuando los alumnos intentaron explicar la realidad a la que hacían referencia los datos, cuando intentaron darle un sentido en conjunto y desde la perspectiva de sus respectivos quehaceres profesionales, cuando a partir de la lectura de los datos intentaron la lectura de una realidad.

Lo segundo fue identificar el tipo de descripción global que cada uno hacía de sus datos, esto es, hacer el reconocimiento de algún patrón o esquema de acción; al respecto se pudieron distinguir dos cosas: a) los pasos generales que siguieron para la realización del análisis, tanto para el manejo como para la lectura de datos; b) hay que considerar cómo ejecutaron cada paso (lo que hicieron, cómo lo hicieron y cómo lo fundamentaron).

En tercer lugar, la tarea fue identificar los conceptos estadísticos presentes en el análisis que cada alumno hizo y sus relaciones. Aun los alumnos que demostraron tener un conocimiento de la mayoría de los conceptos estadísticos considerados, no hicieron uso de todos ellos al momento de dar sentido al conjunto de datos utilizado en la entrevista.

En cuarto lugar, identificar los referentes de cada una de las conceptualizaciones, esto es, identificar el punto de referencia del que se valieron los jóvenes para hacer la descripción de los datos, ya fueran estos sus conocimientos disciplinares, metodológicos, aritméticos o de sentido común.

En quinto lugar, identificar los conceptos estadísticos que los alumnos no consideraron para hacer sus análisis: su ausencia se explica, en parte, por el olvido, pero sobretodo, por la falta de relevancia para el campo que cada alumno ha construido para dar sentido a un conjunto de datos, o bien, por el olvido que acarrea la falta de filiaciones.

Resultados

Fue posible identificar los esquemas que cada alumno siguió, encontrando similitudes en los alumnos que pertenecían a una misma licenciatura. Estos esquemas se caracterizan por: a) incluir algunos conceptos estadísticos específicos y excluir otros; b) presentar diferentes formas de abordar, desarrollar y concluir la tarea, y; c) dar un sentido extra-estadístico a todos los conceptos y procedimientos. Estas diferencias en las conceptualizaciones se pueden explicar a partir de los aprendizajes favorecidos por asignaturas relacionadas con actividades propias de la profesión, como se ejemplifica a continuación.

Estudiantes de medicina

En los alumnos de medicina aparece la idea de que la estadística sirve para encontrar ciertas tendencias o características en un conjunto de datos. Esto se tradujo durante las entrevistas en una idea más o menos clara de *distribución*, entendida como una *totalidad de datos* con ciertas características. Esta idea de totalidad asume varias formas: como normalidad, como tendencia o forma. Lo interesante es que los puntos de referencia para su descripción son un campo que integra una medida de tendencia central y una medida de localización o de dispersión, pero sin llegar a una comprensión formal de distribución.

Otro componente estadístico que todos los estudiantes de medicina asumen son los valores poblacionales estandarizados, que retoman de su bagaje de conocimientos médicos y metodológicos, como normas que hay que seguir, sin conocer necesariamente sus fundamentos matemáticos. Un ejemplo son las *tablas de crecimiento* que muestran los valores promedio por sexo y edad, así como los límites superior e inferior de los valores normales, tomando como medida de referencia a la desviación estándar.

La idea de incertidumbre está presente en todos los alumnos de medicina, quienes reconocen que la medicina no es una ciencia 100% exacta. Esto se relaciona por lo general con sus ideas de normalidad o anormalidad. La idea de *normalidad* tiene en los estudiantes de medicina entrevistados un sentido predominantemente estadístico, pero a su vez, junto con el concepto opuesto de anormalidad, se asocian con los conceptos de salud-enfermedad. Es interesante ver cómo los alumnos reconocen valores numéricos extremos y aislados (outliers) como una anormalidad, pero no como algo necesariamente patológico, predominando así un criterio estadístico. Los valores extremos son considerados por los alumnos como casos raros pero posibles, producto quizás del azar.

Otra idea interesante, pero implícita en la acción (lo que Vergnaud considera como un concepto-en-acto), es la suposición de la *multicausalidad de los fenómenos*. No hay un reconocimiento formal de las relaciones entre variables, ya sea como asociación, correlación, dependencia, pero sí un manejo recurrente de más de una variable simultáneamente al hacer la descripción del grupo hipotético al que hacen referencia los datos usados durante la entrevista.

Mercadotecnia

Los estudiantes de mercadotecnia también comparten el carácter instrumental de la estadística, teniendo una atención especial en la obtención de datos, más que los estudiantes de las otras dos carreras. En general, los conocimientos y usos de la estadística se amalgaman con la metodología de la investigación tipo encuesta, la que más utilizan en los estudios de mercado.

Los estudiantes de mercadotecnia tienen una forma peculiar de dar sentido a la totalidad de los datos. La idea de distribución se conforma por la identificación de dos valores o conjuntos de valores: el valor modal y el resto de los valores (como un conjunto complemento). En esta distribución polarizada, el azar hace acto de presencia en los casos aberrantes o valores extremos (sean o no valores aislados o *outliers*), los que son traducidos en una situación de mercadotecnia, a las opiniones de clientes excéntricos que bien se pueden ignorar.

El esquema de acción predominante que permite dar sentido a un conjunto de datos desde el punto de vista de la mercadotecnia, un alumno lo sintetiza con una regla: la del 80-20, o sea, identificar el 80% de tendencias predominantes, contra el 20% de tendencias en contra. Esto puede verse como la preferencia de la mayoría (80% o un valor próximo) por un producto o servicio, contra la minoría (20%) que prefiere otro diferente. Siguiendo con esta lógica, si los estudiantes de mercadotecnia logran identificar esa proporción en sus datos, consideran que pueden hacer una toma de decisiones segura y objetiva.

Asesoría psicopedagógica

Los estudiantes de la carrera de asesoría psicopedagógica enfocan su análisis en las medidas de tendencia central y las medidas de localización y dispersión (los cuartiles y el rango, por lo general), sin embargo, aunque hay una idea más o menos clara de totalidad (distribución), no se maneja en términos de "normalidad". Incluso en algunas alumnas hay cierta resistencia a usar el término. Las asesoras psicopedagógicas parten de una noción de *escala* que retoman principalmente de sus conocimientos de psicometría. Los test psicométricos son una herramienta básica para el trabajo de las asesoras psicopedagógicas, pero no es el único; alternan su uso con estrategias de obtención de información cualitativa, como las entrevistas y los cuestionarios. Al igual que los estudiantes de medicina, sus diagnósticos incorporan tanto información cuantitativa como cualitativa, pero al no tener como sustento un conjunto de datos "duros" (como las tablas estandarizadas de los médicos, y toda la teorización en torno a ellas), sus punto de comparación se centran en su noción de *escala* y en los datos mismos así como en los referentes disciplinares o metodológicos.

Los esquemas de acción que predominan en el análisis de datos, se orientan de alguna forma, a la identificación de situaciones problema que pueden asumir varias modalidades: identificación de alumnos deficientes en algún aspecto, puntos débiles de la organización escolar, dinámicas familiares de conflicto, etc., o bien, si no se resalta el aspecto de deficiencia o carencia, se resalta simplemente la diversidad. Todo lo anterior se traduce posteriormente en situaciones a atender. Es de esta manera que se trata de dar sentido a un conjunto de datos desde el punto de vista de la profesión, más que desde la visión abstracta del curso básico de estadística.

Para estos estudiantes, el análisis de correlación es entendido como la búsqueda de factores que provocan o explican el o los problemas detectados, aunque en sí, este concepto estadístico y todas las técnicas derivadas de él, son insuficientes para determinar una relación causal. Hacen mención del concepto de correlación, pero ninguna de las alumnas ni el alumno entrevistado realizaron o consideraron la pertinencia de algún cálculo de un coeficiente de correlación.

Los conceptos estadísticos a partir de los cuales dan sentido a los datos son básicamente los de frecuencia, promedios, rangos, tendencia central (moda y media). Las ideas que de cierta forma dan cuenta de la noción de distribución son los conceptos de centro y los valores extremos, los que adquieren su sentido al ubicarse en el continuo de los datos, a manera de una recta numérica, similar a las escalas con las que en los test se explican las puntuaciones de los individuos.

Conclusiones

Considerar el aprendizaje de la estadística como un *campo conceptual* nos permite tener una comprensión más completa de las competencias de los alumnos, en especial de las que dependen de la conjunción de varios campos disciplinares. Hay que tomar en cuenta que una adecuada comprensión de la estadística, que permita a los sujetos enfrentar y resolver problemas estadísticos reales, implica la comprensión de un conjunto de nociones estadísticas relacionadas. Además, como señala Moore (1990, p. 96), los datos estadísticos no son solamente números, *son números en un contexto*, por tanto parece inevitable que la comprensión estadística se dé en la interacción con diferentes situaciones y disciplinas.

Este análisis nos permitió también identificar las desarticulaciones curriculares y didácticas presentes en los planes de estudios organizados por asignaturas, en los que con frecuencia los aprendizajes que se pretenden fomentar con cursos de estadísticas se vuelven irrelevantes al ignorar el sentido que esta disciplina tiene para cada profesión.

Referencias

Batanero, C.; Godino, J.D.; Green, D.R.; Holmes, P.; Vallecillos, A. (1994) Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts, *International Journal of Mathematics Educational in Science and Technology*, 25 (4), 527-547

Eudave Muñoz, D. (2005) *Valoración contextual de conceptos estadísticos en estudiantes universitarios*, Tesis de Doctorado, Doctorado Interinstitucional en Educación, UAA, marzo.

Goldin, Gerald A. (2000) A Scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics educational research, Kelly, A.E. y Lesh, R.A. *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 517-545

Moore, David S. (1990) Uncertainty, en Steen, Lynn Arthur, *On the Shoulders of Giants*. USA: National Academy Press, pp. 95-137

Stroup, D. et.al, (2004) Teaching Statistical Principles Using Epidemiology: Measuring the Healt of Populations, *The American Statistician*, February, Vol. 58, No. 1

Wilks, S.S. (2006) Undergraduate Statistical Education, *The American Statistician*, February, Vol. 60, No. 1, pp. 39-45

Vergnaud, Gérard (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10, No. 2-3, pp. 133-170

Una orientación didáctica para apropiarse de la noción de derivada con significado y sentido en estudiantes de la UNEG

Ángel O. Mora P.
Profesor Asociado UNEG
Mail: mora_omero@hotmail.com

Resumen
No puede producirse la elaboración en el pensamiento de la noción (o concepto) de un contenido matemático de manera eventual, sin una orientación que guíe la búsqueda y la estructuración del conocimiento. En esa dirección, presento una propuesta formativa relativa al proceso de apropiación de la noción de derivada con significado y sentido, en estudiantes de la carrera de administración y contaduría de la Universidad Nacional Experimental de Guayana, Venezuela cohorte 2006-II, a partir de una estrategia didáctica basada en el Marco Conceptual Referencial Operativo con Significado y Sentido (MCROSS) y un método de aprendizaje para la apropiación de dicha noción. La instrumentación permitió en los estudiantes la toma de consciencia como sujetos de su propio aprendizaje, a partir de un proceso de investigación y reflexión con significado y sentido de todas las manifestaciones posibles y particulares dirigidas a la caracterización de la relación sustancial (en su abstracción) de generalización sobre la derivada. Finalmente se reporta un movimiento de medio a alto de apropiación en los estudiantes de la noción de derivada.

Palabras clave
Orientación, estrategia MCROSS, apropiación, enseñanza desarrolladora, método.

El problema

El problema de investigación tiene su origen en las insuficiencias y deficiencias detectadas en los estudiantes en el curso de Matemática I de Administración y Contaduría semestre 2006-II, a partir de un diagnóstico que detectó un nivel de conocimientos crítico al esperado para cursar la asignatura. Esta regularidad es igualmente reportada por los profesores de matemática II de la mencionada carrera y, sobre todo, en el tratamiento de la noción de derivada, herramienta clave para el aprendizaje del cálculo integral. En tal sentido se requiere un enfoque desarrollador que permita al estudiante por una parte remediar las carencias en cuanto a las habilidades, conocimientos y motivos, y por otra enfrentar los retos que exige la asignatura para abordar con éxito las tareas de enseñanza. En esa dirección, se propone esta experiencia pedagógica que instrumenta la actividad docente con el propósito de enseñar a aprender al estudiante para que se apropie de un MCROSS hacia la actividad en el hacer de la tarea. Las anteriores consideraciones me permiten plantear como pregunta de investigación: ¿en qué medida la orientación en el proceso de apropiación de un método de aprendizaje de la noción de derivada propiciará en los estudiantes del primer semestre de la carrera de Administración y Contaduría enfrentar con éxito problemas y ejercicios sobre esta noción?

Objetivos de investigación

1. Diseñar un método de aprendizaje que oriente la apropiación de la noción de derivada en el I semestre del proyecto de Administración y Contaduría de la UNEG.

2. Constatar si una estrategia didáctica basada en el marco conceptual referencial operativo con significado y sentido contribuye en estudiantes de administración y contaduría a la apropiación de la noción de derivada de una función.

Marco conceptual y operacional

Apropiación consciente de la noción de derivada de una función:

Consiste en un proceso de asimilación activa, por parte del grupo-estudiante, en forma de espiral, de un sistema de conocimientos y habilidades con significado y sentido de la matemática, basado en la observación y reflexión sobre sus acciones, y las del otro, sobre el objeto de conocimiento. Esta regularidad se evidencia cuando el grupo-estudiante fundamenta en forma verbal (escrita y oral) las acciones que realiza en el proceso de elaboración de la noción de derivada (el qué, para qué, cómo, y por qué) que permite el desarrollo de habilidades o competencias sobre el contenido matemático.

Dimensiones apropiación consciente:

1. Habilidades.
   1.1. Interpretar la pendiente de una recta como razón entre los incrementos de las variables.
   1.2. Relacionar el concepto de pendiente de una recta con la idea de derivada.
   1.3. Coordinar la relación entre la pendiente de una recta y el límite $\underset{h\to 0}{Lím}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ hasta propiciar un modelo o procedimiento que permita calcular la derivada de una función lineal.
   1.4. Coordinar y relacionar gráficamente el objeto de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función cuadrática en un punto con el objeto razón de cambio en dicho punto, a partir de los límites laterales de las rectas secantes en el entorno de dicho punto (paso de la secante a la tangente) y el límite $\underset{h\to 0}{Lím}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
   1.5. Encontrar la derivada de funciones lineales y cuadráticas por definición de límite y/o regla de la potencia n-ésima.
   1.6. Establecer relaciones y diferencias entre los objetos $f(x)$, $f´(x)$ y $f´(x)$.
   1.7. Resolver problemas en el campo de la administración y contaduría que involucren a las funciones marginales, entre ellas el costo, ingreso e utilidad marginal.

2. Conocimientos.
   2.1. Noción de derivada como la razón de cambio en un punto dado.
   2.2. Coordinar y relacionar los objetos $f(x)$, $f´(x)$ y $f´(a)$.

Marco teórico

En la enseñanza de la noción de derivada, se reseñan tres concepciones la puntual, la global y la intermedia entre ambas. La primera establece un itinerario de lo particular a lo general, la segunda establece de lo general hacia lo particular y la tercera relaciona dialécticamente ambas. En la enseñanza de la noción de derivada, mantiene vigencia la concepción puntual, con un enfoque innovador o tradicional que centra la instrumentación de la enseñanza en la visualización de la noción particular de la derivada (Jiménez J., 2003). En tal sentido, Badillo (2003) establece que Inglada y Font reseñan en la enseñanza de esta noción dos itinerarios didácticos, el histórico (la derivada antes del límite) y el lógico-histórico (el concepto de límite antes de la derivada). En cuanto a su aprendizaje, sugiere en partir de la experiencia previa combinando (coordinando) acciones de tipo gráfico y algebraico (analítico) entre los objetos f´(a) y f´(x).

En esa dirección, se retoma la Estrategia Didáctica propuesta por Ángel Mora (2005), la cual se fundamenta en el Enfoque Histórico Cultural del Desarrollo Humano (EHC), la Teoría Crítica y algunos elementos del grupo operativo, propuesto por Pichón Riviere. A partir de este marco referencial, se considera que el conocimiento humano no se alcanza con la mera ejercitación, sino que es necesario instrumentar lógicamente acciones que permitan su formación especial que en conjunto constituyen habilidades para desarrollar al ser humano, a partir de un sistema de acciones y operaciones que se realizan bajo determinadas condiciones que permita la generalización teórica para develar lo general en lo particular, considerando al estudiante como el centro del proceso docente educativo; sobre la base de la racionalidad emancipadora, que propicia un proceso de cambio y transformación en forma de espiral, que lleva a formadores y estudiantes a construir y perfeccionar su conocimiento desde el consenso, el entendimiento y el acuerdo, dentro de una relación de horizontalidad, igualdad y respeto mutuo, propiciando la fuerza del vínculo entre la teoría y la práctica y la elaboración de un Marco Conceptual Referencial Operativo con Significado y Sentido (MCROSS) (Mora A., 2005).

El MCROSS es una herramienta didáctica para el proceso de enseñanza grupal-individual que consiste en un nuevo marco de creencias, conocimientos, habilidades que son de referencia compartida, producto de la satisfacción de la necesidad del hacer de la tarea, bajo un esquema consciente, sobre el qué, para qué, cómo y por qué del objeto que los mueve. A partir de la concepción de la actividad y la comunicación y su unidad dialéctica, hace transitar al grupo-estudiante por tres momentos de desarrollo: el de creación, consolidación y reconstrucción retrospectiva del MCROSS. El recurso operativo que orienta su ejecución es la tarea pedagógica, la cual propicia momentos de desarrollo que encamina al grupo como objeto y sujeto de aprendizaje. En esa dirección se configura un método de aprendizaje que permita la apropiación de la noción de derivada.

A partir de la estrategia MCROSS que se fundamenta en la concepción de la enseñanza desarrolladora, se destaca en la actividad el papel de la orientación, que propicia la ayuda al estudiante para que se regule y haga consciente el proceso de apropiación y sea capaz de resolver problemas. La orientación, involucra la acción a ejecutar sobre el contenido objetivo y un proceso de valoración que certifica o rectifica la acción. Consiste en indicaciones para cumplir la acción dada en forma consciente y correcta. La orientación constituye un recurso didáctico que informa sobre las condiciones de la actividad y permite en el estudiante la toma de consciencia con significado y sentido de los momentos previos por donde transita la acción para alcanzar el resultado deseable con éxito: qué contenido objeto van a estudiar; cómo o mediante qué procedimiento; por qué y para qué lo realizarán. De esta manera, la función de la orientación es lograr la comprensión por el estudiante de lo que va a hacer antes de ejecutarlo, lo cual contribuye a la formación de la habilidad de planificar.

Estrategia didáctica

El marco metodológico general de la estrategia orienta el desarrollo en el grupo-individuo, a partir de la toma conciencia de sí, de sus acciones, creencias, necesidades, a través del otro, lo que le permite dirigir su saber, no sólo con la intención de integrar la teoría con la práctica, sino de llevar a cabo un proceso dinámico e interactivo de enseñanza donde prevalece el significado y sentido para aprehender la matemática. Su dinámica se fundamenta sobre el proceso del desarrollo del conocimiento humano, la concepción de enseñanza y aprendizaje como actividad, sobre la base de la racionalidad emancipadora, el aprendizaje grupal como tarea, el carácter social y dialéctico del aprendizaje, la concepción de una educación transformadora de la realidad, el carácter instrumental del conocimiento, el esquema conceptual referencial operativo con significado y sentido (MCROSS), en concordancia con los principios, concepción de enseñanza y las categorías didácticas. En esa dirección, se concibe laEstrategia Didáctica como un sistema de acciones u operaciones que se planifican, ejecutan, controlan, evalúan y rectifican, dirigido a la creación, consolidación y reconstrucción retrospectiva en el proceso de apropiación consciente de un MCROSS de la matemática teniendo en cuenta principios, métodos científicos y los distintos componentes del proceso de enseñanza -aprendizaje.

Principios pedagógicos

* El estudiante como sujeto y objeto de su desarrollo.
* El desarrollo del grupo como sujeto de la actividad de enseñanza y aprendizaje:
* El formador como coordinador, orientador y dirigente del proceso de enseñanza-aprendizaje.
* Vínculo teoría y práctica.
* La enseñanza desarrolladora.
* El carácter formativo y educativo de la evaluación.

Sobre la base de los principios anteriores, se instrumentan las clases, considerando durante el proceso que la *enseñanza-aprendizaje* es la actividad social compartida, desarrolladora, potenciadora, espiralada, comunicativa y transformadora entre formador-estudiante de nuevas formas de pensar, sentir y actuar en relación con la noción de derivada; que consiste en un sistema de acciones, operaciones en su forma material, materializada, verbal externo e interno, mediada por un proceso de reflexión y elaboración conjunta, en su relación dialéctica, que permite superar con significado y sentido a la contradicción, entre lo viejo y lo nuevo, en el proceso de apropiación del contenido objeto, bajo condiciones de orientación e interacción social, en un contexto socio-histórico-concreto.

En esa dirección se configura el siguiente método de aprendizaje.

El procedimiento general

A partir de los supuestos teórico-metodológicos, el investigador reelabora en el programa de la asignatura los objetivos, los contenidos, las tareas, los medios y la evaluación. Diseña, valida y aplica los instrumentos de constatación inicial y final. En tal sentido se planificaron 6 actividades docentes de 80 minutos cada una: constatación inicial, 4 talleres, 1 evaluación y constatación final. Para cada clase se planifican los objetivos, contenidos y métodos, se elaboraron y aplicaron 9 tareas (4 grupales, 4 individuales y 1 grupal-individual), momentos de control en el proceso (en los casos que se requería) y procedimientos en correspondencia a tres momentos del MCROSS: creación de la noción de derivada en forma grupal, consolidación de la noción de derivada en forma individual y reconstrucción retrospectiva del proceso de elaboración y apropiación de la noción de derivada en forma grupal-individual teniendo en cuenta los conocimientos, habilidades y motivos a formar, el vínculo entre los participantes y la evaluación y control de la instrumentación de la estrategia.

La planificación implicó la reelaboración del programa de la asignatura en el tema de las derivadas, así como cada una de las categorías didácticas en función a los momentos del MCROSS. En esa dirección se confeccionó un sistema de acciones y operaciones para orientar el diseño de los objetivos, contenidos, tareas, métodos, medios, control y evaluación. Los objetivos de la unidad sobre las derivadas del programa de la asignatura se determinaron a partir de la consideración del análisis realizado de la lógica de la noción de derivada, se concibieron en términos del estudiante a partir de acciones o tareas relacionados con los conocimientos y habilidades esenciales del programa vigente. El contenido se presentó con lo general de la noción de derivada y los procedimientos lógicos necesarios para su asimilación. En el diseño de las tareas se tuvo en cuenta la modelación en los momentos del MCROSS, presentadas como retos a partir del desarrollo real y potencial del grupo de clase y/o el estudiante, sobre la base del trabajo grupal e individual, caracterizadas a modo de propuesta con carácter abierto y semi-estructuradas, estableciendo las condiciones en las cuales se ejecutarían. El criterio para seleccionar los métodos fue hacer viables los objetivos, establecer vínculos de la tarea con los objetivos y contenidos, en tanto fortalecían el vínculo entre la teoría y la práctica y el plano afectivo en el grupo, así como la reflexión en la acción, la comunicación entre estudiante-estudiante y estudiante-profesor y sobre todo el trabajo grupal. Los medios utilizados se correspondieron a los momentos de la asimilación de la acción según su forma, a partir de recursos materiales que propiciaron la realización de las tareas para transitar del plano externo al interno en el proceso de apropiación del concepto de derivada. El control permitió realizar ajustes necesarios de las acciones en función al proceso y resultados de las tareas, con la intención de hacer copartícipe al estudiante en sus distintos momentos, como forma de control mutuo (estudiante-estudiante) y autocontrol, en función de los momentos de la acción que conducen a la verificación y retroalimentación en el proceso de ejecución de las tareas. La evaluación se concibió con carácter formativo y educativo, centrada en la negociación del qué, para qué y cómo alcanzar las metas, a través de un proceso fundamentalmente de autoevaluación y coevaluación.

Diseño metodológico

Consistió en una combinación de métodos teóricos con elementos de la metodología cualitativa y cuantitativa, con un diseño pre-experimental sin control de variables influyentes.

Está conformada por estudiantes de la asignatura Matemática I, en total 30 estudiantes del I semestre de la carrera de Administración y Contaduría de la Universidad Nacional Experimental de Guayana, Venezuela, que cursaron la cohorte 2006-II.

Métodos y técnicas: métodos teóricos, empíricos y estadísticos.

Análisis de los resultados

Método de aprendizaje para la apropiación consciente de la noción de derivada

Tarea grupal: Determinar qué, para qué, cómo y por qué se configura la noción de derivada en forma gráfica y analítica a partir de algún problema en el campo de la administración y la contaduría y ciencias afines:

1.1 Realizar acciones a nivel material (concreto)-materializado (semi-concreto) que implique la inferencia de la noción de derivada.

1.1.1. Modelar la noción de razón de cambio en problemas del área de la administración y contaduría.

1.1.1.1. Analizar la pendiente de una recta como razón entre los incrementos de las variables.

1.1.1.2. Coordinar el concepto de pendiente de una recta con la idea de derivada.

1.1.1.3. Analizar y coordinar en forma desplegada y generalizada la relación entre la pendiente de una recta y el límite $\underset{h\to 0}{Lím}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ hasta propiciar un modelo o procedimiento que permita calcular la derivada de una función lineal.

1.1.1.4. Coordinar y relacionar gráficamente el objeto de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función cuadrática en un punto con el objeto razón de cambio en dicho punto, a partir de los límites laterales de las rectas secantes en el entorno de dicho punto (paso de la secante a la tangente). Relacionar con el límite $\underset{h\to 0}{Lím}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

1.1.1.5. Analizar gráficamente el objeto de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función cuadrática en varios puntos punto con el objeto razón de cambio en dichos puntos, a partir del límite $\underset{h\to 0}{Lím}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, determinar la regularidad para alcanzar a elaborar el algoritmo que permite calcular la derivada de cualquier función cuadrática.

1.1.1.6. Establecer las diferencias y semejanzas entre $f´(x)$ (variación global) y $f´(a)$ (variación local), a partir de la función cuadrática tratada.

1.1.2. Clasificar y ordenar los distintos fenómenos que expresen razones de cambio afín a la noción de la derivada de una función en el campo de la administración y contaduría. Determinar los fundamentos que definen esta noción o no.

1.1.3. Establecer el significado de los límites $\underset{h\to 0}{Lím}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y $\underset{h\to 0}{lím}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para definir los objetos $f´(a)$ y $f´(x)$.

1.1.4. Modelar el significado y sentido entre los objetos $f´(a)$ y $f´(x)$.

1.1.5. Generalizar y particularizar los objetos $f´(a)$ y $f´(x)$ en la resolución de problemas de la administración y contaduría.

1.2. Realizar acciones a nivel verbal (reflexión crítica) sobre el significado y sentido de la noción de derivada**.**

1.2.1. Interpretar geométricamente el qué, cómo se configura y para qué de los límites $\underset{h\to 0}{Lím}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y $\underset{h\to 0}{lím}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

1.2.2. Establecer que relaciones y diferencias hay entre los objetos $f´(a)$ y $f´(x)$.

1.2.1. Modelar con significado y sentido los objetos $f´(a)$ y $f´(x)$ en problemas de la administración y contaduría.

1.2.2. Esclarecer cómo se configuran algunas reglas de derivación a partir de la definición de límite sobre el cociente incremental.

1.3. Realizar a nivel mental (abstracto) acciones de resolución de tareas específicas sobre derivación de funciones y resolución de problemas en el contexto de la administración y contaduría.

Tarea individual: Argumentar el qué, para qué, cómo y por qué se configura la noción de derivada en forma gráfica y analítica.

1. A nivel material-materializado:
   1.1. Elaborar en forma visual (concreta) un modelo sistémico que sea representativo de los objetos f´(a) y f´(x).
   1.2. Resolver gráficamente tareas que impliquen las relaciones y diferencias entre los objetos f´(a) y f´(x).

2. A nivel verbal:
   2.1. Argumentar las relaciones y diferencias entre los objetos f´(a) y f´(x).
   2.2. Explicar cómo se manifiestan estos objetos en problemas de la administración y la contaduría.

3. A nivel mental:
   3.1. Explicar con significado y sentido la noción de derivada.
   3.2. Resolver problemas de la administración y contaduría.

Experimento pedagógico

Se reportan los resultados inicial, del proceso y final de la aplicación de la estrategia durante el desarrollo de la experiencia pedagógica. El referente de partida es la caracterización del desarrollo real que tienen los estudiantes, para iniciar su formación, a partir de la constatación inicial (evaluación diagnóstica), la cual permitió recoger individualmente, conocimientos inherentes a algunos conocimientos previos a la noción de derivada. Como segundo aspecto se analiza todo el proceso de ejecución de la estrategia, a través de los distintos momentos por los que transitó el grupo de estudiantes en la apropiación consciente de un MCROSS para apropiarse de la noción de derivada. El método utilizado fue la observación. Se realizó el registro de 4 clases a través de registros anecdóticos de cada clase, que en alguna medida permitió hacer una reconstrucción del proceso vivido. En cuanto al análisis final, se aplicó una evaluación docente y la semana siguiente a la experiencia la constatación final, con el propósito de evaluar en qué medida se logró la apropiación consciente de la noción de derivada.

Nivel de desarrollo real de los estudiantes al inicio de la experiencia. Constatación inicial

Por medio de las preguntas del diagnóstico inicial, se determina que al comenzar el curso el 100% de los participantes demostró no tener algún conocimiento sobre la noción de derivada. No obstante, referente a algunos conocimientos previos, se evidenció que el 60% de los estudiantes en un nivel alto interpretan el significado de la pendiente, el 26, 6 % en un nivel medio, el 3, 3% en un nivel bajo y el 10% en un nivel crítico. En cuanto al modelo general para encontrar la pendiente, el 13,3% lo presentó correctamente y el 86,6% incorrectamente. En cambio, cuando se pide representar y señalar en una circunferencia la recta secante y la recta tangente, el 50% lo hace correcta e incorrectamente. Esta relación no la mantienen al argumentar el porqué de cada caso: el 36,6% argumenta correctamente y el 63,33% incorrectamente.

De todo lo anterior puede inferirse que los alumnos al iniciar la experiencia carecen de ideas o conocimientos sobre la noción de derivada, por otra parte el 60% interpretó con significado la pendiente y el 50% dibujó en una circunferencia las rectas secante y tangente; sin embargo, no mantienen este dominio cuando se les pide en forma mental el modelo general para encontrar la pendiente (sólo un 26,6 % lo hizo correctamente) y argumentar por qué es una recta tangente y secante.

Al respecto, afirmamos que los estudiantes arribaron a la experiencia con un nivel crítico de conocimientos acerca de la noción de derivada y con tendencia a nivel medio sobre algunos de los conocimientos previos.

Análisis del proceso de apropiación consciente de la noción de derivada

Durante el proceso de aplicación de la estrategia didáctica, los estudiantes, se configuraron en forma grupal e individual. Como grupo desarrollaron una serie de tareas que condujeron en forma consciente a construcciones colectivas con significado y sentido. Asimismo y en un nivel superior, se dio un ciclo de cambio y transformación para que el sujeto individual reconstruyera lógicamente los pasos para apropiarse de la noción de derivada. Los métodos participativos seleccionados e instrumentados por el formador, permitieron al final de cada momento que el grupo de estudiantes llegara a consenso, a unificar criterios sobre la noción de derivada. El recurso utilizado para determinar los eslabones que caracterizaron la apropiación consciente fue el registro anecdótico. Al respecto se tomaron notas de 4 clases referentes a algunos indicadores que evidenciaron la apropiación consciente.

En la primera actividad, el formador dio la bienvenida, se realizaron las presentaciones correspondientes, planteó la propuesta de objetivo general y cómo podía ir lográndose, destacando la importancia de establecer un marco referencial de conocimientos y procedimientos en el grupo para apropiarse de la derivada. Luego, el formador destacó la importancia de determinar el nivel de conocimientos de partida en relación a la noción de derivada, lo cual se tendría en cuenta para la instrumentación de las tareas. Se aplicó un cuestionario que recoge el nivel de desarrollo real para abordar la enseñanza del contenido nuevo.

En la clase 2 comenzó a evidenciarse el carácter compartido de la tarea grupal, donde todos, reflexionaron acerca del significado y sentido del carácter compartido del aprendizaje para apropiarse, durante la ejecución, del significado de la derivada de una función lineal. En esa dirección manifestaron formas de pensar, sentir y actuar en el grupo referente al aprendizaje de la pendiente como una razón de cambio. La tendencia de los participantes fue explicar el algoritmo para calcular la pendiente, a partir de la trama vincular generada por el análisis, que se caracterizó por la contrastación de opiniones, creencias, contradicciones, y nuevos referentes, sobre el proceso del cálculo de la pendiente y la derivada por límite. Este proceso comunicativo sirvió de premisa para el proceso de creación de un marco conceptual referencial operativo con significado sentido sobre la noción de derivada que se evidencia por la acción conjunta del grupo que consolidó al mismo en su nivel de desarrollo como sujeto grupal y potenció el desarrollo psíquico de sus miembros, a través de la reflexión y comparación conjunta, lo cual permite el desarrollo de nuevos niveles de conciencia de lo nuevo, el manejo de nuevas herramientas, la instrumentación de tareas que en un principio no eran capaces de desarrollar correctamente. En tal sentido se evidenció la manifestación de algunos indicadores de la apropiación consciente del MCROSS relacionados con el para qué y el qué de la noción derivada, al proponer ejemplos de la función derivada de las funciones lineales. Esta manifestación permitía pensar que los estudiantes habían desarrollado la habilidad para calcular la derivada de una función lineal. En consecuencia se puede afirmar que el grupo de clase en su mayoría logró, en un nivel alto, apropiarse de la noción de derivada de las funciones lineales. Este supuesto nivel de desarrollo alcanzado por el sujeto grupal, es premisa para pasar al segundo momento del MCROSS a través de un movimiento espiralado que conduce a un nivel cualitativamente superior, en el cual se realizan acciones, operaciones, procedimientos sobre la base de determinados conocimientos, a nivel individual, a partir de la tarea individual, la cual promovió el trabajo grupal centrado en el desarrollo del estudiante, para la toma de conciencia, en un nivel superior, del proceso lógico para calcular la derivada. A medida que el sujeto individual ejecutaba las acciones para responder al qué, para qué y cómo en la realización de la tarea individual, con la ayuda del otro, retomaba los aspectos lógicos esenciales de la realidad concreta sobre esta noción, compartidos y elaborados como sujeto grupal en el proceso de elaboración conjunta de la tarea grupal, a partir del cual reeditó, a un nivel cualitativamente superior, lo que posibilitó un consenso grupal que condujo al momento de consolidación del MCROSS. A manera de conclusión sobre este segundo ciclo de la espiral podemos afirmar que la gran mayoría del grupo de clase consolidó el MCROSS alcanzando, como tendencia, un nivel alto de apropiación de la habilidad y conocimiento sobre la noción de derivada.

En la clase 3, a partir de la tarea docente se hace transitar nuevamente al grupo en la construcción del significado de la noción de derivada de las funciones cuadráticas. La ejecución de la clase permitió al grupo funcionar en unidad, encontrando cada uno de los ítems solicitados, en tanto comunicaban los resultados encontrados, organizan y asocian sus experiencias, sensaciones, percepciones, emociones y pensamientos para interpretar la noción de derivada como la pendiente de la línea tangente en un punto específico, resolviendo el problema de tasa de cambio. A medida que los estudiantes reflexionaban sobre el problema, a partir de la función ingreso marginal, predecían la variación en el ingreso local al producir una determinada unidad, esto les permitía coordinar la pendiente de la recta tangente con la idea de derivada como la razón de cambio en un punto dado. No obstante, fue controversial que alcanzaran hacer la distinción entre los objetos: función derivada, la derivada en un punto y la función primitiva, sin embargo las acciones de verbalización sobre qué configura cada uno de estos objetos, propició coordinar y traducir las representaciones de la función ingreso, la función ingreso marginal y el ingreso marginal en un punto, lo cual condujo al grupo a coordinar varias interpretaciones del concepto de derivada en diferentes contextos: costo marginal y utilidad marginal. Finalmente, en plenaria, todos los participantes reconocieron las distinciones entre estos objetos, comunicaron e interpretaron la definición de derivada por límite y geométricamente como aproximación de la razón instantánea de la pendiente de la recta secante a la recta tangente.

En la clase 3, en plenaria y en forma protagónica los miembros del grupo reconstruyen lógicamente lo acontecido en el proceso de elaboración y diferenciación de la noción de derivada y se propone abordar la nueva tarea docente en forma grupal (control). Este momento de control, permitió la aplicación del MCROSS sobre la noción de derivada. En esa dirección, los grupos abordan la tarea con menor ayuda del formador. Luego en plenaria los estudiantes reflexionaron el problema de la función costo y costo marginal con significado, determinaron la variación al producir una determinada unidad, que en esencia permitía coordinar la pendiente de la recta tangente con la idea de derivada como la razón de cambio en un punto dado. Asimismo, los estudiantes determinaron la regularidad para encontrar analíticamente la función derivada, momento oportuno para generalizar la regla de la potencia n-ésima para determinar la derivada de la función $f(x)=x^n$ y coordinar la misma para encontrar la derivada de funciones lineales y cuadráticas.

El resultado de la tarea control, evidenció en el grupo la manifestación de un nivel medio a alto **de** la habilidad de coordinar la pendiente de la recta tangente como la razón de cambio instantánea en los puntos indicados, con lo se manifiestan algunos indicadores de la apropiación consciente del MCROSS relacionados con el para qué y el qué de la noción derivada aplicado en funciones cuadráticas, y permitía pensar que los estudiantes habían desarrollado la habilidad para calcular la derivada de funciones cuadráticas. En esa dirección y espiraladamente se aplica la nueva tarea en un nivel cualitativamente superior en el que se realizan acciones, operaciones, procedimientos sobre la base de los conocimientos abordados en forma grupal, a partir de la tarea individual. En la ejecución de la actividad en distinguir el objeto función utilidad marginal de la utilidad marginal en un punto, se observó que la mayoría de los alumnos resolvieron la tarea sin ayuda del formador, compartida y procesada en plenaria. Finalmente se aplica un nuevo control (tarea), para determinar la formación de la habilidad en coordinar con sentido la función derivada y la noción de derivada, a partir de la reflexión sobre las operaciones aplicadas al control. Al respecto, todos responden en un nivel superior y en forma individual al control, lo que hace suponer un nivel medio a alto de apropiación de la noción de derivada, al reconocer que todas las situaciones en la cual la variación está involucrada esta relacionada con el concepto de derivada.

En la clase 4, los participantes, dirigidos por el formador, reconstruyen el proceso histórico-lógico del proceso vivido, determinan en forma lógica cómo resolvieron los problemas de tasa de cambio, en tanto argumentan e interpretan por qué la derivada es la pendiente de la línea tangente en cada punto analizado y su relación con la idea de derivada como la razón de cambio en un punto dado, justifican e interpretan los intervalos de crecimiento y decrecimiento a partir de la derivada, puntos máximo y mínimo y comparten el sentido de la derivada en el estudio de las funciones marginales. Estas especificidades son premisa para alcanzar la generalización sobre los objetos $f(x)$, $f'(x)$ y $f'(a)$. De manera análoga a los encuentros anteriores, el formador hace transitar a los estudiantes, desde el trabajo grupal y luego ascender al trabajo individual, evidenciándose la manifestación del significado algebraico y geométrico de la derivada, ellos reconocen e interpretan las derivadas como pendientes o razones de cambio de una función en un punto dado y reconocen e interpretan que todas las situaciones en la que la variación está involucrada esta relacionada con el concepto de derivada, expresando en la plenaria coherencia entre los objetos $f(x)$, $f'(x)$ y $f'(a)$. Esta evidencia hace pensar que en la reconstrucción retrospectiva del MCROSS sobre la noción de derivada, los estudiantes alcanzaron un nivel de medio a alto en la elaboración de la noción de derivada.

De manera general, podemos resumir en cuanto a los resultados encontrados que la tendencia de los estudiantes fue identificar y argumentar en un nivel medio a alto, las relaciones y diferencias entre los objetos $f(x)$, $f'(x)$ y $f'(a)$, cómo se manifiestan estos objetos en problemas de la administración y la contaduría, lo que conduce a suponer que el grupo logró un nivel medio a alto de apropiación consciente de los elementos que configuran el MCROSS sobre la noción de derivada al explicar con significado y sentido la noción de derivada y resolver problemas de la administración y contaduría.

Resultados de las pruebas de constatación final.

Resultado de la evaluación docente:

En general, el 83,3% de los estudiantes aprobó la evaluación docente, obteniendo puntajes superiores a 5,5 puntos de 10, el 13,3% entre 3 y 5,4 puntos y el 3,3% obtuvo 2 puntos. En particular en el contenido de su evaluación se evidenció en el problema de aplicación sobre la noción de derivada que el 53,3% de los estudiantes responden en un nivel alto, mientras el 33,3% se ubican en un nivel medio y el 13,3% en un nivel bajo. Esto hace pensar que de un nivel medio a alto los estudiantes respondieron con significado y sentido a la aplicación de la noción de derivada. Referente a la comprensión gráfica de los objetos $f(x)$ y $f'(x)$, dada la función primitiva identificar la función derivada, el 66% de los estudiantes en un nivel alto seleccionaron la alternativa correcta y argumentaron con sentido, el 16,6% en un nivel medio, el 6,6% en un nivel bajo y el 10% en un nivel crítico. En tal sentido, los estudiantes en un nivel medio a alto en forma verbal escrito establecen la relación entre la función primitiva y su derivada.

Referente al significado de la derivada el 70% de los estudiantes en un nivel alto en forma verbal escrita, argumentó el qué de la derivada, el 20% en un nivel medio argumentó con poco significado el qué de la derivada, el 3,3% en un nivel bajo y el 6,6% en un nivel crítico.

Con relación al sentido de la derivada, el 80% de los estudiantes en un nivel alto, indicó tres o más aplicaciones de la derivada, el 10% en un nivel medio, el 3,3% en un nivel bajo y el 6,6% en un nivel crítico.

Los resultados de la evaluación docente corrobora la tendencia evidenciada en el proceso de apropiación de las relaciones y diferencias entre los objetos $f(x)$, $f'(x)$ y $f'(a)$, cómo se manifiestan estos objetos en problemas de la administración y la contaduría, y argumentar el significado y sentido la noción de derivada al resolver problemas de la administración y contaduría. En tal sentido el grupo logró un nivel medio a alto de apropiación consciente de los elementos que configuran el MCROSS sobre la noción de derivada.

Resultado cuestionario de salida.

Después de transcurrir tres sesiones de clase, se aplicó un cuestionario de salida con el objeto de verificar si asimilaron algunos de los aspectos sobre la noción de derivada y contrastar con los resultados iniciales. Al respecto, se afirma que el grupo de estudiantes se ubica en un nivel medio de apropiación referente a los siguientes aspectos: expresar en forma verbal escrito el qué (significado) y para qué (sentido) de la noción de derivada, identificar los objetos $f(x)$, $f'(x)$ y $f'(a)$, en cambio se mantiene en los estudiantes en un nivel de medio a alto interpretar la noción de derivada como la pendiente de la línea tangente en un punto específico. En esa dirección se evidenció que los estudiantes en un nivel alto el 53,3% argumentó con significado qué es la derivada, el 20% en un nivel medio, el 13,3% en un nivel bajo y el 13,3% en un nivel crítico. Entre las respuestas en un nivel alto: “valor de la pendiente de la recta tangente en un punto “, “es la pendiente en una recta tangente en cualquier punto de una curva”, “es el límite de una secante cuando se acerca por la derecha o por la izquierda en un punto “. Nivel medio: “es la pendiente de una recta”, “es obtener un límite de una función por aproximación”, y “razón de cambio”. Nivel Bajo**:** es la pendiente de una función lineal”, “la pendiente de una función”, y es la pendiente”.

Cuando se les pide la relación e interpretación entre $f´(a) = \underset{h\to 0}{Lím}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = k$ y la pendiente de la recta tangente de f en (a, f(a)), el 80% de los estudiantes se ubicó en un nivel alto el 13,33% en un nivel medio y el 3,·3% en los niveles bajo y crítico, respectivamente. En cambio, en el trazado e identificación de la recta secante y tangente el 73,3% lo realizó en un nivel alto, el 13,33% en un nivel medio, el 10% en un nivel bajo y el 3,3% en un nivel crítico. En cuanto a la vinculación de la derivada con la recta tangente el 66% alcanzó un nivel alto, el 20% un nivel medio, el 6,6% un nivel bajo y crítico.

Con relación al cálculo de $f´(x)$ en $f(x) = 3x^2 + 2$, el 80% lo encontró correctamente y el 20% no, en tanto el 70% encuentra $f´(1)$ y un 30% no encuentra dicho valor.

Los resultados sobre el significado de las expresiones $f(x)$, $f´(x)$ y $f´(1)$, indica que es más fácil para los estudiantes identificar la función primitiva en comparación a la función derivada y la derivada en un punto, siendo esta última más compleja de asimilar. En tal sentido los datos reportan que en general el 63% en un nivel alto, asigna en forma correcta los significados a las tres expresiones, el 20% en un nivel medio asigna significados sólo a dos expresiones, el 6,6 % en un nivel bajo sólo a una expresión y el 3% en un nivel crítico no asigna significados. En particular, el 86% identifica correctamente a $f(x)$, el 76,6% a $f´(x)$ y el 63% a $f´(1)$.

Con relación al sentido de la noción de la derivada, el 46,66% en un nivel alto indica tres o más aplicaciones de la derivada, el 23,3% en un nivel medio indica dos aplicaciones de la derivada, el 20% en un nivel bajo indica una aplicación de la derivada y el 10% no indica aplicaciones de la derivada. Entre las respuestas dadas se encuentran las siguientes: “para determinar utilidad máxima, costo máximo, ingreso máximo”, “para ver si la gráfica es creciente o decreciente”, “determinar puntos máximos o mínimos”, “determinar intervalo de crecimiento y decrecimiento”, “para calcular las funciones marginales del costo, ingreso y de la utilidad”, “para calcular la pendiente de la recta tangente que pasa por un punto de la gráfica”.

De manera general, contrastando los resultados encontrados en el cuestionario de salida con el cuestionario de entrada, los datos revelan un salto cualitativo en el desarrollo alcanzado por los estudiantes en cuanto a la noción de derivada, el significado de la pendiente de una recta y el trazar e identificar la recta tangente y la secante a la curva.

Finalmente, a partir de los resultados constatados durante la experiencia, se puede hablar a favor de la pertinencia de la estrategia teórico-metodológica y el método de aprendizaje de partida para contribuir, en alguna medida, a la apropiación consciente de un MCROSS sobre la noción de derivada, lo que se corrobora con los resultados de la evaluación y la constatación final.

Consideración final

A partir del diagnóstico inicial, final, y el análisis del proceso llevado a cabo, se evidenció que los estudiantes se apropiaron, en un nivel medio a alto, de la habilidad de coordinar la noción de derivada como la pendiente de la recta tangente y encontrar la derivada de funciones lineales y cuadráticas por definición de límite y/o regla de la potencia n-ésima y el conocimiento sobre qué es la derivada, cualidades de los objetos $f(x)$, $f´(x)$ y $f´(a)$, y la idea de la derivada como la razón de cambio en un punto dado, que en el campo de la administración y contaduría refiere a modelos que involucran a las funciones marginales, entre ellas el costo, ingreso e utilidad marginal. En tal sentido, la estrategia didáctica y el método de aprendizaje asumido por el docente, contribuyó a la apropiación de un nivel medio a alto del MCROSS sobre la noción de derivada al desarrollo del grupal y el estudiante, a partir de la tarea trabajada desde lo grupal que instituye lo individual, y éste a su vez enriquece al grupo a partir del análisis que el estudiante aporta en el trabajo colectivo y la reflexión crítica en el diálogo grupal.

Conclusiones

* La aplicación de la estrategia didáctica fundamentada en los momentos de creación, consolidación y reconstrucción retrospectiva de un MCROSS y el método de aprendizaje para la apropiación consciente de la noción de derivada propició en el grupo de estudiantes un nivel medio a alto de apropiación consciente de un MCROSS sobre la noción de derivada.
* El estudio de los contenidos a partir de las tareas grupales e individuales, propició en los estudiantes de la carrera Administración y Contaduría la apropiación de la noción de derivada (caso lineal y cuadrático) con significado y sentido, lo cual hace pertinente el método de aprendizaje propuesto por el autor y permitió al estudiante alcanzar niveles superiores de generalización al aproximarse a la asimilación de la regla de derivación de la función potencia.
* La incorporación en el método de aprendizaje de definir los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ a partir de problemas sobre funciones marginales y la utilización de la notación incremental dado por los límites $\underset{h\to 0}{Lím}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y $\underset{h\to 0}{lím}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ permitió el ascenso en los estudiantes en comprender las diferencias y establecer las relaciones entre estos objetos. Este elemento contextual coordinado con la definición de límite propicia el surgimiento de nuevos motivos para elaborar con significado el concepto de derivada, lo cual pudiera superar la contradicción que surge en los estudiantes en el aprendizaje de estos objetos.
* Los resultados sobre el significado de las expresiones $f(x)$, $f'(x)$ y $f'(a)$, indica que es más fácil para los estudiantes identificar la función primitiva en comparación a la función derivada y la derivada en un punto, siendo esta última más compleja de asimilar.

Recomendación

Esta experiencia fue un primer acercamiento al método para que el estudiante aprenda la derivada con significado y sentido, constituye un eslabón para generar nuevas investigaciones en la Línea de Investigación en Educación Matemática de la UNEG, que podría repercutir en otras líneas de investigación, dentro y fuera de la UNEG. En esa dirección se recomienda perfeccionar y validar y el método de aprendizaje a partir de nuevas investigaciones sobre el aprendizaje de la derivada y todas sus implicaciones, en tanto se estudia su aplicación en otros conocimientos matemáticos de igual naturaleza.

Referencias bibliográficas

Badillo, E. (2003), La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemáticas en ejercicio en Colombia. Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona: Barcelona. [URL:http://www.tdx.cesca.es/TESIS_UAB/ VAILABLE/TDX-0611104-144929/]

Jiménez R., José R. (2003). La naturaleza global y dinámica de la derivada como objeto matemático y de enseñanza. Mosaicos No 11. Universidad de Sonora.

Mora, A. (2005). Estrategia didáctica de formación docente para la enseñanza de la matemática en la escuela básica venezolana. Tesis de Doctorado en Ciencias Pedagógicas. Universidad de la Habana.

Mora, D. y otros (2005). Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática. Venezuela: Campo iris.

Los aprendizajes de matemáticas de los estudiantes de tercer grado de secundaria en méxico

Juan Carlos Xique Anaya
Responsable académico del Excale de matemáticas, Secundaria
carlos.xique@inee.edu.mx

Introducción

A fin de ofrecer información válida y confiable que apoye las acciones de mejora para la calidad de la educación, el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) ha desarrollado una nueva generación de pruebas nacionales llamadas *Exámenes para la Calidad y el Logro Educativos* (Excale). Uno de los objetivos más importantes de estas pruebas es el de conocer el logro académico de los estudiantes a niveles estatal y nacional, así como los factores de contexto más importantes que explican las diferencias entre los sectores estudiados (Backhoff y cols., 2005).

En este trabajo presentamos algunos de los resultados y hallazgos más importantes respecto a los aprendizajes de matemáticas que mostraron los estudiantes de tercer grado de secundaria en la primera aplicación del Excale de Matemáticas, que se realizó en mayo de 2005.

En la primera parte ofrecemos información de los criterios empleados y el método seguido para el diseño de los Excale. Posteriormente, ofrecemos algunos resultados de la primera aplicación y terminamos con nuestras conclusiones y recomendaciones.

1. Diseño del Excale de Matemáticas

Con la idea de construir los Excale con los más altos estándares de calidad, se adoptó una metodología robusta. Tres de las características que definen dicha solidez metodológica tienen que ver con el proceso de diseño, documentación y análisis de resultados de los Excale:

* El trabajo colegiado de diversos comités en los cuales intervinieron especialistas en currículo y en la enseñanza de las matemáticas, profesores de matemáticas en ejercicio de las 32 entidades federativas del país y especialistas en psicometría.
* La documentación resultante a lo largo de todo el proceso, deja evidencia de la manera en que se trabaja a lo largo de siete fases y 16 etapas que lo conforman, así como de las decisiones que se van tomando (Backhoff y cols., 2005).
* El uso de métodos aceptados internacionalmente para el análisis y difusión de resultados, así como para la construcción de modelos explicativos del aprendizaje.

Marco de referencia para la conformación de los Excale de Matemáticas para tercero de secundaria

El Excale de matemáticas para estudiantes de tercero de secundaria se diseñó con apego a los contenidos, los propósitos y el enfoque didáctico señalados en el *Plan y Programas de Estudio 1993*. Por ello los reactivos que conforman la prueba implican fundamentalmente la resolución de problemas por parte de los estudiantes en distintos contextos, tanto problemas “de la vida”, como problemas geométricos y problemas netamente numéricos (SEP, 2002).

Por otra parte, dado que en la resolución de problemas el estudiante hace uso de distintos conocimientos y habilidades, se diseñó la prueba no solo considerando las áreas y contenidos matemáticos sino la demanda cognitiva a la que el estudiante es sujeto en cada reactivo. Por ello, se utilizaron reactivos que tienen que ver con el conocimiento de ciertas nociones y principios básicos; otros reactivos que tienen que ver con el dominio de procedimientos o algoritmos formales de la matemática; y otros que implican una mayor demanda en su capacidad de pensamiento lógico y sistemático, así como en el razonamiento intuitivo e inductivo (Mullis et al., 2002).

Estructura de la prueba

El currículo de matemáticas de secundaria consta de cinco ejes temáticos: aritmética, álgebra, geometría, presentación y tratamiento de la información y probabilidad (SEP. 1993). Consecuentemente, el Excale de Matemáticas de tercero de secundaria evaluó los contenidos que conforman dichos ejes, los cuales se describen a continuación.

Aritmética

Se evaluó la comprensión que los estudiantes tienen de las operaciones básicas usando distintos campos numéricos (enteros, decimales y fracciones) y en situaciones donde deben usar dichas operaciones de manera flexible. La evaluación de la potenciación y la radicación se centró en la comprensión de su significado en diversos contextos, más que para realizar cálculos complejos. El conocimiento de los números y sus propiedades se evaluó con situaciones donde los estudiantes debían hacer traducciones del lenguaje verbal al simbólico y del simbólico al verbal, así como en problemas de orden y comparación y en situaciones donde los estudiantes tenían que identificar y usar las distintas representaciones equivalentes de un número. La evaluación de la proporcionalidad se centró en situaciones de proporcionalidad directa y en problemas de porcentajes.

Álgebra

La capacidad de los estudiantes para traducir del lenguaje verbal al simbólico así como el conocimiento de las principales reglas de la escritura algebraica y para operar con expresiones literales. Se evaluó la comprensión que los estudiantes tienen de las variables como número general y de las variables en relación funcional ante problemas donde deban modelar situaciones muy diversas. Se evaluó el conocimiento de las ecuaciones lineales y cuadráticas así como de sistemas de ecuaciones lineales en situaciones netamente numéricas y en la resolución de problemas en diversos contextos. En cuanto a la evaluación de las funciones se puso especial énfasis en la capacidad de los estudiantes para identificar las distintas representaciones de una misma función (expresión algebraica, tablas y gráficas).

Geometría

El conocimiento de las propiedades y características de las figuras básicas y de los sólidos, así como la capacidad para calcular perímetros, áreas, volúmenes y capacidades. Se puso a prueba la habilidad de la imaginación espacial de los estudiantes en situaciones donde debían identificar el resultado de giros, la identificación de sólidos con su desarrollo plano, así como imaginar las secciones que se obtiene al cortar un sólido con un plano. También se evaluó el conocimiento del teorema de Pitágoras y de semejanza en la resolución de problemas de cálculo geométrico. El conocimiento de las razones trigonométricas se evaluó con la resolución de problemas en situaciones de cálculo de distancias inaccesibles a la medición directa.

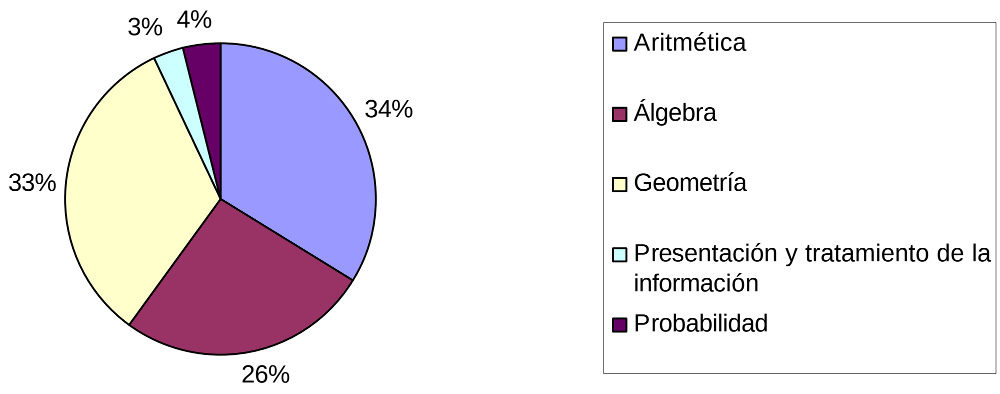
Presentación y tratamiento de la información

Se evaluó la capacidad de los estudiantes para representar información en tablas y gráficas así como su capacidad para usar la información contenida en tablas y gráficas en la resolución de problemas.

Probabilidad

La evaluación de la probabilidad no consideró la aplicación de fórmulas complejas, sino aspectos básicos como el dominio de estrategias de conteo para la definición del espacio muestral de una experiencia aleatoria, así como el uso de la fórmula clásica de la probabilidad, la regla de la suma y del producto en situaciones sencillas.

La proporción del número de reactivos considerados en el Excale de Matemáticas de secundaria, de acuerdo con las áreas del programa, se observa en la gráfica 1.



Grafica 1. Proporción del número de reactivos por áreas del currículo.

Esta distribución de los 128 reactivos de la prueba es aproximadamente la misma que tiene la carga de los ejes temáticos en el currículo de la asignatura.

Diseño de la muestra

El Excale de matemáticas se aplicó a 52 251 alumnos de tercer grado de 2 397 escuelas secundarias de las 32 entidades federativas, al final del ciclo escolar 2004-2005. El diseño tomó en cuenta las distintas modalidades educativas de secundarias: Secundarias Generales (GRAL), Secundarias Técnicas (TEC), Telesecundarias (TV) y Secundarias Privadas (PRIV).

El diseño muestral, fue probabilístico, estratificado y bietápico. La muestra de estudiantes representa 2.9% de la población total de alumnos del Sistema Educativo Nacional (SEN), que es equivalente a evaluar a uno de cada 33 alumnos del país del grado correspondiente. En cada entidad federativa se evaluó en promedio a 75 escuelas, aumentando esta cantidad en los casos en donde la modalidad educativa Telesecundaria fue dominio de estudio (Backhoff y cols., 2006).

El diseño de la muestra no permite ni pretende dar resultados a nivel de escuela, ni a nivel de alumno.

Procedimientos de análisis

La dificultad del Excale de Matemáticas Secundaria fue de 36.2% de aciertos. Su poder de discriminación es de 0.31, su confiabilidad de 0.58 y su poder explicativo de 28% de la varianza observada. Todos los reactivos utilizados en esta prueba mostraron un buen nivel de ajuste (en el modelo de Rasch), por lo que se puede decir que la prueba es suficientemente buena para sus propósitos.

Los resultados de aprendizaje de los alumnos se analizaron de dos maneras complementarias. En primer lugar, se calcularon los *promedios* de las puntuaciones obtenidas por los grupos de estudiantes. Hay que tener en consideración que las puntuaciones de los Excale se presentan en una escala de 200 a 800, con una media centrada en 500 puntos y una desviación estándar de 100 unidades.

En segundo lugar, los resultados de los estudiantes se analizaron en términos de *niveles de logro educativo*, los cuales representan categorías de habilidades y conocimientos que poseen los estudiantes: Por debajo del básico (carencias importantes en la asignatura evaluada), Básico (competencia mínima en la asignatura), Medio (competencia substancial en la signatura) y Avanzado (competencia elevada en la asignatura).

Los datos se analizaron por medio de diversas comparaciones: entre distintos grupos de estudiantes, ya sea por la modalidad de sus escuelas, la entidad federativa de donde provienen, su sexo o edad.

Los resultados de estas comparaciones deben interpretarse considerando las condiciones socioculturales de los estudiantes que acuden a las distintas modalidades educativas. Por distintas razones de orden social y económico (autoselección, cercanía geográfica del plantel escolar, capacidad económica de las familias para sufragar los costos de la escolarización de sus hijos, etcétera), los estudiantes acuden a diferentes modalidades educativas. Las diversas composiciones socioculturales de los grupos de estudiantes pertenecientes a distintos estratos o modalidades educativas, están asociadas a distintos niveles de logro educativo. De acuerdo con los análisis realizados por el INEE, los estudiantes que cursan la secundaria en escuelas privadas y urbanas, son quienes mejores condiciones sociales y culturales tienen; en el extremo opuesto, se encuentran los estudiantes de las escuelas rurales e indígenas, cuya situación es la más desfavorable.

La misma advertencia debe hacerse para considerar las comparaciones entre las entidades federativas. En este caso, es preciso tener en cuenta que la composición de la matrícula estatal, es decir, la proporción de estudiantes que atiende las distintas modalidades educativas, influye en los resultados globales de aprendizaje de cada una de las entidades mismas. Así, es más probable que los estados con mayor número de escuelas privadas y urbanas obtengan resultados de aprendizaje más favorables, mientras que aquellos con una mayor proporción de estudiantes en escuelas rurales e indígenas, consigan resultados menos favorables.

2. Resultados e interpretación

Iniciamos aclarando que los resultados que se presentan a partir de este estudio, no son atribuibles a la “calidad” de las escuelas, o a la falta de ella; para poder concluir algo al respecto, se requeriría de un estudio especial que controlara las variables socioculturales de los estudiantes y que las midiera en forma confiable.

A continuación, se caracteriza a la población de estudiantes de tercero de secundaria en relación con sus competencias y habilidades de Matemáticas. Esta síntesis se basa en las puntuaciones que los estudiantes dieron en cada uno de los reactivos del Excale.

***Aritmética**:* Respecto a las operaciones con números naturales resalta que resolver problemas que implican comprender el significado de las operaciones y el cálculo de la raíz cuadrada de números naturales es uno de los contenidos que un menor número de estudiantes (1%) tienen probabilidades altas de resolver.

En cuanto a la resolución de problemas con números decimales, los estudiantes presentaron algunas limitaciones en contenidos elementales; por ejemplo, ante situaciones en las que hay que traducir un número decimal del lenguaje simbólico al verbal sólo el 5.2% tiene una buena probabilidad de resolverlo adecuadamente, mientras que apenas el 3% tiene buena probabilidad de resolver problemas de traducción de un número expresado con lenguaje verbal, al simbólico; al realizar cálculos con decimales presentan dificultades cuando el problema planteado exige manejar cantidades o representar el resultado de una multiplicación o una división hasta milésimos. También es muy pequeña la cantidad de alumnos con buenas probabilidades de resolver correctamente un problema en donde hay que expresar la equivalencia en minutos de una hora que contiene números decimales (1%).

Las fracciones es uno de los temas en que consistentemente son menores los porcentajes de alumnos que tienen buenas probabilidades de resolver correctamente; por ejemplo, para ordenar y comparar fracciones, el 8%; para identificar el significado de una fracción como parte de un todo, el 2.5%; al operar con fracciones tuvieron desaciertos cuando las fracciones a operar contenían denominadores que no son divisibles entre sí. Problemas que implicaban la multiplicación de fracciones y la interpretación de su resultado, 1%.

En cuanto a otros temas de aritmética, nos parece importante resaltar lo referido a divisibildad y a proporcionalidad. Sólo el 2.1% de los estudiantes tiene buena probabilidad de resolver problemas de divisibilidad. Con respecto a la proporcionalidad, los estudiantes lograron identificar tablas y gráficas de datos que mantienen esta relación, sin embargo sólo 5.8% tiene buena probabilidad de resolver problemas de reparto proporcional y el 3% de resolver problemas de proporcionalidad donde el valor unitario es un número decimal o fraccionario. Mientras que sólo el 1.6% tiene buena probabilidad de resolver problemas de aplicación o cálculo de un porcentaje.

Álgebra: En general la resolución de los problemas algebraicos del Excale resultó más compleja para los estudiantes que los problemas aritméticos. Un mayor porcentaje de estudiantes manifiesta una buena probabilidad de resolver correctamente aquellos que tienen que ver con el dominio de ciertas técnicas y mecanismos formales, y menos en problemas donde se requiere modelar una determinada situación. Por ejemplo, sólo el 5% de identificar la expresión algebraica que modela una situación.

Respecto a las ecuaciones, el nivel de desempeño varió en función del número de ocurrencias de la incógnita y de las operaciones involucradas y fundamentalmente del tipo de ecuaciones. Más fáciles resultaron las ecuaciones lineales, menos fáciles los sistemas de ecuaciones lineales y los más complejos fueron los problemas que implican la resolución de ecuaciones cuadráticas. El 28.3% de los estudiantes tiene buena probabilidad de resolver problemas de ecuaciones de primer grado con una incógnita; el 14.7 % de resolver problemas que implican usar sistemas de ecuaciones lineales de 2x2, y el 0.9% de resolver ecuaciones cuadráticas. Llamó la atención que los estudiantes presentaron muchas dificultades para sustituir correctamente los valores de los parámetros en la fórmula general al resolver ecuaciones de segundo grado, particularmente cuando alguno o algunos de los valores son números negativos, sólo el 1% tiene buenas probabilidades de hacerlo correctamente.

Un aspecto básico en el estudio de las funciones es que los estudiantes puedan usar distintas representaciones de una misma función. En este sentido, donde menos estudiantes manifiestan una buena probabilidad de responder correctamente es ante situaciones en que se tiene que identificar la función que corresponde con una gráfica 0.4%; y por el contrario, al identificar la gráfica que corresponde con una función, 1.1%. El 0.6% manifiesta buena probabilidad de identificar la función que corresponde con una tabla de valores.

Geometría: Considerando los problemas en los que el 18.7% o mayor porcentaje de estudiantes demuestra buena probabilidad de resolverlos correctamente, del total de los contenidos evaluados en la prueba, la mayoría son de geometría. Es decir, del grupo de reactivos en el que los estudiantes manifestaron mayor desempeño, la mayoría son de geometría. De manera general podemos decir que tienen buen desempeño en situaciones de imaginación espacial en donde tienen que hacer giros, así como en problemas de simetría y manifiestan bajo desempeño en donde tienen que hacer uso flexible del conocimiento que tienen de las propiedades de las figuras y de los sólidos; los problemas más complejos son los que implican realizar cálculos geométricos particularmente en problemas donde hay que realizar el cálculo de razones trigonométricas.

De manera particular manifiestan un muy buen desempeño en problemas que tienen que ver con la imaginación espacial. El 97% tiene buena probabilidad de identificar el resultado de girar sólidos compuestos, es decir formados por otros sólidos. El 37% logra identificar las vistas laterales y frontales de sólidos. El 24.6% tiene buenas probabilidades de resolver reactivos que implican identificar la figura que corresponde con un desarrollo plano cuando se trata de pirámides; sin embargo con sólidos más complejos sólo el 1% tiene buena probabilidad de identificar el que corresponde con un desarrollo plano cuando se trataba de un poliedro.

En simetría, los estudiantes manifiestan buen desempeño: el 37.5% de los estudiantes tiene buena probabilidad de identificar figuras simétricas respecto a una recta.

En cuanto a las figuras básicas. Una de las dificultades más significativas en esta área tiene que ver con la habilidad para seguir instrucciones, ya sea para la construcción de una figura básica como para la construcción de un lugar geométrico: 4.4% de los estudiantes tienen buenas probabilidades de contestar los reactivos de este tipo, en promedio. En cuanto al dominio de algunas propiedades de las figuras básicas, el 18.4% tiene buena probabilidad de reconocer que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°; por otra parte, los estudiantes demostraron conocimiento de los elementos de los sólidos: el 83.8% tiene buena probabilidad de identificar semejanzas entre un conjunto de sólidos.

De los sólidos, las mayores dificultades se presentan en problemas en que requieren comprender las implicaciones que sufre el área o el volumen de una figura o sólido al aplicarle una escala, 4%; por otra parte sólo el 1.7% tiene buena probabilidad de acertar en problemas que implican comparar el volumen de sólidos, prismas y pirámides, conos y cilindros.

Los problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras y el cálculo de las razones trigonométricas resultaron muy complejos para los estudiantes, sólo el 1.1% tiene buenas probabilidades de resolverlos correctamente.

Presentación y tratamiento de la información: El contenido que los estudiantes conocen en mayor medida es la resolución de problemas que implican calcular la moda y la media aritmética: 14.7% de los estudiantes tienen buenas probabilidades de resolverlo.

Probabilidad: Sobre el tema de probabilidad, el 64.4% de los estudiantes tiene buenas probabilidades de resolver problemas de comparación de probabilidades en casos muy sencillos, por ejemplo con monedas y dados; el 0.4% para resolver problemas en los que hay que aplicar la regla de la suma y el 0.2% para resolver problemas en lo que hay que aplicar la regla del producto.

Resultados por estrato escolar1

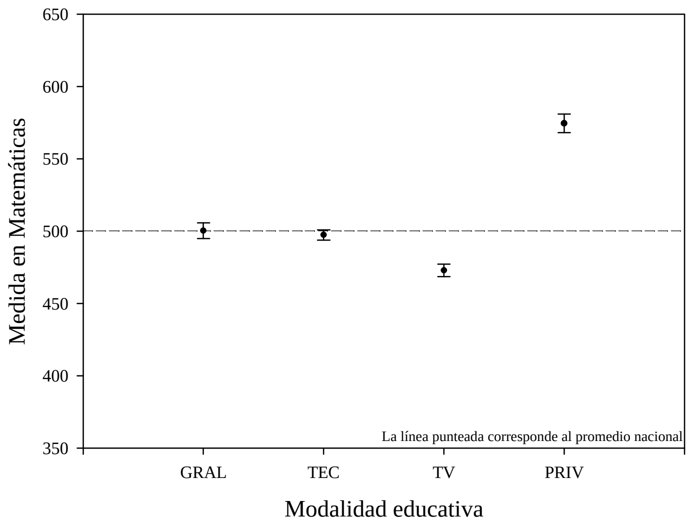


Figura 1. Medias nacionales en Matemáticas por modalidad educativa: 3º de secundaria.

Los estudiantes de las Secundarias Privadas (PRIV) obtuvieron una puntuación mayor, seguidas de las Secundarias Generales (GRAL) y las Secundarias Técnicas (TEC), y finalmente las Telesecundarias (TV). La diferencia que existe entre las primeras y las últimas es de 102 puntos, equivalentes a una desviación estándar de la distribución nacional.

Para conocer el tipo de habilidades relacionadas con las Matemáticas que los estudiantes de tercero de secundaria poseen, las habilidades de los alumnos se analizaron por niveles de logro, mismos que se describen en la tabla I[2].

---

[1] Las tablas y gráfica 2, que se presentan en esta ponencia fueron tomados textualmente del Resumen Ejecutivo "El aprendizaje del español, las matemáticas y la expresión escrita en la educación básica en México" presentado por el INEE en Agosto de 2006.

[2] La definición y redacción de los niveles de logro fue realizada por el comité académico de este Excale.

Tabla I. Niveles de logro del Excale de Matemáticas de 3º de secundaria

Niveles de logro y puntos de corte	**Competencias académicas**
Por debajo del básico (hasta 499.30)	Los alumnos de este nivel resuelven problemas que impliquen una adición o una sustracción con números naturales, enteros, decimales o fraccionarios, así como problemas de multiplicación y división con números naturales. Asimismo, establecen relaciones entre una tabla de valores y su gráfica, en funciones lineales o cuadráticas. Adicionalmente, identifican figuras o cuerpos geométricos a partir de sus elementos (lados, caras, etc.). Finalmente, estiman y comparan la probabilidad de eventos simples.
Básico (499.31 – 583.20)	Los alumnos de este nivel resuelven problemas que impliquen dos o más operaciones (adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación) con números naturales y enteros. Identifican situaciones de proporcionalidad. Suman y restan polinomios y resuelven ecuaciones de primer grado con una incógnita, así como sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Igualmente, utilizan las propiedades de las figuras (por ejemplo: ángulos, lados y diagonales) en la resolución de problemas de medición. También calculan el perímetro y área de figuras básicas (triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares) y el volumen de cuerpos geométricos.
Medio (583.21 – 734.45)	Los alumnos de este nivel resuelven problemas en los que se utilizan varias operaciones con números decimales o fraccionarios así como la raíz cuadrada con números naturales. Resuelven problemas de proporcionalidad con valor unitario no entero o de reparto proporcional, incluyendo porcentajes. Resuelven problemas que implican usar la jerarquía de operaciones. Asimismo, multiplican polinomios y modelan situaciones mediante una función lineal o cuadrática. Modelan también situaciones que implican sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Establecen relaciones entre dos cualesquiera de las formas de representación de una función lineal o cuadrática. Establecen relaciones entre una tabla de valores y su expresión algebraica. Asimismo, resuelven problemas que implican el cálculo del perímetro del círculo, utilizan las propiedades de lugares geométricos (alturas, bisectrices, mediatrices) en la resolución de problemas de construcción, de medida o de escala. Finalmente, interpretan información contenida en tablas o gráficas de distintos tipos. Resuelven problemas de conteo y determinan la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes.
Avanzado (734.46 o más)	Resuelven problemas que impliquen potenciación y radicación con números naturales o decimales. Dividen polinomios y modelan problemas mediante ecuaciones de segundo grado. Establecen relaciones entre todo tipo de representaciones: tabulares, gráficas y algebraicas de una función lineal o cuadrática. Factorizan polinomios. También resuelven problemas que implican el cálculo del área del círculo, así como del área lateral y volumen de cuerpos geométricos; también utilizan propiedades o teoremas sencillos para resolver problemas geométricos o de medición (por ejemplo las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras). Realizan transformaciones o movimientos en el plano (simetría, rotación, traslación) en la resolución de problemas de construcción, de medida o de escala. Finalmente, resuelven problemas de probabilidad aplicando la regla de la suma o del producto.

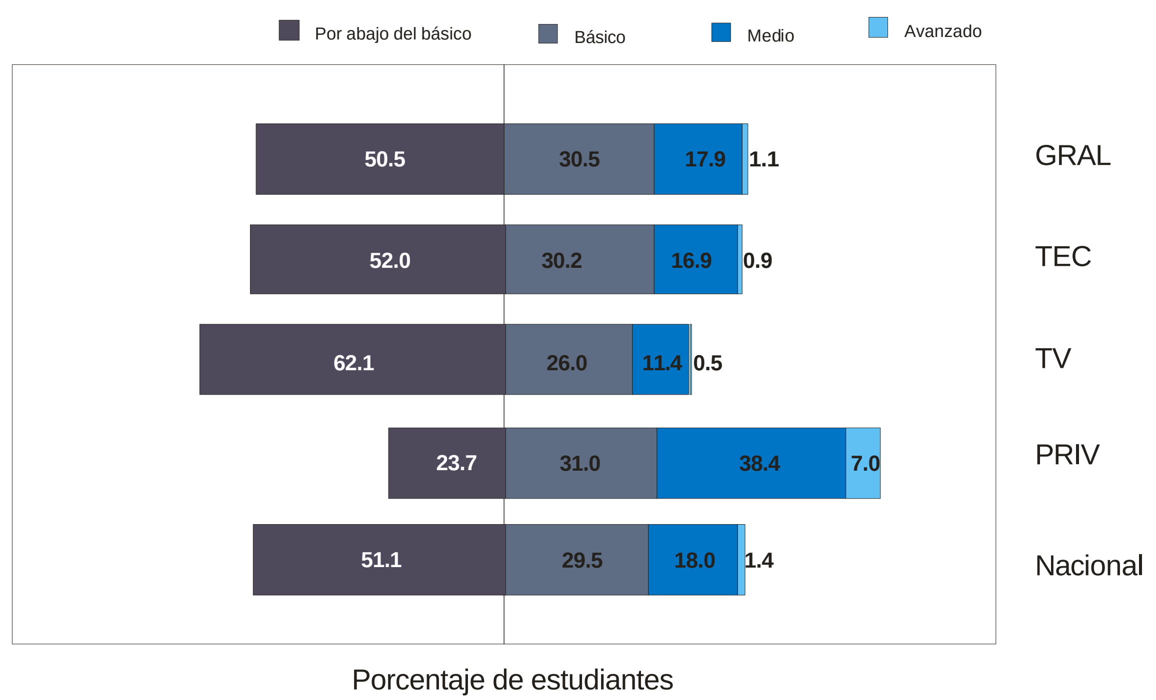
Cerca del 51% de los estudiantes del país se ubican en el nivel Por debajo del básico, casi 30% en el Básico, 18% en el Medio, mientras que menos de 2% de ellos se clasifican en el nivel Avanzado.

Sin embargo, se observan grandes diferencias por modalidad educativa:

- * *Secundarias Generales y Secundarias Técnicas.* En promedio el 51% de sus alumnos se ubican en el nivel Por debajo del básico, 30% en el Básico, mientras que 19% de ellos se encuentran en los dos niveles más altos (Medio y Avanzado).
- * *Telesecundarias.* Cerca del 62% de sus estudiantes se encuentran en el nivel Por debajo del básico, el 26% en el Básico, y el 12% de ellos se encuentra en los dos niveles más altos.
- * *Secundarias Privadas.* Aproximadamente, el 24% de sus estudiantes se ubican en la categoría Por debajo del básico, el 31% en el nivel básico y el 19% de ellos se encuentran en los niveles Medio y Avanzado.

Tabla II. Porcentaje de estudiantes en cada nivel de logro de Matemáticas por modalidad educativa: 3º de secundaria.

Estrato educativo	Por debajo del básico		Básico		Medio		Avanzado	
	%	(EE)	%	(EE)	%	(EE)	%	(EE)
GRAL	50.5	(1.3)	30.5	(1.0)	17.9	(0.8)	1.1	(0.2)
TEC	52.0	(0.8)	30.2	(0.5)	16.9	(0.6)	0.9	(0.2)
TV	62.1	(1.1)	26.0	(0.8)	11.4	(0.6)	0.5	(0.2)
PRIV	23.7	(0.9)	31.0	(0.9)	38.4	(0.9)	7.0	(0.6)
Nacional	51.1	(0.6)	29.5	(0.5)	18.0	(0.4)	1.4	(0.1)



Gráfica 2. Porcentaje de estudiantes en los cuatro niveles de logro de Matemáticas: 3º de secundaria.

Conclusiones y recomendaciones

Los estudiantes de educación secundaria no han logrado adquirir los conocimientos y habilidades previstos en el currículo de matemáticas. Esta situación exige reforzar y reorientar los esfuerzos que las instituciones realizan a favor del mejoramiento de la calidad de los aprendizajes de los estudiantes.

Si bien la eficacia de la intervención docente es fundamental para el logro de los aprendizajes de los estudiantes, es importante tener claro que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas depende de un gran número de factores (Deulofeu, 2000). Cada uno de estos aspectos tiene un nivel de influencia diferenciado en el rendimiento de los estudiantes y solamente a partir de su identificación, valoración y atención será posible aspirar a mejores aprendizajes de los estudiantes.

Finalmente, para el diseño de programas de actualización docente o para el diseño de alguna estrategia institucional de intervención en el aula, consideramos que conviene iniciar centrándose en el estudio y atención de los contenidos curriculares enmarcados en el nivel básico de la tabla 1 (Niveles de logro del Excale de Matemáticas de 3° de secundaria) ya que al intentarlo con los contenidos del nivel medio o del avanzado se corre un gran riesgo de fracaso ya que éstos exigen el dominio de lo básico, que como se ha mostrado con los resultados de esta evaluación, no se tiene.

Bibliografía consultada

Backhoff, E. (2005) Excale. Exámenes de la calidad y el logro educativos. Los temas de la evaluación. Colección de folletos número 8. México: INEE

Backhoff, E., Andrade, E. Sánchez-Moguel, A., Peon, M., Bouzas, A. (2006) El aprendizaje del Español y las Matemáticas en la Educación Básica en México: Sexto de Primaria y Tercero de Secundaria. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE).

Deulofeu (2000) *Planteamientos para el cambio, en Matemáticas y educación*. Barcelona: Editorial Grao.

Mullis, I., Martin, M. Smith, T. Garden, R. Gregory, K. González, E. Chrostowski, S. O´Connor, K. (2002). *Marcos teóricos y especificaciones de evaluación TIMSS 2003*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). (2004a). *La Calidad de la Educación Básica en México: resultados de evaluación educativa 2004*. México: INEE.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). (2003). *La Calidad de la Educación Básica en México*. México: INEE.

Jornet, J. (2006). *El modelo de determinación de Estándares de los Exámenes de Calidad y Logro Educativos (Excale) del INEE de México*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (documento mimeografiado de la Dirección de Pruebas y Medición).

Martínez-Rizo, F., Backhoff, E., Castañeda, S., De la Orden, A., Schmelkes, S., Solano-Flores, G., Tristán, A. y Vidal, R. (2000). *Estándares de calidad para Instrumentos de Evaluación Educativa*. México: Centro Nacional para la Evaluación de la Educación Superior (CENEVAL).

Popham, J. (1990). *Modern Educational Measurement: A Practitioner's Perspective*. Englewood Cliffs, N J: Prentice-Hall.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (1993). *Plan y programas de Estudio. Educación Secundaria.* México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (2002). *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria.* México: SEP.

Creencias sobre lo que significa saber matemáticas en estudiantes de la enseñanza media costarricense

Hugo Barrantes
Costa Rica

Palabras clave
Educación matemática, creencias sobre matemáticas, problemas en matemáticas.

Planteamiento

Una estrategia de enseñanza de las matemáticas basada en la resolución de problemas, subrayaría el carácter conceptual de las matemáticas y privilegiaría el uso de situaciones matemáticas no rutinarias que obliguen al estudiante a una elaboración no mecánica, aplicando conceptos conocidos, estableciendo conexiones entre ellos y creando nuevos conocimientos. Sin embargo, existen algunas dificultades en cuanto a lo que eso significa y el papel que debe desempeñar en la enseñanza de las matemáticas. Esto tiene mucho que ver con la visión particular de las matemáticas que cada quien tenga. En particular, es de vital importancia detectar dicha visión en los propios estudiantes.

Marco teórico

Schoenfeld (1985) propone la consideración de cuatro categorías que inciden en la forma en que las personas abordan el proceso de resolución de un problema matemático:

* *Recursos*: son los conocimientos matemáticos que posee el individuo y que pueden usarse para resolver el problema.
* *Heurísticas*: son las estrategias y técnicas que permiten progresar en la solución de un problema no familiar (o no estándar).
* *Control*: se refiere a las decisiones globales que permiten la selección e implementación de recursos y estrategias.
* *Sistema de creencias*: es la visión del mundo matemático, el conjunto de determinantes del comportamiento del individuo acerca de sí mismo, el medio, el tema tratado, las matemáticas en general.

Por otra parte, según Lampert (1992) la mayoría de las personas piensa que comúnmente las matemáticas están asociada con la certeza y que esta asunción cultural está condicionada por la experiencia escolar. En general, los estudiantes abstraen sus creencias acerca de las matemáticas, en gran medida, como consecuencia del trabajo escolar y, además, estas creencias refuerzan su comportamiento de una forma que tiene poderosas consecuencias.

Metodología

Para explorar algunas de las creencias que sobre las matemáticas poseen los estudiantes de enseñanza media costarricense se aplicó un instrumento. Se seleccionó una muestra de 21 instituciones de 4 regiones educativas. En cada una se seleccionó un grupo de octavo y otro de décimo año. Respondieron la encuesta 1240 estudiantes.

Resultados

A la fecha hemos obtenido algunos resultados importantes. Por ejemplo, una mayoría de los estudiantes piensa que saber matemáticas significa que se puede resolver cualquier problema relacionado con el tema en estudio; también, que se conoce de memoria muchos procedimientos que sirven para resolver ejercicios o se puede aplicar proceso creativos a diferentes situaciones.

Por otra parte, piensan que poder decidir la importancia de un concepto matemático no es necesariamente algo fundamental en el saber matemáticas.

Conclusiones

Las concepciones sobre las matemáticas que tienen los estudiantes costarricense no difieren muchos con los de otras latitudes. Además, lo que piensan los estudiantes tiene mucho que ver con lo que Lampert indica: estas creencias están condicionadas por la experiencia escolar.

Referencias

Lampert, M. (1992) . Handbook for Research on Mathematics. In Schoenfed, A.: *Learning to think mathematically, Teaching and Learning.* D.Grows, Ed. New York:Mac Millan.

Schoenfeld, Alan. (1985). *Mathematical Problem Solving* (1a. edición). Orlando, Florida: Academic Press.

Schoenfeld, Alan. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in Mathematics. *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (D. Grouws, Ed.). p. 334-370, [en línea]. http://gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/LearningToThink/Learning_to_think_Math.html

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. *The teaching and assesing of mathematical problem solving* (Charles & Silver, Eds.). pp.1-22. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hacia una nueva generación de evaluación en matemática

Sergio García
Universidad Bolivariana de Venezuela

Palabras clave
Evaluación, procesos, colectivo.

Planteamiento

Latinoamérica y el Caribe por años ha padecido el grave problema de la deserción y repetición estudiantil producto del bajo desempeño en matemática, entre otras causas. Todo ello, como consecuencia de aplicar políticas educativas dirigidas fundamentalmente a desarrollar la enseñanza de la matemática con esquemas epistemológicos y metodológicos esencialmente positivistas y empírico-analíticas. La gran preocupación ha estado enfocada en el aspecto técnico de cómo enseñar idóneamente los conocimientos matemáticos, para lo cual se han establecido programas instruccionales sustentados en un enfoque disciplinario y monumentalista de la matemática y en diversas taxonomías sobre contenidos específicos donde se indican con precisión el cronograma de trabajo por período lectivo y lapsos académicos, los objetivos generales, objetivos específicos, metodologías y técnicas de enseñanza, planes de evaluación y recursos para desarrollar la enseñanza de la matemática; es decir, estrategias y métodos pedagógicos basados meramente en la enseñanza conductista o cognoscitivista-individualizada.

Como consecuencia de ello, los(as) educadores(as) al aplicar estos programas, lo hacen sin reflexionar sobre el daño que producen sus prácticas pedagógicas unidireccionales y sin percatarse de si los procesos de formación matemática de los(as) educandos(as) se desarrollan con legitimidad, en el entendido de generar colectivamente las necesarias, pertinentes y oportunas (re)creaciones de saberes y experiencias matemáticas para el bienestar social y ambiental. Más grave aún representa el momento de evaluar estos procesos, cuando aplican instrumentos dirigidos a evaluar el conocer y evidenciar aptitudes inteligentes elementales en cada educando(a). Se utilizan indiscriminadamente pruebas, exámenes y *quizzes* escritos, elaborados a partir de bancos de ítems o preguntas y ejercicios de libros que supuestamente responden a objetivos matemáticos preestablecidos; sometiendo los resultados a contrastación mediante patrones de corrección o el libre albedrío, todo ello revestido con una supuesta validez de constructo y una confiabilidad consistente y estable.

Es así como la evaluación en matemática, ubicada en el mundo occidental, ha respondido a cuatro generaciones de evaluación desarrolladas fundamentalmente en Europa y los Estados Unidos de Norteamérica, con influencia sobre otros países del hemisferio.

Marco teórico

Las cuatro generaciones de evaluación

La generación de la medida

La evaluación en esta generación fue por décadas eminentemente técnica, utilizando una gran gama de instrumentos disponibles, fundamentalmente pruebas y exámenes escritos, de tal manera que cualquier variable definida para propósitos de investigación, pudiera ser susceptible de medir. Por ejemplo, los objetos matemáticos, resultado de generalizaciones empíricas efectuadas sobre lo real y sensible por medio de la abstracción; desarrollando una metodología del saber matemático científico, logístico y de indagación analítica.

La generación de los objetivos

En los años treinta del siglo pasado, se aplican tests para medir si el(la) educando(a) aprende lo que sus educadores(as) intentan que aprenda, con lo que surgieron los objetivos generales y específicos de aprendizaje y la enseñanza programada, atomizando los contenidos matemáticos y la evaluación de los aprendizajes. En esta generación, el(la) evaluador(a) asume el papel de observador(a) y descriptor(a), con técnicas de la primera generación, manteniendo la medida como uno de los instrumentos a su servicio.

La generación del juicio

A partir de los años sesenta se incorpora el juicio del(la) educador(a) a la evaluación por objetivos, utilizando ciertos estándares contra los cuales se pudiera emitir un juicio. En estas décadas y la siguiente, la evaluación en matemática aún preserva el enfoque positivista-conductista, sumándose ciertas taxonomías y los principios de integralidad, continuidad y acumulación; además de considerar como instrumentos por excelencia de medición, las pruebas basadas en criterios, sean éstas parciales o finales. Posteriormente, en los años ochenta, la evaluación en matemática incorpora algunos de los tipos de evaluación que caracterizan al enfoque orientado para la toma de decisiones: evaluación diagnóstica, formativa y sumativa; además de modalidades innovadoras como la auto y coevalución, y elementos cualitativos para valorar rasgos de la personalidad.

La generación del constructivismo

Aquí, la evaluación en matemática es concebida, como una construcción mental del ser, para lo cual el(la) evaluado(a) solicita, reclama y limita su modalidad, uso y alcance. Guba y Lincoln (1989), dos norteamericanos, plantearon inicialmente una evaluación dirigida fundamentalmente a mejorar los programas, definiendo tres actores que intervienen en esta evaluación: los(as) agentes (personas involucradas en la elaboración, uso y aplicación de la evaluación), los(as) beneficiarios(as) (personas que se benefician, de alguna manera, con el uso de la evaluación) y las víctimas (personas que se ven afectados negativamente con el uso de la evaluación). En esta generación se observa cómo se mantiene aún la evaluación en matemática centrada en el(la) educador(a).

Retos para asumir en la actualidad

Para Latinoamérica y el Caribe se planean algunos retos para la evaluación matemática, que surgen de la UNESCO y, en el caso específico de Venezuela, de una Educación Bolivariana iniciada por el gobierno actual.

Orientaciones de la UNESCO (París, 1998; Dakar, 2000)

Para esta organización se deben generar espacios abiertos que propicien la formación matemática dentro de una educación integral permanente y para todos(as), fortaleciendo las capacidades endógenas para la generación de saberes matemáticos por medio de la investigación y la innovación, permitiendo que el(la) educando(a) participe en la enseñanza y la evaluación con sentido crítico; es decir, una evaluación en matemática que comprenda la apreciación del entorno, los procesos y los resultados definidos claramente en el campo cognoscitivo y no cognoscitivo, evaluados de manera continua como parte integrante del proceso educativo.

La Educación Bolivariana de Venezuela (2004)

Ella parte de algunos principios y valores consagrados en la Constitución de Venezuela (1999), como son: humanidad, libertad, igualdad, justicia, equidad, accesibilidad, democracia, solidaridad, (co)responsabilidad social, ética, comprensión mutua, cooperación, complementariedad, participación, protagonismo, integridad psíquica y moral, comunicación libre y plural, interculturalidad, diversidad cultural, respeto recíproco, potencial creativo, integralidad, ciudadanía y un ambiente ecológicamente equilibrado. Así mismo, toma en cuenta el ideario Robinsoniano (Simón Rodríguez) y Bolivariano (Simón Bolívar), para quienes es fundamental reconocer las virtudes, el amor a la patria, al trabajo, nuestra historia, los deberes y derechos, los cambios y las transformaciones enriquecedoras del conocimiento y el acervo cultural; ser recto, justo, sincero, trascendente, auténtico, útil, honorable y talentoso, acceder a la igualdad de oportunidades y condiciones para obrar, pensar, ablar y escribir a través del conocimiento, las luces y la experiencia.

Para la Educación Bolivariana, la educación es un continuo humano, que considera el desarrollo personal, la multietnicidad, pluriculturalidad, y plurilingüidad en la diversidad, la convivencia y la interactividad, la (re)construcción social del conocimiento, la transformación individual y social, la flexibilidad; una formación autónoma, el desenvolvimiento armónico, y el aprendizaje cooperativo y significativo, como elementos fundamentales para una formación integral. De igual manera, un desarrollo biopsicosocial, de ser en el saber, hacer y convivir, una soberanía cognitiva que conjugue el pensamiento complejo, reflexivo, crítico y creador, un diálogo de saberes populares, la inclusión social, el aprender haciendo y el enseñar produciendo, la formación de capacidades, actitudes y competencias, un enfoque educativo abierto y contextualizado, una relación integral donde predomine la afectividad, el diálogo, el equilibrio social, la participación y creación colectiva, y una metodología de proyectos.

Teoría asociada a estos retos

Frente a los retos planteados, se presenta una teoría que claramente responde a tales orientaciones, principios y valores:

La teoría de la pedagogía crítica y transformadora (Giroux, 1997; Freire, 1985): Teoría que promueve el trabajo para la libre creatividad y la transformación, delegando en el colectivo la responsabilidad de asumir independientemente los procesos formativos, donde el compromiso social del ser y del colectivo consiste en desarrollar capacidades humanas que coadyuven a liberarse y a identificar las contradicciones existentes en cada realidad y posibiliten su transformación. Procesos que problematicen el contexto, insertos en proyectos pedagógicos de cambio social para una formación permanente. En ella el colectivo asume la responsabilidad de construir su propia evaluación, donde la calificación dialogada emerge para eliminar la práctica de los(as) educadores(as) al utilizarla como instrumento disciplinario para imponer valores, pautas de conductas y opiniones.

Conclusiones y recomendaciones

Por todo lo anterior, podemos concluir que estamos en presencia de andar hacia una nueva generación de evaluación en matemática, ya que las anteriores parecieran no darle alcance a las metas trazadas. Es así cómo la evaluación en matemática será de procesos, definido a su vez como un proceso a desarrollar de manera responsable por el colectivo conformado por educandos(as), educadores(as), padres y representantes y otros actores vinculados al mismo, todos(as) ellos(as) asumiendo un sentido crítico, estético, ético y solidario. Ella se desarrollará a través de la experiencia intersubjetiva asociada al talento matemático integral (inteligencia, pensamiento, consciencia y afectividad matemática) y en el marco de las interrelaciones entre los saberes matemáticos (álgebra, análisis, geometría, estadística, entre otras áreas), y una formación matemática permanente (sensibilización, identidización, transferencia y socialización de los saberes y experiencias matemáticas), (García, 2003).

Un proceso sociocultural e investigativo que valorará el desarrollo de las capacidades matemáticas en el saber matemático, el hacer matemática y el convivir en colectividad; sustentado en un enfoque humano y etnográfico, enmarcado necesariamente en una aproximación de investigación-acción orientada hacia la transformación de saberes matemáticos, del proceso educativo y del contexto sociocultural y laboral; desarrollado además, por el colectivo en ambientes o espacios sociopolíticos plenos de autoestima, confianza, estímulo y libertad para la creatividad y la participación democrática.

Un proceso que, además, tomará en cuenta la calidad de la información matemática que recibe el colectivo, sus propias forma de interpretarla, sus actitudes y competencias en términos de saberes matemáticos en lo teórico y práctico, sus debilidades y fortalezas manifiestas en su ámbito escolar y familiar, así como el entorno institucional, los valores y la diversidad sociocultural como elementos esenciales para desarrollar la evaluación en matemática.

Un proceso a operacionalizar mediante acciones, estrategias y formas evaluativas y metaevaluativas legítimas que más se identifiquen con sus intereses y necesidades en lo social y cultural, y que coadyuven a desarrollar esas capacidades, actitudes y competencias matemáticas para una vida activa, independiente, social, emprendedora, productiva, responsable y ciudadana.

Recomendaciones para desarrollar en evaluación de procesos en matemática

* La evaluación de procesos en matemática debe desarrollarse a través de acciones dirigidas fundamentalmente a promover una evaluación integral, en contraposición a la atomización del proceso y su descontextualización.
* Desarrollar la exposición pública de las representaciones matemáticas internas a través de su caracterización lingüística considerada en lo sintáctico y semántico, la concreción de ideas matemáticas, la mediación simbólica, la configuración colectiva de la matemática que parta de la introspección compartida y la descripción auténtica de situaciones reales con sus significados matemáticos propios; representaciones sujetas a un contexto particular para ser útiles en una integrada comprensión situacional y en la acción social transformadora.
* La expresión verbal es la forma predominante sobre la escrita para evaluar en matemática, en el entendido que ella permite una interacción inmediata y fluida para compartirla, lo cual conlleva a realizar las posibles transformaciones de saberes matemáticos, del proceso educativo y el contexto sociocultural.
* La capacitación matemática insertas en proyectos reales, inducen a la problematización, su aplicabilidad y la utilización de recursos propios del entorno; de las cuales se pudieran derivar, de

manera natural, las evaluaciones colectivas necesarias para adelantar los proyectos en sus diferentes fases de planificación y ejecución.

* Para operacionalizar este proceso, el colectivo podrá tomar en cuenta formas evaluativas que estén asociadas a los procesos inherentes a las diversas capacidades matemáticas, el talento matemático integral, los saberes matemáticos y la formación matemática permanente; tales como glosarios, portafolios, diarios, exposiciones, tareas, grabaciones, entre otros; que sean de su agrado, compartidas sobre intereses y motivaciones comunes, y adaptadas a la realidad educativa, institucional y sociocultural.

* Finalmente, algunos ejemplos de acciones y estrategias evaluativas y metaevaluativas en matemática que pudieran ser útiles para comprender mejor esa nueva evaluación de procesos, desglosados en la actividad mental matemática, su cualidad, la acción más acertada y una estrategia sugerida.

1. Actividad mental: Inteligencia matemática.

Cualidad: Aptitud de medición.
Acción evaluativa: Conocer la competencia para estimar cálculos de medidas, longitudes, tamaños, pesos y otras variables expresadas en números, presentes en el contexto real.
Estrategia evaluativa: Describir verbalmente el proceso para calcular estas medidas y el de la construcción de instrumentos propios de su cultura, planteando su pertinencia y precisión.

2 .Actividad mental: Pensamiento matemático.

Cualidad: Comprensión matemática.
Acción evaluativa: Conocer la capacidad para evidenciar colectivamente la pertinencia y coherencia de los saberes matemáticos aplicados en la resolución de una ejercicio matemático.
Estrategia evaluativa: Elaborar, varios estudiantes, listas de saberes matemáticos que crean son necesarios para resolver ese ejercicio, cotejándolas posteriormente para acordar su pertinencia y coherencia.

3. Actividad mental: Conciencia matemática.

Cualidad: Autopoiesis matemática.
Acción metaevaluativa: Conocer la capacidad para identificar matemáticamente situaciones problemáticas familiares utilizando un lenguaje propio, y para explicitar su proceso de solución a través de una secuencia de preguntas pertinentes.
Estrategia metaevaluativa: Escribir el texto de un problema real a partir de una situación cotidiana verificando la existencia de elementos matemáticos que lo caracterizan, y algunas preguntas que orienten el proceso de solución.

4. Actividad mental: Afectividad matemática.

Cualidad: Actitud desinhibidora.
Acción metaevaluativa: Conocer la predisposición para demostrar un teorema matemático complejo, compartiendo su enunciado e identificando la hipótesis, tesis, delimitación, exigencias y saberes matemáticos necesarios para demostrarlo.
Estrategia metaevaluativa: Establecer grupalmente un diálogo donde se expongan las ansiedades e inhibiciones existentes al enfrentar la demostración de ese teorema, además de una agenda contentiva del desarrollo de responsabilidades, la participación activa y la promoción de planteamientos positivos, entre otros aspectos.

Y algunas formas evaluativas y metaevaluativas en matemática

- *Glosarios de saberes*: Pertinentes a la inteligencia matemática, por cuanto con ellos se desarrolla la capacidad de retener lenguajes matemáticos; y al pensamiento matemático, al establecer una lista resumen de saberes que conforman representaciones internas, asumiéndolos como formas evaluativas propias para organizar el saber matemático, para su mejor comprensión y aplicación en los procesos de transformación.
- *Los portafolios*: Pertinentes al pensamiento matemático con los cuales se desarrolla la competencia de totalizar, unificar y sintetizar saberes y experiencias matemáticas para su utilización en diversos contextos; adoptándolos como formas evaluativas propias para integrarlos.
- *Los diarios o Registros anecdóticos*: Pertinentes a la conciencia y al conocimiento metacognitivo, utilizados para evidenciar el metalenguaje matemático y la metaatención a través de la verificación de un discurso matemático adecuado y las actitudes que acompañan a las ideas matemáticas; así como el contexto, la introspección crítica, el esfuerzo, la interacción grupal y los acuerdos.

Referencias

Freire, P. (1985). *La pedagogía del oprimido*. Madrid: Siglo XXI.

García, S. (2003). *La evaluación del aprendizaje matemático desde una perspectiva constructivista*. Tesis Doctoral. Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad Central de Venezuela: Biblioteca Central. Caracas.

Giroux, H. (1997). *Los profesores como intelectuales. Hacia una pedagogía crítica del aprendizaje.* Barcelona: Paidós.

Guba, E. y Lincoln, Y.(1989). *Fourth Generation Evaluation.* Newbury Park, California:
SAGE Publications.

República Bolivariana de Venezuela, (1999). *Constitución de la República Bolivariana de Venezuela.* Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela No. 5.453 (Extraordinaria). Caracas.

República Bolivariana de Venezuela, Ministerio de Educación y Deporte. (2004). *La educación bolivariana. Políticas, programas y acciones, "cumpliendo las metas del milenio.* Caracas.

UNESCO, (1998). *Declaración mundial sobre la educación superior en el siglo XXI: Visión y acción.* Conferencia Mundial sobre la Educación Superior. Paris, Francia.

UNESCO, (2000). *Foro Mundial sobre Educación.* Dakar, Senegal.

Las artes y la arquitectura como herramientas en la didáctica de la matemática

Mauricio José Orellana Chacín
Facultad de Ingeniería (J), Universidad Central de Venezuela

Palabras claves
Artes, arquitectura, matemática.

Planteamiento

En la enseñanza-aprendizaje (EA) de la matemática es usual, y bastante conocido, la utilización de la física, especialmente la mecánica, la ingeniería, la economía, y otras disciplinas. Dicha situación no está vigente en el caso de la arquitectura y mucho menos en las artes, donde hay un largo camino por recorrer. En este sentido, el autor ha venido dictando conferencias desde hace varios años en instituciones de educación superior y de formación docente, y algunas para docentes de la educación básica y diversificada (primaria y secundaria), mostrando la faceta de vinculaciones matemática-artes-arquitectura. Sobre este tema ha escrito trabajos y concebido cursos para la educación secundaria y superior.

La importancia de relacionar matemática, artes y arquitectura, se debe a que lo visual –la belleza de la visualización– permite mostrar conceptos abstractos por intermedio de entidades físicas (Bruter, 2002). Cabe señalar que en los Congresos Internacionales de Educación Matemática (ICME, por sus siglas en inglés) hay un grupo temático sobre arte y matemática, iniciado en el ICME 7, en Québec (1992).

Marco teórico

Esto se apoya en dos mapas. En el primero se enuncian las cuatro vertientes o corrientes del desarrollo de la matemática y la educación matemática a partir de la década de los setenta (y algunas en la década de los sesenta). (Véase figura 1). De estas vertientes nos interesa, para los fines de este trabajo, la referida a la matemática aplicada y vinculaciones de la matemática con otras áreas.

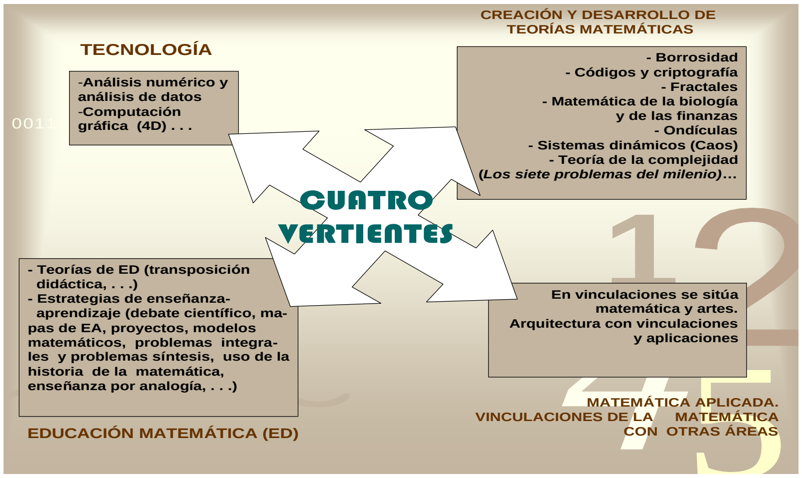


Figura 1. Vertientes o corrientes del desarrollo de la matemática y la educación matemática a partir de la década de los setenta.

Mancera, E. y Pérez, C. Historia y Prospectiva de la Educación Matemática. Memorias de la XII CIAEM.

En el caso de las artes no es adecuado decir “aplicación” de la matemática, pues ésta no es utilizada para establecer leyes, demostrar propiedades o enunciar principios, como se hace en las ciencias y la ingeniería. Al respecto, el gran artista suizo Max Bill (1908-1994), arquitecto, pintor, escultor y diseñador, escribió en 1949:

> *“¿Hace falta decir que yo creo que un enfoque matemático del arte no se identifica en absoluto a ningún ingenioso sistema de cálculo que se base en fórmulas ya hechas? No obstante en lo que concierne a la composición, se puede afirmar que todas las escuelas artísticas, hasta la fecha han tenido fundamentos más o menos matemáticos” (Emmer, 2005, pág. 73).*

El segundo mapa se refiere a las once componentes de la belleza desde el punto de vista matemático (véase la figura 2); en él, la indicada como “Diseño con computadora” está presente en las otras , pero se ha separado con el fin de destacarla.

En las conferencias, señaladas en la sección planteamiento, se presenta una galería de obras de arte y arquitectura (diapositivas) en las que se hace referencia y análisis de las componentes matemáticas que intervienen en dichas obras. Además, en aquellas dedicadas a los institutos de formación docente se dan ejemplos de tipo didáctico, algunos de éstos se presentan en la próxima sección de metodología.

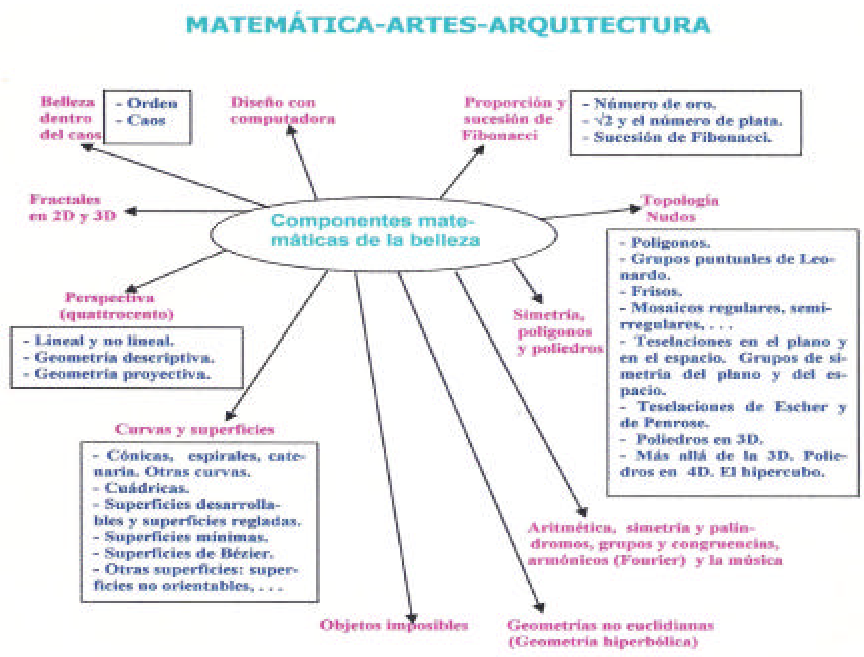


Figura 2. Once componentes de la belleza desde el punto de vista matemático.

Metodología

1) Recopilación y análisis de trabajos vinculados con el tema en consideración. 2) Diseño de cursos sobre el tema. 3) Dictado de mini cursos y conferencias acerca de las vinculaciones matemática-artes-arquitectura, desde hace más de diez años. En éstas se presenta, como se indicó anteriormente, una galería de obras de arte y arquitectura y el análisis de las mismas en cuanto a las componentes matemáticas del segundo mapa. El autor tiene recopilado unas 400 diapositivas en cuestión. 4) Algunos

trabajos escritos (Orellana, 2002) y su contribución en otros (FEP y UN, 2006), además de los dos tomos previos (2004) auspiciados por la Fundación Empresas Polar y publicados en el diario Últimas Noticias (Carrera y cols., 2007).

En las páginas siguientes, se desarrollan algunos ejemplos de tipo didáctico.

1. Compensación de visión (ilusiones visuales)

En el sigo XVI, el célebre artista alemán Alberto Durero explicó:

> *Frecuentemente es necesario escribir en columnas, torres o paredes; acerca de esto, el que quiera escribir algo en lo alto de manera que las letras cercanas a la parte más alta se vean tan grandes como las cercanas a la parte más baja, éste debe hacer las más altas más grandes que las inferiores...*
> *(Durero, 1987, pág. 158)*

Los problemas de geometría y visión vienen desde la óptica de Euclides, puesto que un objeto que se aleja de nosotros aparece progresivamente de tamaño más pequeño y, al contrario, si se acerca se ve más grande. Este efecto visual debe ser tomado en cuenta cuando se construyen estructuras muy elevadas desde el piso, como estatuas y pinturas en techos muy altos, pues en tal caso nuestro ángulo visual es algo grande.

Así, en la famosa Columna de Trajano en Roma (aproximadamente 40 m de altura, incluyendo el pedestal) conmemorando las victorias del emperador Trajano (53-117) sobre los dacios (pueblo de Rumania), con un relieve esculpido en forma helicoidal (23 vueltas a la columna) y como se lee desde abajo, entonces, para lograr el efecto de perspectiva, se hace necesario escribir las letras superiores ligeramente más grandes que las inferiores (véase la figura 3).

Figura 3. Columna de Trajano.
Fuente:http://www.artehistoria.jcyl.es/arte/con-textos/3434. htm

¿Cuánto más grandes?

Para encontrar la respuesta, apreciemos los dibujos de Durero, que sugieren la construcción matemática por realizar (véase la figura 4). En ellos se observa que ángulos iguales, proyectados sobre una recta, subtienden segmentos verticales desiguales (análogamente, segmentos verticales iguales, proyectados sobre un arco, subtienden ángulos desiguales).

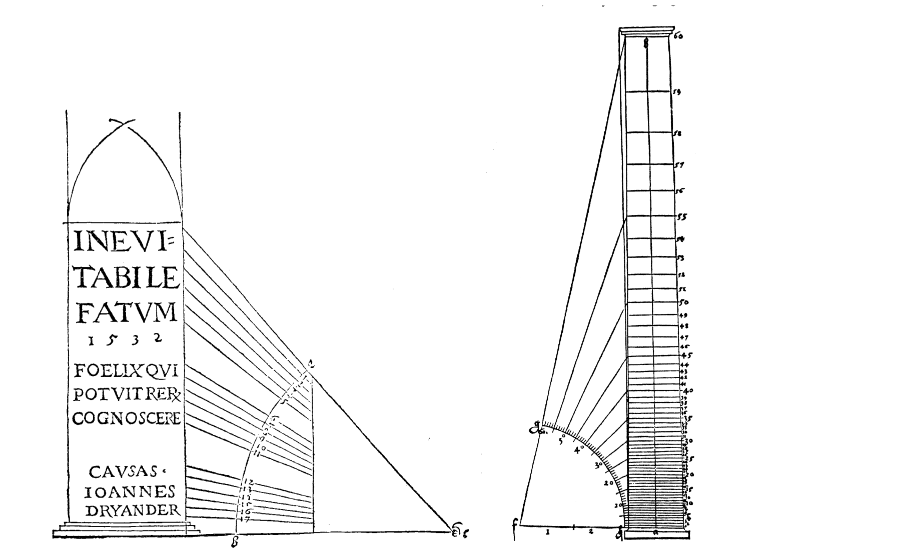
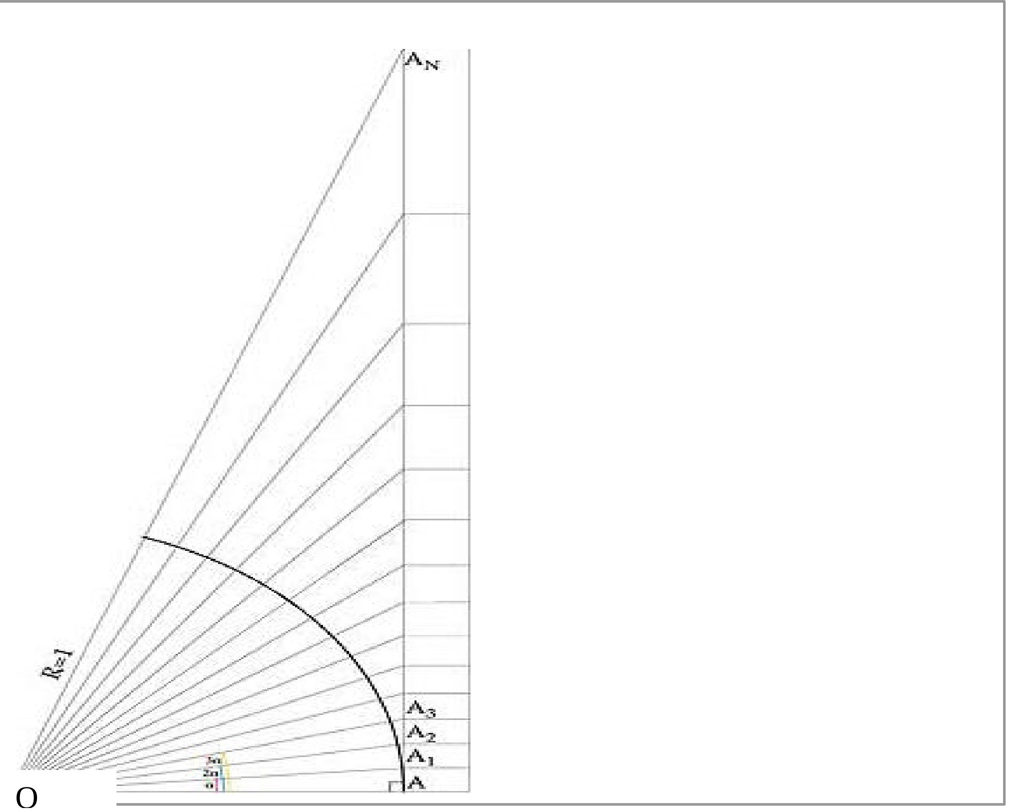


Figura 4. Dibujos de Durero acerca de la Columna de Trajano.

La parte matemática entra ahora en juego mediante la función tangente explicada en la figura 5.



Consideremos OA=1. Luego, los segmentos verticales miden: AA_1= tga, AA_2= tg2α, ..., AA_N=AB= tg(na), si hay n ángulos (n=14 en el dibujo). Supongamos, para aclarar, que a = 5^o, entonces (redondeo a cinco decimales):

AA_1= tg5^o = 0,08749< AA_2 = tg10^o = 0,17633 < …< AA_N= tg70^o = 2,74748,

lo cual es consecuencia que la tangente es creciente en el intervalo (0^o, 90^o), no uniformemente (no es una función lineal). De forma general se tiene que AA_2= tg2α $\neq$ 2tg2α= $2AA_1$ y 0,08884= A_1A_2 = AA_2 - AA_1 > AA_1. Análogamente para los otros segmentos. Luego, este tipo de construcción, justificada en trigonometría, compensa la percepción visual para objetos elevados.

A medida que crece el ángulo visual, la tangente crece y los segmentos verticales se hacen bastante grandes.

El gran genio del Renacimiento italiano, Miguel Ángel (1475-1564), utilizó una construcción análoga a la de Durero para decorar la Capilla Sixtina en el Vaticano, tal como puede observarse en El Juicio Final, donde, al mirar una fotografía, las figuras superiores se ven más grandes; sin embargo, al nivel de un observador colocado en el piso, lucen de “un mismo tamaño”.

Durero (Alemania, 1471-1528), artista y geómetra, escribió obras dirigidas a pintores, canteros y arquitectos, entre otros.

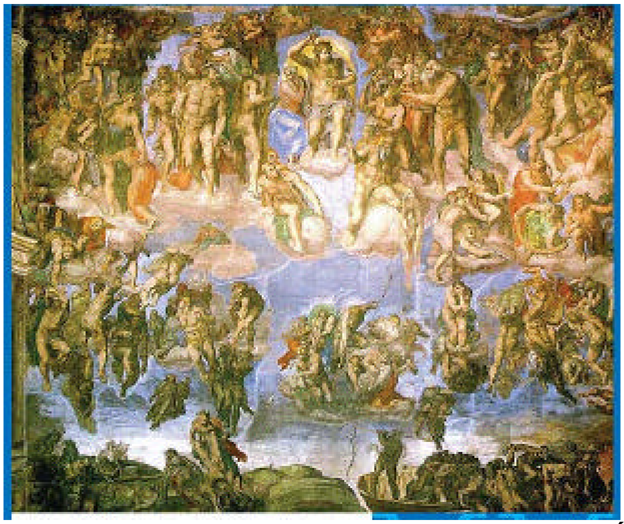


Figura 6. _El Juicio Final_, en la Capilla Sixtina, por Miguel Ángel.

Un problema del mismo género fue planteado también en el año que nació Durero, 1471, por Johannes Müller (llamado Regiomontano; Alemania, 1436-1476): “A qué punto sobre el piso debe levantarse perpendicularmente una vara para que aparezca lo más grande”. Es posible que el mismo tenga su origen como un problema de arquitectura, pintura o escultura a los fines de encontrar la posición más favorable para mirar una ventana, un cuadro o una estatua, desde el piso.

Obsérvese la figura 7. Sean OA= a, OB= b, OP= x, y los ángulos allí marcados. Se debe encontrar ? máximo (ángulo visual) que relacionamos con la distancia x mediante la función tangente o la cotangente.

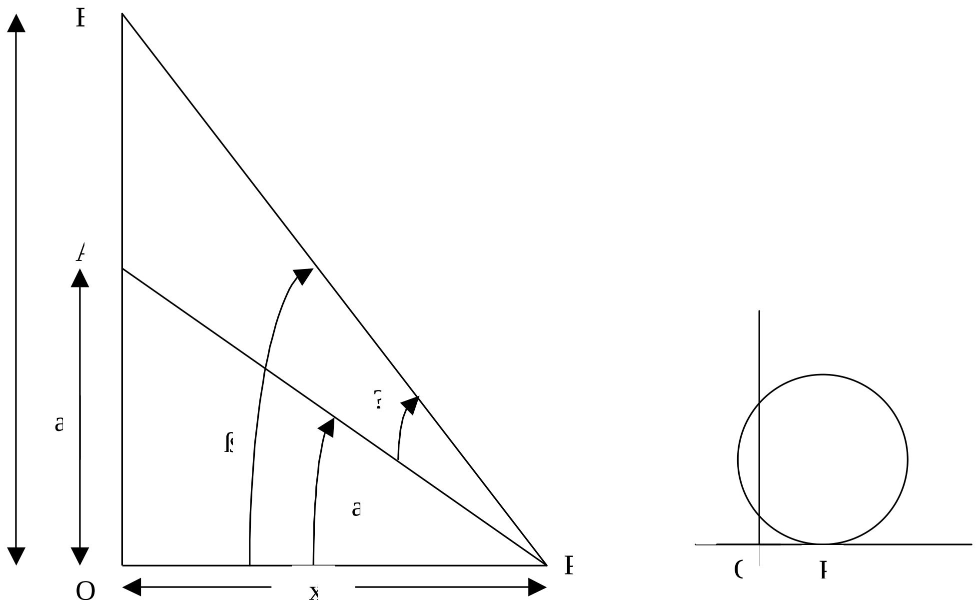


Figura 7.

Actualmente es un problema sencillo de extremos de una función:

$y = tg\ ? = tg\ (\beta - \alpha) = (tg\ \beta - tg\ \alpha)/(1 + tg\ \beta\ tg\ \alpha) = (b/x - a/x)/(1 + ba/x^2) = [(b-a)x]/(x^2 + ab)$.

Derivando en relación a x e igualando a cero (considerando que la función tangente es creciente en el intervalo $O^o = ? < 90^o$) se obtiene x=vab, esto es la media geométrica de las alturas de los bordes inferior y superior de la vara (ventana o cuadro). Fácilmente se construye x con la circunferencia que pasa por A y B y es tangente al piso OP, lo cual se deduce con la potencia del punto O respecto de dicha circunferencia ($OP^2 = OA.OB$).

En ese siglo no se había creado el cálculo infinitesimal y la solución tenía que ser de tipo geométrica (ángulos inscritos y ángulos interiores a una circunferencia) o algebraica (la propiedad que la media aritmética de dos números es no menor que su media geométrica) (Maor, 2002).

Este ejemplo, derivado de la perspectiva y la arquitectura, pone en juego contenidos matemá- ticos: función tangente o función cotangente de ángulos, derivadas, ángulos en una circunfe-rencia, potencia de un punto respecto de una circunferencia, medias aritmética y geométrica.

2. Cálculo sobre pirámides

El gran historiador griego, Herodoto (ca.485–425a.C.), visitó el valle de Giza en el siglo V a.C., tomó algunas medidas sobre la Gran Pirámide (Khufu, en griego Keops), una de las Siete Maravillas del mundo antiguo, e interrogó a algunos de sus moradores, entre ellos al Sumo Sacerdote, en relación a cómo y por qué se determinaron las medidas de la Gran Pirámide. La respuesta fue "*La Pirámide fue construida tal que el área de cada cara lateral sería igual al área de un cuadrado cuyo lado es igual a la altura de la Pirámide* ".

Sabemos que tal pirámide es de base cuadrangular.

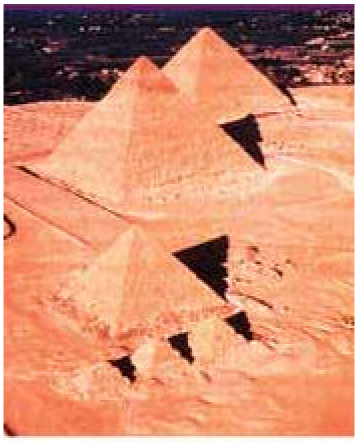


Figura 8. Las pirámides Micerinus, Kefren y Keops, en el valle de Giza. Esta última data de 2480 a.C. ± 5.

¿Cuáles relaciones cuantitativas podemos deducir a partir de este dato y de la respuesta del Sumo Sacerdote?

Obsérvese la figura 9. Sean AB= 2a el lado del cuadrado base, h la altura de la pirámide y H la altura de una cualquiera de sus caras triangulares, como la indicada mediante VAB.

Según lo expresado por el Sumo Sacerdote se tiene $h^2 = aH$.

Como $H^2 = h^2 + a^2 = aH + a^2$, se deduce que $(H/a)^2 = H/a + 1$, ecuación cuya raíz positiva es el número de oro ($\phi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$), luego $H/a = \phi$.

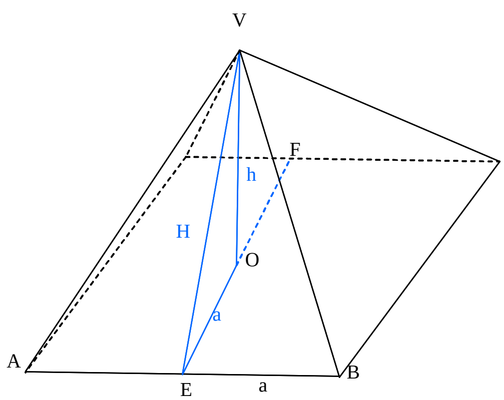


Figura 9.

De otra parte, de $h^2 = aH$ se deduce $H^2/h^2 = H/a = \phi$, de donde $h/a = H/h = \sqrt{\phi}$.

Estas relaciones se comprueban mediante mediciones que hizo Herodoto: el perímetro de la base L= 2000 codos. Como 1 codo = 46 cm, entonces L= 920m y el lado 2a= 230 m. De otra parte, originalmente la altura medía h= 146,4 m, por lo tanto, comprobamos que: $h/a =$

$146{,}4/115 \approx 1{,}273 \approx \sqrt{\phi}$ (= 1,272 … Error porcentual 0,079 %). Como $H=\sqrt{h^2+a^2} \approx 186{,}166$ de donde $H/a \approx 1{,}619 \approx \phi$ (error porcentual 0,062 %). Además $\angle OEV = \operatorname{arctg} h/a \approx 51{,}849^o \approx 52^o$ el ángulo de inclinación de la pirámide en la parte más baja (en el medio el ángulo cambia a $43{,}5^o$).

Para la arista mayor de la pirámide, VB, se tiene: VB = v(H^2+a^2) = av[$(H/a)^2$+1] = av(ϕ^2+1) y de aquí se deduce que VB/a = v(ϕ^2+1) = vϕ+2 ˜ 1,902; además VB ˜ 218,821m.

Otra relación interesante fue la encontrada por Kepler: Si ? denota 4 veces el área de una cara lateral (4**.**aH= 4**.**h^2 ˜ 85732m^2) y S el área de la base cuadrada (230^2m^2= 52900m^2), se tiene que (? + S)/? = ?/S pues ϕ= 1/ϕ + 1.

De otra parte, haciendo “la cuadratura” del círculo físicamente mediante una cuerda y con un equipo de trabajadores tirando de la misma, de tal forma que la longitud de la circunferencia y el perímetro de la base cuadrada sean iguales (2pR=8a) y construyendo la pirámide de tal manera que su altura sea el radio R, resulta h=R=8a/2p=4a/p, entonces tg(∠OEV)= h/a = 4/p, de donde ∠OEV = arctg 4/p ˜ 51,855^o ˜ 52^o (con p=3,1516). Además h=4a/p ˜ 146,42 y L/h = 920/146,42 ˜ 6,283 ˜ 2p .

¿Cuál fue el factor en el diseño de la Gran Pirámide, f o p?

Además, no olvidemos que en el siglo VI a.C., Thales determinó la altura de una pirámide utilizando la sombra de un bastón y la semejanza de triángulos rectángulos.

Este ejemplo, con la obra excelsa de la arquitectura egipcia, pone en juego diversos contenidos matemáticos relacionados con ϕ, p, área de triángulos, teorema de Pitágoras, teorema de Thales (semejanza de triángulos), error porcentual, aunado a la riqueza de la parte histórica.

3. Espirales

El gran genio del Renacimiento, Leonardo da Vinci (1452-1519) se apoyaba frecuentemente en la naturaleza para el diseño de sus obras.

Así se tiene el yelmo de Escipión el Africano y el estudio de Leda basado en la amonita (véase figuras 10 y 11), mostrando el cabello arreglado como una espiral logarítmica, lo que utilizó en “Leda y el cisne” (1519).

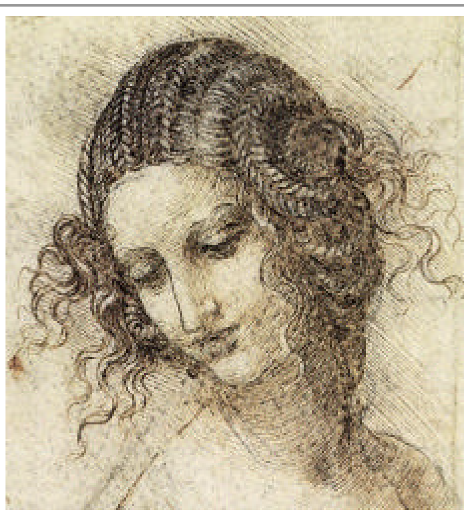


Figura 10. Un estudio para *Leda y el Cisne*, de Leonardo da Vinci.

Figura 11. La obra *Leda y el Cisne*, de Leonardo da Vinci.

En el siglo XX, encontramos otra vinculación con el mito de Leda en la obra del surrealista Salvador Dalí (1904-1989), que en 1949 pintó *Leda atómica* (véase la figura 12). Aquí, un organizador es el pentagrama (Matila Ghyka), vinculado con la proporción divina ϕ.

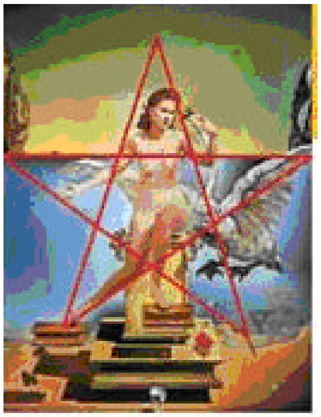


Figura 12. Leda atómica (1949), de Salvador Dal

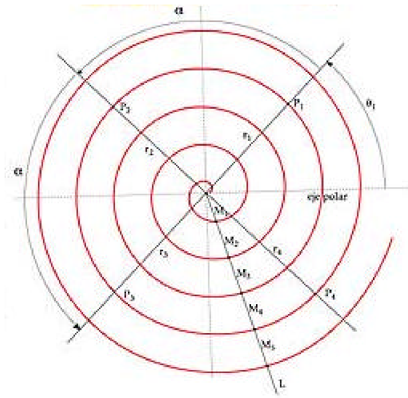


Figura 13. La espiral de Arquímedes (?=a?, a>0): las vueltas tienen el mismo ancho (en progresión aritmética).

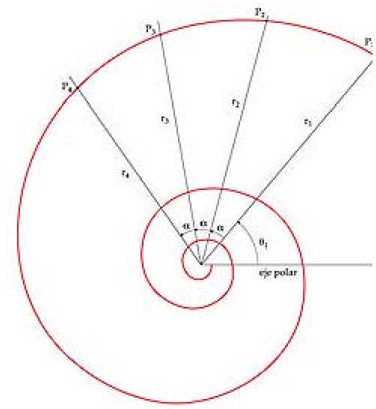


Figura 14. La logarítmica (?=$ae^{b?}$, a,b>0; Ln?=b?, a=1). El ancho de las vuelta crece en progresión geométrica.

Coloquemos dos ejemplos más recientes: un relieve (1982, Ex Nihilo, La Creación) de Frederick Hart (Estados Unidos, 1943-1999) y un vitral de Rodney Winfeld (1974, El vitral del espacio, conmemorando el lanzamiento del Apolo XI en 1969 por la NASA), ambos en la Catedral Nacional de Washington D.C.

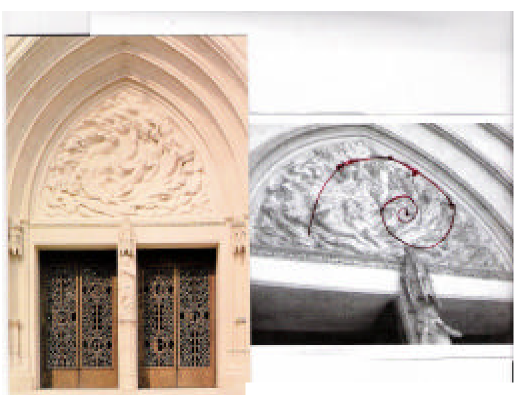


Foto: M. . Orellana (2006)

Figura 15. *Ex nihilo* (1982), de Frederick Hart.

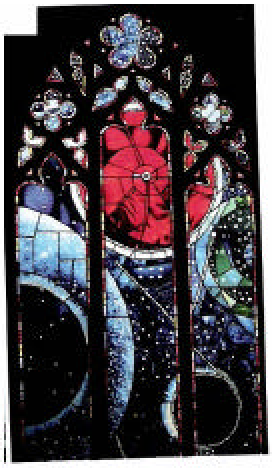


Figura 16. *Vitral del espacio* (1974), de Rodney Winfeld.

La espiral logarítmica pasa por cinco codos en el relieve (ordena la escultura) y en el polo de la espiral del vitral se incrustó un pedazo de roca lunar (Atalay, 2006).

En la naturaleza, en el arte y en la arquitectura son frecuentes las hélices y las espirales, especialmente la logarítmica. Las hélices y las espirales figuran en muchas conchas de moluscos, en cuernos de animales, en el orden jónico, Cultura Celta, en la doble escalera circulatoria en el Museo del Vaticano diseñada por Leonardo da Vinci, en cabezas de violines, Frank Lloyd Wright en el diseño del museo Guggenheim en Nueva York (la rampa en espiral inspirada en la cámara del Nautilus), escalera en espiral del Arco de Triunfo en París. Además, el vuelo de los halcones para atacar a su presa se realiza según esa espiral (espiral equiangular).

¿Qué razón matemática hay para ese uso intensivo de la espiral logarítmica, además de suministrar belleza y organización en arte y arquitectura?

Jacobo Bernoulli (Suiza, 1654-1705) le dedicó un tratado a la espiral logarítmica y la denominó *Spira Mirabilis* (espiral maravillosa). Es una espiral equiangular (la única curva que tiene esta propiedad), es invariante por muchas transformaciones: por inversión, es su propia evoluta, es su propia curva pedal, es su propia cáustica, una homotecia lo que hace es rotarla.

Por lo mismo, en la tumba de Bernoulli, en Basilea, está grabado "*Eadem mutata resurgo*" (Aunque me cambien, volveré a aparecer de la misma forma). (Véase la figura 17).

Figura 17. Tumba de Jacobo Bernoulli (1654-1705).

Finalizamos con una obra de Escher: Superficie esférica con peces (grabado sobre madera, 1958). Las loxodromas de la esfera o curvas de igual rumbo son las que cortan a los meridianos bajo ángulo cons- tante. En proyección Mercator dan rectas, y en proyección estereográfica resultan espirales logarítmicas.

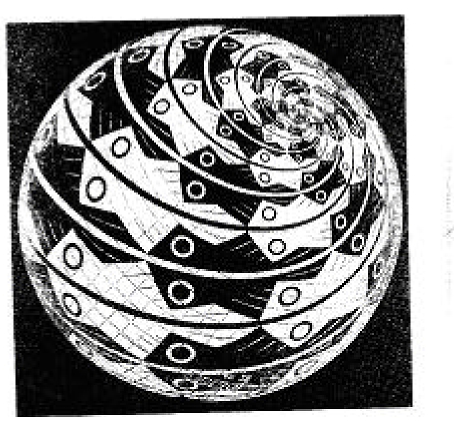


Figura 18. Superficie esférica con peces, grabado sobre madera, 1958, de M.C. Escher.

Matemática-artes-arquitectura

Observemos que en los tres ejemplos anteriores, lo primero que se presenta es un contexto histórico o artístico o arquitectónico y, a posteriori, lo correspondiente a matemática. No siempre es posible hacer esto, pero luce lo más conveniente.

Existe gran variedad de ejemplos vinculando matemática-artes-arquitectura útiles como herramienta en la didáctica de la matemática. Se derivan del segundo mapa y podemos indicar, entre otros:

* Curvas: cónicas, catenarias, espirales, hélices, loxodromas (Leonardo da Vinci, J. Bernoulli, Diego Velázquez, Eero Saarinen, Tatlin, A. Gaudí, Escher, Frederick Hart, Keizo Ushio, Rodney Winfeld, Frank Lloyd Wright, Edward Edwards, Zvi Hecker, M. Emmer).
* Superficies y topología: banda de Möbius, botella de Klein, toros, paraboloides, hiperboloide de una hoja, paraboloide hiperbólico, además de lo clásico con cilindros, conos y esferas (Max Bill, Escher, Paul Ryan y John Lee, Jose de Rivera, Charles Perry, V. Shújov, A. Pevsner, Niemeyer, J. Berkam, F. Candela, E. Torroja).
* La cuarta dimensión. Poliedros en tres y cuatro dimensiones. (Leonardo da Vinci, Luca Pa-cioli, E. Abbott, M. Duchamp, Escher, George Hart, Araka Isozaki, Sanford Ponder, Salvador Dalí, Buckminster Fuller, Jimmy Alcock, La Defense, José Yturralde, Attillio Pierelli, Thomas Banchoff).
* Superficies mínimas (F. Otto, Celso Costa, H. Ferguson, R. Longhurst, Brent Collins, D. Schwalbe, M. Emmer).
* Isometrías y grupos. Mosaicos, teselaciones periódicas y no periódicas, poligonos nazaríes (La Alhambra, John Robinson, Escher, R. Penrose, Eleni Mylonas, Tony Robbin, Arlene Stamp, Teja Kräsek)
* Geometría hiperbólica (Coxeter, Escher, D. Dunham, H. Ferguson).

Resultados

La motivación y el interés despertado que han generado las distintas opiniones de los asistentes a las conferencias, evidenciadas en encuestas realizadas al finalizar las mismas (130 encuestas). Varios docentes han manifestado interés en incorporar estos temas a sus cursos.

Conclusiones

Éste es un campo que se encuentra en etapa incipiente, donde hay un largo camino por recorrer. Aquí caben dos preguntas claves:

* ¿De qué manera las artes y la arquitectura ayudan en la enseñanza-aprendizaje de la matemática?
* ¿Qué forma apropiada podemos utilizar para incluir las artes y la arquitectura en la dimensión pedagógica de la matemática?

Es propicio para que docentes de la última etapa de la educación secundaria, de los institutos de formación docente y de las universidades, lo introduzcan en sus planes de estudio y realicen experiencias en tal sentido. Al respecto consultar (Bruter, 2002; Denner, 2002).

Bibliografía

Atalay, Bülent (2006), Math and the Mona Lisa. The art and science of Leonardo da Vinci. Smithsonian Books, Estados Unidos.

Bruter, Claude P. (Ed.) (2002), Mathematics and Art. Mathematical Visualisation in Art and Education. Springer. Actas del coloquio de Maubege.

Carrera de Orellana, Inés; Chovet, Rogelio; Orellana, Mauricio; Valdivieso, Renato (2007), Un reto de divulgación matemática: encartados en un diario. Aceptado como po-nencia en la XII CIAEM, Querétaro, México.

Denner, Richard, Regards sur le colloque (Maubege) au travers de l'enseignement en classes de collège (2002). http://arpam.free.fr/denner.htm.

Durero, Alberto (1987), Instituciones de geometría. Traducción del latín e introducción de Jesús Yhmoff Cabrera, Universidad Nacional Autónoma de México. Texto en latín data de 1535.

Emmer, Michele (2005), Visual mathematics: mathematics and art. En "TheVisual Mind II" (Edit. M. Emmer), 59-90. The MIT Press, Cambridge, Mass. http://www.uoc.edu/artnodes/esp/art/emmero505.pdf

Livio, Mario (2003), The Golden Ratio. The story of phi, the world's most astonishing number. Broadway Books, New York.

Maor, Eli (2002), Trigonometric Delights. Princeton University Press.

Matemática Maravillosa (2006). Fundación Empresas Polar y Últimas Noticias. Cara-cas.

Orellana Chacín, Mauricio (2002), La belleza desde el punto de vista matemático. Con-ferencia inaugural en el Seminario Números y Figuras: Reflexiones matemáticas sobre las ar-tes plásticas (2000). Comisión de Estudios Interdisciplinarios, Universidad Central de Venezuela, No. 15, 17-72.

Creencias sobre lo que significa saber matemáticas en estudiantes de la enseñanza media costarricense

Hugo Barrantes
Costa Rica

Palabras clave
Educación matemática, creencias sobre matemáticas, problemas en matemáticas.

Planteamiento

Una estrategia de enseñanza de las matemáticas basada en la resolución de problemas, subrayaría el carácter conceptual de las matemáticas y privilegiaría el uso de situaciones matemáticas no rutinarias que obliguen al estudiante a una elaboración no mecánica, aplicando conceptos conocidos, estableciendo conexiones entre ellos y creando nuevos conocimientos. Sin embargo, existen algunas dificultades en cuanto a lo que eso significa y el papel que debe desempeñar en la enseñanza de las matemáticas. Esto tiene mucho que ver con la visión particular de las matemáticas que cada quien tenga. En particular, es de vital importancia detectar dicha visión en los propios estudiantes.

Marco teórico

Schoenfeld (1985) propone la consideración de cuatro categorías que inciden en la forma en que las personas abordan el proceso de resolución de un problema matemático:

* *Recursos*: son los conocimientos matemáticos que posee el individuo y que pueden usarse para resolver el problema.
* *Heurísticas*: son las estrategias y técnicas que permiten progresar en la solución de un problema no familiar (o no estándar).
* *Control*: se refiere a las decisiones globales que permiten la selección e implementación de recursos y estrategias.
* *Sistema de creencias*: es la visión del mundo matemático, el conjunto de determinantes del comportamiento del individuo acerca de sí mismo, el medio, el tema tratado, las matemáticas en general.

Por otra parte, según Lampert (1992) la mayoría de las personas piensa que comúnmente las matemáticas están asociada con la certeza y que esta asunción cultural está condicionada por la experiencia escolar. En general, los estudiantes abstraen sus creencias acerca de las matemáticas, en gran medida, como consecuencia del trabajo escolar y, además, estas creencias refuerzan su comportamiento de una forma que tiene poderosas consecuencias.

Metodología

Para explorar algunas de las creencias que sobre las matemáticas poseen los estudiantes de enseñanza media costarricense se aplicó un instrumento. Se seleccionó una muestra de 21 instituciones de 4 regiones educativas. En cada una se seleccionó un grupo de octavo y otro de décimo año. Respondieron la encuesta 1240 estudiantes.

Resultados

A la fecha hemos obtenido algunos resultados importantes. Por ejemplo, una mayoría de los estudiantes piensa que saber matemáticas significa que se puede resolver cualquier problema relacionado con el tema en estudio; también, que se conoce de memoria muchos procedimientos que sirven para resolver ejercicios o se puede aplicar proceso creativos a diferentes situaciones.

Por otra parte, piensan que poder decidir la importancia de un concepto matemático no es necesariamente algo fundamental en el saber matemáticas.

Conclusiones

Las concepciones sobre las matemáticas que tienen los estudiantes costarricense no difieren muchos con los de otras latitudes. Además, lo que piensan los estudiantes tiene mucho que ver con lo que Lampert indica: estas creencias están condicionadas por la experiencia escolar.

Referencias

Lampert, M. (1992) . Handbook for Research on Mathematics. In Schoenfed, A.: *Learning to think mathematically, Teaching and Learning.* D.Grows, Ed. New York:Mac Millan.

Schoenfeld, Alan. (1985). *Mathematical Problem Solving* (1a. edición). Orlando, Florida: Academic Press.

Schoenfeld, Alan. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in Mathematics. *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (D. Grouws, Ed.). p. 334-370, [en línea]. http://gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/LearningToThink/Learning_to_think_Math.html

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. *The teaching and assesing of mathematical problem solving* (Charles & Silver, Eds.). pp.1-22. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

TODOS: Matemáticas para todos

Cindy Chapman
harrisb609@aol.com

Patrick Scott
patrick.scott@state.nm.us

Representantes Internacionales de TODOS

> *La población hispana [de los Estados Unidos] ha avanzado en muchas áreas importantes de la educación durante los últimos 20 años, pero a pesar de dichos avances, una brecha existe entre los alumnos hispanos y los alumnos anglos* (http://nces.ed.gov/pubs2003/2003008.pdf).

Esta afirmación se publicó en 2003 como una introducción a los punto más notables de un informe titulado *Status and Trends in the Education of Hispanics* (El estatus y las tendencias en la educación de hispanos) publicado por el Centro Nacional de Estadística Educativa del Departamento de Educación de los Estados Unidos. Para enfrentar dicha situación la Dra. Miriam Leiva de la Universidad de Carolina del Norte convocó a un grupo de colegas para discutir la situación y fundar un grupo para "promover una Educación Matemática con equidad y de alta calidad para todos los estudiantes, en particular los alumnos Latinos, fomentando el crecimiento profesional de los educadores y el desarrollo de su conciencia de la equidad." Dicho grupo se llama *TODOS: Matemáticas para todos*.

Las metas de TODOS son las siguientes;

* Mejorar los conocimientos y habilidades para implantar un programa de matemáticas que esté al alcance de todos, riguroso y coherente, y que atienda el rol del idioma y la cultura en el aprendizaje de matemáticas.
* Desarrollar y brindar apoyo a líderes educativos que pueden llevar a cabo la misión de TODOS.
* Promover la producción y difusión de conocimientos acerca de una educación matemática de alta calidad y equidad.
* Mantener informado al público e influir las políticas educativas que posibilitan que los alumnos lleguen a ser competentes en matemáticas.

Actividades de TODOS

Para realizar su misión y lograr sus metas TODOS promueve una variedad de Actividades.

El sitio de Web de TODOS

El sitio www.todos-math.org provee información para todos aquellos que se interesan en la educación matemática de todos. Hay secciones sobre recursos profesionales y didácticos en inglés y español, anuncios de puestos y reuniones, datos sobre la educación de latinos en los Estados Unidos, e instrucciones de cómo llegar a ser miembro de TODOS.

Además TODOS mantiene un "listserv". La lista sirve para discusiones y como un lugar donde los miembros pueden pedir ayuda para enfrentar los desafíos que enfrentan.

Noticias de TODOS

El boletín informativa de TODOS se publica dos veces al año. Contienen artículos sobre la educación matemática de alumnos latinos. Se puede enviar artículos para *Las Noticias* a Richard Kitchen (kitchen@unm.edu).

Premios y becas

El "Premio Iris Carl de Liderazgo y Equidad" se otorga cada año a una persona que ha contribuido a la calidad y equidad de la educación matemática que reciben los alumnos de descendencia latina. Iris Carl, ex Presidenta del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM), fue una educadora muy dedicada a la excelencia y justicia en educación matemática durante una carrera muy larga y exitosa en Houston, Texas. El primer ganador del Premio Iris Carl fue Guillermo Mendietta, un profesor en Los Ángeles, quien lideró una huelga de hambre en favor de los derechos de los alumnos latinos y es autor de *Pictorial Mathematics: An Engaging Visual Approach to the Teaching and Learning of Mathematics* (Matemáticas ilustradas) que provee acceso al currículo matemático para los alumnos que no hablan inglés. El segundo ganador fue Ed Silver, un investigador de renombre que ha realizado estudios sobresalientes en el área de resolución de problemas y rendimiento en áreas urbanas. Como Director del projecto QUASAR, Silver desarrolló modelos curriculares y de investigación que siguen teniendo influencia en cómo ayudar a los alumnos que tienen dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

Cada año cuatro profesores que son miembros de TODOS reciben becas del "Duke Energy Foundation" para asistir a reuniones anuales del NCTM. El "Premio de Capacitación Docente McDougal Littell" también da apoyo a personas que asisten a la reunión anual del NCTM. El "Premio Estudiantil de Casio" se otorga a alumnos latinos de los grados quinto al duodécimo, quienes se han distinguido de alguna manera en el estudio de matemáticas. Reciben una calculadora graficadora y un certificado.

Conferencias dentro de conferencias

TODOS organiza conferencias dentro de Conferencias con presentaciones y talleres que apoyan a las metas de TODOS. Estas proporcionan oportunidades para la participación de personas que generalmente no participan en ese nivel.

Participación política

Al nivel federal en los Estados Unidos existe un "Panel Nacional de Matemáticas". La responsabilidad del panel es dar consejos al Presidente y Secretario de Educación sobre el uso adecuado de la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Varios miembros de TODOS, incluyendo su presidenta, la doctora Miriam Leiva, han hecho presentaciones frente al panel destacando las necesidades de TODOS.

Escuelas de TODOS

Dos escuelas públicas, Navajo Elementary (del nivel de primaria) en Albuquerque, Nuevo México; y Atkinson Middle School (del nivel de secundaria) en Phoenix, Arizona, se han designado como "Escuelas de TODOS". Estas escuelas tienen un alumnado que en su mayoría es de descendencia latina. El personal docente de las escuelas de TODOS se ha dedicado a la misión y las metas de TODOS. Reciben recursos bibliográficos, apoyo financiero para asistir a reuniones, y sesiones especiales de capacitación docente.

Financiamiento de TODOS

Las cuotas de membresía en TODOS son de $25US por un año y $70US por tres años. Una escuela puede pagar una cuota de $75 por 4 profesores. Aunque dichas cuotas son muy importantes en el financiamiento de las actividades de TODOS, también se ha recibido mucho apoyo de varias entidades, como: California Mathematics Project, CASIO, Inc., Duke Energy Foundation, Glencoe/McGraw Hill, Houghton Mifflin Company, Key Curriculum Press, Macmillan/McGraw-Hill Company, McDougal Little, National Education Association (NEA), Prentice Hall, Scholastic. Scott Foresman, SRA, Tom Snyder Productions, y The Wright Group.

Organización de TODOS

El Consejo de TODOS está conformado por: Presidente, ex Presidente, Vice Presidente, y tres Vocales. El Consejo se apoya de un Secretario y un Tesorero, varios Comités (Premios, Conferencias, Elecciones, Finanzas, Investigación y Publicaciones, y Servicios de Membresía), Representantes (al NCTM, de Investigación e Internacionales), y un Webmaster.

Recepción de TODOS

Cada año durante la reunión anual del NCTM hay una recepción social de TODOS. Es una oportunidad agradable para compartir experiencias. Muchos participantes de América Latina, en dicha reunión, han asistido a la recepción y ahora son miembros de TODOS.

Consejos desde América Latina

Dado que la misión de TODOS tiene que ver con mejorar la educación matemática que reciben los alumnos latinos en los Estados Unidos, existe un deseo de recibir sugerencias desde América Latina. Si tiene sugerencias de cómo TODOS podría responder a su misión y sus metas, por favor mándelas a patrick.scott@state.nm.us o a harrisb609@aol.com.

Los *software* educativos y los *software* didácticos en la didáctica de las matemáticas

Blanca Quevedo
Venezuela

Introducción

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) han generado cambios en todos los sectores de la vida, y específicamente en educación se han dado cambios en los procesos tradicionales de enseñar y aprender. Hablar de TIC implica hablar de tecnologías de la información, computadoras, internet (incluyendo: correo electrónico, www, chat), correo de voz, impresora, copiadora, entre otras.

El auge de las TIC indudablemente ha incentivado cambios y un conjunto de problemas que no se pueden dejar de afrontar, a todos los niveles de la acción social y económica, para obtener un máximo de beneficios. En el dominio que nos interesa aquí, la educación y particularmente la educación matemática, la aceleración de su implantación y de su utilización es uno de los fenómenos más grandes de los últimos años.

Teniendo presente la consideración anterior, no hay que olvidar que mediante las TIC se tiene acceso a la información pero no al conocimiento, y no hay que olvidar como señala Barajas (1997) que:

> *La información no es en sí conocimiento; tener acceso a toda información del mundo no garantiza en absoluto desarrollar procesos originales de pensamiento. La promesa que insistentemente se nos hace sobre el acceso global y fácil a grandes volúmenes de información no va a ser garantía de mayor conocimiento, de mayor educación.*

Por lo tanto para analizar los efectos cognitivos y para promover efectos deseables, se deben considerar además de las potencialidades y limitaciones de cada medio, la propuesta educativa dentro de la cual está inmerso, las actividades de aprendizaje propuestas y los contenidos a abordar.

Sin lugar a dudas, un ambiente de incertidumbre crece con las TIC, debido a la gama de complejidad creciente de estas y a las posibilidades que ofrecen, de aquí que surja la demanda de una mejor calidad educativa, que a su vez exige una mejor preparación, específicamente en la competencia educativa del sector profesional.

Como hemos señalado, el uso de las TIC ha penetrado indiscutiblemente al sector educativo en esta sociedad globalizadora, generando cambios de estilo en los procesos de enseñanza y aprendizaje en general y de la matemática, en particular. Esto ha incidido en el desafío de transformar el aula de clase y por lo tanto la escuela, el liceo y/o la universidad y el papel de los maestros, docentes y/o profesores como lo señala la Internacional Society for Technology in Education (citado por Rey, 2000) al plantear como características necesarias para el ciudadano del siglo XXI:

* Manejarse con soltura en el empleo de la tecnología.
* Comunicar información e ideas usando una gran variedad de medios y formatos.
* Acceder, intercambiar, compilar, organizar, analizar y sintetizar información.
* Bosquejar conclusiones realizar generalizaciones basadas en información obtenida.
* Saber encontrar información adicional.

Mancera, E. y Pérez, C. Historia y Prospectiva de la Educación Matemática. Memorias de la XII CIAEM, pp. 273-280.

* Saber evaluar la información y sus fuentes.
* Construir, producir y publicar modelos, contenidos y otros trabajos creativos.
* Tener la habilidad para transformarse en autodidactas.
* Colaborar y cooperar en grupos de trabajo.
* Tener la disposición para la resolución de problemas.
* Interactuar con otros en forma apropiada y ética.

Por otra parte, coincidimos con Reggini (2000) que afirma que “es imprescindible valorar cómo las maneras de aprender cambian, tanto en la teoría como en la práctica, por la presencia de las nuevas tecnologías de la información”.

De hecho, la herramienta que poco a poco se ha incorporado al aula de matemáticas, dentro de estas TIC, es la computadora, como:

* Herramienta de ayuda en los procesos de enseñanza y aprendizaje (programas educativos, aplicaciones multimedia: cursos interactivos, enciclopedias, atlas, material didáctico computarizado “MDC", etcétera).
* Herramienta de trabajo auxiliar a la tarea del docente (procesador de texto, planilla de cálculo, internet, correo electrónico, presentaciones asistidas por computadora, etcétera).

No iremos más lejos en este examen rápido de algunas características de este período reciente, nuestro contrato no es a este nivel. Esta intervención estará organizada hacia dos aspectos esenciales:

* Los *software* de matemática del mercado.
* Las computadoras y el soporte de un programa o de un conjunto de programas escritos con una intención pedagógica-didáctica en matemática: *software* educativos o *software* didácticos.

Los *software* de matemática del mercado

A través del computador en el aula de clase de matemática se ha incorporado el uso de internet (más que todo a nivel superior, para realizar educación a distancia o educación virtual) y el uso de los *software* del mercado. El problema está, en que algunos de los productos que conseguimos en el mercado, son concebidos para transmitir contenidos matemáticos y no como un apoyo al contenido matemático existente en los programas de estudio.

A pesar de esta realidad mundial, en Venezuela, el presente Sistema Educativo, si bien no cierra la puerta a metodologías basadas en el uso de las TIC, no ofrece un marco referencial de trabajo concreto. No obstante, es el profesor el que hace posible que los medios tradicionales de instrucción y las TIC (Internet incluido) se utilicen con criterios que constituyan y faciliten el concretar verdaderos actos educativos en los cuales se produzcan de manera efectiva los procesos de enseñanza y aprendizaje. (Colmenárez, 2003). El uso de las TIC al servicio de la educación, no ha sido implantado como parte de un proyecto educativo nacional, de allí que sea evidente la escasez de *software* venezolanos en el área de la educación, que apunten directamente a reforzar los planes y programas establecidos por la reforma curricular, impulsada por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte Venezolano desde el año 1997.

Las perspectivas con que se han venido incorporando las TIC a la Educación, están haciendo necesario recrear nuevos modelos educativos que tengan categorías mucho más amplias, que permitan ver los procesos educativos desde las posturas holísticas y metacognitivas, por lo que actualmente, algunos hablan de ambientes de aprendizaje, (como la UNESCO, 1998) mientras que otros hablan de situaciones problemáticas y/o didácticas, (Brousseau, 1986, Briand, 1985, Quevedo, 1986) como una posibilidad de recrear los procesos educativos de una manera didáctica, integral, sistemática y contínua que favorezcan los procesos encaminados al aprender a aprender.

Docentes e investigadores de distintas partes del mundo, han iniciado desde hace un poco más de dos décadas, el diseño y desarrollo de materiales denominados "Educativos" para apoyar la enseñanza de las matemáticas y facilitar al docente de aula una herramienta útil para fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Muchos *software* educativos han sido desarrollados en el área de matemática a nivel internacional, entre los que podemos mencionar: Derive Mathlab, Maple, Mathematic, Cabry-Geometry, entre otros. Estos productos se han venido convirtiendo como en un asistente al profesor de matemáticas en los distintos niveles del sistema educativo, pero no existe, en Venezuela de forma institucionalizada, el desarrollo de contenidos educativos en formato electrónico como resultado de investigaciones e innovaciones en el campo didáctico-pedagógico-tecnológico; un *software* con características estructurales y funcionales que les permita a los docentes, servirles de apoyo a la enseñanza y al proceso de aprendizaje, partiendo del impacto motivacional que su presencia causa en el aula.

Las computadoras y el soporte de un programa o de un conjunto de programas escritos con una intención pedagógica-didáctica en matemática: *software* educativos o *software* didácticos

Actualmente, organismos nacionales e internacionales vinculados al quehacer educativo matemático buscan promover un cambio de actitud hacia la matemática (enseñanza, aprendizaje, evaluación, producción de saberes, investigación, tanto de parte del docente como del alumno), a todos los niveles del sistema educativo.

Se buscan formas de planificar y ejecutar las clases de matemáticas, donde la actividad y el trabajo del alumno estén más presentes y tengan más protagonismo que las explicaciones magistrales del docente que, hasta ahora han prevalecido.

La evolución tecnológica y la fecha de caducidad de mucha de la información que se está produciendo continuamente, están cambiando algunos aspectos básicos de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, la incidencia y nivel de influencia del impacto de las TIC, específicamente, de la utilización de Internet o de un *software* educativo en el aula de clase, permite que el estudiante acceda, construya y aplique sus conocimientos matemáticos y a los profesores organizar nuevos ambientes de enseñanza de esta área de estudio.

No obstante, considerando que estos soportes tecnológicos (ordenadores, *software* multimedia, CD ROM, etcétera) y los canales de información que favorecen la comunicación (Internet, redes Intranet, enlaces satelitales, etcétera) fueron diseñados con propósitos generales, es realmente trascendental, según Rodríguez (1995), dirigir nuestro esfuerzo hacia el *software* (contenido) y no hacia el hardware (aparato) que ofrece las Tecnologías de Información y Comunicación.

Por lo tanto, para utilizar estas tecnologías con fines educativos, se tiene que realizar una cierta "adaptación", más o menos compleja, dependiendo del medio, para que estos soportes, que originalmente fueron creados como entretenimiento, no pierda ese valor, sino por lo contrario se le añada uno nuevo: el contenido educativo.

Con esta incorporación, el problema está en que, se piensa que con el solo deseo, un *software* con contenido educativo es suficiente por el mismo; así nos encontramos docentes que colocan al alumno frente al computador con un *software* educativo como intermediario; y creen que el programa del *software*, tiene la facultad de "gerenciar el aprendizaje" del alumno hasta que éste "asimila" la noción o el algoritmo que está involucrado institucionalmente en el *software*. Esta "gestión" del alumno, para gerenciar su aprendizaje, involucraría lo siguiente:

* Si el alumno responde correctamente a la interrogante o situación problemática planteada, según el modelo de resolución del programa, la máquina lo felicita, le da cumplidos, le dedica una música de victoria... y generalmente pasa a otra pregunta o situación problemática de mismo nivel o de una dificultad calificada de superior, o solicita al alumno el tipo de dificultad que él desea afrontar...
* Si el alumno responde incorrectamente, a la interrogante o situación problemática planteada, la máquina con un sonido lúgubre, u otro sonido... anuncia el fracaso, señala de volver a intentarlo y replantea la interrogante o situación problemática.
* Si el fracaso persiste, la máquina puede dar la respuesta deseada, e institucionaliza el fracaso de ese alumno en esa situación, si se lleva una base de datos sobre los fracasos de los alumnos a las diferentes situaciones planteadas, y pasar enseguida a otra interrogante. O puede la máquina pasar a otra situación problemática o interrogante pero de un nivel “menos difícil”... y así sucesivamente.

Dentro de esta perspectiva, si entendemos una situación didáctica como “un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que contiene eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (el profesor) con los fines de hacer apropiar a esos alumnos un saber constituido o en vías de constitución”. (Brousseau, 1982:86). Observamos que en ella se ponen en relación tres elementos: un alumno, un docente y un saber, donde se realiza una transposición didáctica de un conocimiento (tanto teórico, como práctico), a través de un medio. Entonces, para un docente didactista un *software* “Educativo” no es lo mismo que un *software* “Didáctico”.

Por *software* educativo entendemos aquel que puede ser caracterizado no sólo como un recurso de enseñanza y aprendizaje, sino también de acuerdo con una determinada estrategia de enseñanza; así su uso conllevaría unas estrategias de aplicaciones implícitas o explícitas: ejercitación y práctica, simulación, tutorial; uso individual, competición, pequeño grupo. (Urbina, 1999). Mientras que, el *software* didáctico es aquel diseñado con el objetivo explícito de enseñar contenidos, ellos son un objeto de estudio tanto a nivel de la elaboración (con un objetivo de ingeniería y/o con un objetivo de investigación) como a nivel del análisis; son muchas veces, el resultado de investigaciones e innovaciones en el campo didáctico-pedagógico-tecnológico.

Es importante resaltar que si los *software* didácticos son construidos con una intención de enseñanza, ellos no funcionan generalmente en una situación aislada sino tratan frecuentemente de articular una sucesión de problemas, de preguntas, de comunicaciones, de informaciones, etcétera, lo que los aproxima generalmente de un proceso didáctico. Pero en esto, no están sus características esenciales, ellas deben ser buscadas del lado de lo que contribuye a diferenciarlas de los procesos y situaciones didácticas clásicas. Podemos citar aquí algunas de esas características:

* Una gestión particular del tiempo didáctico: secuencialización contínua, repetición de ejercicios, etcétera.
* Un control y una intensificación de las interacciones alumno-situación problemática.
* Una relación alumno-máquina más segura que la que se realiza en la clase.

Para evitar toda ambigüedad, no es inútil precisar que no es en término presencia y/o ausencia de esas características que hacen las diferencias entre *software* didácticos y situaciones de clase.

Un *software* didáctico es un programa construido con una función específica. El autor (individual o colectivo) de un *software* didáctico debe tener en cuenta un conjunto de características que hacen la especificidad del mismo.

Por ejemplo, la selección de los niveles de dificultad se hace a través de una selección de parámetros que el autor del mismo juzga pertinentes, él escoge según los casos, las modalidades “más simples" o "más complejas" de esos parámetros. En fin, él hace su selección entre las modalidades de una variable que considera (de forma implícita generalmente) una variable didáctica, (provoca un cambio cualitativo en los procedimientos del alumno y en la estrategia del profesor) esto de una manera, más o menos empírica.

Por lo tanto, al programar, el autor debe hacer un catálogo o lista exhaustiva de los efectos deseados, en términos de ejecución del programa. Esta lista va a provenir esencialmente de haber hecho explícito, lo más preciso posible, un conjunto de elementos entre los cuales podemos encontrar:

* Situación(es) escogida(s).
* Problema(s) correspondiente(s), (Interés educativo...).
* Modos de presentación, (visibilidad, animación...)
* Facilidad de utilización.
* Organización de las respuestas.
* Tratamiento de las respuestas.
* Nivel de dificultad.
* Número máximo de fracasos permitidos.
* Grado de interactividad.
* Entre otros.

En fin, un gran número de variables que en una situación de clase tradicional son funciones realizadas por el docente, integradas en su acción y que el autor de un *software* didáctico debe tomar en cuenta.

Asimismo, todas estas variables dan origen a numerosas interrogantes, como por ejemplo:

* ¿Cómo saber qué variable es significativa para un proceso de enseñanza que utiliza un computador y un *software* didáctico?
* ¿Son suficientes la interactividad, la facilidad de utilización, la visibilidad, la animación?
* ¿Qué componentes de una situación didáctica es necesario extraer para que sean variables pertinentes en el *software* didáctico?
* ¿Cuáles son las variables que permiten la aparición de las estrategias de base en los alumnos que juegan con un *software* didáctico?
* ¿En qué medida las variables didácticas puestas en juego en el *software* didáctico permiten a los alumnos rechazar esas primeras estrategias y construir y utilizar otra que sea la que se quiere alcanzar institucionalmente con el *software* didáctico?
* ¿Qué tipo de contrato didáctico es el que se instaura en las situaciones de clase donde entra en juego un *software* didáctico?
* Inclusive podríamos preguntarnos: ¿Se realiza el contrato didáctico? Y si se establece, lo hace entre quienes: ¿el docente?, ¿el autor del *software*? ¿el programador? o ¿el computador?

Todas estas preguntas y otras más deben plantearse el autor de los *software* didácticos al momento de realizarlos. De igual manera el docente, antes de utilizarlo en su día a día, debe realizar un análisis del problema de enseñanza que el autor se propone de "resolver" con la ayuda del *software* didáctico.

Debido a esta complejidad, es que en la mayoría de los casos que se realiza un *software* didáctico, se designa un equipo en el seno del cual existe una repartición de tareas extremadamente precisas, para alcanzar la elaboración del mismo.

Como vemos, los procesos de análisis y de elaboración de *software* didácticos necesitan bastante la didáctica, sobre todo un cierto "saber hacerlos"; no basta con la parte del saber del ingeniero de computación (o de otro autor del *software*), es necesario que los didactistas o los docentes les den los medios técnicos para la elaboración de las situaciones didácticas que pueden ser ejecutadas en el *software* didáctico.

Muchas veces, estas situaciones didácticas propuestas pueden surgir de situaciones elaboradas en investigaciones. Por lo tanto, los *software* didácticos no pueden realizarse aislados de las investigaciones que se desarrollan en didáctica de las matemáticas, sino al contrario.

Por una parte, la investigación misma, puede utilizar *software* didácticos para sus propias necesidades, en la medida que algunos aspectos relacionados a la utilización de la computadora aparecen decisivos para la construcción de situaciones. Esto se debe, a que se pueden construir sistemas con una perspectiva de enseñanza, de manipulación y de construcción de los conocimientos.

Y por otra parte, las perspectivas y las proposiciones de inserción de las computadoras en la planificación de la enseñanza de las matemáticas son numerosas y tienen motivaciones y orígenes diferentes. Así, es necesario tener presente algunas características que conciernen las relaciones entre la construcción del conocimiento y la acción, así como también en las particularidades de la programación misma.

Por lo tanto, para programar un *software* didáctico, es necesario saber, conocer o definir un proceso general para obtener un resultado o un efecto deseado, hacer explícito este procedimiento bajo una forma adaptable a una codificación en un vocabulario preciso de acciones y de operaciones para hacerlas ejecutables sobre una máquina.

Insistimos por lo tanto en ese doble aspecto de anticipación y de planificación de la producción de la respuesta y sobre las obligaciones de formulación que obligan al autor de los *software* didácticos, a tomarlos en cuenta al momento de construir los elementos del programa.

Conclusión

Todo lo antes planteado, es del interés de la Didáctica. La computadora debe permitir la estructuración de los conjuntos de acción, el análisis de sus combinaciones posibles, la manipulación de instrucciones específicas, entre otros. Por ejemplo: En una resolución de problemas, construcción de una figura, ¿Cómo el alumno ajusta su conocimiento geométrico de la figura a las obligaciones de organización y de estructuración del o de los programas que él debe producir?. Por ejemplo con el programa Cabry-Geometry.

Es necesario volver a preguntas más estrictamente didácticas. En este programa Cabry-Geometry no se trata de trabajar computación sino se trata de Geometría. Los alumnos son llevados a identificar enunciados a diferentes niveles: procedimientos, definiciones de figuras, propiedades generales, teoremas, testar la validez, etcétera. Este *software* didáctico es un ejemplo de una categoría de problemas clásicos de la didáctica correspondiente a la construcción y al análisis de procesos de matematización.

Desde el punto de vista de los conceptos, podemos trabajar a despejar la manera (o las maneras) como la geometría del programa Cabry-Geometry, contribuye a la conceptualización de figuras, ángulos, sector angular, medida, etcétera. Existe, en diferentes partes del mundo, algunos trabajos en curso en esta dirección, los cuales son expuestos en los Congresos Internacionales, CabriWorld, (Sao Paulo, 1999; Montreal, 2001; Italia, 2004) y los Congresos Iberoamericanos de Cabri, Iberocabri (Santiago de Chile, 2002; México, 2004; Colombia, 2006). Por otra parte, al pensar en la programación de *software* como un elemento didáctico, no podemos negar que los matemáticos no pueden dejar de interesarse en la manera cómo los técnicos en computadoras analizan y resuelven los problemas didácticos que les conciernen.

Toda didáctica se apoya necesariamente, pero no exclusivamente, sobre un buen conocimiento de las concepciones de los alumnos en relación de los objetos de saber los cuales ella pretende estudiar la enseñanza, y la didáctica de las matemáticas no escapa a esto. Ha habido en los últimos años numerosos trabajos en ese dominio.

Las técnicas consisten esencialmente en analizar las producciones de los alumnos, ya sea de tareas de construcción de programas, o de completar los programas. Esas investigaciones son fundamentales, pues si debemos conocer y analizar las producciones de los alumnos que trabajan sobre un tema matemático concreto, es necesario estar informados lo mejor posible de las dificultades más específicas de dicho tema.

Podemos, ciertamente esperar mucho del desarrollo de la utilización de las TIC en matemáticas, y en didáctica de las matemáticas. Esta exposición, no puede con el tiempo asignado pretender explicar todo sobre este tema, pero, es indispensable señalar la importancia del fenómeno. Es necesario entonces, un cambio en la forma de hacer docencia, en las estrategias didácticas de los profesores, en los sistemas de comunicación y distribución de los materiales de aprendizaje, y no sólo enfatizar la disponibilidad y las potencialidades del uso de las tecnologías.

Por largo tiempo, las matemáticas han aparecido como una disciplina de base, maestra de ella misma y de sus conceptos, no solicita ni atiende nada de las otras ciencias exactas, ni sobre el plano de los métodos, ni sobre el plano de los servicios. Del exterior sólo pueden venir problemas, frecuentemente muy importantes en otras partes.

Esta situación ha cambiado y las TIC ofrecen a las matemáticas, en los diferentes niveles del sistema educativo más que un campo de aplicaciones. Ellas le ofrecen así posibilidades de tratar los problemas con medios nuevos, problemas que no habían podido ser abordados con todos los medios deseables, cambios significativos en la importancia relativa de algunos sectores así como en el puesto y el estatus de la experimentación y de la prueba, por ejemplo, el algoritmo, es un medio de prueba, y un objeto cuyo estudio moviliza medios matemáticos importantes. Claro esta, falta aún el asumirlas y utilizarlas; esto se debe, entre otras causas, a la poca formación en esta área de los profesores y a la resistencia al cambio que ofrece el personal docente, en parte por temor a enfrentarse con algo desconocido y en parte defender la comodidad que representa seguir la inercia de continuar con lo conocido ante la amenaza de enfrentarse al reto de la actualización.

En efecto, las actividades ligadas a las TIC y la docencia han sido desarrolladas, generalmente, por profesores y alumnos entusiastas, que han conseguido dotarse de los recursos necesarios para experimentar, pero no existe en el organigrama de las Universidades ni de las instituciones educativas, una ubicación clara de los recursos de TIC para la docencia, ni un canal establecido para su financiación, gestión y desarrollo.

Los Servicios de Informática han podido en algunos casos darles cierto soporte, pero sin la imprescindible planificación docente y configuración pedagógica, ni el impacto de los trabajos e investigaciones en didáctica, por lo que se pone de manifiesto la rigidez de las estructuras educativas, principalmente las universitarias para integrar en su funcionamiento cotidiano la utilización de las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Las TIC han pasado en algunos años de estatus de materia un poco confidencial en las enseñanzas universitarias, a estatus de materia obligatoria, así como necesaria a todos los niveles del sistema educativo. Los docentes de computación, en general, han tenido que resolver problemas didácticos, y efectuar selecciones.

Por lo tanto, se requiere participación activa y motivación del profesorado, pero se necesita además un fuerte compromiso institucional. La cultura universitaria promueve la producción, la investigación en detrimento de la docencia y de los procesos de innovación en este ámbito. Sin embargo, procesos de este tipo parecen ser los que oxigenarán de alguna forma a las universidades.

No se puede negar que las universidades se encuentran en una situación paradójica: por una parte están cercanas y son parte de esta revolución de la información, mientras que por otra, representan de alguna manera el segmento más conservador de la sociedad, y son lentas en adoptar nuevas vías de tratar con la información y con la tecnología.

Por todo esto, se hace imprescindible que en todos los sectores educativos, desde la educación inicial, hasta la educación universitaria se realicen cambios radicales en relación a la gestión de la enseñanza, la inclusión de las TIC en el proceso educativo es ya un hecho real, necesario e indetenible, a pesar que el gran potencial que representan las TIC para los procesos de enseñanza y aprendizaje no ha sido aprovechado de manera realmente efectiva por las instituciones educativas, por lo que es necesario que se utilicen recursos de naturaleza diferentes, e inclusive adquieran un compromiso institucional de aplicación de las TIC en la docencia, haciendo más flexible la enseñanza. En este dominio, considero, que el mejor método, es el de la escuela francesa que desde hace varios años utilizan en la Didáctica de las Matemáticas.

Ante este panorama, la invitación es a pensar, diseñar, planificar y evaluar juntos (educadores, comunicadores, ingenieros, directivos educativos, estudiantes) la introducción de las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje no solamente desde su aplicación didáctica-educativa, sino también desde su función comunicativa. Por lo tanto, el modelo de comunicación subyace al sistema educativo específico. Esto incluye la educación a distancia, la educación para los medios, la educación informal. En todos estos sistemas sucede lo mismo: el aprendizaje se da en la medida en que el individuo se siente involucrado y en este sentido es que el ambiente educativo mediado por las TIC provoca procesos de enseñanza y aprendizaje, no solo por las características propias de las TIC en sí, sino por su uso didáctico en combinación con los medios.

Referencias

Barajas, M. (1997). *La Escuela de las Tecnologías*. Madrid. Pirámide.

Briand, Joël. (1985**)** “*Situation didactique et logiciel d’enseignement*”, DEA de Didactique des Mathématiques, IREM de Bordeaux.

Brousseau, Guy. (1982). Les objets de la Didactique des Mathématiques, Orléans. Francia. En el *Cours de la II École d’Été de Didactique des Mathématiques.* IREM de Orléans

Brousseau, Guy. (1986). *Théorisation des phénoménes d’enseignement des Mathématiques*, Francia. Thèse d’État, Université de Bordeaux I.

Colmenarez, Germán, (2003) *La tecnología de la Información y la comunicación como herramienta de apoyo al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Valera. Trabajo de Grado, Universidad Valle del Momboy

Quevedo de Villegas, Blanca. (1986) *Le rôle de l’énumération dans l’apprentissage du dénombrement.* Bordeaux. Francia. Thèse de Doctorat de 3ème Cycle de Didactique des Mathématiques, IREM de Bordeaux.

Reggini, H. (2000) *El fundamentalismo digital*. El Magazine de Horizontes Informática Educativa Nº6.

Rey, J. (2000) *Aprendizaje Digital*. El Magazine de Horizontes Informática Educativa Nº 14.

Rodríguez, D. (1995). *Entornos de Aprendizaje con Nuevas Tecnologías*. Paidós. Barcelona.

UNESCO. (1998). *La Educación Superior en el Siglo XXI. Debate Temático: Autonomía, Resposabilidad Social y Libertad Académica*. París. Francia.

Urbina, S. (1999). *Informática y Teorías del Aprendizaje.* http://www.sav.us.es/pixelbit/articulos/n12/n12art/art128.htm

Tópico 3

Influencia de los avances de la tecnología en la educación matemática

Un enfoque alternativo: la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde las humanidades

Alejandro R. Garciadiego

Resumen

El presente ensayo está dividido en dos partes. En la primera de ellas se argumenta cómo es que se pueden enfocar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde las humanidades, en particular, al recurrir a elementos históricos, filosóficos y artísticos. (Se ha tratado de mantener el esquema teórico de la manera más sencilla posible, con el propósito de llegar a un auditorio lo más amplio posible). En la segunda parte se presenta un ejemplo concreto de cómo se puede introducir un concepto matemático sin recurrir a tecnicismos, que implican la necesidad de la comprensión y el uso de conceptos abstractos, de notación simbólica y de habilidades mentales de cálculo. Se ha ampliado el tamaño del tipo de letra y el espacio del interlineado con la intención de hacer aun más dinámica la lectura.[1]

Palabras clave

Matemáticas, historia, filosofía, base, número.

I

' I. Introducción

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son uno de los mayores escollos dentro del sistema educativo mexicano, independientemente del nivel del que se trate. Los programas de educación superior, que congregan a aquellos estudiantes que supuestamente se encuentran mejor preparados, no son la excepción. Los factores terminales de las áreas de humanidades y sociales se encuentran irremediablemente influenciados por los bajos índices de aprobación de las materias relacionadas con las matemáticas.

El simple nombre de la materia aterra a los estudiantes. Aún antes de ser enseñada alguna nueva rama de las matemáticas, los alumnos se encuentran predispuestos en contra de ella. Al no existir un cambio dramático en el enfoque educativo, una vez que un estudiante se ha formado una apreciación negativa hacia las matemáticas, difícilmente la cambia. En consecuencia, algunos jóvenes deciden sus vocaciones profesionales en relación inversa a la necesidad de aprenderlas. Desgraciadamente, en su caso, la gran mayoría de los programas académicos actuales las incluyen.

De manera inobjetable, exámenes de carácter nacional e internacional demuestran que se ha fracasado en el intento por enseñar y aprender matemáticas, particularmente a nivel bachillerato.[2] Los resultados e implicaciones de estos últimos exámenes son alarmantes. El problema no es nuevo. Sin embargo, ahora organismos internacionales han confirmado lo que algunas voces locales argumentaban desde tiempo atrás. La estrategia más simple debería ser la de intentar copiar aquellos programas que

[1] Una versión detallada del programa se encuentra en: Alejandro R. Garciadiego. "Centro de Investigaciones Multidisciplinarias y de Innovación docente en Matemáticas". *Mathesis* **III I$_1$** (2006) 165-219.

[2] Los resultados de la propia *SEP* y de la *OECD* se dieron a conocer al público en general en las últimas dos décadas. Véase, entre otros: Rafael Vidal y Ma. Antonieta Díaz. "Resultados de las pruebas Pisa 2000 y 2003 en México. Habilidades para la vida en estudiantes de quince años". México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

han sido parcialmente exitosos en otras latitudes. Desgraciadamente, condiciones sociales, políticas, económicas y educativas, entre otras, impiden transponer aquellas metodologías al medio local.

A pesar de que la matemática educativa, como una disciplina académica, aún no ha sido propiamente profesionalizada en los países subdesarrollados, la comunidad local se ha fortalecido de manera significativa en los últimos treinta años. Esta actividad se ve reflejada en la creación de centros que proporcionan a académicos entrenados en esta disciplina la oportunidad de desarrollarse profesionalmente; también se han fundado asociaciones y sociedades que les permiten a estos intelectuales reunirse para discutir sus proyectos y puntos de vista; y, se han creado publicaciones periódicas que les permiten a estas personas dar a conocer los resultados más recientes de sus investigaciones. Este proceso de profesionalización ha subrayado lo complejo de la situación y han surgido un sinnúmero de enfoques generales, problemas concretos y de metodologías para resolverlos. En particular, muchos de estos han tratado de detectar las razones por las cuales se dificultan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Como consecuencia de los antecedentes formativos de estos académicos, algunos de estos factores envuelven análisis de carácter: Filosófico, psicológico, lingüístico, pedagógico, matemático, y, aún otros, histórico. Como el problema se transmite a todo lo largo del proceso formativo, “hay quienes han enfocado sus estudios en alguno de los diversos niveles educativos (elemental, medio, medio superior, etc.); hay quienes se han especializado en diversas ramas (aritmética, álgebra, geometría y cálculo, entre otras); hay quienes se han orientado sobre las diferencias de género para buscar posibles explicaciones; hay quienes han fijado su atención en los diversos grupos generacionales (párvulos, niños, adolescentes, etc.)” [Garciadiego 2006, 171].

Debería ser claro para todos aquellos involucrados en dicha situación, que el problema es de tal envergadura que ya es imposible concebir que exista una solución única. Los resultados hasta ahora encontrados son muy limitados y poco alentadores. Esta situación se agrava cuando uno se percata que la gran mayoría de los interesados han sido profesionalmente entrenados como matemáticos y que la mayoría de ellos poseen formaciones semejantes, lo que limita la variedad de posibilidades. Es necesario subrayar que algunos de los resultados más exitosos, en la divulgación de las matemáticas, provienen de individuos que han gozado de otras formaciones profesionales.

A pesar de que existe consenso generalizado en torno a cuáles son algunas de las dificultades originales, invariablemente se le da jerarquía a la mecanización y operación de los conceptos matemáticos. Desde los primeros niveles, los estudiantes son obligados a memorizar y aplicar un conocimiento técnico que se encuentra fuera de su comprensión. Aún en los casos, donde se han encontrado resultados positivos, fuera de lo común, generalmente se han seguido los mismos métodos tradicionales, únicamente se han ampliado los procesos y etapas de práctica y mecanización. Aparentemente, el enfoque es universal. Tradicionalmente, se ha insistido que las matemáticas proporcionan las herramientas fundamentales para calcular y medir. El enfoque mecanicista ha sido tan dominante que el estudiante no asocia apelativo de persona alguna al desarrollo de las matemáticas. De hecho, esta orientación es tan aplastante que el alumno no concibe que las matemáticas sean el resultado de una evolución conceptual. Esta disciplina se percibe como un lenguaje ya establecido donde no es posible incorporar cambios o transformaciones. Incluso, recientemente se ha conceptualizado que si el estudiante es capaz de memorizar un simbolismo, entonces debería ser capaz de manipularlo mecánicamente.

2. Objetivo

Este proyecto propone incorporar un enfoque altamente novedoso en torno al mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. De ninguna manera se concibe que este plan sustituya, desplace o reemplace los ya existentes. Al ser un problema tan complejo, se entiende que no exista una solución lineal, trivial o única. Por el contrario, se deben de incorporar el mayor número de alternativas que enriquezcan las opciones.

A diferencia de un gran número de lecciones presénciales, este proyecto se propone exhibir "una alternativa real y completamente diferente para todos aquellos individuos que, por diferentes motivos, han experimentado dificultades en la comprensión y asimilación de los diversos conceptos matemáticos" [Garciadiego 2006, 183]. Se sabe que la gran mayoría de los escollos que enfrenta un individuo se retroalimentan de manera irremediable ya que los procesos de enseñanza y aprendizaje se desenvuelven de manera lineal y acumulativa. Una vez que se tuvo contrariedad con algún concepto y/o procedimiento, el usuario necesariamente tendrá futuros tropiezos con aquellas nuevas ideas y metodologías que dependan, se deduzcan o estén relacionadas con las anteriores.

Desgraciadamente, a pesar del alto grado de consciencia de la comunidad matemática, la gran mayoría de las nuevas aportaciones en educación se limitan a las esferas del énfasis y la presentación. Por ejemplo, en cuanto a las casas editoriales se refiere, éstas han subrayado la importancia de la exposición del material estrictamente hablando; y se han limitado a embellecer la impresión y visualización del material: Se incorporaron distintos colores de tintas para llamar la atención de los lectores (*e.g.*, se usa el color rojo para resaltar una definición matemática). Pero los productores de dicho material pedagógico no se han percatado de la necesidad de identificar *cuáles* son los obstáculos conceptuales, *dónde* se originan estos y *cómo* pueden ser superados. Por ejemplo, una vez que un maestro ha mostrado un nuevo concepto (*e.g.*, variable), se da por supuesto que todos los estudiantes lo conciben de la misma manera.

Obviamente, no se niega que hayan existido grandes rompimientos con los procesos tradicionales. Hace unas cuantas décadas se exteriorizó el estudio de la teoría de conjuntos, a partir de los niveles más elementales. Este novel acercamiento produjo cambios 'revolucionarios' en la forma de presentar, concebir y entender algunos de los conceptos más elementales. Pero, sin embargo, estos enfoques fueron cuestionados desde un principio [véase: Kline 1973]. Recientemente, se han incorporado estrategias que involucran el uso de nuevas tecnologías, como son las calculadoras y computadoras personales. Pero, finalmente, estos, aparentemente revolucionarios, enfoques y tecnologías no han cambiado el propósito último: Enseñar a los estudiantes que las matemáticas, descritas de manera simbólica, permiten calcular y medir. Para lograr este fin, se enfatiza la mecanización de procedimientos técnicos que les permitan a los usuarios asimilar estas técnicas. Es decir, independientemente del nuevo enfoque siempre se pretende que el estudiante domine, a través de la continua repetición, ciertos mecanismos y patrones.

Aunque no se ha realizado un estudio histórico serio en esta dirección, es muy posible que este afán último de cómo enseñar y aprender matemáticas esté sustentado en el que se ha considerado, a lo largo de la evolución de la cultura occidental, como el ejemplo más perfecto de un libro de texto matemático: Los *Elementos* de Euclides (*ca* 300 a. C.). Esta ha sido la obra que se ha utilizado como modelo para enseñar matemáticas, en particular, la geometría elemental. Se dice, de manera informal, que, con excepción de *La Biblia*, este ha sido el tratado con mayor número de distintas ediciones, a partir del siglo XV, aproximadamente. Sin embargo, en épocas recientes, historiadores han cuestionado el propósito del libro y han afirmado que éste debió haber estado conceptualizado y dirigido a los matemáticos profesionales más capaces de aquella época. Hoy en día, algunas de sus secciones son de difícil comprensión, aún para individuos con una sólida formación matemática. Si este modelo no fue diseñado originalmente para enseñar y, además, se requiere de cierta madurez intelectual, entonces es lógico comprender por qué los alumnos presentan dificultades para asimilar dicho modelo y, en consecuencia, tendría que ser abandonarlo. Dos mil quinientos años de historia deberían de haber demostrado que este no es el camino adecuado y que es necesario abandonarlo de raíz, sustituirlo por otro, o, al menos, antecederlo por otro que lo aclare y simplifique.

Pero, desde el inicio de cualquier curso debería ser fundamental, al menos, discutir con los estudiantes hacia dónde van y por qué van en esa dirección. Como ya se señaló este proyecto se propone introducir enfoques y metodologías radicalmente innovadoras. Una de las más importantes es insistir en que siempre se puede presentar un tema matemático nuevo a través del análisis histórico de por qué fue necesario discutirlo originalmente, qué problemas o dificultades pretendía resolver, cuándo se intentó resolverlo y cómo se incorporó al caudal de conocimientos. Las respuestas a estas preguntas deben proveer la explicación de dónde surgió un concepto y para qué se necesitaba. Huelga decir que el nivel de estudios y madurez emocional del individuo debe señalar el grado de sofisticación de la explicación requerida. Un caso concreto, para evitar forzar al estudiante a memorizar las características del calendario actual, y asegurarse que comprende los conceptos relacionados con éste, es menester explicar al alumno de dónde surgió la necesidad de medir el tiempo, cuáles han sido algunas de esas respuestas y cómo ha evolucionado ese proceso. En este caso será necesario introducir elementos históricos y etimológicos, porque el estudioso crítico y analítico se preguntará, eventualmente, *por qué* los nombres de los meses, por ejemplo, no corresponden con su significado (*e.g.*, septiembre no es el séptimo mes del año). Es posible que el estudiante obtenga un mayor provecho después de conocer el origen y significado de algunos de estos vocablos (*e.g.*, lunes, viernes, septiembre y diciembre, entre muchos otros) y de los propios hombres que contribuyeron a su creación.

No se sugiere que la enseñanza tradicional debe ser sustituida por completo con este nuevo enfoque. Simplemente se insinúa que antes de presentar el desarrollo técnico de cualquier concepto es menester tener un primer contacto con las matemáticas por medio de su lado humanístico. La matemática que se trasmite en los ciclos escolares preuniversitarios corresponde a conceptos, ideas y metodologías matemáticas desarrolladas con anterioridad al siglo XVIII. La mayor parte de dichos elementos tuvieron un origen de carácter natural, físico o 'real'. Por lo mismo, es posible encontrar una explicación histórica del por qué el hombre se interesó por estudiar dicha idea. Es decir, a través del estudio de elementos de carácter filosófico, histórico, artístico, social, etc., el estudiante adquirirá una capa protectora que le permitirá entender la necesidad de comprender y estudiar dichos conceptos. Este nuevo mundo de ideas le permitirá al alumno enfrentar la comprensión técnica de diversos elementos, una vez que ha adquirido, de manera subliminal, una cultura matemática hasta antes desconocida. Este enfoque refuerza las técnicas y modelos que permiten a los estudiantes, en este mundo globalizado, a prepararse de la manera más completa posible. Este acercamiento está estrechamente relacionado con la adquisición de estrategias de lectura de comprensión y de escritura adecuada, los otros pilares del sistema educativo.

Este análisis sugiere que antes de introducir el aspecto técnico y mecánico de los conceptos matemáticos, el cual es parte fundamental de la adecuada formación de los estudiantes, es necesario presentar el lado complementario de esta disciplina. En breve, la explicación técnica debe ir antecedida por una justificación o explicación que aclare de dónde surgieron dichas ideas. El estudiante ignora el por qué, cómo, cuándo, dónde, quién. Una vez que le sean resueltas dichas interrogantes, será más sencillo entender el carácter técnico de su desarrollo. No se pretende formar humanistas profesionales en matemáticas, ya sean estos historiadores, filósofos o artistas. La meta última es la comprensión y manejo de los conceptos matemáticos. Pero este entendimiento no necesariamente se adquiere a través de la adquisición y perfeccionamiento de procesos mecánicos pasivos. Son los seres humanos quienes han desarrollado esta disciplina y es necesario conocer cómo lo han hecho. Si se percibe cómo ha sido esta evolución de las ideas matemáticas, se ampliarán los horizontes para entender los aspectos técnicos de la disciplina.

Esta nueva metodología permite atacar dos objetivos de manera simultánea. Por un lado, al alumno se le proporcionan explicaciones que no necesariamente dependen de su conocimiento previo, y con esto se rompe una inercia negativa; y, estas explicaciones, al no estar apoyadas en el conocimiento técnico de la materia, pueden asentarse sobre material que anteriormente ha demostrado ser exitoso. Este acercamiento a las matemáticas no deberá atemorizar al alumno; por el contrario, le proporcionará una capa protectora que le indicará que ya conoce y entiende ciertos aspectos, y que ahora únicamente le falta operar esas nuevas ideas. "De manera subliminal, casual y esporádica, el lector adquirirá una nueva manera de relacionarse con las matemáticas" [Garciadiego. 2006, 187]. De nuevo, de manera inconsciente, el usuario, ya sea profesor o alumno, dominará un conocimiento matemático, inmune a pánicos. Este enfoque enriquecerá el conocimiento matemático de cualquier usuario, tanto para el que tiene dificultades, como para el que nos las tiene.

A diferencia de los tratados tradicionales, esta nueva metodología puede ser implementada por medio de contribuciones muy breves (informativas, formativas y amenas) que pueden estar incorporadas en cualquier estadio de la obra. Como ya se había mencionado, el nivel de sofisticación estará en relación directamente proporcional con la edad y maduración del grupo de que se trate.

Este método también es independiente del género o cultura de la región. Este enfoque será recibido positivamente por los padres de familia, quienes encontrarán una manera adecuada de relacionarse con los contenidos de los programas académicos de sus hijos. Sin embargo, es posible que los que se sientan más beneficiados por el programa sean aquellos estudiantes del nivel medio, quienes tienen que asimilar una mayor cantidad de temas (e.g., álgebra, geometría y cálculo, al menos) en un lapso de tiempo más breve. Debe quedar claro que esta es una metodología inclusiva y que no piensa única y exclusivamente en los personajes relacionados directamente por los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es decir, maestros y alumnos. Más importante aún, no se pretende educar a los educadores. Este enfoque les permitirá ofrecer explicaciones alternativas y complementarias a temas con los que los estudiantes comúnmente tienen dificultades. Entre más y más diversas armas se posean para atacar la misma contrariedad será mejor. Se tiene que dejar atrás esa imagen de que las matemáticas son áridas, estériles y, sobre todo, fijas. Con el conocimiento de su historia, y de otros elementos que las circundan, se tendrá oportunidad de estudiarlas desde otros ángulos y puntos de vista. Sin embargo, se subraya, una vez más, que este acercamiento no está divorciado del manejo adecuado de las diversas ideas, metodologías y algoritmos matemáticos. Simple y sencillamente se asevera que al enriquecer los enfoques, se podrán entender detalles que antes escapaban a la observación.

Para poder llevar a cabo este propósito es necesario abrir por completo el abanico de las oportunidades y concebir las matemáticas en su concepción más rica y variada posible. Como ya se ha señalado en algún otro lugar, es posible parafrasear a los editores de Mathesis [Vol XII. No 1. Febrero 1996. Tercera de forros], revista especializada en la historia y filosofía de las matemáticas, y pensar que:

> *[Se busca difundir una nueva forma de acercarse y concebir las matemáticas. Este nuevo enfoque se trasmitirá a través de conocer el entorno humanístico, social y cultural que circunda el conocimiento matemático. Así, sin tecnicismos y de manera subliminal, el público adquirirá una nueva y alternativa cultura matemática que le permitirá, eventualmente, acercarse a la parte técnica]. El enfoque multidisciplinario, internacional y multiétnico propone estrechar las relaciones [...] de un espectro muy amplio de colegas provenientes de una gran variedad de formaciones [académicas] y sociales. Se debe estar abierto a todos los puntos de vista, a todos los enfoques, a todos los métodos y a todos los aspectos [de la cultura matemática]. Este proyecto subyace dentro de un marco conceptual lo más amplio posible que contempla el estudio de [toda idea relacionada con las matemáticas] en todos los países del mundo (tanto las [ideas] matemáticas occidentales tradicionales como las no tradicionales) y en todas las épocas (desde el origen del hombre hasta nuestros días); incluyendo etnomatemáticas, arqueoastronomía, matemáticas puras y aplicadas (y el desarrollo de los usos de ambas), escuelas de pensamiento, estilos matemáticos, estadística, probabilidad, enseñanza, ciencias actuariales, investigación de operaciones, ciencias de la computación (incluyendo política administrativa, ›hardware: Cdesde el ábaco hasta la computadoraC y ›software: C*e.g., *algoritmos, lenguaje, notación y tablasC), cibernética, comunicación de las matemáticas (sistemas de información y bibliografías, entre otras), biografías de matemáticos, historiadores[,] filósofos[, pedagogos y divulgadores], organizaciones e instituciones, historiografía, [metodología] y cualquier aspecto que ilumine el desarrollo de las [ideas] matemáticas dentro de un contexto intelectual, cultural, político, económico y*

social. [...]. Por su carácter multidisciplinario, se contempla [la inclusión y discusión de ideas] de otras disciplinas **C**e.g., *ciencias del hombre (antropología, psicología, pedagogía, entre otras), ciencias exactas (física, astronomía, química, entre otras), ciencias naturales (biología, medicina, etc.), ciencias sociales (sociología, teoría política, relaciones internacionales, entre otras), humanidades (filosofía, leyes, etc.) y artes (literatura, pintura[, fotografía, cine] y escultura, entre otras)***C** *cuando su análisis, [cualquiera que éste fuese], arroje nueva luz sobre el entendimiento de los conceptos que conforman el ámbito matemático. En breve, a través de este programa se intenta estrechar más el apoyo mutuo entre los aspectos humanísticos de las [ideas] matemáticas y toda disciplina académica [y cultural] en la búsqueda común por una mejor comprensión del mundo que nos rodea.*

Se puede resumir que las matemáticas, por lo general, han sido presentadas de manera técnica y mecánica y se les ha divorciado de su contexto humano. A diferencia de la gran mayoría de las otras disciplinas académicas, no se asocian factores humanos subjetivos con la creación y evolución de las ideas matemáticas. Ahora, también se puede conjeturar que el modelo que se ha escogido para transmitir las matemáticas no sea el adecuado ya que, originalmente, no estaba dirigido al público general.

' 4. Hipótesis

Se supone como un hecho innegable el fracaso de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Aparentemente, esta es una situación que se ha compartido, en mayor o menor medida, en las distintas épocas de la historia. Este fallo también ha sido consistente en la mayoría de los diversos niveles de la educación. A pesar de algunos avances y excepciones, este revés persiste, independientemente, de avances educativos, sociales, económicos y tecnológicos. Se ha insistido, con mayor o menor énfasis, en el dominio mecánico de la disciplina. Ahora se sugiere que, al menos, la presentación de cada uno de los diversos temas debe tomar en cuenta los factores humanísticos que están asociados a ella. Se debe discutir primero *por qué* es necesario dominar dichas técnicas y de dónde surgieron. Una de las grandes ventajas de este conocimiento es que es independiente de los temas restantes y que no depende de los anteriores. Si se tuvo alguna dificultad previa, no es necesario arrastrarla. A diferencia de las matemáticas, si estas contrariedades son, aparentemente, infranqueables, entonces, simplemente, pueden ser ignoradas.

No se sugiere, y debe enfatizarse, que el conocimiento matemático debe ser sustituido o ignorado. No, de ninguna manera. En otros sitios ya se ha discutido que tampoco se le ha explicado al estudiante el por qué de la necesidad de estudiar y dominar las matemáticas [véase, por ejemplo: Garciadiego 1997]. Por el contrario, es necesario que el alumno tenga muy claro los diversos métodos y procesos que se estudian a través de las exposiciones tradicionales. No se propone adoptar una cultura superficial donde únicamente sea necesario memorizar datos, carentes de significado por sí mismos. Lo fundamental, es que el alumno debe acercarse a las matemáticas en busca de explicaciones a través de respuestas a interrogantes como: Dónde, cuándo, por qué, quién, cómo, entre otras.

No es de sorprender entonces que, de acuerdo a estadísticas oficiales, las materias que muestran los más altos grados de reprobación son las que más cercanas a las matemáticas, es decir, las mal llamadas 'ciencias exactas' (*e.g.*, física, química y biología). Así como un filósofo sugería a principios del siglo XX, implementar el método científico en el estudio de la filosofía para que esta creciera a una mayor velocidad, análogamente, se sugiere que ahora se implemente la metodología de la enseñanza de las humanidades en el de las matemáticas y las ciencias exactas.

El material que enseguida se presenta es un ejemplo concreto de este nuevo enfoque que se propone. El ensayo está dirigido, en primera instancia al maestro de bachillerato, pero se sugiere que también lo deben conocer estudiantes y padres de familia. El propósito de esta primera lección es que lector comprenda el concepto de 'base numérica'. En una segunda lección, una vez comprendido el concepto, entonces se procedería a la explicación y ejemplificación de los caracteres técnicos unidos a la temática. Al lector se le sugiere, con la aprobación de expertos en la materia [véase: Adler y van Doren] que se haga una primera lectura rápida y superficial, donde no se ponga énfasis en los detalles, con el propósito de conocer la estructura y finalidad del ensayo. Del análisis se desprende que no se supone conocimiento matemático alguno, más allá de las cuatro operaciones básicas que ni siquiera son utilizadas. El ensayo está escrito en forma de dialogo, lo que hace su lectura más dinámica y fácil de seguir. En esta primera muestra no se incluyen imágenes, pero lo ideal sería que algunas de estas fueran incorporadas para mejorar la presentación visual del material.

' 5. Referencias

Mortimer J. Adler y Charles van Doren. 2000. *Cómo leer un libro*. México: Plaza & James. (Traducción al español de Flora Casas).

Bonnie Averbach y Orin Chein. 1980. *Problem solving through recreational mathematics.* New York: Dover. 2000.

Eugenio Filloy (coordinador). 2003. *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual.* México: FCE.

Alejandro R. Garciadiego. 1997. "... y, ... las matemáticas, ... ¿para qué nos sirven?" *Acta Universitaria* $\mathbf{7_1}$ (1997) 3-14.

__________. 2006. "Centro de Investigaciones Multidisciplinarias y de Innovación Docente en Matemáticas". *Mathesis* **III** $\mathbf{1_1}$: 165-219.

Juan D. Rodino, Carmen Batanero y Vicenç Font. 2003. "Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros". Proyecto *Edumat-Maestros.* [Distribución en internet: http://www.ugr.es/local/godino/edumat-maestros/]

Morris Kline. 1973. *El fracaso de la matemática moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* México: Siglo XXI. 1976. (Traducción de Santiago Garma).

Steven G. Krantz. 1991. *How to teach mathematics.* Rhode Island: American Mathematical Society.

George Poyla. 1953. *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos. 1966. (Traducción de José Luis Abellan. Colección Estructura y Función, 19).

Principles and Standards for School Mathematics. 2000. USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Luis Puig y Juan Calderón. 1996. *Investigación y didáctica de las matemáticas.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.?

II

¿Cuál es la base más natural?

–¿Te puedo hacer una pregunta?

–Depende. ¿Qué se te ofrece? Ya sabes que yo no doy clases de matemáticas y a lo mejor no se que responder.

–Por lo mismo, yo creo que tus conocimientos de historia son los que ahora necesito. Estaba en clase con mis alumnos y trataba de mostrar cuál es la base numérica más natural, cuando ….

–Espérate, ya me perdiste. ¿Qué es eso de una base numérica?

–Bueno, una definición precisa diría que es el 'número de unidades de cierto orden necesarias para formar una unidad de orden inmediatamente superior'.

–Perdón, pero no entendí lo más mínimo. ¿Tiene que ver con las tablas de multiplicar? Es de lo poco que me acuerdo de aritmética.

–No, no precisamente. Las tablas de multiplicar son parte de un sistema numérico, del que también la base es parte, pero hay otros elementos que intervienen en su composición. En particular, una base es …

–Pero, espérate, antes de que me confundas más. ¿Existen otros sistemas numéricos? ¿Qué no únicamente existen las tablas que usamos todos los días? Cuando iba en la escuela primaria (y no quiero que te burles al decir que ya llovió, y mucho) nosotros únicamente estudiábamos las tablas de multiplicar del uno al nueve. Es obvio, que la del cero no era necesario memorizarla, puesto que cualquier número multiplicado por cero es cero.

–Pues no, si existen otros sistemas numéricos, otras tablas y otras bases, y en la práctica tú usas uno diferente al sistema base diez todos los días.

–¿En serio? ¿Cómo cuál? Tendría que ser muy lista como para saber otras tablas de multiplicar.

–Este sistema lo has practicado tanto, y desde tan pequeña, que no te das cuenta de ello. Es más, si te preguntara que cuándo lo aprendiste me tendrías decir que no estás segura.

–Honestamente no sabría cuál podría ser.

–¿Cuándo aprendiste a usar un reloj?

–Bueno, el primero que tuve me lo regalaron mis papás cuando entré a tercer año de primaria. Me acuerdo que era automático y que se podía meter al agua. Así no me lo tenía que quitar y el riesgo de perderlo era mucho menor.

–¿Te acuerdas si era de manecillas?

–Sí, sí era; y la imagen que estaba en el centro era la de una bailarina: El fondo era rosa, y las manecillas eran sus brazos. Uno de estos tenía un abanico y eso hacia que esa pieza fuera más larga. Ya sabes lo que eso significa: La corta indicaba las horas y la larga los minutos.

–Es claro que con la práctica aprendiste a usar el reloj. Con el primero, los niños están tan emocionados que a cada rato voltean a verlo; no porque estén preocupados por el transcurso del tiempo, sino más bien porque quieren admirar su tesoro. Pero, también es un hecho que, aunque muchos no poseen un reloj, se les enseña a leerlo siendo aún muy pequeños. Me acuerdo que en los libros de texto gratuitos venían unos dibujos que representaban relojes y tú tenías que dibujar las manecillas con la hora que se te indicaba. O, si la imagen ya las tenía, entonces tú tenías que escribir, con letra, el tiempo que indicaban.

–Ahora, supongo, lo veríamos como un ejercicio muy simple. Pero, en aquellos días se nos dificultaba, ya que la misma hora podía ser enunciada de distintas maneras; por ejemplo, es lo mismo decir: Las seis de la tarde con cuarenta y cinco minutos; o, quince minutos antes de las siete; o cuarto para las siete; o, dieciocho horas con cuarenta y cinco minutos. Había cosas que nunca nos explicaban, sino que las presentaban como hechos indiscutibles. Por ejemplo, lo más básico, ¿por qué el día debía tener veinticuatro horas?

–Bueno, con decirte que ni siquiera era claro que realmente tuviera dichas horas, ya que la mayoría de los relojes únicamente indican doce. Por lo general, en una conversación rutinaria, uno no requiere distinguir entre el día y la noche. Con decir, 'son las seis' es suficiente. Pero la pregunta que hiciste con relación a la duración del día nos puede llevar de regreso al tema que me preocupa. Para los adultos es claro, aunque algunos no se acuerden de la explicación técnica, que un día tiene veinticuatro horas, pues ese es el lapso de tiempo que le toma a la Tierra dar una vuelta completa sobre su propio eje. Así, se puede medir en días, el número de veces que se suceden dichos giros. Pero, es claro que la Tierra ha girado muchísimas veces en torno a sí misma. En nuestro sistema, a los días se siguen las semanas; y a éstas, los meses; y a éstos; los años; y así en adelante. Aquí, lo importante, es ver cómo, para simplificarnos el proceso de contar, introducimos 'unidades superiores'. Este es el principio esencial de una base: La creación de unidades superiores. Pero, lo importante es que cada vez que pasamos a una unidad superior, la expresión del número es más sencilla. Por ejemplo, en lugar de decir *quince* días, dices *dos* semanas. De la misma manera, *cien* años se convierten en *un* siglo. Te imaginas que en lugar de decir que tengo treinta y ocho años, tuviera yo que mencionar que tengo diecinueve millones novecientos setenta y dos mil ochocientos segundos. Si no simplificáramos las cantidades tendríamos que calcular nuestras edades cada vez que alguien nos la preguntara. Con nuestro sistema tradicional de usar años, al cálculo que conocemos, y que muchos quisiéramos olvidar, es suficiente con añadirle una unidad. Así, después de transcurridos trescientos sesenta y cinco días que equivalen a quinientos veinticinco mil seiscientos segundos, es suficiente con añadirle un 'uno' a la cantidad que hemos conocido durante todo un año. ¡Suena inverosímil! Pero, también para simplificar los cálculos, podemos crear una jerarquía que venga de más abajo. Así, la unidad superior del segundo sería el minuto, la unidad siguiente sería la hora y, la subsiguiente sería el día.

–Medir la edad de un ser humano requiere de transformar unidades, pues cuando éstos son muy pequeños sus edades se pueden medir por días, después por semanas, más tarde, por meses; y, finalmente, por años. Pero, aquí lo importante es notar que existen muchas maneras diferentes de crear esas unidades superiores. No necesariamente tenemos que ir de diez en diez. Por ejemplo, ya señalamos que la unidad superior del segundo es el minuto. Pero, un minuto se forma con sesenta segundos, no con diez. Cuando se trata de segundos vamos de sesenta en sesenta. Cada vez que llegamos a sesenta, pasamos a la unidad superior, que en este caso serían los minutos, y decimos *un* minuto. Los minutos, como ya dije, también los contamos de sesenta en sesenta, y, así, pasamos a las horas; pero éstas las contamos en períodos de veinticuatro unidades, y enseguida pasamos a la unidad superior, que en este caso sería el día.

–Aquí, tendría que advertirte que los fabricantes de hornos de microondas confunden el sistema. ¿Te has fijado que cuando le introduces a la máquina la cantidad de cien segundos, ésta la interpreta como si le hubieras indicado un minuto? Si tu apretaras cien segundos, la máquina lo debería interpretar como un minuto y cuarenta segundos; pero no es así, pues, cuando empieza a funcionar y a retroceder el tiempo, brinca de 1:00 a 59 segundos. Pero, si introduces ochenta, entonces, al iniciar el funcionamiento, pasa de ochenta a setenta y nueve, como si estuviera en base diez. Para un lado no reconoce el sistema base sesenta, pero para el otro lado si lo hace. Pero confusiones como esta las hay todo el tiempo. Por ejemplo, cuando los reporteros norteamericanos hablan de billones, ellos se refieren a miles de millones (1,000,000,000). En este sistema, cuando se habla de billones se entienden millones de millones (1,000,000,000,000). También en otras culturas confunden los usos de las comas y puntos cuando se trata de cantidades.

–Empiezo a entender a que te refieres. Dentro del medio laboral, hay quienes acostumbran pagarles a sus empleados por día (y ésta sería su unidad), otros por semana, otros por quincena, otros por mes y, aún otros, por año. Cada una de estas unidades tiene sus ventajas y sus desventajas; y, por supuesto, cada quien quiere sacar provecho.

–Por cierto, el otro día hubo elección de representante de profesor ante la mesa directiva de los padres de familia de la escuela. Se realizó el proceso y hubo dos candidatos, de tal manera que el resto de los profesores podía votar por uno de ellos, o por el otro, o anular las boletas. Al finalizar la elección, algunos de los que participaron a lo largo de todo el evento se juntaron para contar los votos. En un pizarrón, se colocaron en filas los nombres de los dos candidatos, y la tercera opción, y se procedió a enumerarlos. La persona que apuntaba trazaba una línea vertical junto al renglón respectivo, cada vez que se leía en voz alta alguna de las boletas. Pero, para evitar contar todos los trazos al final del evento, el maestro cruzaba con una raya diagonal cada vez que se mencionaba un quinto elemento. Así, al final le quedaron varios grupos de cinco rayas y lo único que tenía que hacer era enumerar el número de grupos, y no el de rayas verticales, que era más voluminoso y, por ende, más difícil de contar, y, por consiguiente, más fácil de equivocarse.

–Bueno, es algo similar, pero déjame usar el sistema de base diez para que no nos queden dudas o ambigüedades entre los dos. Se le llama base diez, porque se requieren ese mismo número de dígitos para poder expresar todos los números que deseemos, sin importar que tan grande podría ser algún número. En este caso, vamos a usar los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. A partir del número diez, cualquier número, por grande que éste sea, se puede expresar como la combinación de cualesquiera de estos dígitos. Por ejemplo, el once se representa como: 11; es decir, dos números uno. Pero, aquí lo fundamental es que no lo leemos ‘uno uno’; sino que, como sabes, en la mayoría de las culturas de occidente, escribimos de izquierda a derecha y al representar un número, el dígito que se encuentre en el extremo derecho, representa a las unidades, que sería la primera jerarquía; el que le sigue a la izquierda, representa las decenas, que correspondería a la segunda jerarquía; el siguiente las centenas, y así en adelante. Por ejemplo, en el caso del número 5937, el siete de la extrema derecha representa siete unidades; el tres a su izquierda representa tres decenas; el siguiente nueve, representa nueve centenas; y, el último cinco, representa cinco unidades de millar. Gracias a este sistema se pueden representar números extraordinariamente grandes, en un espacio relativamente pequeño.

–No puedo negar que me has sorprendido, porque yo nunca había recapacitado sobre estas cuestiones. Pero, ahora que me das esta explicación me doy cuenta que es exactamente la misma manera, aunque con unidades diferentes, de cómo se escribe el tiempo en los relojes digitales. Por ejemplo, en el mío, en este preciso momento se lee: 9:25:50. Donde el ‘50’ corresponde a los segundos; el ‘25’, corresponde a los minutos; y el nueve corresponde a las horas. La lógica es la misma. Los segundos que corresponden a la menor cantidad de tiempo se encuentran en la extrema derecha; le siguen los minutos a su izquierda; y, finalmente, las horas también a la izquierda de los minutos.

–Bueno, tú no estás acostumbrada a pensar en estas cosas porque tienes otras preocupaciones y otros intereses.

–Lo que me quedó claro es que sí existen razones prácticas para pensar en sistemas de bases alternativas: Primero, para medir distintas cosas; y, en segundo lugar, para abreviar cantidades.

–En eso tienes razón. La mayoría de estos sistemas han surgido para satisfacer alguna necesidad práctica del hombre. Lo curioso es que cuando no ha sido así, más adelante, han encontrado alguna manera de aplicarlo. Por ejemplo, el sistema base dos, aquel que únicamente tiene dos dígitos, el cero y el uno, fue discutido por un matemático del siglo XVII; y, ahora, en pleno siglo XXI, después de casi cuatrocientos años, la base dos está muy en boga pues se utiliza en el funcionamiento de las nuevas computadoras. Pero, no, no te preocupes, por el momento, no te voy a aburrir con esa explicación. Oye, pero me gustaría regresar a mi pregunta original. Te decía que estaba en clase con mis estudiantes y argumentaba que la clase numérica más natural es la base diez. Pero, después me entró la duda, porque tengo la impresión que, en otras culturas de la antigüedad, surgieron otras bases primero. ¿Me podrías investigar cuáles son las bases más antiguas?

–No necesito hacerlo, pues de hecho, por mi formación histórica, he estado interesada en varias culturas del pasado. En mi trabajo trato de encontrar, y después analizar, aspectos que son comunes a distintas culturas aunque se hayan desarrollado en períodos de tiempo muy diferentes. A este tipo de metodología, algunos colegas, la llaman historia comparada. En lo personal, siempre me han interesado aspectos de carácter social, en particular lo relacionado con el arte. Pero también he leído sobre otras cuestiones.

–Después de la explicación que me has dado, te puedo decir que la mayoría de las culturas antiguas estuvieron interesadas en medir el tiempo. La razón es muy sencilla. Al convertirse de razas nómadas a sedentarias, necesitaban saber, con cierta precisión, el inicio de cada una de las distintas estaciones, ya sabes: Primavera, verano, otoño e invierno. Esto con el propósito de saber cuándo tenían que sembrar y cuándo era el momento apropiado de cosechar. También había animales que eran migratorios y estas personas requerían saber cuando iban a volver para poder seguir aprovechando sus recursos. Bueno, pues a estas gentes les preocupaba medir la duración de lo que ahora llamamos 'un año'. Hace unos minutos mencionaste que, a través del movimiento giratorio de la Tierra sobre su propio eje, se podía medir la duración de un día. Bueno, como tú también sabes, el procedimiento es similar. Lo que se hace, es medir el tiempo que se tarda la Tierra en dar una vuelta completa, pero, ahora, alrededor del Sol. El mecanismo de establecer la duración del año es muy complejo pues, en primer lugar, el ciclo no es exacto sino que ahora sabemos que toma trescientos sesenta y cinco días y un poco más. En segundo lugar, se necesita observar dicho fenómeno con mucho cuidado y por muchos años. Sin embargo, hubo culturas que, con elementos muy limitados, fueron capaces de medir dicho período de manera bastante exacta.

Los mayas lograron medir la duración de un año con gran precisión. Ellos llegaron a la conclusión que dicho período debía medir poco más de trescientos sesenta y cinco días. Para poder subdividir de una manera precisa y equitativa la duración de cada uno de los meses, establecieron que el año debía medir trescientos sesenta días; y, los cinco días restantes los dedicarían a fiestas y adorar a sus dioses. Entonces procedieron a dividir el año en dieciocho meses de veinte días de duración cada uno de ellos. De esta manera, ellos resolvieron el problema de que no hubiera meses más cortos o más largos que otros. Ahora entiendo que, al adoptar que los meses midieran veinte días, también admitieron la base veinte como su unidad de medida. Después de cada período de veinte días, empezaba un nuevo mes.

Por medio de este mismo razonamiento, ahora se que otras culturas adoptaron otras bases numéricas. Por ejemplo, los babilónicos adoptaron la base sesenta. Eso quiere decir que después de contar sesenta elementos pasaban a su nueva unidad numérica superior. ¿Te imaginas? Eso quiere decir que los niños babilónicos se tendrían que memorizar las tablas de multiplicación del uno al cincuenta y nueve.

–Bueno, yo no creo que lo hicieran. En primer lugar, en aquel entonces muy pocos niños, sólo los más ricos, iban a la escuela. El colegio era esencialmente para adultos. Pero, también es posible que esa sea la razón por la que la mayoría de las tablillas que se conservan de aquel entonces sean esencialmente tablas de multiplicar. La gente no las debía de memorizar, sino que las tenían a mano para poder consultar los resultados.

–Pero, creo que cada vez nos acercamos más a lo que le querías decir a tus estudiantes.

–¿Qué es eso?

–Tengo la impresión que les querías decir que la base numérica más natural es la base diez.

–Tienes razón. ¡Ya se me había olvidado!

–Pero, tengo mis grandes dudas. Yo supongo que habías llegado a esa conclusión apoyándote esencialmente en tu sentido común, en la lógica actual y en el hecho de que este sistema es con el que crecimos.

–Pero, ¿por qué dices eso?

–Pues porque ahora que entiendo lo qué es una base, lo lógico y natural es pensar que la base diez es la mejor de todas.

–Entonces me das la razón.

–No, no necesariamente. Aunque no lo has mencionado, para ti es muy lógico pensar en la base diez pues ese es precisamente el número de dedos que tenemos en ambas manos y lo natural sería pensar que los usamos para enumerar objetos, y que cuando llegamos a diez, cambiamos de unidad.

–Me sigues dando la razón.

–¡Si me dejarás terminar, entenderías mi punto!

–Perdón.

–Mira, independientemente del accidente anatómico de que tengamos diez dedos, y no ocho o siete, existen otros factores que han influenciado para que ahora pensemos que lo más natural es pensar de diez en diez. Aquí creo que la invención del Sistema Métrico ha ejercido una tremenda influencia. Ahora se que el sistema métrico usa la base diez. Y el sistema métrico se ha impuesto como la manera más adecuada de medir todo: Áreas, líquidos, longitudes, etc. Esta forma de medir ha demostrado ser tan eficiente que aún los países que seguían otras normas, como Inglaterra, Canadá y Australia, las han abandonado. Y, ¿sabes de quién fue la idea de inventarlo?

–No, ni idea.

–De Napoleón.

–¡Que bárbaro! Nunca se me hubiera ocurrido que un líder militar estuviera interesado en las ciencias.

–No lo voy a discutir por ahora, pero Napoleón no es el único ejemplo. Por aquellos días, en Francia, no existía una norma general de pesos y medidas; lo que hacía sumamente complejo el comercio y la economía pues los precios parecían ser arbitrarios e injustos. Napoleón llamó a uno de sus más grandes hombres de ciencia, Lavoisier, y le encargó el proyecto. La respuesta fue genial, pues permitió unificar el sistema de pesos y medidas. Después, Lavoisier perdería la cabeza durante la Revolución Francesa, pero eso es parte de otra historia.

–Pero, te aseguro que Lavoisier se apoyó en el hecho de que tenemos diez dedos.

–Es lo más probable, pues para ese entonces el sistema base diez, introducido por los árabes, pero desarrollado por los hindús, era común en Europa Occidental. Pero el comentario que les hacías a tus estudiantes iba en otro sentido, pues tú decías que era el sistema numérico 'más natural'. Pero Lavoisier no apareció en escena sino hasta finales del siglo XVIII, lo cual es relativamente muy cercano a nuestros días. Así que, si fuera lo más lógico, lo natural sería que esta base hubiera aparecido mucho tiempo antes.

–Bueno, pero sí hubo otras culturas en la antigüedad que usaron la base diez.

–Sí, pero si como tú dices eso era lo más natural, entonces lo lógico hubiera sido que *la mayoría* de las culturas antiguas hubieran escogido el mismo sistema y, no fue así. Pero, además, otro elemento que te traiciona es que pienses con la lógica del siglo XXI. Ahora parece razonable pensar así, pero para los hombres de la antigüedad no era lo mismo. Mira, el pensamiento evoluciona continuamente. Si las diferencias generacionales entre padres e hijos son abismales, ahora imagina entre individuos de distintos siglos. Por ejemplo, no hace mucho, un par de siglos aproximadamente, el honor de un hombre debía estar libre de toda incertidumbre. Si alguien lo cuestionaba, entonces el ofendido podía retar a duelo a muerte a quien había osado ponerlo en duda. Hoy, en día se tendrían que retar continuamente, pues en los medios informativos aprendes de acusaciones y de difamaciones. En otras cosas nos mantenemos igual de primitivos que hace más de diez mil años.

–Entonces, ¿tú no crees que la base diez fuera la más lógica?

–Mira, nos podríamos pasar discutiendo este argumento por horas sin llegar a conclusión alguna; y tus argumentos podrían ser tan sólidos o endebles como los míos.

–Bueno, pero en ese caso yo podría tener razón.

–Sí, pero no se trata de ver quien de los dos podría tener la razón, porque los dos podríamos estar equivocados. Aquí no nos queda otra opción más que especular, pues nuestros argumentos son muy endebles. No tenemos pruebas físicas concretas que demuestren de una manera concluyente en una dirección u otra. Pero, yo sí te podría decir que existen físicamente algunas evidencias históricas que podrían debilitar tu argumento.

–¿Cómo cuáles?

–Bueno, en este caso, el hecho de que no todas las culturas de la antigüedad hayan adoptado la base diez, sugiere que no necesariamente era la más natural. Es más, es más fácil encontrar ejemplos de culturas que no lo adoptaron, a lo contrario. Como ya te comenté, los mayas adoptaron la base veinte y los babilónicos la sesenta. Y también es cierto que ya podríamos haber cambiado el sistema de todos los relojes, pero no lo hemos hecho porque también pensamos que la manera cómo lo hacemos actualmente es la más adecuada.

–Yo argumento que la base diez es la más natural. Tú únicamente me has señalado culturas que se desarrollaron hace muchos años y de las que tenemos muchísimas dudas. Por ejemplo, de la cultura maya aún no sabemos porque abandonaron sus ciudades y sus centros ceremoniales. Pudiera ser que las interpretaciones históricas estuvieran equivocadas.

–En esto último estoy totalmente de acuerdo contigo, quedan muchísimas dudas. Pero, también hemos avanzado y algunas de las interpretaciones se respaldan entre sí. Existe consistencia lógica, cronológica y conceptual. Pero, más importante aún, te puedo señalar que existen algunas pistas físicas que sugieren que el hombre antiguo no necesariamente concibió a la base diez como la más natural, como tú señalas.

–¿Existe evidencia física?

–Sí, por supuesto. La fuente física antropológica más antigua que se conserva en torno a las matemáticas es un hueso de lobo, probablemente un fémur. A este fósil se le ha calculado una antigüedad de treinta mil años. Este resto tiene talladas marcas verticales de la misma longitud y anchura que sugieren que alguien los talló mientras enumeraba algún tipo de objeto. ¿Sabes lo más sorprendente? Ese hombre usó el mismo método que te comentaba que practicó uno de mis compañeros en la elección del otro día. En esta ocasión en lugar de trazar una línea diagonal y señalar grupos de cinco, el contador talló una marca vertical más larga al enumerar el quinto objeto. De tal manera, que el procedimiento sugiere que este individuo, a continuación, contó las rayas verticales más largas más abreviar el proceso. El sistema que se encuentra inmerso en dicho procedimiento es base cinco, no la base diez.

–Pero, de nuevo eso es muy viejo.

–Sí, pero cuando les hiciste el comentario a tus alumnos te referías también a lo más viejo, pues les mencionaste que era la base más natural.

–Pero, a lo mejor las evidencias físicas no las hemos sabido interpretar.

–Ahora si que ya nada más estás de necio y no quieres aceptar los argumentos que contradicen tu punto de vista. Pero, te voy a mostrar una prueba aún más contundente. Como sabes, aún existen grupos de individuos que viven en condiciones extremadamente limitadas y primitivas, como si todavía habitaran en la época de las cavernas. Sabemos de este tipo de grupos en el río Amazonas y en otras islas remotas. De estos grupos, existe una tribu que vive en Nueva Guinea y que conserva costumbres y actividades como aquellas del hombre que pobló la tierra hace más de treinta mil años. ¿Sabes algo? Ellos no usan la base diez. Ellos usan la anatomía de su cuerpo, como nosotros lo hubiéramos pensado por lógica. Así que primero usan los dedos de una mano para contar del uno al cinco, pero después no usan los dedos de la otra mano para contar del seis al diez. Resulta ser que físicamente no lo pueden hacer, porque ellos usan los dedos de esa mano para *señalar* a los de la primera. Resulta ser anatómicamente imposible usar los dedos de una misma mano para indicar los mismos dedos. Así que, al terminar con los primeros cinco dedos, el aborigen procede a señalarse otras partes del cuerpo.

–¿Cuáles?

–Lo anatómicamente procedente es usar el dedo con el que señalas y proceder en orden. Así que continua con señalar la muñeca, después el codo, el hombro, etc. Así la muñeca es el número seis, el codo el siete, y así en adelante.

–Físicamente resulta más natural.

–Mañana te traigo una lámina donde se indican estos números para que se la muestres a tus estudiantes. Bueno, además podría añadir que en el lenguaje mímico tampoco se usan los diez dedos de la mano para contar. Para llevar a cabo este proceso, para contar del seis para adelante es suficiente con voltear la mano y usar los mismos dedos.

–¡Que bueno que hablé contigo! Un millón de gracias. Me queda claro que mi intuición y lógica no son suficientes para entender al hombre, sobre todo si hablo de su pasado.

El software para geometría dinámica como mediador semiótico entre la geometría y el alumno

Víctor Larios
México

Resumen
En este trabajo se presentan algunas reflexiones y señalamientos sobre la influencia que tiene la computadora, y en particular el software para Geometría Dinámica, en el aprendizaje de la Geometría como mediadora semiótica que se establece entre el conocimiento y el sujeto que aprende. Debido a que la computadora es una herramienta por la que se accede al saber no tiene un carácter neutral y su funcionamiento influencia en la percepción y el desarrollo del conocimiento geométrico, por lo que es necesario que los docentes estén al pendiente de los fenómenos cognitivos que aparecen al utilizarla.

Introducción

Es bien sabido que el conocimiento que aprende un individuo está influenciado, entre otras cosas, por los medios y las herramientas utilizadas para el aprendizaje y la enseñanza. En el caso particular de la Matemática esto no deja de ser cierto y la incorporación de herramientas computacionales a los procesos educativos influye indiscutiblemente en los significados que se le otorgan a los objetos matemáticos, fenómeno que siempre ha sucedido con otros tipos de tecnologías utilizadas.

En este trabajo nos interesa hacer reflexiones sobre este papel de mediador semiótico que tiene el software computacional entre el conocimiento y el alumno, en particular enfocándonos a la rama de la Geometría, a fin de avanzar hacia un modelo que nos permita estudiar los fenómenos que aparecen y explicar las conductas de los alumnos cuando se utilizan estas herramientas en el aula. En este caso particular los software que podrían ser considerados de los más interesantes son los que se inscriben dentro de la categoría de *software para Geometría Dinámica*. Las características principales que diferencian una aproximación utilizando este software con respecto a una que considera la tecnología papel-y-lápiz –además del hecho evidente y simplista de estar utilizando computadoras– son:

* la posibilidad de definir rutinas o cadenas de construcciones bajo el nombre de macros,
* la de construir lugares geométricos, y
* como rasgo principal es "la transformación continua en tiempo real llamada comúnmente 'arrastre'" (Goldenberg y Cuoco, 1998, pág. 351). El arrastre permite la modificación directa de la forma o posición de los objetos geométricos construidos por el usuario mediante el uso del ratón (o algún otro periférico de la computadora) sin que se dejen de preservar las relaciones geométricas con las que fueron construidos.

Este tipo de software ofrece oportunidades para explorar situaciones geométricas bajo un ambiente que permite llevar a cabo indagaciones que de otra manera podrían ser muy restrictivas y que sólo están al alcance de aquellos que ya tienen un entrenamiento especial (los matemáticos, por ejemplo) o bien que tienen una mayor capacidad de imaginación espacial que los demás, ya que permite llevar a cabo de una manera controlada y física por medio del ratón la transformación de construcciones respetando las relaciones geométricas y proporcionando una respuesta visual por medio de la pantalla de la computadora. Por otro lado, también puede generar otras problemáticas educativas que tanto pueden ser comunes con el uso de la tecnología de papel y lápiz como pueden estar ligadas con la herramienta

Mancera, E. y Pérez, C. Historia y Prospectiva de la Educación Matemática. Memorias de la XII CIAEM, pp. 281-288.

misma que es la computadora, por lo que varias investigaciones (ver, por ejemplo, Laborde y Capponi, 1994; de Villiers, 1995; Hölzl, 1996; Sutherland y Balacheff, 1999 Mariotti, 2000; Olivero, 2003; Larios, 2005) se han dedicado a estudiar estos fenómenos y así esclarecer la posible influencia de esta herramienta para así poder proponer actividades o maneras de sortear las dificultades y aprovechar al máximo las posibilidades.

Hay que mencionar que ya existen varios programas de este tipo, siendo de los más conocidos el francés *Cabri-Géomètre*,[1] el estadounidense *Sketchpad*, el mexicano *Geolab*, *Cinderella*, etcétera. Como podrá observar el lector, se hace mayor referencia al primero de ellos, aunque eso es sólo por uso y costumbre, no porque sea preponderantemente superior a los demás.

Hay una parte ineludible al estudiar los fenómenos de aprendizaje de la Geometría, sea en un ambiente de Geometría Dinámica o no, que está relacionado con el hecho de las representaciones de los objetos geométricos y que, además, le da sentido a la interpretación de los fenómenos que ocurren al utilizar las herramientas computacionales.

Este aspecto se refiere al hecho de que los objetos geométricos tienen, básicamente, dos componentes: el *figural* y el *conceptual* (Fischbein, 1993), íntimamente ligados entre sí, que hacen necesario distinguir entre *figuras* y *dibujos* (Parzysz, 1988; Laborde y Capponi, 1994), en particular si se considera el uso de software para Geometría Dinámica, pues tal distinción "es enfatizada fuertemente por programas como Cabri" (Hölzl, 1995, pág. 118). Debido que la Geometría, a diferencia de otras ramas de la Matemática, está íntimamente ligada a las representaciones gráficas que se utilizan no sólo para ejemplificar algunas proposiciones, sino para representar dichas proposiciones y a los objetos manejados, los objetos involucrados no sólo tienen propiedades conceptuales, que rigen de una manera lógica su comportamiento y sus relaciones, sino que también están profundamente relacionados con su representación, que puede estar en un nivel de representación mental (una imagen mental) o plasmada en un medio físico (hoja de papel o pantalla de una computadora).

Efraim Fischbein (1993), en su Teoría de los Conceptos Figurales, establece que las figuras geométricas poseen ambos aspectos: los *conceptuales* y los *figurales*. No tienen sólo de uno u otro, sino que "conviven" los tipos de propiedades. Es por ello que conviene hacer una distinción de *dibujo*, de *figura* y de *objeto geométrico*: El *dibujo* es una representación gráfica material, tal como los trazos sobre un papel o los pixeles en una pantalla (Hölzl, 1995:118), de un *objeto geométrico*, que es su referente teórico el cual está restringido o "controlado" por las definiciones y limitantes lógicas. Un dibujo, por cierto, contiene información figural que, ocasionalmente, puede resultar innecesaria, que va desde aspectos completamente sin relación con el objeto geométrico, y sí relacionados con el aspecto general como es el caso del color, el grosor; hasta aspectos que pueden influenciar en la apreciación del dibujo como es la orientación. Ahora bien, como no se puede acceder directamente a los objetos geométricos, se les representa por medio de dibujos, a los cuales se le asignan *significados*, que son las relaciones que el individuo establece entre el objeto y su representación. Estos significados corresponden a las llamadas *figuras*, pues cada una de éstas son consideradas como "el representante de una clase de objetos que comparten el conjunto de propiedades geométricas con el que se construyó la figura" (Sánchez, 2003, pág. 31).

Por su parte, la característica dinámica del software para Geometría Dinámica hace necesario que la diferencia entre *dibujo* y *figura* se destaque, pues en este ambiente las construcciones geométricas están construidas con base en las relaciones lógicas entre los objetos y no sólo sobre los aspectos figurales de las mismas. Goldenberg y Cuoco (1998, pág. 355) expresan su interés al respecto:

> *"¿Por qué nos deberíamos preocupar por las taxonomías tripartitas y otras teorías de la mente? Por una cosa, los ambientes de Geometría Dinámica están construidos con los mismos principios: El usuario*

[1] "Cabri" es el acrónimo de "Cahier de brouillon interactif" que significa literalmente "Cuaderno de bosquejo interactivo", mientras que "Géomètre" es "Geómetra". Coloquialmente es conocido simplemente como "Cabri".

especifica a la computadora las relaciones subyacentes (los objetos matemáticos), y la computadora debe preservar ese objeto mientras que deja las características superficiales (el dibujo) completamente maleables."

Sin embargo, ambos aspectos ejercen una influencia en el individuo que está supeditada, entre otras cosas, a su desarrollo cognitivo, por lo que tales influencias no están necesariamente "balanceadas" de una manera adecuada.

Tomar en cuenta estas consideraciones teóricas puede ayudar a clarificar el análisis de la influencia de las herramientas computacionales en el aprendizaje de la Geometría. A continuación se presentan algunas reflexiones que derivan de tal análisis, principalmente centradas en el rasgo característico del software, que es el *arrastre*, pero sin perder el contexto general del software para Geometría Dinámica, el cual se mencionará más adelante como posibles repercusiones en la enseñanza de la Geometría en ambientes dinámicos.

Sobre la rigidez geométrica y los aspectos figurales

Al hablar de los aspectos figurales a las que hacen referencia alumnos del nivel medio me referiré antes que anda a la denominada *rigidez geométrica* y al uso de figuras en posición "estándar" o prototipo.[2] Estos dos fenómenos aparecen ligados entre sí y con otros como el uso de justificaciones empíricas y el uso del *arrastre* en la computadora como una herramienta externa.

La rigidez geométrica es un fenómeno relacionado con la visualización de las figuras geométricas que ocurre cuando existe una incapacidad del individuo para manejar mentalmente una figura geométrica cuando ésta no se encuentra en ciertas posiciones "estándares" o no pueden imaginar la figura cuando se mueve (bajo una traslación) o cuando cambia su forma, es decir, cuando sus lados cambian de posición o sus ángulos se modifican (ver, por ejemplo, Larios, 2005). Este fenómeno puede ser relacionado con los conflictos que aparecen entre los aspectos figurales y conceptuales de los objetos geométricos, así como con la necesidad que establece Maracci (2001) de que los alumnos buscan dibujos satisfactorios.

Algunos alumnos necesitan utilizar dibujos hechos en posiciones estándar para poder detectar a las figuras y sus relaciones espaciales y poder así trabajarlas y otros apuntan hacia la incapacidad de interpretar el "movimiento" de una figura o de un diagrama realizado en la pantalla de la computadora, es decir, de percibir la característica dinámica del software. Es común que los alumnos de bachillerato y secundaria aprovechen el *arrastre* y cambien la forma de las figuras a fin de trabajar con figuras casi regulares y con orientación horizontal-vertical, lo cual reduce las posibilidades de investigación al restringir las posibles configuraciones posibles de obtener.

Por otro lado, cuando se modifican las construcciones geométricas por medio del *arrastre* ocurre en ocasiones que existe una incapacidad de algunas personas por visualizar todos los momentos intermedios de esta transformación y considerarlos como casos particulares de la figura o la construcción. A este fenómeno le he llamado *arrastre inicio-fin* (Larios, 2005) y que Olivero (2003) denomina *photo-dragging*, ya que sólo se logran considerar dos casos: la construcción hecha antes de la operación de modificación por arrastre y aquélla obtenida al terminar de mover el ratón; los casos intermedios parecen no ser considerados como otros casos posibles de la construcción, sino como diagramas intermedios que no tienen el mismo status geométrico que las construcciones inicial y final, posiblemente porque son provisionales, este fenómeno puede ser considerado como otra forma de rigidez geométrica, debido que la que hasta ahora se había reportado habla de la incapacidad para imaginar las figuras en movimiento en tanto que en este caso se trata de la incapacidad para a partir de la figura en movimiento poder imaginarla en cada punto intermedio como una figura determinada.

---

[2] Especialmente las orientadas de manera horizontal-vertical respecto a la hoja de papel.

Los fenómenos recién descritos son de tipo cognitivo, aunque influenciados por el uso del software. No obstante, la misma operación de *arrastre* en el software tiene una mayor influencia como a continuación se menciona.

Sobre las funciones otorgadas al arrastre

Como se mencionó previamente, el *arrastre* es una parte fundamental del ambiente de Geometría Dinámica ya que le permite al usuario un control teórico de los elementos de una construcción geométrica (o de la construcción en sí), por lo que es algo importante reflexionar sobre el uso que le otorgaban los alumnos durante el proceso de realización de las construcciones geométricas y para la formulación de justificaciones. Esta operación afecta la apreciación de la Geometría y por ser la característica que más le otorga el carácter de dinámico al ambiente provoca fenómenos en la percepción que están relacionados no sólo con aspectos de rigidez geométrica, como recién se comentó, sino también sobre su potencial uso como medio para validar una construcción.

De manera a priori se puede decir que esta operación puede ser utilizada como medio para la exploración de diferentes construcciones geométricas, como medio para la retroalimentación de las acciones realizadas por el usuario, como mediador entre el conocimiento matemático y el usuario o bien como un medio para validar que una construcción está bien hecha, es decir, que cumple con las relaciones geométricas deseadas y que se le denomina *examen de arrastre* (Mariotti, 2000).

No obstante estas funciones y modalidades son útiles cuando las características del programa, incluyendo el arrastre, son utilizadas correctamente, es decir que estas opciones son internalizadas por el usuario y éste les otorga un significado coherente con el que les fue otorgado originalmente por los diseñadores del software, que a su vez es coherentemente matemático. Para que esta internalización se lleve a cabo se perfila como antecedente el hecho de que, para el usuario, los atributos figurales de la representación logren un equilibrio con los conceptuales. Los alumnos necesitan utilizar las opciones y el arrastre como herramientas internas y no como herramientas externas en el sentido de Vygotski (1979).

En términos generales a partir de los resultados de investigaciones (Larios, 2005) se aprecia que los alumnos utilizan, en diferente medida, el arrastre como:

* Un medio para explorar y generar casos posibles de las construcciones realizadas.
* Un espacio para observar propiedades que resultan invariantes a pesar del cambio en la forma, lo cual está relacionado con el punto anterior pero que implica un desarrollo cognitivo mayor.
* Un medio para determinar si una construcción está bien realizada por medio del examen de arrastre.
* Una utilización como herramienta externa o física que proporciona la posibilidad de dibujar “a mano alzada” una construcción o “acomodar” sus elementos para que el resultado en la pantalla visualmente cumpla con los requisitos pedidos en la tarea llevada a cabo.

Federica Olivero (2003) y otros autores italianos, al identificar varias modalidades en que sus alumnos utilizaron el arrastre en Cabri para resolver problemas geométricos, consideran al *examen de arrastre* como la más compleja cuando se utiliza. Idealmente los alumnos deberían utilizar el *arrastre* como medio de validación de que una construcción está bien (es decir, aplicar el *examen de arrastre*), sin embargo ello no ocurre siempre y sí en cambio recurren a validaciones externas o empíricas que están fuertemente vinculadas con una preponderancia de los aspectos figurales y una falta de desarrollo cognitivo que permita una diferenciación entre *figura* y *dibujo*, pues sólo se consideran la existencia de éstos últimos en la pantalla de la computadora. Este uso como herramienta externa de acomodo tiene consecuencias negativas en los primeros tres puntos enlistados, ya que de hecho simplemente se amplia el numero de recursos empíricos en disposición del estudiante.

En primer lugar, si el arrastre se utiliza como "acomodo" de los elementos de la construcción es muy probable que el dibujo obtenido produzca resultados inútiles, resultados que tenga imprecisiones o resultados inesperados que pueden no estar relacionado con la tarea solicitada. En segundo lugar, no se alcanza la aprehensión plena del carácter dinámico del software que permitiría finalmente avanzar hacia un desarrollo cognitivo que permita establecer la diferencia entre *dibujo* y *figura*, así como la posibilidad de observar propiedades invariantes en las construcciones.

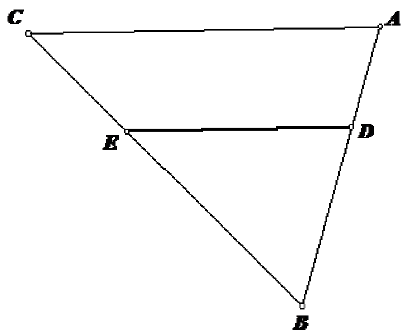
No obstante, es posible que los alumnos recurran a esta práctica no porque consideren que es la única manera de realizar las construcciones, sino porque no pueden construirla utilizando propiedades geométricas (no las identifican) y así este proceder se convierte para ellos en la única manera que tienen para terminar el trabajo solicitado por el profesor.

A pesar de esto último, el uso del *arrastre* como un medio para "arreglar" la construcción permite que la potencialidad dinámica del software se pierda en la búsqueda de dibujos que les convenzan a los alumnos pero sin el uso de diagramas dinámicos que se acerquen a la noción de *figura*.

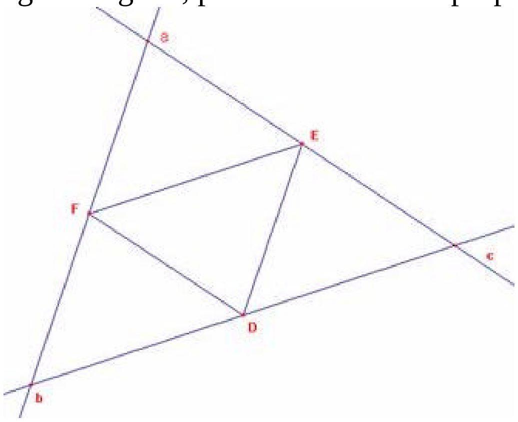
Consideraciones en la enseñanza

El uso del *arrastre* como una herramienta externa que sirve para "acomodar a mano alzada" las construcciones podría producir la percepción en los alumnos que el software es un medio de ayuda para el diseño, más que para el aprendizaje. Si no se internaliza la operación de arrastre y las opciones del programa los dibujos construidos no sólo tienen la misma potencialidad dinámica que los hechos con papel y lápiz, sino que incluso es una manera de hacerlos mucho más fácil. Por ejemplo no se tienen que cuidar detalles como la colocación de escuadras o la apertura de un compás, sino únicamente hacer el dibujo y luego acomodarlo utilizando la visión para hacerlo coincidir y una sola herramienta física: el ratón. El producir construcciones de esa manera no sólo lleva a observaciones inútiles o erróneas, lo cual lleva a no alcanzar los objetivos de aprendizaje que se hayan planteado en el aula, sino a generar una percepción equivocada de la utilidad del software.

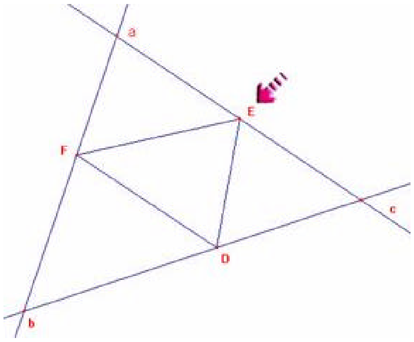
Todo lo anterior es sin considerar los problemas en la percepción generados por la misma arquitectura del software. Por ejemplo Goldenberg y Cuoco (1998:353-354) exponen la siguiente situación: realizar la construcción de triángulo *ABC* (ver la figura de abajo) y de un punto *D* sobre el lado $\overline{AB}$, luego construir el segmento $\overline{DE}$ que sea paralelo al lado $\overline{AC}$ (y que *E* esté sobre $\overline{BC}$) y finalmente observar algunas razones entre las medidas de los segmentos que se han creado. Si se le pide al programa que calcule la razón $\frac{BD}{BE}$ y luego se arrastra el punto *D* a lo largo del lado del triángulo ocurre que la razón es constante, lo cual es un hecho matemático. Pero si se le pide al programa que calcule la razón $\frac{BD}{BA}$ y se arrastre el punto *A* de manera aleatoria (como si estuviese buscando otro caso del triángulo) ocurre que el resultado desplegado por el programa se mantiene constante, lo cual podría ser tomado erróneamente como un hecho matemático y no como una consecuencia de la arquitectura del software.

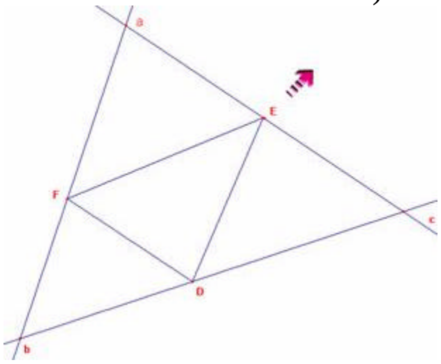


En un trabajo de investigación previo (Larios, 2005) a una pareja de alumnos de secundaria se les proporcionó un archivo con un triángulo escaleno (llamado *DEF*) y se les pidió que construyeran un triángulo más grande (llamado *ABC*) de tal manera que los vértices del original fuesen los puntos medios de los lados que construyeran. Para ello es necesario considerar rectas paralelas a los lados del triángulo original, pero estos alumnos proporcionaron un archivo que lucía como sigue:

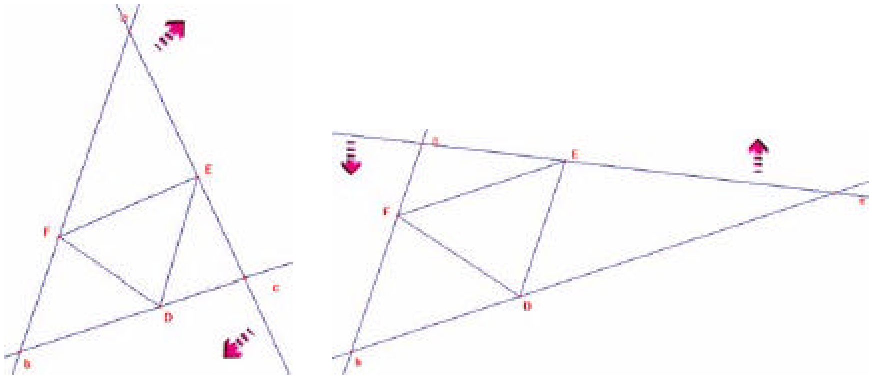


Si bien a primera vista la construcción parece correcta, cuando se examinó el archivo quedó en evidencia que las tres rectas que forman el triángulo *abc* están creadas con la opción **Recta** del software y fueron colocadas "a mano alzada" ya que sólo parecen estar paralelas a los lados del triángulo *DEF*. Si se arrastra un punto del triángulo interior (por ejemplo *E*) la recta parece seguir siendo paralela al lado *DF* (la flecha indica la dirección del arrastre):





No obstante, ese efecto ocurre por la arquitectura del software y no por las propiedades geométricas, ya que si se arrastra la recta desde otro punto que no sea el punto *E* sucede que ésta gira y entonces es más que evidente el no paralelismo:



Es innegable, además, que el software puede proporcionar herramientas (lingüísticas o gráficas) a los alumnos para expresar las justificaciones o las respuestas, ya que es un mediador semiótico (Vygotski, 1979) que influye en la construcción del conocimiento, incluido el lenguaje y las maneras de argumentar. Al respecto se puede mencionar el trabajo de Rosamund Sutherland y Nicolás Balacheff (1999), quienes ponen como ejemplo que no es el mismo significado que se le otorga a la Geometría si se utiliza Logo a que si se utiliza Cabri-Géomètre, así como no será el mismo conocimiento si se cambian las actividades, el ambiente o, incluso, a los alumnos en sí. Este hecho hace que algunas observaciones o justificaciones presenten referencias directas al software, a sus comandos, a sus características o a su arquitectura), tanto de una manera explícita como implícita. Esto hace pensar en una posible necesidad de remarcar a los alumnos que en sus observaciones y justificaciones debe haber, precisamente, una distinción entre las características del software y las propiedades geométricas, lo que implica una “depuración” de los enunciados que puedan proponer.

Además esto hace un señalamiento en cuanto a la evaluación, pues ésta, al ser un proceso en el que se indaga sobre el proceso de aprendizaje de los alumnos, está influenciada por la herramienta debido a que el mismo aprendizaje está influenciado. Como consecuencia inmediata es que la evaluación debe tomar en cuenta estas condiciones y no quedarse bajo un esquema en el que se utiliza una tecnología de papel-y-lápiz.

Cabri-Géomètre o cualquier otro software para Geometría Dinámica, como herramienta de apoyo al aprendizaje y la enseñanza de la Geometría, no puede ser considerado por sí mismo como la manera para resolver los problemas educativos. Es decir, el software o la herramienta por sí misma no resuelve la problemática educativa de manera automática, sino que es su uso adecuado y planificado lo que permite alcanzar los objetivos de la enseñanza. De acuerdo a las investigaciones su papel durante la producción de argumentos deductivos es relevante (ver Larios, 2005; Olivero, 2003; Mariotti, 2000), pues si bien el programa es capaz de producir una gran cantidad de casos de alguna construcción y permitir la observación de propiedades invariantes, todo ello es evidencia empírica que el individuo puede tomar como cierta si acepta a la computadora y al software como autoridad y criterio de validación o convicción. Como es fácil de aceptar, cualquier conjunto de actividades que involucren el uso de software requiere de un componente pedagógico cuya función es la de darle sentido al componente técnico conforme a los objetivos de aprendizaje buscados. En este sentido al momento de la producción de argumentos deductivos los alumnos después de un momento de construcción y de observación deben separarse de la herramienta (en el sentido de no enfocar en ella su trabajo) y enfocar sus esfuerzos cognitivos en considerar la información que les fue presentada por la herramienta y sistematizarla para producir los argumentos deductivos necesarios, pues no es la computadora en sí la que los produce.

Al respecto queda mucho por observar y proponer, pues a pesar de su capacidad dinámica y las grandes posibilidades que tiene el software para Geometría Dinámica es necesario identificar los problemas y fenómenos que pueden convertirlo en un obstáculo para el aprendizaje de la Geometría. Así pues, al ser el software un mediador semiótico entre el conocimiento geométrico y el individuo sus comandos, la manera de responder ante los estímulos proporcionados por el individuo y las herramientas utilizados para proporcionar tales estímulos, se pueden convertir en herramientas para que el individuo exprese sus observaciones o justificaciones. Entonces se vuelve ineludible la reflexión sobre la necesidad existente de que alumnos sistematicen sus observaciones y justificaciones para que las "depuren", a fin de llevar a cabo una aproximación a la construcción de demostraciones.

Y es parte del trabajo de los profesores ser conocedores de todo esto.

Bibliografía

De Villiers, Michael (1995). "An alternative introduction to proof in dynamic geometry". *Micromath*, 11(1):14-19.

Fischbein, Efraim (1993). "The theory of figural concepts". *Educational Studies in Mathematics*, 24:139-162.

Goldenberg, E. Paul; Cuoco, Albert A. (1998). "What is dynamic geometry?" En R. Lehrer y D. Chazan (eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 351-367). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Hölzl, Reinhard (1995). "Between drawing and figure". En R. Sutherland y J. Mason (eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 117-124). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Hölzl, Reinhard (1996). "How does 'dragging' affect the learning of geometry". *International Journal for Mathematical Learning*, 1(2):169-187.

Laborde, Colette; Capponi, Bernard (1994). "Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1-2):165-210.

Larios Osorio, Víctor (2003a). "Geometrical rigidity: An obstacle in using dynamic geometry software in a geometry course". En M. A. Mariotti (ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research on Mathematics Education*. Bellaria, Italia: Edizione Plus, Pisa University Press.

Larios Osorio, Víctor (2005). *Fenómenos cognitivos presentes en la construcción de argumentos en un ambiente de Geometría Dinámica*. México: Cinvestav del IPN. (Tesis de doctorado.)

Maracci, Mirko (2001b). "The formulation of a conjecture: the role of drawings". En M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.) *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 335-342). Utrecht, Holanda.

Mariotti, Maria Alessandra (2000). "Introduction to Proof: The mediation of a dynamic software environment". *Educational Studies in Mathematics*, 44:25-53.

Olivero, Federica (2003b). *The proving process within a dynamic geometry environment*. Bristol, Inglaterra: University of Bristol, Graduate School of Education. (Tesis de doctorado.)

Parzysz, Bernard (1988). "«Knowing» vs «seeing». Problems of the plane representation of space geometry figures". *Educational Studies in Mathematics*, 19:79-92

Sánchez Sánchez, Ernesto (2003). "La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración". *Educación Matemática*, 15(2):27-54.

Sutherland, Rosamund; Balacheff Nicolas (1999). "Didactical complexity of computational environments for the learning of mathematics". *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, 4:1-26.

Vygotski, Lev Semionovitch (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona, España: Editorial Crítica.

Geometría con bisagras

Alfinio Flores Peñafiel
University of Delaware

Introducción

Todos los ejemplos en esta presentación tienen en común que figuras geométricas o partes de ellas rotan alrededor de bisagras. La bisagra, o centro de rotación, está en uno de los vértices de la pieza rotada. Las figuras pueden ser usadas para plantear problemas por encontrar o problemas por demostrar. Los problemas pueden ser resueltos rotando partes de las figuras alrededor de ciertos puntos para mostrar equivalencias de áreas. El uso de rotaciones alrededor de las bisagras da una comprensión de por qué las áreas son iguales y da una sensación kinestésica y dinámica de la situación. Steinhaus, en la primera página de *Mathematical Snapshots* ilustra el modelo mecánico de Dudeney para transformar un triángulo equilátero en un cuadrado. Aquí usamos figuras con bisagras hechas con un programa dinámico de geometría. Las figuras interactivas se pueden encontrar en http://www.public.asu.edu/~aaafp/bisagras/bisagras.html. Las figuras mencionadas en este documento están enlazadas con las figuras interactivas en ese sitio. Alentamos al lector a interactuar con las figuras antes de seguir leyendo.

La igualdad de áreas puede ser demostrada también, más formalmente, usando argumentos de rotación. Los alumnos necesitan saber cuáles propiedades y relaciones son preservadas al rotar una figura, tales como la distancia entre puntos y los ángulos entre líneas rectas. Las igualdades de áreas se pueden demostrar también usando argumentos estáticos de congruencia. Las demostraciones correspondientes varían en términos de dificultad de bastante fáciles a relativamente difíciles, y el conocimiento geométrico que se necesita varía de geometría elemental hasta geometría de nivel medio superior. Las secciones de este artículo están tituladas para indicar el nivel de dificultad de la demostración tradicional. Sin embargo, el enfoque visual de las bisagras es igualmente accesible para todos los problemas. Los alumnos pueden beneficiarse de interactuar con las figuras con bisagras aún cuando no tengan todo el conocimiento necesario para las demostraciones tradicionales. Para los lectores que quieran explorar ideas más a fondo, se proporcionan recuadros para discusiones adicionales.

El uso de bisagras para mostrar equivalencia de áreas es un caso especial de mostrar áreas iguales por disección. El lector puede encontrar más ejemplos de transformaciones con bisagras o por disección en las referencias.

Nivel Básico

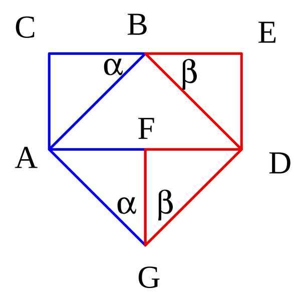
Figura 1. Empezamos con dos cuadrados, cada uno formado por dos triángulos. Un triángulo de cada cuadrado rota para formar un cuadrado más grande. Los alumnos pueden comparar el área del cuadrado sobre la diagonal de un cuadrado dado con el área del cuadrado original. El siguiente recuadro desglosa la discusión del cuadrado sobre la diagonal.

El cuadrado sobre la diagonal de un cuadrado

Problema: Dado un cuadrado, encontrar el área del cuadrado sobre la diagonal.

Incluso los niños en los primeros grados pueden encontrar la relación entre el área de un cuadrado y el área del cuadrado sobre la diagonal usando modelos concretos de triángulos rectángulos isósceles (tales como los de los tangramas) y acomodándolos de diferentes maneras (Flores 1995). Los alumnos también pueden usar el ejemplo con las bisagras para ver la relación entre las áreas. En la figura interactiva 1, después de rotar los triángulos, la nueva figura se ve como un cuadrado.

Más allá de la percepción. Los alumnos pueden ver que los dos triángulos que rotan junto con los que permanecen fijos forman un cuadrado. Para ayudar a los alumnos a desarrollar su pensamiento geométrico, podemos ayudarlos a justificar que la figura así formada es realmente un cuadrado. Por ejemplo, ¿por qué los nuevos ángulos formados son de 90º? Las justificaciones de los alumnos pueden consistir de argumentos como los que siguen. La figura original consiste de dos cuadrados de igual tamaño, cada uno formado por dos triángulos rectángulos. Los triángulos tienen catetos iguales y los ángulos en sus bases miden 45°, ya que son la mitad del ángulo en la esquina de un cuadrado. Al combinar dos de tales ángulos de diferentes triángulos juntos forman un ángulo de 90°.



Alumnos más avanzados pueden encontrar la longitud de la diagonal. Los alumnos que conocen el área de un cuadrado en términos de su lados, A = a^2, pueden razonar de manera inversa para encontrar la longitud del lado dada el área. Si el cuadrado original tiene un área de una unidad, el cuadrado sobre la diagonal tiene un área de 2. ¿Qué número multiplicado por sí mismo da 2?

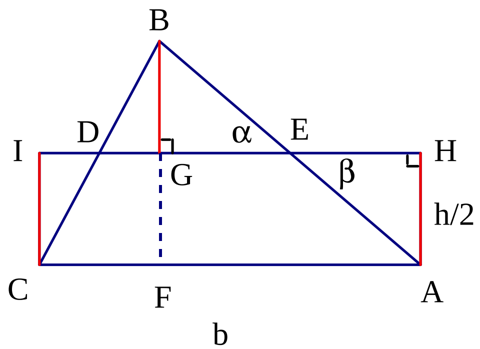
El maestro puede guiar a sus alumnos para que tengan un sentido de la magnitud del lado. Los alumnos saben que 1 × 1 = 1, y 2 × 2 = 4, así que un número que multiplicado por sí mismo da 2 debe estar entre 1 y 2. Los alumnos pueden usar una calculadora y probar otros valores. Por ejemplo, 1.5 × 1.5 = 2.25, así que sabrán que la respuesta es ligeramente menor que 1.5. Pueden probar 1.4 y otras aproximaciones sucesivas. Desde luego, algunos alumnos se darán cuenta que pueden utilizar la tecla v para encontrar más rápido una mejor aproximación.

Figura 2. Dos partes de un triángulo rotan alrededor de bisagras en los puntos medios de dos lados para formar un rectángulo. Los alumnos pueden relacionar el área de un triángulo con el área de un rectángulo con la misma base y la mitad de la altura. Ver el recuadro para más discusión del triángulo y rectángulo.

Un triángulo y un rectángulo con la misma base y la mitad de la altura

La figura con bisagras sugiere que el área de un triángulo es la misma que el área de un rectángulo con la misma base y la mitad de la altura.

Demostración por medio de rotaciones. Cuando se rota el triángulo BGE 180° alrededor del punto medio E del lado BA, la imagen del segmento BG será perpendicular a la base en A. Y GE y su imagen EH estarán sobre la misma recta. De la misma manera, cuando el triángulo BDG se rota 180° alrededor del punto medio D del otro lado BC, la imagen de BG será un segmento perpendicular a la base en C, y DG y su imagen estarán sobre la misma recta. Por tanto CAHI será un rectángulo.



Prueba sintética. Sean D y E los puntos medios de dos lados del triángulo ABC y sea BF la altura del triángulo. La línea que pasa por los puntos medios es paralela a la base CA. Para probar que el área del rectángulo CAHI tiene la misma área que el triángulo ABC necesitamos probar que los triángulos BGE y AHE son congruentes (y también que los trianguos BGD y CID son congruentes).

Convéncete que las siguientes afirmaciones son ciertas y da una razón de por qué:

BE es congruente con EA.

BG es congruente con HA.

El ángulo A es congruente con el ángulo B.

Las afirmaciones anteriores son suficientes para garantizar la congruencia de las triángulos BGE y AHE.

De manera similar te puedes convencer que el triángulo BGD es congruente con el triángulo CID.

Si h es la algura del triángulo, la altura del rectángulo será h/2. El área del rectángulo es su base por su altura, b × h/2, de modo que una fórmula para el área del triángulo es base por la mitad de la altura, $b \times \frac{h}{2}$.

Nota la diferencia entre las dos demostraciones. En la demostración por rotaciones partimos de que las piezas son congruentes de modo que el área del trapecio y la nueva figura es la misma, y luego demostramos que la nueva figura es en verdad un rectángulo. En la demostración sintética empezamos con un rectángulo, y demostramos que los triángulos son congruentes de modo que el área del rectángulo y la del trapecio son iguales.

Figura 3. Un triángulo obtuso se transforma en un paralelogramo con la misma base y la mitad de la altura.

Figura 4. Un paralelogramo apoyado sobre una de las bases más cortas se transforma en un triángulo obtuso con la misma base y el doble de la altura.

Figura 5. Una parte de un trapecio rota alrededor de una bisagra en el punto medio de uno de sus lados para formar un paralelogramo con la misma altura. Los alumnos pueden relacionar la base del paralelogramo con el promedio de las bases del trapecio. Ver el recuadro para más discusión de trapecio y paralelogramo.

Trapecio y paralelogramo con la misma altura

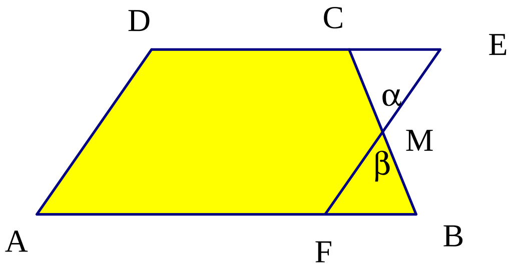
Demostración basada en rotación. En el trapecio ABCD, sea M el punto medio del lado CB, y sea FM un segmento paralelo al otro lado AD. Convéncete de que son ciertas las siguientes afirmaciones (y da una razón de por qué) acerca de segmentos de FMB cuando son rotados 180º alrededor de M.

La imagen del segmento MB coincidirá con MC.

El segmento MF y su imagen formarán una línea recta.

La imagen de FB formará una línea con DC.

Las afirmaciones anteriores son suficientes para garantizar que AFED es un paralelogramo.



Demostración sintética. Sea M el punto medio del lado CB y sea FE una paralela al otro lado DA por M para formar el paralelogramo AFED que tiene la misma altura que el trapecio. Para mostrar que el trapecio y el paralelogramo tienen la misma área es necesario probar que los triángulos CME y BMF son congruentes.

Convéncete de que las siguientes afirmaciones son ciertas y da una razón para cada una.

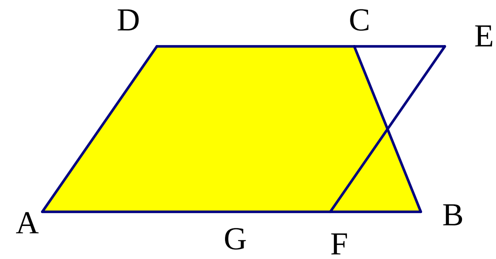
CM es congruente con MB.

EM es congruente con EF

El ángulo a es congruente con el ángulo ß.

Las afirmaciones anteriores son suficientes para garantizar la congruencia de los triángulos CME y BMF.

Para determinar la longitud de la base del paralelogramo será útil una paralela a AD que pase por C.



Convéncete (y da una razón de por qué) GF es congruente con FB, y la longitude de FB es la mitad de la diferencia de las bases del trapecio. Si la longitud de la base mayor es b y la de la base menor es a, muestra que la longitud de las base del pralelogramo es (a+b)/2.

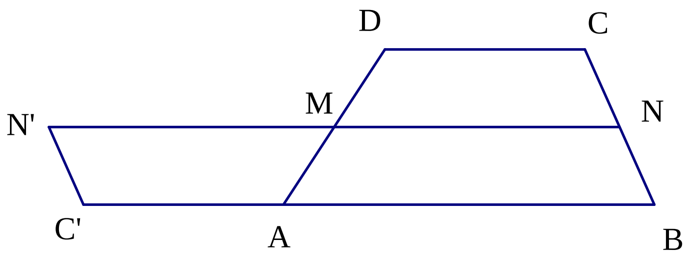
Utilizando la fórmula para el área del paralelogramo, base por altura, deriva una fórmula para el área del trapecio.

Ejercicio. Sean a, b dos números, a = b, y sea b – a su diferencia. Muestra que el promedio de a y b, (a + b)/2 puede ser expresado como a + (b – a)/2, o como b – (b – a)/2. Representa a, b, en la recta numérica y da una interpretación geométrica del promedio.

Figura 6. Una parte de un trapecio se rota alrededor de una bisagra en el punto medio de uno de sus lados para formar un paralelogramo con la mitad de la altura y cuya base es la suma de las bases del trapecio. Ver el recuadro para más discusión de trapecio y paralelogramo con la mitad de la altura.

Trapecio y paralelogramo con la mitad de la altura

Sea ABCD un trapecio con base mayor de longitud b y base menor de longitud a. Sea M el punto medio de AD.



La parte de arriba MNCD del trapecio se rota 180° alrededor de M. Convéncete de la vericidad de las siguientes afirmaciones (y da una razón de por qué son ciertas)

La imagen N’ de N estará en la misma recta que MN.

La imagen C’ de C estará en la misma recta que AB (si los ángulos alternos internos son congruentes, las líneas son paralelas).

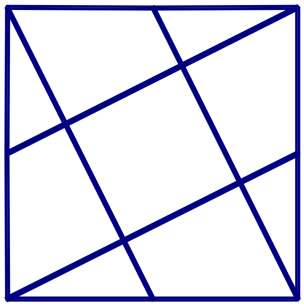
N’C’ será paralela a NC.

Por tanto C’BNN’ es un paralelogramo.

La base de este paralelogramo mide a + b, y su altura es h/2. Usa la fórmula del área del paralelogramo para expresar el área del trapecio original.

Nivel intermedio

Figura 7. En un cuadrado el punto medio de cada lado se une con uno de los vértices del lado opuesto para formar dos pares de segmentos paralelos como se muestra. Se forma un pequeño cuadrado en el centro. El problema es encontrar el área del cuadrado pequeño en relación con el cuadrado original.



Se forma un pequeño cuadrado en medio.

En la figura 7, cuatro triángulos amarillos forman parte del cuadrado. Cuando se rotan 180º alrededor de las bisagras rojas forman parte de una cruz griega. Ver el recuadro para más discusión del cuadrado y la cruz.

Cuadrado y cruz

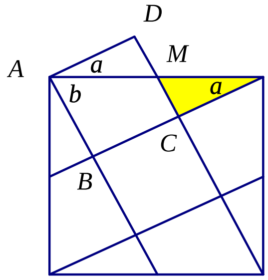
Prueba por rotación. El triángulo amarillo se rota 180° alrededor del punto medio M del lado del cuadrado. Convéncete de que las siguientes afirmaciones son ciertas y justifícalas.

El triángulo amarillo tiene un ángulo recto.

El ángulo *a* (en el triángulo amarillo) y *ß* suman 90º.

La longitud del segmento MC es la mitad de la longitud del segmento AB.

ABCD es un cuadrado.

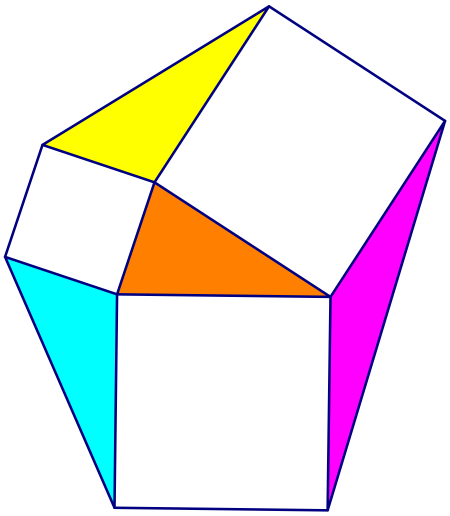


Hay varias formas de convencernos de que los dos pares de líneas paralelas construidas son perpendiculares unas a otras. Una manera es utilizar la simetría rotacional de la figura original. Si rotamos 90° el cuadrado y los segmentos que lo dividen alrededor del centro del cuadrado resultará en una figura idéntica.

Convéncete de que el pequeño cuadrilátero en medio es de hecho un cuadrado y que es congruente a la figura ABCD.

Figura 8. Un cuadrado se transforma en dos cruces. ¿Cuál es el área de cada uno de los brazos de una de las cruces en relación al cuadrado original?

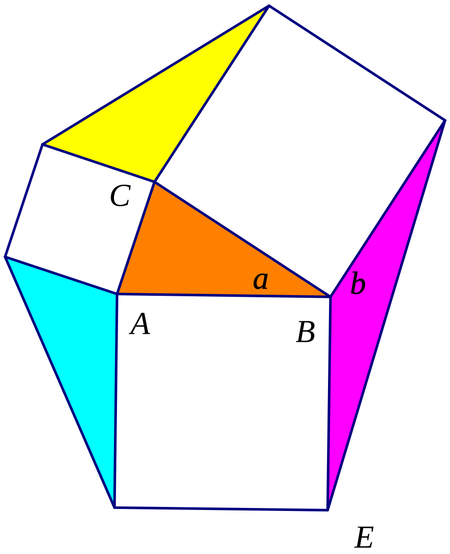
Figura 9. Se construyen los tres cuadrados sobre los lados de un triángulo. Al unir vértices de cuadrados adyadentes se forman otros tres triángulos. Compara el área de cada uno de estos triángulos con el área del triángulo original. En la figura 9 rota los triángulos 90°. ¿Qué puedes decir de la base del triángulo púrpura y su altura comparadas con la base y la altura del triángulo original? Ver el recuadro para más discusión de las áreas de los triángulos.



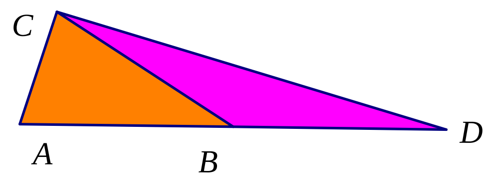
Cuatro triángulos.

Cuatro triángulos con la misma área

En la figura original, por la forma en que los triángulos adicionales fueron construídos usando cuadrados en los lados del triángulo anaranjado, tenemos que los ángulos a y ß suman 180° y AB es congruente con BE.



El triángulo púrpura se rota 90° alrededor de B, y D es la imagen E.

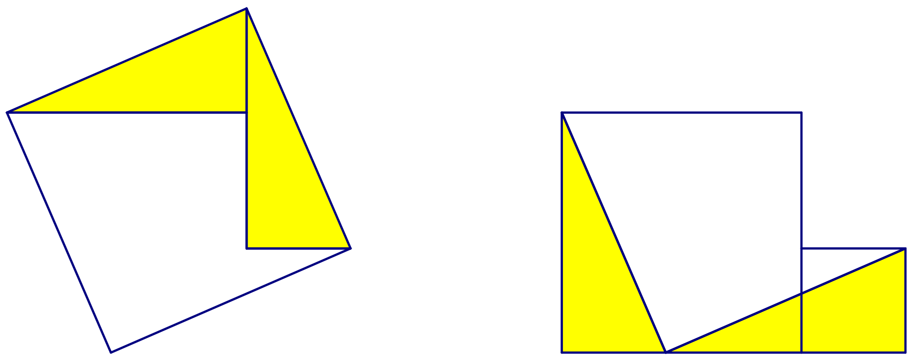


Convéncete de que las siguientes afirmaciones son ciertas y da una razón por qué.

a) AB y BD forman una línea recta.
b) AB es congruente con BD.
c) El triángulo anaranjado y el triángulo púrpura tienen la misma altura.
d) El triángulo anaranjado y el triángulo púrpura tienen áreas iguales.
e) Los mismos argumentos se pueden dar para le triángulo amarillo y el triángulo azul.

Alumnos más avanzados pueden relacionar c) con el hecho de que el seno de dos ángulos suplementarios es el mismo.

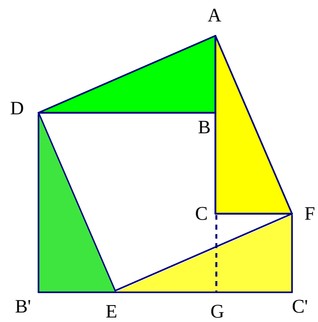
Figura 10. Teorema de Pitágoras. Existen muchas demostraciones de este teorema. En ésta, dos triángulos amarillos que forman parte del cuadrado de la hipotenusa giran para formar los cuadrados sobre los catetos. Ver el recuadro para más discusión de esta demostración.



El cuadrado de la hipotenusa. Los cuadrados de los catetos.

Una demostración del teorema de Pitágoras

Sea ADEF un cuadrado. Se construyen dos triángulos rectángulos ADB y AFC dentro del cuadrado como se muestra.



Se rota el triángulo ABD -90° (o sea en el sentido de las manecillas del reloj) alrededor de D. Sea B’ la imagen de B. El triángulo amarillo AFC se rota 90° (o sea en contra de las manecillas del reloj) alrededor de F. Sea C’ la imagen de C. Sea G la intersección de la línea AB con la línea EC’.

Convéncete de cada una de las siguientes afirmaciones y para cada una da una razón por la cual es cierta.

E es la imagen de rotar A -90° alrededor de D.

E es también la imagen de rotar A 90° alrededor de F.

Las imágenes B’, E, y C’ están en una línea recta.

DB’GB es un cuadrado.

CBC’F es un cuadrado.

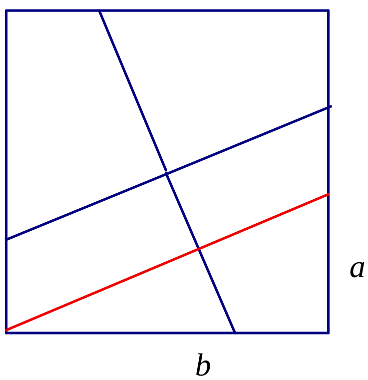
Figura 11. Cuatro triángulos y un cuadrado blanco forman el cuadrado de la hipotenusa. Al rotar dos de los triángulos, el cuadrado y los cuatro triángulos forman los cuadrados de los catetos.

Figura 12. Un cuadrado de lado (a + b) está formado por los cuadrados de los catetos y cuatro triángulos rectángulos. Al rotar dos de los triángulos se forma el cuadrado sobre la hipotenusa.

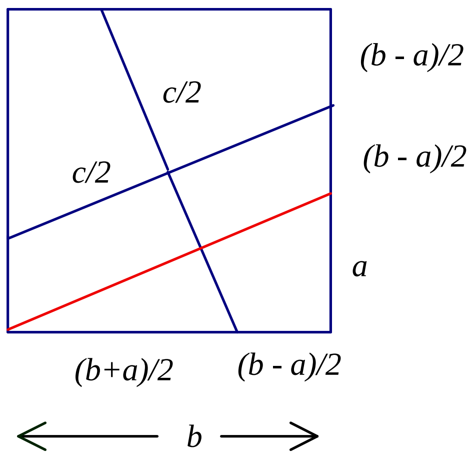
Figura 13. Los cuatro cuadriláteros forman el cuadrado sobre un cateto de un triángulo rectángulo. Rota los cuadriláteros alrededor de las bisagras. Los cuadriláteros rotados, junto con el cuadrado vacío que se forma en medio forman el cuadrado de la hipotenusa. ¿Cuál es la longitud del lado del pequeño cuadrado vacío de en medio? Ver el recuadro para más discusión de la demostración de Dudeney.

Demostración de Dudeney del teorema de Pitágoras

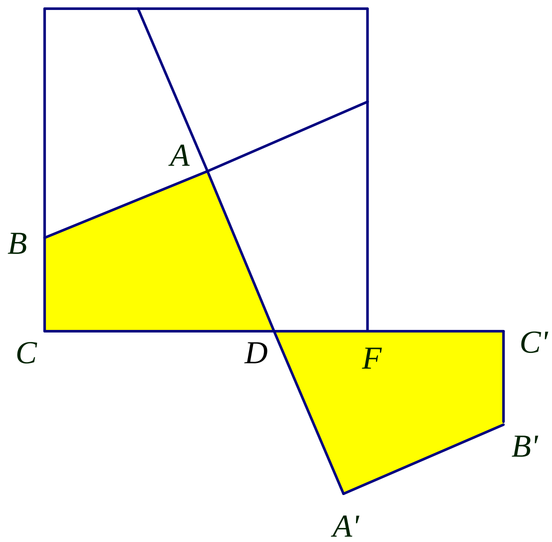
En un triángulo rectángulo con cateto mayor b, cateto menor a, e hipotenusa c, construye el cuadrado sobre el cateto b (el cuadrado se muestra aquí hacia el interior del triángulo). Por el centro de este cuadrado traza un segmento paralelo a c y otro perpendicular a c. El cuadrado quedará dividido en cuatro partes congruentes. Cada uno de estos cuadriláteros tiene dos ángulos rectos.

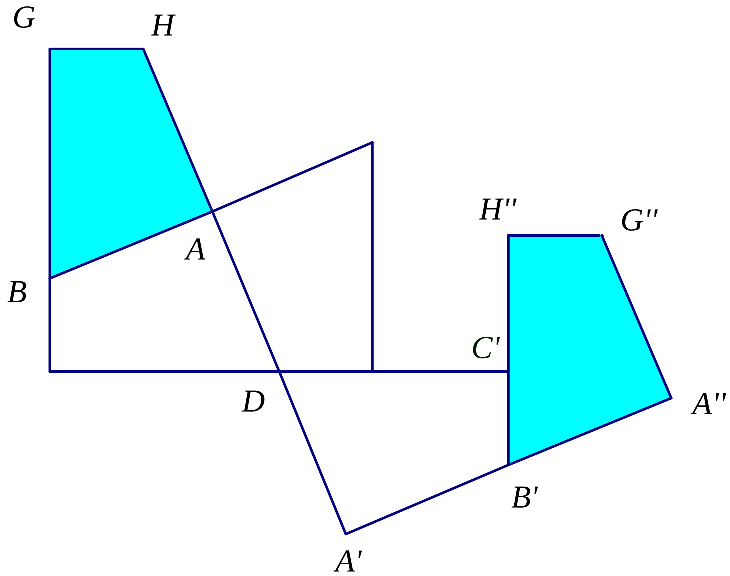


Convéncete de que las longitudes de los lados de las cuatro partes están dadas como se indica en la figura de abajo (y da una razón de por qué).



Rota el cuadrilátero ABCD 180° alrededor del punto D, y sean A', B', y C' las imágenes de A, B, y C respectivamente. Encuentra la longitud del segmento FC'. Convéncete de que ADA' son colineales. Encuentra la longitud de AA'.





El cuadrilátero azul BAHG se rota 180° alrededor de D, y su imagen se rota 180 alrededor de B', de modo que la imagen de esta composición de rotaciones es B'A''G''H''.

Encuentra la distancia entre C' y H''. Convéncete de que A', B', y A'' son colineales. Encuentra la longitud de A'A''.

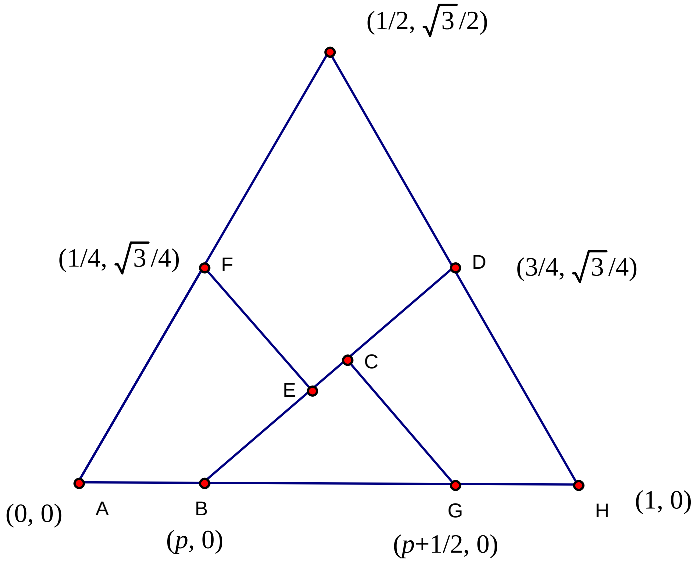
Usando argumentos similares para la última pieza (una composición de tres rotaciones de 180°) puedes ver que se forma un cuadrado de lado c y que consiste de un cuadrado vacío de lado a, y los cuatro cuadriláteros que formaban el cuadrado de lado b.

Problemas más desafiantes

Figura 14. Un triángulo equilátero está formado por cuatro piezas, cada una con un ángulo recto. Las piezas se rotan alrededor de bisagras para formar un cuadrado. Nota que algunas de las bisagras rotan junto con las piezas que se mueven. ¿Cuánto rota el cuadrilátero rojo? ¿Cuánto rota el cuadrilátero azul con respecto al rojo? ¿Cuánto rota la pieza roja on respecto a su posición original? Ver el recuadro para más discusión de cómo cortar un triángulo equilátero para formar un cuadrado.

Conversión de un triángulo en un cuadrado (Dudeney)

Sea 1 la longitud de la base del triángulo equilátero. Sean F y D los puntos medios de dos lados. En esta disección del triángulo se localiza un punto en la base del triángulo a una distancia p de A y la longitud del segmento BG se hace igual a ½. Se traza el segmento BD y se construyen los segmentos FE y GC perpendiculares a BD.



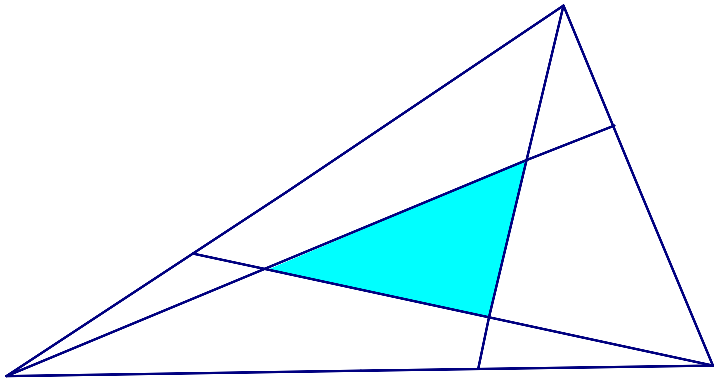
Con esta construcción, para cualquier valor de p a lo largo de la base, las piezas del triángulo se pueden reacomodar para formar un rectángulo. El diagrama de Steinhaus usa p = ¼, lo que da un rectángulo que es una muy buena aproximación a un cuadrado. El valor de p que da un cuadrado perfecto es $p = \dfrac{3-\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{4}$, el cual es aproximadamente 0.2545.... Este valor se puede obtener a partir de las siguientes consideraciones. La ecuación de la línea que pasa por B(p, 0) y D(3/4, v3/4) está dada por $\sqrt{3}x + (4p-3)y - p\sqrt{3} = 0$.

Recuerda que si ax + by + c = 0 es la ecuación de una recta, la distancia del punto (x_0, y_0) a la recta está dada por $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Sustituyendo los coeficientes de la ecuación de arriba en esta fórmula y simplificando algebraicamente, puedes ver que la distancia de F a la línea que pasa por BD está dada por $\dfrac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3+(4p-3)^2}}$.

Verifica que la distancia de F a la línea BD es la misma que la distancia de G a la línea BD para cualquier valor de p. Por tanto los triángulos BEF y DCG son congruentes ya que BF es también congruente con GD. Por tanto BE es congruente con CD. También, ED + CD = BD = CB +EB. Con esta información podemos ver que para cualquier valor de p, el triángulo se puede transformar en un rectángulo. La forma del rectángulo depende del valor particular de p. Para calcular el valor de p que da un cuadrado necesitamos una consideración adicional. El área del cuadrado buscado es la misma que el área del triángulo equilátero, $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Por tanto, el lado del cuadrado es $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}$. Esta longitud es dos veces la distancia de F a BD, así que tenemos la ecuación $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+(4p-3)^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}$. Esta es equivalente a la ecuación $4p^2 - 6p + 3 - \sqrt{3} = 0$. Resolviendo la ecuación para p, obtenemos el valor dado más arriba. Usa este valor de p y verifica que la distancia entre B y D es efectivamente la misma que la longitud ncesaria para el lado del cuadrado.

Dudeney, en su libro The Canterbury puzzles (p. 178) indica cómo encontrar el punto p usando regla y compás.

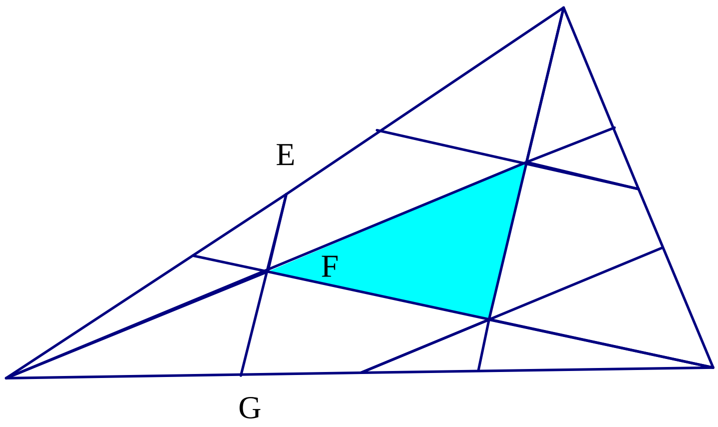
Figura 15. Los lados de un triángulo se dividen en tres partes iguales. En cada lado el punto que marca el primer tercio se une con el vértice opuesto (ver figura). Un pequeño triángulo se forma en el centro. En la figura 15 se han trazado segmentos adicionales paralelos que conectan puntos medios con puntos que marcan el segundo tercio de un lado adyacente. Los tres triángulos amarillos forman parte del triángulo original. Rota los triángulos 180° para formar tres paralelogramos uno en cada lado del triángulo azul. Compara el área de cada uno de estos paralelogramos con el triángulo azul. Ver el recuadro para sugerencias de una demostración.



Un pequeño triángulo se forma en el centro.

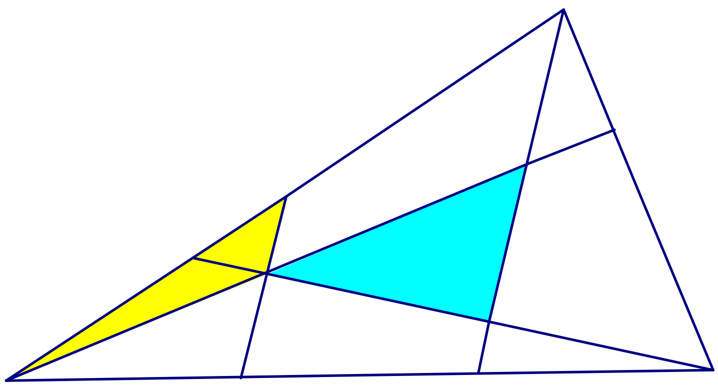
Un séptimo de un triángulo

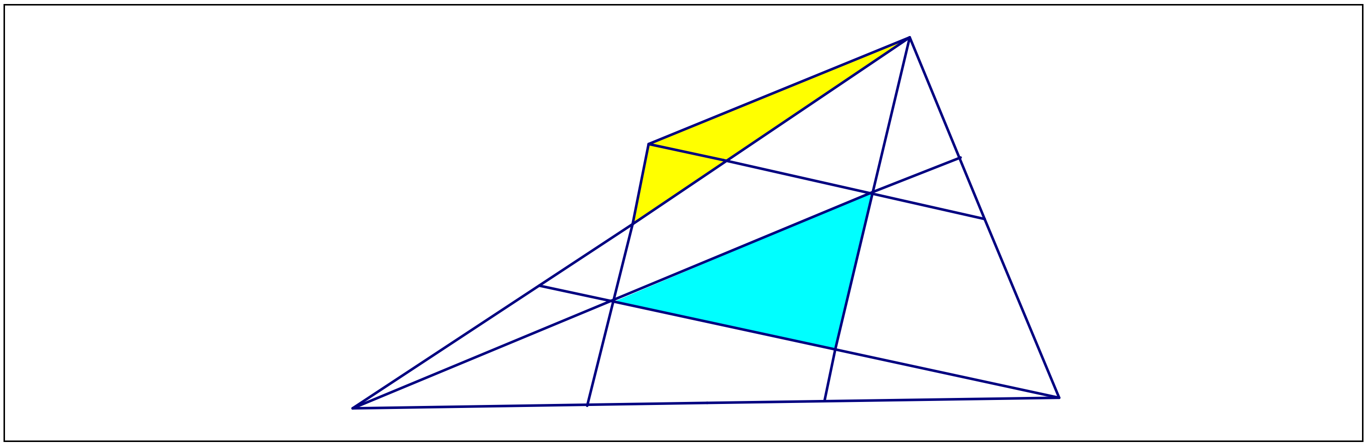
En la figura con bisagras, los puntos medios de los lados del triángulo juegan un papel importante. Para ver cuál es el área del triángulo azul, se construyen segmentos adicionales paralelos a los anteriores que conectan los puntos medios con la marca del otro tercio. Por ejemplo, E es un punto medio y G marca el otro tercio de la base.



Para probar las identidades sugeridas por la figura con bisagras es necesario mostrar que el segmento EG pasa por el vértice del triángulo azul, esto es que los puntos E, F, y G son colineales. Esto se puede mostrar usando coordenadas.

Una vez que se tiene esto, es fácil ver que los pequeños triángulos amarillos rotados formarán paralelogramos completos en los lados del triángulo azul. Las figuras abajo muestran un triángulo rotado 180° alrededor del punto medio E. El paralelogramo tiene el doble del área que el triángulo azul.





Referencias

Cundy, H. M. y Rollett, A. P. *Mathematical models*. Segunda edición. Oxford: Oxford University Press, 1972.

Dudeney, Henry E. *The Canterbury puzzles and other curious problems*. Londres: Thomas Nelson and Sons, 1932.

Flores, Alfinio (1995). Bilingual lessons in early-grades geometry. *Teaching Children Mathematics*, *1*(7), 420 - 424.

Frederickson, Greg N. *Dissections: Plane and fancy*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

Frederickson, Greg N. *Hinged dissections: Swinging and twisting*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

Nelsen, Roger B. *Proofs without words: Exercises in visual thinking*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1993.

Nelsen, Roger B. *Proofs without words II: More exercises in visual thinking*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.

Steinhaus, Hugo. *Mathematical snapshots*. Tercera edición. Oxford: Oxford University Press, 1983.

Wells, David. *Hidden connections, double meanings*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

Wells, David. *The Penguin dictionary of curious and interesting geometry*. London, Penguin Books, 1991.

¡Vivan las calculadoras y los algoritmos que desarrollan el cálculo mental!

Los algoritmos tradicionales de las cuatro operaciones aritméticas: ¡han muerto, pero no han sido enterrados!

Antonio Ramón Martín Adrián
Colegio público Aguamansa.
Grupo de investigación-acción en Educación Matemática Capicúa 2002.
Tenerife, Islas Canarias, España.
tonycapicua@yahoo.es

La enseñanza y el aprendizaje de los Algoritmos Tradicionales de las Operaciones Aritméticas (ATOA) es actualmente un tema caduco y obsoleto.

4.567 + 789 + 6.908 + 12.345 + 34 = 67.987 – 8.899 =

23.456 x 78 = 789.342 : 67 =

657,89 x 34,5 = 6789,78 : 34,5 = Raíz cuadra: 899,8

En la actualidad, ninguno de estos procedimientos se hace fuera de los centros escolares, y no aportan ni desarrollan ninguna habilidad cognitiva que mejore el razonamiento lógico-matemático, siendo esto último el objetivo fundamental que debe predominar en todas las acciones que hacemos los educadores matemáticos con nuestros alumnos.

No existe ningún centro comercial, financiero (bancos, cajas de ahorro...), empresas (gasolinerías, supermercados...), laboratorios, etcétera, en los que veamos realizando (como hace dos décadas) las operaciones aritméticas (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) con bolígrafo y papel. Por lo tanto, esos algoritmos deben desaparecer del trabajo escolar.

En definitiva, deben desaparecer de la práctica educativa. Son parte de la historia de la pedagogía. ¿Debemos esperar a un cataclismo para que cambie el panorama mundial tal como lo conocemos hoy en día, y desaparezcan todos los instrumentos de cálculo electrónico, para volver a reconsiderar la utilidad de estos procedimientos? Después de lo anterior, ¿qué haremos ahora los docentes con el cálculo?

Desde hace décadas, y de manera significativa en los comienzos del siglo XXI, las estrategias elementales de cálculo en la escuela deben ir dirigidos a dotar a las niñas y los niños (futuros ciudadanos) del mayor número de habilidades cognitivas posibles para el *cálculo mental*, y dentro de este para el *cálculo aproximado* (estimación). El exacto lo dan las máquinas, que se equivocan menos que los seres humanos. Por lo tanto, todas las acciones a desarrollar en las aulas deben tener dentro de esta parcela del conocimiento matemático como principal objetivo: “Fomentar el desarrollo del cálculo mental”.

La calculadora

Una herramienta que contribuye sustancialmente a conseguir este objetivo es la calculadora. Este instrumento ha revolucionado la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, pero desgraciadamente son muy pocos los responsables educativos, inspectores, profesores, investigadores, formadores de profesores, madres y padres que se han enterado de este hecho. Hay una función en estas máquinas que la mayoría de las personas ignora, que es el factor constante. Esta posibilidad permite un amplio espectro para el trabajo en la clase de matemáticas en todos los ciclos de la educación primaria y la educación infantil.

La calculadora es una de las mejores herramientas con que cuentan los docentes para atender la diversidad en el alumnado en la clase de matemáticas. No entendemos como se puede trabajar el cálculo mental sin ella. Es la herramienta ideal para dar a cada alumno lo que necesita y no limitar capacidades. El inconveniente se encuentra en que la mayoría de los docentes no saben sacar el provecho del factor constante, no por capricho, sino por desconocimiento. La calculadora desarrolla en la mente infantil habilidades cognitivas que las personas no podemos.

Gran parte de los que se oponen al uso de la calculadora en la escuela, es porque piensan que el uso de la máquina para niños de 6 a 8 años es la de calcular operaciones como: 2+4=, 8-3=, 15:3=, 2x3=. Por supuesto que no estamos de acuerdo en que éste sea el uso que se le debe dar con niños normales. ¡Atención!, no todas las calculadoras tienen esta posibilidad, por lo tanto, no todas las calculadoras de cuatro operaciones sirven para trabajar en la escuela.

Los alumnos deben trabajar con bolígrafo y papel otros algoritmos, propuestos por el profesor y también inventados por ellos, porque les van a ayudar a seguir sus razonamientos y a descubrir otras estrategias, que de no poner por escrito serían muy difíciles de comprender.

Por otro lado, la calculadora va a permitir investigar y descubrir, propiedades y relaciones entre los números, que de no ser por ella sería muy difícil de abordar a los 4, 5, 6 y 7 años de edad. Entre otros temas del currículo, es una herramienta excelente para el estudio de las tablas del multiplicar.

"No es válido el argumento de que es necesario martirizar a los niños adiestrándolos en el uso de los ATOA para el caso de que en la vida no dispongan de una calculadora; es como seguir enseñando los métodos se cálculo de la hora en base a la sombra del sol y las técnicas de enviar mensajes con humo para la eventualidad de no tener reloj o teléfono" (Guzmán Rojas,1979).

"En el pasado fue imprescindible sacrificar tiempo y energía en impartir destrezas de cálculo numérico. Hoy no tiene nada que ver con formación matemática el adiestrar seres humanos para hacer lo que las máquinas pueden hacer mucho mejor" (Guzmán Rojas, 1979).

Un argumento que se oye con frecuencia en aquellos docentes que quieren seguir justificando lo injustificable, la enseñanza de ATOA, es: "¿y si los alumnos cuando van a hacer un cálculo no tienen calculadora, qué hacen?"**.** La respuesta es obvia: ¿y si cuando van a hacer un cálculo no tienen lápiz y papel, que hacen? Hoy en día lo que se lleva es el cálculo mental, y dentro del mismo la estimación, el exacto lo dan las máquinas. Actualmente, en qué actividad profesional piden que se hagan los cálculos aritméticos a mano: ¡en ninguna!

Ahora bien, la calculadora no piensa**.** El hacer los cálculos con la misma no significa que el resultado obtenido sea correcto. Por eso, enseñaremos a los alumnos a que antes de apretar la tecla, deben aventurar el resultado, de esta forma la calculadora cumple con la función de autoevaluadora de los procesos mentales (estimación). El alumno, siempre, antes de tocar la tecla, debe hacer una estimación, un cálculo aproximado. Siempre se hará primero el proceso mental que el digital (tocar las teclas).

El uso de la calculadora no es negativo en la escuela. Esta herramienta ha supuesto una "revolución" en el tratamiento de las operaciones aritméticas, y de muchos temas del currículo, como son los números decimales y fracciones; donde la enseñanza y aprendizaje de estos conceptos ha cambiado por completo, aunque desgraciadamente son pocos los docentes que se han enterado todavía. Supone también un instrumento con muchísimas posibilidades para el cálculo mental.

La discusión no debe girar en torno a calculadoras si ó no, sino al cómo utilizarlas en el aula para desarrollar el mayor número posible de habilidades mentales en los alumnos.

Uno de los aspectos negativos que se le atribuyen al uso de la calculadora en la escuela primaria es que rebaja el nivel educativo de los alumnos. ¡Todo lo contrario! Lo aumenta. Gracias a ella es posible abordar actividades con niños de 6 y 7 años que de otra manera sería "imposible". Como ejemplo ponemos la siguiente actividad realizada por alumnos de 1º y 2º, adaptada de un libro de enseñanza secundaria (14 años).

En un colegio, unos niños están trabajando con la calculadora. En la pantalla les aparece 70. ¿Qué operaciones realizaron para que aparezca ese número? Encuentra varias soluciones.

La calculadora no le resta tiempo a otras partes de la aritmética. Por el contrario, aumenta el tiempo que se puede dedicar a otros temas, y permite profundizar hasta niveles donde antes nos parecía imposible. Podemos, gracias a ella, abordar en los primeros niveles conceptos destinados tradicionalmente a los cursos superiores; por ejemplo, los números decimales. Esta herramienta no puede, ni debe ser el único material a utilizar en la clase de matemáticas, es un medio muy versátil y con muchas posibilidades, la gran mayoría, todavía están por descubrir.

El valor de posición no se puede abordar con la calculadora, debe hacerse mediante materiales estructurados, como las regletas de cuisenaire**.** La calculadora no es una panacea.

Algunos detractores de esta herramienta intentan justificar la enseñanza y aprendizaje de los ATOA diciendo que de esta manera los alumnos aprenden la abstracción en matemáticas. ¡Por favor!, que alguien me explique donde está la abstracción en éstos. Son puras destrezas mecánicas, que la gran mayoría de las personas han aprendido a fuerza de fijarlas en la memoria, siendo muy pocos los que saben porque se hacen de esa manera. En los ATOA no hay abstracción.

Los ATOA tenían su sentido de ser hasta principios de los años 70, donde era normal tener que hacer los cálculos con lápiz y papel. Pero, desde que se extendió la calculadora de cuatro operaciones, empezaron a dejar de ser funcionales. Por otro lado, son legiones de personas las que fueron rechazados por el sistema con la condición de fracasado escolar por no saber hacer divisiones y multiplicaciones largas, y como no, raíces cuadradas.

Las investigaciones demuestran que la calculadora es una herramienta que favorece la inteligencia, y ayuda en la comprensión de los conceptos matemáticos. Además es un instrumento generador de conocimientos.

Aunque se tengan buenas habilidades para los ATOA; ¿de qué sirven?, ¿dónde se van a utilizar?. No sólo las personas que carezcan de ellas, sino se debe intentar que todos los alumnos (futuros ciudadanos), tengan el mayor número de habilidades dentro del cálculo mental. Si un alumno normal, recurre a la calculadora para hacer 18+47, es que se ha procedido mal. Cualquier alumno normal, debe resolver esa operación mentalmente, pero no mediante el algoritmo tradicional, sino empleando otras estrategias; por ejemplo:

18+47=

10+40=50 y 8+7=15, entonces 50+10=60 y 60+5= 65. Por lo tanto, 18+47=65

Ralston es demasiado benevolente, cuando hace referencia a que los alumnos aprenden los ATOA de una manera mecánica y memorística, diciendo que "es lo que demasiado a menudo ocurre". No es lo que ocurre a menudo. Desgraciadamente es lo que ocurre en la mayoría de los casos, los alumnos los aprenden sin saber qué son ni para qué sirven.

En la escuela, después de haber dedicado el 80% del trabajo escolar a practicar los ATOA durante años, es frecuente oir:

Alumno: ¿Maestra/maestro, este problema es de sumar, restar, multiplicar o de dividir?

¿Qué ha pasado entonces?, ¿quién se ha equivocado?, ¿por qué hacemos los maestros lo que hacemos desde hace décadas?, ¿cuáles son la nuevas alternativas?, ¿y la resolución de problemas, dónde está?

Cuando una persona se enfrenta a operaciones como: 64.325-3.789=, sin ninguna duda la debe hacer con la calculadora. Pero antes, realizaría mentalmente la siguiente estimación: 3.789--------------4.000.

Redondeo el sustraendo hacia la unidad de millar superior. Por lo tanto, he añadido aproximadamente 200 unidades. Entonces la resta quedaría:

64.325--------+ de 200--------- 64.500
3.789--------+ de 200--------- 4.000

Decimos mentalmente a 64.500-4.000= 60.500. Entonces la diferencia debe ser un número alrededor de 60.500 (estimación).

A continuación paso a calcular el exacto con la calculadora 64.235-3.789=

La ventaja más significativa de aprender cálculo mental (estimación), está en que es la habilidad que más utilizamos a diario, cuando tenemos la necesidad de hacer cálculos.

Intentaremos enseñar habilidades de cálculo mental a todos los alumnos. Aunque puede que nos encontremos con alumnos con dificultades de aprendizaje de muy diferente etiología, en estos casos, si no responden a las prácticas de la mayoría o a las adaptadas a ellos, utilizarán la calculadora como una simple máquina de cálculo. No los mortificaremos con esquemas conceptuales difíciles para su nivel de comprensión.

¿Por qué trabajar los ATOA independientemente de la calculadora?, ¿dónde está los argumentos que sustenten esta postura? Si es porque se necesitan en la vida diaria, entonces mejor sería hacerlos con calculadora, que tiene la ventaja de ser más rápida y equivocarse menos. ¿Cuándo ha sido la última vez que cada uno de los lectores ha tenido necesidad de hacer los ATOA fuera de la escuela?

¿Qué es lo que la práctica repetida de los ATOA aporta conceptualmente y en qué mejora la capacidad matemática de quien los hace?, ¿qué ocurre con los alumnos –la mayoría– que tienen más fallos que aciertos cuando tropiezan con las divisiones largas o las multiplicaciones con decimales?

En los últimos años, después de la reforma educativa que han experimentado muchos países, es frecuente ver la discusión entre profesores con respecto a la división: ¿cómo es mejor hacer el algoritmo, como siempre o dejando las restas parciales?. Mucho se ha hablado respecto a este tema. Y aunque, algunos investigadores tenemos demostrado que es más comprensible cuando se dejan las restas parciales, la gran conclusión es: “ninguno de los dos es útil”. ¿Quién los hace fuera de un centro educativo? ¡Nadie!

¿Cómo es posible qué alguien siga intentado sustentar su inclusión en los currículum? La respuesta es obvia, es porque no conocen otras alternativas, y defienden lo que tienen en sus estructuras mentales haciendo en ocasiones verdaderos malabarismos intelectuales.

Sigue dedicándose a los ATOA, la mayoría del tiempo de la clase de matemáticas. ¿Por qué?, ¿para qué?, ¿qué ocurre con la resolución de problemas?

Sigue Ralston siendo benevolente cuando dice que la enseñanza del algoritmo de la raíz cuadrada era práctica frecuente hasta hace poco tiempo. En el entorno educativo que nosotros conocemos –bastante amplio- , es práctica habitual, para mala suerte de los alumnos. Y no es que el profesorado sea malo, es que nadie les ha hecho ver todavía que esas destrezas ya son inútiles desde hace décadas.

La evaluación del rendimiento escolar

Por lo general, las pruebas destinadas a medir "los rendimientos" tienen una gran cantidad de items donde sólo se piden cálculos numéricos, los cuales se deben hacer mediante los ATOA, los cuales únicamente se utilizan en los centros educativos. Estos son residuos históricos, que tenían su justificación hasta comienzos de los años 70, pero que en la actualidad son destrezas de supervivencia que sólo sirven para perpetuarse a sí mismas. El hecho de que las pizarras de las escuelas y los institutos sigan llenas de estos algoritmos tradicionales, constituye una llamada de atención urgente, sobre una reforma del sistema educativo radical y total, desde la educación infantil hasta la educación universitaria.

Debemos preguntarnos al respecto de estas pruebas, y al trabajo en la aulas, ¿qué ocurre con la resolución de problemas? El verdadero objetivo de la educación matemática. Todos conocemos personas que resuelven bien los ATOA, pero que carecen de habilidades cognitivas dentro de la resolución de problemas, entonces de qué sirve saber hacerlos.

El trabajar con la calculadora en clase y en casa, no es un indicador de que se sea menos exigente y menos duro con los alumnos**.** Todo lo contrario, permite a los profesores ser más exigentes y abordar contenidos que de no ser por la calculadora, sería prácticamente imposible hacerlo. En definitiva, el nivel no se rebaja, aumenta considerablemente.

La educación secundaria

Independientemente de que los alumnos hayan utilizado la calculadora en la enseñanza primaria, ¿cómo es posible que en la secundaria sigan haciendo ATOA?**,** ¿qué clase de educación están recibiendo?, ¿a eso se va a un instituto, a principios del siglo XXI? Cómo es posible que se siga invirtiendo tiempo de los profesores en trabajar destrezas mecánicas, con alumnos que no han sido capaces de aprenderlas durante seis años de enseñanza primaria. Y aunque las hubieran aprendido, no sé de qué les iban a servir. Para lo único que son útiles es para sobrevivir en el sistema educativo.

En primaria, hablamos de la calculadora de cuatro operaciones. Pero, en secundaria, se encuentran las calculadoras gráficas, que suponen una revolución radical en la manera de aprender. Dichas herramientas hacen posible que hoy se pueda comunicar la mejor educación matemática que alguna vez se haya podido pensar. Como consecuencia de su utilización, es innecesario dedicar tiempo en el aula a aprender manipulaciones simbólicas obsoletas que se realizan con bolígrafo y papel. Estás calculadoras han cambiado para siempre la manera de enseñar matemáticas, y también han cambiado para siempre la manera en que los estudiantes las aprenden (WAITS Y DEMANA)

Las preguntas del millón son**:** ¿qué hay que hacer para que las profesoras y profesores de secundaria aprendan a utilizarlas?, ¿a quién les corresponde enseñarles? El número de profesores que utilizan estas tecnologías en sus aulas es insignificante, todavía no ha llegado a entrar en los institutos la calculadora gráfica, y ya llega: ¡la calculadora simbólica!

La universidad y los investigadores profesionales

Generalmente, los foros de discusión sobre el fracaso de la Educación Matemática giran en torno a la educación primaria y secundaria, pero qué ocurre con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en La Universidad. En este tramo educativo el modelo imperante es, el modelo de clase tradicional, y dentro de este su máxima expresión, la lección magistral; donde el profesor es quién posee el conocimiento y el alumno no lo adquiere hasta que el profesor lo explica. ¿Por qué la utilización de calculadoras gráficas y simbólicas, sigue siendo una mera anécdota?. ¿Cuál es la formación didáctica, psicológica y pedagógica de los profesores de matemáticas universitarios?, ¿dónde se les forma en estas cuestiones?, ¿y dónde se reciclan?, ¿es qué no existen otros modelos de dar clases en la universidad, que no sean las lecciones magistrales de pizarra y tiza?, ¿se podrá aplicar el constructivismo a las clases de matemáticas universitarias?

¿Quién forma a los maestros y profesores de matemáticas de secundaria?. Si la formación de los anteriores es deficiente, ¿quién se tiene que reformar en primer lugar? ¡La Universidad!

Lamentablemente, salvando las excepciones correspondientes, el modelo de escuela primaria que los investigadores matemáticos conocen, es el que vivieron como niños cuando estaban escolarizados. Y, por lo general, es el modelo que demandan porque no conocen otro. La humanidad ha progresado, y las necesidades sociales y laborales son cada día más diversas, por lo cual la escuela de hace 20 o 30 años es una institución que no es válida en los comienzos del siglo XXI, en lo que a la aritmética y a la educación matemática se refiere.

Debemos empezar preguntándonos, si la matemática que se les pide a los estudiantes universitarios está acorde con la carrera elegida. O son conceptos desconectados de toda realidad laboral, para la que se supone se le está preparando en la universidad; o sigue siendo una enseñanza tradicional basada en algoritmos de bolígrafo y papel de funciones, límites, derivadas, integrales, matrices, etc. De los cuáles se bombardea a los alumnos universitarios durante años, sin saber bien para que sirven los conceptos matemáticos que con ellos se pretenden alcanzar. ¿Por qué hacer estos cálculos con bolígrafo y papel, si lo hacen mejor las calculadoras gráficas y simbólicas?

Un gran número de investigadores profesionales (profesores universitarios) hace gala de su gran desconocimiento de la enseñanza en la escuela primaria, lo cual es lógico, ya que existe una gran mayoría de investigadores cuyo único referente escolar proviene de su infancia y siguen pensando que las cosas son como ellos las conocieron entonces. Algunos, incluso, publican estudios y libros sobre didáctica de las matemáticas en la escuela, basándose en pruebas escritas pasadas a los niños y en la observación del trabajo de aula durante algunas semanas, como si eso fuera suficiente para hacer conclusiones y generalizaciones. En ocasiones, dichas publicaciones no ayudan a mejorar la práctica escolar, puesto que lo que marca la pauta es la publicación o el currículum personal del investigador para poder progresar en la carrera docente universitaria.

El profesorado universitario que forma profesores de matemáticas, desconoce la realidad escolar con la que se van a encontrar los futuros maestros. El formador de docentes debe compartir la enseñanza universitaria con la enseñanza en los tramos educativos para los que forma profesionales.

La gran mayoría de los profesores universitarios y de secundaria que se oponen a la utilización de la calculadora aritmética, gráfica o simbólica; carecen de formación didáctica en estas herramientas. Por lo tanto, lo que hacen es justificar su ignorancia en estos temas, la cual es superada por la mía en el uso de las calculadoras gráficas y simbólicas. Pero, no hay que dejar de reconocer, que estas herramientas suponen una revolución psicodidáctica. Hay que admirar, y alentar a los profesores universitarios y de secundaria – una minoría -, que llevan años intentando enseñar a alumnas y alumnos y compañeros profesores el manejo de estas tecnologías.

Propuestas de cambio

1. Se deben suprimir de una manera radical e inmediata los ATOA de los centros educativos, y fomentar el descubrimiento y puesta en común de algoritmos personales y más operativos.

El uso de la calculadora, por sí solo, no constituye una panacea para hacer una construcción adecuada del conocimiento lógico-matemático en los alumnos. Es una herramienta más, pero con "infinitas" posibilidades. Los materiales manipulativos son imprescindibles para formar una buena inteligencia matemática en las personas. Hay conceptos que si no es gracias a los materiales, son de muy difícil o nula comprensión.

Estamos de acuerdo en hacer multiplicaciones de dos números, para desarrollar el cálculo mental (CM), pero nunca utilizando los ATOA. Una alternativa, empezando de izquierda a derecha, puede ser:

x 45= 800+100+120+15=1.035

2. Hay también que hacer una reconfiguración radical de métodos y programas de enseñanza desde la educación infantil hasta la universidad.

¿Están los profesores de la escuela primaria listos para tal currículo?. Debemos mentalizarnos todas las personas que intervenimos en la educación, que los males de enseñanza se deben a muchos factores. No exclusivamente a la formación de los maestros.

Planteamos también, ¿están los profesores de secundaria y universitarios preparados para un currículo basado en el CM , las calculadoras y la resolución de problemas. Por supuesto que no, los que están son una mínima expresión.

Si la preparación de los maestros ha sido lamentable, tendríamos que preguntarnos: ¿quién los preparó?. La respuesta es, la universidad. Por lo tanto, el principal tramo educativo que necesita una reforma radical en cuánto a métodos y formas de enseñar, es el universitario. Sin embargo, es el que menos se reforma y más se resiste a los cambios.

La matematofobia de muchos docentes se debe a que aprendimos en un sistema donde lo importante era hacer algoritmos, para poder sobrevivir en el sistema educativo. Aunque no se supiera bien para que servían, incluso por parte de algunos profesores.

Los maestros que están preparados para abordar un currículo diferentes, basado en las calculadoras y el CM son pocos, al igual que los de secundaria y universidad. Es necesario una formación permanente y obligatoria. Pero, ¿quién la va a dar?, ¿la universidad?. Ya sabemos que la formación inicial de los profesores es muy deficiente y desconectada de la realidad educativa, y quien los formó fue la universidad. Por lo tanto, si la formación permanente del profesorado va a estar exclusivamente en sus manos, nos aventuramos a pronosticar que los cambios no serán notables, seguiremos igual que siempre. Hace décadas que la universidad, por lo general, no da respuestas claras a los problemas que presenta la educación.

3. Se necesita hacer una revisión profunda de las especialidades que intervienen en la educación primaria. Ya que, tal vez, no estén todas la especialidades que deberían haber, y también sobre alguna que actualmente está.

Conclusión

Algunos investigadores, ya han aportado datos concretos y muy positivos sobre el uso de la calculadora en la escuela infantil y primaria. Estas investigaciones pretenden incrementar la conciencia de los profesores sobre sus "implicaciones educativas", para influir sobre la puesta en práctica de cambios estructurales, tanto en las escuelas como en el sistema educativo. (Elliot,1997).

En definitiva, los algoritmos tradicionales de las cuatro operaciones aritméticas: ¡Han muerto, y deben ser enterrados! No son útiles en siglo XXI. Son parte de la historia de la psicopedagogía. ¡Vivan los algoritmos que desarrollan el cálculo mental y las calculadoras!

Bibliografía

Actas de las I Jornadas de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas “Isaac Newton”: “El uso de la calculadora en el aula”. Tenerife (Bajamar) . Mayo 1979

Álvarez, M. (2003) : “La calculadora en el primer ciclo de primaria”. Galicia. Artículo sin publicar

Elliot, J. (1997): “La investigación-acción en educación”. Morata. Madrid (3ª edición)

Fielker, D. (1986): “Usando las calculadoras”. Generalitat Valenciana. Valencia

Guzmán Rojas, I (1979).: “Niño. Vs. Número”. Khana Cruz Srl . La Paz . Bolivia

Martín Adrián, A.R (2000). “Taller sobre la calculadora en Educación Primaria”. Pro-manuscripto. Canarias.

Martín Adrián, A.R. (1999). “El futuro de la Educación Matemática después de la Reforma educativa”. Promanuscripto. Canarias.

Ralston, A. “Por la abolición de las matemáticas de lápiz y papel”. Pro manuscripto. Internet. London

* Para más información ver: “El papel de la computadora portátil. El álgebra simbólica en la Educación Matemática en el siglo XXI: ¡Un llamado para la acción! De Bert K. Waits y Franklin Demana en WWW.ti.com/calc/spain/articulobertwaits.htm

Geometria.cl:
curso interactivo para profesores de enseñanza secundaria

Diseño de la experiencia y sus principales resultados

Fidel Oteiza Morra, Manuel Galaz y Juan Silva Quiroz
foteiza@comenius.usach.cl, mgalaz@comenius.usach.cl, jsilva@comenius.usach.cl
Universidad de Santiago de Chile, Centro Comenius

Resumen
La formación docente a través de modalidades a distancia e-learning o b-learning, se extiende rápidamente, en la medida que los docentes se alfabetizan digitalmente y tienen acceso a las tecnologías de la información y comunicación (TIC) en sus hogares y establecimientos. Estas instancias formativas permiten a los docentes actualizarse en conocimientos curriculares, conocer como integrar curricularmente las TIC y vivenciar enfoques metodológicos basados en el aprendizaje colaborativo y la construcción de conocimiento en red. Este artículo presenta la experiencia "Geometría.cl: Aprender Geometría Creando Soluciones", un curso con cobertura nacional en la modalidades e-learning y b-learning dirigido a docentes de enseñanza secundaria, financiado por el Ministerio de Educación de Chile. Se presenta el diseño pedagógico del curso y su implementación en la plataforma Moodle, los principales resultados obtenidos en su ejecución y las conclusiones que pueden servir de base para desarrollos futuros.

Palabras clave
Enseñanza y aprendizaje de geometría, procesador geométrico, formación a distancia, formación continua de docentes.

1. Introducción

"Geometría.cl: Aprender Geometría Creando Soluciones", es un curso en la modalidad a distancia para la actualización docente, con cobertura nacional y financiado por el Ministerio de Educación de Chile a través del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP) y desarrollado por COMENIUS Centro para el desarrollo de innovaciones en educación de la Universidad de Santiago de Chile. El Ministerio de Educación ha detectado falencias en la formación de estos docentes, las cuales se reflejan en los pobres resultados en la PSU, por lo cual este curso busca convertirse en una herramienta eficaz para la actualización docente en este ámbito. Es un curso pensado para enseñar geometría de la forma como se espera que los docentes enseñen a sus alumnos, entregando por lo tanto no sólo el aprendizaje de los contenidos, sino que un método de trabajo que considera material concreto, guías y lecturas. Incorpora la tecnología en dos sentidos amplios: en primer lugar, se desarrolla bajo Internet en modalidad BlendenLearning, lo que requiere familiarizarse con las TIC, y en segundo lugar, usa recursos tecnológicos como procesadores geométricos, páginas web, software de geometría y Applets diseñados especialmente para el curso.

El desarrollo e implementación de la experiencia contempló entre otros: el proceso de inscripción y matricula, la selección y formación de tutores, el diseño pedagógico del curso; el diseño e implementación del curso en la plataforma Moodle; generación de diversos recursos de apoyo a los contenidos; la aplicación de un Pre y Post Tests además de evaluaciones *online*. La metodología de trabajo situó al docente en el centro del aprendizaje, como una aprendiz que define en forma autónoma su camino de aprendizaje. En este contexto el participante construyendo conocimiento a través de la interacción con: los materiales, el tutor y los compañeros.

Este artículo presenta el diseño pedagógico del curso y su implementación en la plataforma, además de los resultados en la ejecución. El balance es altamente positivo, el cual se manifiesta en los avances de los aprendizajes que se reflejan en diferencias positivas entre el PreTest y PostTest, una alta valoración de los participantes respecto a los contenidos y actividades, los recursos propuestos, las estrategias de enseñanza, la metodología de trabajo implementada, así como del uso de la plataforma y el rol del tutor.

2. El modelo pedagógico, las decisiones iniciales

¿Cómo enseñar geometría a distancia?, ¿cómo enseñar geometría y a la vez, facilitar la transferencia de lo aprendido al aula y potenciar, en los educadores participantes, el uso de las tecnologías en la enseñanza? Los aprendizajes en matemática son bajos, sea que se los mida con pruebas nacionales como el Simce o la PSU[1], o con estándares internacionales como los que fijó el Tercer Estudio Internacional, TIMSS o la prueba denominada PISA[2]. Y, en ese contexto, los resultados de geometría son aún más bajos. Es común que las unidades de geometría se traten, cuando eso se hace, hacia el final del año académico. En esta oportunidad se propuso un curso de geometría y acercar su tratamiento didáctico con tecnologías digitales a docentes de la educación secundaria, cuya formación en la especialidad es considerada muy insuficiente.

De los antecedentes que manejaba el equipo como ejecutor del proyecto Enlaces[3], era sabido que tanto el acceso y como el dominio de las tecnologías, por parte de los docentes, pese a ser un logro importante de la educación nacional, tiene serias limitaciones. La experiencia con docentes en todo el país, nos hizo, además, estar plenamente conscientes de las limitaciones de tiempo que tiene el docente en Chile.

Diseñar es tomar decisiones considerando objetivos, condiciones, limitaciones y posibilidades. ¿Cómo conjugar los recursos para ofrecerles, a los participantes, conocimiento en geometría, en didáctica y en uso de las tecnologías?

2.1 Las decisiones iniciales

Como aproximación didáctica se hizo uso del “**Modelo Interactivo para el aprendizaje Matemático**[4]” que se puede resumir diciendo que el participante tiene la oportunidad de conocer y trabajar acerca e las **preguntas y desafíos que dieron origen al conocimiento**, incluidos elementos históricos, aplicaciones y problemas que el conocimiento por aprender resuelve. Luego, puede **explorar** ese conocimiento, en la búsqueda de conjeturas o preconceptos que luego le permitan acceder al conocimiento formalizado en la literatura.

Para lograrlo se hizo uso de instrumentos y recursos, tales como: regla, compás, appletts interactivos, visualizaciones, objetos de uso cotidiano, software de geometría, los cuales se pensó serían funcionales para crear situaciones interesantes, a la vez que fácilmente transferibles al aula. Los

---

1. SIMCE, Prueba que evalúa los aprendizajes de estudiantes en niveles elegidos del Sistema Nacional y PSU, prueba, también de carácter nacional, que utiliza el sistema universitario para seleccionar alumnos.
2. TIMSS, es el tercer estudio internacional en ciencia y matemática y PISA, prueba internacional de la OECD: http://www.ince.mec.es/pub/pisa.htm.
3. Enlaces, proyecto nacional para la incorporación de las tecnologías de la información en la educación. El Centro en que se desarrolló este curso es “Centro Zonal” de ese proyecto, lo que le ha permitido capacitar a más de 20 000 profesores en el uso pedagógico de esas tecnologías por un periodo de diez años.
4. “Aprender Matemática Creando Soluciones”, proyecto Fondef N° DOOI 1073, financiado por la Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología, CONICYT.

participantes luego de interactuar en foros y discusiones guiadas por un tutor, tuvieron la oportunidad de **formalizar** lo explorado y poner a prueba sus ideas. Los hallazgos y conjeturas de la exploración se formalizan a través de una presentación más rigurosa del conocimiento matemático que está en el trasfondo. Esta presentación formal está hecha de un modo “amable” y siguiendo de cerca los resultados de la exploración, de modo de que se produzca una transición natural de la idea intuitiva hacia la forma en que lo dirían los matemáticos. El modelo culmina con una etapa de “**cierre”**, que busca una versión “en limpio” y sintética de lo aprendido para luego ejercitar y aplicar lo aprendido. El cierre se complementa con desafíos y una evaluación formativa con feedback inmediato para el participante.

Se dejó abierta las posibilidades para profundizar y seguir aprendiendo acerca del tema. Las actividades de cierre estuvieron destinadas a ordenar los aprendizajes, a ponerlos en el contexto de la Matemática, de analizar los alcances y limitaciones de los modelos, así como su generalización y sistematización. Es también el momento de graficar relaciones entre lo aprendido y otros aspectos de la Matemática. También se trata de precisar las preguntas que quedan abiertas para nuevas visitas a los conceptos y modelos estudiados.

Esa forma de aproximarse a la enseñanza de la geometría se acerca mucho a la propuesta didáctica de los esposos Van Hiele (1984), que sugieren la existencia de cuatro niveles de acercamiento al conocimiento geométrico. El primero de esos niveles en consecuente con la fase exploratoria del modelo elegido ya mencionado; la propuesta de los Van Hiele sigue con una fase de encuentro con las relaciones entre los objetos geométricos aprendidos – que coincide con la búsqueda de conjeturas del modelo interactivo - y culmina con dos fases destinadas a la formalización del conocimiento, la última de las cuales es la comprensión de la naturaleza axiomático – deductiva de una teoría matemática. El curso que nos ocupa, se centró en las tres primeras, entregando algunos elementos – principalmente lecturas y algunas demostraciones - para que los docentes tengan una noción inicial de la fase más rigurosa con que culmina el enfoque de los Van Hiele.

Un aspecto significativo del diseño se refiere a la forma de abordar la “transferencia al aula”, esto es, la intención de que lo aprendido por los docentes tenga impacto en sus alumnos. Se decidió acompañar las actividades con instrumentos para que los docentes pudiesen, de una parte, realizar lo propuesto y, de otra, realizar con sus alumnos las mismas actividades. De ese modo, el curso “llevaría la didáctica en sí mismo” y la haría transferible al aula. Para el objetivo acerca de las tecnologías informáticas y enseñanza se usó una estrategia similar. El curso mismo es una aplicación de las tecnologías a la enseñanza y, además, se proveyó a los estudiantes con recursos interactivos para “visualizar” y explorar los conceptos geométricos en estudio. Adicionalmente, se hace uso de software especialmente diseñado para la geometría: “GeoGebra”, fue el elegido por ser de código abierto y de libre disposición. Esta forma de actuar remite a una política desarrollada por el equipo autor del curso: entregar conocimientos con los instrumentos para ponerlo en práctica en la sala de clases.

Otra decisión importante guarda relación con la contextualización de las nociones geométricas. En efecto, se decidió usar el poder de las imágenes, del color y de la capacidad expresiva de la pantalla del computador y de los ambientes HTML. El lector puede apreciar lo realizado en este sentido si visita la plataforma o si abre el CD de recursos. Guías, Applets, Material de referencia, Lecturas y actividades se presentan con imágenes que le dan un contexto a las formas geométricas. Un establecimiento usó el material para generar posters y colocarlos en los muros de las salas de clases.

La contextualización fue base para darle un formato a lo que llamamos “***material de referencia***”. Un documento en que se presentan las definiciones y principales relaciones y teoremas. Cada vez se buscó una imagen que sirviese de soporte a la o las nociones que el material presenta. Se lo puede conceptuar como un glosario por orden de aparición.

La metodología de trabajo está basada en una concepción constructiva del conocimiento, en la que los docentes participantes del curso, tutores y equipo pedagógico, constituyen una comunidad de aprendizaje. En esta comunidad las contribuciones, hallazgos y propuestas de todos, cuentan y tienen un lugar en las interacciones que permite la plataforma tecnológica y en las etapas de desarrollo de las actividades, las evaluaciones formativas y las evaluaciones sumativas y final. Se trata de una modalidad interactiva, centrada en el aprendizaje de la Geometría elemental, que por su naturaleza, facilita su trasposición al aula y al uso de las tecnologías en la enseñanza de la Geometría.

2.2 Estructura del curso y contenidos

El curso se estructura en cuatro unidades temáticas a distancia y tres sesiones presenciales. De las cuatro unidades temáticas, una corresponde al uso de la plataforma donde se desarrolla el curso- Moodle- y las otras tres corresponden a los contenidos del curso: congruencia de figuras planas, semejanza de figuras planas y transformaciones isométricas. Las presenciales son tres y de ellas la última es obligatoria. La *Primera sesión presencial:* Conocimiento del tutor y los compañeros, aplicación de Pre-test, exploración de la plataforma, presentación de la primera unidad y su evaluación*;* la *Segunda sesión presencial:* análisis de la experiencia y aprendizajes logrados en la unidad I, aspectos problemáticos o dudas respecto a la plataforma presentación de las unidades 2 y 3 y su evaluación; la *Tercera sesión presencial*. Evaluación general de la experiencia y aplicación del Post-Test.

El curso se organizó en torno a tres unidades que tienen la misma estructura (véase la figura 1). El eje organizador de una unidad es el conjunto de actividades. La figura siguiente muestra la estructura de una unidad de enseñanza, compuesta por una entrada, un conjunto de actividades y una evaluación de salida.

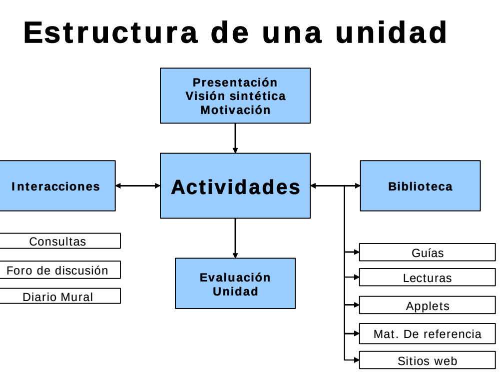


Figura 1.

3. Los recursos de aprendizaje y sus características

Geometría.cl dispuso de un conjunto de recursos de aprendizaje con el propósito de facilitar que docentes de enseñanza media abordaran las Unidades de Congruencia de figuras planas, Semejanza de figuras planas y Transformaciones Isométricas a partir de la visión de enseñanza y aprendizaje de la matemática que promueve el Modelo Interactivo. Lo señalado, desde la perspectiva del contenido, de la metodología, de la didáctica, de la innovación y de las TIC.

A continuación se describen los recursos de aprendizaje utilizados en *Geometría.cl:*

Guía de aprendizaje: recurso pedagógico diseñado para ser impreso, que contiene un conjunto de acciones que permiten el aprendizaje de la geometría. Dichas acciones intencionan la construcción, exploración o estudio de las características de figuras geométricas y sus propiedades, así como también algunos teoremas. Esto, a través del uso de recursos tradicionales como regla y compás, recursos manipulables o la interacción con un procesador geométrico, applets, animaciones, etc.

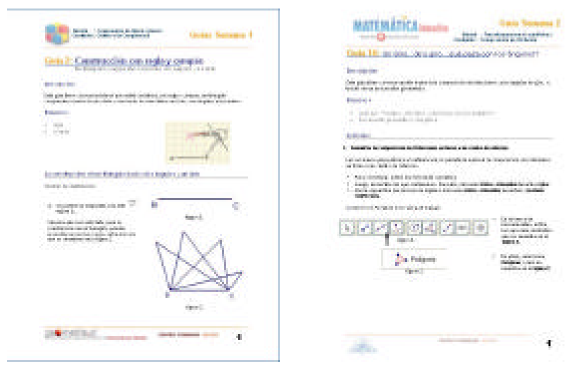


Figura 2.

Lectura: recurso pedagógico diseñado para ser impreso, que contiene un breve artículo sobre ideas o temas alusivas a la geometría en distintos contextos. Su finalidad es promover la reflexión y discusión sobre dichas ideas o temas en los espacios de interacción que se dispongan.

Figura .3

Applet: recurso pedagógico digital construido en un procesador geométrico, que permite la exploración y visualización de figuras geométricas, sus propiedades y teoremas, a través de la interacción dinámica con sus elementos constitutivos. Su funcionamiento es por medio de un navegador de Internet.

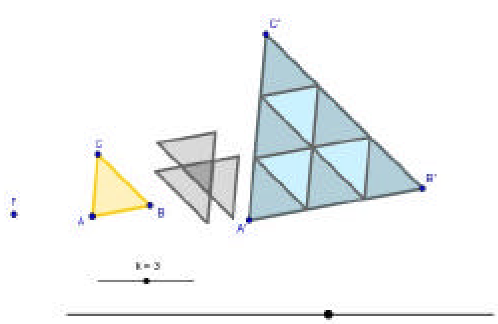


Figura 4.

Sitios Web: Conjunto de direcciones URL de Internet que permiten el acceso a material adicional, que en su conjunto son de utilidad pedagógica para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría. Estos sitios web son recomendados para la investigación y estudio de de la Geometría, la que es abordada desde distintas perspectivas. Además, se espera que este listado sea la génesis del inventario de direcciones web educativas para el trabajo con alumnos.

Figura 5.

Animación en flash: aplicación digital cuya finalidad es promover la visualización geométrica mostrando, de manera dinámica, un conjunto de imágenes de la naturaleza y entorno humano. En estas imágenes se destacan y realzan las formas geométricas de los elementos constitutivos de los objetos que son presentados. De esta manera, se intenciona la apropiación intuitiva de la geometría por medio de la exploración y visualización de elementos geométricos en contexto.

Figura 6.

Geogebra: software educativo de libre disposición (http://www.geogebra.at), perteneciente a la categoría de procesador geométrico, cuyo fin es permitir la construcción, exploración y visualización de formas geométricas euclidianas en forma interactiva y dinámica.

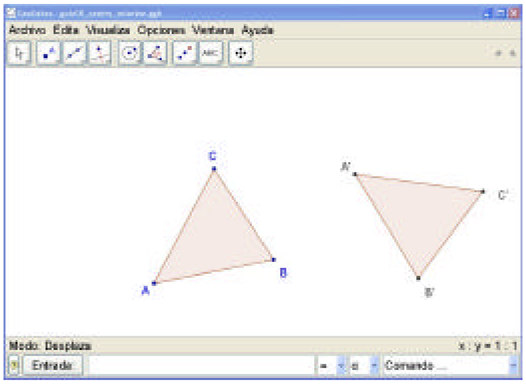


Figura 7.

Material de referencia: es un material de consulta sobre los contenidos de las Unidades del curso presentados de manera formal. Aquí se encuentran las definiciones, propiedades y demostraciones geométricas respectivas. Este material es facilitado en soporte papel y digital.

Figura 8.

En la siguiente tabla, se dan a conocer la cantidad de recursos de aprendizaje descritos anteriormente.

Tabla 1. Recursos de aprendizaje utilizados en el curso Geometría.cl-media.

Tipo de Recurso	**Unidad I**	**Unidad II**	**Unidad III**	**Geometría.cl**
Guías de aprendizaje	27	27	30	84
Lecturas	4	3	4	11
Applets	25	45	36	106
Sitios Web	5	1	7	13
Animaciones Flash	2	3	8	13
Software	1	-	-	1
Utilitarios	1	-	-	1
Material de Referencia	1	1	1	3

Toral recursos	66	79	86	232

Estos recursos de aprendizaje son puestos en acción a través de actividades diarias que intencionan en su conjunto una sinergia didáctica que apunta a mostrar una forma de posibilitar el aprendizaje de la Geometría. Esto por medio de la interacción dinámica y complementaría de recursos tradicionales y digitales con el que aprende.

Esta interacción tiene como base la visualización y la construcción geométrica. La intención inicial es desde la perspectiva del contexto y la cotidianeidad, a través de imágenes presentadas en animaciones flash, applets y lecturas afines, las que en su conjunto con acciones específicas promueven una forma de actuar que permite el desarrollo de la intuición geométrica para abordar definiciones y propiedades. También, dicha interacción promueve la construcción geométrica, intencionada a través del trabajo complementario de guías de aprendizaje, que utilizan recursos tradicionales como regla y compás, y applets que permiten la comprobación de dichas construcciones a través de la visualización.

De manera opcional, algunas construcciones geométricas se propone realizarlas en el procesador geométrico Geogebra, cuyos pasos son entregados en un guía de aprendizaje. La idea es que los docentes adquieran competencias en el uso pedagógico de este recurso para la exploración de propiedades geométricas a través de la visualización.

La interacción también aborda el estudio de algunas las demostraciones geométricas, las que son trabajadas con un applet y la demostración deductiva en papel. La propuesta apunta a constituir una triangulación entre recurso digital, demostración formal y el que aprende. El applet muestra la construcción geométrica y dinámica de la demostración, la que debe ser seguida por los pasos que señala la demostración formal. El que aprende podrá volver a la etapa inicial y recorrer la demostración las veces que desee. La idea de la propuesta es mostrar una forma que permita la comprensión visual de una demostración deductiva en Geometría.

La evaluación es abordada no solamente desde los tradicionales instrumentos como un test de selección múltiple, sino que además desde la elaboración de productos en Geogebra y el desarrollo de desafíos en los cuales se aplica el conocimiento adquirido y la verbalización matemática a través de foros temáticos.

En definitiva, los recursos de aprendizaje fueron elaborados para permitir que los docentes adquieran criterios y herramientas didácticas necesarias para la planificación e implementación de actividades pedagógicas relacionadas con los contenidos del eje temático de geometría. Además, adquieran formas de implementación pedagógica en donde se articule material concreto, procesador geométrico, material digital y guías de aprendizaje para trabajar en la sala de computación y sala de clases, y finalmente conozcan una propuesta que les permita trabajar la geometría desde la intuición y el contexto, pasando por la exploración y formalización de propiedades, para terminar con formas complementarias de evaluación de aprendizajes.

4. El curso en la plataforma

El curso en la plataforma se estructura con diversos elementos que buscan dar vida al modelo pedagógico del curso el cual se sitúa en la epistemología constructivista, en el cual el participante es constructor de su propio conocimiento. Esta construcción se logra en la apuesta del curso a través de dos vías una de carácter individual y otra de carácter social.

En el primer aspecto se pone a disposición de los estudiantes diversos materiales relacionados con los contenidos del curso, en el segundo se hace uso de diversas herramientas asíncronas para lograr interacción entre los participantes y entre éstos y el tutor.

Figura 9

En general una plataforma de formación a distancia, en la perspectiva de la interacción y en el contexto de una comunidad de aprendizaje, debería ser ante todo, transparente, amigable, de fácil acceso, y contar con los siguientes espacios (Peréz, 2004) los que se señala como se abordaron: de *comunicación pedagógica* para las actividades de aprendizaje basadas en la interacción en nuestro caso *foro de discusión, foro consultas* (permite a los participantes plantear preguntas relacionadas con los contenidos, y las actividades) y *Diario Mural* (espacio para compartir recursos pertinentes para el trabajo en los contenidos); de *comunicación social* para el intercambio de mensajes personales y grupales en nuestro caso *foro social*; de *tutoría* para la comunicación personal y grupal *Diálogos Tutor-Participante*, y de *ayuda técnica* para la solución a problemas técnicos u organizativos se contó con foro *Dudas técnicas y uso de la plataforma*

Organización del tiempo de participante. Este fue un elemento que consideramos importante a la hora de evaluar las variables que influyeron en los resultados. La administración del tiempo es crucial, se diseñó una modalidad que cumple con dos funciones importantes. De un lado es flexible, permite que los participantes adecuen su trabajo a la disponibilidad de tiempo y de acceso a Internet y de otra, lo mantiene informado de su "posición" en la agenda del curso. Para lograrlo, se hizo calzar una unidad con un mes; cada mes o unidad se organizó en cuatro semanas y, cada semana, en cinco días en los que se dispuso de una sesión de 1 hora y media. Del mismo modo que con el Mouse de un computador actuamos sobre un rectángulo o pantalla virtual, el docente, al estar en una "actividad" de un "día" perteneciente a una "semana" de la agenda del curso, supo de su posición y pudo realizar las actividades cuando sus condiciones e lo permitieron.

Figura 10.

Esta estructura de día y semana responde a lo planteado por Barberà y Badia (2004) en el sentido de presentar en forma clara la organización de las actividades y que se articulen a través de ellas el acceso a los diferentes recursos.

5. Resultados

Los principales resultados del curso, se han obtenido a través de los diferentes sistemas de registro de información como: la aplicación del Pre y Post Test, la asistencias a las presenciales, y los datos obtenidos de la plataforma.

5.1 Los docentes participantes

El número total de docentes inscritos llegó a 1.222, de ellos 779 es decir un 63,7 se formaliza el proceso de matricula, el costo asociado al curso es US 27 para los establecimientos subvencionados:

* Un 43,6 %, son mujeres y un 56,4 %, son hombres.
* Un 30,3 % de ellos se concentra en la región donde ubica la capital del país.
* Un 33,6% tienen edades entre los entre 45 y 54 años y un 26,7% corresponde al grupo de docentes cuyas edades fluctúan entre 35 y 44 años. Es decir que el 60,3 posee sobre 35 años.
* Los docentes pertenecen en un 94,1% a establecimientos con apoyo estatal, un 51,9% particulares subvencionados (cofinanciamiento) y un 39,8% colegios municipalizados (fiannciamiento estatal)
* Del total de matriculados un 99,1% siguió el conducto regular, existiendo un 0,9 % de docentes que no siguió las etapas formales del proceso y que fue matriculado.
* Un 50,/% señala no contar con experiencia en cursos de formación a distancia vía Internet, en tanto un 48,1 % reporta tener experiencia sobre formación a través de Internet.

5.2 Configuración de cursos

Los docentes matriculaos fueron asignados a sus respectivos cursos, los que fueron configurados, atendiendo a la cantidad de docentes matriculados según su procedencia regional, existiendo tres modalidades de cursos. Las modalidades se organizaron de acuerdo a los siguientes criterios:

1. Normal: Curso a realizar en la modalidad original con clases presenciales más trabajo virtual.
2. Virtual: Curso realizado sólo en modalidad a distancia.
3. Mixto: Curso conformado por un porcentaje de docentes que sólo harán trabajo virtual y otro porcentaje que realizará trabajo presencial y virtual.

Se organizaron 18 cursos normales, un 75% del total de cursos, un 12,5% cursos virtuales, y 12,5% de cursos mixtos.

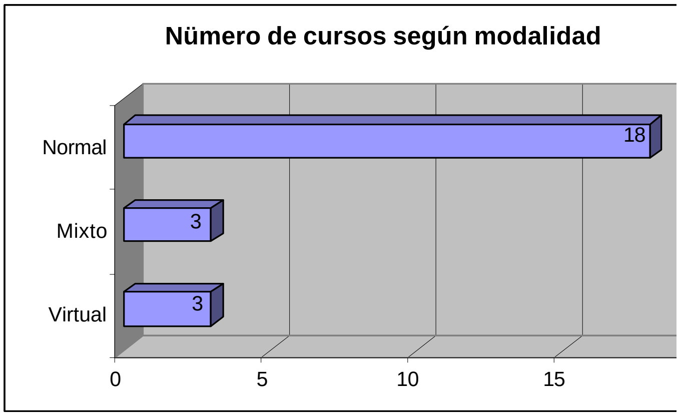


Tabla 2.

Respecto a la modalidad de lo cursos 562 docentes un 72,1% participan en cursos presenciales, 108 docentes un 13,8 % lo hacen en la modalidad mixta y 109 profesionales un 13,9 % participaron en cursos en la modalidad virtual.

Los resultados indican que cualquiera sea la modalidad del curso, los docentes asumieron su desarrollo con normalidad.

5.3 Participación en las sesiones presenciales

Las sesiones presenciales son instancias privilegiadas para presentar el curso, socializar el grupo y despejar dudas. Para el desarrollo de estas presenciales se entrego al tutor una planificación a seguir con las actividades a desarrollar y recursos digitales como presentación para su apoyo.

A las sesiones presenciales fueron convocados **621** participantes a la primera acuden **515** un 82,9%. Se observa una diferencia entre la asistencia a la primera presencial y la última de 99 participantes lo que representa un 80,8 %, de mantención de la asistencia a la presencial 3, respecto a la primera presencial.

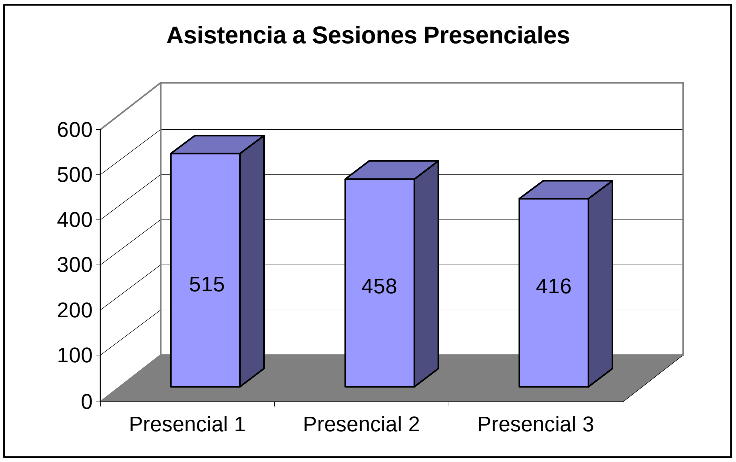


Tabla 3.

Existe un alto nivel de retención entre la primera y la última presencial, la asistencia a la primera presencia, así como el hecho de rendir la primera evaluación online marcan un compromiso concreto con desarrollar el curso.

5.4 Evaluaciones Pre y Pos Test

En la primera sesión presencial se aplicó un pretest y en la tercera un post test. Los resultados muestran importantes resultados en términos de aprendizaje.

Se observa una ganancia de un 25% entre el pre y pos test. Se produce la mayor ganancia en la unidad 2: semejanza de figuras planas (31,8%) y la menor en la unidad I: Congruencias de figuras planas (18,3%).

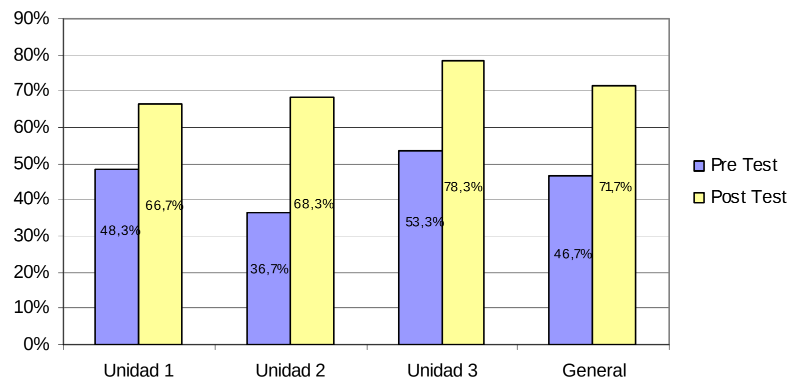


Tabla 4.

En una experiencia realizada los años 2004 y 2005 para enseñar geometría con profesores de enseñanza básica al comparar los resultados del pre y post test se observan un porcentaje de aprendizaje similar al obtenido en este curso (Silva 2006).

5.5 Evaluaciones online

Cada unidad finaliza con una evaluación sumativa compuesta por un conjunto de preguntas con alternativas, existe una semana aproximadamente para responderla y luego de ella el participante puede revisar la prueba desplegándose sus respuestas y las correctas. El promedio general de logro alcanza al 91,7%. Estando en todas las unidades por sobre el 90%.

Al comparar las evaluaciones sumativas online con el pre y post test. Se observa que el mejor logro se alcanza en la Unidad II con 93,3%. En las tres unidades se observa una ganancia respecto al Pretest que es significativa. Se observa el mismo fenómeno del postest en términos que la unidad con más avance es la unidad II “Semejanza de figuras planas”.

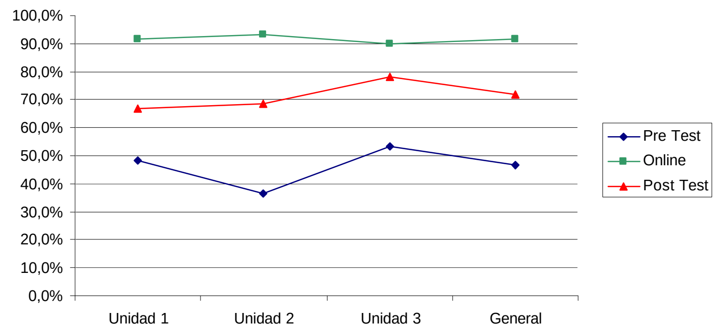


Tabla 5.

Estas evaluaciones Sumativas fueron respondidas por 619 participantes en el caso de la Unidad I, 575 en el caso de la Unidad II y 537 para la Unidad III. Los que rinden la Evaluación III, alcanza a un 86,75 % de los que rinden la Evaluación I.

5.6 Transferencia al aula

El portafolio consistió en una planificación de actividades, cuyo propósito principal fue la transferencia al aula de algún contenido de una de las unidades del curso y sus respectivos materiales y un breve informe sobre los resultados de la puesta en práctica de la experiencia. La evaluación del portafolio corresponde a un 10% de la nota final del curso, ésta se divide en dos tareas que se entregaron vía plataforma, ambos entregados como tareas en el curso y evaluados por el Tutor, se facilitó para tal efecto en la plataforma plantillas en Microsoft Word para escribir la planificación y el informe.

A nivel general y respecto a los 621 docentes que rinden la primera sumativa un 72,5% de los participantes entrega la planificación y 71,5%. Si los porcentajes los comparamos la cantidad de participantes que entregan el portafolio con los participantes que rinden la prueba final (530) estos porcentajes serían 84,9% para la planificación y 83,8% para el informe. Lo que indicaría que un alto porcentaje planificó y aplicó una actividad de transferencia concreta. La evaluación promedio para el informe y la transferencia refleja un 95% de logro.

5.7 Participación en espacios interactivos

Los espacios permanentes son un conjunto de herramientas principalmente foros que están disponible para el uso por parte de los participantes a lo largo de todo el curso, esta sección no se modifica y es la primera que aparece en la estructura online del curso.

Se registra un total de 1.438 temas abiertos en estos espacios[5], la mayor parte de ellos el 50,3 % en el foro Novedades que corresponden a noticias publicadas por las Tutoras y los Tutores en cada uno de los cursos con un promedio de 30,1 por curso, 485 intervenciones en el Foro Social con un 33,7 % con un promedio de 20.2 por curso y un 16,0 % a dudas técnicas con un promedio de 9,6.

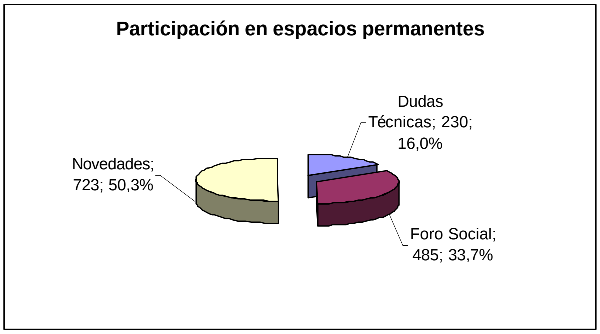


Figura 11

La participación en los espacios interactivos sigue tendencias similares en cada unidad, que posteriormente se reflejan en el global de las tres unidades, en este sentido global.

Se observa que el foro de discusión concentra un poco más de la mitad de las intervenciones con un 52,53 %, seguido del foro diario mural con un 39,05 % y el foro consultas 8,42 %.

[5] Se consideran en elementos permanentes sólo los temas propuestos no se dimensiona las respuestas.

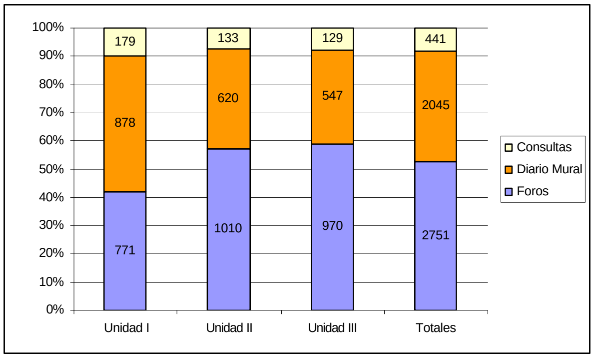


Tabla 6.

El *foro de discusión* En cada una de las Unidades se generó un foro de discusión, el tema a debatir y su posible animación se envío a los tutores a través de la comunidad de tutores. Los temas planteados para los foros en orden de las unidades fueron: “¿Por qué enseñar geometría?”, “Uso de recursos tecnológicos en el aula” y “¿cómo enseñar geometría?”, de las 2.751 intervenciones un 28% se registran en las unidad I y en las unidades II y III 36,7% y 35,3% respectivamente.

Consultas La participación en este espacio registra un total de 441 consultas realizadas por los participantes. Del total de consultas 40,59% (179) se realizaron en la primera unidad, un 30,16% (133 consultas) en la unidad II y un 29,25% (129 intervenciones) en la unidad III. Se observa, al igual que en experiencias anteriores una escaso uso de este espacio por parte de los docentes en relación al foro de discusión y el diario mural.

El Diario Mural es un espacio para compartir, recursos que puedan ser de utilidad para el trabajo en los contenidos planteados. Para organizar la participación en este espacio, se pide indicar n**ombre del recurso**, **señalar los contenidos que se tratan** y si es posible **la forma de uso pedagógico** a partir del uso que el docente le ha dado o el que se imaginó podría ser un buen uso. La participación en este espacio registra un total de **2.045** aportes. La cantidad de aportes fue decreciendo a medida que avanzaban las unidades, en la Primera Unidad se registraron un total de 878 aportes un 42,93%, en la Unidad II 620 con un 30,32% y en la última unidad solo 547 aportes que equivalen a un 26,75%

5.8 Retención y aprobación

El curso contó con un total 779 matriculados. La cantidad de docentes que se han mantenido activos en el curso es altamente positiva de los 779 matriculados inicialmente 621, es decir *79,7%* contestaron la evaluación sumativa I; de ellos, 530 rindieron la prueba final, lo que refleja un *85,3%* de retención, respecto a los que rindieron la evaluación I que pueden considerarse efectivamente participantes del curso.

Aprueban el curso 460 docentes un 86,8% de los que lo finalizan. Adicionalmente un promedio de 593 participantes se conectan semanalmente al curso lo cual equivale al 95,5% de los participantes.

6. Conclusiones

Alto interés por participar en el curso: El interés demostrado por los docentes para perfeccionarse en Geometría ha quedado plasmado en los altos números de inscritos y de matriculados, lo cual confirma la necesidad percibida de capacitar en esta área. Recordemos que se alcanzó a 1.222 inscritos y un total de 779 participantes matriculados, éstos corresponden al 63,7% de los inscritos.

Alumnos activos: La cantidad de alumnos que se han mantenido activos en el curso es altamente positiva de los 779 matriculados 621 dieron la evaluación sumativa de la unidad I, un 79,7% de retención inicial, y entre esta y los que rinden la evaluación final se produce un nivel de retención de 85,3% participantes.

Valoración de los contenidos: Los contenidos del curso y los diversos recursos que este provee han sido valorados por los participantes, debido a su calidad, contextualización y la factibilidad que ellos los puedan usar y transferir al trabajo en el aula. Las animaciones Flash con imágenes de contextos cotidianos donde s puede ver en acción los objetos geométricos, las aplicaciones Applets han sido dentro de este conjunto las más novedosas, pues simulan construcciones geométricas.

Los encuentros presenciales: Los participantes destacaron aspectos positivos de los encuentro presenciales se centraron principalmente en la posibilidad de realizar trabajo colaborativo, compartir experiencias, aumentar la sensación de pertenencia y resolver dudas asociada a la metodología y a la utilización de la tecnología. El nivel de asistencia registra un 80,8% de retención entre los 515 que asisten a la primera presencial y los 416 que asienten a la tercera.

La plataforma: La plataforma ha mostrado una gran estabilidad, estando en un alto porcentaje operativa y accesible. La forma en que se han dispuesto los espacios interactivos son evaluados positivamente por los participantes. Destacan su facilidad de uso, la encuentran “amigable”, de fácil acceso, bien diseñada. Si se manifiestan ciertos problemas asociados más bien a la conexión y al manejo de plataforma a nivel de usuario, considerado esto último natural para profesores con poco uso de TIC. Los espacios los usas con frecuencia y los encuentran útiles. En este sentido el proveer de espacios diferenciados para la discusión, el compartir recursos, aclarar dudas e interactuar en temas libres como el “foro social” creemos que es un elemento que contribuyen en aumentar la interacción y organizarla. Cuando a los participantes se les pregunta sobre la plataforma normalmente terminan hablando del curso y eso es una señal que se les hizo “invisible”, se fundió en un solo gran elemento: el curso.

Las interacciones: Se hizo un uso interesante por parte de los participantes de los espacios interactivos. Concentrándose las intervenciones en los foros de discusión 52,5%, el “Diario mural” y “Consultas” registran un 39,5% y un 8,4% respectivamente de las intervenciones. Los docentes participan en las discusiones, realizarn aportes, pero no consultan sus dudas las resuelven por otras vías.

Portafolio una estrategia para la transferencia: El portafolio es una apuesta por dar una paso en la transferencia de los contenidos y metodologías del curso hacia el aula, siendo el portafolio un espacio que da cuenta de una transferencia concreta planificada e informada. Los resultados fueron positivos, de los 530 participantes que finalizan el curso, un 84,9% planifica la transferencia y un 83,8% informa de sus resultados.

Los tutores: Los tutores son agentes relevantes en el desarrollo del curso, ellos han desarrollado diversas tareas en las áreas: pedagógica, social, técnica y administrativa. El rol desempeñados por ellos especialmente al inicio del curso para “encantar” a los que no fueron a la presencial y en los tiempos de las evaluaciones para que los alumnos las rindan en los plazos establecidos ha sido vital para mantener a los alumnos activos. La labor de estos profesionales ha sido altamente valorada por los participantes, perciben en ellos un apoyo constante en el desarrollo del curso y sus actividades así como la aclaración de dudas de carácter pedagógico y administrativos, los perciben cercanos y siempre atentos a resolver sus dudas.

Curso virtual y mixtos: En esta ejecución del curso se crearon tres cursos mixtos y tres virtuales. Los cursos virtuales registran una deserción temprana por sobre la media, pero desde la evaluación sumativa I hasta la prueba final, altos niveles de retención y resultados en las evaluaciones por sobre la media. Es necesario reforzar en estos cursos un apoyo inicial más intensivo.

Las evaluaciones: Se observan a nivel general y de unidad, importantes avances en los aprendizajes reflejados en los 25% de avance entre el pre y post test. Por unidad la mayor ganancia se registra en la Unidad II “Semejanza de figuras planas”. Si habría que considerar que las diferencias entre los post test y las evaluaciones online en algunos casos son importantes, los que nos hace suponer que no necesariamente las evaluaciones online son el reflejo de los aprendizaje parecieran sobredimensionadas.

El proceso seguido por los docentes participantes, ha sido en gran medida exitoso, sin duda perfectible en diversos aspectos. Ha significado el desarrollo de una experiencia virtual de formación docente que ha entregado a los participantes, una nueva forma de acceder a los contenidos, materiales de calidad e interacción con pares, tutor y especialistas, en una temática, prioritaria en la formación matemática de los jóvenes Chilenos como lo es la geometría. La experiencia de este curso muestra un camino a seguir en estas nuevas formas de actualización docente que integran el uso de las TIC como un canal de comunicación y de formación durante la vida profesional, dando acceso a una experiencia formativa que muchos de los docentes participantes no hubiesen tenido acceso en los formatos tradicionales de formación presencial.

Bibliografía

Barbera, E. y Badia, A. (2004) Educar con aulas virtuales: Orientaciones para la innovación en el proceso de enseñanza y aprendizaje, Madrid: A. Machado.

Oteiza, F. (2003) La enseñanza de la Geometría elemental y la reforma educativa chilena: ¿qué y cómo se ve desde la sala de clases? RELME 17, Decimoséptima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 21–25 de julio del 2003 Santiago de Chile

Pérez, A. (2004) Comunicación mediada por ordenador, estrategias instructiva y tutoría. En Salinas, J., Aguaded, J. & Cabero, J. (Coords), Tecnologías para la educación (pp. 295-319), Madrid:Alianza.

Silva, J. (2006). Formación docente en un espacio virtual de aprendizaje: una experiencia concreta en el contexto chileno. Revista Electrónica Teoría de la Educación y Cultura en la Sociedad de la Información, Número 7(1) http://www3.usal.es/~teoriaeducacion/rev_numero_07/n7_art_silva.htm

Tecnología de la Información y Comunicación en la Educación: El caso de Costa Rica

Edison De Faria Campos
Universidad de Costa Rica

Palabras clave
Tecnología de la Información y Comunicación; innovaciones; educación matemática.

Resumen
Los avances científicos y tecnológicos de nuestro tiempo y en especial la electrónica y la informática han revolucionado al mundo y plantean grandes cambios, generando nuevos retos a la humanidad (UNESCO, 1998; Morales y Rivera, 1994). En Costa Rica, como mencionó el ex ministro de educación, "lo que se pretende es que el estudiante tenga fluidez tecnológica, es decir, que además de ser usuario inteligente de la tecnología sea capaz de innovar y de transformar, motivo por el cual nuestra educación debe de evolucionar para estar acorde con lo que la sociedad actual necesita y con los retos que el siglo XXI requiere" (Doryan, 1996).

El plan "Estrategia siglo XXI: Conocimiento e innovación hacia el 2050 en Costa Rica" (2006) propone un aumento escalonado - del 0,39% en el 2000 al 3% del PIB en el año 2050 - en el porcentaje del producto interno bruto (PIB) otorgado al desarrollo de la ciencia, tecnología e innovación.

Actualmente existen en Costa Rica muchas iniciativas relacionadas con el uso de tecnologías de la información y comunicación en la educación (De Faria, 2003). En esta conferencia describiré algunas iniciativas importantes respecto al uso de tecnologías digitales en la educación costarricense.

Marco teórico

Un primer acercamiento, por parte de los psicólogos que estudiaban la forma en que el contexto de una determinada práctica modela la forma en que un individuo resuelve un problema, se centraba en las herramientas culturales que median la actividad de resolución de problemas. Las herramientas pueden ser sistemas simbólicos de signos para representar ideas matemáticas o instrumentos materiales como, por ejemplo, las calculadoras o las computadoras. Esta idea es fundamental en los trabajos desarrollados por Vygotsky.

Vygotsky considera que el ser humano no se limita a responder a los estímulos sino que actúa sobre ellos transformándolos, y que esto es posible gracias a la mediación de instrumentos que se interponen entre el estímulo y la respuesta. Por lo tanto la actividad es un proceso de transformación del medio a través del uso de instrumentos (Vygotsky, 1988, 1992).

Vygotsky distingue dos clases de instrumentos: La herramienta que actúan directamente sobre los estímulos, modificándolos, y los signos, que modifican al propio sujeto y a través de éste a los estímulos. Los instrumentos de mediación (herramientas y signos) desempeñan un rol central en la constitución de los procesos psicológicos superiores que tienen un origen histórico-social. Vygotsky argumentó que cambiando los sistemas de símbolos se reestructura la actividad mental.

El principio de la mediación instrumental está ampliamente reconocido por las teorías de cognición actuales de mayor impacto en los contextos educativos: "Todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico".

Según Wertsch (1993) no existe actividad cognitiva al margen de la actividad representacional. El conocimiento construido depende de los instrumentos de mediación utilizados en su construcción y del lugar que tales instrumentos tengan en el entorno socio cultural.

Moreno y Waldegg (2002) lo ilustran así:

> *Pensemos, por ejemplo, en el desarrollo de la biología. ¿Sería concebible en este momento imaginar el estado actual de estas disciplinas sin los recursos tecnológicos que se han desarrollado simultáneamente con sus cuerpos conceptuales? El microscopio no solamente es un instrumento que ayuda al patólogo experimental, sino que le da acceso a un nivel de estructuración de la realidad imposible de alcanzar sin dicho instrumento. Entonces, su acción cognitiva está mediada por el microscopio y el conocimiento producido está afectado de modo sustancial por el mencionado instrumento (p. 57).*

Pea y Roy (1987) desarrollan la idea de que los instrumentos de mediación funcionan como tecnologías cognitivas que ayudan a organizar y a amplificar el conocimiento matemático. La calculadora, por ejemplo, es un instrumento valioso para la exploración de conceptos matemáticos y a la sistematización de las exploraciones. Cuánto más exploramos más organizamos y tendremos mejores herramientas para explorar. Cada nivel de sistematización nos ubica en un nuevo nivel de exploración y a mayor exploración, mejor sistematización, mejor red conceptual para explorar (Noss y Hoyles, 1996). Ruthven y Chaplin (1997) utilizaron estos principios en una investigación para examinar la idea de que la calculadora puede actuar como una herramienta cognitiva que apoya la amplificación o reorganización de sistemas del pensamiento.

Podemos mirar a la amplificación como “hacer lo de antes, pero mejor” pues contamos con un instrumento que funciona como una lupa, y al cambiar el instrumento mediador cambia el objeto de observación y por consiguiente el conocimiento producido. También podemos mirar a la reorganización como “hacer nuevas cosas y reorganizar las anteriores en función de las nuevas posibilidades”.

Otro constructo teórico importante es el de sistemas de representaciones ejecutables. Según Moreno (2002), desde una perspectiva cognitiva, el mayor desarrollo de la cultura teórica consiste en la aparición de un soporte externo de la memoria. Cuando se escribe un texto utilizando un procesador de palabras, podemos usar el corrector de ortografía para revisar el texto; esta es una función que anteriormente estaba reservada a los seres humanos. La máquina no solo registra el pensamiento del escritor sino que procesa la información que queda registrada en ese medio de representación externa. Cuando un científico usa un programa estadístico, introduce una serie de datos y el software los organiza en una representación gráfica. El científico puede interpretar esa gráfica y extraer conclusiones de ella. Pero no tiene que saber cuál fue el proceso que utilizó el software para generar la gráfica. En todas estas situaciones la máquina está haciendo algo más que registrar información: está pasando de un sistema de representación a otro mediante la ejecución del primer registro de representación.

Una vez instalados en el lenguaje del medio ambiente computacional, las nuevas representaciones son procesables, manipulables. Esto es fundamental en matemática: trabajar con las representaciones como si ellas fueran el objeto que se está explorando. Concuerdo con Moreno (op. cit.) en que “la tecnología digital permite generar sistemas de representación ejecutables mediante los cuales se logra instalar aspectos de nuestro pensamiento en soportes semióticos fácilmente reproducibles y que dichos soportes gradualmente se tornan parte de nuestro pensamiento”.

Los sistemas de cálculo simbólico (Computer algebra systems, CAS) que forman parte de algunos programas matemáticos como el Maple, Derive o Mathematica, así como en algunas calculadoras graficadoras, posibilitan la definición, manipulación, transformación comparación y visualización de expresiones algebraicas en todos los registros de representaciones tradicionales y, además, facilitan el tratamiento entre los distintos registros. Estas son características importantes en la modelación matemática, la simulación y en la resolución de problemas.

Según Balacheff y Kaputt (1996) el mayor impacto de las tecnologías digitales es epistemológico pues han generado un nuevo realismo matemático. Los objetos virtuales en pantalla se pueden manipular de tal forma que se genera una sensación de existencia casi material.

Por lo tanto los sistemas de representación sirven para registrar datos y para ampliar la capacidad del procesamiento de la mente humana, de tal forma que la tecnología digital se convierte en nuestro socio cognitivo. Los sistemas ejecutables de representación ejecutan funciones cognitivas que anteriormente eran privativas de los seres humanos y potencializan la construcción del conocimiento desde distintos enfoques cognitivos.

Las tecnologías digitales, como las tecnologías del papel y lápiz, los libros, los símbolos matemáticos, fueron inventadas por el ser humano para servir de amplificadores y reorganizadores de la cognición. Todas ellas fueron, son y serán importantes en el proceso de resolución de situaciones problemáticas pues como hemos mencionado anteriormente no existe conocimiento sin la mediación instrumental y además el tipo de conocimiento depende del tipo de instrumento de mediación utilizado.

El caso de Costa Rica

Desde 1987 la Fundación Omar Dengo (FOD) puso en marcha proyectos nacionales y regionales en el campo de la innovación educativa.

En 1998 la FOD en colaboración con el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (http://www.mep.go.cr/) creó y ejecutó el Programa Nacional de Informática Educativa para la enseñanza primaria (PIE-MEP-FOD) que alcanza hoy día cerca de la mitad de los estudiantes de la escuela pública costarricense, desde la preescolar hasta el noveno año de la Educación General Básica (de los cinco a los quince años de edad).

El Programa parte de un marco filosófico constructivista, como fundamento epistémico de un quehacer construccionista que orienta la práctica pedagógica al uso de la computadora como un recurso para el aprendizaje creativo y expresivo de estudiantes y educadores (http://www.fod.ac.cr/). Su meta consiste en contribuir a mejorar la calidad del sistema educativo, propiciando ambientes de aprendizaje que favorezcan en los estudiantes y los educadores: El desarrollo del pensamiento lógico-matemático; el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas; la profundización y ampliación en temáticas curriculares; el desarrollo de la creatividad y la exploración de ambientes tecnológicos diversos.

Los laboratorios de informática educativa del programa son instalados en escuelas con población desde 81 hasta 1200 estudiantes, en donde se disponen de 10 a 19 computadoras conectadas en red a un servidor, impresora, digitalizador de imágenes, acceso a correo electrónico y servicios de Internet. Cada centro educativo de esta modalidad cuenta con un tutor de informática educativa, un educador especializado que es capacitado de forma permanente por el programa. Los estudiantes de la educación primaria asisten al laboratorio con su maestra y el tutor de informática educativa por espacio de dos lecciones semanales, una que corresponde al plan de estudios de español y la otra al de matemática. En sus inicios el programa utilizado era el LOGO y actualmente se utiliza el Micromundos.

Algunos de los proyectos de la FOD relacionados con las tecnologías digitales son:

Adultos desarrollando su creatividad a través de la tecnología.

Dirigido a personas integradas a la educación formal de adultos y está respaldado por el Departamento de Educación de Adultos del Ministerio de Educación Pública. El proyecto cuenta con tres módulos: Introducción a la informática, un uso creativo (45 horas); el ABC de las herramientas de productividad (105 horas); Internet, una ruta al ciberespacio y al conocimiento (45 horas).

Revista electrónica Nuevo Milenio

Nuevo Milenio es una revista digital hecha por escolares, que se publica en internet en dos ediciones anuales. Este proyecto busca que los escolares costarricenses sean usuarios creativos y activos de internet, utilizando este medio para expresarse y compartir aprendizajes con niñas y niños de todas partes del mundo. Además, procura que los estudiantes consigan apropiarse de la tecnología, es decir, saber cómo usarla y construir productos significativos.

Proyecto Ciber@prendiz

El proyecto Ciber@prendiz propicia retos para que los estudiantes desarrollen contenidos de ciencias y matemáticas en forma dinámica y placentera, con el apoyo de herramientas tecnológicas. Utiliza recursos basados en internet, con el fin de que los jóvenes se conviertan en verdaderos científicos a la hora de solucionar problemas desde una perspectiva multidisciplinaria. Su objetivo es contribuir a mejorar el rendimiento académico de los estudiantes de secundaria en las áreas de ciencias y matemáticas, a través del ensayo de un enfoque innovador en el uso de las nuevas tecnologías de información, aplicado a un conjunto de colegios, que aproveche los recursos disponibles en la internet. El proyecto está implementado en Ecuador, Perú y Costa Rica.

Proyecto Revista Electrónica Nuevo Milenio

El proyecto consiste en la creación de una comunidad de editores virtuales, conformada por escolares con edades entre nueve y doce años, quienes diseñan una revista en línea utilizando al máximo las herramientas digitales disponibles. De esta manera, fomenta el trabajo cooperativo y el desarrollo de capacidades en los estudiantes. El proyecto permite maximizar el uso de las herramientas telemáticas, para favorecer el trabajo colaborativo, la socialización de aprendizajes y la toma de decisiones a través de internet.

Zon@ M

El periódico *Zon@ M* es un desarrollo digital distribuido semestralmente a través de internet, elaborado por estudiantes de Tercer Ciclo de Enseñanza General Básica, de colegios públicos que participan en el Club de Periodismo Digital. Este proyecto lo realizan en conjunto los profesores de Informática Educativa y Español, apoyados por el Centro de Aprendizaje en Línea de la Fundación Omar Dengo y un grupo de periodistas y comunicadores interesados en la iniciativa.

Program*a* de robótica educativa

Es una experiencia de aprendizaje que se realiza en escuelas y colegios. Su propósito es generar, en el marco del trabajo por proyectos, una cultura científico-tecnológica en la que los estudiantes elaboran productos significativos de programación, construcción de prototipos asociados con la simulación de procesos industriales o tecnológicos, o la recreación de sitios y eventos vinculados a su entorno sociocultural. Para la construcción, se utilizan equipo LEGO y otros materiales complementarios, y para la programación se emplean lenguajes basados en LOGO y LabView, entre ellos Robolab y Lego Engineer.

GLOBE

El objetivo de este proyecto es mejorar la comprensión de las ciencias, al involucrar a los estudiantes en actividades científicas reales como: efectuar mediciones, analizar datos y colaborar con investigaciones de expertos. Al mismo tiempo, se dirige a crear conciencia en los jóvenes con respecto al medio ambiente, desde una perspectiva científica y objetiva. La metodología permite a docentes y estudiantes realizar observaciones de campo y mediciones científicas válidas, con el uso de protocolos de meteorología, hidrología, cobertura terrestre y fenología. Por medio de una plataforma en internet, los datos se envían a científicos expertos para cooperar con sus investigaciones, y los resultados se comparten con estudiantes de otros países.

Intel, educar para el futuro

La meta del programa es capacitar a los educadores de preescolar, primaria, secundaria y universitarios del país con el fin de que promuevan un aprendizaje basado en la exploración, e integren efectivamente el uso de herramientas computacionales al currículo escolar, de tal forma que los estudiantes sean capaces de aumentar sus aprendizajes y logros. Actualmente el programa ofrece cuatro cursos de capacitación: Curso básico que promueve un aprendizaje basado en la exploración y en la integración efectiva de tecnologías digitales al currículo; curso estudiantes como científicos para profesores de ciencias; curso de herramientas en línea para potenciar el pensamiento crítico, dirigido a docentes de todos los niveles educativos; curso de modelo de aprendizaje por indagación cuya meta consiste en revisar y analizar la construcción de un plan de unidad con base en el ciclo de indagación, para mejorar el desempeño y las destrezas de los estudiantes.

Las universidades

Las universidades públicas han servido de plataforma para la investigación sobre la utilización de las tecnologías digitales, principalmente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dos ejemplos son:

Carrera de enseñanza de la matemática asistida por computadora

En 1996 fue la apertura de la carrera de enseñanza de la matemática asistida por computadora en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, cuyo fin es el de formar a profesores de matemática que utilicen la computadora como herramienta didáctica. Además, profesores de la carrera editan una revista virtual de matemática que publica experiencias e investigaciones relacionadas con el uso de tecnologías digitales en el aula. (http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/).

Proyecto de Innovaciones Tecnológicas en la Educación Matemática en Costa Rica (PITEM)

En el primer semestre de 1998 inició el proyecto de investigación "Innovaciones Tecnológicas en la Educación Matemática en Costa Rica: Laboratorios con calculadoras graficadoras Ti-92 y CBL", (PITEM), asociado al Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas de la Universidad de Costa Rica. En este proyecto estuvieron involucradas las cuatro universidades estatales de Costa Rica y 5 (de los 6 existentes en la época) colegios científicos costarricenses. Algunos de sus objetivos eran: Explorar y experimentar con ideas matemáticas tales como patrones, propiedades numéricas, algebraicas y funciones; enfatizar el proceso de resolución de problemas con datos reales; explorar y desarrollar nuevas formas de enseñar. Actualmente, el componente del ITCR del proyecto amplió sus objetivos y se conoce como CICIMAT (Capacitación para la integración de Ciencias, Inglés, Matemática y Tecnología).

Conclusiones

En Costa Rica existen varias iniciativas para incorporar las tecnologías de la información y la comunicación en los procesos de enseñanza y aprendizaje en los distintos niveles educativos. Considero necesario una mayor coordinación entre las instituciones promotoras de los proyectos mencionados, el gobierno, las universidades estatales y la sociedad en general para que los procesos de incorporación de dichas herramientas sea eficiente y responda a las necesidades del país. Las universidades públicas tienen que asumir un papel más participativo, principalmente en la formación inicial y continua de profesionales con una sólida cultura informática.

Referencias

Balacheff, N. y Kaput, J. (1996). *Computer-based learning environment in mathematics*. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.). International Handbook of Mathematics Education (pp. 469-504). Kluwer Academic Publishers.

De Faria, E. (2003). *Uso de tecnologías digitales en la educación matemática en Costa Rica.* Heredia. Costa Rica. Revista Uniciencia, Vol. 20, No. 1 (pp. 135-145).

Doryan, E. (1996). Desafíos de la Educación Costarricense en la Formación del Ser Humano para la Sociedad del nuevo siglo. Costa Rica: Memoria II Congreso de Educación Costarricense.

Estrategia siglo XXI: Conocimiento e innovación hacia el 2050 en Costa Rica. Disponible en http://estrategia.or.cr/content/view/25/20/. Recuperado el 25 de febrero del 2007.

Morales, O., Rivera, K. (1994). Ley de Promoción del Desarrollo Científico y Tecnológico. Costa Rica. Ministerio de Ciencia y Tecnología.

Moreno, L. (2002). *Evolución y tecnología*. Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Moreno, L. y Waldegg, G. (2002). *Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas*. Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Noss, R. y Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical meanings*. Holanda: Kluwer.

Pea, R. y Roy, D. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, pp. 89-122. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum.

Ruthven K. y Chaplin D. (1997). *The Calculator as a Cognitive Tool: Upper-Primary Pupils Tackling a Realistic Number Problem.* International Journal of Computers for Mathematical Learning, Volume 2, Number 2, 1997, pp. 93-124(32)

UNESCO (1998). *Informe mundial sobre la ciencia*. Santillana/Ediciones UNESCO.

Vygotsky, L. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.

Vygotsky, L. (1992). *Pensamiento y lenguaje*. México: Ediciones Quinto Sol.

Wertsch, J. (1993). *Voces de la mente*. Madrid: Visor distribuciones.

Uso de un interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria

Ivonne Sandoval, María Trigueros, Dolores Lozano

Palabras clave
Tecnología, primaria, combinatoria

Enciclomedia es un proyecto que busca enriquecer la experiencia de enseñanza y aprendizaje en las escuelas primarias mexicanas con recursos educativos multimediales disponibles en una computadora. Como miembros del equipo académico, desarrollamos recursos y estrategias que contribuyan a la enseñanza de procesos y conceptos matemáticos en primaria. También investigamos cómo se aprende matemáticas con Enciclomedia.

En una evaluación nacional en México se encontró que la mayoría de los estudiantes de primaria no resuelven problemas que suponen un análisis combinatorio (INEE, 2006). Las ideas de combinatoria están presentes desde los primeros grados escolares. Los resultados de investigación muestran que cuando niños de 11-13 años resuelven tareas que involucran combinatoria usan estrategias como tanteo, ensayo-error y procedimientos sistemáticos, según el potencial de la actividad propuesta (English, 1993). Un interactivo que muestre las maneras posibles de combinar elementos en un problema podría ayudar a estudiantes a reflexionar sus estrategias de solución y usar otras más estructuradas. El propósito de este artículo es reportar sobre el uso de "*Diagrama de árbol*" creado para explorar ideas relacionadas con combinatoria.

Representación, instrumentos y matemáticas

El aprendizaje implica la construcción de representaciones. Estas son instrumentos mediadores para la comprensión, puesto que para generarlos, el individuo debe encontrar una estructura común de los fenómenos, en distintos contextos. Los instrumentos influyen en la construcción del saber y en la conceptualización. Estos no son únicamente auxiliares o neutros dentro de la enseñanza, son parte activa en la construcción del conocimiento. El impacto del instrumento sobre la conceptualización no es inmediata, es un proceso complejo y progresivo. El instrumento no es algo dado es elaborado por el sujeto, existe cuando el sujeto se ha apropiado de él y lo integra a su actividad (Rabardel, 1999).

Metodología

La experimentación se realizó en la Ciudad de México con dos quintos y dos sextos de primaria. Cada grupo tiene en promedio 25 estudiantes (11-13 años). Nuestro rol fue de observadores participantes. Para la recolección usamos audio-video grabaciones y notas de campo. Para el análisis se transcribieron los procesos de resolución de los problemas y las interacciones alumno-alumno, alumno-interactivo.

Conversaciones con maestros

Antes de Enciclomedia era complicado construir los diagramas de árbol completos por limitaciones de espacio: *"Lo íbamos armando en el cuaderno, obviamente se hacía de tamaño gigantesco"*. Los estudiantes no lograban encontrar todas las combinaciones y no establecían la relación numérica para obtener el total de combinaciones.

Observaciones de clase

Los alumnos resuelven problemas de combinatoria usando el programa. Sus estrategias fueron el conteo de combinaciones y permutaciones de manera convencional, análisis de diversos elementos de los árboles usando colores para mostrar combinaciones o permutaciones específicas (véase la figura 1). Las estrategias utilizadas coinciden con las encontradas por English (1993).

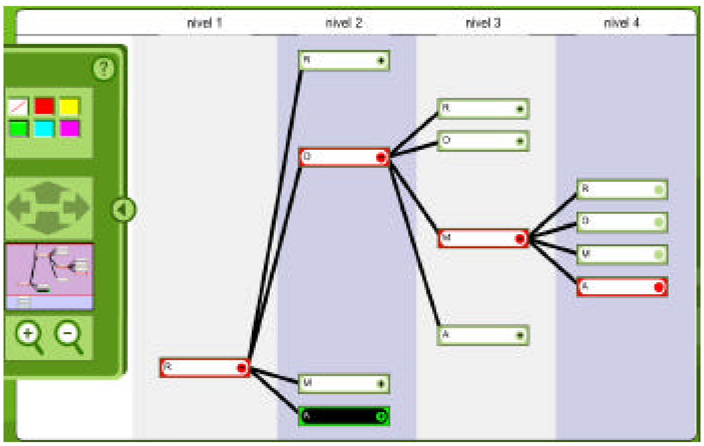


Figura 1.

Conclusiones

El *diagrama del árbol* permite representar un problema y encontrar estrategias más eficientes. Se requiere investigar a profundidad cómo se modifican las ideas de combinatoria al usar este interactivo, y sus implicaciones en ambientes de papel-lápiz. La dirección futura de nuestro proyecto consiste en refinar estas primeras exploraciones.

Bibliografía

English, L.D. (1993). Children's strategies for solving two- and three- dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 255-273.

INEE (2006). El aprendizaje del español, las matemáticas y la expresión escrita en la educación básica en México: Resumen ejecutivo. Recuperado de http://www.inee.edu.mx/images/stories/documentos_pdf/Resultados_Evaluaciones/aprendizajere.pdf

Rabardel, P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques*, Houlgate 18-21 Août, 203 – 213.

Problemas de concordancia

entre la propuesta magisterial para enseñanza de la estadística en secundaria con respecto a la naturaleza de la disciplina y sus consecuencias

Chaves Edwin

Resumen

En el presente trabajo se efectúa un análisis con respecto a la concordancia entre la propuesta del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP) para la enseñanza de la estadística con respecto fundamentos teóricos que caracterizan la disciplina. El auge que ha tenido la estadística para el desarrollo de las diferentes áreas científicas ha provocado que las autoridades magisteriales incluyeran esta disciplina dentro el currículo matemático. Con ello se pretendió favorecer la formación del ciudadano, preparándolo para manipular, interpretar y analizar la información que se genera a su alrededor. No obstante, en este proceso se concibió la estadística como un área más de las matemáticas, por lo que dentro del nuevo currículo se descuidó su naturaleza aleatoria y muchos de los aspectos que se desligan de ella.

Palabras clave

Enseñanza de la estadística, educación estadística, transposición didáctica.

En la investigación realizada se utiliza como modelo la teoría de transposición didáctica de Chevallard, para analizar el proceso de transposición externa entre el *"saber sabio"* de la estadística con respecto al *"saber a enseñar"* que postula el MEP en sus programas. Al mismo tiempo se valora el efecto que estos problemas de concordancia provocan en la transposición interna del saber, es decir, en el proceso de transformación del *"saber a enseñar"* al *"saber enseñado"*. Para esto último, se consulta a los principales actores del proceso: profesores y estudiantes.

Los resultados evidencian que, a pesar que la propuesta magisterial intenta favorecer un proceso de razonamiento en los estudiantes, descuida el hecho que el pensamiento estadístico se obtiene mediante la integración de la comprensión del problema real y el estadístico. Como consecuencia de esto, importantes conceptos tales como: azar, aleatoriedad, variabilidad, incertidumbre, frecuencia relativa, muestreo, entre otros; tienen muy poca importancia en los programas de estudio. Esta situación, genera un aprendizaje poco significativo desde el punto de vista de la misma propuesta, lo que conlleva que el proceso educativo tienda a enfatizar en procedimientos y fórmulas, que se contrapone al objetivo de generar una cultura estadística en los estudiantes.

Aunque el estudio es eminentemente descriptivo, los hallazgos obtenidos dejan entrever importantes problemas en el proceso, que provocan la necesidad de una revisión a lo propuesto hasta ahora.