EDUCACIÓN MATEMÁTICA en las AMÉRICAS 2023

Resolución de Problemas y Modelización

Volumen 8, Memorias XVI CIAEM, Lima, Perú

Patrick Scott, Yuri Morales
y Angel Ruiz
Editores

CIAEM
desde - since 1961
CMM

© 2023
Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)

www.ciaem-iacme.org
ciaem.iacme@gmail.com

Resolución de Problemas y Modelización
[Volumen 8, Memorias XVI CIAEM, Lima, Perú]

Editado por Patrick Scott, Yuri Morales y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN Volumen: 978-9945-18-792-2
ISBN Obra Completa: 978-9945-18-784-7

Todos los materiales incluidos en esta publicación pertenecen al *Comité Interamericano de Educación Matemática*.

Estos materiales están bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.

En la reproducción de cualquier parte de este libro se deben consignar: los créditos a los autores y al *Comité Interamericano de Educación Matemática*.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera al CIAEM y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no ha sido publicado previamente y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2023). *Educación Matemática en las Américas 2023. Resolución de Problemas y Modelización*. Editores: Patrick Scott, Yuri Morales y Ángel Ruíz. República Dominicana.

Contenidos

Presentación i

A Modelagem Matemática e a Função do 1º Grau na Resolução de Problemas de Razão e Propoção 1
Pedro Mikael Santos Silva, Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa, Fabiane Fischer Figueiredo

Ambientes de modelación matemática con Excel en el aprendizaje del concepto de conjunto generador 8
Guillermo Enrique Ramírez Montes

Análisis de una organización matemática basada de un recorrido de estudio e investigación sobre el COVID – 19 en el nivel superior 16
Carlos Quispe Palomino, Elvis Bustamante Ramos

Aplicação de uma Sequência Didática elaborada a partir da Resolução de Problemas e da Etnomatemática 26
Renata Cristina Geromel Meneghetti, Beatriz Brandão Silva

Atividade de Modelagem Matemática desenvolvida no contexto remoto: uma análise das etapas da experimentação 34
Karina Alessandra Pessoa da Silva

Construcción de modelos matemáticos en libros de texto de ecuaciones diferenciales para ingenieros 42
Jazmín Adriana Juárez Ramírez, José María Chamoso Sánchez, David Rodríguez Muelas

Contextualização e descontextualização em atividades de modelagem matemática 50
Lourdes Maria Werle de Almeida, Kassiana Schimidt Sujus, Rosangela Maria Kowalek

Dimensões da proposição de problemas nas aulas de Matemática: construções teóricas 57
Cristina De Jesus Teixeira, Geraldo Eustácio Moreira

Discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas en el estudio de un modelo que describe factores del estallido social en Colombia 67
Jainer Andres Gomez-Chavarro, Jhony Alexander Villa-Ochoa

Diseño de un dispositivo didáctico en torno a la transformada de Hough para la formación de ingenieros 75
César Elmer Molina Quispe, Cintya Sherley Gonzales Hernández

El desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental 78
Ana Elizabeth González, Osvaldo Jesús Rojas

Elementos precursores de modelación figural estudiantil electro/corazón 86
Maximiliano Andrés Núñez González

Errores y dificultades en la modelización matemática: Un caso con estudiantes de educación secundaria 95
Karen Porras Lizano, Elena Castro-Rodríguez, Juan Luis Piñeiro Garrido

Estrategias Metacognitivas para resolver un problema de Modelización 103
Noé Fernando Aguilar Perdomo, Claudia Margarita Acuña Soto

Implementação de Pesquisas em Resolução de Problemas: parcerias de coaprendizagem 108
Flavia Fabiani Marcatto

La modelación geométrica en la resolución de problemas de teoría de grafos en un contexto auténtico 116
Luz Marina Fonseca Vizcaya, Osvaldo Jesús Rojas Velázquez

Metodologia de resolução de problemas: uma leitura de mundo na educação de jovens e adultos 124
Carlos André Bogéa Pereira, Waléria de Jesus Barbosa Soares

Modelación en la clase de álgebra lineal mediada por GeoGebra: eigenvalores y eigenvectores 132
Alexander Betancur Sánchez

Modelación Matemática y los Eclipses 139
Elizabeth Montoya Delgadillo, Alejandro Cabrera Baquedano

Modelando a área invadida de uma nascente 145
José Antonio Salvador

Nociones básicas sobre la modelización de profesores de educación primaria en ejercicio 154
Karen Porras Lizano, Elena Castro-Rodríguez, Juan Luis Piñeiro

Precaución: La resolución de problemas puede generar descubrimiento matemático. El caso de las tuberías. 163
Rodrigo Rojas Muñoz

Problemas de cuadratura de polígonos: pruebas y argumentaciones en el bachillerato 166
José Luis López Hernández

Problemas de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma análise das estratégias dos alunos 175
Susane Cristina Pasa Pelaquim, Karina Alessandra Pessoa da Silva

Proceso de argumentación para propiciar la comprensión del Principio de Inducción Matemática 183
José Ricardo Herrera Alfaro, Jorge Enrique Fiallo Leal

Proposição de Problemas de Matemática por crianças do 1º ano do Ensino Fundamental 194
Janaína Poffo Possamai, Norma Suely Gomes Allevato, Susane Barth Strelow

Refletindo sobre conceitos básicos acerca da área de trapézios através da Resolução de Problemas 202
Erica Marlucia Leite Pagani, Marcio Pironel, Manoel dos Santos Costa

Reflexiones sobre la solución de problemas que involucran funciones por tramos 209
Maritza Luna Valenzuela, Elizabeth Milagro Advíncula Clemente

Resolução de Problemas de adição com crianças em processo de alfabetização 217
Gracielle Zager Mandel, Janaína Poffo Possamai

Resolución de problemas verbales en un ambiente dinámico y formación de profesores de Matemáticas 225
Adrián Gómez Árciga, Gricelda Mendivil Rosas

Sobre o tema de uma atividade de modelagem matemática: uma abordagem com professores em formação continuada 234
Karina Alessandra Pessoa da Silva, Jader Otavio Dalto

Taller Modelación Matemática para la resolución de problemas de optimización en trabajo colaborativo 242
Natalia Alvarado Garcés, Rodrigo Rojas Muñoz

Ultrapassando uma misconcepção em uma atividade de modelagem matemática 249
Kassiana Schmidt Surjus, Lourdes Maria Werle de Almeida, Rosângela Maria Kowalek

Uma abordagem para o ensino de Geometria Analítica através da Resolução de Problemas 256
Mário Barbosa da Silva, Ilda Pavret Silva, Norma Suely Gomes Allevato, Janaína Poffo Possamai

Validación de conjeturas en el aprendizaje de la Matemática 265
Ángel Homero Flores Samaniego, Leticia Aguilar Pascual

Habilidades para la resolución de problemas posibilitadas en un curso de refuerzo 272
Ana Mileydy González Garcia, Sandra Evely Parada Rico

Índice alfabético de autores 281

Presentación

La ***XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática*** **(XVI CIAEM)** se realizó en la Universidad de Lima, Perú, del 30 de julio al 4 de agosto del 2023.

La XVI CIAEM en un momento crucial

Esta CIAEM se dio en un momento significativo para nuestra comunidad:

- En primer lugar, por ser el primer gran congreso multinacional postpandemia en las Américas **totalmente presencial**. Esta modalidad se convirtió en un gran desafío para una región muy afectada por la pandemia, a nivel nacional, institucional e individual. Los esfuerzos organizativos que hubo que hacer fueron mayores en medio de muchas incertidumbres, incluidas las políticas. Pero el proceso se completó con extraordinario éxito. Contó con la participación de cerca de 1000 personas de 28 países y la presentación de más de 500 trabajos en diversas modalidades (https://xvi.ciaem-iacme.org).
- En segundo término, porque se realizó en Lima, después de 57 años desde que había tenido lugar la II CIAEM (1966), bajo el liderazgo de los norteamericanos Marshall Stone y Howard Fehr. La CIAEM volvió al Perú, aunque en un escenario histórico muy distinto.
- Precisamente, en tercer lugar, el año 2023 simboliza un *punto de inflexión* con saltos cuánticos en las tecnologías del mundo, como la Inteligencia Artificial y nuevos artefactos y perspectivas tecnológicas que impactarán nuestro futuro casi inmediatamente. Todo dentro de contextos políticos y económicos, y de profundo cambio climático, que ya comenzaron a definir una nueva época para la humanidad. Las matemáticas y su enseñanza se inscribirán dentro de este escenario global.

Conferencia inaugural XVI CIAEM

CIAEM: "un importante agente de la reforma curricular en Educación Matemática en las Américas" (F. Leung)

La XVI CIAEM fue una reunión regional de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). El CIAEM es la organización multinacional afiliada al ICMI con mayor antigüedad y un socio importante de esta organización internacional. En palabras de Frederick Leung, Presidente de ICMI, en la *Ceremonia Inaugural* de la XVI CIAEM:

> Tanto el *Comité Interamericano de Educación Matemática* como la serie de Conferencias que organiza se denominan CIAEM. El CIAEM nació en 1961 a partir del controvertido movimiento *New Math* en América Latina, pero desde entonces el Comité ha evolucionado y se ha convertido en un importante agente de la reforma curricular en Educación Matemática en las Américas, y las Conferencias se han convertido en un lugar importante para el intercambio intelectual sobre investigaciones y prácticas de la Educación Matemática en la región y en el mundo.

Y añade:

> El CIAEM es mucho más que un Comité o una Conferencia. Produce materiales como publicaciones, blogs, etc. para apoyar a la Comunidad de Educación Matemática. Colabora con organizaciones nacionales y regionales de Educación Matemática en las Américas para apuntalar sus iniciativas y esfuerzos. Más importante aún, a lo largo de los años, ha crecido hasta convertirse en una organización más global, con "sólidos vínculos científicos y educativos con el resto del mundo". Es un importante Centro y una Red de educadores e investigadores matemáticos de la región, y también un puente entre la región y el resto del mundo.

El CIAEM y las CIAEM constituyen el principal punto de referencia en la Educación Matemática para investigadores, docentes y estudiantes en todo el continente.

La alta calidad científica de las CIAEM

En los textos que recogemos aquí domina un gran nivel científico. Una de las características permanentes de las CIAEM es, precisamente, su cultivo de la mayor calidad académica; la cual es producto de un diseño intelectual estratégico innovador y de grandes esfuerzos por individuos y equipos durante muchos meses antes del congreso. A diferencia de otros eventos, las CIAEM piden las propuestas de ponencias de manera extensa y administra cuidadosamente la revisión por medio de una plataforma tecnológica (los textos aprobados pueden revisarse varias semanas antes del congreso en nuestras plataformas).

Es una perspectiva de organización académica profesional muy seria. Por eso es por lo que, en primer lugar, deseo agradecer formalmente la labor comprometida del *Comité Internacional del Programa* con un especial reconocimiento a los *Directores de tema*, a los casi 200 *Revisores científicos*, a los *Coordinadores de sesiones* en el evento y al *Comité Asesor Internacional*.

En esta oportunidad, dadas las condiciones de las plataformas tecnológicas libres disponibles, diseñamos una innovadora estrategia complementaria para la organización del congreso mediante dos sitios web: sitio oficial con toda la información y articulación de la preparación del evento (usamos WordPress), y el sitio para ponencias con base en *Open Conference Systems*. Agradecemos el trabajo de la Dirección de estas plataformas.

En la XVI CIAEM se plasmó la participación en la gestión académica de las redes hermanas: la Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe (especialmente) y la Comunidad de Educación Matemáticas de América del Sur.

En la pasada década el CIAEM, desarrolló una relación estratégica con el Proyecto Reforma Matemática (Costa Rica). Este equipo humano fue base crucial para sostener la logística informática de la organización científica del congreso, como lo fue en todos los eventos desde la CIAEM de Recife (Brasil) en 2011.

El *Comité Organizador Local* en la Universidad de Lima, aparte de las acciones usuales, proporcionó un ambiente cultural muy especial, con una gran hospitalidad. Nuestro agradecimiento a los colegas por haber asumido la logística multifacética de esta XVI CIAEM, que dejó recuerdos inolvidables en la comunidad de participantes.

Acciones dentro de la XVI CIAEM

Durante la XVI CIAEM, se hizo entrega de la *Medalla Luis Santaló* a Luis Carlos Arboleda y la *Medalla Marshall Stone* a Nelly León (Venezuela) y Sarah González (República Dominicana).

Entrega Medalla Luis Santaló

Y recordamos a grandes académicos que fallecieron en el periodo 2019 y 2023, entre ellos dos expresidentes del CIAEM: Ubiratan D'Ambrosio y Carlos Vasco.

En esta CIAEM fue confirmada la decisión de tener la XVII CIAEM en Monterrey, México, en el 2027.

Durante el evento, en correspondencia con los Términos de referencia del CIAEM, se aprobó la conformación de nuevos equipos directivos del CIAEM para el periodo 2024-2027:

- *Consejo Internacional* [dedicado a asuntos prospectivos, relaciones estratégicas, apoyo y asesoría]: Ángel Ruiz (Costa Rica, Presidente), Claudia Groenwald (Brasil), Eduardo Mancera (México), Luis Carlos Arboleda (Colombia) Medalla *Luis Santaló* 2023, Michèle Artigue (Francia) Medalla *Luis Santaló* 2015, Patrick Scott (EUA), Salvador Llinares (España) Medalla *Luis Santaló* 2019.
- *Equipo ejecutivo* [dedicado a asuntos de organización y desarrollo ejecutivo de las múltiples acciones cotidianas y materialización de proyectos, congresos, publicaciones, entre otros: Presidente: Eduardo Mancera (México), Primera vicepresidenta: Yuriko Yamamoto Baldin (Brasil), Segunda vicepresidenta: Nelly León (Venezuela), Secretaria de organización: Soledad Estrella (Chile), Secretario de asuntos tecnológicos: Yuri Morales (Costa Rica). *Vocales:* Ana Claudia Vilchis (México, para América del Norte), Ricardo Poveda (Costa Rica, para América Central), Sarah González (República Dominicana, para El Caribe), Eulalia Calle (Ecuador, para Región Andina), Claudia Vargas (Chile, para Región del Cono Sur), Alessandro Ribeiro (Brasil, para Región Luso-americana).

Educación Matemática en las Américas 2023

Los textos de las ponencias invitadas (conferencias plenarias, conferencias paralelas, sesiones temáticas, sesión Ubiratan D'Ambrosio, mesa redonda, minicursos) y ponencias abiertas (comunicaciones, talleres, posters), presentadas efectivamente en el congreso, han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes que titulamos *Educación Matemática en las Américas 2023.* Los trabajos se han organizado en 10 volúmenes. El CIAEM desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en la XVI CIAEM.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por Patrick Scott (Estados Unidos) y Yuri Morales (Costa Rica) quienes dedicaron un esfuerzo extraordinario para tener estas *Memorias*. Nuestra compañera Sarah González se encargó de tramitar su registro en República Dominicana (que contó con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra de ese país). Expreso nuestro agradecimiento a Rick, a Yuri y a Sarah.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las páginas web oficiales del CIAEM.

Esperamos que la publicación de estos trabajos contribuya al progreso de la investigación y la acción de aula en la Educación Matemática de las Américas.

Atentamente

Ángel Ruiz, Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en las AMÉRICAS 2023

El presente volumen es parte de la colección digital *Educación Matemática en las Américas 2023*, que corresponde a las *Memorias* de la *XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (celebrada en Lima, Perú, del 30 de julio al 4 de agosto de 2023).

Los diez volúmenes se han organizado de la siguiente manera:

1. *Educación Matemática en las Américas 2023. Trabajos invitados de la XVI CIAEM*
2. *Educación Matemática en las Américas 2023. Estrategias para Mejorar la Enseñanza y el Aprendizaje*
3. *Educación Matemática en las Américas 2023. Formación Inicial de Profesores*
4. *Educación Matemática en las Américas 2023. Formación Continua y Desarrollo Profesional*
5. *Educación Matemática en las Américas 2023. Perspectivas Socioculturales*
6. *Educación Matemática en las Américas 2023. Currículo, Competencias y Evaluación*
7. *Educación Matemática en las Américas 2023. Historia y Epistemología*
8. *Educación Matemática en las Américas 2023. Resolución de Problemas y Modelización*
9. *Educación Matemática en las Américas 2023. Uso de Tecnologías Digitales*
10. *Educación Matemática en las Américas 2023. Investigación*

Estos volúmenes se pueden revisar o descargar gratuitamente en la página ***Memorias XVI CIAEM*** del sitio principal del CIAEM.

A modelagem matemática e a função do 1º grau na resolução de problemas de razão e proporção

Pedro Mikael Santos **Silva**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
pedromikael2607@gmail.com
Agostinho Iaqchan Ryokiti **Homa**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
iaqchan@hotmail.com
Fabiane Fischer **Figueiredo**
Escola Estadual de Ensino Médio João Habekost
Brasil
fabianefischerfigueiredo@gmail.com

Resumo

Neste trabalho apresentam-se os resultados parciais de uma pesquisa de cunho qualitativo com o objetivo de refletir sobre como ocorre a aprendizagem da modelagem matemática e da função de 1° grau através da resolução de problemas de razão e proporção. Dessa forma, foi aplicada e desenvolvida com 17 alunos do 1° ano do Ensino Médio de um Colégio Estadual de Bento Gonçalves-RS-Brasil. Com isso, o trabalho apresenta uma atividade que aborda a produção de suco de uva, a fim de encontrar um modelo matemático, como parte da solução que se trata de uma função de 1° grau. Os resultados indicam que a Resolução de Problemas associada com a Modelagem Matemática, em um contexto que aborda um tema da realidade do aluno, traz significado ao conhecimento adquirido pelo aluno, no que se refere ao emprego de conhecimentos de razão e proporção para a obtenção da função de 1° grau como modelo matemático.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Resolução de Problemas; Ensino Médio; Matemática.

Introdução

A busca por alternativas para o desenvolvimento de objetos de conhecimento nas aulas de Matemática, de modo que os alunos sejam protagonistas da sua aprendizagem, é uma necessidade da contemporaneidade. Inclusive, os documentos oficiais orientam para o uso de metodologias ativas que elevem o papel do aluno como um indivíduo crítico perante a sua sociedade.

Nesse sentido, conforme D'Ambrósio (2002), é preciso estabelecer uma relação entre a matemática e as tendências atuais. Por isso, entende-se que, ao fazer uso da estratégia da Modelagem Matemática na sala de aula, há a oportunidade de debater sobre os temas de natureza social, cultural, política e econômica. Também, essa é uma estratégia que pode ser introduzida através de problemas, que são "aquilo que não se sabe fazer, mas que está interessado em resolver" (Onuchic, 1999, p. 215).

Ainda, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio, existe uma competência específica da área e do componente de Matemática que enfatiza que sejam utilizadas estratégias para "[...] interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos [...]", levantando situações que tenham um significado real para os estudantes (Brasil, 2018, p. 527). Nessa perspectiva, nota-se a importância de proporcionar uma aprendizagem significativa para os alunos, estabelecendo relações entre o saber e a sociedade a que ele pertence.

Portanto, neste artigo, será apresentado os resultados parciais de uma investigação em nível de Mestrado, de cunho qualitativo, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM)/Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)-Canoas-Rio Grande do Sul (RS)-Brasil (BR), realizada com uma turma de 1° ano do Ensino Médio. Nesses resultados, destaca-se uma atividade que envolveu a Resolução de Problemas e Modelagem Matemática para a aprendizagem da função de 1° grau, por meio dos conhecimentos de razão e proporção.

A Modelagem Matemática associada à Resolução de Problemas

Bassanezi é um dos principais autores que discute a Modelagem Matemática. Para o autor (2019), essa seria um processo interativo que busca obter e validar modelos matemáticos para a solução de problemas. Corroborando com essa perspectiva, destaca-se a concepção de Almeida, Silva e Vertuan (2021), que a Modelagem Matemática se objetiva a obtenção de possíveis soluções a um determinado problema utilizando modelos matemáticos. Os autores ainda ressaltam que o modelo matemático é o que dá forma à solução do problema e a Modelagem Matemática, sendo uma atividade que busca por essa solução.

Para iniciar uma atividade com o uso da Modelagem, é conveniente que o professor tenha o apropriado conhecimento sobre a problemática a ser discutida. Nesse sentido, com relação às informações levantadas e as escolhas dos temas, Barbosa (2001) apresenta três casos considerando o nível de participação entre o professor e aluno, que influencia na relação entre eles: no primeiro caso, o professor é responsável pela formulação e construção do problema, apresentando as informações essenciais para a resolução e os alunos ficam incumbidos da resolução do problema; no segundo, o professor apenas apresenta um problema do mundo real e os alunos são responsáveis pela busca das informações para resolvê-lo; e no terceiro, os alunos

têm toda a liberdade para escolher um tema, formular a situação-problema e resolvê-la, sendo que o professor deve propiciar um ambiente instigante, fazendo indagações.

Por isso, optou-se por utilizar as etapas descritas por Biembengut e Hein (2021), que salientam que o trabalho de Modelagem pode ser realizado em três etapas e essas subdivididas, como consta na Figura 1.

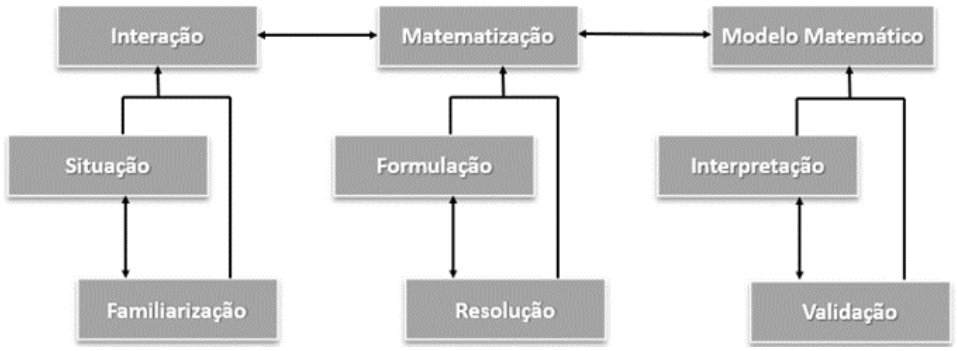


Figura 1. Dinâmica da Modelagem Matemática. (Biembengut & Hein, 2021, p. 15).

Na dinâmica da Modelagem Matemática (Biembengut & Hein, 2021), tem: a *Interação,* em que ocorre a familiarização com a situação-problema, e em que os alunos têm que entender o contexto no qual o problema está inserido e investigá-lo através de pesquisas, até que torne clara a problemática envolvida; a *Matematização* que é a etapa classificada como a mais desafiante, pois nela se levantarão hipóteses formulando o problema, classificando as informações e selecionando variáveis e/ou símbolos, a fim de chegar a uma expressão aritmética, desenvolver uma fórmula, equação ou alguma representação que possibilite a solução, e reúnem-se os achados em busca de uma solução; e o *Modelo Matemático*, em que os alunos devem procurar interpretar o modelo e validá-lo para que, se necessário, possam ser realizados os possíveis ajustes.

Sendo assim, compreende-se que a Modelagem Matemática pode ser associada com a Resolução de Problemas, pois, de acordo com Rigonatto (2015), pode valorizar a realidade do aluno na sala de aula, tornando a aprendizagem significativa. Nessa perspectiva, ressalta-se a concepção de Zequim (2014, p. 11), que reitera que estará “ensinando-os a buscarem respostas às questões advindas do cotidiano e a construírem seus próprios conhecimentos, ao invés de apenas, esperar deles, respostas aos exercícios rotineiros e desconexos de suas realidades”.

Além disso, o uso da metodologia ativa de Resolução de Problemas contribui progressivamente para o desenvolvimento de um indivíduo ativo na construção da sua aprendizagem. Nesse viés, está em conformidade com o que preconiza Moran (2018, p. 4), de que as metodologias ativas “dão ênfase ao papel do aluno, ao seu desenvolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as etapas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor”.

Em vista disso, é possível observar que tanto na Modelagem Matemática quanto na Resolução de Problemas, o aluno possui um papel ativo, em que o seu senso crítico e reflexivo

pode ser desenvolvido, e o professor tem a possibilidade de exercer o papel de mediador, instigador e de orientador do processo de resolução. É nesse contexto que a atividade de resolução de problemas pode ocasionar a elaboração de modelos matemáticos, visto que o aluno pode estudar um tema relevante e aprender e aprimorar os conhecimentos matemáticos envolvidos ao executar o processo de resolução.

Metodologia

Os resultados aqui expostos são provenientes de uma investigação de cunho qualitativo, em andamento, que procura alcançar, por meio de seus processos investigativos, as notoriedades de cunho social e educativo (Esteban, 2010). O objetivo deste artigo é refletir sobre como ocorre a aprendizagem da modelagem matemática da função de 1° grau por meio da resolução de problemas de razão e proporção.

Os sujeitos da investigação foram 17 alunos de um 1° ano do Ensino Médio de um Colégio Estadual da cidade de Bento Gonçalves-RS-BR, que é uma cidade que tem como uma das principais atividades econômicas o cultivo e a produção de suco de uva e seus derivados. O procedimento de aplicação deu-se através das seguintes fases, que auxiliaram na análise e discussão dos dados coletados: entrega e discussão do problema proposto; divisão da sala em grupos; iniciação aos processos de resolução; apresentação dos resultados para toda a turma; validação do modelo através de aplicação e discussão.

Na coleta de dados foram realizadas gravações de áudio e vídeo dos encontros, mas os resultados, que neste artigo são apresentados, são provenientes de observações realizadas pelo pesquisador e da análise das produções escritas dos alunos. Nesses são destacadas a resolução de um problema que aborda o tema produção de suco de uva, para a ocorrência da Modelagem Matemática de uma função do 1º grau utilizando os conhecimentos de razão e proporção.

A reflexão sobre os resultados

Na fase da aplicação da entrega e discussão do problema proposto, decidiu-se abordar o tema escolhido, por meio da questão: “Quais são os gastos para produzir o suco de uva?”. Essa questão e a discussão, na tentativa de respondê-la, se deram na etapa de *Interação* da Modelagem Matemática (Biembengut & Hein, 2021). Um dos alunos contou a sua experiência com a produção de suco de uva e os processos de engarrafamento, o que instigou que outros relatassem que já haviam visitado algumas fábricas na cidade e houve aqueles que citaram a visitação de parreirais. Verificou-se que, nesse momento, ocorreu a subetapa de *familiarização*, com o tema proposto, o que contribuiu para que eles continuassem participando ativamente da atividade de resolução.

Porém, a subetapa de *familiarização* da Modelagem Matemática (Biembengut & Hein, 2021) também se relaciona com a *situação* e, para isso, o professor iniciou a leitura de informações (Figura 2), nas quais os alunos deveriam grifar as que julgassem serem as necessárias para os próximos passos da resolução, pois estavam em uma receita para a produção de 1 litro de suco de uva, e os valores dos ingredientes foram pesquisados em supermercados da cidade.

Figura 2. Imagem da Receita e dos valores dos ingredientes presentes na atividade. A pesquisa.

Para continuar a investigação e o processo de resolução, ocorreu a divisão da sala em grupos, quando notou-se que os alunos se reuniram por critério de afinidade para prosseguir e pesquisar. Encontraram o gasto com ingredientes para produzir um litro de suco de uva, iniciando a etapa de *Matematização* (Biembengut & Hein, 2021). Mediante a investigação, os alunos observaram que na receita só iriam três colheres de açúcar, porém no supermercado só vendem em embalagens de 1 kg, 2 kg ou 5 kg. Na atividade foi utilizado o valor de 2 kg de açúcar, para o que foi preciso uma pesquisa na Internet. Para encontrar quantos gramas possuía uma colher de sopa de açúcar, decidiram utilizar a regra de três simples para realizar as transformações de grandezas e medidas. Encontraram depois o valor de R$ 0,17 para três colheres de açúcar. Com a informação de quantos mililitros de líquido produzia 1 kg de uva, foram realizados os cálculos usando novamente a regra de três na determinação de quantos quilogramas de uva eram necessários para a produção de 1 litro de suco.

Para determinar a solução pelo método da razão e proporção e encontrar o modelo matemático de uma função do 1º grau, surgiu a sub-etapa de *formulação* (Biembengut & Hein, 2021), em que o professor orientou que realizassem vários cálculos, com diferentes volumes de produção de suco, que levassem em conta a quantidades de açúcar e os quilogramas de uva. Após realizarem repetidamente os cálculos, os alunos encontraram que seriam gastos R$ 16,011 com ingredientes para cada litro de suco, identificando assim o coeficiente angular da função que modelaria a situação.

Para dar continuação na atividade, foi adicionada, pelo professor, a informação de que uma personagem, a “Gabriela pretendia fabricar suco de uva para comercializar, e decidiu considerar os valores médios de gastos, com o consumo de gás, água e energia elétrica mensais, em tal produção”. Desse modo, foi disponibilizada uma tabela, com o valor do gás, da água e da energia elétrica, juntamente com a pergunta: “Dessa forma, como Gabriela calculará o valor gasto mensalmente para produção de suco de uva? Encontre um modelo matemático considerando as informações da atividade”.

Ainda, nessa etapa de *formulação* (Biembengut & Hein, 2021), os alunos foram instigados a organizar os valores principais encontrados na resolução. Os grupos levantaram que existe um valor fixo que sempre seria gasto por mês para a produção do suco. Outro dado relevante apontado foi o valor da soma de cada ingrediente presente na receita, e os alunos notaram que o valor total de ingredientes iria variar de acordo com a quantidade de litros que se pretendia produzir. Concluíram o raciocínio de que existe uma variável dependente da quantidade de litros a se produzir relacionado ao valor dos ingredientes e um outro valor fixo relacionado aos gastos de produção. Ainda foram instigados pelo professor de como poderiam organizar esse pensamento por meio de uma fórmula, o modelo matemático, para relacionar os valores fixos e variáveis, quando se notou que uma função representaria o pensamento para se obter o modelo matemático.

Após as discussões, na subetapa *resolução*, os alunos encontram a função:

$$f(x) = 16{,}011x + 160$$

Na etapa de *Modelo Matemático* (Biembengut & Hein, 2021), após encontrado um modelo matemático como uma função do 1º grau, se deu a subetapa de *interpretação*, em que os alunos foram orientados para elaborar um relatório explicando o uso desse modelo. Também, sob a mediação do professor, utilizaram o *software GeoGebra*, em *tablets* disponibilizados pelo professor, para construir graficamente a função encontrada, para analisar a representação do modelo, como pode ser verificado no recorte de uma das gravações, que seria do diálogo do aluno A1:

> *"[...] 16,011 é o valor que ela gasta por litro de suco, o x equivale a quantidade de litros feito, ele varia de acordo com os pedidos, por isso é x, o 160 é o valor que ela gasta mensalmente, esse valor é fixo, ele não muda. Multiplica o valor gasto por litro pela quantidade de litros, depois pega o resultado e soma com 160"*. (Da pesquisa dos Autores)

Na fase de apresentação dos resultados para toda a turma e de validação do modelo através de aplicação e discussão, ocorreu a sub-etapa de *validação*, porque os grupos trocaram ideias entre si e com o professor, de forma oral, quando puderam reconhecer os resultados obtidos pela regra de três e ao utilizar no modelo da função os dados das encomendas propostas na imagem fornecida na atividade. Isso os levou a concluir que o modelo estava adequado e não seria necessário fazer nenhuma outra adequação.

Diante do exposto, considera-se que a atividade promoveu a aprendizagem significativa, pois instigou aos alunos a participarem ativamente do processo, participando e refletindo (Moran, 2018).

Considerações Finais

Os resultados apresentados indicam que a Resolução de Problemas, quando associada com a Modelagem Matemática em um contexto que aborda um tema de realidade do aluno traz significado ao conhecimento matemático produzido, no que se refere ao estudo da função de 1° grau. Através da atividade aplicada, em fases, foi possível identificar que os alunos buscaram compreender o tema, fazer cálculos envolvendo a razão e proporção e enfatizar as variáveis dependentes e independentes na elaboração do modelo matemático. A obtenção da função de 1° grau e a sua representação em *software*, como o *GeoGebra*, favoreceu a visualização e o entendimento de que a função encontrada minimiza a quantidade de operações matemáticas a serem realizadas, para encontrar o resultado.

Além disso, a aplicação da atividade contribuiu para a interação, o protagonismo e o cooperativismo durante o processo de ensino e aprendizagem, já que tornou a sala de aula um lugar prazeroso e instigante para dar o devido significado ao conhecimento matemático (Biembengut & Hein, 2021). Diante disso, foi observado que, quando os objetos do conhecimento são trabalhados por meio de um tema de interesse dos alunos, o processo se torna mais satisfatório, tornando a sua aprendizagem significativa.

Desse modo, os resultados indicam que atividades de Resolução de Problemas, que abordam temas relevantes, conforme as etapas da Modelagem Matemática, podem ocasionar o desenvolvimento do pensamento matemático acerca de função, a partir de cálculos de razão e proporção.

Por mais que essas práticas sejam pouco exploradas em sala de aula, através deste trabalho, espera-se contribuir de forma positiva e despertar outros professores da área para a necessidade da aplicabilidade de atividades que desenvolvam o protagonismo do aluno, que podem ser desenvolvidas atividades que fazem referência ao cotidiano ou a realidade em que o aluno esteja inserido.

Referências e bibliografia

Almeida, L. M. W., Silva, K. A. P., & Vertuan, R. E. (2021). *Modelagem Matemática na educação básica*. 1.ed., 2. reimpressão. São Paulo: Contexto.

Barbosa, J. C. (2001). *Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico.* Reunião anual da ANPED, 24(7), 1-15.

Bassanezi, R. C. (2019) *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. 4.ed., 2.reimpressão. São Paulo: Contexto.

Biembengut, M. S., & Hein, N. (2021) *Modelagem matemática no ensino*. 5.ed.,5.reimpressão. São Paulo: Contexto.

Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação.

D'Ambrósio, U. (2002). *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade.* Autêntica.

Esteban, M. P. S. (2010). *Pesquisas qualitativa em educação: fundamentos e tradições.* Porto Alegre: AMGH.

Moran, J. (2018). *Metodologias ativas: para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática.* Porto Alegre: Penso, 02-25.

Onuchic, L. de la R. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *Pesquisa em Educação Matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 199-220.

Rigonatto, M. (2015). *Modelagem Matemática no Processo de Ensino e Aprendizagem.* https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/modelagem-matematica-no-processo-ensino-aprendizagem.htm.

Zequim, K. C. (2014). *A resolução de problemas, a modelagem matemática e desenvolvimento de habilidades matemáticas em alunos do 7° ano do ensino fundamental.* Dissertação (Ensino de Ciências Exatas) Universidade Federal de São Carlos.

Ambientes de modelación matemática con Excel en el aprendizaje del concepto de conjunto generador

Guillermo **Ramírez** Montes
Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
guillermo.ramirez_m@ucr.ac.cr

Resumen

Este estudio es parte de una investigación más amplia centrada en la implementación de tareas de modelación para el fomento de competencias de modelación y la aplicabilidad de los conceptos en un curso de álgebra lineal. El estudio aquí presente visa caracterizar los diferentes modelos creados por estudiantes universitarios, al trabajar una tarea de modelación matemática orientada a la consolidación del concepto de conjunto generador y conceptos asociados, usando para tal efecto la hoja de Excel en un contexto de generación de contraseñas bancarias. La recolección de datos incluye las resoluciones digitales y los archivos de Excel referentes al trabajo del estudiantado. El análisis es cualitativo e interpretativo. Los resultados revelan diferentes modelos construidos por el estudiantado mediante la hoja de Excel, algunos usando un concepto coloquial de conjunto generador y la minoría movilizando el concepto matemático de conjunto generador, permitiendo reflexionar sobre la complejidad del concepto.

Palabras clave: Educación universitaria; Álgebra lineal; Conjunto generador; Tarea de modelación matemática; generación de claves bancarias; Costa Rica; Hoja de cálculo de Excel.

Introducción

El álgebra lineal representa un área de conocimiento matemático fundamental en la formación del futuro profesional de Ingeniería y profesiones con gran demanda matemática, no así su aprendizaje asociado a algunos conceptos representa desafíos para el estudiantado, tal es el caso de aquellos asociados a la unidad de espacios vectoriales, catalogados comúnmente por el estudiantado universitario como de mucha abstracción (Costa & Rossignoli, 2017). Estas

dificultades asociadas a la abstracción no son ajenas al estudiantado del curso MA1004 álgebra lineal de la Universidad de Costa Rica, donde las estadísticas año tras año reflejan un bajo rendimiento en el estudiantado en las evaluaciones asociadas a la unidad de espacio vectorial, en comparación con otras unidades como matrices y sistemas de ecuaciones lineales.

Esta problemática, asociada a la enseñanza tradicional del álgebra lineal basada en la resolución de ejercicios en contextos intramatemáticos, requiere una contextualización de los conceptos trabajados con situaciones reales, para lo cual los ambientes de modelación matemática se vuelven útiles; siendo que motivan al estudiantado en su aprendizaje de conceptos de álgebra lineal (Cárcamo et al., 2016) y ofrecen alternativas para consolidar conceptos matemáticos (Kaiser & Sriraman, 2006). Además, la incorporación de la hoja de cálculo en el trabajo de estos ambientes de modelación se vuelve importante también, dado que el estudiantado debe conocer las capacidades de las diferentes tecnologías en su trabajo con tareas de modelación (Galbraith & Stillman, 2006).

Considerando lo expuesto, en este estudio pretende caracterizar los diferentes modelos creados por estudiantes universitarios, al trabajar una tarea de modelación matemática, apoyada en el recurso de la hoja de cálculo, orientada a la consolidación del concepto de conjunto generador y conceptos asociados. Para tal efecto se busca responder a las siguientes interrogantes,

¿Responden los modelos creados por el estudiantado con la hoja de Excel a las especificaciones de la tarea?

¿Qué tipo de conjunto generador, en términos de cantidad de elementos y complejidad matemática, es usado por el estudiantado en su construcción del modelo matemático?

Estudios previos sobre conjunto generador y conceptos asociados

Un análisis hecho por Bianchini et al. (2019) muestra, en términos generales, que los estudios desarrollados en educación en álgebra lineal en América Latina, se han concentrado en promover el aprendizaje de tópicos asociados a la unidad de transformaciones lineales y espacio vectorial; respecto a esta última unidad trabajando en conceptos como (in)dependencia lineal, conjunto generador y base de un subespacio vectorial.

Wawro et al. (2012) proponen una secuencia de cuatro tareas basadas en contextos reales, orientada a promover comprensión significativa del concepto de subespacio generado e independencia lineal. Los resultados de esta investigación muestran que este tipo de tareas basadas en contextos realistas, abren las puertas para facilitar la construcción imaginaria y formal de los conceptos involucrados, promoviendo justificaciones que permiten alcanzar la comprensión significativa de los conceptos.

Trigueros y Possani (2013), usando ambientes de modelación matemática, realizaron un estudio en el contexto de producción de fábricas, con el objetivo de introducir conceptos asociados a la unidad de espacio vectorial, en particular el concepto de combinación lineal e independencia lineal. Los resultados revelan dificultades iniciales para comprender la tarea, pero

conforme van explorando y haciendo conexiones entre la representación gráfica y algebraica, consiguen responder a las preguntas y reconocer los conceptos matemáticos estudiados.

Siguiendo la línea de contextos de modelación, Cárcamo et al. (2016) proponen una tarea en el contexto de generación de contraseñas, pero sin uso de la hoja de cálculo, para introducir los conceptos de conjunto generador y espacio generado. Los resultados de este estudio evidencian que la propuesta ayudó en la construcción de los conceptos matemáticos estudiados y que el estudiantado evolucionara de un nivel informal a un nivel formal de los conceptos.

Modelación matemática y recurso tecnológico en el aprendizaje del álgebra lineal

Entre las perspectivas de modelación matemática encontramos la perspectiva educacional, la cual puede estar orientada a promover procesos de aprendizaje o introducir y consolidar conceptos matemáticos (Kaiser & Sriraman, 2006). En esta línea, Galbraith y Stillman (2006) refieren que la modelación, desde la perspectiva educacional, permite a la persona docente indagar sobre los diferentes conceptos y competencias de modelación que el estudiantado consigue movilizar. Además, estos autores refieren que, en la actividad de validación puede ocurrir que los resultados se ajusten o no, parcial o totalmente, a lo solicitado en la situación problema de la tarea, por lo que será necesario que el individuo reflexione sobre sus resultados reales.

Para Bagley y Rabin (2010) es necesario que el estudiantado movilice diferentes tipos de pensamiento al trabajar conceptos ligados a la unidad de espacios vectoriales, como son el pensamiento abstracto, geométrico y computacional. Además, resulta importante incentivar al estudiantado a realizar sus propias predicciones sobre los posibles resultados que podría obtener tras aplicar un determinado algoritmo, fomentando la validación de resultados reales frente a sus predicciones.

En lo que respecta a tecnología, Galbraith y Stillman (2006) refieren que la tecnología debe ser incluida en el trabajo de tareas de modelación siempre que sea posible. Por su parte, Chaamwe y Shumba (2016) refieren la capacidad de la hoja de cálculo de Excel para manipular fórmulas y realizar diferentes operaciones que se utilizan en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, en particular, “el uso de hojas de cálculo permite a los estudiantes explorar procesos alternativos de solución que van más allá de la manipulación simbólica, y proporcionar al estudiantado una comprensión profundizada de los conceptos involucrados en la tarea” (p. 570).

Metodología

Este estudio tiene por base una investigación fundamentada en la implementación de tres tareas de modelación, con carácter formativo, realizada durante el I semestre 2021 en un curso de álgebra lineal de la Universidad de Costa Rica, con el objetivo de consolidar el aprendizaje de conceptos de álgebra lineal y promover competencias de modelación matemática.

Las personas participantes del estudio fueron 11 estudiantes de pregrado de carreras de Ingeniería y Ciencias Económicas (6 mujeres y 5 hombres), quienes estaban matriculados en el

mismo grupo del curso MA1004 de álgebra lineal, la mayoría de ellos en su primer año de educación superior. Respecto a las características cognitivas del estudiantado del presente estudio, estos tenían diferentes niveles de dominio de Excel, incluyendo casos de estudiantes que nunca lo habían utilizado. Además, tenían niveles de aprendizaje semejantes, dado que todos habían recibido ya la clase magistral de conceptos asociados a la unidad de espacios vectoriales, geometría vectorial, determinantes y matrices y sistemas de ecuaciones; aprendizaje fundamentado en el uso de algoritmos para resolver ejercicios en contextos matemáticos. Las personas participantes habían trabajado previamente una tarea de modelación asociada al uso de sistemas de ecuaciones lineales, en el contexto de flujos por tuberías; sin embargo, previo a dicha tarea nunca habían trabajado tareas de modelación.

Respecto a la tarea aquí presentada, resulta de una adaptación realizada a la tarea propuesta en Cárcamo et al. (2016), donde se plantea una situación real en el contexto costarricense de un banco público de dicho país, el banco de Costa Rica (BCR), con el objetivo de que el estudiantado identificase cómo se puede usar el concepto de conjunto generador y otros conceptos como el de combinación lineal y base de un subespacio vectorial en el contexto de generación de contraseñas usando tecnología.

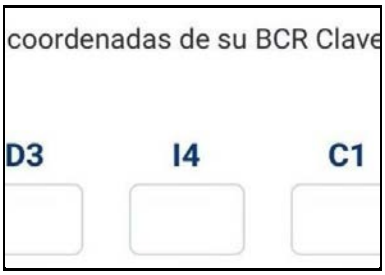


Figura 1. Ejemplo de contraseña solicitada en la tarea a partir de clave dinámica BCR.

En la tarea se invita al estudiantado investigar la configuración que tiene una clave dinámica BCR, y a partir de ello, construir un modelo matemático que genere diferentes claves dinámicas usando sus conocimientos previos de álgebra lineal, en particular, el uso de vectores en IR^n. Posterior al proceso de modelación, se le solicita atender a tres aspectos: desarrollar un generador de contraseña temporal atendiendo a las expectativas del banco y explique su construcción, y responder a las preguntas ¿cuáles son los vectores que generan sus claves dinámicas? y ¿qué otro generador de claves dinámicas podría generar las mismas claves dinámicas?; preguntas cuya intención fue evidenciar si efectivamente hubo movilización del concepto de conjunto generador.

La recolección de los datos considera las resoluciones a mano digitalizadas del trabajo desarrollado por el estudiantado, como así también sus archivos Excel donde generaron las diferentes claves dinámicas solicitadas. Para dicha recolección la persona investigadora usó el correo institucional, dando fechas específicas para la entrega de las resoluciones, en apoyo con el profesor del curso quien hacía recordatorios de fechas de entrega. El análisis es descriptivo e interpretativo (Cohen et al., 2007), donde la persona investigadora utiliza extractos del trabajo a mano y en Excel para realizar las respectivas caracterizaciones de los modelos obtenidos por el

estudiantado. Para efectos del estudio, se usan nombres ficticios, a modo de garantizar el anonimato de las personas participantes según consentimiento informado a los mismas.

Resultados

El análisis ha sido dividido en dos secciones, referentes a tipos de modelos construidos por el estudiantado. En cada sección se analizan semejanzas y diferencias entre las resoluciones presentadas por el estudiantado. Por efectos de espacio, en este escrito se presenta un único extracto de la resolución por cada sección, caracterizando la misma respecto de las demás resoluciones.

Modelos matemáticos basados en nociones del concepto de conjunto generador

Un total de ocho estudiantes crearon modelos que, aunque responden a la situación problema de crear generadores de claves dinámicas BCR con Excel, no usan vectores en IR^n en el sentido estricto de conjunto generador para construir dichas claves dinámicas, en vez de eso usan la función *aleatorio*, alguna otra función de la hoja de Excel o combinaciones lineales de vectores sin arremeter apropiadamente al concepto de conjunto generador. Como parte de estos modelos matemáticos encontramos el modelo de Luigi, basado en combinaciones lineales de diferentes grupos de vectores. Dicho modelo se presenta en la figura 2.

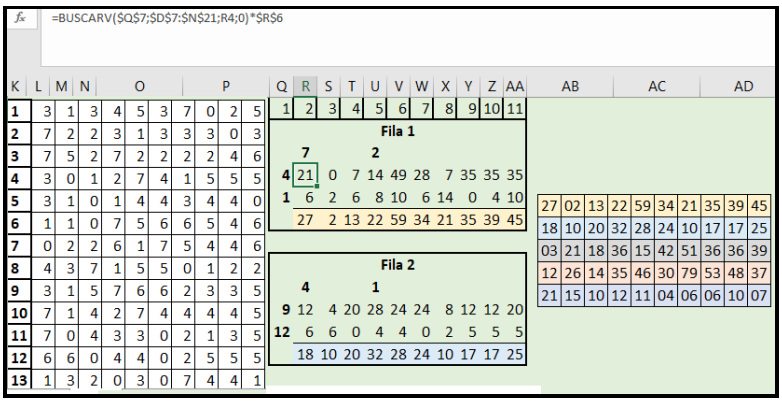


Figura 2. Modelo y resultados matemáticos de Luigi.

La figura 2 ilustra a la derecha una de las claves dinámicas BCR construida por Luigi, formada por 5 filas y 10 columnas. Para generar dicha clave Luigi usa la función *aleatorio.entre*, la función *buscarv* y el concepto de combinación lineal. Explícitamente, cada fila de la clave dinámica se forma a partir de la combinación lineal de los vectores fila escogidos aleatoriamente de la matriz ubicada a la izquierda de la figura usando la función *buscarv*. Así por ejemplo, haciendo la combinación lineal del vector ubicado en la posición 4 y posición 1 (posiciones escogidas de forma aleatoria), y multiplicado cada uno por 7 y 2, respectivamente, se obtiene $7(3,0,1,2,7,2,2,2,2,,4,6) + 2(3,1,3,4,5,3,7,0,2,5) = (27,02,13,22,59,34,21,35,39,45)$, la primer fila de la clave dinámica. De esta forma, el modelo de Luigi queda formado por combinaciones lineales de diferentes vectores en IR^{10}, lo que evidencia una noción del concepto de conjunto generador, pero no un aprendizaje consolidado, considerando que no llega a utilizar

un único conjunto de vectores para generar todas las filas de la clave dinámica, sino conjuntos que generan diferentes subespacios fila de IR^{10}.

En el caso de los restantes siete estudiantes, todos utilizan la función *aleatorio* o *aleatorio.entre* para generar números aleatorios que conformen la clave dinámica directamente o como números previos a generar, para posteriormente usar otras funciones de Excel, como por ejemplo las funciones *jerarquía*, *extrae*, *si*, *índice*, *contara*, *concatenar*, entre otras. Este segundo tipo de modelos tienden a ser más complejos de generar en relación a los modelos basados solamente en generación de números aleatorios, pero ambos generan claves dinámicas formadas por 5 filas y 10 columnas, conforme al diseño de una clave BCR. Parte de esta evidencia puede observarse en la repuesta dada por Kimberly cuando explica la construcción de su modelo, mencionando que "la cantidad de entradas de una clave dinámica que utiliza un banco corresponde a una matriz de 5x10, como la que se muestra en las columnas de la A a la J", refiriéndose a que la clave dinámica a construir debe tener un total de diez columnas, las correspondientes a las letras de A a la J.

Todavía así, se puede interpretar que aquellos estudiantes que generan claves dinámicas usando solo números aleatorios, no saben cómo movilizar el uso de vectores en IR^n para generar las claves dinámicas, por lo que en estos estudiantes, existe una noción coloquial asociada al concepto de conjunto generador.

Modelos matemáticos basados en el concepto formal de conjunto generador

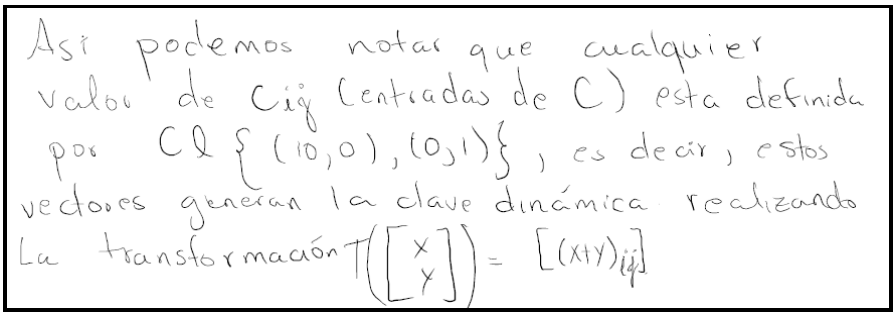
Tres estudiantes consiguen movilizar el concepto formal de conjunto generador, recurriendo a vectores canónicos de IR^5, vectores no canónicos de IR^5, y vectores no canónicos de IR^2. Estos tres modelos responden a las especificaciones de la tarea, creando claves con la estructura BCR. En particular, el modelo Olman con vectores de IR^2 posee una estructura más compleja que los otros dos modelos, los cuales son basados en la generación de las filas de la clave dinámica a partir de vectores del espacio fila de los vectores del conjunto generador. El modelo de Olman es presentado en la figura 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	52	39	69	81	94	78	27	76	29	99
2	71	09	24	18	20	94	52	88	58	37
3	25	29	81	35	09	70	11	21	75	93
4	35	65	79	89	53	82	01	59	11	03
5	08	91	46	63	54	87	12	16	08	55
6									Valor de	
7	α	e_1		β	e_2		x	y	entrada	Entrad en C
8	5	10	0	2	0	1	50	2	52	A1
9	7	10	0	1	0	1	70	1	71	A2
10	2	10	0	5	0	1	20	5	25	A3
11	3	10	0	5	0	1	30	5	35	A4
12	0	10	0	8	0	1	0	8	08	A5
13	3	10	0	9	0	1	30	9	39	B1
14	0	10	0	9	0	1	0	9	09	B2

Figura 3. Modelo y resultados matemáticos de Olman.

La figura 3 ilustra en la parte superior la clave dinámica de dimensión 5x10, construida por Olman a partir de la combinación lineal de los vectores $(10,0)$ y $(0,1)$, denotados por e_1 y e_2 por el estudiante. La notación y los vectores escogidos, dejan ver que Olman conoce el concepto de

base canónica de un espacio vectorial, y además que multiplicar uno de estos vectores por un escalar da como resultado una base que genera al mismo espacio vectorial. Al observar la columna *valor de entrada*, se observa que las entradas de esta columna corresponden a los valores de cada entrada en la clave dinámica, y se obtienen realizando la suma de las entradas del vector generado por la combinación lineal del conjunto generador escogido, conforme deja ver explícitamente la explicación del estudiante en la figura 4.



La figura 4 deja ver una movilización del concepto de transformación, incluyendo una correcta notación matemática, lo que aporta un carácter más complejo a este modelo en relación a los otros.

Conclusiones

Los resultados permiten concluir que los modelos creados por el estudiantado, responden a la situación problema presentada en la tarea en relación al producto a originar, una clave dinámica formada por cinco filas y diez columnas, con entradas de dos dígitos. No así, en términos de estructura matemática para crear dichas claves, la minoría de los modelos recurren al concepto formal de conjunto generador de un subespacio vectorial, siendo que la mayoría de modelos recurren a nociones del concepto de conjunto generador, algunas de ellas usando el concepto coloquial de lo que significa "generar" un conjunto usando números aleatorios. Los modelos matemáticos están basados en el uso de funciones de la hoja de Excel, recurriendo simplemente al uso de estas fórmulas para crear las claves dinámicas sin movilizar el concepto de conjunto generador, o recurriendo a funciones de Excel como elementos intermedios, para en el proceso de construcción del modelo usar conjuntos generadores con vectores de IR^5 o IR^2.

La tarea matemática permite ver que contextos cercanos al estudiantado permite movilizar conceptos de álgebra lineal, aunque hacer estas conexiones no resulta tan sencillo para todo el estudiantado, lo que lleva a reflexionar sobre futuras adaptaciones que se deban hacer a la tarea.

Referencias y bibliografía

Bagley, S., & Rabin, J. (2010). Students' use of computational thinking in Linear Algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *2*, 83–104. https://doi.org/10.1007/s40753-015-0022-x

Bianchini, B. L., de Lima, G. L., & Gomes, E. (2019). Linear algebra in engineering: an analysis of Latin American studies**.** *ZDM Mathematics Education*, *51* (7), 1097–1110. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01081-5

Cárcamo, A., Gómez, J., & Fortuny, J. (2016). Mathematical modelling in engineering: A proposal to introduce linear algebra concepts. *Journal of Technology and Science Education, 6*(1), 62–70. http://dx.doi.org/10.3926/jotse.177

Chaamwe, N., & Shumba, L. (2016). Spreadsheets: A tool for e-learning - a case of matrices in Microsoft Excel. *International Journal of Information and Education Technology*, *6*(7), 570–575. http://dx.doi.org/10.7763/IJIET.2016.V6.753

Cohen, L., Manion, L., & Mohinson, K. (2011). *Research methods in education (7th ed.)*. London, UK: Routledge.

Costa, V. A., & Rossignoli, R. (2017). Enseñanza del álgebra lineal en una facultad de ingeniería: Aspectos metodológicos y didácticos. *Revista Educación en Ingeniería*, *12*(23), 49–55. https://doi.org/10.26507/rei.v12n23.734

Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM Mathematics Education, 38*(2), 143–162. https://doi.org/10.1007/BF02655886

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 38* (3), 302–310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Trigueros, M., & Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *438*(4), 1779–1792. https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.04.009

Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., Sweeney, G. F., & Larson, C. (2012). An inquiry-oriented approach to span and linear independence: The case of the magic carpet ride sequence. *PRIMUS*, *22*(8), 577–599.

Análisis de una organización matemática basada de un recorrido de estudio e investigación sobre el COVID – 19 en el nivel superior

Carlos **Quispe** Palomino
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
a20174134@pucp.edu.pe
Elvis **Bustamante** Ramos
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas
Perú
ebustamater@pucp.edu.pe

Resumen

El trabajo tiene como finalidad aportar en recuperar el sentido de las matemáticas encontrando una razón de ser de los saberes sobre funciones elementales propuestos en la educación secundaria y el primer ciclo de universidad. En esta investigación, se plantea un problema sobre el tiempo de contagio de un virus (COVID-19) que permita el proceso de modelización matemática. Para ello, se diseña e implementa una actividad para los estudiantes del primer ciclo universitario como propuesta de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, basada en un dispositivo didáctico llamado *recorrido de estudio e investigación* (REI). Luego la organización matemática que emerge de este REI se analiza por medio de los *indicadores de grado de completitud*. Los resultados fueron que solo dos de los siete indicadores de completitud no llegan a cumplirse por la rigidez en el uso de ostensivos y el escaso uso de tareas inversas.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación superior; Enseñanza presencial; Diseño curricular; Teoría antropológica de la didáctico; Investigación cualitativa; Análisis funcional; Perú.

Introducción

La matemática es parte importante de nuestros conocimientos, sin embargo, se afronta una ausencia de razones de ser de estos, en el cual la razón de estos saberes no tiene una

aplicación a la vida real (Rojas y Sierra, 2021). Como en el tema de funciones, en el que las actividades suelen tener un sentido superficial y poco útil (Lujan, 2019; Donvito et al., 2017). En consecuencia, los contenidos matemáticos se estudian en bloques separados o poco relacionados entre sí (Donvito et al., 2017). Además, se evidencia errores y dificultades por los estudiantes en los cursos de matemáticas del primer ciclo de la universidad (Moraga et al., 2015; Duche et al., 2020).

Por otro lado, el tema funciones se encuentra en el Currículo Nacional del Perú, abarcando las funciones lineal, afín, cuadrática, periódica y exponencial. Así como también en los cursos de matemáticas del primer ciclo del nivel universitario, abarcando más temas como las funciones logaritmo y por tramos. Por otra parte, en la línea de investigación de la didáctica de las matemáticas, se han desarrollado propuestas de razones de ser de saberes matemáticos mediante procesos de modelización matemática usando un recorrido de estudio e investigación (REI), desarrollándose una enseñanza a través de preguntas o por investigación, las cuales establecen un sentido al estudio de las matemáticas (Rojas y Sierra, 2021; Serrano, 2013; Donvito et al., 2017), entre otros.

De esta manera, nuestra investigación muestra su relevancia, sumándose a las demás investigaciones de diseño de actividades mediante el REI.

Marco teórico y metodología

Según Lucas (2010), Chevallard introduce a mediados de los años 90 la noción de Praxeología u Organización Matemática (OM), que es una de las nociones básicas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Según Bosch et al. (2006), la TAD propone que toda actividad humana puede ser modelada mediante praxeologías (*praxis + logos*). En la cual es posible distinguir dos niveles:

- **El nivel de la praxis**, relacionado al saber-hacer y a los *tipos de tareas*, los problemas, y las *técnicas* que se construyen y usan para resolverlos.
- **El nivel del logos o del "saber"**, aquí se hallan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se usan, denominada *tecnología*. Dentro del "saber" se postula un segundo nivel de descripción-explicación-justificación (esto es, el nivel de la tecnología de la tecnología) que se denomina teoría.
-

Según Chevallard (1999), existe una distinción de diferentes tipos de OM según el grado de complejidad de sus elementos.

Para la construcción de nuestro REI, nos apoyaremos en investigaciones como la realizada en Otero et al. (2013), en el cual se menciona que los REI permiten reformular los programas escolares como un conjunto de preguntas generatrices, cuyas respuestas permiten mostrar organizaciones matemáticas que se proponen en los planes de estudio, e introducen una nueva epistemología, que devuelven sentido y la funcionalidad a la matemática escolar, la cual reemplaza a, la pedagogía de visitar las obras.

Nuestro objetivo es el análisis de la praxeología de REI. Por ello vamos a seguir la metodología de tipo cualitativa planteada por Barquero y Bosch (como se citó en García et al., 2019), la cual es una adaptación de la metodología de la ingeniería didáctica para el desarrollo de recursos y formación del profesorado en el que se indica como vamos a realizar nuestro recorrido de estudio e investigación. El cuál analizaremos mediante los indicadores de grado de completitud.

A continuación, describiremos los pasos que seguiremos en nuestro trabajo:

Fase 1. De análisis preliminar: se realizará un análisis epistemológico superficial de la noción de funciones para determinar nociones que puedan favorecer su emergencia.
Así también como un análisis de libros de matemática del quinto de secundaria y primer ciclo universitario sobre nociones de funciones.

Fase 2. De diseño y análisis a priori: se diseñará una propuesta de REI basado en el MER dominante en el que se formula una cuestión generatriz, que determine cuestiones derivadas que implique el uso de nociones de funciones o asociadas a ellas y se describen posibles recorridos. Además

, se realizará el diseño de las actividades que se desarrollan durante la implementación del REI.

Fase 3. Análisis in Vivo: se aplicará el REI propuesto en estudiantes del primer ciclo de una universidad, gestionado por un profesor, que hará de investigador-observador. Además, se recopilará información mediante: grabaciones, Word, GeoGebra, Jamboard, Fotos y Entrevistas.

Fase 4. Análisis a posteriori: en esta fase, analizamos mediante los siete indicadores de grado de completitud las praxeologías que emergerán del REI implementado como sigue:

- I1: se analizará si los tipos de tareas tienen un nexo común.
- I2: se analizará si existen diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas.
- I3: se analizará si existe independencia de los ostensivos que integran las técnicas.
- I4: se analizará si existen tareas y técnicas inversas.
- I5: se analizará si se cuestionan sobre el funcionamiento de las técnicas empleadas.
- I6: se analizará si hay técnicas nuevas, que amplíen los tipos de tareas existentes.
- I7: se analizará la existencia de tareas matemáticas abiertas.

Parte Preliminar y Diseño

Primero se realizó un análisis de los libros de texto del quinto de secundaria y dos libros guía que usan los estudiantes de medicina del primer ciclo de universidad en su curso de Matemática para identificar el Modelo Epistemológico de Referencia (MER) dominante. Y en base a este análisis se realizó una propuesta de un posible recorrido como se muestra en la figura 1. Además, se consideró 6 sesiones y un software (GeoGebra) para el desarrollo del REI aplicado a dos estudiantes de Medicina de una universidad del Perú.

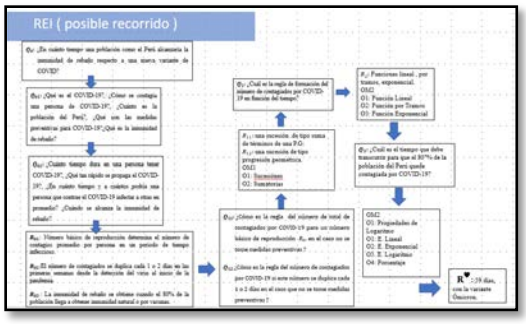


Figura 1. Diseño matemático.

Parte Experimental

Esta presentación se va a enfocar en los datos obtenidos por dos estudiantes (E_1 y E_2) y orientado por un profesor (P) para dar respuesta a la pregunta Q_0: *¿En cuánto tiempo tras la llegada una nueva variante del COVID-19, una población como el Perú alcanzaría la inmunidad de rebaño?*, bajo la dirección de un profesor durante seis sesiones del taller tienen una duración de 100 minutos por sesión.

Sesión 1: Se presenta la cuestión a trabajar Q_0. Es así como los estudiantes empiezan a formular cuestiones como se muestra en la figura 2. Además, el estudiante E1 indicó que hay que precisar algunos términos como la tasa de contagio. Esto motivó la formulación de la siguiente pregunta**: ¿qué es el número básico de reproducción?**

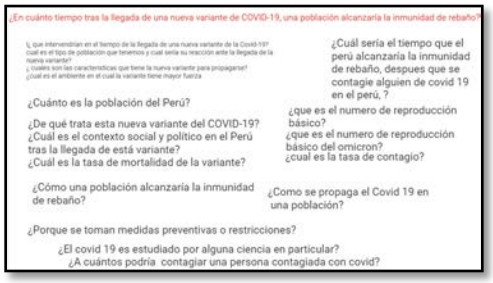


Figura 2. Formulación de las cuestiones derivadas de Q_0 por los estudiantes, que permiten iniciar la investigación.

Sesión 2: En esta parte, se trata de alinear la investigación. Para ello, se busca la información relevante para luego organizarla y comenzar a plantear un primer bosquejo del modelo matemático que responda a $\boldsymbol{Q_0}$. Los estudiantes profundizaron en la cuestión sobre $\boldsymbol{Q_0}$, haciendo preguntas como:

E2: En la tasa mortalidad de esta nueva variante

E1: Del mismo coronavirus, que conocemos

Se propone elegir dos variantes de COVID existentes para obtener características particulares de estas. Para esto, el profesor realiza la siguiente pregunta: ¿cuál de las variantes de COVID ha afectado más al País? De esta forma, se limitó la búsqueda de información. Se establece buscar información sobre R0 (número básico de reproducción) en el Perú para comenzar con la modelación de la pregunta generatriz.

Sesión 3: El equipo comienza a analizar la base de datos de acumulados positivos COVID en un registro gráfico y luego en un registro tabular. El equipo determina tomar los datos recopilados

desde el 6 hasta el 16 de marzo, como se muestra en la figura 3, pues en ese periodo de tiempo no se habían tomado medidas importantes para tratar de controlar el número de contagiados por COVID.

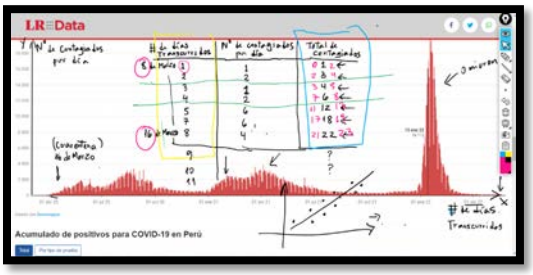


Figura 3. Trabajo de los estudiantes al decidir qué parte de los datos empezar a estudiar.

En la modelación realizada por los estudiantes, se obtienen dos propuestas (ambas sucesiones). La primera es del tipo progresión aritmética y la segunda es otra sucesión de dos niveles como se muestran en la siguiente figura.

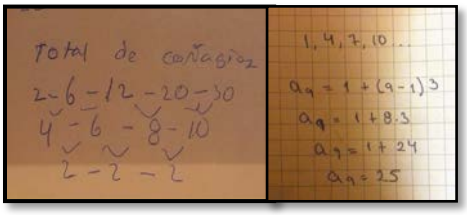


Figura 4. Propuesta de los estudiantes.

Sesión 4: Los estudiantes consiguen hallar las reglas de formación para las sucesiones que se aproximan a los datos que son $a(n)$ y $b(n)$. En este proceso, E2 usó la fórmula del término n-ésimo de una progresión aritmética de la primera sucesión. Para la segunda sucesión, E1 encuentra que el número de contagiados en el n-ésimo día transcurrido es $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \cdots n) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = n(n+1)$, mientras E2 consigue directamente el patrón al tantear valores iniciales como se muestra en la figura 5.

Figura 5. Las reglas de formación de las sucesiones obtenidas por E1 y E2.

En este punto los estudiantes plantearon una función por lo cual el profesor indicó:

P: ¿Una sucesión es una función?
E2: Sí, pues a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un elemento del conjunto de llegada.
E1: Sí.

P: Entonces, podríamos extender las reglas de formación de sucesiones a funciones.
P: ¿Qué nos saldría si extendemos a funciones?,¿qué funciones tendríamos?

Se comienza a realizar la extensión reconociendo el dominio de la sucesión a(n) y b(n), que viene a ser los naturales y extenderlo a los reales cuando extienden a(n) y b(n) a las funciones: $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = 3x - 2$.

P: ¿Qué funciones hemos obtenido?
E2: Una cuadrática y una lineal

Posteriormente, se realizó un análisis gráfico de las funciones f y g para la aproximación de la data por medio del GeoGebra (ver figura 6).

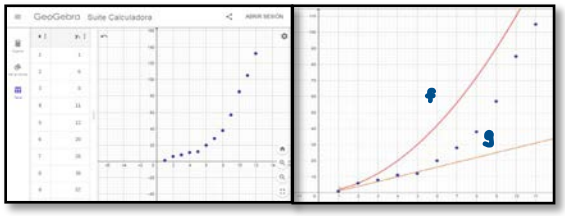


Figura 6. Se implementó como parte de la verificación del modelo, el uso de GeoGebra por los estudiantes E1 y E2.

Al observar las gráficas de las funciones f y g, se realiza el siguiente diálogo:

P: ¿Cuál de las funciones modela mejor a los datos, es decir, a los puntos de morado?
E2: Yo creo que la cuadrática, más que todo por su dominio y el rango.
E2: Bueno, más que todo, porque la cuadrática es una parábola y se va para arriba
El equipo aprecia que al inicio parece que los datos son cercanos a la parábola. Luego, se van distanciado y después vuelven acercarse.
P: ¿Y sobre la gráfica de la función lineal?
E2: Como es recta, se va alejando más.
E1: Yo también creo que la que mejor se acerca a los datos es la parábola.
P: ¿Qué pasaría si solo hubiésemos modelado hasta el día 5? ¿Qué función hubieras elegido?
E2: La recta

El equipo observa que el elegir una función que modele los datos depende de qué intervalo de tiempo se esté tomando. Entonces se planteó: ¿existirá otra cuadrática que se aproxime mejor que la que tenemos a los datos? Esto nos lleva a usar la regla de formación de una función cuadrática: $\boldsymbol{h(x) = ax^2 + bx + c}$; con $\boldsymbol{a \neq 0}$. En el cual los estudiantes utilizaron tres puntos de la tabla e indicaron que debe cumplir: si $(x; y) \in f$, entonces $f(x) = y$. En consecuencia, aparece un sistema de ecuaciones y los estudiantes lo resolvieron por los **métodos de reducción y sustitución**; y lo verificaron por el **método de Cramer** mediante una página web.

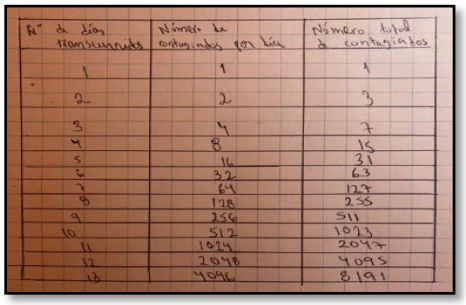
Luego, utilizaron GeoGebra para indicar que la función $h(x) = \frac{79}{60}x^2 - \frac{103}{20}x + \frac{29}{6}$ se una mejor aproximación respecto a f y g.

Sesión 5: E2 comenzó a realizar una búsqueda en internet y encontró información de otra técnica; por esa razón E2 intentó solucionar el problema mediante el método de aproximación mínimos cuadrados discreto (regresión cuadrática), es decir, aproximarse a los datos por una parábola (función cuadrática), pero, no pudo identificar correctamente los coeficientes, pues son sumatorias, como se muestra en las notas que realizó de la técnica en la figura 7.

Figura 7. Tabla para hallar los coeficientes por el método de mínimos cuadrados (regresión cuadrática)

A continuar con la pregunta: ¿Será posible encontrar una función que se aproxime mejor a los datos que las funciones obtenidas hasta ahora?
E2: En el artículo, encontré que uno se puede aproximar a los datos, además de la función lineal o cuadrática con funciones exponenciales, logaritmos, potenciales, hiperbólicas y logísticas.
E1: Por la forma que van nuestros datos
P: Sí

Los estudiantes observan a la función exponencial como candidato para el modelamiento del número total de contagiados por la forma que tiene su gráfica. Se continúa con la siguiente pregunta: ¿Cuál sería la regla de formación del número total de contagiados por COVID si cada persona que contrae dicho virus llega a contagiar a dos personas en promedio? Como respuesta los estudiantes realizan una tabla como se muestra en la figura 8.



Nº de días transcurridos	Número de contagiados por día	Número total de contagiados
1	1	1
2	2	3
3	4	7
4	8	15
5	16	31
6	32	63
7	64	127
8	128	255
9	256	511
10	512	1023
11	1024	2047
12	2048	4095
13	4096	8191

Figura 8. Tabla trabajada por los estudiantes según los datos.

A los estudiantes se les complica encontrar una regla de formación para la secuencia de número de contagiados. Solo se limitan a encontrar el valor del número total de contagiados a pesar, de la sugerencia del profesor que lo escriban como potencias de 2. Pero los estudiantes querían aplicar la técnica del término enésimo o la función cuadrática.

Conclusiones y resultados

En primer lugar, se resalta la importancia del marco teórico (TAD), que permitió identificar las praxeologías matemáticas que se podrían presentarse en el REI y presenta una metodología para el diseño del REI descrita en Barquero y Bosch (como se citó en García et al., 2019). Además, nos permitió identificar las praxeologías matemáticas asociadas al contenido que se presente en la implementación del REI para su análisis por medio de indicadores que en cierta medida nos permite decir que tan relativamente completa están las praxeologías desarrolladas.

A continuación, se menciona algunas observaciones en relación con los indicadores:

- Del I1, se observa el uso de diferentes técnicas relacionadas a sucesiones, función lineal y cuadrática.
- Del I2, se constata la construcción o la búsqueda de los estudiantes de una nueva técnica; por ejemplo, el uso de tres puntos para construir una función cuadrática o que permita obtener la mejor cuadrática que se aproxime a los datos (mínimos cuadrados). Y se evidencia dificultad por parte del estudiante al intentar expresar los datos por medio de tablas, por ejemplo, en el cálculo del término n-ésimo de la sucesión de segundo grado.
- Del I3, se evidencia la dependencia de los ostensivos que integran las técnicas. Por ejemplo, cuando los estudiantes realizaban la notación del coeficiente principal de una cuadrática, necesariamente, tenía que ser representado por la letra a. En caso contrario, causaba errores al realizar las operaciones con los coeficientes de una cuadrática. Además, al simbolizar las funciones que modelan el número de contagiados usan las notaciones clásicas como $f(x)$.
- Del I4, a excepción de una pregunta que se presentó, no se evidenciaron tareas y técnicas inversas.
- Del I5 y I6, al momento del análisis de las primeras respuestas de las preguntas Q_i, los estudiantes buscaron la manera de mejorar su modelo matemático, pasando desde una propuesta por sucesión, a una por función cuadrática. Luego, usaron la función cuya gráfica describa mejor el comportamiento de los datos a través del tiempo.
- Finalmente, el I7, el uso de la cuestión generatriz Q_0 determina una tarea, en el que se desconoce con anticipación qué técnica o técnicas permitirán resolverla. Esto condujo a los estudiantes a encontrar técnicas nuevas como la técnica del método de mínimos cuadrados, las cuales permitieron encontrar un modelo matemático para dar respuesta a Q_0.

Por lo anterior, se encontró restricciones y dificultades; y que no llegan a cumplirse dos indicadores relacionados al desarrollo de tareas inversas y a la independencia del uso de ostensivos.

Además, en el análisis de los resultados, durante la resolución del problema de contagio del COVID 19, pueden emerger algunos de los saberes de funciones propuestos en un curso de matemáticas del primer semestre de la universidad, para ser enseñados. Por ejemplo, los contenidos de la función lineal y cuadrática, y de conocimientos de sistemas de ecuaciones. A la búsqueda o construcción de una función del problema de contagios de COVID 19, aparece la necesidad de establecer una data de valores $(x; y)$ que cumpla con la función, es decir, una

necesidad de estudiar la noción del dominio y rango de la función. Pero, existen saberes que surgieron en el desarrollo del REI que no se consideró; por ejemplo, el tema de mínimos cuadrados. Por ello, podemos indicar que sería apropiado relacionar el contenido de funciones con sistemas de ecuaciones y técnicas para hallar la regla de correspondencia de una función (utilizando mínimos cuadrados) como parte de conocimientos propuesto en un currículo.

Por otro lado, los estudiantes se apoyaron en la representación gráfica para orientarse en la búsqueda de una función que dé respuesta a la pregunta planteada; es decir, elaboraron una técnica gráfica para indicar una relación de la gráfica con los datos. Por ello, será importante que el profesor gestione sesiones para ver una variedad de funciones en relación con datos, pues así permite abarcar una mayor parte del contenido de funciones y sus características.

En relación con el software utilizado, a pesar de que tuvieron dificultades en el uso; el empleo ayudó a los estudiantes en visualizar la aproximación de los modelos funcionales, por ello, se incorporó como parte de la técnica utilizada por los estudiantes. Por esta razón, sería conveniente desarrollar un taller sobre la manipulación de GeoGebra.

Finalmente, consideramos que la implementación del REI se desarrolló en una forma abierta, pues los estudiantes reflexionaron sobre sus respuestas con poca intervención del docente quien le ayudó con la orientación de las técnicas. Además, observamos que los estudiantes construyeron y cuestionaron nuevas técnicas.

Agradecimientos

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú, al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas – línea de epistemología de las matemáticas en didáctica de las matemáticas, por el apoyo brindado en la realización de la investigación.

Referencias y bibliografía

Bosch, M., García, F., Gascón, J. y Ruiz, H. L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta de la teoría antropológica de lo didáctico. Educación Matemática, *18*, 37-74.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Donvito, A., Otero, M. R. y Sureda, P. (2017). *Enseñanza por Investigación en la Escuela Secundaria.* Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Duche, A., Paredes, F., Gutiérrez, O. & Carcausto, L. (2020). Transición secundaria-universidad y la adaptación a la vida universitaria, *Revista de Ciencias Sociales, 26*(3), 244 – 258.

García, F., Barquero, B., Florensa, I. & Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, *Avance de Investigación en Educación Matemática*, *15*, 75 – 94.

Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas* (Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados). Universidad de Vigo.

Lujan, P. (2019). *Modelización de la función seno un recorrido de estudio e investigación sobre la respuesta estructural de un edificio frente a un sismo* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional de la PUCP.

Moraga, N., Copa, B., Musso, G., Giliverti, J. y Macoritto, A. (2015). Estrategias de articulación entre el nivel medio y la universidad. Curso "Me preparo para estudiar ingeniería". *Revista Argentina de Educación Superior*, *10*, 60-85.

Otero, M., Corica, A., Sureda, P., Fanaro, M., Llanos, V. y Parra, V. (2013*). La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el aula de Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Dunken.

Rojas, C.& Sierra, T (2021). Conocimientos geométricos como respuesta a un problema espacial en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación. Educación Matemática, *33*(1), 208 – 238.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica.* (Tesis de Doctorado).

Aplicação de uma Sequência Didática elaborada a partir da Resolução de Problemas e da Etnomatemática

Renata Cristina Geromel **Meneghetti**
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo
Brasil
rcgm@icmc.usp.br
Beatriz Brandão da **Silva**
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista
Brasil
beatriz.brandao@unesp.br

Resumo

Neste trabalho apresentamos um recorte de uma pesquisa de iniciação científica, discorrendo e discutindo sobre o planejamento e a aplicação no Ensino Médio de parte de uma sequência didática, na qual trabalhamos Análise Combinatória com o tema "Matemática, Futuro e Profissão" escolhido com os alunos. Tal sequência contemplou duas situações-problema gerais com subquestões, mas neste trabalho apresentaremos e discutiremos sobre uma parte dela. Para essa pesquisa, utilizamos a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da Resolução de Problemas e alguns pressupostos da Etnomatemática. Destacamos que esta investigação é qualitativa, com base na Pesquisa-Ação e alguns princípios do Estudo de Caso. A aplicação foi realizada em encontros à distância, online e síncronos com uma turma de Ensino Médio. Durante e após estudos teórico-práticos e as observações realizadas, percebemos que os alunos mostraram resistência diante do trabalho coletivo proposto, mas ao longo dos encontros e das atividades desenvolvidas apresentaram melhora na expressão de pensamentos e na argumentação matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática; Brasil; Ensino; Aprendizagem; Educação Básica; Ensino Médio.

Introdução

Inspirada em princípios de liberdade e ideias de solidariedade humana, a educação nacional brasileira tem por fim "o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da

cidadania e sua qualificação para o trabalho" (Brasil, 1996, título II, Art. 2º). Nessa direção, o Ensino Médio, etapa final da educação básica brasileira, deve ser promovido considerando algumas finalidades específicas, tais como "a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores" (Brasil, 1996, Art. 35º, inciso II) e "o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico" (Brasil, 1996, Art. 35º, inciso III).

Pensando nessas leis e em outros aspectos contemporâneos da educação básica brasileira, desenvolvemos uma pesquisa a nível de iniciação científica no período de julho a dezembro de 2020. Nessa investigação, tivemos por objetivo o desenvolvimento e a aplicação de uma sequência didática no Ensino Médio pautada nos pressupostos da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da Resolução de Problemas e em alguns dos princípios da Etnomatemática, buscando contribuir para uma aprendizagem significativa (Ausubel, 2000) nesse nível de ensino.

Neste trabalho, nossa intenção é apresentar um recorte dessa pesquisa, discorrendo e discutindo sobre o processo de planejamento e aplicação de parte dessa sequência didática, focalizando uma das duas situações-problema propostas, na qual trabalhamos assuntos matemáticos relativos ao estudo da Análise Combinatória e questões relativas aos objetivos acadêmicos e profissionais futuros dos estudantes. Destacamos, no entanto, que a sequência total incluiu também o conteúdo de Probabilidade, trabalhado na segunda situação-problema, sobre a qual não iremos discutir neste momento.

Referencial Teórico

Diante dos objetivos gerais da pesquisa, estudamos algumas teorias referentes, principalmente, ao conceito de sequência didática, à metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da Resolução de Problemas (MEAARP), ao Programa Etnomatemática e ao conceito de Educação à Distância online.

Para trabalharmos, no Ensino Médio, os conteúdos matemáticos que escolhemos, utilizamos a teoria de Zabala (2014) referente à sequência didática, definida como "[...] um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos" (p. 24). Essas atividades são interconectadas, possibilitando mobilizar o conceito e a teoria desenvolvida pelo autor desde o momento de preparação até a avaliação em um processo pedagógico reflexivo (Zabala, 2014).

Ao elaborarmos, aplicarmos e avaliarmos nossa sequência didática, utilizamos a MEAARP (Onuchic & Allevato, 2011). Essa metodologia permite desenvolver e trabalhar conteúdos matemáticos a partir de uma situação-problema entregue aos estudantes em um processo que possibilita interconexões entre distintos ramos da matemática. Nesse sentido, o estudo parte, de fato, dos próprios alunos, cabendo ao professor um papel predominantemente mediativo. Segundo essas autoras, é "pensando matematicamente" que eles constroem conhecimentos na MEAARP, explorando diferentes estratégias de solução e se posicionando como capazes de fazer matemática.

Desenvolver uma proposta pedagógica com a qual os estudantes se sentissem capazes de fazer matemática foi uma de nossas intenções principais na elaboração de uma sequência didática alternativa ao ensino expositivo e centrado no professor. Pensando nisso, almejamos um processo de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática atrelado ao contexto cultural dos alunos e às suas vivências. Por essa razão, utilizamos alguns dos pressupostos do Programa Etnomatemática, conhecido como um campo de pesquisa no qual estudam-se ideias e atividades matemáticas próprias de contextos culturais específicos (Rosa & Orey, 2006). Buscamos trabalhar matemáticas e outros temas presentes na realidade sociocultural dos alunos, legitimando práticas e ideias próprias do grupo em questão e rompendo com a concepção de uma Matemática universal e aculturada, possível apenas a um determinado conjunto de acadêmicos.

Trabalhar determinados conteúdos matemáticos por meio da MEAARP e de ideias próprias da Etnomatemática permitiu, de acordo com nossas intenções, desenvolver uma situação-problema lançando mão de aspectos socioculturais, pertinentes ao contexto cultural dos estudantes, para que pudessem ser protagonistas no processo de ensino-aprendizagem-avaliação. Desse modo, a MEAARP nos ajudou a pensar uma sequência didática na qual os alunos trabalhassem ativamente na construção de conhecimentos, com problemas atrelados ao contexto deles, como aqueles enfrentados por seus familiares em suas profissões e que envolvessem matemática. Essa consideração de diferentes matemáticas praticadas por uma comunidade no ambiente escolar foi possibilitada pelos pressupostos da Etnomatemática que, segundo D'Ambrosio (2008), está comprometida com a produção de significado nas formas de saber e fazer dos mais diversos espaços culturais e com o reconhecimento de suas ações matemáticas.

Por fim, destacamos que a proposta à qual este trabalho está associado foi desenvolvida em meio à pandemia COVID-19. Durante o período de execução do projeto, a escola em que o propomos suspendeu as aulas presenciais levando-nos a trabalhar remotamente. Sendo assim, utilizamos os estudos de Borba, Malheiros e Amaral (2011), especialmente, acerca do conceito de Educação a Distância online (EaDonline), o qual, no momento de nossa aplicação, mostrou-se o mais coerente com nossas pretensões e necessidades. Segundo esses autores, EaDonline é uma modalidade de ensino na qual os estudantes, professores e outros agentes envolvidos interagem por meio da internet, principalmente, utilizando videoconferências, por exemplo. A aproximação de pessoas fisicamente distantes é o fator central dessa modalidade e outros fatores também fundamentais são a interação entre as pessoas em um trabalho coletivo; o diálogo que permite exercitar a expressão, a partilha e o respeito entre indivíduos; e a colaboração em prol de objetivos comuns que necessitam de apoio mútuo (Borba; Malheiros; Amaral, 2011).

Metodologia

A pesquisa que desenvolvemos é de cunho qualitativo, priorizando o processo do trabalho desde o plano inicial até as últimas análises dos dados que emergiram do próprio ambiente de intervenção pedagógica (Bogdan & Biklen, 1994). Seguindo as determinações desses autores, os pressupostos da Pesquisa-Ação nos possibilitaram trabalhar nossas intenções na medida que buscamos promover mudanças no ambiente educacional escolhido, envolvendo todos os participantes – professores, estudantes, orientadora e orientanda. Além disso, inspiramo-nos no Estudo de Caso, em razão de dedicarmos atenção a uma situação singular, com um contexto específico e indivíduos singulares, sem visar uma generalização (Ludke & André, 1986).

Em nossa investigação, realizamos um estudo teórico acerca, principalmente, de sequências didáticas, da MEAARP, da Etnomatemática e da EaDonline. Em seguida, entramos em contato com uma escola pública do interior do estado de São Paulo, Brasil. Mediante um convite e um acordo com a coordenação da instituição pudemos desenvolver nosso estudo de caso com uma turma composta por catorze estudantes de segunda e terceira séries do Ensino Médio com idades entre dezesseis e dezoito anos. A participação dos jovens ocorreu mediante um convite e a assinatura de um termo de consentimento livre e esclarecido enviado aos alunos e seus responsáveis. Além disso, dois professores de matemática que lecionavam a estes alunos também participaram da proposta, cuja aplicação deu-se nos meses de agosto, setembro, outubro e novembro de 2020. Os encontros para desenvolvimento da sequência didática ocorreram uma vez por semana em momentos síncronos de cem minutos.

Durante a aplicação da sequência didática e ao final dela, analisamos, à luz de nosso estudo teórico, todo o material produzido, composto por questionários, registros de discussões em grupos de dois a três alunos, registros individuais dos estudantes, entrevistas realizadas com eles e com os professores participantes e gravações de todos os encontros. Nessa análise, buscamos refletir sobre as dificuldades e desafios que enfrentamos e sobre o desenvolvimento dos alunos, quanto às suas compreensões do conteúdo matemático e à capacidade de argumentar, de discutir sobre os problemas com os colegas, de expor seus raciocínios e ideias e de questionar.

Desenvolvimento

Após realizarmos o estudo da fundamentação teórica e estabelecer os acordos de trabalho com a escola definida, entrevistamos, de modo estruturado (Severino, 2007), online, à distância e síncrono, os dois professores responsáveis pelos alunos participantes, a fim de conhecer seus modos de trabalho, suas perspectivas relativas aos estudantes, suas considerações sobre objetivos da educação básica e processo de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática, e, com isso, pensar em possíveis conteúdos matemáticos para o desenvolvimento da sequência didática. Desse modo, estabelecemos a possibilidade de promover um estudo sobre Análise Combinatória e Probabilidade, indicados pelos educadores como conteúdos que os discentes possuem mais dificuldade e que iriam estudar no semestre em questão. Para o trabalho com esses conteúdos utilizamos a produção de Julianelli et al. (2009), com a qual os autores propõem um estudo voltado para a resolução de situações-problema, apresentando aplicações diversas sem priorizar o uso de fórmulas e sem utilizá-las de forma descontextualizada.

Diante dos estudos teóricos e das discussões com esses professores, elaboramos e aplicamos um questionário aos alunos para compreender um pouco sobre suas relações com a escola, com a matemática, com o estudo da Análise Combinatória entre outros aspectos. As questões foram debatidas em conjunto com os estudantes e suas respostas permitiram-nos identificar que gostam de estudar matemática e que a relacionam com situações relativas a finanças e profissões. Com base nos resultados, elaboramos, também em coletivo, um contrato didático (Silva, 2008), no qual foram explicitados deveres e direitos de todos os participantes, os conteúdos matemáticos a serem trabalhos e como seriam desenvolvidos, o tema orientador e o processo avaliativo.

Baseadas nessas discussões e nos estudos desenvolvidos, elaboramos uma sequência didática para trabalhar Análise Combinatória e Probabilidade considerando as singularidades dos estudantes envolvidos. O tema escolhido em conjunto para nortear as atividades foi “Matemática,

Futuro e Profissão" e os encontros que compuseram nosso planejamento tinham caráter flexivo para respeitar o tempo de aprendizagem de cada aluno.

No início da aplicação propusemos uma atividade com questões abertas para explorar a temática orientadora, levando os jovens a compartilharem considerações sobre formação superior, atuação profissional, mercado de trabalho e a presença da matemática em certos trabalhos exercidos pelos próprios estudantes – pois alguns trabalhavam – e por seus familiares. Tomando as respostas dos alunos como base, elaboramos uma segunda atividade com problemas matemáticos sobre Análise Combinatória e alguns outros assuntos, seguindo o tema proposto, a fim de compreender, de modo inicial, como lidam com a resolução de situações-problema no que tange à interpretação, à escrita e ao conteúdo propriamente. Identificamos, nesse momento, que alguns estudantes possuíam certas noções básicas de Análise Combinatória ao tentarem aplicar fórmulas, mas que o faziam sem apresentar uma reflexão que justificasse suas escolhas.

Pautadas nos pressupostos da Etnomatemática para trabalhar situações-problema com o tema "Matemática, Futuro e Profissão", iniciamos o trabalho de uma delas, relativa à Análise Combinatória, com um encontro entre os alunos participantes e estudantes universitários de cursos superiores que aqueles desejavam cursar. Tendo em vista a temática, as considerações dos alunos sobre as relações entre matemática e atuação profissional e as suas manifestações de interesse em ingressar no Ensino Superior, buscamos promover um momento de discussão sobre a matemática presente em alguns cursos, instituições de Ensino Superior, vestibular, permanência estudantil e outros aspectos relativos. Desse modo, os universitários puderam narrar sobre experiências no meio acadêmico em diálogo com os alunos que lhes apresentavam curiosidades e dúvidas.

Todos esses encontros anteriores contribuíram para a elaboração de uma situação-problema completamente pensada para esse conjunto de alunos em consonância com o conteúdo matemático escolhido. Sendo assim, em uma aula de cem minutos propusemos o problema (Ponte, 2003; Onuchic & Allevato, 2011) relativo à Análise Combinatória dentro do tema selecionado para ser lido individualmente; organizamos dois grupos de estudantes em salas virtuais diferentes da plataforma *Google Meet*; solicitamos uma nova leitura, em coletivo, do problema para esclarecer palavras ou expressões desconhecidas; e mediamos a resolução do problema nos grupos, estimulando uma postura ativa e crítica nos estudantes para a produção de conhecimentos matemáticos. Com isso, desenvolvemos as cinco primeiras etapas da MEAARP determinadas por Onuchic e Allevato (2011). Na figura 1, apresentamos uma das quatro questões que compuseram a situação-problema relativa ao estudo da Análise Combinatória.

Ana, Caio e Daniel são três vestibulandos que se reuniram para discutir sobre alguns de seus problemas particulares. Eles acreditam que estes problemas sejam parecidos, mas não conseguem resolvê-los, pois existem algumas diferenças entre eles. Sendo assim, cada um dos alunos expôs seu problema, tente resolvê-los.

1. Ana foi a primeira a contar seu problema. Ela tentará uma vaga no Curso 51 de uma universidade pública, o qual permite ao aluno seguir carreira em uma das seguintes áreas: Física, Engenharia Física, Física Médica, Física Biomédica, Matemática ou Matemática Computacional. Ana precisa informar ao órgão responsável pelo concurso a ordem de preferência das áreas. De quantas maneiras ela pode montar essa ordem? Dê dois exemplos.

Figura 1. Exemplo de questão da situação-problema.

Posteriormente, realizamos a etapa de registro das resoluções dos grupos, os quais enviaram-nas à licencianda para a produção de slides no período de uma semana entre o encontro de resolução e o de apresentação. Neste último, promovemos uma plenária, com a discussão dos procedimentos, estratégias e resultados obtidos por cada grupo em seu trabalho, estimulando a argumentação dos alunos e o debate entre as justificativas de cada um em busca de um consenso. Após esse movimento, realizamos a formalização do conteúdo de Análise Combinatória trabalhado na situação-problema, apresentando, por meio de uma linguagem matemática, conceitos e procedimentos relativos a Arranjo, Permutação e Combinação.

Realizamos, portanto, todas as etapas da MEAARP, utilizando cerca de dois meses para que os alunos pudessem dialogar em diversos momentos sobre os assuntos trabalhados e em um processo de construção de conhecimentos. Nossa pesquisa continuou com a apresentação e o estudo de uma nova situação-problema, dessa vez associada à Probabilidade e à matemática praticada por seus familiares em suas profissões. Com isso, seguimos a proposta de Onuchic et al. (2014), para os quais a última etapa da metodologia é a proposição de novos problemas relacionados ao trabalho anterior. Desse modo, demos continuidade com outras atividades, "reaplicando" a MEAARP.

Conclusão

A pesquisa foi concluída no tempo previsto com a realização de todas as atividades planejadas na sequência didática. Notamos que o estudo e a utilização do conceito de sequência didática foi essencial para cumprirmos nossa proposta de acordo com as teorias mobilizadas e diante de um limite de apenas quatro meses. A organização das atividades de modo ordenado, estruturado e articulado, nos possibilitou deixar momentos para questionamentos, diálogos de cunho pedagógico com os alunos e professores e encontros extras para desenvolver as propostas de forma satisfatória. Além disso, ter em mente, ao longo de todo o trabalho, os objetivos da sequência, tanto por nossa parte quanto pela dos alunos e professores participantes contribuiu para um processo orientado, acordado e desejado por todos os envolvidos.

No que tange ao trabalho com a MEAARP, percebemos que os estudantes, ao receberem a situação-problema sem que um conteúdo matemático específico tivesse sido apresentado formalmente, tiveram dificuldade em adotar uma postura ativa e crítica, visto que aguardavam que a licencianda lhes explicasse como fazer e o que utilizar na resolução. Além disso, observamos que os alunos resistiram a trabalhar em coletivo, desenvolvendo, em um mesmo grupo, múltiplas soluções. Nesse sentido, vale ressaltar que vários não falavam pelo microfone do *Google Meet*, apenas pelo *chat* da plataforma, dificultando o diálogo entre os estudantes, apesar da mediação constante da licencianda com indagações, e a busca por consenso no momento da plenária. Quando se expressavam, o faziam com dificuldade, mostrando-se tímidos e pouco familiarizados com a ação de argumentar e justificar.

Apesar das dificuldades enfrentadas nesse processo, o momento da formalização foi rico em questionamentos e participações dos alunos, inclusive com uso do microfone, os quais apresentavam relações entre os conceitos e procedimentos e os problemas que trabalharam no questionário inicial de Análise Combinatória e na situação-problema. Nesse sentido, acreditamos que os encontros anteriores, os momentos de discussão em grupos e a plenária contribuíram para

que os estudantes se sentissem mais à vontade para expressarem seus pensamentos e responderem às questões feitas pela licencianda.

Em relação à Etnomatemática, observamos que os estudantes estavam pouco familiarizados a discutir e pensar uma matemática própria de seus contextos, praticadas por seus familiares e colegas nas profissões que exercem ou até mesmo relativas a cursos de Ensino Superior que desejavam seguir. A princípio, eles buscavam fórmulas ou técnicas universais para solucionar problemas de uma situação que poderia ser vivenciada em sua realidade e resolvida de uma maneira própria. No entanto, os encontros dedicados à exploração do tema "Matemática, Futuro e Profissão" permitiram que os conteúdos matemáticos e a situação-problema referente fossem desenvolvidos para além das etapas da MEAARP, num processo de reconhecimento e legitimação de outras formas de pensar matemática. Entrevistas, questionários e debates acerca da temática orientadora permitiram trabalhar os problemas sob uma nova perspectiva, de caráter cultural, construída em conjunto com os estudantes em aula. Desse modo, a sequência didática favoreceu um processo de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática conectado à realidade dos jovens e aos seus modos de produzir conhecimento.

Agradecimentos

As autoras agradecem o apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo 2020/03911-8. As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade das autoras e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.

Referências

Ausubel, D.P. (2000). *The acquisition and retention of knowledge: a cognitive view*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bogdan, R. C., e Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Borba, M.C., Malheiros, A. P. S., e Amaral, R. B. (2011). *Educação a Distância Online*. Belo Horizonte: Autêntica.

Brasil. (1996). *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*, LDB. 9394/1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acesso em 26 de outubro de 2022.

D'Ambrosio, U. (2008). Educação numa era de transição. *Matemática & Ciência*, 1(1), 8-18.

Julianelli, J. R., Dassie, B. A., Lima, M. L. A., e Sá, I. P. (2009). *Curso de Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

Ludke, M., e André, M. E. D. A. (1986). *Metodologia de Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: E.P.U.

Onuchic, L. R., e Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, 25(41), 73-98.

Onuchic, L. R., Allevato, N. S. G., Noguti, F. C. H., e Justulin, A. M. (Ed.). (2014*). Resolução de Problemas: Teoria e Prática*. Paco Editorial. Jundiaí.

Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. Em: *Actas PROFMAT*, 1-23.

Rosa, M., e Orey, D. C. (2006). Abordagens atuais do programa etnomatemática: delineando-se um caminho para a ação pedagógica. *Bolema*, 19(26), 19-48.

Severino, A. J. (2007). *Metodologia do trabalho científico*. São Paulo: Cortez.

Silva, B. A. (2008). Contrato Didático. Em Machado, S. D. A. (Ed.). *Educação Matemática: uma (nova) introdução*, 49-75. São Paulo: EDUC.

Zabala, A. (1998). *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Editora Artes Médicas Sul.

Atividade de Modelagem Matemática desenvolvida no contexto remoto: uma análise das etapas da experimentação

Karina Alessandra Pessoa da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Londrina
karinasilva@utfpr.edu.br

Resumo

Neste artigo trazemos resultados para a questão: Como as etapas da experimentação se configuraram no desenvolvimento de uma atividade de modelagem no contexto remoto? Com isso, pautamo-nos na Modelagem Matemática como uma possibilidade para abarcar conteúdos matemáticos e na experimentação como recurso didático. A análise qualitativa, de cunho interpretativo, dos registros produzidos no ambiente virtual por um grupo de alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de uma universidade federal brasileira, revelou que as etapas da experimentação seguem as necessidades para abarcar conteúdos matemáticos estudados na disciplina.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino Superior; Modelagem Matemática; Experimentação; Cálculo Diferencial e Integral; Contexto remoto; Moodle.

Introdução

No âmbito do Ensino Superior, em cursos em que a Matemática é considerada de aplicação, algumas tendências da Educação Matemática podem ser implementadas de modo a colocar o aluno em uma posição ativa no processo de ensino e de aprendizagem. Em atividades de modelagem matemática, os alunos investigam situações, identificando e resolvendo problemas, por meio de conhecimentos matemáticos. A Modelagem Matemática nas aulas de Matemática permite a transição “entre matemática, ciências experimentais e engenharia” (Carreira & Baioa, 2018, p. 212). Segundo Halverscheid (2008, p. 226), os experimentos “encontram seu lugar natural na estrutura da modelagem matemática, porque representam o ‘resto do mundo’ para o qual os modelos matemáticos são construídos”.

Na literatura, a implementação da modelagem nas aulas de Matemática do Ensino Superior por meio de atividades experimentais tem sido recorrente (Halverscheid, 2008; Carreira & Baioa, 2015, Silva et al., 2018). Nos anos de 2020 e 2021, devido ao contexto pandêmico, a organização das disciplinas presenciais e, consequentemente, o desenvolvimento de atividades de modelagem com atividades experimentais e a experimentação precisaram ser reestruturados.

Considerando esse contexto, nos debruçamos em investigar: Como as etapas da experimentação se configuraram no desenvolvimento de uma atividade de modelagem no contexto remoto? Para isso, nos subsidiamos numa análise qualitativa de cunho interpretativo dos dados produzidos pelos integrantes de um grupo que, no primeiro semestre de 2021, cursou a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de uma variável real (Cálculo 1) no contexto remoto.

Modelagem matemática com experimentação

A experimentação é um recurso didático considerado construtivo, capaz de estabelecer relações entre diversas áreas da ciência, cujo papel para o ensino é propor a "criação de situações que discutam com o sujeito aprendiz a apropriação de conhecimentos já existentes para as ciências, mas novos para o sujeito" (Lima & Teixeira, 2011, p. 6).

No contexto educacional, Emden e Sumfleth (2014) caracterizam três etapas para o desenvolvimento de uma experimentação: (1) os alunos precisam ter uma ideia e estruturar uma hipótese para resolver um problema; (2) a partir dessa ideia ou hipótese os alunos planejam e executam um experimento (físico, computacional, geométrico ou algébrico); (3) os resultados da experimentação são apresentados pelos alunos, podendo levar à revisão da hipótese inicial.

A experimentação, articulada às aulas de Matemática, tem sido discutida em pesquisas presentes na literatura (Borba & Villarreal, 2005; Silva et al., 2018). Para Borba e Villarreal (2005), a abordagem experimental em tarefas matemáticas inclui desde a formulação de conjecturas, o uso de conteúdos matemáticos para encontrar soluções aos problemas até a análise dessas soluções. Os "problemas em modelagem são centrados em uma situação real e requerem uma transferência exigente entre o mundo real e a matemática" (Elfringhoff & Schukajlow, 2021, p. 10). Segundo Elfringhoff e Schukajlow (2021),

> quando os alunos têm um alto nível de interesse inicial antes de resolverem um problema, seu envolvimento na solução de problemas pode aumentar e, por meio do envolvimento, os alunos podem manter o interesse e aumentar suas competências de modelagem a longo prazo. (Elfringhoff & Schukajlow, 2021, p. 27)

Ao se fazer uma interpretação matemática para o problema, há a necessidade de perpassar por uma representação matemática. Tal representação matemática consiste no modelo matemático, um sistema conceitual descritivo expresso por uma estrutura matemática. Segundo Carreira e Baioa (2015, p. 835), para "se tornar um modelo, o sistema deve ser útil para descrever, representar, interpretar, explicar ou fazer previsões sobre um fenômeno e seu comportamento".

No encaminhamento do problema para sua solução, obtida por meio de um modelo matemático, há necessidade de buscar informações, identificar e selecionar variáveis, elaborar

hipóteses, realizar simplificação, validar o modelo, além de analisar a solução para o que está sendo investigado. Essas ações caracterizam uma atividade de modelagem matemática e podem subsidiar uma abordagem experimental no âmbito do Ensino Superior.

Aspectos metodológicos

No primeiro semestre de 2021, na disciplina de Cálculo 1, na modalidade de dependência (DP), formada por 77 alunos dos sete cursos de Engenharias de um dos *campi* de uma instituição federal brasileira, dentre as atividades desenvolvidas no contexto remoto, foram implementadas atividades de modelagem.

Nas aulas síncronas, as atividades de modelagem foram desenvolvidas com o intuito de introduzir ou aplicar conteúdo da disciplina e as temáticas foram escolhidas pela professora. Além dessas atividades, os alunos foram convidados a escolher, em grupos, uma situação-problema para ser investigada no Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem (AVEA), institucionalmente implementado – o Moodle. Neste AVEA foi criada uma Wiki da Atividade de Modelagem (AM) em que os grupos pudessem interagir com seus integrantes adicionando e editando uma coleção de páginas da web e realizando encontros subsidiados pelo BigBlueButton (BBB), integrado ao Moodle. Os encontros poderiam ser gravados para que a professora pudesse acessar as discussões. Além do AVEA, os grupos poderiam solicitar orientações síncronas com a professora.

O desenvolvimento da AM se iniciou no dia 19 de julho com a escolha da situação-problema a ser investigada e finalizou no dia 24 de agosto com a postagem de um vídeo de cada grupo, apresentando os resultados abarcados.

Os registros escritos, de áudio e de vídeo construídos na Wiki de um dos 14 grupos subsidiaram nossa análise qualitativa de cunho interpretativo de modo a trazer reflexões para a questão de pesquisa. Consideramos para nossa análise o G3 que escolheu desenvolver uma atividade de modelagem em que coletou empiricamente os dados relativos à temperatura de uma amostra de água sob duas condições: acima da temperatura ambiente, deixada para resfriar, e em temperatura ambiente inserida no refrigerador. Além disso, foi o único grupo que solicitou encontros síncronos de orientação com a professora, além de produzir vídeos da coleta de dados e gravar os encontros dos integrantes.

Descrição e análise da atividade de modelagem

Para iniciar a abordagem da situação escolhida para a experimentação, o G3, formado por seis integrantes – Nicole, André, Arlete, Erica, João e Vick (nomes fictícios) –, fez uma pesquisa na Anvisa (Agência Nacional de Vigilância Sanitária) sobre a temperatura recomendada para o interior do refrigerador – cerca de 5°C. Essas informações demarcaram o interesse dos alunos no desenvolvimento da atividade de modo que a solução para o problema poderia subsidiar e manter o interesse (Elfringhoff & Schukajlow, 2021).

Diante das informações disponibilizadas no AVEA, a professora fez intervenções escritas de modo a entender os encaminhamentos que o grupo havia antecipado para a coleta de dados,

porém o grupo já tinha iniciado o trabalho com a experimentação considerando duas amostras de líquidos em quantidades distintas. Por meio das intervenções, a professora se insere no grupo subsidiando e orientando os encaminhamentos da atividade de modelagem (Silva et al., 2018).

No entanto, para essa inserção houve necessidade de a professora entender a intenção do grupo com a experimentação. Em orientação, em um encontro síncrono, solicitado pelo G3, a professora novamente questionou-os sobre a situação-problema a ser investigada e os integrantes justificaram:

André: A ideia da atividade foi de podermos analisar uma situação do nosso cotidiano, de como podemos utilizar cálculos matemáticos para atividades corriqueiras. Em que por meio de uma coleta de dados, conseguíssemos relacionar os estudos de funções, noções intuitivas de limites e taxa de variação instantânea.
Arlete: O que a gente queria era saber como ocorre o resfriamento fora da geladeira e dentro da geladeira. A taxa de variação instantânea. Por exemplo, um líquido quente que estava esfriando e quando colocado na geladeira.
Professora: Entendi, mas como foi essa coleta que vocês relataram no Moodle.
João: A gente fez com duas amostras, mas aí não dá muito certo professora.
Professora: E por que não?
João: Eu conversei com Arlete e pensamos que tinha de ser a mesma quantidade as duas amostras até para analisar né. E quem sabe até a mesma amostra que resfria e depois a gente coloca na geladeira.
Arlete: Poderia ser algo hipotético? A gente escolhe a água e consideramos que pode ser o comportamento de outros alimentos líquidos?
Professora: E o que vocês analisariam.
Nicole: A mesma coisa professora. Mas o nosso alimento poderia ser a água?

De posse de um tema do interesse, relacionado à uma situação da realidade, os alunos intentaram *utilizar cálculos matemáticos para atividades corriqueiras* (comentários de André). De antemão, os alunos se atentaram em centrar a atenção em uma situação real que requer uma transferência para a matemática" (Elfringhoff & Schukajlow, 2021). No entanto, com a comunicação do que pretendiam estudar para a professora, houve a necessidade de alterar os encaminhamentos e uma nova coleta de dados se fez necessária.

Uma amostra de 100 mL de água foi aquecida até atingir a temperatura máxima de 91,3^{0}C. Essa amostra foi deixada em temperatura ambiente e, com um termômetro, o G3 fez aferições a cada 10 minutos. Utilizando o *software* GeoGebra, o G3 plotou os pontos no plano cartesiano e ajustou-os a uma curva logística representada por $y = \frac{21{,}0653}{1-0{,}7692e^{-0{,}0798\,x}}$, em que *y* era a temperatura em ^{0}C em função do tempo *x* em minutos. Para a escolha desse ajuste, os alunos levaram em consideração o comportamento do fenômeno com o passar do tempo. Um modelo matemático que poderia ter sido considerado e que foi discutido por G3 foi o exponencial, porém ao analisar o limite da função com *x* tendendo ao infinito, a temperatura tendia a zero, o que fez o grupo descartá-lo.

Quando a água atingiu 21^{0}C, que era a temperatura ambiente no momento da coleta de dados, a amostra foi colocada num refrigerador que estava a uma temperatura de 5,1^{0}C. Novamente a temperatura foi aferida a cada 10 minutos e os valores coletados foram dispostos em uma planilha do *software* GeoGebra e, de modo análogo ao que foi feito na condição da coleta de dados anterior, os alunos analisaram o limite de diferentes curvas a serem ajustadas e optaram pela curva logística: $y = \frac{2{,}5114}{1-0{,}8806e^{-0{,}0107\,x}}$.

As representações gráficas e algébricas de ambos os modelos matemáticos são apresentadas na Figura 1.

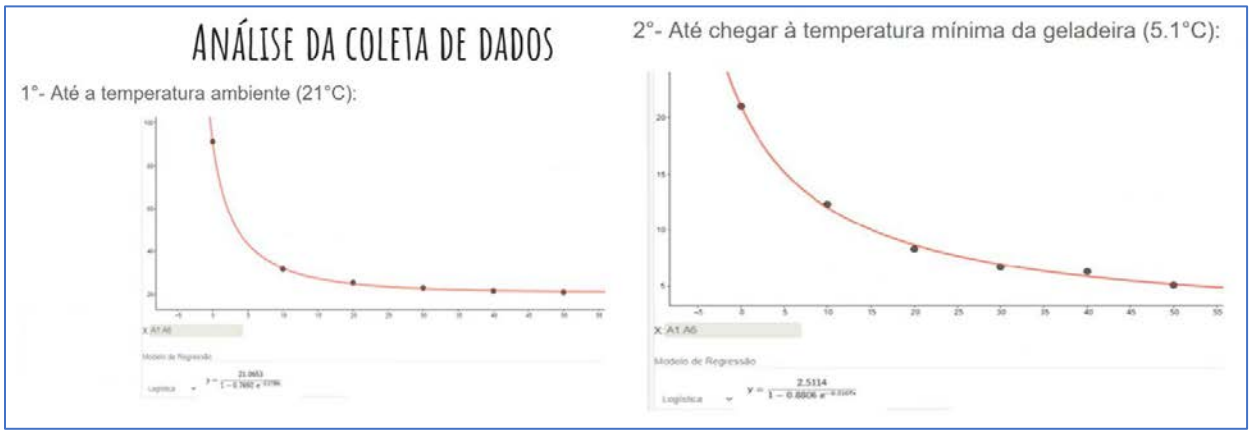


Figura 1. Curvas ajustadas para o experimento realizado.

Os modelos, de certo modo, descreveram e representaram a situação em estudo e permitiram "explicar ou fazer previsões sobre um fenômeno e seu comportamento" (Carreira & Baioa, 2015, p. 835).

Considerando os modelos matemáticos representativos, ao calcular os limites das funções, a temperatura da amostra de água chegaria bem próxima à temperatura ambiente. No caso da inserção na geladeira, o G3 considerou a necessidade de representar um novo modelo para descrever o resfriamento da água, conforme explicações transcritas a seguir:

Nicole: No caso da amostra na geladeira, ao calcular o limite chegamos em 2,51, ou seja, um resultado muito diferente de 5,1 que era a temperatura mínima, obtida dentro da geladeira. Arlete: Tendo em vista esse resultado, que consideramos uma invalidade, buscamos por hipóteses para explicar essa invalidade. A que melhor se encaixou foi levando em consideração que, quando foi feita a coleta de dados, a geladeira foi aberta diversas vezes. Então com isso, ela foi sofrendo diversas variações. Então tendo em vista tanto essa hipótese e o fato de que a partir de um certo momento a geladeira ia se manter fechada e a temperatura ia se manter constante, a gente começa a envolver a ideia de funções por partes. [explicou o encaminhamento utilizado para a obtenção das sentenças].

Considerando a temperatura de $5{,}1^0$C, foi feita a substituição na expressão algébrica do modelo, obtendo um tempo aproximado de 51 minutos. Assim, o G3 expressou um "novo" modelo matemático para a situação da amostra de água dentro da geladeira, bem como a representação gráfica (Figura 2). Em não se considerando um modelo matemático válido para o fenômeno, os alunos buscaram por abordagens matemáticas estudadas na disciplina – *a gente começa a envolver a ideia de funções por partes* (comentários de Arlete). Trata-se, portanto, de se realizar um ajuste no modelo para que este ficasse mais próximo da realidade (Borba & Villarreal, 2005).

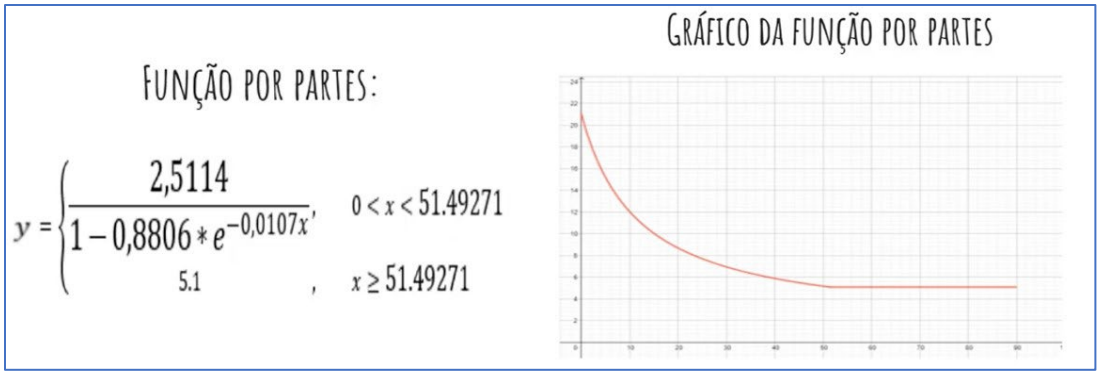


Figura 2. Modelo matemático para a amostra dentro do refrigerador.

Uma abordagem ainda considerada pelo grupo e que fazia parte da definição do problema dizia respeito à taxa de variação instantânea da temperatura em função do tempo nas duas condições: no ambiente fora e no ambiente dentro do refrigerador. De modo a fazer uma comparação, o grupo determinou o tempo de 10 minutos e obteve que a taxa de variação instantânea para a temperatura do líquido no ambiente fora do refrigerador foi de, aproximadamente, $-1{,}362^0 C/minutos$ e do líquido no ambiente dentro do refrigerador foi de, cerca de, $-0{,}488^0 C/minutos$.

No vídeo de apresentação dos resultados, um dos integrantes do grupo utilizou o gráfico da derivada de cada uma das funções para tecer suas considerações (Figura 3), conforme explicava o encaminhamento e os resultados obtidos:

João: Fica claro para nós que a taxa de variação da primeira condição é muito maior do que quando comparada com a da segunda expressão, que era de dentro da geladeira. Isso podemos ver graficamente também [mostra a representação gráfica das derivadas – Figura 3]. Graficamente nos mostra de que, quando estava fora da geladeira, tinha uma taxa de variação muito maior [percorrendo a curva verde com o mouse] quando comparado com a taxa quando estava dentro da geladeira [percorrendo a curva roxa com o mouse – Figura 3].

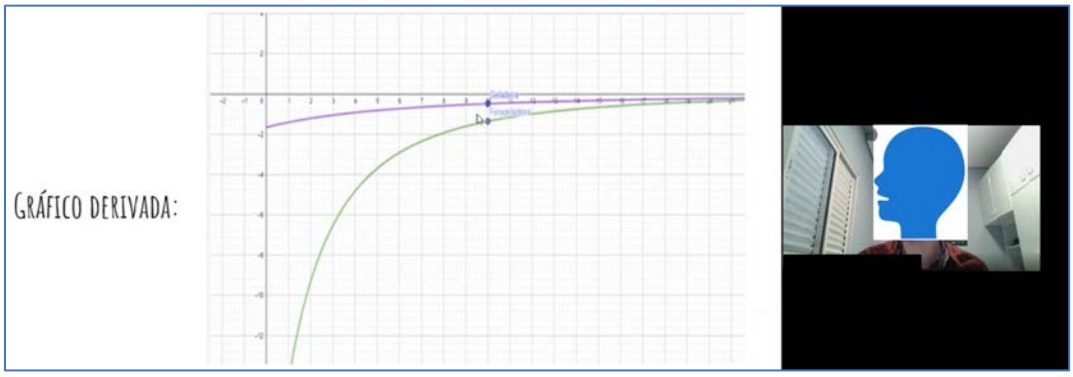


Figura 3. Representação gráfica das derivadas dos modelos matemáticos deduzidos.

Podemos evidenciar que o G3 se interessou em utilizar diferentes representações para analisar os modelos matemáticos, tanto que sentiram necessidade de mostrar a representação gráfica da derivada para explicar os resultados obtidos algebricamente para a taxa de variação instantânea.

Algumas considerações

O desenvolvimento de uma atividade de modelagem subsidiada por experimentação em que um grupo de alunos criou e discutiu "conhecimentos já existentes para as ciências, mas novos para o sujeito" (Lima & Teixeira, 2011, p. 6), proporcionou abordagens de conteúdos matemáticos estudados na disciplina de Cálculo 1.

A partir do convite da professora em empreender esforços na escolha de uma situação que para se fazer "uma transferência exigente entre o mundo real e a matemática" (Elfringhoff & Schukajlow, 2021, p. 10), os alunos buscaram por um fenômeno que poderia fazer parte do cotidiano. Ao observar alimentos aquecidos que resfriavam com a temperatura ambiente antes de serem levados ao refrigerador, os alunos tiveram uma ideia para resolver um problema – etapa 1 do desenvolvimento de uma experimentação (Emden & Sumfleth, 2014). Diante disso, planejaram e executaram um experimento físico (etapa 2) sem se atentarem a alguns cuidados, como o tipo e a quantidade da amostra analisada. Neste caso, regularidades matemáticas não poderiam ser deduzidas. Neste tocante, com a apresentação de possíveis resultados da experimentação (etapa 3), a professora se inseriu no grupo orientando possíveis encaminhamentos, com cautela para não interferir em demasia na abordagem da situação e o interesse do grupo diminuir.

Por meio de questionamentos, os alunos sentiram necessidade de realizar uma nova coleta de dados empíricos, por meio de uma revisão da hipótese inicial (etapa 3) de modo que experimentações computacionais, gráficas e algébricas (etapa 2) subsidiassem a análise e a abordagem dos conteúdos matemáticos emergentes. No entanto, mesmo considerando os ajustes apresentados pelo *software* GeoGebra, os alunos mostraram entender os comportamentos das funções aliadas à situação em estudo.

O que podemos evidenciar foi que as ações dos alunos, de forma conjunta, revelaram que as etapas da experimentação seguiram as necessidades para abarcar conteúdos matemáticos estudados na disciplina. Todavia há de se evidenciar que os alunos realizaram simplificações com relação ao fenômeno em estudo, no caso, não considerar a variação de temperatura ambiente, que poderia ser associada ao modelo matemático por meio de uma abordagem envolvendo a composição de funções. Além disso, a professora poderia ter aproveitado a abordagem do grupo para discutir a lei de resfriamento de Newton e analisá-la com relação ao fenômeno estudado.

Referências

Borba, M., y Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation. New York: Springer.

Carreira, S., y Baioa, A. M. (2015). Assessing the best staircase: student's modelling based on experimentation with real objects. *Proceedings of the Congress of the European Society of Research in Mathematics Education* (pp. 834-840). Prague.

Carreira, S., y Baioa, A. M. (2018) Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: on the students' sense of credibility. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *50*(1-2), 201-215.

Elfringhoff, M. S., y Schukajlow, S. (2021). What makes a modelling problem interesting? Sources of situational interest in modelling problems. *Quadrante*, *30*(1), 8-30.

Emden, M., y Sumfleth, E. (2014). Assessing students' experimentation processes in guided inquiry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(1), 29-54.

Halverscheid, S. (2008). Building a local conceptual framework for epistemic actions in a modelling environment with experiments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *40*(2), 225–234.

Lima, K. E. C., y Teixeira, F. M. (2011). A epistemologia e a história do conceito experimento/experimentação e seu uso em artigos científicos sobre ensino das ciências. En *Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências / Congresso Iberoamericano de Investigación en Enseñanza de las Ciencias*, Campinas. VIII - ENPEC/I CIEC.

Silva, K. A. P., Vertuan, R. E., y Silva, J. M. G. (2018). Ensino por investigação nas aulas de Matemática do curso de licenciatura em Química. *Amazônia*, *14*(31), 54-72.

Construcción de modelos matemáticos en libros de texto de ecuaciones diferenciales para ingenieros

Jazmín Adriana **Juárez** Ramírez
Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional
México
jjuarezr@ipn.mx
José María **Chamoso** Sánchez
Facultad de Educación, Universidad de Salamanca
España
jchamoso@usal.es

Resumen

La modelación matemática puede apoyar la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales al acercar las matemáticas a contextos reales e integrarlas con otras áreas del conocimiento. Se presenta un estudio realizado con diversos libros de texto de ecuaciones diferenciales para analizar la forma en que muestran la construcción de modelos a los estudiantes de ingeniería en términos de la definición de modelo matemático y la estructura del proceso de modelación. Los resultados señalan que la mayoría de los textos analizados abordan el proceso de modelación matemática de forma parcial. Se concluye que es necesario que los textos utilizados en ingeniería presenten un proceso de modelación que incluya la formulación y solución del modelo, un análisis detallado de la solución, así como la validación del modelo.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales; Educación matemática; Enseñanza presencial; Educación superior; Investigación descriptiva; Modelos y modelación; Planeamiento educativo.

Introducción

En las carreras de ingeniería, la matemática es una herramienta fundamental ya que tanto durante el proceso de formación, así como en la vida profesional, los estudiantes resuelven problemas en los que describen, modelan y resuelven situaciones técnicas (Trejo, Camarena y

Trejo, 2013). Sin embargo, aunque algunos estudiantes reconocen la utilidad de las matemáticas, otros se cuestionan la importancia y la utilidad de las asignaturas cursadas. Esto puede deberse a que en los primeros cursos universitarios de matemáticas se presentan pocos problemas para que los estudiantes construyan modelos para representar situaciones reales.

La mayoría de los planes de estudio de las carreras de ingeniería incluyen la asignatura ecuaciones diferenciales, ya que una gran variedad de fenómenos presentes en ciencias y en ingeniería se representan con funciones que incluyen derivadas totales o parciales. El estudio de las ecuaciones diferenciales es una excelente oportunidad para mostrar la aplicación de las matemáticas a la vida real y presentar la naturaleza de la investigación en matemáticas (Arslan, 2010).

La enseñanza de las ecuaciones diferenciales se ha centrado en métodos analíticos, y esto ha originado una comprensión limitada de lo que representa la solución en una situación real. Sin embargo, independientemente del enfoque de enseñanza, los estudiantes presentan dificultades al formular modelos matemáticos, resolver las ecuaciones resultantes y predecir el comportamiento de las soluciones (Camacho, Perdomo y Santos-Trigo, 2007). El proceso de modelación matemática se enseña de manera parcial, evitando enfrentar a los alumnos con etapas de este proceso (Córdoba, 2011).

Algunas investigaciones que han analizado el proceso de modelación con ecuaciones diferenciales con alumnos universitarios (Barbarán y Fernández, 2014; Camarena, 2009; Hernández, 2009); revelaron dificultades en la comprensión de los estudiantes tanto del concepto de ecuación diferencial como de su solución. Es importante la interpretación física de los términos de una ecuación diferencial y poder traducirlos a una expresión matemática y que, al desarrollar actividades relacionadas con la modelación, los estudiantes comprendan e interpreten el concepto de ecuación diferencial (Guerreo, Camacho y Mejía, 2010; Soon, Tirtasanjaya y McInnes, 2011).

Por otro lado, en el área de matemáticas, los libros de texto caracterizan el proceso de enseñanza aprendizaje más que en otras áreas y tienen una influencia significativa en las oportunidades de los estudiantes para aprender matemáticas (Hadar, 2017). Sin embargo, en las asignaturas de matemáticas para ingeniería, la práctica de la modelación matemática se basa en las aplicaciones como problemas propuestos en los libros de texto y en modelos concretos que los estudiantes resuelven como ejercicios.

Lo expuesto anteriormente, condujo a la realización de un estudio en el que se revisaron algunos libros de texto de ecuaciones diferenciales utilizados en carreras de ingeniería con el objetivo de analizar la forma en que tratan el concepto de modelo matemático y el proceso de modelación.

Marco teórico

Como parte de los trabajos que clasificaron las diferentes aproximaciones teóricas a la modelación, Kaiser y Sriraman (2006), reportaron el desarrollo de diferentes perspectivas de investigación:

Perspectiva realista

Tiene origen en el hecho de que los modelos matemáticos están siendo ampliamente utilizados en muy diversas disciplinas científicas y tecnológicas, y en muchos contextos sociales. El proceso de modelación es llevado a cabo como un todo y no como un proceso parcial.

Perspectiva contextual

Esta perspectiva considera la modelación matemática como un tipo especial de solución de problemas, y por lo tanto los aspectos psicológicos de la resolución de problemas se consideran como una base para la comprensión de los problemas de aprendizaje relacionados con el modelado matemático y la modelación matemática para la enseñanza en la perspectiva contextual.

Perspectiva educativa

La idea principal de la perspectiva educativa es la integración de modelos y modelización en la enseñanza de las matemáticas, tanto como medio de aprendizaje de las matemáticas, como una competencia importante por sí misma.

Perspectiva cognitiva

El interés principal es comprender las funciones cognitivas que se activan en las actividades individuales del estudiante durante la modelización matemática. Por lo que se analizan los procesos de modelado de los estudiantes, para reconstruir sus rutas individuales a través del proceso de modelado en situaciones de modelado específicas. El objetivo es identificar barreras cognitivas individuales en los procesos de modelización.

Perspectiva socio-crítica

Pone énfasis en el papel de las matemáticas en la sociedad, y reclama la necesidad de apoyar el pensamiento crítico alrededor del rol de las matemáticas (en la sociedad), el rol y naturaleza de los modelos matemáticos y la función de la modelación matemática (en la sociedad). En esta perspectiva, se hace la distinción entre la modelación matemática hecha por modeladores profesionales y las actividades de modelación realizadas en la escuela.

Perspectiva epistemológica

A diferencia de la perspectiva realista, se le da menos importancia al aspecto real de los ejemplos con que se trabaja. Cualquier actividad matemática es susceptible de modelarse, así la modelación no está limitada a la mate matización de cuestiones extra matemáticas.

Por otro lado, los libros de texto son herramientas mediadoras que traducen y concretan significados incluidos en un currículo establecido por organismos educativos y lo hacen a través de una presentación didáctica (Occelli y Valeiras, 2013). El libro de texto se destaca por su uso y presencia sobre una gran diversidad de medios didácticos y audiovisuales que la sociedad actual

ofrece a los profesores para desarrollar su actividad profesional (Bautista, 2017). En el aula de matemáticas, los libros de texto han ejercido diferentes papeles tales como: objeto de estudio, material de consulta, registro de actividades del alumno, colección de ejercicios y problemas (González y Sierra, 2004). Algunas investigaciones han clasificado el análisis de libros de texto en áreas tales como el papel del libro de texto en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la búsqueda de similitudes y diferencias en los libros de texto de matemáticas, y la investigación sobre cómo el libro de texto configura las formas de enseñar y aprender matemáticas (Fan, Zhu y Miao, 2013).

En términos del análisis de textos de ecuaciones diferenciales, se ha determinado que la mayoría comienza con definiciones básicas de las ecuaciones diferenciales en cuanto al orden, grados, variables utilizadas, derivadas ordinarias o parciales. Hernández (2009) destacó que algunos aspectos relevantes en el tratamiento de las ecuaciones diferenciales son que se estudian de forma muy aislada con relación a su contexto, la enseñanza se centra en el procedimiento, el significado gráfico de la solución está ausente y se ve limitado a soluciones que se presentan en las aplicaciones, y pocos textos que hacen énfasis sobre los aspectos gráficos.

Al estudiar el proceso de modelación matemática con ecuaciones diferenciales para identificar las dificultades de los estudiantes al modelar un problema de la vida real, Rodríguez (2010) analizó libros de texto de ecuaciones diferenciales para identificar los pasos del proceso de modelación matemática y observó que en los problemas propuestos las variables están designadas explícitamente y en la mayoría se proporciona el modelo. Rodríguez (2010) señaló que este análisis pone en evidencia que la escritura de un modelo matemático, etapa importante del proceso de modelación, es un tipo de tarea poco solicitada en el aula.

Metodología

Contexto y muestra de estudio

El estudio se llevó a cabo en el contexto de los planes de estudio de las 34 carreras de ingeniería que se ofrecen en las diversas facultades del Instituto Politécnico Nacional (IPN), institución pública mexicana de investigación y educación en niveles medio superior, superior y posgrado. Posteriormente se revisó el plan de estudios de cada una las ingenierías y se determinó que en 21 de éstas se imparte la asignatura ecuaciones diferenciales, y que en la mayoría de las carreras se cursa durante el primer año de estudios. Posteriormente se compararon los programas sintéticos de la asignatura de las diversas carreras y se encontraron 15 programas diferentes, ya que algunas carreras comparten el mismo programa de la asignatura. Para cada uno de estos programas, se identificaron los libros de texto que se presentan en la bibliografía y se encontraron 8 libros de texto comunes: Boyce y Diprima (2007), Boyce y Diprima (2001), Carmona y Filio (2011), Kiseliov, Krasnov y Makarenko (2005), Nagle, Saff y Snider (2005), Spiegel (2001), Zill (2009), Zill y Cullen (2008).

Caracterización de los libros de texto

El análisis de libros de texto en este estudio se enfocó en la construcción de modelos matemáticos. Para cada libro se registró: 1) La definición de modelo matemático, y 2) La

presentación del proceso de modelación matemática. Posteriormente se organizaron en tablas, de acuerdo a estas dos definiciones, tal como se muestra en el siguiente ejemplo (Tabla 1):

Tabla 1
Definición de modelo matemático y descripción del proceso de modelación matemática
Carmona, I., y Filio, E. (2011). *Ecuaciones Diferenciales*. México: Adisson-Wesley.

Modelo matemático	Sin definición
Proceso de modelación matemática	La matemática es una abstracción de la realidad. Es poner en símbolos lo que nos rodea. Es una herramienta poderosa que nos conduce a través de la aplicación rigurosa de sus leyes y de la lógica a soluciones precisas. Ante una situación real: ajuste de especificaciones en las áreas de ingeniería, sistemas computacionales, economía, etc. El camino por seguir es: • Establecer la ecuación diferencial que traduce fielmente al lenguaje simbólico el fenómeno a estudiar. • Catalogar y resolver dicha ecuación. • Analizar la solución.

Resultados

Los resultados muestran que uno de los libros (Kiseliov et al., 2005), no presenta la definición de modelo matemático, ni el proceso de modelación matemática. Sin embargo, incluye ejemplos de cambio de volumen para mostrar la aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden, así como problemas propuestos de cambio de velocidad, ley de enfriamiento de Newton, disolución de una sustancia, entre otros.

Llama la atención que solamente dos de los textos contienen la definición de modelo matemático (Zill, 2009; Zill y Cullen, 2008) e incluyen la relación entre las matemáticas y los sistemas físicos, así como situaciones de la vida real. Hay que mencionar que el texto más utilizado en la asignatura ecuaciones diferenciales de acuerdo con los planes de estudio revisados es el libro de Zill (2009).

En referencia a la descripción del proceso de modelación matemática se presenta como un procedimiento que consta de tres etapas o fases. Los textos mencionados anteriormente definen las acciones a seguir en cada uno de los pasos del proceso de modelación matemática, excepto el texto de Carmona y Filio (2011), que solamente menciona los pasos de un “camino a seguir” sin describir en qué consiste cada uno de ellos.

Excepto el texto de Kiseliov et al. (2005), todos incluyen como parte importante del proceso de modelación matemática el planteamiento de una ecuación diferencial a partir de leyes físicas o empíricas; sin embargo, solamente tres (Nagle et al., 2005; Zill, 2009; Zill y Cullen, 2008) mencionan previamente que se deben identificar las variables que intervienen en el sistema por modelar. Al respecto solamente Boyce y Diprima (2007); Boyce y Diprima (2001) mencionan el término “razón de cambio” al traducir una ley empírica en una ecuación diferencial.

En términos de la solución de las ecuaciones diferenciales resultantes al plantear un modelo matemático, solamente Spiegel (2001) menciona que la ecuación resultante debe ser sujeta a condiciones específicas. Previo al cálculo de la solución de la ecuación diferencial resultante Nagle et al. (2005) proponen a los estudiantes hacer una serie de preguntas con el objeto de que reflexionen sobre el desarrollo que han llevado a cabo.

Como última fase o paso del proceso de modelación, todos los textos mencionan llevar a cabo un análisis de la solución, al respecto Nagle et al. (2005), Zill (2009), Zill y Cullen (2008) señalan que debe "validar" el modelo comparando los resultados con datos conocidos. Solamente Spiegel (2001) señala la importancia de graficar el resultado como parte del análisis de la solución.

Una vez que se llevó a cabo el proceso de análisis de la solución Spiegel (2001), Zill (2009), Zill y Cullen (2008), sugieren repetir los pasos del proceso de modelación hasta obtener un resultado razonable. Son pocos los libros que incluyen diagramas al describir el proceso de modelación matemática (Boyce y Diprima, 2007; Boyce y Diprima, 2001; y Zill. 2009; Zill y Cullen, 2008).

Conclusiones

Esta investigación ha permitido entre otras cosas reconocer la importancia de analizar e interpretar la solución de una ecuación diferencial relacionada con el modelo matemático de una situación real. En términos de la validez, algunos textos señalan que es un paso importante que no debe pasarse por alto, sin embargo, en los cursos que se imparten en las carreras de ingeniería la mayoría de los ejercicios se terminan cuando se obtiene la solución sin contrastar los resultados con datos conocidos. Debe señalarse que son escasos los textos que sugieren analizar la solución de una solución mediante una gráfica, lo que enfatiza que se sigue fomentando el enfoque analítico.Se debe mencionar que ante el hecho de que los textos no den importancia a la aplicación de condiciones iniciales como parte importante del proceso de modelación matemática, aunque luego lo hagan con los ejercicios, ocasiona que los estudiantes no tengan una visión clara de lo que significan las condiciones iniciales para un sistema físico o un situación de la vida real.

La mayoría de los libros analizados contienen ejercicios y problemas de aplicación similares con ecuaciones de primer y segundo orden para situaciones tales como: desintegración radiactiva, ley de enfriamiento de Newton, crecimiento o decrecimiento de una población, circuitos en serie *RL*, *LC* y *RLC*, movimiento armónico, mezclas químicas. Esto puede resultar de gran ayuda para los estudiantes en la comprensión del proceso de modelación, sin embargo, si se busca que a través de los libros de texto se puedan experimentar las matemáticas como medio para describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones de la vida diaria, es necesaria una revisión de los textos de acuerdo con los objetivos de las asignaturas.

Por lo tanto, las observaciones realizadas a partir de la revisión de los libros de texto han permitido determinar la necesidad de proponer en el aula un proceso de modelación matemática que incluya la construcción del modelo, la solución del modelo resultante y un análisis detallado

de la solución, sin olvidar la validación del modelo propuesto, y que los libros de texto sean una herramienta seleccionada de tal manera que puedan apoyar este proceso.

Una implicación educativa derivada de los resultados de este estudio puede ser una propuesta para modificar el programa de la asignatura de ecuaciones diferenciales en las carreras de ingeniería para integrar la práctica de la modelación matemática como una unidad de aprendizaje fundamental, con el propósito de propiciar en el estudiante habilidades para relacionar la matemática con otras áreas del conocimiento, interés por la matemática y su aplicabilidad, así como estimular su creatividad al formular y resolver problemas.

Este trabajo puede ofrecer futuras líneas de investigación. Por ejemplo, se podría considerar repetir la investigación realizada con el análisis de libros de texto de otras asignaturas del currículum de la carrera de ingeniería en sistemas computacionales tales como cálculo, que está relacionada con la asignatura de ecuaciones diferenciales, y en la que se estudia el proceso de modelación matemática.

Referencias y bibliografía

Arslan, S. (2010). Do students really understand what an ordinary differential equation is? *Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, *41*(7), 873-888. https://doi.org/10.1080/0020739X.2010.486448

Barbarán, J.J. y Fernández, J. A. (2014). El análisis de errores en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Una metodología para desarrollar la competencia matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(2), 173-186. https://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1122

Bautista, R. M. (2017). *Un análisis en los libros de texto del concepto de producto punto y su enseñanza, basado en la teoría del pensamiento matemático avanzado.* Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

Boyce, W. y Diprima, R. (2001). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Limusa Wiley.

Boyce, W. y Diprima, R. (2007). *Ecuaciones diferenciales. Una introducción a los métodos modernos y sus aplicaciones.* México: Patria.

Camacho, M., Perdomo, J. y Santos-Trigo, M. (2007). La resolución de problemas en los que interviene el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria: Un estudio exploratorio. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M.T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 87-106). Tenerife, España: SEIEM.

Camarena, P. (2009). Mathematical models in the context of sciences. En M. Blomhøj y S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (pp. 117-131). Denmark: Roskilde University.

Carmona, I. y Filio, E. (2011). *Ecuaciones Diferenciales*. México: Adisson-Wesley.

Córdoba, J. (2011). *La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA), México.

Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM*, *45*(5), 633–646.

González, M.T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos de la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, *22*(3), 389-408.

Guerrero, C., Camacho, M. y Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(3), 341–352.

Hadar, L. (2017). Opportunities to learn: Mathematics textbooks and students' achievements. *Studies in Educational Evaluation*, *55*, 153-166. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2017.10.002

Hernández, M. A. (2009). *Las Ecuaciones Diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme*. Tesis de maestría. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA), México.

Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 38(3), 303–310.

Kiseliov, A., Krasnov, N. y Makarenko, G. (2005). Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Moscú: MIR.

Nagle, K., Saff, E. y Snider A. (2001). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores a la frontera*. México: Addison Wesley-Longman.

Occelli, M. y Valeiras, N. (2013). Los Libros de texto de ciencias como objeto de investigación: Una revisión bibliográfica. *Enseñanza de las Ciencias*, *31*(2), 133-152.

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: El caso de las ecuaciones diferenciales. *RELIME*, *13*, 191-210.

Soon, W., Tirtasanjaya, L. y McInnes, B, (2011). Understanding the difficulties faced by engineering undergraduates in learning mathematical modelling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(8), 1023-1039. https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.573867

Spiegel, M. (2001) *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. México: Prentice Hall.

Trejo, E., Camarena, P. y Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: la matemática en contexto como propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria*, *11*, 397-424.

Zill, D. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. México: Cengage Learning.

Zill, D. y Cullen, M. (2008). *Matemáticas aplicadas para ingeniería, Vol. 1. Ecuaciones diferenciales*. México: McGraw-Hill.

Contextualização e descontextualização em atividades de modelagem matemática

Lourdes Maria Werle de **Almeida**
Universidade Estadual de Londrina
lourdes@uel.br
Brasil
Kassiana Schmidt **Surjus**
Universidade Estadual de Londrina
email.kaka@gmail.com
Brasil
Rosângela Maria **Kowalek**
Universidade Estadual de Londrina
rosangelakowalek1@gmail.com
Brasil

Resumo

Esta oficina é dirigida à exploração da contextualização e da descontextualização em atividades de modelagem matemática. Considerando um quadro teórico, discute-se uma atividade de modelagem em que estes aspectos são evidenciados. Na sequência duas outras atividades de modelagem são propostas aos participantes com a finalidade de gerar um processo reflexivo relativo ao potencial da modelagem matemática para prover uma contextualização sem, entretanto, livrar o professor da necessidade de promover a descontextualização, oferecendo aos estudantes meios para o domínio de conceitos, flexibilidade de raciocínio e capacidade de análise e abstração.

Palavras-chave: Educação Matemática; Educação; Ensino Presencial; Implementação Curricular; Modelagem Educacional; Pesquisa Qualitativa; Cálculo Diferencial; Contextualização; Descontextualização.

Ideias iniciais

Discussões relativas à relevância da contextualização dos objetos matemáticos nas aulas de matemática são recorrentes no âmbito da Educação Matemática (Luccas & Batista, 2008; Ferruzzi, 2011). Conforme discute Ferruzzi (2011), uma das suas finalidades é considerar situações, em geral não oriundas da própria matemática, mas mediante as quais os estudantes podem produzir significado e, então aprender matemática, considerando inclusive um panorama histórico, social e cultural em que os objetos matemáticos foram sendo caracterizados.

Documentos orientadores de currículos em diferentes países tratam da contextualização como princípio pedagógico. No caso do Brasil, por exemplo, os parâmetros curriculares apontam que ela não pode ser feita de maneira ingênua e não deve aparecer como forma apenas de *ilustrar* o enunciado de um problema (Brasil, 2006). Dois aspectos são fundamentais para a eficácia da contextualização na aula de matemática: os meios de realizá-la na sala de aula e a descontextualização.

Nesse sentido, como sugerem Luccas e Batista (2008), a contextualização diz respeito aos contextos em que se pode localizar um objeto matemático, sendo esses, na maior parte das vezes, associados a situações da realidade. Assim, apontamos para a modelagem matemática como meio de contextualização. Em termos gerais, a modelagem matemática se refere à obtenção de uma solução para um problema identificado em uma situação da realidade e inclui a construção e validação de um modelo matemático. Assim, na sala de aula os estudantes discutem, mediados pela matemática, situações cuja problemática tem origem em um contexto externo à matemática (Almeida et al., 2022).

Sendo a modelagem meio para a aproximação do contexto social e temporal dos estudantes com objetos matemáticos, não se pode perder de vista a necessidade de promover o acesso às estruturas desses objetos, a flexibilidade de raciocínio e o apoia à abstração requerida em matemática. Esses aspectos são mediados pela descontextualização que, conforme sugerem Luccas e Batista (2008), tem como função principal a identificação da estrutura dos objetos matemáticos que caracteriza a sua universalidade.

.

Contextualização e a Modelagem Matemática como Meio de Ação

De acordo com Luccas e Batista (2008, p. 8) a contextualização "é o processo de construção da inter-relação de circunstâncias que acompanham um fato ou uma situação, ou seja, em um determinado contexto todos os aspectos, bem como as articulações por eles estabelecidas devem ser considerados". Nesse sentido, a contextualização é a utilização de contextos para abordar um objeto matemático.

Estes contextos podem estimular os alunos a se envolver nas atividades propostas, assim, "a contextualização dos objetos matemáticos pode estimular os alunos para que se sintam motivados a aprender, principalmente quando envolve um contexto diferente do puramente matemático" (Luccas & Batista, 2008, p. 9).

A modelagem matemática, requerendo a interlocução entre matemática e realidade pode, portanto, ser um meio de contextualização. De acordo com Almeida et al. (2013), ela pode

fomentar a motivação dos estudantes, o trabalho cooperativo, a realização de diferentes resoluções para um mesmo problema, aspectos que se alinham ao papel da contextualização em sala de aula e o envolvimento dos estudantes.

No entanto, uma vez contextualizado um objeto matemático, sua universalidade e aspectos complementares àqueles que se evidenciaram na atividade de modelagem devem se tornar conhecidos pelos estudantes. Desse modo, o professor é fundamental no processo de descontextualização, uma vez que deve proporcionar a percepção e apreensão da estrutura dos objetos matemáticos que emergiram da atividade de modelagem, sendo responsável pela sistematização dos conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos.

Explorando uma situação: a contextualização e a descontextualização pela modelagem matemática de uma situação

Visando apontar para o potencial da modelagem para promover a contextualização, nesta oficina, inicialmente apresentamos uma atividade de modelagem com a temática *Pipoca de Microondas.*

Pipoca de Microondas

O milho de pipoca se caracteriza por possuir grãos pequenos e duros que têm a capacidade de estourar quando aquecidos em torno de 180 ºC, diferenciando-se do milho comum. As embalagens de milho de pipoca para serem estouradas no forno de microondas apresentam, em geral, a seguinte informação: "*o tempo ideal para retirar a pipoca do forno de microondas varia entre 2 e 5 minutos, dependendo da potência do forno. Mas em geral, o instante ideal para tirar o pacote do forno é quando o tempo entre um estouro e outro for superior a 2 segundos*".

Os fornos de micro-ondas, geralmente, possuem um botão para programar o tempo de preparo das pipocas, tempo este determinado empiricamente pelos fabricantes. Para estudar como esse tempo pode ter sido determinado, foram estourados quatro pacotes de 100 gramas de milho de pipoca de mesma marca em um forno cujo tempo programado para preparo da pipoca é de 2 minutos e 50 segundos, ou seja, 170 segundos. Os dados coletados experimentalmente são conforme mostra a tabela 1.

Tabela 1
Dados obtidos com o preparo de quatro pacotes de pipocas.

Pacote de pipoca	Quantidade inicial de milho (grãos)	Instante do primeiro estouro (em segundos)	Instante em que o pacote foi retirado do micro-ondas (em segundos)	Grãos que não estouraram
Pacote 1	715	96	170	52
Pacote 2	715	97	170	75
Pacote 3	715	92	170	63
Pacote 4	715	98	170	40

O que os grupos devem responder mediante a modelagem da situação é: 1) Qual o modelo matemático que descreve o comportamento dos estouros da pipoca? 2) Qual é o tempo ideal para

retirado da pipoca do forno para que haja menor quantidade de grãos sem estourar e sem queimar?

Do processo empírico de estourar as pipocas é possível considerar a hipótese: a variação do número de grãos que se transformam em pipoca é proporcional ao número de grãos que ainda não se transformaram em pipoca em cada instante. Desta forma definimos as variáveis:
n – Tempo em segundos
P_n*– número de grãos que não se transformaram em pipoca no instante n.*

Para a construção do modelo matemático vamos realizar duas abordagens. Na primeira, considerando P_n o número de grãos que ainda não se transformaram em pipoca no instante *n* e P_{n+1} o número de grãos que ainda não são pipoca no instante *n+1*, temos que $P_n - P_{n+1}$ corresponde ao número de grãos que estouram no intervalo entre *n* e *n+1*. Assim, em linguagem matemática, podemos escrever a hipótese como: $P_n - P_{n+1} = k.\ P_n$, em que *k* é uma constante de proporcionalidade. Na segunda abordagem faremos a relação da razão da variação dos grãos que se transformam em pipoca com os que não se transformaram ainda, utilizando os conceitos de derivadas e de equação diferencial ordinária e a variável tempo como sendo contínua. Na tabela 2 apresentamos os conceitos matemáticos que emergem na resolução:

Primeira abordagem	Segunda abordagem
$P_n - P_{n+1} = k.\ P_n$ Utilizando recursividade obtemos $P_n = P_0\,(1-k)^n$ Pelo Princípio da Indução, podemos escrever: $P_n = P_0\,(1-k)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De acordo com os dados da Tabela 1, o tempo médio para que as pipocas comecem a estourar é de aproximadamente n = 96 segundos, então podemos considerar que P_n para n ≥ 96, e considerando P_0 = 715, temos: $\mathrm{P}n = \begin{cases} 715, & se\ 0 < n < 96 \\ 715.\,(1-k)^{n-96}, & se\ n \geq 96 \end{cases}$ Fazendo P(170) = 58 em P(t) obtemos a expressão $1 - k = 0{,}96662$. Considerando na função que encontramos, temos como modelo matemático para o problema: $Pn = \begin{cases} 715, & se\ 0 < n < 96 \\ 715.\,(0{,}96662)^{n-96}, & se\ n \geq 96 \end{cases}$	$P(t) = \begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha P \\ P(0) = 715 \end{cases}$ Em que *t* é o tempo (em segundos) De acordo com os dados da Tabela 1, o tempo médio para que as pipocas comecem a estourar é de aproximadamente t = 96 segundos. Resolvendo a equação diferencial separável, e usando a condição inicial, obtemos o modelo: $P(t) = \begin{cases} 715, & se\ 0 < t < 96 \\ 715.\,e^{-0{,}0346(t-96)}, & se\ t \geq 96 \end{cases}$

Figura 1. Abordagens matemáticas para a atividade da Pipoca

Para determinar o tempo ideal de retirada do pacote do forno é preciso usar a condição informada no pacote de que o tempo entre um estou e outro não pode ser superior a 2 segundos. Assim, usando a condição $P_n - P_{n+1} = 1$ na primeira abordagem e $P(t) - P(t+2) = 1$ na segunda, é possível obter que o tempo ideal de retirada do pacote do forno é de 209 segundos.

A Descontextualização e o Agir Docente

A atividade de modelagem viabilizou o uso de objetos matemáticos, proporcionando a sua contextualização. Objetos como função exponencial, proporcionalidade, indução matemática,

entre outros, passam a ser caracterizados dentro de um contexto específico: o estouro de pipocas. Porém é na descontextualização que os participantes terão acesso a estrutura universalizante desses objetos. Esta ação das ministrantes de tratar da conceitualização e das características desses objetos para além do que a atividade proporcionou, fortalece o desenvolvimento do pensamento lógico-racional e abstrato do estudante.

Cada modelo matemático obtido explora e dá ênfase a aspectos específicos da estrutura matemática emergente na resolução. Na abordagem 1, especificidades e a universalidade dos objetos matemáticos (função exponencial e processos recursivos) serão explorados pelas ministrantes da oficina. Os participantes serão instigados a colaborar e manifestar o que sabem, o que aprenderam e a indicar o que ainda lhes requer maior entendimento. Na sequência, a ação das ministrantes, sistematizando e formalizando os conceitos emergentes, estabelece um vínculo entre o conhecimento empírico e a teorização de tal conhecimento, conforme aponta o esquema da figura 2.

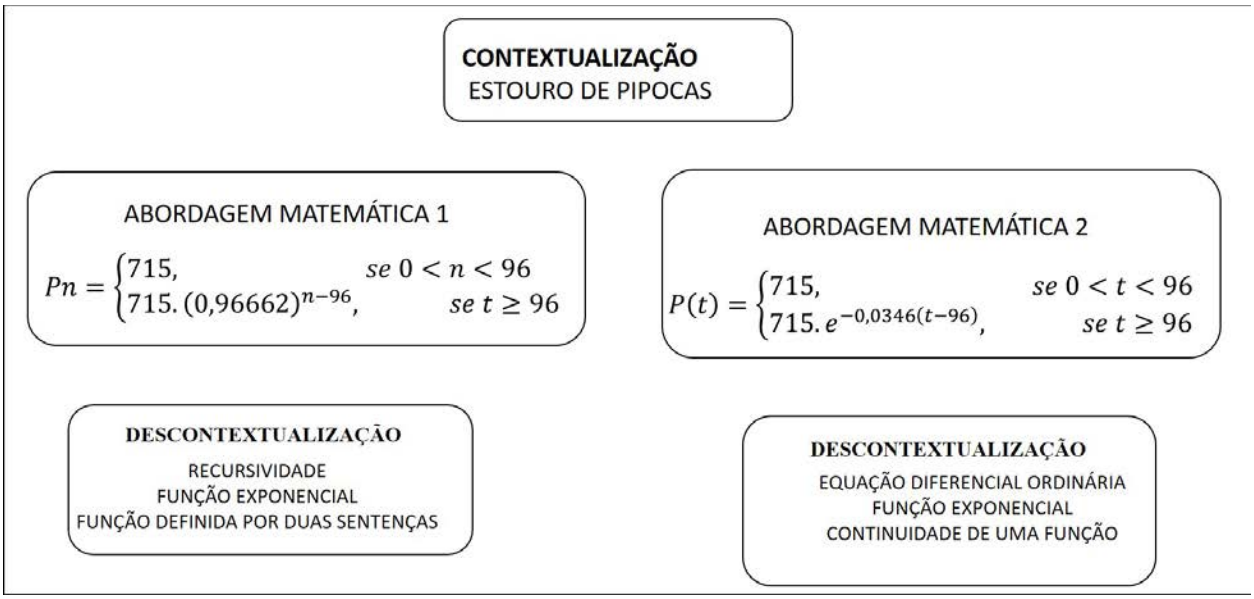


Figura 2. Esquema: da contextualização para a descontextualização

Trabalho dos Grupos na oficina

A parte prática da realização da oficina segue, a partir dos encaminhamentos anunciados nas seções anteriores, com a proposição de duas situações em que os participantes, distribuídos em grupos, farão uma abordagem matemática, obtendo uma solução para o problema identificado em cada situação. Cada grupo de participantes irá propor uma solução para o problema identificado na situação. Uma vez concluída a resolução, cada grupo fará uma apresentação, elucidando os procedimentos e a resposta obtida. Nas discussões com todos os participantes, serão exploradas as possibilidades de contextualização de objetos matemáticos e na ação do professor para a descontextualização pertinente.

Os grupos receberão informações sobre a situação-problema conforme segue. Para a construção de um modelo matemático e apresentação de uma solução, os grupos serão orientados

e assessorados pelas ministrantes da oficina. Nas atividades de modelagem, por um lado a investigação de uma situação da realidade é iniciativa dos estudantes. Por outro lado, a descontextualização é ação do professor para evidenciar a estrutura universalizante dos objetos matemáticos utilizados na resolução.

Ao término do desenvolvimento das atividades pelos grupos, será promovida uma discussão sobre a contextualização e a descontextualização dos objetos matemáticos em cada atividade a partir dos encaminhamentos propostos nos grupos.

Situação-problema 1: o crescimento de um formigueiro

A abordagem matemática para o crescimento de um formigueiro sob certas condições é realizada em Almeida e Dias (2004). As formigas, cuja existência se mede na casa dos cem milhões de anos, segundo Sales (1998), manifestam a sua inteligência principalmente pela forma como dividem suas tarefas, desenvolvem suas habilidades e vivem em sociedade. Toda esta eficiência faz com que a massa viva de todos os formigueiros alcance um milhão de toneladas, o que a torna apenas cerca de 300 vezes menor que o peso total da humanidade. Em função da ampla variedade de espécies de formigas conhecidas, escolhemos as saúvas, mais especificamente, a saúva limão, cujo nome científico é *Atta sexdens rubropilosa*. Embora sua função no ecossistema seja importante, quando não controladas, podem causar danos muito grandes.

Alguns dados: a longevidade média das formigas operárias é de 150 dias; a longevidade média da rainha é de 5475 dias (15 anos); a duração média do ciclo evolutivo desta espécie é de 57 dias; o período que a rainha permanece no canal que vai se transformar em formigueiro até a primeira postura é de cinco dias; a população estimada de um formigueiro adulto é de, aproximadamente, cinco milhões de formigas.

Com estas informações, propomos a seguinte situação problema: como ocorre o crescimento de um formigueiro da saúva-limão?

Situação-problema 2: a catedral da cidade de Londrina – Paraná

A Catedral de Londrina, (Figura 3), foi projetada pelos arquitetos Edoardo Rosso e Yoshimasa Kimach. e está localizada no centro da cidade de Londrina no Paraná, Brasil. Considerada um monumento de arte e de fé, moderna e majestosa, é sempre notada pela sua estrutura e tamanho. A partir da imagem, propomos o problema: Qual é a altura da catedral?

Figura 3. Catedral de Londrina
Adaptado de Maeda (2010)

Referências e Bibliografia

Almeida, L. M. W., Silva, K. P., & Vertuan, R. E. (2013). *Modelagem Matemática na Educação Básica*. 1ª Ed., 1ª reimpressão – São Paulo: Contexto.

Almeida, L. M. W., Silva, K. P, & Brito, D. S. (2022). Interface Didática entre Modelagem Matemática e Semiótica *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 36, n.73, p.777-800, ago.

Almeida, L. M. W., & Dias, M. R. (2004). Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 17, nº 22, p. 19 a 36, setembro.

Brasil, M. E. C. (2006*). Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio*. Brasília: SEMTEC.

Ferruzzi, E.C. (2011). *Interações discursivas e aprendizagem em Modelagem Matemática* [Tese de doutoramento, Universidade Estadual de Londrina]. Ed. UEL, Londrina-PR.

Luccas, S., & Batista, I. D. L. (2008). A importância da contextualização e da descontextualização no ensino de Matemática: uma análise epistemológica. *Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*, *2*, 1-17.

Maeda, L. (2010). Um passeio por Londrina. *Vida de uma fotógrafa*. http://vidadeumafotografa.blogspot.com/2010/11/um-passeio-por-londrina.html.

Sales, F. J. M. (1998). *Saúvas: comportamento, domesticação e aleloquímicos*. Ediatta.

Dimensões didática e epistemológica da proposição de problemas nas aulas de matemática: construções teóricas

Cristina de Jesus **Teixeira**
Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Brasília - PPGE/UnB
Brasil
cristina.j.teixeira@gmail.com
Geraldo Eustáquio **Moreira**
Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Brasília – PPGE/UnB
Brasil
geust2007@gmail.com

Resumo

Esta comunicação[1] objetivou abordar as dimensões didática e epistemológica da proposição de problemas em aspectos dos âmbitos prescritivo e descritivo. O estudo, por sua natureza teórica, teve abordagem qualitativa, caracterizada como exploratória. A construção teórica fundamentou-se em estudos autorais (Teixeira & Moreira, 2022b), em elementos da teoria da aprendizagem significativa (Ausubel, 2003), dos campos conceituais (Vergnaud, 2009) e da taxonomia revisada de Bloom (Anderson et al., 2001). A discussão teórica apontou que a proposição de problemas implica investimento na confecção (professor) e realização (estudante) das tarefas e fornecimento de material profuso, possibilitando que os produtos e os processos sejam verificados de forma mais qualitativa. Portanto, considera-se necessário propor "modelos" para direcionar e subsidiar a confecção de tarefas, auxiliar a mediação do professor no uso das estratégias de proposição de problemas pelo estudante e viabilizar a verificação da potencialidade da tarefa para o desenvolvimento cognitivo e aprendizagem significativa da matemática.

Palavras-chave: Educação matemática; Metodologia de ensino-aprendizagem; Proposição de problemas; Construção teórica; Dimensões didática e epistemológica; Modelos prescritivos e descritivos; Brasil.

[1] Esta comunicação é recorte de uma tese de doutoramento, em andamento, da primeira autora, sob orientação do segundo autor. A tese tem como objeto de estudo a formulação de problemas por estudantes.

Considerações Iniciais

Há algumas décadas, iniciou-se um movimento ocidental pela melhoria da qualidade da aprendizagem da matemática que, principalmente, sob a influência de Pólya (1945), resultou em recomendações em diversos documentos de cunho educacional, inclusive nos de base curricular, que o ensino da matemática fosse a partir de problemas.

De modo geral, essa recomendação parece ter sido interpretada como uso da resolução de problemas, visto a importância que esta tem recebido de pesquisadores, educadores matemáticos e, de parte, dos professores.

Entende-se que essa interpretação deveria ser no sentido de fazer uso do problema como uma metodologia de ensino, conforme defende Pólya (1985, p. 13) que "os problemas matemáticos estejam no centro do ensino da matemática". O autor refere-se à resolução e, também, a outros processos heurísticos e criativos que permeiam ou deveriam permear o ensino por problemas.

Nesse sentido, do ensino a partir do problema, matemáticos e educadores matemáticos destacaram a importância tanto da resolução quanto da formulação de problemas (Brown & Walter, 1983; Schoenfeld, 1985; Silver, 1994), em certa medida, considerando-as complementares.

Na literatura internacional das últimas três décadas, fortaleceu-se o interesse dos pesquisadores pela formulação de problemas (Silver, 1994; Cai et al., 2022). Ainda assim, isso não foi suficiente para colocá-la como foco da pesquisa em educação matemática (Singer et al., 2013), ou em equivalência à resolução de problemas (Silver, 1994; Baumanns & Rott, 2022) a ponto de ser difundida nas salas de aula de matemática (Cai et al., 2022).

No âmbito nacional, pesquisas voltadas para essa temática são ainda mais escassas (Altoé, 2017; Teixeira & Moreira, 2022a). No Brasil, somente a partir no final década de 1980, tiveram impulso estudos mais sistematizados sobre a Resolução de Problemas (Andrade, 1998; Onuchic, 1999), considerada por alguns autores como Andrade (1998), Onuchic (1999), Onuchic e Allevato (2011), como uma metodologia de ensino, que veio a se consolidar como uma das tendências da educação matemática.

Desde então, no bojo dessa tendência, têm se avolumado as pesquisas sobre a resolução de problemas, inclusive algumas propõem metodologias que, ainda que voltadas à resolução, admitem a reformulação e/ou geração de novos problemas no decorrer ou ao final do processo de resolução (Andrade, 1998; Onuchic & Allevato, 2011).

Apesar das pesquisas desenvolvidas, a formulação de problemas, de fato, ainda não alcançou a sala de aula (Andrade, 2008). A própria resolução parece ter uso esporádico (Medeiros, 2013) e, na maioria das vezes, para finalizar uma sequência didática, na qual a tarefa geralmente requer a utilização de processos conhecidos para resolver um problema familiar (Vergnaud, 2009), restringindo-se a níveis básicos do processo cognitivo e revelando provável mau uso do problema, que deveria ser utilizado como gerador do processo de aprendizagem.

O mau uso do problema, de modo geral, no contexto da sala de aula, pode estar relacionado à falta de uma compreensão clara do que seja o ensino a partir da sua utilização, além da falta de modelos prescritivos que orientem e subsidiem a estruturação da formulação de problemas (Singer et al., 2013 Baumanns & Rott, 2022; Cai et al., 2022). Hiato que atinge não apenas a formulação, mas outras estratégias adjacentes, como a reformulação e a elaboração (Teixeira & Moreira, 2022b) e, consequentemente, a própria resolução de problemas.

Diante disso, o uso de problemas como indutor do processo de aprendizagem por meio de uma variedade de estratégias (reformulação, formulação, elaboração, resolução e problematização), englobando todas as etapas da sequência didática, foi considerado como uma metodologia, denominada por Teixeira e Moreira (2022b) metodologia de ensino-aprendizagem da matemática por meio da proposição de problemas. Nessa perspectiva, o uso do problema apresenta potencial para o desenvolvimento cognitivo do estudante e para a aprendizagem significativa da matemática. Essa concepção considera as dimensões pedagógica, metodológica, didática e epistemológica, sendo as duas últimas abordadas neste estudo.

Além destas considerações iniciais, o texto compõe-se da metodologia, do marco teórico, de algumas dimensões da proposição de problemas, das dimensões didática e epistemológica especificamente, da concepção de modelos prescritivo e descritivo, e das considerações finais.

Metodologia

Considerando a proposta da metodologia de ensino-aprendizagem da matemática por meio da proposição de problemas, este estudo, de natureza teórica, com abordagem qualitativa, caracterizada como exploratória, se propôs a apresentar e discutir ideias (Gil, 2008) sobre a sistematização de procedimentos relacionados ao uso de problemas nas aulas de matemática.

Por essa sistematização referir-se, mais especificamente, às estratégias de proposição de problemas a serem utilizadas na materialização da tarefa e aos processos cognitivos decorrentes da atividade do estudante sobre ela, esse estudo teve como objetivo abordar as dimensões didática e epistemológica da proposição de problemas.

As discussões partiram da necessidade de saber como fazer uso adequado das diferentes estratégias de proposição de problemas, de verificar o material produzido pelo estudante e os processos cognitivos provenientes da sua atividade. Dessa forma, o percurso metodológico foi desenvolvido estritamente apoiado na teoria, direcionando a aspectos que levaram ao delineamento do tipo de conhecimento mais acentuado em cada dimensão, um de cunho operatório e o outro conceitual.

Esse delineamento deu lugar à discussão sobre os aspectos *de como fazer* e *do que* e *como foi feito.* Considerando as especificidades do processo de ensino-aprendizagem da matemática e com base no aporte teórico da vertente cognitivista, concebeu-se os modelos prescritivo e descritivo, buscando justificar e fundamentá-los no contexto da proposta de proposição de problemas.

Marco teórico

A metodologia de ensino-aprendizagem da matemática por meio da proposição de problemas, de forma abrangente, deve viabilizar o desenvolvimento cognitivo do estudante e a aprendizagem significativa da matemática, o que, neste estudo, especificamente, envolve e afeta, de forma mais contundente, as dimensões didática e epistemológica.

Para sustentar a discussão sobre as dimensões envolvidas, instituiu-se pontes entre teorias nas quais o uso de problemas desempenha, em maior ou menor medida, um papel central no processo de aprendizagem. A primeira, de cunho mais didático, voltada para a organização do ensino com base em tarefas de proposição de problemas, a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (2003); a segunda, de cunho epistemológico, com foco nas representações resultantes da atividade do estudante e no processo de conceitualização que ocorre a partir da oferta de uma variedade de problemas, a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (2009); e a terceira, contemplando o didático e o epistemológico, com ênfase na definição e distinção de níveis de cognição envolvendo a dimensão dos processos cognitivos a partir de objetivos de aprendizagem, a taxonomia revisada de Bloom (Anderson et al., 2001).

A teoria da aprendizagem significativa, moldada para um contexto formal de ensino e aprendizagem, tem como premissa básica identificar os conhecimentos existentes na estrutura cognitiva do estudante e a eles relacionar o novo objeto de conhecimento. A forma mais adequada e promissora dessa ocorrência se constitui no trabalho com problemas, dado por tarefas que exijam a máxima atividade do estudante, nas quais os conhecimentos prévios possam interagir com os objetos, propriedades e conceitos da tarefa levando à reorganização da estrutura cognitiva a fim de atingir um objetivo, constituindo-se uma tarefa potencialmente significativa. Esse processo traduz a essência da aprendizagem significativa, contexto no qual o problema pode ser considerado o meio cognitivo que viabiliza a conceitualização e a construção de significados.

Em complementariedade, a teoria dos campos conceituais, referencial da educação matemática, aborda o ensino-aprendizagem da matemática, com ênfase na oferta de uma variedade de problemas, nos conceitos e conhecimentos exigidos nesses problemas e nas representações geradas a partir da atividade do estudante sobre eles, resultando no processo de conceitualização. Dessa forma, oportuniza a investigação do desenvolvimento cognitivo a partir do conteúdo das representações e da sua análise conceitual, constituindo um referencial útil para verificar a ocorrência da aprendizagem significativa com base na proposição de problemas.

A taxonomia revisada de Bloom contempla ao mesmo tempo aspectos didáticos e epistemológicos da proposição de problemas. Na dimensão didática, a partir da definição do objetivo de aprendizagem, subsidia o planejamento e a confecção da tarefa ao auxiliar a escolha da estratégia de proposição de problema (reformulação, formulação, elaboração, resolução) adequada ao que se espera que o estudante faça, explicitando o como fazer por meio do processo cognitivo e o que fazer por meio do tipo de conhecimento a ser utilizado. Quanto à dimensão epistemológica, ela viabiliza a verificação do potencial da tarefa por meio da análise da produção do estudante (representação explicita e implícita) quanto ao tipo de conhecimento desenvolvido (conceitual, procedimental, metacognitivo) e do processo cognitivo utilizado (entender, aplicar, analisar, avaliar, criar) na tarefa de proposição de problema.

As três teorias são complementares na medida em que a teoria da aprendizagem significativa oferece princípios para organizar o ensino com base em tarefas de proposição de problemas; a teoria dos campos conceituais permite verificar os conhecimentos subjacentes à atividade do estudante e o processo de conceitualização a partir da oferta de uma variedade de problemas; e a taxonomia revisada de Bloom subsidia, com base no objetivo de aprendizagem e no domínio do processo cognitivo, a confecção de tarefas de proposição de problemas e a verificação do seu potencial para o desenvolvimento cognitivo.

Holisticamente, pode-se dizer que a convergência dessas teorias está no processo de conceitualização, caracterizada, neste estudo, pelo enfrentamento e apropriação de tarefas de proposição de problemas progressivamente mais complexas.

Dimensões da proposição de problemas

A metodologia de ensino-aprendizagem da matemática por meio da proposição de problemas se alicerça na intencionalidade de melhorar a qualidade da aprendizagem, fazendo uso adequado do problema (Teixeira & Moreira, 2022b) para viabilizar o desenvolvimento dos processos cognitivos e favorecer a aprendizagem significativa da matemática.

Não se trata de fazer uso do problema numa tarefa, numa sequência didática, num plano de ensino, mas de torná-lo a base do trabalho pedagógico como um todo, na amplitude de uma metodologia (Teixeira & Moreira, 2022b), medida que afeta as dimensões pedagógica, metodológica, didática e epistemológica.

Enquanto a dimensão pedagógica preocupa-se com as condições necessárias de uso do problema para viabilizar melhorias no processo de ensino-aprendizagem da matemática; a metodológica busca garantir que o uso de problemas seja o ponto de partida e de sustentação do trabalho pedagógico; a didática ocupa-se da seleção, preparação/adaptação e disponibilização de estratégias da proposição de problemas a serem utilizados na materialização da tarefa; e a epistemológica verifica os processos cognitivos decorrentes da atividade do estudante sobre a tarefa de proposição de problemas.

Este estudo concentrou-se nas dimensões didática e epistemológica da proposição de problema.

Dimensão didática da proposição de problemas

A dimensão didática da proposição de problemas, nesse estudo, refere-se à seleção e ao emprego das estratégias reformulação, formulação, elaboração, problematização e resolução de problemas para a confecção de tarefas de proposição de problemas.

Para que o uso de problemas transcenda a restrita resolução, incidindo na atividade do estudante como reformulador e formulador para além de resolvedor de problemas *tipo* do professor e/ou livro didático (Teixeira & Moreira, 2022b), deve haver investimento na ampliação e aprimoramento dos tipos de tarefas ofertados (Ausubel, 2003; Vergnaud, 2009).

A ampliação e o aprimoramento dos tipos de tarefas implica em conhecer a estrutura das diferentes estratégias de proposição de problemas e fazer uso adequado das mesmas. A estruturação descreve as fases básicas que compõem cada estratégia (Teixeira & Moreira, 2022b). O seu uso adequado, entretanto, requer o domínio de procedimentos e de técnicas de forma sistematizada, um roteiro próximo ao que Cai et al. (2022) chamou de modelo normativo.

A sistematização, no entanto, é um subsídio à confecção da tarefa pelo professor e à orientação e mediação na realização desta pelo estudante (Ausubel, 2003), caracterizada como prescritiva.

A confecção da tarefa de proposição de problemas implica na posterior verificação da sua adequação para o desenvolvimento dos processos cognitivos intencionados no objetivo de aprendizagem (Anderson et. al, 2001), isto é, se a tarefa apresenta potencial para viabilizar o desenvolvimento cognitivo.

O desenvolvimento cognitivo está associado à conceitualização, aos processos decorridos durante a atividade do estudante sobre o problema que se materializam sob a forma de representações (Vergnaud, 2009), campo de dimensão epistemológica da proposição de problemas.

Dimensão epistemológica da proposição de problemas

Como o desenvolvimento cognitivo, em geral, tem sido considerado somente a partir do registro escrito (Vergnaud, 2009), a proposição de problemas pode fornecer um material variado e abundante (Teixeira & Moreira, 2022b), oportunizando uma verificação mais qualificada e pormenorizada dos processos cognitivos decorrentes da atividade do estudante sobre a tarefa e subjacentes à sua produção.

Essa produção resulta de dois movimentos integrados na materialização da atividade sobre um problema: um movimento cognitivo implícito seguido de sua projeção explícita (Vergnaud, 2009).

A projeção, representação explícita, é a maneira de comunicar seja por meio de desenho, diagrama, gráfico, linguagem matemática, linguagem materna; e justificar o processo cognitivo ocorrido durante a atividade (Teixeira & Moreira, 2022b). Ela é empregada para descrever e corporificar parte dos processos cognitivos envolvidas na conceitualização, e apesar de revelar apenas uma micro parte destes, tem sido o aspecto da atividade valorizado por ser diretamente observável (Vergnaud, 2009).

A movimentação implícita, que sustenta a comunicação pela descrição e pela corporificação dos processos ocorridos, caracteriza uma parte considerável dos processos cognitivos, entretanto pouco tem sido valorizada por não ser diretamente observável (Vergnaud, 2009). Os invariantes operatórios (objetos, propriedades, relações) reconhecidas no problema apoiam os processos cognitivos e organizam a atividade do estudante (Ausubel, 2003), viabilizando a conexão entre o problema e os conhecimentos necessários para enfrentar e apropriar-se dele.

Esse enfrentamento e apropriação resultam no registro da atividade, do estudante, por meio da representação (Ausubel, 2003). Esta, ao exigir a construção e a elaboração dos objetos, das propriedades e das relações reconhecidos no problema (invariantes operatórios), inicia um processo no qual os transforma em conceitos explícitos, dando lugar à conceitualização, cerne do desenvolvimento cognitivo (Vergnaud, 2009).

O desenvolvimento cognitivo ocorre com a ampliação da capacidade de interagir, integrar e explicitar conceitos resultando no seu aprimoramento ou na geração de novos significados (Ausubel, 2003). Processo decorrente da apropriação de problemas, nos quais o estudante identifica conceitos e teoremas e os relaciona à estrutura cognitiva, resultando em representações (Vergnaud, 2009).

A dependência entre os conceitos e os problemas se retroalimenta: os problemas significam os conceitos ao mesmo tempo que a apropriação de um problema requer a mobilização de vários conceitos (Vergnaud, 2009). Considerando que a atividade do estudante sobre o problema gera o processo de conceitualização, cerne do desenvolvimento cognitivo e evidência de aprendizagem significativa (Ausubel, 2003; Vergnaud, 2009), enfatiza-se a pertinência de ofertar uma variedade de problemas.

Nessa perspectiva, a metodologia de ensino-aprendizagem da matemática por meio da proposição de problemas mostra-se uma alternativa viável. Essa viabilidade se sustenta (i) na variedade da oferta de tarefas de proposição de problemas, por ser constituída por diferentes estratégias (reformulação, formulação, elaboração, resolução), e na (ii) exigência da atividade do estudante de forma mais efetiva, como reformulador e formulador para além de resolvedor de problemas, resultando no fornecimento de um material mais expressivo e profuso (produção do estudante).

Essa produção é fruto das representações, tanto conhecimentos explícitos quanto implícitos (Vergnaud, 2009), que permitem compreender a relação entre a atividade do estudante e a conceitualização, processo oriundo da oferta de tarefas que exigem um esforço deliberado no seu enfrentamento e na sua apropriação (Ausubel, 2003).

De acordo com Ausubel (2003), um dos fatores que leva o estudante a se apropriar e agir sobre a tarefa é seu potencial significativo, explicitado ao favorecer que o novo conteúdo se relacione às ideias relevantes da estrutura cognitiva, para que possa ser elaborado; e, partir do que sabe o estudante, para facilitar a interação entre as informações contidas na tarefa e a estrutura cognitiva. Estes, como se pode observar, estão relacionados ao tipo de tarefa ofertado.

Quanto ao tipo de tarefa ofertado, neste estudo, são observados dois aspectos: a confecção de tarefas potencialmente significativas, pelo professor, e a verificação da sua potencialidade, pela produção e atividade do estudante, para o desenvolvimento cognitivo e para a aprendizagem significativa da matemática.

Modelo prescritivo e modelo descritivo

Neste estudo, a ideia de modelo refere-se ao estabelecimento de procedimentos básicos e, essencialmente, caracteriza-se pela seleção, ordenação e combinação de mecanismos e critérios que resultem num roteiro de *como fazer* e para verificar *o que* e *como foi feito*.

Esses modelos, apesar de caracterizados pela sistematização de um conjunto de procedimentos, não apresentam engessamento. Ao contrário, devido a sua natureza pedagógica, são flexíveis e adaptáveis.

A metodologia de ensino-aprendizagem da matemática por meio proposição de problemas se ampara, de forma mais enfática, nos âmbitos prescritivo e descritivo. A prescrição, de uso das estratégias de proposição de problemas (Teixeira & Moreira, 2022b), e a descrição, das representações (Vergnaud, 2009), podem ser orientadas a partir de modelos, tanto para direcionar a confecção da tarefa pelo professor e auxiliar na mediação do desenvolvimento desta pelo estudante, quanto para verificar a sua potencialidade por meio das representações explícitas e implícitas resultantes da atividade do estudante sobre a tarefa.

A proposição de problemas, como metodologia de ensino-aprendizagem, carece de investimento na confecção de tarefas, uma vez que a produção do estudante passa a ser fruto, não somente da atividade de resolver problemas do livro didático ou adaptados pelo professor, mas de reformular e de formulá-los (Teixeira & Moreira, 2022b). Esse aspecto, da atividade do estudante, exige que as tarefas sejam bem planejadas, organizadas e confeccionadas (Anderson et. al, 2001; Ausubel, 2003; Vergnaud, 2009), apresentando precisão quanto aos objetivos de aprendizagem e coerência quanto ao domínio do processo cognitivo (Anderson et al., 2001).

Para a confecção da tarefa, a orientação e a mediação do uso das estratégias pelo estudante, propõe-se os modelos do âmbito prescritivo a partir da proposição de problemas (Teixeira & Moreira, 2022b), com respaldo nos princípios de organização do ensino (Ausubel, 2003) com base em tarefas de proposição de problemas, na oferta de uma variedade de problemas (Vergnaud, 2009) e nos objetivos de aprendizagem (Anderson et al., 2001).

Para a verificação do potencial da tarefa de proposição de problemas para o desenvolvimento cognitivo, propõe-se os modelos de âmbito descritivo, estabelecidos com base em critérios e especificações que possibilitem identificar, descrever e analisar, a partir das produções, as representações e os processos cognitivos ocorridos durante a atividade do estudante e subjacentes a ela (Vergnaud, 2009). Estes com respaldo nos conhecimentos-em-ação (Vergnaud, 2009) e nos níveis de complexidade do domínio cognitivo (Anderson et al., 2001).

Na verificação do potencial da tarefa, dois aspectos podem ser observados: (i) a representação explicita materializada na produção e (ii) a representação implícita, constituída pelos conhecimentos subjacentes à representação.

No caso da representação explícita, os critérios e especificações devem ser associados ao objetivo de aprendizagem e contemplar as dimensões do conhecimento e dos processos cognitivos (Anderson et al., 2001). Critérios mais gerais seriam: adequação da tarefa; objeto de

conhecimento; conceitos, operações e propriedades utilizados; apresentação, contexto e abertura; originalidade e detalhamento.

Quanto à representação implícita, os critérios e especificações podem ser estabelecidos com vistas a identificar, descrever e analisar os conceitos e teoremas-em-ação subjacentes à atividade do estudante (Vergnaud, 2009).

Considerações

A proposição de problemas, por exigir a atividade do estudante de forma mais efetiva, implica tanto na exigência de maior investimento na confecção das tarefas, por parte do professor, quanto na produção de um material mais expressivo e variado, por parte do estudante. Esses aspectos possibilitam que os produtos gerados (representações explícitas) e os processos (representações implícitas) ocorridos durante a atividade do estudante sobre a tarefa de proposição de problemas possam ser verificados de forma mais qualitativa e pormenorizada.

Considera-se, portanto, a necessidade de propor e construir modelos com ênfase prescritiva e na dimensão didática, *o como fazer*, tanto para direcionar e subsidiar a confecção de tarefas de proposição de problemas, quanto para orientar a mediação do uso das estratégias de proposição de problemas pelo estudante.

Da mesma forma, para a verificação da potencialidade da tarefa a partir da produção e atividade do estudante, são necessários modelos, com ênfase descritiva e na dimensão epistemológica, *o que* e *como foi feito*, que possibilitem identificar, descrever e analisar as representações explícitas, materializadas na produção, e as representações implícitas decorrentes da atividade do estudante e subjacentes à sua produção.

Portanto, a proposição de problemas, pelas especificidades apresentadas, requer a concepção e o estabelecimento de "modelos" prescritivos e descritivos como subsídio à metodologia proposta, com intento de viabilizar o desenvolvimento cognitivo e a aprendizagem significativa da matemática.

Agradecimentos

Ao Grupo de Pesquisa *Dzeta* Investigações em Educação Matemática (DIEM); à Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF); aos Programas de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Brasília (PPGE/UnB) e à Fundação de Apoio à Pesquisa do Distrito Federal (FAPDF).

Referências e bibliografia

Altoé, R. O. (2017). *Formulação de problemas do campo conceitual multiplicativo no ensino fundamental: uma prática inserida na metodologia de resolução de problemas*. [Dissertação de Mestrado, Instituto Federal do Espírito Santo]. Repositório da IFES. https://repositorio.ifes.edu.br/handle/123456789/141

Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., Airasian, P. W., Cruikshank, K. A., Mayer, R. E., Pintrich, P. R., Raths, J., & Wittrock M. C. (2001). *A taxonomy for learning, teaching and assessing: a revison of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. Addison Wesley Longman.

Andrade, S. (1998). *Ensino-aprendizagem de matemática via exploração de problemas, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula*. [Dissertação de Mestrado, Unesp].

Ausubel, D. P. (2003). *Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva* (L. Teopisto, Trad.). Plátano Edições Técnicas.

Baumanns, L., & Rott, B. (2022). The process of problem posing: Development of a descriptive phase model of problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 110, 250-269. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10136-y

Brown, S. I., & Walter, M. (1983). *The art of problem posing*. Lawrence Erlbaum Associates.

Cai, J., et al. (2022). Mathematical problem posing: task variables, processes, and products. In: Fernández, C., et al. (Eds.). *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Alicante, Spain, 18-23 of July of 2022. PME. Vol. 1. ISBN 978-84-1302-175-1, pp. 119-145.

Gil, A. C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social* (6a. ed.). Atlas.

Medeiros, K. M. (2013). *Investigando a Formulação e a Resolução de Problemas Matemáticos na Sala de Aula: Explorando Conexões entre Escola e Universidade*. (Resumo Expandido). https://pos-graduacao.uepb.edu.br/ppgecm/capes/

Onuchic, L. R. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: M. A. V. Bicudo, *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas* (pp. 199-220). Editora UNESP.

Onuchic, L. R., & Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, *25*(41), 73–98. http://www.redalyc.org/pdf/2912/291223514005.pdf

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press.

Polya, G. (1985). O ensino por meio de problemas. *Revista do Professor de Matemática*, *7*.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Silver, E. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 19-28.

Singer, F. M., Ellerton, N. F., & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 1–7. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9478-2

Teixeira, C. J., & Moreira, G. E. (2022a). Formulação de problemas de matemática: itinerário das produções acadêmicas brasileiras no período de 2011 a 2020. *Revista Prática Docente*, 7(2), e22025. 10.23926/RPD. 2022. v7. n2. e22025.id1495

Teixeira, C. J., & Moreira, G. E. (2022b). Ensino-Aprendizagem da Matemática por meio da Proposição de Problemas: uma proposta metodológica. *Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática*, *6*(1). https://doi.org/10.34019/2594-4673.2022.v6.38476

Vergnaud, G. (2009). *A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino de matemática na escola elementar* (M. L. F. Moro, Trad.). Ed. da UFPR.

Discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas en el estudio de un modelo que describe factores del estallido social en Colombia

Jainer Andrés **Gómez-Chavarro**
Facultad de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
jainer.gomez@correounivalle.edu.co
Jhony Alexander **Villa-Ochoa**
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
jhony.villa@udea.edu.co

Resumen

Este trabajo analiza las discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas que dos futuros profesionales evidencian cuando estudian modelos matemáticos. A través del estudio de dos casos, se analizaron las entrevistas que se realizaron a los participantes cuando estudiaron un modelo logístico que describe algunos factores presentes en el estallido social ocurrido durante 2021 en Colombia. En particular, los resultados muestran el énfasis que el conocimiento disciplinar y del contexto tienen en este tipo de discusiones; para cada caso, se describen las características, interpretaciones y análisis de los modelos matemáticos.

Palabras clave: Modelación; Educación universitaria; Función logística; Programación; Matemáticas; Discusiones

Introducción

La integración de la modelación matemática se recomienda en la mayoría de los currículos alrededor del mundo; sin embargo, no existe una comprensión homogénea de la modelación ni de sus alcances y tareas dentro de la investigación y el currículo escolar (Kaiser, 2017). Entre diferentes perspectivas de la modelación, se destaca la socio-critica, en la cual se busca reconocer diferentes maneras en que las matemáticas influyen en la sociedad (Barbosa, 2006). En esta perspectiva, se reconoce que los modelos matemáticos no son descripciones neutrales sobre una realidad independiente y que la modelación tiene dispositivos que suelen ocultarse al público en general (Barbosa, 2006). Barbosa (2006) destaca tres tipos de discusiones en esta

perspectiva: *reflexivas* (se refiere a la naturaleza del modelo matemático, los criterios utilizados en su construcción y sus consecuencias), *matemáticas* (se refiere a las ideas pertenecientes a las matemáticas profesionales) y *tecnológicas* (se refiere a las técnicas de construcción del modelo matemático). El ejercicio de la crítica requiere de un grado de aptitud matemática para tomar distancia ante decisiones gubernamentales, juzgando el accionar político cuando se basa en modelos matemáticos expertos (Valero,2015; Skovsmose, 1999); por tanto, las discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas, son consideradas fundamentales para distinguir entre la crítica del modelo y la crítica del uso del modelo, dejando así en evidencia la credibilidad del modelo o la credibilidad de las decisiones políticas (Christiansen, 1999).

La educación matemática crítica (EMC) no solo se preocupa por la participación de los sujetos en la democracia, si no también, de la crítica de situaciones de injusticia social. Es por esto que: “Ser crítico significa prestar atención a una situación crítica, identificarla, tratar de captarla, comprenderla y reaccionar frente a ella” (Skovsmose, 1999, p.16). En ese sentido, la investigación sobre discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas en situaciones de injusticia sigue siendo pertinente para conocer la manera en que los sujetos conciben y usan los modelos matemáticos; por tanto, este documento presenta los resultados de un estudio que ofreció una respuesta a la pregunta, ¿cuáles son las discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas que estudiantes de pregrado relacionados con las matemáticas pueden promover sobre modelos matemáticos que buscan describir el estallido social en Colombia?

Referentes conceptuales

La perspectiva socio-crítica de la modelación

La EMC es una filosofía de la educación matemática que se preocupa por el desarrollo de una educación matemática que sustenta la democracia, lo cual quiere decir que la micro sociedad de la clase de matemáticas debe encarnar aspectos democráticos (Christiansen, 2001). La EMC busca establecer una educación matemática que permita centrar la atención en diversas fenomenologías, comprendiendo e identificando los factores que están actuando sobre esta (Skovsmose, 1999). El ejercicio de la crítica posibilita en los sujetos formas de reaccionar ante problemáticas generando soluciones y oportunidades de un *activismo* para actuar como respuesta a las crisis (Agostinho y Reis, 2021). En esta perspectiva, la modelación matemática aporta a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y a la formación ciudadana de los estudiantes. Para Silva y Kato (2012), la modelación brinda oportunidades para que los estudiantes discutan en el aula sobre su vida cotidiana, creen conciencia sobre el papel de las matemáticas en la sociedad e incluso, generen cambios en su forma de ver el mundo. El ejercicio de la crítica ofrece cuestionamientos en una determinada población ante la toma de decisiones, es aquí cuando las matemáticas pueden ser parte de estos cuestionamientos, pues a partir de la modelación matemática, los estudiantes y los profesores pueden tomar decisiones por medio de la crítica.

Discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas en la modelación matemática

En la EMC, los procesos tecnológicos pueden comprenderse como las herramientas, procesos y competencias para construir modelos y entender las maquinarias; en tal sentido, estos procesos permiten interpretar la tecnología como una condición básica para una organización social. En otras palabras, los procesos tecnológicos están asociados con las formas de

construcción y uso de las matemáticas (Mendez y Aguilar, 2022). Por tanto, las discusiones tecnológicas tienen en cuenta lo relacionado con la calidad del modelo, sus alcances, supuestos y procedimientos.

Las discusiones reflexivas en la modelación están dirigidas hacia un interés crítico, donde los estudiantes deben establecer límites basados en argumentos (matemáticos y tecnológicos) que les permitan analizar modelos matemáticos para discutir su *uso y aplicabilidad* en los diferentes contextos y situaciones; es decir, los límites establecidos en un respectivo modelo resultaran cruciales para el acto crítico del mismo (Skovsmose; Greer,2012). En esta misma línea, este tipo de discusiones permiten que las personas adquieran un tipo de empoderamiento matemático-reflexivo; viéndose este reflejado en los entornos sociales al momento de generar discusiones sobre el uso de las matemáticas (modelos matemáticos) para la toma decisiones. Por esta razón, esta clase de empoderamiento resultan ser un aporte valioso para el mundo de las matemáticas (País, 2012).

Metodología

El estudio es cualitativo puesto que utiliza las representaciones y discursos obtenidos como datos para interpretar las realidades de las personas (Pérez, 2002). Se siguió el método de estudio de casos; el cual "se concentra en el conocimiento experiencial del caso y se presta detallada atención a la influencia de sus contextos social, político y otros" (Stake, 2013, p.155). Para analizar las discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas se seleccionaron dos casos, el primero corresponde Carlos (seudónimo), quien era estudiante de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas, el segundo caso corresponde a una estudiante, denominada con el seudónimo de Cristina, quien estudiaba para ser profesional estadística; ambos en una universidad pública del occidente de Colombia. Estos casos se seleccionaron con base en la disposición para participar de manera voluntaria en el estudio; además, porque estaban familiarizados con la modelación y tenían una formación mínima en ecuaciones diferenciales. Asimismo, se requería que dichos estudiantes tuvieran manejo de calculadoras graficadoras o de lenguajes de programación.

Para el trabajo de campo, se entregó a cada estudiante un documento que contenía los procedimientos para obtener la función $f(x) = \frac{4687}{1+24{,}47e^{-0.15x}}$. Este modelo se construyó previamente para describir el número de víctimas (en función del tiempo) reportadas como abusos durante el estallido social ocurrido en Colombia en 2021. Adicionalmente, los estudiantes tuvieron a disposición un programa realizado en Python, un programa realizado Wólfram Alpha y los datos de las víctimas reportados por una ONG. Una vez entregado el material, se les solicitó a los estudiantes que analizaran el modelo y compararan los resultados obtenidos con los datos proporcionados. Posterior a esto, se realizó una entrevista con preguntas que generaron discusiones de tipo matemático, tecnológicas y reflexivas sobre el modelo, entre ellas: ¿Crees que la pandemia tuvo alguna influencia en la cantidad de protestantes?, ¿Las personas que no participaron de la protesta social lo hicieron por miedo a la violencia o por miedo al virus Covid-19?, ¿El estallido social en Colombia fue una lucha de clases sociales?, ¿Puede este modelos predecir el número de víctimas en cualquier momento del estallido? ¿Se puede extender a otros contextos sociales? ¿Supongamos que el modelo se presenta ante los organismos gubernamentales, crees que este modelo hubiera cobrado un sentido para el gobierno? etc. Otras

preguntas emergieron a medida que se interactuó con los estudiantes. Estas sesiones se registraron en audios y se analizaron con base en las técnicas del análisis de contenido usando los referentes teóricos del estudio; para ello, se buscó evidencia que permitieran dar cuenta de: El uso adecuado de las variables, el uso del modelo o ecuación diferencial, validez de los resultados numéricos obtenidos, restricciones del modelo, tensiones que puede ocasionar modelar la problemática social, interpretación de los datos al pasar los días, consecuencias al afirmar el modelo logístico o algún otro modelo como el más adecuado, discusiones que expresen la causa de los resultados obtenidos y la creación de nuevos modelos más ajustados a la realidad. Este análisis buscó dejar de manifiesto, las acciones tomadas por cada estudiante para lograr generar cuestionamientos que permitieran validar los modelos que describen la problemática del estallido social en Colombia.

Resultados

En esta sección se organiza para presentar los resultados de cada caso de manera individual con su respectiva descripción y análisis.

El caso de Carlos

Después de recibir el material y las orientaciones, Carlos analizó los argumentos matemáticos del modelo; para ello, revisó los supuestos y procedimientos matemáticos que se realizaron para obtener la ecuación logística y la constante K del modelo (*Supuestos y procedimientos – discusión tecnológica*). Luego, usó el algoritmo de Python para obtener datos sobre el número de víctimas en *n* días; con ello buscó corroborar si lo supuestos usados eran correctos (*procedimientos - discusión tecnológica*). Al respecto Carlos anotó que "*[…] el modelo nos sirve bastante como para tener idea de lo que podría llegar a pasar con ciertos casos […]parece ser que el modelo se acopla bastante a los datos*" (*Uso del modelo - Discusión reflexiva*). Carlos atribuye la función logística como "*la más adecuada*" para este fenómeno, pues no encontró errores en el desarrollo matemático y tecnológico del modelo. Analizó de nuevo el modelo y expresó: "*la cuestión es que tenemos muchas variables* […], *pero habría que tomar otro tipo de datos porque no tendría sentido comparar abusos de causa policial con muertes y laceración*" (*Variables – discusión matemática*). A pesar de esta limitación, Carlos ratificó la función logística dada como adecuada para describir el fenómeno social e hizo uso de las ecuaciones diferenciales y del cálculo integral para validar la parte matemática y tecnológica del modelo (*Conocimientos matemáticos – Discusión matemática; Uso del modelo – Discusión reflexiva*). Luego, Carlos hizo una gráfica usando herramientas del cálculo diferencial (*representaciones – Discusión matemática*). En particular, seccionó por intervalos la función logística para atribuir un tipo de función a cada intervalo (procedimientos – *Discusión matemática*); lo que le permitió otras comprensiones de comportamiento del estallido social (comprensión del fenómeno – *Discusión reflexiva*). A cada gráfica de los intervalos seccionados, les asignó una respectiva interpretación social (Interpretación en el contexto – *Discusión reflexiva)*; ello le permitió concluir que "*le vería aplicabilidad [al modelo] en ese sentido, en capacitar a los oficiales que van a hacer parte de este escuadrón para evitar que esta gráfica siga en aumento*" (implicaciones del modelo – *Discusión Reflexiva)*.

Un análisis de este caso permite señalar que, para este futuro profesor de matemáticas, los modelos pueden cumplir funciones descriptivas y prescriptivas con respecto a la situación estudiada, esto se evidencia en el uso que hace del modelo para comprender aspectos críticos durante el estallido social, a la vez que le permite "anticipar" el número de víctimas cuando las condiciones en las que se creó el modelo se conserven. Estas funciones estuvieron soportadas en la coherencia entre el tipo de datos, el correcto uso de procedimientos matemáticos, argumentos e interpretación de gráficas y resultados; en otras palabras, estas *discusiones matemáticas* actuaron como soporte de una coherencia interna del modelo, a partir de las cuales se hizo y se confió en su validez. Carlos se apoyó en la tecnología como una manera de generar visualizaciones, disminuir la carga operatoria y generar interpretaciones; asimismo, confió en el modelo como un indicador/herramienta para comprender de manera más detallada otros factores del estallido social; en este sentido, las discusiones tecnológicas (el uso de herramientas y la matemática como herramienta para la construcción de mejores modelos) atendió a requerimientos claves de la actividad matemática desarrollada. Finalmente, en relación con las discusiones reflexivas, Carlos evidenció que el modelo permite reflexionar sobre los actores del estallido social, identificando la población más vulnerable junto con su localidad. En esta misma línea, manifestó que el modelo permite inferir un abandono por parte del estado para entrar en diálogos que permitieran detener el incremento de la gráfica de afectados. Estos elementos se consideraron clave en las discusiones reflexivas, como medio para dar sentido a los roles que el modelo cumple en el estudio del fenómeno. Llama la atención que, durante el análisis del modelo, Carlos no tuvo en cuenta el uso de la regresión lineal y otros factores fundamentales (supuestos adecuados) que permiten una apropiada estructuración del modelo logístico para aprobar su validez; este hecho puede interpretarse como una consecuencia del poco énfasis que tienen estas temáticas en el currículo de formación de profesores, o, una interpretación alternativa, en que la atención de Carlos estuvo en la coherencia interna del modelo que le permitiera sacar conclusiones sobre el fenómeno social.

El caso de Cristina

Una vez entregado el material y las orientaciones, Cristina analizó los supuestos realizados para crear el modelo junto con los datos dados (*Supuestos y procedimientos – discusión tecnológica*). Luego, Cristina se realizó la pregunta ¿Qué criterio podría establecer para comparar el modelo lineal con el modelo logístico? de donde se pudo dar cuenta, que el criterio más adecuado es la dispersión que tienen los datos respecto a las gráficas *(conocimientos matemáticos y estadísticos – Discusión matemática)*. Al respecto, Cristina observó en la regresión de datos un comportamiento que se mantenía lineal al pasar los días; anotó que *"Allí la más adecuada parece que fuera la lineal, debido a que el tiempo es demasiado pequeño y digamos que los datos están como más condensados*" – Cristina atribuye la función lineal como "*la más adecuada*" para este fenómeno, pues es la función es la que más se ajusta al criterio establecido por ella (*conocimientos matemáticos y estadísticos – Discusión matemática; argumentos pertinencia – Discusión tecnológica*). Con ello, deja en evidencia los errores en el desarrollo matemático y tecnológico que tiene el modelo logístico y argumenta la necesidad de otro modelo. En esta misma línea, Cristina con ayuda del lenguaje de programación R, revisa el desarrollo matemático y tecnológico de la función lineal donde nota que "[…] R^2*es de 91 [se refiere al modelo lineal], lo que podemos decir que el 91% de los casos de violencia que hay puede estar explicado por el modelo que ajustamos de acuerdo con el tiempo, porque es un*

modelo lineal simple […]" (*Recursos y procedimientos – Tecnológica*) validando así los procesos matemáticos y tecnológicos del modelo lineal. Cristina hizo uso de los modelos lineales simples para poder analizar la pendiente del modelo (*Conocimientos – discusiones matemáticas*), logrando hacer una interpretación en la extensión de los datos con la función línea, comprendiendo el estallido social según las variables que estuvieran actuando en el modelo (*Implicaciones – Discusiones reflexivas*). Esto le permitió a Cristina concluir que en caso de tener un segundo estallido social el modelo "*se puede usar para comparar, donde se podría hacer un nuevo modelo con los nuevos datos y comparar si creció o disminuyó, si en el uno hay más violencia que en el otro*" *(Uso del modelo – Discusiones reflexivas)*.

Un análisis de este caso permite colegir que para esta futura profesional, los modelos solo pueden cumplir funciones descriptivas con respecto a la situación estudiada, esto debido a que el modelo logístico solo fue analizado centrado los fundamentos matemáticos para establecer su validez. La no validez del modelo logístico y la reformulación de un nuevo modelo lineal deja en evidencia la importancia de los argumentos matemáticos en la construcción de modelos, lo cual sustenta evidencia sus discusiones matemáticas y tecnológicas. Cristina, se apoyó en diferentes lenguajes de programación, para obtener resultados matemáticos y estadísticos para interpretar y estructurar un modelo lineal adecuado. Finalmente, en relación con las discusiones reflexivas, Cristina logra identificar con su modelo cuál fue la población afectada y más vulnerada. Sobre esto, llama la atención dos aspectos; el primero, las discusiones reflexivas fueron sucintas y con poco alcance, lo cual puede interpretarse como que, la principal preocupación de esta estudiante fue la validez del modelo y poco, sus alcances y usos. En segundo lugar, atribuyó una nueva variable social (Pandemia COVID-19), la cual no se tuvo en cuenta en el estallido social y fue relacionada como una de las posibles causas que impulsaran a los manifestantes a seguirse manifestando en las calles; para ello, esto ofrece un panorama diferente de las posibles problemáticas que pudieron ocasionar el estallido social.

Discusión y conclusiones

Esta investigación analizó las discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas de dos estudiantes de programas afines con las matemáticas. Se evidenció que ambos estudiantes tienen maneras diferentes para estructurar e interpretar modelos matemáticos. En esta misma línea, se pudo observar que la formación académica de cada estudiante les permitió identificar usos, limitaciones y alcances de los modelos, sin embargo, no todos ellos estuvieron argumentados.

La caracterización de Interpretación de modelos matemáticos estuvo presente en ambos participantes. En el caso de Carlos, se pudo percibir que este usó el modelo para crear una interpretación propia de este mismo, sin preocuparse por la validez que pudiera tener. La interpretación de Carlos, se dio a partir de intervalos seleccionados por él en el modelo logístico para poder entender los días más críticos del estallido social. En esta misma línea, Cristina tuvo una interpretación diferente, pues se percató de usar un modelo matemático que tuviera una validez y que a su vez resultara confiable para ella. Por esta razón, Cristina se dio a la tarea de construir un nuevo modelo (modelo lineal) para entender la realidad del estallido social de una manera ajustada a la realidad. Las discusiones tecnológicas dadas por cada estudiante, deja en manifiesto la divergencia de recursos y usos de la tecnología (herramientas como las matemáticas, lenguajes de programación, etc.) en el trabajo matemático; así como la diversidad

de herramientas matemáticas usadas para apoyar los resultados, los alcances del modelo y las discusiones reflexivas.

Con respecto a la discusión reflexiva, se evidenció también una divergencia en los dos casos, aunque ambos coincidieron sobre la población más vulnerada y olvidada por el Estado en el estallido social. En la entrevista de Carlos, se evidenció que él atribuyó un tipo de aplicabilidad al modelo desde una perspectiva social; donde, sin importar la validez del modelo, pretendía concientizar a agentes del ESMAD (Escuadrón Móvil Anti Disturbios) en formación por medio de la visualización de la función logística, para evitar el uso de la violencia como primer mecanismo para dispersar una protesta social. La idea de la aplicabilidad del modelo dejó en manifiesto el uso crítico sobre el accionar del estado, ya que Carlos logró evidenciar uno de los factores problemáticos en el estallido social, el cual fue el uso de la violencia en la protesta social como primer mecanismo para poder dispersar esta. Es decir, dicha idea se puede considerar como una posible solución para evitar el uso de la violencia, la cual está dada por medio de la interpretación de fenómenos sociales haciendo uso de modelos matemáticos. Aunque Cristina quiso manifestar una posible aplicación de los modelos, no lo hizo pues reconoció las limitaciones y alcances de los modelos y de los datos sobre los que fueron construidos. A partir de ello, se puede interpretar que Cristina no manifestó seguridad de la aplicabilidad del modelo, debido a que requería más conocimiento sobre la naturaleza de los datos y de otros factores que pueden intervenir en el modelo. Por tal motivo decidió argumentar que no es necesario mostrar la aplicabilidad de un modelo para que agentes del ESMAD hagan bien su trabajo; es decir, que no hagan uso de la violencia como primera instancia. En conclusión, Carlos no se limitó a realizar reflexiones sociales sobre el modelo establecido y priorizó la “confianza” en el modelo para cuestionar el abandono del estado, y otros factores sociales.

El análisis conjunto de estos dos casos permite dar cuenta de que las discusiones matemáticas, tecnológicas y reflexivas en este fenómeno social están en correspondencia con la formación de cada profesional y no son parte de una cultura o alfabetización matemática generalizada. Esto sugiere la necesidad de reconocer las fortalezas de cada profesión y abogar por el trabajo colaborativo en el estudio de fenómenos sociales; es decir, en el trabajo conjunto con diferentes profesionales, se (re)construyen y validan modelos, se reconocen sus alcances y, en función de ello, se generan las interpretaciones y posibles decisiones sobre el actuar en la sociedad.

Referencias y bibliografía

Agostinho, A., & Reis, P. (2021). Contributos educativos de exposições interativas on-line sobre imunidade como prática de ativismo coletivo em contexto de pandemia. *Uni-Pluriversidad*, 21(2), 1–22. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.346064

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. *ZDM - Mathematics Education*, 38(3), 293–301. https://doi.org/10.1007/BF02652812

Christiansen, I. (2001). Critical Evaluation of Models in Relation to the Modelling Process. In J. F. Matos, W. Blum, K. Houston, & S. P. Carreira (Eds.), *Modelling and Mathematics Education* (pp. 391–400). Horwood Publishing.

Christiansen, I. (1999). Reflexiones críticas sobre modelos matemáticos en la clase: ¿sueño o realidad? *Revista EMA*, 5(1), 29–50.

Kaiser, G. (2017). The Teaching and Learning of Mathematical Modeling. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 267–291). NCTM.

Pais, A. (2012). A Critical Approach to Equity. In: Skovsmose, O., Skovsmose, O., Greer, B. (eds) *Opening the Cage. New Directions in Mathematics and Science Education, vol 23*. SensePublishers, Rotterdam. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-808-7_3

Pérez, C. (2002). Sobre la metodología cualitativa. *Revista española de salud pública*, 76, 373-380.

Méndez, A., & Aguilar, M. S. (2022). 4. *Bringing the Debate over Marijuana Legalisation into the Mathematics Classroom*. Landscapes Of Investigation, 57.

Silva, C. da, & Kato, L. A. (2012). Quais Elementos Caracterizam uma Atividade de Modelagem Matemática na Perspectiva Sociocrítica? *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *26*(43), 817–838.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Una empresa docente.

Skovsmose, O. (2005). *Travelling Through Education: Uncertainty, Mathematics, Responsibility*. Sense Publishers

Skovsmose, O. (2021). Mathematics and crises. *Educ Stud Math* 108, 369–383 https://doi.org/10.1007/s10649-021-10037-0

Skovsmose, O., & Greer, B. (2012). Opening The Cage? Critical Agency in The Face of Uncertainty. In: Skovsmose, O., & Greer, B. (Eds) *Opening the Cage. New Directions in Mathematics and Science Education, vol 23*. SensePublishers, Rotterdam. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-808-7_19

Stake, R. (2013). Estudios de casos cualitativos. N. Denzin e Y. Lincoln (coords.), *Las estrategias de investigación cualitativa* (154-197).

Diseño de un dispositivo didáctico en torno a la transformada de Hough para la formación de ingenieros

César Elmer **Molina** Quispe
IREM-PUCP, Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
c.molinaq@pucp.edu.pe
Cintya Sherley **Gonzales** Hernández
IREM-PUCP, Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
cintya.gonzales@pucp.pe

Introducción y justificación

La relevancia de esta investigación tiene que ver con la preocupación de la comunidad científica de integrar actividades de modelización relacionados con el ámbito profesional o de las disciplinas de ingeniería (*DI*) a la formación de ingenieros. Se aborda esta problemática realizando una indagación de las praxeologías que habitan en la disciplina de la ingeniería, luego se procede a transponerlas hacia la enseñanza de las matemáticas.

Por otro lado, para la pertinencia consideramos que al hacer explícito la forma como se utilizan elementos matemáticos en las disciplinas de ingeniería, nos permite diseñar dispositivos didácticos bajo el paradigma del cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2013).

Marco teórico

El marco teórico corresponde a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), creado por Yves Chevallard. Esta teoría tiene como postulado que toda actividad humana regularmente realizada es descrita por la praxeología. Ahora, cuando las praxeologías circulan de una institución a otra sufren transposiciones, es decir, pueden contener elementos de la institución original y de la institución donde se ha transpuesto. A estas praxeologías se les denomina praxeologías mixtas (Castela y Romo-Vázquez, 2011).

Metodología

El procedimiento metodológico está inspirado en la ingeniería didáctica y en esta investigación se desarrolló las dos fases que se menciona a continuación:

Fase 1. Análisis de la praxeología mixta en una institución de investigación y enseñanza en ingeniería. Esta se desarrolla a partir de tres pasos: elección de una institución de ingeniería e identificación de praxeologías mixtas que involucran a las matemáticas, análisis de praxeologías mixtas susceptibles de ser transpuestas al aula, e identificación de cuestiones generatrices.
Fase 2. Diseño del Recorrido de Estudio e Investigación (REI) y análisis *a priori*

Resultados

El análisis praxeológico de la actividad de modelización transformada de Hough en la disciplina, procesamiento digital de imágenes, permitió, conocer elementos de la praxeología mixta, que ahora denominaremos praxeología mixta de la transformada de Hough (*PM-TH*). Así tenemos, como **tipo de tarea**: identificar líneas rectas en una imagen digital. En esta *PM-TH*, en términos generales, va a estar presente dos objetos, uno relacionado a la matemática: la recta y el otro que corresponde a la ingeniería: imagen digital.

La técnica corresponde al algoritmo de Hough desarrollada por Duda y Hart (1972), el cual se compone por técnicas en la disciplina de ingeniería y la institución de matemáticas, así como sus respectivas instituciones de enseñanza. Respecto a la *DI* se organizó en tres praxeologías locales: *obtención de datos de la imagen digital*, *cálculo de la matriz de Hough y los valores máximos de intersección de las curvas senoidales*, y *cálculo de las rectas en el plano de la imagen*. Mientras que, en la institución de matemática y su enseñanza se tiene tres praxeologías puntuales: *definición de la matriz de Hough*, *cálculo de las coordenadas espaciales en el plano de la imagen*, y *cálculo de la curva senoidal en el plano de parámetros*. Se encontró, que, en estas praxeologías, los elementos matemáticos están transpuestos en su uso para la justificación, explicación, validación de los elementos de la *DI*. Además, respecto a estos elementos de la técnica, hay una necesidad de algoritmos computacionales para que puedan realizarse efectivamente.

Respecto, a **la tecnología** y **la teoría** se encontró dos componentes estrechamente vinculadas. Para la *DI* se cuenta con cuatro propiedades mencionadas en Duda y Hart (1972). Estas propiedades, involucran dos conceptos: plano de la imagen y plano de parámetros. Los cuales están relacionados mediante una aplicación definida a partir de la ecuación de una recta con parámetros polares. Mientras, que para la institución de matemática se involucra elementos de la geometría analítica y álgebra matricial.

Tomando como modelo praxeológico de referencia la *PM-TH* en la segunda fase del procedimiento metodológico, se logra realizar una propuesta de un dispositivo didáctico. El cual se organiza a través de cuatro ejes: presentación de la cuestión generatriz y estudio de la imagen digital, estudio e investigación de la transformada de Hough, identificación y validación del algoritmo de la transformada de Hough y presentación y discusión de resultados. En el diseño y análisis *a priori* se puede notar claramente como la cuestión generatriz Q'_0 *¿cómo explicar que una inteligencia artificial (IA) tiene la habilidad de "ver" líneas rectas?* Permite, en un sistema didáctico $S(X, Y, Q'_0)$, generar elementos que determinan un posible REI, dispositivo que define el paradigma del cuestionamiento del mundo

Conclusiones

La praxeología mixta de la transformada de Hough sirvió como base para realizar la transposición hacia la enseñanza de la matemática de esta actividad de modelización y la denominamos praxeología de la transformada de Hough escolar. También, la *PM-TH* permitió la organización didáctica en el diseño del REI y análisis *a priori*.

Esta investigación hace explícito qué elementos matemáticos están presentes y cómo son utilizados en las instituciones de investigación y enseñanza del procesamiento digital de imágenes.

También, la investigación resalta la importancia de los lenguajes de programación en la formación de ingenieros.

Referencias y bibliografía

Castela y Romo-Vazquez (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 31*(1), 79-130.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(2), 161- 182.

Duda, R. O. y Hart, P. E. (1972). Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures. Communication of the ACM, 15(1), 11-15. https://doi.org/10.1145/361237.361242

El desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación matemática en situaciones de riesgo ambiental

Ana Elizabeth **González** González
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Universidad Antonio Nariño
Colombia
anaelizabet.gonzález@uptc.edu.co
Osvaldo Jesús **Rojas** Velázquez
Universidad Antonio Nariño
Colombia
orojasv69@uan.edu.co

Resumen

La modelación matemática estimula los procesos cognitivos de los estudiantes a la vez que los forma en una de las competencias que se requieren en el siglo XXI. Por lo anterior se tiene como objetivo desarrollar el pensamiento matemático mediante la modelación matemática involucrando situaciones de riesgo ambiental. La investigación tiene un enfoque cualitativo, bajo una técnica de investigación acción. Los resultados indican que a través de la modelación matemática interdisciplinaria en la cual se involucran problemas del contexto ambiental, los estudiantes comprenden, construyen y aplican conceptos matemáticos, desarrollan técnicas para la solución de problemas y estrategias metacognitivas, adquieren rigor en la comunicación y argumentación de sus modelos matemáticos, entre otros aspectos que conllevan al desarrollo de su pensamiento matemático. Además, el enfoque ambiental como recurso didáctico aparte de favorecer procesos de aprendizaje, contribuye a los objetivos de desarrollo sostenible.

Palabras clave: Pensamiento matemático; Modelación matemática; interdisciplinariedad; Metacognición; Situaciones de riesgo ambiental.

Introducción

El desarrollo del pensamiento matemático, la modelación matemática en la cual interviene la resolución de problemas, la interdisciplinariedad educativa, constituyen temáticas abordadas en congresos, eventos y reuniones. En particular el International Congress on Mathematical Education (ICME), el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), la Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática (CIAEM), la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), entre otros. La importancia de estos aspectos interconectados, radica en explorar las relaciones entre las matemáticas y el mundo real que se da en los entornos educativos, el cual hace parte de la finalidad de la presente investigación.

Según Niss y Blum (2020) existen competencias de modelado tales como ser capaz de analizar los modelos existentes, diseñar modelos en diferentes contextos y validarlos, analizar y construir modelos matemáticos relacionados con otras áreas y finalmente comunicar resultados y monitorear el proceso de modelación. También es de resaltar las estrategias metacognitivas, las cuales son importantes para avanzar en el ciclo de modelación. Saijam y Seebut (2017) afirman que se pueden establecer y mejorar los niveles de competencia de modelado de los estudiantes a través de problemas.

Ortiz y Camelo (2020) identifican en los trabajos investigados en los Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME) celebrados entre 2012 y 2015, escasas investigaciones y aportes en cuanto a la modelación matemática. Los autores hacen un llamado a la comunidad de educadores matemáticos para generar canales que permitan conocer, los desarrollos que se están presentando en torno a la modelación matemática y desde tal reconocimiento avanzar en la construcción de colectivos de trabajo alrededor de ella. Los investigadores concluyen con una preocupación, la cual tiene que ver con la interpretación que, tal vez, se le está dando en las aulas colombianas a las prácticas de modelación matemática, por lo que invitan a la comunidad académica a unir esfuerzos con tal fin.

Por lo anterior, se pretende promover competencias de modelado en estudiantes de grado séptimo a través de problemas matemático-ambientales que conlleven al desarrollo del pensamiento matemático.

Marco teórico

Respecto a la modelación matemática Niss, Blum & Galbraith (2007) la consideran como una estrategia didáctica que permite la creación o uso de modelos matemáticos a través del planteamiento de problemas en contexto. Según Ang (2001) estos modelos matemáticos pueden ser considerados como una simplificación o abstracción de un problema complejo del mundo real en una forma matemática. Esta estrategia permite a los estudiantes comprender la matemática, ver su aplicación y relación en problemas contextuales reales. El ciclo de modelación permite al estudiante sobrepasar sus niveles de competencia en el modelado debido a que utiliza habilidades en cada una de las etapas generales, como son: simplificar, matematizar, interpretar, validar y comunicar.

Por otro lado, Bourguignon (1997) define la interdisciplinariedad teniendo en cuenta lo expuesto por Piaget (1972) como "el caso cuando existe una cooperación real entre disciplinas autónomas para proporcionar una comprensión de un dominio particular del conocimiento; aquí, hay un objetivo común"(p. 2). En este sentido, la interdisciplinariedad tiene la función de aportar desde diferentes disciplinas a la solución de un problema matemático real; el objetivo común en este caso es la construcción del modelo matemático que favorezca situaciones ambientales.

Por lo anterior en la investigación, se utiliza el modelo matemático interdisciplinario realizado por Doğan et al., (2019), porque se centra especialmente en los procesos cognitivos que surgen durante las etapas del modelado. En la figura 1 se ilustra esta propuesta. Este tipo de modelado también apoya el aprendizaje basado en el contexto y las habilidades de pensamiento de orden superior (por ejemplo, resolución de problemas, pensamiento matemático, habilidades de razonamiento, pensamiento creativo, alfabetización científica, entre otras).

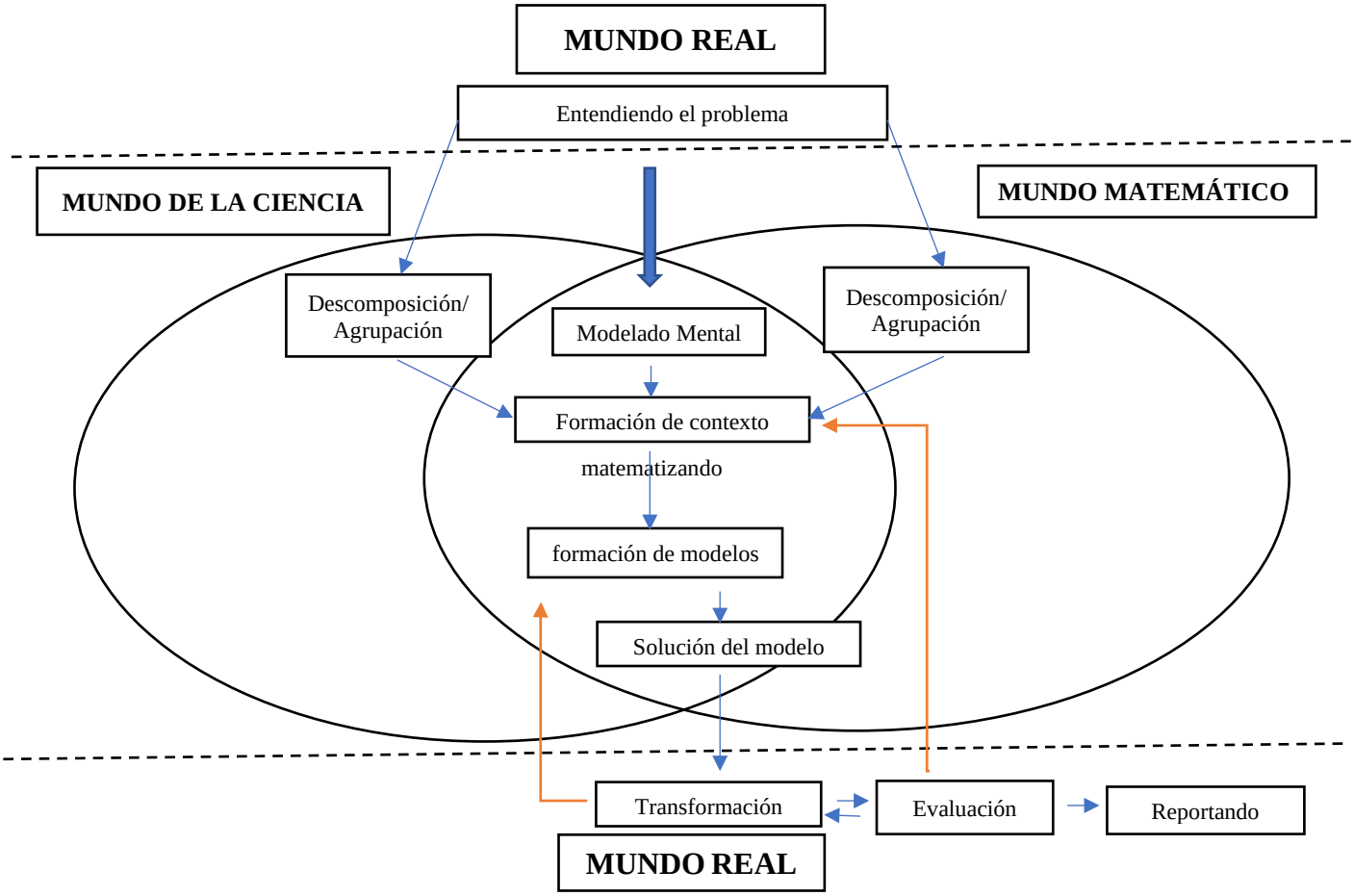


Figura 1. Proceso de modelado matemático interdisciplinario (Doğan et al., 2019)

Según Doğan et al., (2019) para modelizar un problema hay que moverse entre el mundo real, el mundo matemático y el mundo de la ciencia. El proceso de modelación comienza con entender el problema del mundo real, en este paso es donde se introduce el mundo STEM. Posteriormente se identifican las variables necesarias de las innecesarias y el problema se simplifica estableciendo las variables relacionadas al problema. Luego el estudiante crea un

modelo mental a través de sus ideas e hipótesis. Los conceptos simplificados se separan y se relacionan con la disciplina relevante o asociada (descomposición y agrupación). Posteriormente genera un contexto para la modelación interdisciplinaria (formación del contexto).

Luego el estudiante transforma el modelo creado en su mente a una forma matemática, lo que se conoce como matematizar y crea un modelo matemático para resolver el problema (transformación). Este paso está en el mundo de las matemáticas por el uso de sus conceptos y operaciones, pero también utiliza información de otra área o disciplina. Después se prueba la validez del modelo y su aplicabilidad en la vida real (evaluación), luego se realiza un informe que resuma el proceso de resolución de problemas y los resultados del mismo (reporte).

La estrategia de resolución de problemas propuestas por Polya (1965) se articula adecuadamente al modelado matemático interdisciplinario propuesto por Doğan et al., (2019). Según el Ministerio de Educación de Singapur (2006) la capacidad de resolución de problemas matemáticos depende de cinco componentes entre los que se destaca la metacognición, considerada como la capacidad de regular el pensamiento o controlar sus propios procesos.

Desde esta perspectiva, la transición flexible entre las fases del modelado matemático disciplinario, permite el desarrollo de estrategias de metacognición individual. Las estrategias de metacognición en tareas de modelado son propiciadas por el trabajo con problemas interdisciplinarios en los cuales intervienen procesos de planificación, seguimiento y validación del mismo. En cada una de estas fases los estudiantes discuten sus conjeturas, articulan el conocimiento, justifican, validan, interpretan soluciones y establecen conclusiones.

En consecuencia, esta investigación tiene en cuenta lo planteado por Mason, Burton, & Stacey (2010) al considerar al pensamiento matemático como “un proceso dinámico que permite el aumento de la complejidad de las ideas que podemos manejar extendiendo nuestra capacidad de comprensión” (p.167). Por lo anterior, se presenta un problema matemático de los abordados en la investigación, en torno a situaciones de riesgo ambiental, como una de las herramientas y vías para desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, a medida que van experimentando las fases del modelado matemático de carácter interdisciplinario.

Metodología

Se asume un enfoque cualitativo en el que según Sampieri et al. (2014), su finalidad radica en “describir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes” (p. 11). Los participantes son estudiantes de grado séptimo de Boyacá que oscilan entre 12 y 14 años. Se adopta la investigación-acción en virtud a lo expuesto por Sandín (2003), ya que este diseño pretende “propiciar el cambio social, transformar la realidad y que las personas tomen conciencia de su papel en ese proceso de transformación” (p. 161). Para la obtención de resultados cualitativos y cuantitativos se llevaron a cabo instrumentos como el diario de campo, encuestas de satisfacción y se valoraron los desempeños de los estudiantes a través de talleres.

Problema de modelación matemática interdisciplinaria “Tu huella de carbono”

En el día a día, realizamos actividades que dejan huella de carbono. La huella de carbono es una medida o indicador ambiental que refleja la cantidad de gases de efecto invernadero

(GEI), expresada como CO2 equivalente. Por ejemplo, cuando consumimos energía al prender la luz, al bañarnos con agua caliente o al mandar un mensaje por correo o por celular, etc. Puedes determinar tu huella de carbono personal, la cual se genera de las actividades de consumo asociadas al uso de energía eléctrica en el hogar, los medios de transporte, entre otras. ¿Cómo puedes disminuir tu huella de carbono al mes asociada al uso de la energía eléctrica?

Las respuestas de las siguientes preguntas pueden ayudarte:

a. Sabías que el consumo de energía depende de dos cosas: los vatios de potencia de tus electrodomésticos y el tiempo de uso en horas al mes. ¿Sabes cómo identificar los vatios de energía en un electrodoméstico?
b. ¿Qué actividades realizas al día que consumen energía eléctrica y qué cantidad de horas la realizas?
c. ¿Cómo convertir un vatio en kilovatio? d. ¿Cuál será el factor de conversión de la huella de carbono producidos por cada kwh?

Análisis de la construcción del modelo matemático interdisciplinario

Para dar solución al problema matemático “Tu huella de carbono” el cual integra la física con las ciencias ambientales, se requiere que los estudiantes posean conocimientos previos en conversión de unidades de longitud y operaciones básicas con números naturales, enteros y racionales. Una vez el estudiante de grado séptimo comprende el problema, etapas plasmadas por Polya (1965) y Doğan et al., (2019), identifica las variables que intervienen (potencia, tiempo, kilowatts, entre otras), las que son necesarias y las relaciones que entre sí presentan. Este proceso de matematizar involucra tanto el mundo matemático como el mundo de la disciplina o ciencia. Se puede realizar preguntas heurísticas con el fin de orientar y desarrollar estrategias metacognitivas y competencias. Esta fase de descomponer/agrupar contribuye a concebir un plan Polya (1965), para formar un modelo mental que posteriormente de acuerdo a sus hipótesis, conjeturas, conocimiento y habilidades matemáticas construye (formación de modelos), según se observa en la figura 2.

A cada modelador, en este caso a cada estudiante, se le entrega una lista con los vatios de potencia de los electrodomésticos para que puedan según el tiempo de su uso determinar el consumo de energía. Este trabajo se lleva a cabo en el aula con el fin de aclarar las dudas que puedan existir durante el proceso de modelación.

El estudiante luego de que conoce su consumo de energía eléctrica al mes, indaga sobre el factor de emisión de la electricidad, sus unidades de medida y relación. Luego determina su huella de carbono y ajusta su modelo manipulando las variables para reducir su huella. Luego de la fase de evaluación del modelo, comunica a sus compañeros sus resultados.

La reducción del tiempo de consumo eléctrico fue llevado a la práctica, para lo cual se comparó el consumo de kilovatios por hora mensual a través del recibo de la luz, sin embargo, algunos estudiantes manifestaron la dificultad de su disminución ya que depende también de la conciencia de ahorro de otros miembros de la familia.

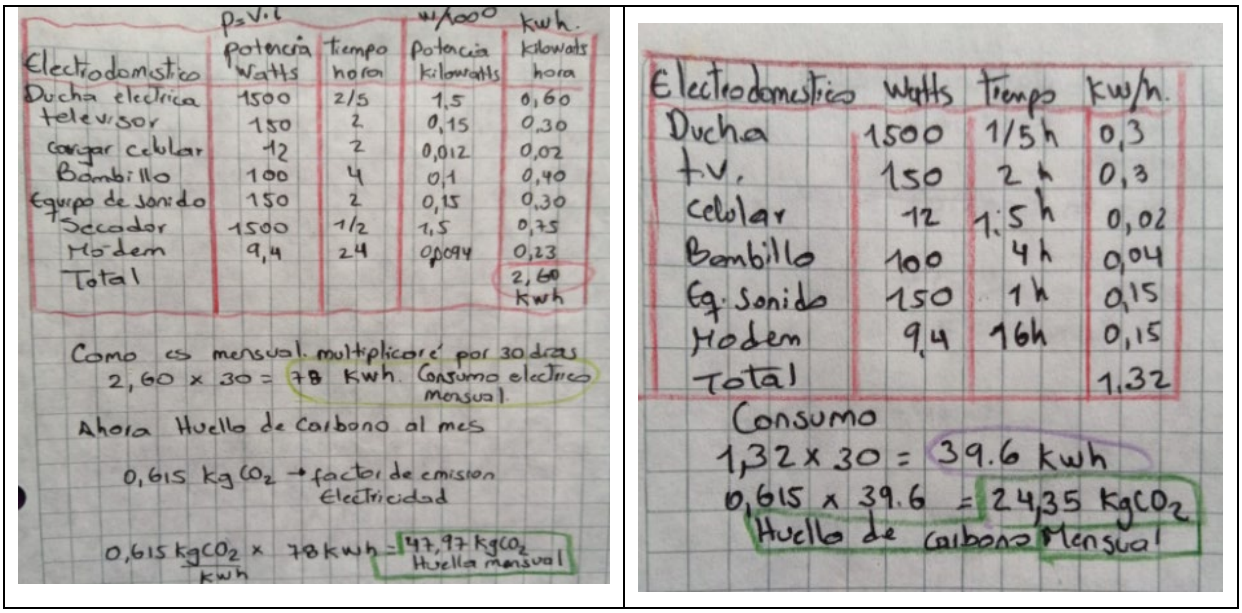


Figura 2. Desarrollo de la actividad por estudiante de grado séptimo.

Los estudiantes concluyeron que la reducción de la huella de carbono es posible, si el tiempo por hora de uso de cada electrodoméstico es menor mes a mes, y si este presenta los mismos vatios de potencia. Luego de abordar el proceso de modelado matemático expuesto en la figura 1, el estudiante construye y comunica el modelo válido, el cual se observa en la figura 3.

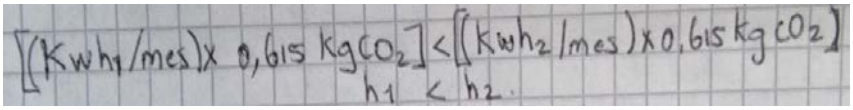


Figura 3. Modelo matemático construido por el estudiante de grado séptimo.

Producto de la actividad, el 60% de los estudiantes redujeron el tiempo de consumo de energía eléctrica diaria en sus actividades favoreciendo actitudes proambientales. También comprendieron significativamente conceptos matemáticos referentes a conversión de unidades (vatios a kilovatios y viceversa), proporcionalidad, propiedades y operaciones entre números racionales, además de realizar análisis de patrones y relaciones entre variables, lo cual les permitió generalizar y afianzar técnicas de resolución de problemas de modelado ambiental para el desarrollo de su pensamiento matemático.

Los problemas matemático-ambientales permiten familiarizar al estudiante con procesos matemáticos existentes dentro del ciclo de la modelación matemática. Es en este campo donde los objetos matemáticos que interactúan en el ciclo de modelado tienen una estrecha relación con 33 de problemas en el cual se utiliza un proceso de modelado matemático interdisciplinario, permite a los estudiantes liderar procesos de planificación y validación de la información matematizada. Lo anterior les posibilita tomar decisiones y organizarlas mediante tablas, figuras o diagramas, intercambiar ideas, validar sus conjeturas, discutir sus justificaciones y conclusiones favoreciendo sus estrategias de metacognición. Estos procesos contribuyen a desarrollar su pensamiento matemático.

Al abordar problemas a través del modelado matemático interdisciplinario se desafían las prácticas usuales de resolución de problemas y bajo este enfoque también se promueven comportamientos proambientales.

La construcción de modelos matemáticos incrementa en los estudiantes su autoconfianza, motivación y entusiasmo porque se sienten parte de él, asimismo, evidencian cómo evoluciona sus habilidades de pensamiento y competencias en torno a la modelación matemática. La resolución de problemas es un proceso dinámico mental complejo en el que el fin último es el desarrollo del pensamiento matemático.

Los procesos de modelación matemática estimulan la aplicación de estrategias de metacognición, la argumentación matemática, la generalización, la comprensión de conceptos, propiedades y los objetos presentes en las matemáticas, que influyen notablemente en el dinamismo, la evolución y avance de las ciencias.

Referencias y bibliografía

Ang, K. C. (2001). Teaching mathematical modelling in Singapore schools. *The Mathematics Educator, 6*(1), 62-74.

Bourguignon, A. (1997). De la pluridisciplinarité à la transdisciplinarité [From multidisciplinarity to transdisciplinarity]. *Congrès de Locarno, 30 Avril-2 Mai, Annexe au document de synthèse [Locarno Congress, April 30-May 2, Annex to the summary document]. UNESCO.*

Doğan, M. F. , Gürbüz, R. , Çavuş Erdem, Z., y Şahin, S. (2019). Using Mathematical Modeling for Integrating STEM Disciplines: A Theoretical Framework. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT),* 628-653. Obtenido de https://dergipark.org.tr/tr/pub/turkbilmat/issue/50604/502007

Stacey, K., Burton, L., y Mason, J. (2010). *Thinking mathematically.* Pearson Education Limited.

Ministerio de Educación de Singapur (2006). *División de Planificación y Desarrollo Curricular. Programa de Matemáticas Primario.* Singapur: Copyright 2006.

Niss, M., y Blum, W. (2020). *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling (1st ed.).* London: Routledge. Obtenido de https://doi.org/10.4324/9781315189314.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction to modelling and applications in mathematics education. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study (pp. 3–32). New York, NY: Springer. http://doi.org/10.1007/978038729822.

Ortiz, M. y Camelo, F. (2020). Un panorama de la modelación matemática en los encuentros colombianos de matemática educativa entre 2012-2015. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, 15*(2), 251–267. https://doi.org/10.14483/234.

Piaget, J. (1972). Interdisciplinarité : problèmes d'enseignement et de recherche che dans les universités Paris : OCDE. *Fondation Jean Piaget pour la recherche psychologique et épistémologique.*

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Editorial Trillas.

Saijam, P., y Seebut, S. (2017). Using problem approach to design mathematical modeling-based learning for promoting grade 8 students' mathematical modeling competency. *The 22nd Annual Meeting in Mathematics (AMM).*

Sampieri, R., Fernández, C., y Baptista, L. (2014). Definiciones de los enfoques cuantitativo y cualitativo, sus similitudes y diferencias. En R. Sampieri, *Metodología de la Investivación*. Editorial McGraw Hill.

Sandín, M. (2003). La enseñanza de la investigación cualitativa. *Revista de Enseñanza Universitaria, 21*, 37-52.

Elementos precursores de modelación figural estudiantil electro/corazón

Maximiliano **Núñez** González
Universidad Católica Silva Henríquez
Chile
maximilianonunez.30@gmail.com

Resumen

En este trabajo se reportan desarrollos estudiantiles de enseñanza media provenientes de la introducción a un diseño de modelación, cuyo propósito es dar cuenta del comportamiento del corazón. El diseño orienta a la modelación figural como una alternativa para acercar la matemática de la escuela y las matemáticas situadas en prácticas de cardiólogos. Se suscribe una perspectiva socioepistemológica de modelación para establecer elementos precursores de dipolos modélicos electro/corazón, mediante la articulación de dos entidades desde la operatividad de una de ellas, para intervenir en la otra. Se analizan elaboraciones estudiantiles desde una perspectiva metodológica de diseño en un marco de investigación-acción. Tales evidencias dan cuenta de unas prácticas situadas tanto en el aula como fuera de ella, eslabones entre escuela y entorno. Se releva así la importancia de la inmersión en un contexto de modelación figural, que se propone incorporar al currículum chileno.

Palabras clave: Modelación; Modelación figural; Dipolo modélico; Figuración; Práctica situada; Socioepistemología.

En aulas de matemáticas se vivencian actividades en que los estudiantes de enseñanza media recurren a matemáticas del diario vivir, pero que muchas veces no lo reflejan en sus resultados en el aula. Se ha puesto en evidencia que el discurso de matemática escolar está centrado en objetos matemáticos que se estudian a través de la incorporación de ciertos algoritmos y nemotecnias.

Esta investigación se inscribe en la problemática que emerge desde prácticas de modelación que procuran el desplazamiento de prácticas situadas no escolares a las prácticas escolares. En el ámbito de la educación matemática, en particular para la visión

socioepistemológica de Arrieta y Díaz (2015) modelar articula dos entidades, desde la operatividad de una de ellas para intervenir en la otra. Se instala la problemática de que la figura no es objeto de estudio del aula de matemáticas. En consecuencia, interesa abordar el problema atendiendo al uso de las figuras en aula de clases desde comunidades de prácticas de cardiólogos. Para este estudio se considera la cardiología, ya que, en lo genérico, el cuerpo humano es considerado un sistema complejo, aún más, según Moreno (2018) el ritmo cardíaco es un ejemplo de la intervención de la complejidad y el caos en el ambiente médico.

En el marco mayor de la desvinculación entre las matemáticas de la escuela y las del entorno, se observa que la modelación matemática del aula suele remitirse a trabajar con ejercicios de funciones, en tanto que, las comunidades de prácticas recurren a herramientas matemáticas situadas. En este reporte se presentan los desarrollos de estudiantes de cuarto año medio de enseñanza media en ambiente figural, parte de una investigación acción guiada por la pregunta orientadora ¿Qué elementos precursores de dipolos modélicos electro/corazón presentan elaboraciones estudiantiles?

Marco referencial

Interesa estudiar la modelación como parte de los procesos de aprendizajes matemáticos. Para Arrieta y Díaz (2015) la modelación es una práctica de articulación de dos entes, para actuar sobre uno de ellos, llamado lo modelado, a partir del otro, llamado modelo. Desde esta perspectiva, no existen modelos y sus matemáticas, independientes de quien modela y de la comunidad que le da cabida (Díaz y Núñez, 2019).

Cuando se interviene en el corazón del paciente, se actúa en una entidad a partir de otra, a la que Arrieta y Díaz (2015) le denominan el “acto de modelar”. Para estos autores, dicho acto es un elemento que permite clasificar y discriminar, distinguiendo prácticas de modelación de las que no son. El cardiólogo está modelando cuando analiza la salud del corazón del paciente a partir de una gráfica. En la perspectiva socioepistemológica de modelación de Arrieta y Díaz (2015) interesa que los estudiantes establezcan dipolos modélicos mediante la articulación de dos entidades para, desde la operatividad de una de ellas, intervenir en la otra. Lo anterior se ejemplifica al articular una tabla de datos, o una figura, o una gráfica o una expresión algebraica con un fenómeno. Tal articulación constituirá, para la vivencia del estudiante que modela, una nueva entidad, el dipolo modélico (op. cit. p.35).

Las prácticas situadas o prácticas de comunidades serán puestas en escena en el aula de modo que las matemáticas que habitan en la práctica de los profesionales habiten de una manera análoga en esta. Arrieta y Díaz (2015, p. 27) suscriben esta noción de práctica situada complementando con referencias de sentido desde Heidegger (1999), Lave (1988) y De Certeau (2000).

La investigación reporta elaboraciones estudiantiles figurales, con el propósito de dar cuenta del comportamiento del corazón. Las prácticas de figuración centran la mirada en el acto de figurar, es decir, de construir la figura o de interpretarla. Carrasco, Díaz y Buendía (2014) conciben a la figura como un conjunto de líneas que dibuja el estudiante, en dos dimensiones,

con aspectos ostensibles y no ostensibles de un fenómeno; y, por figuración de dicho fenómeno cuando sus elementos son significados como aspectos de este.

En el proceso de estudio de entendimientos estudiantiles el espacio epistémico de figuración permite atender formas de conocer y de actuar cuando el estudiante figura, ya que se puede observar una construcción que se basa en sus estructuras biológicas dotadas de autonomía operacional e insertas en los subsistemas biológicos y socioculturales. Comprender estas prácticas socio escolares de figuración de fenómenos con que se comunican los estudiantes, emerge como una tarea necesaria en educación matemática. El análisis de las figuras realizadas por los estudiantes, pone en evidencia sus interpretaciones y comprensiones de una situación. (Curiqueo, Díaz, Núñez y Zambrano, 2016).

En el enfoque de la modelación matemática, la interpretación gráfica es uno de los modelos usados por los individuos para explicar situaciones reales o hipotéticas (Confrey y Maloney, 2007). Al decir de Cordero y Suárez (2010) en Carrasco, Díaz y Buendía (2014), la graficación cartesiana es una práctica en el seno de diversas instituciones, entre ellas la escuela, en la que permanece y se desarrolla desde el discurso matemático escolar. Según Cantoral y Moreno (2017) el uso de diferentes esquemas y gráficas es de gran relevancia para la práctica médica, pues intervienen en una gran cantidad de estudios sobre los cambios que suceden en el funcionamiento de los órganos del cuerpo humano. En este trabajo no se estudia la gráfica cartesiana desde su operatividad matemática, sino que se busca que ella aparezca en el ejercicio de prácticas (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015) configurando una epistemología de figuras y prácticas que den base de significación a la matemática escolar (op. cit, 2014).

Interesa al estudio además, conocer las intencionalidades de los estudiantes al momento de figurar, por la cual se combina con el marco anterior de figuración.

En el marco de comunidades de práctica propuesta por Arrieta y Díaz (2015) se consideran las dimensiones de herramientas, argumentos e intenciones. Por su parte de Carrasco, Díaz y Buendía (2014) se añade la dimensión de metáforas de base que configura la episteme de esta práctica de figuración de los estudiantes. En efecto, al decir de Díaz y Núñez (2019) se identifican en ella propósitos comunicativos que se expresan a través de una estructura argumental, unas herramientas que concurren a configurarla y metáforas de base que entran en juego.

Metodología

La investigación está guiada por una pregunta orientadora que se corresponde con el paradigma metodológico de investigación de diseño en un marco de investigación-acción (Molina, 2006). Se pone en escena un diseño de modelación que induce la inmersión de los estudiantes en facetas de una práctica de cardiólogos.

Esta metodología cualitativa aborda la enseñanza para los aprendizajes como una ciencia de diseño, con el fin de determinar cómo, diseños y rediseños consecutivos contribuyen al cometido de la formación, fortaleciendo los procesos de enseñanza para los aprendizajes (op. cit., 2006).

Al generar los diseños, éstos se realizan con base en la deconstrucción de una práctica de modelación, en este caso, una práctica de cardiólogos. Ésta se asume como una fuente de procesos de matematización en el aula (Galicia, Díaz y Arrieta, 2011). Se identifican argumentos, herramientas, intenciones y metáforas de base de la práctica de modelación de cardiólogos con el electrocardiograma, sobre cuya base se diseña una actividad de modelación desde una perspectiva socioepistemológica (Arrieta y Díaz, 2015).

Se realiza la actividad con estudiantes de segundo ciclo de enseñanza media, de un establecimiento educacional público de la región de Valparaíso, Chile.

La actividad que propicia la modelación fue trabajada por 32 estudiantes en total. En la primera actividad participaron tres grupos de cuatro estudiantes y en la segunda actividad, cinco grupos de cuatro estudiantes.

La actividad de los estudiantes inicia con su inmersión en elementos de cardiología y sigue con una práctica de modelación de cardiólogos.

El primer diseño propicia la inmersión de los estudiantes en la figura del electrocardiograma. El segundo diseño les interioriza en componentes principales de un electrocardiograma y con base en un video, se les presenta el sistema de conducción del corazón.

De esta manera los estudiantes vivenciaron actividades provenientes de dos diseños que los introducen en una situación desde una figura y luego les insta a modelar en ambiente figural.

Se les solicita replicar figuras de electrocardiogramas. Se presentan elementos que propicien la inmersión de los estudiantes en los conceptos de cardiología y su relación con la figura del electrocardiograma. Y expresan con sus propias palabras el funcionamiento del corazón de la persona a quien corresponde un electrocardiograma.

El estudio analiza figuras estudiantiles, evidenciando desde el marco de comunidades de práctica propuesta por Arrieta y Díaz (2015) herramientas, argumentos e intenciones. Por su parte de Carrasco, Díaz y Buendía (2014) se añade la dimensión de metáforas de base.

Resultados y análisis

Analizamos a continuación evidencias de estudiantes, provenientes de la actividad de modelación. El caso 1 corresponde a un grupo del primer diseño, el caso 2 a un grupo del segundo diseño y el caso 3 al segundo diseño respectivo a la descripción de un electrocardiograma con alteraciones.

Caso 1

Presenta una curva de segmentos rectos, propia de una parte periódica del electrocardiograma. Una curva mayor exhibe al complejo QRS, con leve inclinación a la derecha respecto de la curva principal. La línea que describe al segmento es de color anaranjado y con un

destaque de color amarillo. La figura ocupa el tercio inferior de un plano vacío, excepto el complejo QRS que se eleva hasta arriba. Los grupos de líneas horizontales toman dos “alturas”, el grupo a la derecha del complejo QRS sube un poco.

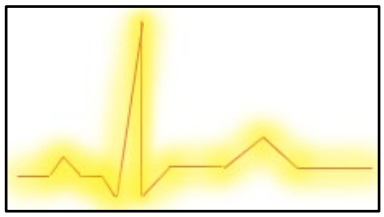


Figura 1. Primer diseño.

Metáforas de base. Curva de segmentos rectos como trayectoria de mínima intensidad a su punto máximo de apogeo del comportamiento del corazón. Segmento horizontal como la normalidad del comportamiento del corazón. La figura como un electrocardiograma. Una banda amarilla como superficie que realza a la curva. La curva es valiosa como el oro. La curva de mayor longitud como el apogeo del corazón.

Argumentos. La línea oblicua de mayor longitud refleja la manera exponencial con que se llega al punto máximo apogeo. La línea horizontal refleja que vuelve a la normalidad el comportamiento del corazón.

Herramientas. Líneas rectas horizontales y oblicuas de color rojo. Segmentos con cierto ángulo de elevación. Destacador amarillo que sigue la silueta de la figura.

Intenciones. Se figura para dar cuenta del comportamiento del corazón.

Caso 2

Figura 2. Segundo diseño.

Metáforas de base. Curva configurada por segmentos horizontales rectos como latidos. La figura como electrocardiograma con distintos ciclos. La línea recta final como el infarto del paciente.

Argumentos. La línea oblicua de mayor longitud expresa mayor contracción del corazón. Las curvas de menor altitud muestran cuando se relaja.

Herramientas. Líneas rectas horizontales y curvas oblícuas. Segmentos con cierto ángulo de elevación.

Intenciones. Figura para reportar el funcionamiento del corazón del paciente con irregularidades en el electrocardiograma.

Con respecto a las metáforas de base se puede concluir que los dos grupos figuran segmentos rectos como ritmos o latidos del corazón. Las curvas configuran segmentos horizontales rectos como ondas siendo marcos propios de la figuración. Los argumentos en las figuras del grupo conciben un ciclo del electrocardiograma, evidenciando una línea oblicua de mayor longitud, ya que, el latido del corazón es más fuerte y por tanto una mayor contracción. En herramientas se recurre a líneas rectas horizontales y curvas oblícuas. En las intenciones se puede concluir que las figuras comunican que el corazón se encuentra en señales adecuadas de salud. Es en este diseño, donde se presenta un grado de inmersión del estudiante en el modelo al figurar a partir del fenómeno, que en este caso es el comportamiento del corazón.

Caso 3.

Figura 3. Electrocardiograma con alteraciones.

Se solicita a los estudiantes que describan la fisiología de un corazón cuyo electrocardiograma de un segundo de duración, informa sobre arterias obstruidas o estrechas de ese corazón a la comunidad de cardiólogos. Tres de las cinco textualidades dan cuenta del acto de modelar. Siguen a continuación los análisis de cada descripción estudiantil en la tabla 1.

Tabla 1
Análisis de la modelación figural estudiantil desde un electrocardiograma que exhibe alteraciones.

Grupos	Transcripciones y Análisis
G1	Transcripción: Tiene un estable pulso y un P chiquitito. Análisis: Describen un corazón con pulsación o latido estable. Añaden que la contracción de la parte de arriba del corazón (onda P) es chiquitita.
G2	Transcripción: *Se le está realizando una desfibrilación, en simples palabras, se le está reanimando.* Análisis: Asocian al corazón con un proceso de “desfibrilación” propio de cardiólogos, Están modelando el fenómeno. Añaden: el corazón se le está “reanimando”.
G3	Transcripción: *El bombeo del corazón es raro porque la parte inicial del bombeo es débil y el latido fuerte es casi de golpe.* Análisis: Describen el bombeo del corazón que no está funcionando con normalidad. Añaden que el bombeo inicia débil y su latido es abrupto y breve.
G4	Transcripción: *1,20 segundos dura el intervalo RR* *La potencia de los minivoltios más alto es de 1,9 mv* *El intervalo es anormal ya que debería demorarse 0,8 segundos y no 1,20* Análisis: Comunican con cantidades de intensidad eléctrica que según los segundos que presenta la figura, esta muestra un intervalo anormal.

G5	Transcripción: *El electrocardiograma enseña que el ciclo cardiaco se desempeña con un ritmo pasivo a través de la sístole y la diástole, comprendiendo que su continua fluidez se deriva del reposo.* Análisis: Comunican con palabras técnicas. El ciclo cardiaco tendría un ritmo pasivo.

Fuente: Elaboración propia.

Un grupo comunica el comportamiento del corazón al mencionar que se encuentra con pulsación o latido estable. Otro grupo describe al corazón con un comportamiento propio de la comunidad de cardiólogos, comunica que se le está reanimando. De esta forma, se establece el vínculo entre el modelo y lo modelado, cuando los estudiantes configuran el dipolo modélico figural al comunicar el funcionamiento del corazón desde un electrocardiograma con alteraciones. Se trata de elementos precursores en tanto los estudiantes modelan desde saberes iniciales de cardiología. A continuación, la figura 4 muestra el dipolo modélico figural estudiantil.

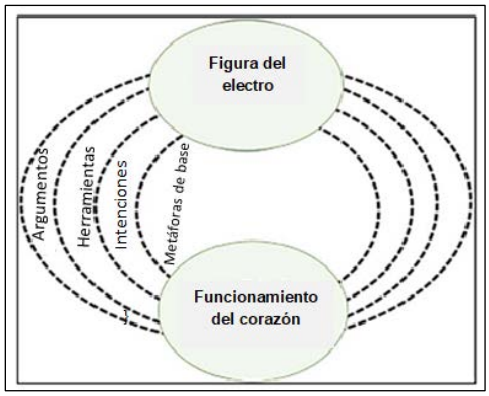


Figura 4. Dimensiones del dipolo modélico figural estudiantil.

Los análisis de los desarrollos estudiantiles ponen en evidencia las potencialidades de la actividad de modelación figural: Las actividades y su secuencia conducen a que los estudiantes vivencien un ambiente con altos grados de inmersión, verosimilitud e interacción con el fenómeno y su figura. Las figuras de los estudiantes corresponden a imágenes icónicas fijas. Exhiben curvas de segmentos rectos que dan cuenta de las contracciones y dilataciones del corazón y muestran el momento inicial y final de un ciclo. Más ampliamente, se constituye una deconstrucción de una práctica situada de cardiólogos en el aula de matemáticas, configurando el dipolo modélico electro/corazón de los cardiólogos; sus producciones presentan elementos precursores de esta práctica de modelación. Los resultados evidencian que el estudiante al momento de figurar, en paralelo describe el comportamiento del corazón de una persona. De esta forma emerge el dipolo modélico figural del estudiante, funcionamiento del corazón articulado con el electrocardiograma del paciente.

Los resultados dan cuenta de la veracidad de la producción de las figuras del electro, ya que, aborda la separación de las matemáticas del aula y las de la vida, entregando una alternativa de acción como las actividades de modelación figural.

Conclusiones

El presente estudio tuvo por objetivo determinar elementos que emergen en la modelación figural de estudiantes, con base en una práctica recurrente de la comunidad de cardiólogos. Se desarrolló bajo el paradigma metodológico de investigación de diseño correspondientes a un marco de investigación-acción (Molina, 2006) y buscó responder a la pregunta orientadora ¿Qué elementos precursores de dipolos modélicos electro/corazón presentan elaboraciones estudiantiles?

En este trabajo se aporta un diseño de modelación que recurre a figuras. Los estudiantes, cotidianamente inmersos en la cultura de la imagen, reaccionan con familiaridad al uso de figuras, lo que favoreció incentivando su participación en la práctica de modelación figural que se les propuso.

A partir de los resultados, se evidencia que los equipos al momento de figurar describen el comportamiento del corazón de una persona. Adicionalmente en las descripciones los estudiantes hacen afirmaciones sobre la salud del paciente, desde la iconicidad de la figura. De este modo, los equipos ostentan elementos precursores a la vez que propios de la modelación figural, articulando el fenómeno del funcionamiento del corazón que atiende la comunidad de cardiólogos, con la figura de un electrocardiograma. Configuran el dipolo modélico figural "funcionamiento del corazón/figura del electrocardiograma del paciente".

Se levanta sobre esta base la propuesta de incorporar la modelación figural a la enseñanza de la modelación en aulas de matemáticas.

En cuanto a proyecciones, se requiere avanzar a prácticas de modelación en las que se explicite y se profundice en las dimensiones para que los estudiantes robustezcan los dipolos que configuren. Prácticas orientadas a que cada estudiante articule más finamente figura y fenómeno, identificando matemáticas como herramientas en prácticas situadas. Asimismo, se recomienda dar forma a dipolos modélicos figurales de otras comunidades de práctica, tales como aquellos cuyos modelos figurales son el electroencefalograma y las figuras de un osciloscopio, provenientes de las prácticas recurrentes de neurólogos y de electromecánicos. Así se añadirán eslabones de continuidad entre la escuela y el entorno no escolar, ampliando las matemáticas situadas que presenta el aula.

Referencias y bibliografía

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socio epistemología. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. 18(1), pp.19-48. doi: 10.12802/relime.13.1811}

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática.* 8, pp.9-28.

Cantoral, R. y Moreno, G. (2017). La transversalidad de la matemática. El caso del diagnóstico en cardiología. *Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.* (2), p.470.

Carrasco, E., Díaz, L. y Buendía, G. (2014). Figuración de lo que varía. Enseñanza de las Ciencias. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 32(3), pp.365 – 384.

Confrey, J. y Maloney, A. (2007). A theory of mathematical modelling in technological settings. En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn y M. Niss (Eds), *Modelling and Applications in Mathematics Education.* New York: Springer.

Cordero, F. y Suárez, L. (2010). Modelación – graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 13(4-II), pp.319-333.

Curiqueo, N., Díaz, L., Núñez, M. y Zambrano, S. (2016). Modelación tabular, actividad con celdas e interceldas. Reporte de investigación en XX Jornadas Nacionales de Educación Matemática. Valparaíso. Chile.

De Certeau, M. (2000). *La invención de lo cotidiano. I. Artes de hacer*. Universidad Iberoamericana. Ciudad de México. México.

Díaz, L. y Núñez, M. (2019). Experimentación discursiva y figuración. En CIAEM (Ed.), *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Recuperado de https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/769/443

Galicia, A., Díaz, L. y Arrieta, J. (2011). Práctica social de modelación del ingeniero bioquímico: Análisis microbiológico. En CIAEM (Ed.), *Anais do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Recuperado de http://www.lematec.no-ip.org/CDS/XIIICIAEM/index.html?info_type=fullist&lang_user=en

Heidegger, M. (1999). *El ser y el tiempo.* Fondo de Cultura Económica. Ciudad de México. México.

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life.* Cambridge University Press. Cambridge. UK.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Granada. España.

Moreno, G. (2018). *Principios del pensamiento matemático: el principio estrella en la práctica médica. El uso de la pequeña variación en el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardiacas* (Tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Ciudad de México. México.

Errores y dificultades en la modelización matemática: Un caso con estudiantes de educación secundaria

Karen **Porras** Lizano
Escuela de Matemática, Universidad Nacional
Costa Rica
karen.porras.lizano@una.cr
Elena **Castro-Rodríguez**
Universidad de Granada
España
elenacastro@ugr.es
Juan Luis **Piñeiro** Garrido
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Chile
juanluis.pineiro@umce.cl

Resumen

Llevamos a cabo un estudio cualitativo para identificar y caracterizar los errores y dificultades que incurren estudiantes de educación secundaria al resolver una tarea de modelización. Los estudiantes fueron instruidos en el proceso de modelización desde educación primaria. Los resultados muestran que no aplicaron todas las fases de la modelización, siendo la de validación la más perjudicada. Detectamos una mayor presencia de errores debidos asociaciones incorrectas al resolver el modelo matemático. Concluimos que los errores son elementos de reflexión que deben incentivar la búsqueda de estrategias de enseñanza que ayuden a superar las deficiencias de los estudiantes en la modelización.

Palabras clave: Educación matemática; Educación secundaria; Modelización matemática; Dificultades; Errores; Costa Rica.

Introducción

Diversas corrientes en educación matemática coinciden en la concepción de la modelización como una transición entre la realidad y la matemática en la resolución de

problemas con contexto real (Ledezma et al., 2022). En las actividades de modelización, el pensamiento matemático del resolutor es involucrado en tareas complejas, requiriendo "describir, explicar, debatir, justificar, predecir, escuchar de forma crítica y cuestionar de manera constructiva" (English, 2007, p. 8), procesos esenciales para una vida profesional futura. No obstante, la complejidad de las tareas de modelización matemática que promueven su aprendizaje conlleva una serie de errores y dificultades en los que incurren los estudiantes (Guerrero, 2016).

La mayoría de las investigaciones se han centrado en detectar y categorizar los errores cometidos en el proceso de resolución de problemas, así como sus causas (e.g., Guerrero, 2016; Socas et al., 2016). Dichos estudios muestran que los estudiantes presentan deficiencias tanto en el contenido matemático como en el manejo de las fases de la modelización matemática — descripción, manipulación, predicción y validación (Lesh y Doerr, 2003). Por ello, es necesario estudiar tanto los errores relacionados específicamente con la matemática, como los que se involucran en las fases del proceso de modelización.

En Costa Rica la modelización matemática es presentada como parte fundamental del currículo y aunque en algunas partes de este documento se encuentran menciones sobre la perspectiva de modelización contextual propuesta por Lesh y Doerr (2003), la perspectiva teórica de modelización que sigue este documento no es clara. Ante esto, en este trabajo nos centramos en un grupo de estudiantes de educación secundaria que deberían haber sido instruidos a lo largo de su educación con este enfoque. Lo que podría incentivar la detección y tratamiento de los errores de una forma crítica y constructiva (English, 2007). Específicamente, identificamos y caracterizamos los errores en los que incurren un grupo de estudiantes de Costa Rica cuando aplican las fases del proceso al resolver una tarea de modelización matemática.

Errores en educación matemática

Los errores son un punto de partida para proponer medidas con el fin de prevenir, detectar, atender y solventar las deficiencias que impiden avanzar a los estudiantes en su aprendizaje (Ruano et al., 2008). En este trabajo nos situamos en la línea de investigación sobre el diagnóstico, análisis, documentación y clasificación de los errores más comunes (Abrate et al., 2006). Específicamente, nos basamos en la clasificación de errores propuesta por Abrate et al. (2006), basada en los estudios de Movshovitz-Hadar et al. (1987) y Radatz (1980), la cual contempla las siguientes categorías:

1. Errores debidos al lenguaje matemático: se producen por una traducción incorrecta entre lenguajes, por ejemplo, del lenguaje natural al lenguaje formal matemático o viceversa.
2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial: errores cometidos por los estudiantes al procesar información presentada mediante imágenes visuales.
3. Errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas: son generados al aplicar reglas y propiedades que son válidas en contextos parecidos o relacionados, se producen por falacias de razonamiento, y no se deben al contenido específico.
4. Errores debidos a la recuperación de un esquema previos: se deben a la persistencia de algunos aspectos del contenido o del proceso de resolución de una situación, a pesar de que la tarea matemática es nueva.

5. Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales, como añadir datos extraños o información inconsistente, el olvido de algún dato, entre otros.
6. Errores eventuales debidos a deficiencias en la construcción de conocimientos previos: son causados por aprendizajes incorrectos o inadecuados de hechos, destrezas y conceptos previos que interfieren en un adecuado procesamiento de la información.
7. Errores debidos a la ausencia de conocimientos previos: la causa del error es la carencia en aprendizajes de hechos, destrezas y conceptos previos, es decir, la falta del conocimiento previo necesario para construir una base conceptual más compleja.

Modelización matemática

Los modelos matemáticos son "sistemas conceptuales utilizados para construir, describir o explicar otros sistemas, e incluyen un sistema conceptual y los procedimientos que lo acompañan" (Gallart et al., 2017, p. 266). La modelización matemática es entendida como el procedimiento que parte de un problema del mundo real, el cual requiere de simplificación para elaborar un modelo matemático, plantear conjeturas sobre este y utilizar la matemática como instrumento para elaborar una respuesta, finalizando, con el análisis de los resultados y su contraste con el problema inicial (López et al., 2017). Por tanto, es considerado un proceso complejo (Gallart et al., 2017).

Según Lesh y Doerr (2003), se desarrolla de forma cíclica y no-lineal (Czocher, 2017), a través de cuatro fases: descripción (la información relevante se comprende y se sistematiza), manipulación (se obtiene y resuelve el modelo matemático que representa el problema), predicción (se interpretan y analizan los resultados en relación con las condiciones del problema), y validación (se reflexiona y juzga la viabilidad de la solución del problema matemático). Para Borromeo Ferri (2007) cada sujeto construye su pensamiento por medio de rutas de modelización, en el que se describe el proceso individual (interno o externo) que realiza según su preferencia al modelizar (Borromeo Ferri, 2007). Es decir, "inicia este proceso durante una determinada fase, según sus preferencias, y luego pasa por diferentes fases varias veces o solo una, enfocándose en ciertas fases y/o ignorando otras" (Borromeo Ferri, 2007, p. 265). Por tanto, y debido a la complejidad del pensamiento que requiere este proceso, es aquí donde el estudiante podría presentar dificultades manifestadas a través de errores específicos de cada una de las fases del ciclo de modelización (Guerrero, 2016).

Metodología

La investigación realizada sigue un enfoque cualitativo. Se aplicó una tarea de modelización a 24 estudiantes del nivel de séptimo de Educación Secundaria cuya edad promedio fue de 13 años y con un estatus socioeconómico medio-bajo, que corresponde al K7 de K11 de la educación general básica de Costa Rica. La implementación de la tarea se realizó en las clases de matemática, en la que participaron 22 estudiantes, divididos en grupos de 2 a 3 estudiantes. Esta configuración fue realizada por los mismos estudiantes como es habitual en su trabajo de aula, obteniendo 8 grupos en total.

La tarea de modelización matemática utilizada para este estudio (ver Figura 1) fue validada en un proceso de investigación previo (Porras y Fonseca, 2015) y cumplen con los principios

propuestos por Lesh et al. (2003) —significado personal, construcción del modelo, autoevaluación, documentación, prototipo simple y generalización del modelo— que las caracterizan como actividades de modelización matemática.

¡Hola! Soy Mario, necesito tu ayuda con un problema acerca de mi mesada. Cuando mi hermana Mariela tenía 13 años, recibía una mesada de ¢2000 pero eso fue hace diez años. Ahora yo tengo 13 años. Mis padres me dan ¢2000 a la semana también. Creo que deberían de aumentar mi mesada teniendo en cuenta que las cosas cuestan más en la actualidad. En Costa Rica con ¢2000 ya no se puede comprar lo mismo que compraba mi hermana hace diez años.

Para probar mi hipótesis he recogido los precios de hace 10 años de algunos artículos. De igual forma, recolecté los precios de los artículos similares en la actualidad.

¡Esto es lo que necesito de ti!

Usa la información de los precios actuales y de hace 10 años para determinar ¿cuál debe ser el monto actual de mi mesada?. Justifica tu respuesta con razones lógicas pues mis padres no aceptarán argumentos emocionales o ilógicos.

Además explica el método de solución del problema para que tus compañeros en situaciones similares lo puedan utilizar para determinar cuáles deben ser sus entradas en la actualidad.

Figura 1. Precios de Salveques hace 10 años

Figura 2. Precios de Salveques en el 2012

Figura 3. Precio de Play Station hace 10 años

Figura 4. Precio de Play Station actualmente

Figura 5. Combo Papa Johns hace 10 años

Figura 6. Combo Papa Johns en el 2012

Figura 1. Tarea 1 de modelización "Calculando mi mesada" (Porras y Fonseca, 2015, p. 56-57)

Los datos se recolectaron a través de las producciones escritas de los participantes y la realización de entrevistas. En primer lugar, se aplicó la actividad de modelización matemática en una sesión de 80 minutos. Al inicio se realizó una presentación de la actividad, para familiarizar al estudiante con el contexto utilizado. Se le pidió que escribieran todas sus respuestas en un informe, también se recogió información de algunos borradores de los procesos que los estudiantes realizaron. Con ello, recopilamos las producciones escritas de los procedimientos de los estudiantes. En segundo lugar, después de la implementación de la tarea se realizaron entrevistas individuales a algunos de los estudiantes de los grupos seleccionados en forma aleatoria con el fin de contrastar los resultados obtenidos de las producciones escritas y conocer más acerca de los procesos realizados que evidenciaban errores y dificultades de los estudiantes al resolver las situaciones problema.

El tratamiento de los datos contempla un análisis de contenido, utilizando la teoría de Lesh y Doerr (2003) para los errores específicos de las fases del ciclo de modelización. Además, se utiliza la categorización de Abrate et al. (2006) para el análisis de errores matemáticos. En ella se proponen clasificaciones como errores debidos a (a) uso del lenguaje matemático, (b) dificultades para obtener información espacial, (c) inferencias o asociaciones incorrectas, (d) la recuperación de un esquema previo, (e) cálculos incorrectos o accidentales, (f) deficiencias en la construcción de conocimientos previos y (g) la ausencia de conocimientos previos.

Resultados

Los resultados respecto a omisiones específicas de las etapas del ciclo de modelización señalan que, en general, los grupos participantes no aplicaron todas las fases del proceso de modelización matemática —descripción, manipulación, predicción y validación. Cada grupo de estudiantes planteó una respuesta a la tarea, por lo que se obtuvo un total de 8 respuestas, todas

ellas incorrectas. La Figura 2 presenta las distintas rutas de modelización de preferencia según el estilo de pensamiento matemático de los grupos participantes al resolver la tarea propuesta.

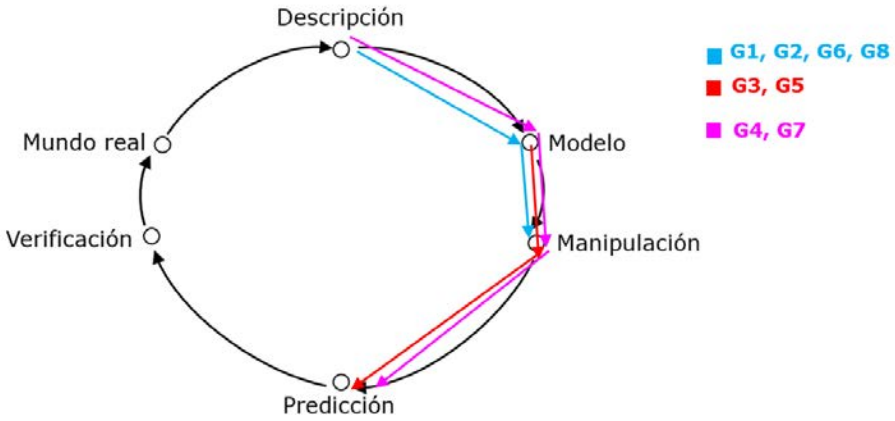
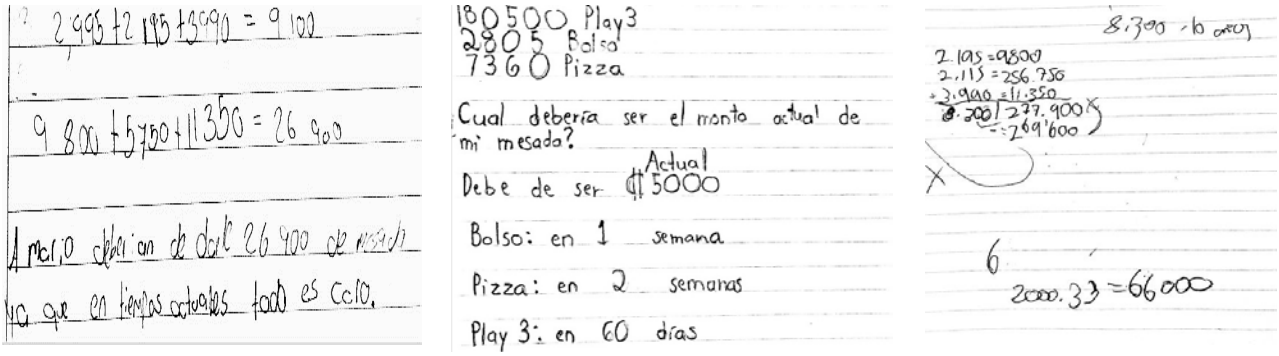


Figura 2. Rutas de pensamiento al resolver la tarea de modelización.

En la figura anterior observamos que se obtuvieron 3 rutas distintas de modelización. Donde 4 de los grupos involucrados (G1, G2, G6, G8), coincidieron en una misma ruta, es decir realizaron las mismas etapas del ciclo de modelización, específicamente: Descripción-Modelo-Manipulación. El resto de los grupos realizaron rutas distintas a la anterior, usando igual cantidad (2 etapas) o más (3 etapas) del ciclo en comparación a la primera ruta mencionada.

En cuanto a cada una de las fases, encontramos que dos de los grupos omitieron la primera fase, descripción, planteando directamente el modelo matemático sin realizar una sistematización previa de la información, esto se evidencia en la figura 3(a).



(a) Omisión de etapa descripción (b)Omisión de la etapa manipulación (c) Omisión de etapa validación

Figura 3. Ejemplos de omisión de las etapas del ciclo de modelización.

Para la segunda fase, manipulación, dos de los grupos (G4 y G6) omitieron la construcción del modelo matemático y la resolución de este, ejecutando también la primera fase —descripción— esto se muestra en la figura 3(b). Aquí los estudiantes del grupo 4 en su solución brindan las cantidades de ₡180 500 para Playstation, ₡2805 para el bolso y ₡7360 para la Pizza. Además, afirman que el monto de la mesada debe ser ₡5000. Sin embargo, no justifican como dedujeron estas cantidades, por lo que se les preguntó a los estudiantes a cerca de este razonamiento:

Profesora: ¿Cómo obtuvieron los montos que ubican al inicio de la solución?
Estudiante: Lo que hicimos fue restar los números de hace 10 años con los actuales, por eso obtuvimos esos resultados.
Profesora: Y el monto de la mesada de ₡5000 ¿Cómo lo obtuvieron?
Estudiante: Lo que hicimos fue darnos una cantidad más alta y ver si efectivamente con ese monto, con el transcurrir de las semanas o días, Mario podría comprar cada uno de los artículos actualmente.

Sin embargo, este razonamiento es incorrecto para algunos casos. Por ejemplo, al realizar la diferencia del precio actual menos el precio hace diez años correspondiente al artículo bolso, no coincide con el resultado de ₡2805. Tampoco, el multiplicar ₡5000 por 9 semanas (aproximadamente 60 días), coincide con el monto superior de ₡180 500, para que Mario compre el artículo. Por lo que, la solución propuesta no es correcta.

En relación con la tercera fase, predicción, cuatro de los grupos (G1, G2, G6, G8) omitieron esta fase al gestar una respuesta numérica, pero no una interpretación, ni el proceso utilizado para concebirla. Esto sugiere que han estado expuestos a una enseñanza donde se prioriza la respuesta final, y no el proceso para llegar a ella. Finalmente, para la cuarta etapa, validación, no se aplicó durante ninguna de las rutas del proceso de modelización. Ninguno de los grupos realizó una reflexión y juzgó la viabilidad de la solución final obtenida. Un ejemplo de la omisión de ambas etapas, es decir tanto de predicción como la validación, se muestra en Figura 3(c) donde se observa la solución del grupo 8, cuando calculan los totales al sumar los precios de los tres artículos de hace 10 años y los de la actualidad, obteniendo como resultados 8300 y 277900 respectivamente. Sin embargo, los estudiantes cometen errores, obteniendo datos incorrectos. Posteriormente buscaron la diferencia entre ambos totales, obteniendo como resultado 269600, por lo que los estudiantes querían saber cuánto dinero había aumentado los precios de los mismos artículos al transcurrir 10 años. En la solución del problema aparece la multiplicación 2000x33=66000, pero se omite información en la solución sobre cómo se obtuvo el factor de 33. En la entrevista que se realizó, se consultó sobre ello:

Profesora: ¿Qué operaciones realizaron para obtener el factor de 33 que utilizan en el producto de 2000x33 que aparece como la última operación de la solución del problema?
Estudiante: Comenzamos a darnos números que al multiplicarlos por esta cantidad (señalando el valor de 8300) nos dieran 277900. Probamos varios números, hasta que encontramos la cantidad más cercana.
Profesora: ¿Y esa cantidad cercana fue el número 33?
Estudiante: Sí, así es.
Profesora: ¿Y este fue el resultado final? ¿33 es el aumento a la mesada de Mario?
Estudiante: Sí eso fue lo que nos dio. Hay algo malo, porque no puede ser tan poquito.

Como vemos en el diálogo anterior, los estudiantes observan que la solución es incorrecta, pero no realizaron una revisión de la solución del problema, es decir, no aplicaron la etapa de validación del proceso de modelización matemática. Por tanto, los resultados obtenidos muestran que, en general, los subgrupos participantes no aplicaron todas las fases del proceso de modelización matemática.

Atendiendo a la clasificación de Abrate et al. (2006), en la actividad de modelización, la categoría de los errores debidos a asociaciones incorrectas (con respuestas de aumentos incorrectos) fue la que presentó mayor frecuencia. En la figura 3, todas las soluciones expuestas son ejemplos de este tipo de error. También se obtuvo otros tipos de errores, que coindicen con los expuestos por Socas et al. (2016) como la confusión del punto de separación de las unidades de millar, con la coma que separa la parte decimal en las cantidades y como el resolver incorrectamente operaciones aritméticas básicas por recuperación de un esquema antiguo del conocimiento (como confundir la operación división con números naturales con la de cantidades decimales). Los hallazgos de las entrevistas confirmaron que la falta de realización de la fase de validación, o sea una reflexión y juicio de la viabilidad de la solución, a la luz de las condiciones del problema, podría haber evitado muchos errores matemáticos antes expuestos. Lo que concuerda con los resultados de Guerrero (2016) y Socas et al. (2016).

Conclusiones

Si bien, la omisión de alguna etapa del proceso de modelización por sí sola no constituye un error, los resultados obtenidos sugieren que gran parte de los errores pudieron haber sido superados si los estudiantes hubieran realizado la etapa de validación de la solución del problema, ya sea a través de una revisión previa de los procesos matemáticos al final o durante el proceso cíclico de modelización. Concluimos que a pesar de que el currículo de Costa Rica contempla la modelización como un elemento esencial de la contextualización activa en el aprendizaje matemático (MEP, 2012) y los estudiantes participantes deberían haber sido formados desde la educación primaria en ambientes de modelización, los errores encontrados vislumbran un panorama que no coincide con la formación que debieron haber recibido, por ello se consideran elementos de reflexión, avance y retroalimentación para la labor docente.

Consideramos que es necesario hacer más énfasis en la enseñanza de las etapas del ciclo de la modelización, con especial atención a la necesidad de reflexionar en el proceso seguido, la razonabilidad de la solución y su validación. Al mismo tiempo, incentivar la búsqueda de estrategias de enseñanza adecuadas que ayuden a solventar las deficiencias presentes al resolver actividades de modelización, como las detectadas en este estudio.

Reconocimiento

Este trabajo ha sido desarrollado como parte de la tesis doctoral titulada “Conocimiento profesional de maestros de primaria en ejercicio sobre modelización matemática” dentro del Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, España.

Referencias

Abrate, R., Brate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Universidad Nacional de Villa María.

Borromeo Ferri, R. (2007). Modelling problems from a cognitive perspective. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical modellin*g. Education, Engineering and Economics–ICTMA 12 (pp. 260–270). Woodhead Publishing. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.260

Czocher, J. A. (2017). Mathematical modeling cycles as a task design heuristic. *The Mathematics Enthusiast, Montana, 14*(1), 129–140. 2017. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1391

English, L. D. (2007). Interdisciplinary modelling in the primary mathematics curriculum. En J. Watson y V. M. Adams (Eds.), *Proceedings 30th Mathematics Education Research Group of Australasia Annual Conference* (pp. 275–284). Universidad de Launceston.

Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L. M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2017). Design and implementation of a tool for analysing student products when they solve Fermi problems. En G. A. Stillman, W. Blum, W. y G. Kaiser, (Eds.), *Mathematical modelling and applications: Crossing and researching boundaries in mathematics education* (pp. 265–275). Springer

Guerrero, F. (2016). Errores matemáticos en la resolución de problemas de modelización matemática. Caso: estudiantes del primer año de educación media. *Revista ciencias de la educación, 26*(47), 93–113.

Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2022). Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. *Mathematics Education Research Journal.* Primero online. https://doi.org/10.1007/s13394-022-00411-3

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T. y Zawojewski, J. S. (2003). Model development sequences. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 203–204). Lawrence Erlbaum Association.

Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–33). Lawrence Erlbaum Association.

López, R., Molina, M. y Castro, E. (2017). Modelización en el aula de ingeniería: un estudio de caso en el marco de un experimento de enseñanza. *PNA, 11*(2), 75–96. https://doi.org/10.30827/pna.v11i2.6075

Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programas de estudio de matemáticas: I, II y III ciclos de la educación general básica y ciclo diversificado*. Autor. https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Movshovitz-Hadar, N., Inbar, S. y Zaslavky, O. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. National Council of Teachers of Mathematics, *18(1)*, 3–14. http://doi.org/10.2307/749532

Porras, K. y Fonseca, J. (2015). Aplicación de actividades de modelización matemática en la educación secundaria costarricense. *Uniciencia, 29*(1), 42–57. http://dx.doi.org/10.15359/ru.29-1.3

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. En AUTOR (Ed.). *For the Learning of Mathematics* (pp. 16–20). FLM Publishing Association.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA, 2*(2), 61–74. https://doi.org/10.30827/pna.v2i2.6201

Socas, M., Ruano, M. R. y Hernández, J. (2016). Análisis didáctico del proceso matemático de modelización en alumnos de secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 9*, 21–41. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i9.146

Estrategias Metacognitivas para resolver un problema de Modelización

Noé **Aguilar** Perdomo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
noe.aguilar@cinvestav.mx
Claudia **Acuña** Soto
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
claudiamargarita_as@hotmail.com

Resumen

Con este taller buscamos establecer algunas indicaciones generales que le permita a los profesores: 1. Identificar las situaciones llamadas de bandera roja, Goos (1998) que se refieren a bloqueos en la resolución de un problema y 2. Gestionar estas situaciones para que puedan apoyar a los estudiantes en el proceso de solución. A partir de una actividad de modelización, resuelta en la sesión, discutiremos las soluciones desde dos perspectivas: 1. La de los solucionadores, detectando los retos que podrían enfrentar los estudiantes en el proceso de solución y 2. La del profesor, que considera estos retos para diseñar su apoyo. Se presentarán las soluciones de dos estudiantes hondureñas, con el objetivo de establecer estrategias docentes para apoyarlas y resolver el problema enfrentado.

Palabras clave: Matemática Educativa; Educación secundaria; Enseñanza; Mediación pedagógica; Modelización; Metacognición; Función lineal.

Introducción

Cuando los estudiantes están resolviendo un problema de modelización, es frecuente que tengan un *bloqueo* Stillman (2011) que les impida continuar con el proceso de solución "ya que cada paso del ciclo de modelización puede contener barreras cognitivas" (Wendt et al., 2020, traducción propia). En ese sentido, una de las estrategias que podríamos utilizar para colaborar a desbloquear ese proceso de solución, es la promoción de recursos que deriven en una reflexión que les permita a los estudiantes "mirar desde lejos" el proceso, para juzgarlo y actuar en consecuencia.

Aquí vamos a considerar tres aspectos que pueden ser una base para esta reflexión, los que se apoyan en abordar, lo ya hecho, con mayor cuidado, pero además enfatizando el tratamiento de algunas fuentes de información que con frecuencia provocan pequeños obstáculos y son los siguientes:

- Establecer con claridad la información relevante.
- Organizar la información disponible.
- Validar y explicar los resultados.

Estos aspectos podrían ser un recurso que proporcione, tanto a los profesores como a los estudiantes, elementos para orientar el proceso de solución. Los cuales pueden utilizarse a través de las siguientes preguntas: ¿cuál es el objetivo del problema?; ¿La información recuperada resuelve el problema?; ¿Qué se espera obtener al utilizar la estrategia seleccionada? y ¿Cuáles son los elementos que se deben considerar para resolver el problema? Todas estas preguntas están orientadas a recuperar alguno de los tres aspectos que hemos considerado como base para la reflexión.

Marco Referencial

La introducción de la modelización matemática en las aulas de clase ha sido un tema que ha tomado mucha fuerza en los últimos años, por tal razón, nos hemos planteado diseñar este taller; el cual tiene como objetivo establecer algunos lineamientos generales que ayuden a los profesores al resolver actividades de modelización con sus estudiantes, en caso de que estos sufran de algún bloqueo, como los mencionados.

Considerando las habilidades que se requieren para la competencia de modelización, Niss et al. (2007) establecen que se refieren a:

> La capacidad de identificar preguntas, variables, relaciones o supuestos relevantes en una situación dada del mundo real, de traducirlos a las matemáticas y de interpretar y validar la solución del problema matemático resultante en relación con la situación dada, así como la capacidad de analizar o comparar modelos dados investigando los supuestos que se hacen, comprobando las propiedades y el alcance de un modelo dado. (p. 12, traducción propia)

A partir de esta descripción, nos damos cuenta de que la competencia de modelización, en sí misma, requiere de un amplio conjunto de habilidades, que en consecuencia podrían resultar en barreras cognitivas para los estudiantes cuando resuelven una actividad de modelización, como mencionan Blum y Leiβ (2007): “la lectura de un texto y la comprensión tanto de la situación como del problema son una barrera cognitiva considerable para los estudiantes” (p. 228, traducción propia). Por lo que resulta importante para el trabajo de aula poder identificar estas situaciones, que Goos (1998) les llamó de bandera roja y menciona que “pueden surgir cuando los alumnos se dan cuenta de que no están avanzando, notan un error de cálculo o reconocen que su respuesta viola las condiciones del problema o no tiene sentido” (p.26, traducción propia).

En este taller, proponemos una aproximación al tratamiento de estas situaciones de bandera roja, desde la perspectiva del profesor; quien a través de un trabajo de reconocimiento puede darse cuenta en qué momento puede intervenir para orientar el trabajo de los estudiantes,

dado que estas situaciones son “desencadenantes metacognitivos, que señalan la necesidad de una pausa o de un retroceso mientras se toman medidas correctivas.” (Goos, 1998, p. 26, traducción propia).

Observar los tres aspectos mencionados para poder “mirar desde lejos” el proceso de solución permite desarrollar un tratamiento para superar los bloqueos que puedan surgir.

Luego de lograr el desbloqueo y con la intención de obtener un acercamiento a la modelización, podríamos sumar a los esfuerzos del estudiante mediante estrategias docente para:

- Confrontar los resultados con las condiciones del problema original, mediante una reflexión conjunta.
- Variar las condiciones del problema para profundizar en el modelo que lo resuelve.

El resultado esperado, se relaciona con una serie de indicaciones para promover la reflexión de los estudiantes sobre su actividad de resolución del problema bajo la perspectiva de la modelización.

Propuesta del taller

El taller estará dividido en dos grandes momentos: 1. Los asistentes resolverán un problema de modelización para percibir el papel del resolutor; detectar los puntos posibles de bloqueo y 2. Discutirán los elementos importantes para su solución y cómo podrían utilizarse para superar los posibles bloqueos detectados.

Se planteará la situación real para orientar el trabajo de dos estudiantes hondureñas que mostraron bloqueos en sus respectivos trabajos.

El problema que se desea trabajar es el siguiente: **“Manejar para conseguir combustible”** adaptado de (Bliss, 2016, p.56).

Imagine la siguiente situación: Su profesor le pide ayuda para poder decidir dónde comprar combustible, se sabe que la **estación A** se encuentra en la ruta normal de su casa al trabajo y está vendiendo combustible esta semana a $1 por litro, mientras que la **estación B**, que está a 6 km de su ruta normal, está vendiendo combustible a $0.95 por litro. La **estación C** vende el combustible más barato a $0.90 por litro, pero está a 9 km fuera de su ruta. Suponga que el automóvil de su profesor rinde 12 kilómetros por litro (km/l). ¿A qué estación de combustible debería manejar su profesor para comprar combustible? Explique su respuesta.

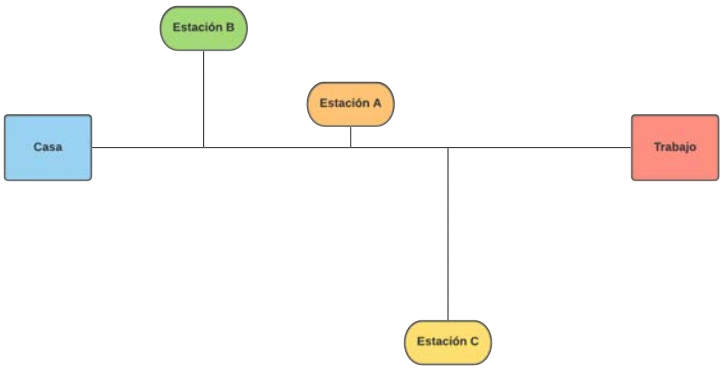


Figura 1. Diagrama que representa la ubicación de las estaciones de combustible

Desarrollo de la actividad

Después de resolver la actividad, los asistentes discutirán sobre los elementos del problema, desde la perspectiva del solucionador, que podrían permitir la solución: ¿Qué retos plantea el problema? ¿Qué conceptos matemáticos y no matemáticos son necesarios para resolverlo (clasificarlos)?

En un segundo momento, se discutirá, desde la perspectiva del Profesor, sobre los aspectos que se deberían de considerar para apoyar a los estudiantes que se enfrenten al problema: ¿Qué sugerencias les harían a sus estudiantes para superar los retos que identificaron? ¿De qué manera se podría superar un obstáculo matemático en el contexto del problema?

Después de identificar los puntos de atención del problema, se presentarán las soluciones de dos estudiantes hondureñas, para reconocer de qué manera podrían apoyar su proceso de solución: ¿Qué dificultades observan en la solución de las estudiantes? (bloqueos, falta de comprensión de las preguntas, …) ¿cómo podríamos ayudar a las estudiantes a superar estos bloqueos?

Por último, la discusión girará en torno a la siguiente pregunta: ¿Cómo llevar estas estrategias metacognitivas a grupos?

Reflexiones que se esperan obtener con los profesores

Se espera ofrecer a los profesores estrategias que les ayuden a identificar los momentos en los que es necesario intervenir y de qué manera podrían hacerlo. La propuesta del taller ofrece un espacio de reflexión, donde los profesores a partir de su experiencia pueden establecer criterios de apoyo a los estudiantes, ayudándolos a “mirar desde lejos”. También, esperamos que los profesores puedan actuar en un nivel meta-metacognitivo (Stillman, 2011), donde no sólo tienen que observar y regular las acciones metacognitivas de los estudiantes, sino también las suyas.

Al establecer el tipo de ayuda que podrían ofrecer los profesores, es necesario poder reflexionar sobre las condiciones que se necesitan para actuar en un nivel meta-metacognitivo, así como la manera en que podrían trasladar estas estrategias al contexto real del aula de matemáticas, aspecto que es de mucho interés para este taller.

Referencias

Bliss, K., Fowler, K., Galluzzo, B., Garfunkel, S., Giordano, F., Godbold, L., & Zbiek, R. (2016). Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education. *Consortium for Mathematics and Its Applications and the Society for Industrial and Applied Mathematics*. Retrieved July, 11, 2018.

Blum, W., & Leiβ, D. (2007). Deal with modelling problems. *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics-ICTMA*, 12, 222-231.

Goos, M. (1998). 'I don't know if I'm doing it right or I'm doing it wrong!' Unresolved uncertainty in the collaborative learning of mathematics. In C. Kanes, M. Goos, & E. Warren (Eds.), *Teaching mathematics in new times. (Proceedings of the twenty-first annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (Vol. 1, pp. 225–232). Gold Coast: MERGA.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 3–32). Springer.

Stillman, G. A. (2011). Applying metacognitive knowledge and strategies in applications and modelling tasks at secondary school. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 165–180). Dordrecht: Springer.

Wendt, L., Vorhölter, K., & Kaiser, G. (2020). Teachers' perspectives on students' metacognitive strategies during mathematical modelling processes–A case study. *In Mathematical Modelling Education and Sense-making* (pp. 335-346). Springer, Cham.

Implementação de Pesquisas em Resolução de Problemas parcerias de coaprendizagem

Flávia Sueli Fabiani **Marcatto**
Instituto de Matemática e Computação - Universidade Federal de Itajubá
Brasil
flaviamarcatto@unifei.edu.br

Resumo

Esta comunicação discute a implementação de resultados de pesquisas em Resolução e Proposição de Problemas, em parcerias de coaprendizagem na formação de professores de matemática. Foi adotada uma investigação disciplinada, onde professores de matemática adotam e adaptam práticas e processos de pesquisa em uma parceria de coaprendizagem com pesquisadores em Educação Matemática. A estrutura teórica e organizacional que orientou foi a Aliança Professor-Pesquisador para a Investigação da Aprendizagem em Matemática, que situa professores como integrantes na pesquisa, seja para a sua aprendizagem profissional ou para ampliar os conhecimentos inerentes em Educação Matemática. A metodologia utilizada é a Pesquisa Baseada em Design. O objetivo foi promover a colaboração e a confiança entre pesquisadores e professores, para um maior envolvimento de professores na produção de conhecimento e na investigação disciplinada para o seu crescimento profissional, proporcionando o desejado processo de construção de pontes entre pesquisadores e professores, aproximando pesquisa e prática.

*Palavras-chave***:** Educação matemática; Proposição de problemas; Desenvolvimento profissional de professores de matemática; Pesquisa baseada em design; Comunidades de aprendizagem profissional.

Introdução

A Resolução de Problemas (RP) foi e é fundamental na construção do conhecimento matemático, desde o início da história humana. Assim, é amplamente aceito que a RP deve ser uma atividade fundamental nas salas de aula de matemática. Os entendimentos sobre essa afirmação foram postos na discussão educacional há mais de 70 anos por George Polya, com a

publicação do seu livro *How to Solve It: a new aspecto of mathematical method*, em 1945 e lançado no Brasil em 1975 com o título "A Arte de Resolver Problemas".

Desde então, pesquisadores vem desenvolvendo teorias e programas (Schoenfeld, 1985; Silver, 1994; Burkhardt & Li 2013; Cai & Hwang, 2020), e experimentos para a introdução da RP nas salas de aula como parte da atividade matemática regular. Trabalhos seminais como o de Polya (1945) e posteriormente Schoenfeld (1985), com o livro *Mathematical Problem Solving*, produziram muitas orientações para o ensino.

Apesar desses esforços e conquistas, ainda há um longo caminho a percorrer antes que a RP seja considerada uma atividade regular em salas de aula reais, com alunos estudando matemática através da resolução de problemas, "bem como de seu irmão mais novo, a proposição de problemas" (Liljedahl & Cai, 2021, p. 723, tradução nossa).

A incorporação sistemática, da Resolução e da Proposição de Problemas (PP), nos currículos e na prática da matemática escolar pode ser vista como um caso específico de implementação de inovação. (Koichu, Cooper & Widder, 2022) No entanto, a RP pode assumir várias formas, em salas de aula de matemática, desde a resolução de exercícios práticos de rotina até processos menos comuns e mais complexos de lidar com tarefas não rotineiras sem uma estratégia de resolução pré-definida. Ao assumir várias formas nas salas de aulas reais, a RP, pode tornar-se um conceito difuso que pode levar a entendimentos equivocados.

Resultados nem sempre desejáveis na longa história de tentativas de ensinar matemática como uma disciplina baseada em problemas, cabe perguntar: por que isso acontece? Mesmo com "avanços impressionantes, a pesquisa sobre RP em ambientes escolares permanece em grande parte ateórica" e ainda precisamos saber mais sobre o papel do professor na instrução, o que está acontecendo nas salas de aulas reais e "como reconceituar RP para que a(s) nova(s) conceituação(ões) seja(m) útil(eis) na prática" (Koichu, Cooper & Wider, 2022, p. 79, tradução nossa).

Mason (2016) defende que a preservação da natureza da RP como uma atividade matemática em contextos instrucionais, em qualquer nível, requer uma compreensão profunda, seja por pesquisadores, seja por professores. Para ele, o verdadeiro problema é o "quando" e não "o que", ou seja, a questão de "quando introduzir tarefas exploratórias, quando intervir e de que forma" (Mason, 2016, p. 263).

Investigadores em RP clamam por uma abordagem mais prática (Onuchic, 1999; Marcatto & Onuchic, 2021) e ao mesmo tempo uma abordagem de pesquisa mais holística (Mason, 1996; Chapman, 2015; Koichu, Cooper & Wider, 2022).

O objetivo do projeto de pesquisa do qual essa comunicação faz parte é implementar a Resolução de Problemas (RP) e a Proposição de Problemas (PP) matemáticos, como uma sequência dinâmica de atividades pretendidas, planejadas, encenadas e vivenciadas, moldadas por pesquisadores, professores, futuros professores e alunos, na Educação Básica, através de parcerias de coaprendizagem professor-pesquisador.

A pergunta que direciona essa investigação é: o que podemos adotar e adaptar (pesquisadores, professores e futuros professores) das pesquisas sobre RP e PP para salas de aula de matemática reais da Educação Básica? As implementações poderão sofrer modificações, de acordo com as necessidades do contexto, mantendo as ideias e os princípios centrais.

Referencial Teórico

Estudos de Implementação, de resultados de pesquisa em Educação Matemática (EM), ganharam a atenção de pesquisadores nos últimos anos, considerando que existe muito conhecimento acumulado, com potencial para melhorar a prática de ensino de matemática. Por outro lado, existe também uma tendência de que esse conhecimento não encontre caminho nas salas de aula e nos programas de formação de professores.

Koichu, Aguilar e Misfeldt (2021) conceituam a implementação na EM como uma ruptura ecológica em um sistema de EM particular, através do endosso gradual da inovação em conjunto com um plano de ação para resolver o que é percebido como um problema por (pelo menos alguns dos) interessados envolvidos. A característica definidora da implementação é que ela ocorre na interação entre os proponentes da inovação e do plano e os adaptadores da inovação.

A pesquisa relacionada à implementação, adotada no contexto desse estudo, será de uma investigação educacional disciplinada, onde professores de matemática adotam e adaptam práticas e processos de pesquisa em parcerias de coaprendizagem com pesquisadores em EM (Pinto & Koichu, 2021). Essas parcerias serão constituídas como Comunidades de Aprendizagem Profissional (CAPs), definidas por Brodie (2020) como casos especiais de comunidades de prática, onde os membros se envolvem em aprendizado profissional, o que implica em se tornar competente e confiante sobre a base de conhecimento da profissão e usá-la para tomar e justificar decisões e desenvolver agência e identidade profissionais.

Há uma tendência de responsabilizar os professores pelo fracasso escolar de seus alunos e talvez por isso a maioria das pesquisas em EM é realizada tendo os professores como objetos de pesquisa, cooperando para a coleta de dados ou colaborando para melhorar a compreensão do ensino e aprendizagem da matemática escolar. Nesse sentido, é desejável que os professores de matemática deixem de ser objetos de pesquisa e se tornem parceiros de pesquisa.

Vários estudos anteriores indicaram que a influência do desenvolvimento profissional (DP) na prática da sala de aula é mediada pelos contextos escolares em que os professores trabalham (Cobb et al., 2003; Cobb & Jakson, 2015; Cobb & Jakson, 2021). Aspectos desses contextos, segundo Cobb e Jakson, (2021) incluem os materiais instrucionais e os recursos associados aos quais os professores têm acesso, apoios formais e informais para que esses usem, os materiais e os recursos, de forma eficaz (por exemplo, reuniões colaborativas de professores com regularidade, redes informais de coaprendizagem), pessoas as quais os professores são responsáveis e como eles se percebem responsáveis.

Com base nessas descobertas de pesquisas anteriores, depreende-se que a melhoria instrucional envolve a aproximação, a coleta de dados, a análise desses dados, o conhecimento e a reorganização dos contextos escolares nos quais os professores trabalham para que se consiga apoiar a melhoria contínua de suas práticas instrucionais.

Também é importante que os suportes estejam próximos da prática instrucional (Ball, Thames & Phelps, 2008), o que implica que esses precisam se concentrar diretamente no que se espera que os professores e futuros professores façam em seu trabalho e nas ferramentas que usarão. Portanto, será crucial apoiar os professores no desenvolvimento de uma maneira de entender como as novas ferramentas (por exemplo, resolução e proposição de problemas matemáticos) se encaixam ou não em sua prática atual. Além disso, será importante que os professores percebam a necessidade da ferramenta projetada para abordar o que eles percebem como um problema da prática atual, ou que deve ser cultivada a necessidade da ferramenta durante o DP.

No Brasil não há referência na literatura nacional, em Educação Matemática, de parcerias de coaprendizagem professor-pesquisador (Koichu & Pinto, 2018; Pinto & Koichu, 2021), estruturadas na perspectiva teórico-organizacional da aliança professor-pesquisador para a investigação da aprendizagem matemática (APPIAM).

No que tange as parcerias de coaprendizagem para o desenvolvimento de competências de pesquisa de professores em salas de aula de matemática se dará por meio do envolvimento na investigação (acadêmica) em RP e PP. Ao invés de aceitarem uma agenda pronta de pesquisa, os professores de matemática em salas de aula reais, estabelecem parcerias de trabalho com pesquisadores para traduzir os objetivos de ambos (professor e pesquisador), em uma nova agenda com interesses comuns.

A APPIAM é um modelo de implementação de pesquisa em EM, em salas de aula reais, através da colaboração entre professores e pesquisadores. Portanto, é uma estrutura teórico-organizacional para apoiar, aprimorar e ampliar parcerias entre pesquisadores e professores em sala de aula, com base em cinco princípios: crescimento profissional por meio do envolvimento ativo em todas as etapas da pesquisa; autenticidade da pesquisa, professores e pesquisadores se envolvem em questões importantes para ambos e que possam levar a resultados cientificamente sólidos e implementáveis; oportunidade de compartilhar a agência sobre a parceria para ambas as comunidades (professores de matemática e pesquisadores em EM); oportunidade de escolha que implica na participação dos professores na pesquisa de forma estável e produtiva; dualidade de criação e uso de novos conhecimentos, na cocriação de novos conhecimentos em projetos APPIAM, aumentando as chances de que esse conhecimento seja usado na prática e impacte o campo de atuação. (Koichu & Pinto, 2018)

A investigação do professor é um esforço sistemático para desenvolver novos conhecimentos ou compreensões em um ambiente educacional, realizado por alguém que trabalha, ou venha a trabalhar, nesse ambiente, em colaboração com profissionais que trabalham em ambientes semelhantes. Inclui práticas que também são pertinentes à pesquisa ou à investigação disciplinada (conduzida em comunidades científicas). Estas envolvem: ouvir os alunos; examinar seus trabalhos; avaliar o que os alunos sabem ou como pensam; examinar materiais de ensino; conceber tarefas e observar como os alunos se envolvem com elas; comparar diferentes abordagens de ensino; conversar com os colegas sobre as diferentes abordagens de ensino; conversar com colegas sobre questões educacionais; partilhar experiências em fóruns e muito mais. Os professores interpretam o currículo escrito pretendido e o adaptam para um currículo

implementado em sala de aula, recorrendo a vários recursos para fazer sentido e adaptam ainda, materiais didáticos para atender as necessidades e objetivos da prática em salas de aulas reais.

Em contraste com a onipresença da RP na matemática escolar, a PP Matemáticos, "processo de formular e expressar um problema dentro do domínio da matemática", tem sido bem menos proeminente na matemática da Educação Básica (Cai & Hwang, 2020, p. 6, tradução nossa). De acordo com Cai e Hwang (2020) há uma necessidade premente de investigar como os professores aprendem a usar a formulação de problemas para ensinar matemática, na sala de aula. Koichu e Kontorovich (2013) descobriram, em seus estudos, que combinar a exploração e a RP com a PP ajudou futuros professores a apresentar problemas mais interessantes.

No ensino por meio da RP, a aprendizagem ocorre durante o processo de resolução de problemas (Schoenfeld, 1985, 1989; Marcatto & Onuchic, 2020). À medida que os alunos resolvem problemas, eles levam tempo para pensar em possíveis soluções e, em seguida, usam qualquer abordagem que possam pensar, baseiam-se em qualquer conhecimento que aprenderam e justificam suas ideias de maneiras que consideram convincentes. O ambiente de aprendizagem da RP é um cenário natural para os alunos trabalharem, individualmente ou em grupo, com suas resoluções e depois as apresentarem para toda a turma. Ao se envolverem nesse processo, eles têm oportunidades de aprender matemática por meio de interações sociais, negociação de significado e construção de um entendimento compartilhado. Tais atividades os ajudam a esclarecer suas ideias e adquirir diferentes perspectivas do conceito ou ideia que estão aprendendo. Ao contrário da RP o foco da PP está na geração de problemas, com base em situações (Silver, 1994; Cai & Hwang, 2020) e os problemas são os objetos de estudo. Portanto, no ensino através da PP a aprendizagem ocorre durante a (re)formulação e discussão de problemas propostos.

Os livros didáticos de matemática ainda podem ser instrumentos de mudança na educação, de forma direta e indireta. Na forma direta, através da implementação de novas práticas ou abordagens de conteúdo. Na forma indireta servindo, como plataforma dentro das quais os professores fazem interpretações, com base no que está proposto no livro, para alcançar novos objetivos para os estudantes. Portando, a falta de tarefas de PP, bem como orientações sobre como ensinar usando a PP, nos materiais curriculares, pode ser vista como uma oportunidade para a implementação nas salas de aula, dentro do espaço interativo e interpretativo de professores e livros didáticos.

Por outro lado, na perspectiva sociocultural da RP um problema é considerado como uma tarefa dada e recebida em uma situação social, construída pelos participantes nela envolvidos. Na perspectiva sociocultural os resolvedores do problema proposto "estão envolvidos na interpretação das ações uns dos outros, ao mesmo tempo em que se adaptam às práticas de aprendizagem social e contribuem para a evolução destas práticas". (Cobb & Jackson, 2021, p.83, tradução nossa)

Portanto, nesse estudo, utilizaremos a estrutura conceitual da cadeia de implementação de RP e PP proposta por Koichu, Cooper e Widder (2022), onde a RP e a PP: (i) pretendida denota a visão daquele que propõe um problema, (ii) planejada para denotar a visão dos professores sobre o problema proposto no DP, (iii) encenada que denota o que acontece na sala de aula a partir do

planejamento, na perspectiva do professor, e (iv) vivenciada para denotar o que acontece na perspectiva dos alunos.

Metodologia

Em cada ciclo de DP, professores e pesquisadores, formulam conjuntamente questões de pesquisa, projetam atividades, desenvolvem métodos apropriados de coleta de dados nas salas de aula dos professores participantes, criam banco de dados de episódios de aula documentados e, em seguida trabalham colaborativamente na análise dos episódios e tiram conclusões. Portanto, a metodologia que apoia esta pesquisa é a Pesquisa Baseada em Design. A DBR como uma metodologia de pesquisa combina sistematicamente dois objetivos: (1) melhorar o ensino da disciplina em sala de aula, projetando arranjos de ensino e aprendizagem para um determinado tópico, e (2) gerar contribuições teóricas, através da pesquisa empírica para compreender os processos de ensino e aprendizagem iniciados para um determinado tema. (Cobb et. al. 2003).

De acordo com Brodie (2020) alguns tipos de ferramentas e recursos são importantes para o trabalho profissional colaborativo e a aprendizagem entre os professores: conhecimento, material e logístico, afetivo e humano. Compreendendo que esses recursos funcionarão de formas diferentes em diferentes contextos, podendo ainda restringir algumas formas de pesquisa, o Quadro 1 foi elaborado para esclarecer os recursos necessários, apresentados por Brodie (2020) (coluna da esquerda) e como estão disponíveis, no Brasil (coluna da direita).

Fizeram parte desta comunidade de aprendizagem profissional, quatro professores de matemática, com turmas no Ensino Médio, com anos coincidentes, em duas escolas distintas.

Quadro 1:
Recursos necessários e disponíveis no Brasil.

Recursos	**Recursos (no Brasil)**
Conhecimento Conhecimento do conteúdo matemático **e** conhecimento pedagógico do conteúdo.	***Conhecimento*** Conhecimento de conteúdo de RP: conhecimento de problemas, RP e PP. Conhecimento pedagógico de RP: conhecimento dos estudantes como resolvedo-res de problemas; práticas instrucionais para a RP.
Material Planos de aula, tarefas e livros didáticos, vídeos de práticas, protocolos para conversas e recursos tecnológicos.	***Material*** Planos de aula, tarefas e livros didáticos e recursos tecnológicos.
Logística *Tempo* para as comunidades trabalharem juntas e os *espaços* apropriados para que esse trabalho aconteça	***Logística*** *Tempo* e *espaços* apropriados **(online)**
Afetivo Para que os professores ensinem bem, eles precisam de sensibilidade emocional para si e seus alunos. Para que trabalhem juntos, de forma produtiva, precisam ser capazes de desafiar o pensamento e as práticas uns dos outros. É necessário segurança e confiança.	***Afetivo*** **É necessário desenvolver:** sensibilidade emocional para si mesmos e seus alunos **e** para que trabalhem juntos, de forma produtiva, precisam ser capazes de desafiar o pensamento e as práticas uns dos outros**.** É necessário **desenvolver** segurança e confiança.

Humano Todas as pessoas envolvidas em grupos colaborativos e de apoio à aprendizagem profissional (pesquisadores, professores e alunos)	***Humano*** Pessoas envolvidas em grupos colaborativos e de apoio à aprendizagem profissional (**CAPs)**. As CAPs envolverão pesquisadores, professores, futuros professores e alunos.

Fonte: Adaptado de Brodie (2020)

Os métodos de coleta de dados incluirão a observação das sessões de formação de professores através de plataformas digitais (gravação dos encontros síncronos) e das interações (assíncronas) realizadas nas plataformas, bem como entrevistas com os participantes (gravadas em áudio). Esta pesquisa utilizará da análise de documentos de professores e futuros professores, produções escritas em sessões e reflexões finais no decorrer de todo o processo (incluindo relatos de suas aulas e relatórios finais), como também as anotações da pesquisadora-participante responsável pelas sessões de DP.

Considerações finais

Nas salas de aula dos professores, envolvidos nesse estudo e agora membros dessa comunidade de aprendizagem profissional, o início da aula era marcado por uma exposição do professor, seguida pela replicação do aluno, e a consolidação do professor e sua lição com a verificação de erros e acertos dos alunos. A principal referência é o livro didático.

A principal discussão, trazida para a CAP é a ‘falta de tempo’, um recurso tido como importante no contexto dessa comunidade. Outra questão que merece destaque é a falta de engajamento social, cognitivo e comportamental, com sensível piora na retomada do pós-pandemia.

Desse modo, as questões de discussão iniciais dessa comunidade envolveram: o recurso tempo, o conhecimento do professor sobre resolução e proposição de problemas matemáticos e o estudo sobre o engajamento dos alunos nas atividades de sala de aula.

Portanto, a prática educacional é mais complexa do que qualquer teoria que tente encapsulá-la em uma rede particular de conceitos e proposições. No entanto, unindo-se a estudiosos que apontaram a necessidade de teorizar ainda mais a resolução de problemas, de forma sintonizada com as necessidades da prática, argumento que um olhar sistemático sobre RP como uma cadeia de atividades pretendidas, planejadas, executadas e vivenciadas nos permite tomar consciência e explicar alguns fenômenos críticos que precisam de nossa conscientização e explicação, para a implementação da RP em escala.

Referências e Bibliografia

Ball, D. L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: what Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), p. 389-407.

Brodie, K. (2020). Resources for and from collaboration: a conceptual framework. In H. Borko & D. Portari (Eds.), *ICMI Study 25 conference proceedings.* Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups. ICMI; University of Lisbon, p. 37–48.

Burkhardt, H. & Li Y. (2013). About Alan H. Schoenfeld and his work. Y. Li & J.N. Moschkovich (eds.), *Proficiency and Beliefs in Learning and Teaching Mathematics:* Learning from Alan Schoenfeld and Günter Törner. Rotterdam, AL: Sense Publishers, p. 9–18.

Cai, J. & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Education Research*, 102.

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education, 3*(1), p. 19–36.

Cobb, P. et al. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher, 32*(1), p. 9–13.

Cobb, P. & Jackson, K. (2015). Supporting teachers' use of research-based instructional sequences. *ZDM Mathematics Education* 47, p. 1027–1038.

Cobb, P. & Jackson, K. (2021). An Empirically Grounded System of Supports for Improving the Quality of Mathematics Teaching on a Large Scale, *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education, 1*(1), p. 77-110.

FiorentinI, D., Miotto M., M. R. & Bezerra, R. C. (2019). Apresentação Dossiê: Lesson Study em Matemática. *Educere et Educare, [S. l.]*, v. 14, n. 32, Disponível em: https://e-revista.unioeste.br/index.php/educereeteducare/article/view/23708. Acesso em: 11 fev. 2022.

Koichu, B. & Pinto, A. (2018). Developing Education Research Competencies in Mathematics Teachers Through TRAIL: Teacher-Research Alliance for Investigating Learning. *Can J Sci Math Techn* 18**,** p. 68–85.

Koichu, B., Aguilar, M.S. & Misfeldt, M. (2021). Implementation-related research in mathematics education: the search for identity. *ZDM Mathematics Education* 53, p. 975–989.

Koichu, B., Cooper, J., & Widder, M. (2022). Implementation of Problem Solving in School: From Intended to Experienced. *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education, 2*(1), p. 76-106.

Liljedahl, P. & Cai, J. (2021) Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. *ZDM – Mathematics Education,* 53, p. 723–735.

Marcatto, F.S.F. & Onuchic, L. de la R. (2021). A Resolução de Problemas como Eixo Norteador na Formação de Professores que Ensinam Matemática. In: E.R. Navarro e M. do C. de Souza (Orgs.). *Educação Matemática em pesquisa: perspectivas e tendências.* v.3, p. 49-69.

Pinto, A. & Koichu, B. (2021). Implementation of mathematics education research as crossing the boundary between disciplined inquiry and teacher inquiry. *ZDM Mathematics Education,* 53, p. 1085–1096.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving. In L. B. Resnick & L. E. Klopfer (Eds.). *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development, p. 83-103.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), p. 19–28.

Wagner, J. (1997). The unavoidable intervention of educational research: A framework for reconsidering researcher-practitioner cooperation. *Educational Researcher,* 26(7), p. 13–22.

La modelación geométrica en la resolución de problemas de teoría de grafos en un contexto auténtico

Luz Marina **Fonseca** Vizcaya
Institución educativa Nuestra Señora de la Salud
Universidad Antonio Nariño
Colombia
gaempa@yahoo.es

Osvaldo Jesús **Rojas** Velázquez
Universidad Antonio Nariño
Colombia
orojasv69@uan.edu.co

Resumen

Desarrollar el pensamiento matemático es fundamental para el avance del ser humano, pues influye de manera significativa en el progreso individual y de las sociedades. Con el propósito de desarrollar habilidades de visualización, creación de sentido y la resolución de problemas retadores, se busca modelar geométricamente conceptos de la teoría de grafos, usando un contexto extra-matemático real auténtico. Aunque los estudiantes no tienen conocimientos previos sobre teoría de grafos, se presenta una oportunidad para conocerla. Este estudio se desarrolla con escolares de edades entre los 13 y 15 años del grado octavo de la básica secundaria en una institución pública, donde se usa una metodología cualitativa. En esta medida, se evidencia que la teoría de grafos y la modelación geométrica tienen una estrecha relación, que puede robustecer las habilidades matemáticas y heurísticas fundamentales para la construcción del saber y el sentido matemático.
Palabras clave: Educación Matemática; Educación secundaria; Enseñanza presencial; Modelación; Resolución de problemas; Investigación Cualitativa; Matemáticas; Supatá; Colombia.

Introducción

El abordaje en la escuela de situaciones problémicas centradas en el mundo real es un procedimiento vital para la proximidad al conocimiento matemático y una oportunidad para

poner en práctica todo lo aprendido. Uno de los procesos que lo dinamiza es la resolución de problemas retadores, apoyados indudablemente por la modelación.

Estas temáticas se ven reflejadas en diferentes congresos y reuniones: el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) en el Topic Study Groups (TSG) 9 y 23 tiene como eje el análisis de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en secundaria, vinculación del modelado y la resolución de problemas. En el TSG 17 se centra en el planteamiento y la resolución de problemas como clave para el desarrollo del pensamiento matemático. En el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME) en el Thematic Working Groups (TGW) 4 y 24 se abordan procesos investigativos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la geometría en temas como: el modelado y la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Es de resaltar que en la Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM) se exponen reflexiones y experiencias didácticas acerca de la resolución de problemas y la modelación matemática en los procesos educativos.

Además, en las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME) en el ALME 35 (2022) se abordan los campos de pensamiento geométrico, la resolución de problemas, la visualización para la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la escuela secundaria. También, se exponen estudios relacionados con modelación matemática y geométrica. En todas estas reuniones se presentan ponencias, cursos y conferencias, que reflejan los avances y oportunidades de mejora en la resolución de problemas a través de la modelación geométrica en la escuela, lo cual evidencia la pertinencia y actualidad de la temática.

Por tanto, existe una conexión esencial entre la resolución de problemas y la modelación. El modelado apunta a relacionar el mundo real y las matemáticas, desarrollando en los estudiantes potencialidades en su pensamiento. Por ende, propiciar espacios en el aula para modelar, concede a los estudiantes desarrollar destrezas de predicción, explicación y dar solución a situaciones en un contexto auténtico y natural.

El presente estudio contribuye al desarrollo del pensamiento matemático a través de actividades que usan la modelación geométrica en la resolución de problemas retadores. Por consiguiente, un proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, donde se considere la resolución de problemas, a través de la modelación geométrica, requiere de una metodología que integre los dos procesos en toda actividad matemática. Esta integración permite el desarrollo oportuno y adecuado del saber matemático, donde se fortalece el aprendizaje significativo y el interés por el conocimiento de los estudiantes.

Marco teórico

Reconociendo que la modelación geométrica es intrínseca a la modelación matemática, se abordan algunas definiciones dadas por autores que han involucrado la modelación geométrica en la práctica educativa. Por su parte, para Alsina (2008); Zapata, Cano, & Villa (2017); Herbst & Boileau (2018), entre otros, reconocen la modelación geométrica como un proceso que dado a sus conocimientos concibe la creación de un modelo con elementos geométricos para representar de objetos de la realidad y llegar a la solución de un problema. En este estudio la modelación

geométrica se establece como: un proceso intencional de representación, donde se utilizan conocimientos y recursos para llevar a cabo el análisis, formulación y elaboración de un modelo, el cual, brinda elementos para hacer inferencias, que favorecen la solución de un problema en un contexto geométrico.

El proceso de modelación geométrica que se trabaja en este estudio tiene relación con un campo de modelado extra-matemático, de forma intencional. En este caso, los estudiantes hacen uso de sus habilidades y conocimientos geométricos, para abordar un problema retador, con el propósito de vincular situaciones cercanas que apoyen el aprendizaje. Considerando los resultados investigativos de Bliss y Libertini (2020), Stillman (2015) y Niss, Blum & Galbraith (2007) el modelado es el medio para relacionar la matemática, la realidad, y despertar el interés en el estudiante por conocer temas matemáticos.

Para Schoenfeld (2016) aprender a pensar matemáticamente tiene dos tipos de significados: el primero hace relación al punto de vista matemático, a la valoración que debe darse a los procesos de matematización, abstracción y habilidad para aplicarlos. El segundo aborda el desarrollo de competencias para usar herramientas con el objetivo de comprender, ambos tipos se dirigen a la creación de sentido matemático, para percibir y usar las matemáticas de manera significativa. En cuanto, al Sense Making en la educación matemática se dirige a desarrollar la comprensión de una situación, contexto o significado a partir de los conocimientos ya construidos. “En cuanto al modelado matemático esta creación de sentido puede presentarse en el contexto de una tarea o aplicación, dándole sentido a una situación del mundo real”. En relación, Odden & Russ (2019) manifiesta que la creación de sentido y el modelado tienen un mismo propósito, construir nuevos conocimientos y la comunicación de nuevas ideas.

La teoría de grafos se reconoce como una rama de las matemáticas y la computación, tiene como objetivo primordial estudiar características y propiedades de los grafos. Un grafo es en sí una estructura matemática formada por vértices y aristas que favorece la modelación de problemas de la cotidianidad cuando se requiere establecer relaciones, además instaura conexiones fuertes con la geometría dado que un grafo es de manera básica un objeto geométrico (Vanegas et al, 2013). Por su parte, la teoría de grafos puede ser desarrollada en la escuela secundaria, dado que no demanda conocimientos anticipados, pero sí desarrolla estrategias que apoyan la resolución de problemas (Nouche, 2008). Por consiguiente, puede ser un escenario apropiado que permite integrar procesos matemáticos como la resolución de problemas y la modelación (Vanegas et al, 2013). De esta manera, los grafos son representaciones significativas para modelar diversas situaciones retadoras en contextos auténticos o simulados. Por lo que, la teoría de grafos es una valiosa herramienta de modelado matemático (Smithers,2005). En esta medida, construir modelos y solucionar problemas mejoran habilidades que favorecen el razonamiento abstracto, permitiendo que los estudiantes vinculen los conocimientos informales y los formales de la matemática, de tal manera que apoya a una mejor disposición para el aprendizaje y avancen en sus niveles de desempeño (Braicovich, et al., 2008).

Metodología

Este estudio se desarrolla con estudiantes de secundaria, de la Institución Educativa Nuestra Señora de la Salud (Colombia). Se fundamenta en un paradigma y enfoque cualitativo

centrada en los sujetos de forma integral y completa, abarcando un proceso de indagación inductivo, de interacción con los participantes, analizando los datos descriptivos recolectados, a raíz del avance de los acontecimientos. La muestra es seleccionada por conveniencia, atendiendo características específicas del grupo, la condescendencia y oportunidad de acercamiento por parte de la investigadora. Por tanto, se trabaja con 30 estudiantes del grado octavo, con edades entre los 13 y 15 años, organizados en 10 grupos de tres estudiantes.

En esta investigación se pretende construir conceptos, haciendo uso de la modelación geométrica a partir de problemas retadores, que vinculan la teoría de grafos. De esta manera, se presenta una actividad a los estudiantes que consta de título, objetivo, surgencias metodológicas, materiales a utilizar y el desarrollo de la actividad (basado en problemas). Estos problemas responden a la pregunta ¿Cómo los estudiantes por medio del modelado geométrico pueden construir el concepto de camino y ciclo hamiltoniano? Además, se les entregó a los estudiantes dos problemas, para una mayor comprensión, se les presentó el mapa del municipio (Google Maps) y el mapa general de vías (ver figura 1) con calles y carreras. El objetivo del mapa de vías fue presentar al estudiante grafos sin decírselo y que en este mismo enfoque puedan encontrar respuestas a los problemas, sin embargo, esto lo sabrían los estudiantes por descubrimiento. También se usa un software online para validar los modelos ideados por los estudiantes en el proceso de resolución de los problemas.

Con respecto al problema uno, se pretende que los estudiantes puedan construir el concepto de un camino hamiltoniano y con el problema dos se quiere que los estudiantes construyan el concepto de ciclo hamiltoniano. Se les propuso a los estudiantes algunas orientaciones que le ayudaron a tomar decisiones en el proceso de resolución por si solos. Se les sugiere que consideren escoger la ruta más corta, pasar por calles y carreras, empezar el desplazamiento en un lugar del municipio y terminar en otro, también empezar y terminar en el mismo sitio, tener en cuenta el tamaño de las calles y carreras del mapa. Además, se les solicitó pensar en ¿qué características debe tener el desplazamiento? y ¿qué información necesitan para resolver el problema? A continuación, se presentan los dos problemas propuestos en la actividad.

Figura 1. Mapa de Supatá (Google Maps) y mapa vial elaboración propia.

Problema 1: En Supatá se hacen brigadas de vacunación a niños menores de 10 años. Se ha determinado que al menos vive un niño en una calle o carrera del municipio, por tanto, la alcaldía dispone de un vehículo para transportar los insumos y la enfermera en la ruta más corta. Se quieren vacunar 10 niños por día. ¿Cuál sería el desplazamiento conveniente que debe

realizarse en ese día? Piensa en ¿Qué características debe tener el desplazamiento?, ¿qué información necesitas para resolver el problema?

Problema 2: En el segundo día de la brigada es necesario empezar y terminar la vacunación en el mismo lugar, como mínimo se debe vacunar 6 niños, aunque pueden ser más. ¿Cuál sería el desplazamiento apropiado que debe realizarse en ese día?

Los datos fueron recolectados por medio de la grabación de voz de algunas conversaciones realizadas con los grupos, las exposiciones hechas por los estudiantes tomando uno a uno los registros al respecto, las evidencias entregadas en físico que fueron revisadas minuciosamente, una bitácora de trabajo de campo en la cual se escribió los hallazgos más relevantes y de los tiempos empleados por los estudiantes en cada uno de los ciclos del modelado y una encuesta escrita a estudiantes que contiene elementos sobre la cognición y la metacognición. En esta medida, se proponen unos criterios que permiten orientar el análisis de las evidencias aportadas por los estudiantes (ver tabla 1).

Tabla 1
Categorías en la construcción de conceptos en un modelo geométrico

Criterios para camino y ciclo hamiltoniano	
Vértice - arista	Vincula notaciones usadas para reconocer el vértice de un grafo.
Medida	Considera la longitud de las vías para determinar la ruta más corta.
Pertinencia	Incluye la determinación sobre la congruencia del grafo elaborado.
Complejidad	Relaciona el alcance de la elaboración de un grafo que aporte a la solución.
Camino	Enlaza la capacidad de elaborar un camino hamiltoniano que apoya a la solución del problema.
Ciclo	Reúne el alcance al establecer un ciclo hamiltoniano que da interpretación a la solución.
Sentido	Vincula el proceso de dar sentido a su experiencia y alcanzar conocimientos de una disciplina.
Generalización	Concibe la capacidad de poder relacionar el modelo en otros contextos.

Resultados

En el proceso de resolución de los problemas los modelos de rutas construidos por los estudiantes son diversos, cada equipo de trabajo toma diferentes zonas del municipio. Los grupos idearon mentalmente diversos modelos que fueron plasmando en hojas de papel (ver figura 2), utilizaron diferentes representaciones, las cuales iban descartando porque no los conducía a la solución del problema. Con respecto al problema uno y la construcción del concepto de camino hamiltoniano, los estudiantes debían mostrar en su modelo y solución una ruta que empezara en un lugar y terminara en otro cruzando por calles y carreras, así pasaría por todos los vértices una sola vez, además de encontrar la ruta más corta. Ante el problema dos y el concepto de ciclo hamiltoniano la ruta elegida debía empezar y terminar en el mismo sitio, pasar por calles, carrera y vértices una sola vez. Los estudiantes para poder llegar a la simplificación tuvieron que observar detenidamente los mapas, ellos aluden a que el problema está enmarcado en un contexto reconocido por ellos y que esto les haría más fácil buscar la solución.

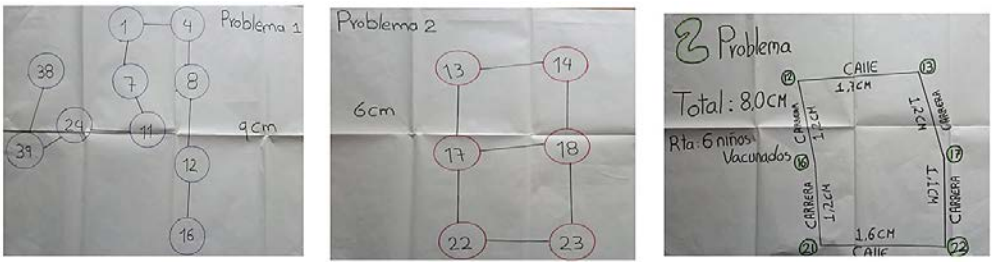


Figura 2. Modelos de camino y ciclo hamiltoniano

Con respecto a la matematización los estudiantes hacen uso de sus conocimientos geométricos para buscar solución a los problemas. En cuanto al problema dos, se toma el concepto de perímetro de una figura plana para buscar un ciclo hamiltoniano (ver figura 2), que representa la ruta más corta, es así como incorporan diferentes figuras planas irregulares y en algunos usan las nociones de paralelismo, además toman conocimientos sobre métrica haciendo uso de medidas a escala.

Algunos equipos de trabajo no determinan la ruta más corta, pero establecen una característica fundamental que es pasar por todos los vértices del grafo que delimita la zona seleccionada, lo que intentan hacer es reconocer cuales calles y carreras son las más cortas de todo el municipio, sin embargo, eso no fue garantía para dar la mejor solución al problema planteado (ver figura 3), buscaron calles y carreras paralelas con las mismas medidas, tratando de garantizar la mejor respuesta. Otros modelos creados por los equipos tienen la ruta más corta, pero no cumple con el concepto de ciclo, debido que deja sin recorrer algunos vértices (ver figura 3).

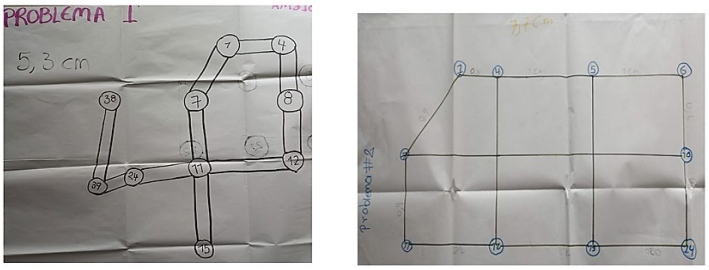


Figura 3. Modelos de grafos que no tienen camino ni ciclo hamiltoniano

A partir de la observación, la revisión de las producciones y las entrevistas de campo con los estudiantes, se evidencia el reconocimiento de vértice y arista e incluso representan un grafo en su modelo (las calles y carreras fueron sus aristas y sus intersecciones los vértices), todos los grupos desarrollan la habilidad de identificar estos conceptos aun siendo llamados en sus lenguajes cotidianos. En este sentido, contrastan estos conceptos luego de que se les orienta sobre sus nombres en teoría de grafos cuando se trabaja con el software en línea, los relacionan con facilidad al problema planteado y a los mediadores visuales dados (mapas).

Entonces, cuando validaron sus modelos con el software en línea pudieron identificar si sus modelos era un camino o ciclo hamiltoniano, fue en ese momento que los estudiantes relacionaron estos conceptos y llegaron a la comprensión de ellos (ver figura 4).

*Figura 4.*Validación del modelo geométrico para camino y ciclo hamiltoniano

Por otra parte, los equipos de trabajo pudieron reconocer que existían diversas maneras de resolver los problemas abordados, las rutas establecidas no fueron iguales. En este sentido, identifican que sus pares construyeron diversos caminos y ciclos, encontrando rutas diferentes que permitían dar solución a los problemas dados (ver figura 5).

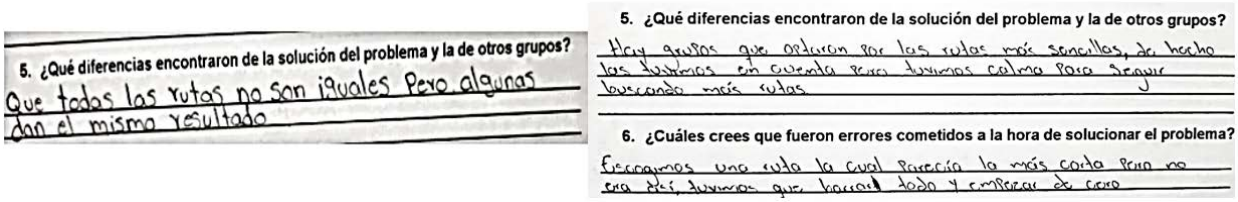


Figura 5. Descripción de diferencias de los modelos

Conclusiones

Los resultados obtenidos en esta investigación permiten destacar lo siguiente:

Se identifica una conexión entre el modelado geométrico y los problemas reales. Por tanto, los estudiantes logran utilizar conceptos geométricos para aplicarlos a la solución de problemas reales, que tienen relación con la teoría de grafos.

No se requieren conocimientos previos de la teoría de grafos para el abordaje del problema (Greefrath et al, 2022), sin embargo, todas las presentaciones y la estructura del problema debe aportar a la comprensión y así poder pasar por todas las fases del modelado, las cuales permiten el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas.

Se evidencia que el trabajo de los estudiantes fue motivador, en este sentido usan conocimientos previos sobre geometría para apoyar la solución de un problema de matemática discreta. Por otra parte, muestran comprensión de una situación a partir de los conocimientos ya construidos creando sentido a una situación real (Odden & Russ, 2019).

En relación, la modelación geométrica permite que los estudiantes comprendan realmente el concepto, lo interioricen y lo usen para resolver problemas. Así mismo, favorece la construcción de modelos levantando sus propiedades geométricas conceptuales para luego establecer las variables necesarias, por medio de tres características principales: la visualización,

técnicas algebraicas de operalización (matematización) y análisis de los conceptos geométricos para la abstracción por medio de exploración y conjeturas, que permite el desarrollo del pensamiento matemático.

Por su parte, los procesos de cognición que se desarrollan con el modelado son importantes para la construcción de saberes de la matemática discreta y pueden entenderse en base a la metacognición que se adelanta con los estudiantes, estos dos procesos permitieron conocer cómo los estudiantes construyen conocimiento y cuáles son las partes más débiles en el proceso y cómo deben mejorarse.

Referencias y bibliografía

Alsina, C. (2008). Geometría y realidad. *En revista Sigma* (33), 165-179.

Bliss, K. y Libertini, J. (2020). *Lineamientos para la evaluación e instrucción en la educación en modelación matemática.* Gaimme. Society for industrial and applied mathematics (SIAM). https://www.siam.org/Portals/0/Publications/Reports/GAIMME_2ED/GAIMME_en_espan%CC%83ol.pdf

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (2007). Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study (Vol. 10*). MA: Springer US*. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_59

Braicovich, T., Oropeza, S. y Cerda V. (2008). Un desafío: incluir grafos en los distintos niveles educativos. *Memorias del II REPEM* .70-76. http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem08/memorias/talleres/T11.pdf

Herbst, P. y Boileau, N. (2018). Geometric modeling of mesospace objects: A task, its didactical variables, and the mathematics at stake. *In Visualizing Mathematics Springer, Cham*. 280. https://doi.org/10.1007/978-3-319-98767-5_13

Greefrath, G., Hertleif, C. y Siller, H. (2018). Mathematical modelling with digital tools—a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM, 50(1-2),* 233-244. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0924-6

Nouche, F. (2008). Teoría de grafos: propuesta para escuela secundaria. *Premisa*, 10(39). http://funes.uniandes.edu.co/23043/1/Nouche2008Teoria.pdf

Odden, T. y Russ, R. (2019). Defining sensemaking: Bringing clarity to a fragmented theoretical construct. *Science Education,* 103(1), 187-205. https://doi.org/10.1002/sce.21452

Stillman, G. (2015). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt? In Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education. *Springer, Cham*, 791-805. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_44

Schoenfeld, A. (2016). *Mathematical thinking and problem solving*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315044613

Smithers, D. (2005). *Graph theory for the secondary school classroom* [Doctoral dissertation, East Tennessee State University]. https://search.proquest.com/openview/4b0b670c58ff4033e22c81a21a38538d/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y

Vanegas, J., Henao, S. y Gustin J. (2013). La teoría de grafos en la modelación matemática de problemas en contexto. *Funes*, 283-290. http://funes.uniandes.edu.co/18735/

Zapata, F., Cano, N. y Villa, J. (2017). Art and Geometry of Plants: Experience in Mathematical Modelling through Projects*. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(2*)*, 585-603. https://doi.org/10.12973/ejmste/76958

Metodologia de resolução de problemas: uma leitura de mundo na educação de jovens e adultos

Waléria de Jesus Barbosa **Soares**
Universidade Estadual do Maranhão
Brasil
walleriajotabes@gmail.com
Carlos André Bogéa **Pereira**
Faculdade Laboro
Brasil
andrecabp@gmail.com

Resumo

Apresentamos uma pesquisa qualitativa de abordagem bibliográfica, cujo objetivo é refletir sobre a contextualização do conhecimento matemático para que haja aprendizagem dos estudantes da EJA, por meio da metodologia de resolução de problemas. Através de aportes teóricos como Pozo e Echeverría (1998), Skovsmose (2000), Toledo (2004) e Fonseca (2012), constatamos que os problemas matemáticos devem estar de acordo com a faixa etária desses estudantes, permeados por seus cotidianos, impregnados de seus afazeres domésticos ou atividades profissionais, proporcionando um catálogo de realidades que tira o estudante da EJA da passividade.

Palavras-chave: Didática da Matemática; Matemática; Educação Básica; Ensino; Educação de Jovens e Adultos; Pesquisa qualitativa; Matemática; Resolução de problemas; Brasil.

Introdução

A Educação de Jovens e Adultos (EJA) é uma modalidade de ensino que prioriza escolarizar pessoas que, por algum motivo ou outro, não conseguiram concluir seus estudos em tempo hábil, mas que vivem de forma ativa, fazem bom uso dos bens, serviços e das práticas sociais do dia a dia. Sobre esse contexto, Toledo (2004) diz que para usufruir de práticas sociais no cotidiano, é necessário que o sujeito saiba manejar habilidades no uso da leitura, escrita e cálculo, de modo que, as demandas de tarefas da vida social sejam realizadas sem dificuldades.

Assim, no que diz respeito às práticas sociais dos discentes da EJA, muitos realizam atividades matemáticas e nem se quer sabem que ali existe uma relação íntima com o componente curricular Matemática. O que torna instigante é que a aquisição dos conhecimentos matemáticos, em sua maioria, é resultado das práticas sociais e culturais que influenciam para uma compreensão mediana da aprendizagem em matemática.

Diante desse fato, é necessário que se façam investigações das diferenciadas metodologias para o ensino de matemática na modalidade de ensino EJA; metodologias essas, que devem viabilizar a conexão entre a vida desse estudante e o ambiente da sala de aula, com o intuito de que perceba o quão é significativa a matemática.

Nesse sentido, este texto, construído por meio de uma pesquisa qualitativa de abordagem bibliográfica, objetiva refletir sobre a contextualização do conhecimento matemático para que haja aprendizagem dos estudantes da EJA, por meio da resolução de problemas, [...] explicitando sua finalidade ou seu papel na interpretação e na transformação da realidade com o qual o aluno se depara [...] (Fonseca, 2012). Na metodologia, buscamos material escrito já publicado sobre o tema, em especial, livros e artigos. Selecionamos os materiais dos seguintes autores: Pozo e Echeverría (1998), Skovsmose (2000), Toledo (2004) e Fonseca (2012), por acreditarmos que suas ideias encontram-se próximas entre si, e entre as ideias dos autores deste texto. A partir da seleção e análise destes materiais, construímos um texto reflexivo que trata da metodologia de resolução de problemas para as aulas de Matemática no contexto da EJA, para então, sugerirmos algumas estratégias\atividades para as aulas de matemática a serem trabalhadas nessa modalidade de ensino.

Partimos do pressuposto de que a EJA não se limita ao que acontece apenas na sala de aula, por isso devemos proporcionar aos estudantes uma leitura de mundo, pois estes são sujeitos sociais, favorecendo o protagonismo e o compromisso com a transformação social, o desenvolvimento de criticidade necessária para a compreensão e atuação na sociedade em que se encontram inseridos. Nesse meio, propomos que na aula de matemática, "[...] é preciso desenvolver nos alunos a materacia, que não se refere apenas às habilidades matemáticas, mas também à competência de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela matemática" (Skovsmose, 2000).

Com a utilização da Metodologia de Resolução de Problemas, podemos proporcionar a "apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento" (Pozo; Echeverría, 1998, p. 9). Assim, acreditamos que o ensino de matemática por meio de uma visão crítica e reflexiva do mundo deve oferecer aos estudantes da EJA, ferramentas necessárias para que sua geração (e as futuras) possam lutar pelas mudanças que melhorem sua qualidade de vida.

Resolução de problemas para as aulas de Matemática

A resolução de problemas é uma metodologia de ensino onde o professor apresenta aos seus alunos situações-problema tipificadas pela investigação e exploração de novos conceitos. Essa metodologia objetiva a elaboração de definições matemáticas pelos discentes, através das

mais variadas situações que dão estímulo à aprendizagem matemática. O estudante interpreta o fenômeno matemático e procura esboçá-lo, até explicar o desenvolvimento à sua maneira, para que assim possa compreendê-lo.

Esse processo não ocorre de forma imediata, é lento e parte da necessidade do estudante de se comunicar, suscitando hipóteses e conjecturas. Nessa abordagem, os estudantes passam da condição de passivos, frente à aprendizagem matemática, para uma postura ativa e reflexiva, deixando de acreditar que possa ocorrer a absorção do processo ensino-aprendizagem da matemática apenas por sua transmissão de informações.

Para tanto, é necessário destacar o que é um problema. Aqui, compreendemos problema como qualquer situação em que a resposta não seja imediata, ou seja, exige uma maneira matemática de pensar, além de conhecimentos específicos para solucioná-la (Dante, 2005). Um problema deve ser interessante, desafiador e real. Ainda,

> [...] um problema é uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova (Vila; Callejo, 2006, p. 29).

Também é necessário compreender que trabalhar por meio da resolução de problemas não é simplesmente resolver alguns problemas de forma desarticulada ou resolver uma simples lista de exercícios. É preciso entender que há todo um planejamento, organização e intencionalidade por trás de todo esse processo. Alguns passos devem ser ponderados ou levados em consideração no que diz respeito às estratégias para a abordagem da resolução de problemas: 1. Compreender o problema; 2. Executar um plano de resolução; e, 3. Fazer um retrospecto.

Infelizmente, a maior parte dos estudantes ainda acredita que existe apenas uma forma possível de resolver problemas matemáticos. Logo, é necessário ponderar de forma coletiva, com os demais estudantes, um esboço das possíveis soluções frente à tarefa. Isso, quando feito de forma consciente, contribui para quebrar a imagem inicial do problema e atentar-se para as variadas estratégias.

O tipo de problema matemático que sugerimos aos professores na sua prática docente da EJA é aquele que tenha significado, ou seja, aquele que segundo Polya (2006), se o estudante conseguir resolver o problema que lhe é apresentado, terá acrescentado alguma coisa à sua capacidade de resolver problemas. Nesse contexto, o papel do profesor da EJA é de suma importância para o desenvolvimento dessa metodología, pois é ele quem vai ouvir, dialogar, encontrar o melhor caminho, lembrando que seu aluno é um adulto.

As competências adquiridas devem servir para aquisição de habilidades na resolução de outras situações desafiadoras que são apresentadas e que os estudantes consigam através dos conceitos adquiridos, realizar procedimentos para resolver futuros problemas que exijam um inter-relacionamento entre os vários conceitos e suas aplicabilidades.

Vale destacar a importância de Polya para nosso entendimento da metodologia de resolução de problemas. Polya ganhou sua maior importância nos anos 1960, quando educadores começam a centrar sua atenção sobre os processos ou procedimentos usados pelos estudantes para resolver problemas. O ensino tinha, então, como foco, as estratégias e os procedimentos utilizados para se chegar à resposta. A resposta em si tornou-se menos relevante do que o processo. Essa concepção de resolução de problemas baseia-se na crença de que, ao entender como se resolvem problemas, é possível ensinar a outros como fazê-lo.

Até por volta do século XX, a ideia predominante que tínhamos de Resolução de Problemas baseava-se em resolver problemas de ordem prática, mas não como metodologia de ensino. Van de Walle, outro estudioso, em 2001, discutiu e nos fez refletir que é preciso entender que ensinar Matemática, por meio da resolução de problemas, não é simplesmente tentar resolver um problema sem uma estruturação. Ao contrário, o profesor deve ter todo um rigor metodológico.

O contexto da EJA nas aulas de matemática

No caso da EJA, devemos partir dos conhecimentos prévios dos estudantes, pensar no antes, durante e depois da atividade desenvolvida por meio dessa metodologia. Devemos garantir que, primeiramente, os estudantes da EJA estejam mentalmente prontos e assegurar que o problema esteja claro; na segunda fase, proporcionar que os estudantes trabalhem e haja constantemente, ao longo do processo, uma avaliação desse trabalho; e na última fase o professor apresenta as diversas soluções encontradas e propõe discussões e reflexões. Por fim, o professor formaliza os novos conceitos e conteúdos matemáticos trabalhados.

Ainda que a Base nacional Comum Curricular não tenha sido escrita para a modalidade EJA, destacamos o que este documento apresenta a resolução de problemas como um dos "processos de aprendizagem potencialmente rico para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional" (Brasil, 2018, p. 266).

Consideramos então que aprender a pensar em Matemática e construir a linguagem específica dessa área do conhecimento exige transformar a sala de aula em espaço onde se simula o fazer e o pensar matemático. Isso significa criar situações para problematização constante, incentivando o estudante da EJA a refletir, pensar por si mesmo, persistir.

É preciso deixar claro que não estamos simplesmente falando de qualquer metodologia de ensino de matemática na EJA. A resolução de problemas é uma metodologia com todo o processo de estruturação do problema, do antes, durante e depois. Assim, a resolução de problemas possibilita aos estudantes mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance (Brasil, 1998).

Para esse processo, sugerimos seguir os seguintes passos, onde: 1. Identifiquemos o problema e seu tipo; 2. Vejamos a definição de problemas; 3. Construamos uma estratégia para a resolução para o problema, e aqui precisamos organizar as informações e saber quais os recursos

que posso utilizar para resolver esse problema, além de acompanhar o processo de resolução do problema; e por fim, 4. Avaliarmos se o problema foi de fato resolvido de forma satisfatória.

Quanto aos tipos de problemas, destacamos os convencionais e os não convencionais. Sobre os problemas convencionais, podemos dizer que são exercícios de aplicação ou de fixação de técnicas ou regras. Neles, os textos são na forma de frases, diagramas ou parágrafos curtos; os problemas vêm sempre após a apresentação de determinado conteúdo; todos os dados de que o resolvedor necessita aparecem explicitamente no texto e, em geral, na ordem em que devem ser utilizados nos cálculos; os problemas podem ser resolvidos pela aplicação direta de um ou mais algoritmos; a tarefa básica na sua resolução é identificar que operações são apropriadas para mostrar a solução e transformar as informações do problema em linguagem matemática; a solução sempre existe e é única. Já nos problemas não-convencionais temos aqueles que rompem com as características de um problema convencional. Problemas não necessariamente relacionados a um conteúdo específico; problemas com várias soluções; problemas com excesso de informações e aqueles apresentados com diferentes tipos de textos permitem ao estudante desenvolver sua capacidade de leitura e análise crítica, pois, para resolver a situação proposta, é necessário voltar muitas vezes ao texto para lidar com os dados e analisá-los, selecionando os que são relevantes e descartando os supérfluos.

Possibilidades para as aulas de matemática

Na EJA, algumas estratégias nas aulas de matemática podem facilitar o processo de aprendizagem dos estudantes, além de proporcionar maiores discussões e reflexões sobre as diversas possibilidades de resolução dos problemas. Apresentamos a seguir, quatro problemas que foram elaborados pelos autores e podem ser levados para a sala de aula de matemática (ensino fundamental ou ensino médio). Acreditamos que eles ajudam a desenvolver a aprendizagem matemática, através da utilização de esquemas, tabelas, diagramas e desenhos para auxiliar nas resoluções.

O primeiro problema apresenta uma situação de combinatória que pode fazer parte do cotidiano dos estudantes:

Problema 1: Rita comprou duas calças jeans, uma azul e uma preta, e três camisas, uma verde, uma branca e uma amarela. De quantas maneiras diferentes Rita poderá se vestir?

Figura 1. Um possível esquema de possibilidades
Fonte: Os autores.

Esse tipo de problema proporciona ao estudante a percepção de que ele [...] desenvolve seu raciocínio participando de atividades, agindo e refletindo sobre a realidade que o cerca, fazendo uso das informações de que dispõe (Smole; Centurión, 1992, p. 9). É o cotidiano levado para sala de aula.

Podemos também, recorrer a uma estratégia que proporciona uma visão invertida do processo, que é resolver o problema do fim para o início. Veja o problema que envolve operações aritméticas:

Problema 2: Gabriel levou um saco com pregos para fazer uma construção com os amigos do trabalho. Ao primeiro grupo de amigos que encontrou deu metade dos pregos, depois encontrou mais alguns num segundo grupo, a quem deu metade do que ainda tinha, ou seja, 20 pregos. Com quantos pregos João chegou na construção?

20 → 20 x 2 = 40 → 40 x 2 = 80

Figura 2. Um possível caminho de resolução
Fonte: Os autores.

Esse tipo de estratégia, às vezes, é bem mais interessante do que seguir o processo usual. É permitida quando o professor aceita seu papel de incentivador, facilitador, mediador das ideias apresentadas pelos estudantes, de modo que estas sejam produtivas (Soares; Bertoni Pinto, 2001). Os estudantes são levados à reflexão, gerando assim, seus próprios conhecimentos.

Outra estratégia que podemos utilizar na resolução de problemas na EJA é a utilização de regularidades, que possibilita generalizações por meio do processo gradativo das situações particulares, de modo a fazer com que os estudantes construam suas próprias conjecturas e generalizações, como no problema a seguir, que envolve lógica e geometria:

Problema 3: Quantas partes se obtém dobrando uma folha ao meio por 8 vezes consecutivas?

Número de dobras	0	1	2	3	4	...	8
Quantidade de partes	1	2=1x2	4=2x2	8=2x2x2	16=2x2x2x2	...	256=2x2x2x2x2x2x2x2

Figura 3. Um possível quadro de regularidades observadas
Fonte: Os autores.

Esse tipo de problema não é algo que o estudante resolve com uma fórmula. Ele precisa pensar, ele é instigado a raciocinar.

> Essa estratégia está centrada na ideia de superação de obstáculo pelo resolvedor, devendo, portanto, não ser de resolução imediata pela aplicação de uma operação ou fórmula conhecida, mas oferecer uma resistência suficiente, que leve o resolvedor a mobilizar seus conhecimentos anteriores disponíveis, bem como suas representações, e seu questionamento para a elaboração de novas ideias e de caminhos que visem a solucionar os desafios estabelecidos pela situação problematizadora, gerando então novas aprendizagens e formas de pensar (Smole, 2010, p. 12).

Resolver problema se torna assim desafiador, o que também exige capacidade de concentração e compreensão.

Uma outra estratégia utilizada na resolução de problemas de matemática na EJA é a utilização do Painel de Soluções que pode ser construído a partir da coleta das diferentes soluções apresentadas pelos estudantes para um mesmo problema. Por exemplo:

Problema 4: Durante a aula de matemática, a professora Margarida colocou no quadro uma expressão e pediu que os alunos resolvessem. Observem que Lucas e Lorena resolveram de formas diferentes e chegaram ao mesmo resultado. Qual o caminho que cada um seguiu?

Lucas

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{16}{20}=$$
$$\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{16}{20}=$$
$$\frac{5}{4}\cdot\frac{16}{20}=\frac{80}{80}=1$$

Lorena

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{16}{20}=$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{20}+\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{20}=$$
$$\frac{16}{40}+\frac{24}{40}=\frac{40}{40}=1$$

Figura 4. Possíveis respostas encontradas
Fonte: Os autores.

Ao utilizar o painel de soluções como estratégia para organização das respostas dos problemas e a forma como o professor conduzirá os questionamentos sobre este problema faz com que percebamos que o papel do professor nesta metodologia muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, controlador, incentivador da aprendizagem (Souza; Nunes, 2004).

Colocadas em um papel ou coladas no quadro, a visualização do painel de soluções possibilita à turma conhecer os diferentes caminhos encontrados para resolver uma mesma situação, favorecendo uma rica discussão sobre os conteúdos trabalhados.

Considerações Finais

Diante de todas as considerações aqui apresentadas, acerca da resolução de problemas, notamos a importância de que o professor que ensina matemática na EJA conheça essa metodologia, para que seu trabalho na sala de aula seja de mediação, centrado no estudante, que já não é mais criança.

Apesar de os problemas aqui apresentados serem apenas sugestões (não terem sido ainda aplicados), acreditamos na sua relevância. Para isso, enfatizamos que devem estar de acordo com a faixa etária dos estudantes, permeados por seus cotidianos, que em sua maioria estão impregnados de seus afazeres domésticos ou atividades profissionais.

Objetivamos o fortalecimento da premissa de que é necessário levarmos a metodologia da resolução de problemas para as aulas de matemática da EJA e acreditamos que alcançamos este fim, ainda que acreditamos que para isso, é necessário que professores reflitam sobre seu papel,

sobre quais metodologias estão utilizando e se as mesmas surtem resultados de aprendizagem em matemática.

Estudantes da EJA necessitam de estímulo, precisam se sentir como fazedores do processo educativo e, ainda, devem ter gosto pela matemática. Esta por sua vez, deve ser apresentada de forma prazerosa, associada às suas realidades. A resolução de problemas ajuda a tirar o estudante da EJA da passividade, faz com ele pense, busque caminhos. Se utilizada da forma correta, é capaz de desenvolver aprendizagem matemática significativa, numa modalidade tão carente daquilo que lhe faz sentido.

Referências e bibliografia

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Ensino Fundamental (versão final). Brasília: MEC. Disponível em: http://bit.ly/2JHIwZz. Acesso em: 11 jun. 2022.

_____. (1998). Secretária de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília: MEC.

Dante, L. R. (2005). *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. 12 ed. São Paulo: Ática.

Fonseca, M. C. F. R. (2012). *Educação Matemática de Jovens e Adultos*. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Nunes, C. B; Souza, A. C. P. (2004). *A Resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática em sala de aula*. UNESP, Rio Claro – SP. Disponível em: www.sbem.com.br/files/ix_enem/Minicurso/Resumos/MC65873300534R.doc. Acesso em: 25 jun. 2022.

Polya, G. (2006). *A arte de resolver problemas*. (Trad) Araújo, H. L. de. Rio de Janeiro: Interciência.

Pozo, J. I.; Echeverría, M. D. P. P. (1998). *Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender*. In: POZO, J. I. A solução de problemas: aprender a resolver, resolver a aprender. Porto Alegre: Artmed.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*. Rio Claro, v.13, n. 14., p. 66-91. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/ 10635/7022. Acesso em: 15 jun. 2022.

Smole, K. C. S. (2010). *Resolução de Problemas e Pensamento Matemático*. Disponível em: <http://www.edicoessm.com.br/sm_resources_center/somos_mestres/formacao-reflexao/afrevistavj-2010.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2022.

Smole, K. C. S.; Centurión, M. (1992). A matemática de jornais e revistas. *RPM*, n. 20, 1º quadrimestre.

Soares, M. T. C., Pinto, N. B. (2001). *Metodologia da resolução de problemas*. In: 24ª Reunião ANPEd, Caxambu. Disponível em: http://www.anped.org.br/reunioes/24/tp1.htm#gt19. Acesso em: 04 set. 2008.

Toledo, M. H. O. (2004). Numeramento e escolarização: o papel da escola no enfrentamento das demandas matemáticas cotidianas. In: FONSECA, M. C. F. R. [org.]. *Letramento no Brasil*: habilidades matemáticas. São Paulo: Global.

Vila, A.; Callejo, M. L. (2006). *Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas*. Porto Alegre: Artmed.

Modelación en la clase de álgebra lineal mediada por GeoGebra: eigenvalores y eigenvectores

Alexander **Betancur Sánchez**
Escuela de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Edumat-UIS
Colombia
albetsan@correo.uis.edu.co

Resumen

Se presenta algunos resultados de un estudio que involucra la enseñanza de los conceptos de eigenvalor y eigenvector mediante situaciones de modelación desde la perspectiva de Modelos y Modelación y la teoría APOE. Los datos provienen de las producciones de 30 estudiantes de los programas de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (STEM por sus siglas en inglés). En los se resultados muestran la movilización de diferentes construcciones mentales y momentos donde los estudiantes refinan, comunican, simulan y generalizan modelos para la situación propuesta apoyados en la mediación de GeoGebra. Así la situación de modelación se manifiesta como un rico escenario para el aprendizaje de eigenvalores y eigenvectores en $\mathbb{R}^2$ y otros conceptos como operadores lineales, base y ortogonalidad.

Palabras Clave: Educación superior; Educación matemática; Enseñanza presencial; Teoría APOE; Modelos y Modelación; Álgebra Lineal; Eigenvalores y Eigenvectores; GeoGebra

Introducción

El álgebra lineal hace parte de los cursos básicos para los estudiantes de las áreas STEM. Una gran mayoría de los estudiantes que cursan álgebra lineal sienten haber aterrizado en un mundo nuevo; muy distinto a las matemáticas de la escuela (Dorier et al., 2000). En particular, para los conceptos de eigenvalores y eigenvectores el énfasis exclusivo en el lenguaje formal y los procedimientos algorítmicos terminan por opacar los significados, conexiones, relaciones geométricas y a su vez la comprensión de los mismos (Thomas y Stewart, 2011). Al respecto, algunas investigaciones han presentado propuestas para el aprendizaje de eigenvalores y

eigenvectores con aplicaciones en áreas como la física (Beltrán-Meneu et al., 2017) y el uso de ambiente de geometría dinámica (Orozco et al. 2018). Por otra parte, se han reportado situaciones de modelación para la enseñanza de eigenvalores y eigenvectores desde la economía y la representación matricial (Salgado y Trigueros, 2015). Desde la representación geométrica, funcional y matricial de la transformación lineal Betancur et al., (2021) y Parraguez et al., (2022) han propuesto modelos cognitivos que describen la comprensión del concepto de eigenvalor y eigenvector. La presente comunicación pretende mostrar evidencia sobre una situación de modelación para el aprendizaje de eigenvalores y eigenvectores mediada por GeoGebra en el marco de lo señalado en Betancur et al., (2022) y Parraguez et al., (2022).

Elementos teóricos

El estudio reportado en esta comunicación hace uso complementario de la teoría APOE y la perspectiva de Modelos y Modelación. El rol predominante recae sobre la teoría APOE y se vincula con la perspectiva de Modelos y Modelación al usar seis principios de modelación para el diseño de situaciones de modelación.

La teoría APOE

Esta teoría, acrónimo de las estructuras mentales Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE) se basa en las ideas de Piaget sobre el desarrollo de las estructuras lógico matemáticas de un individuo, siendo la abstracción reflexiva el mecanismo principal y la interiorización, coordinación, encapsulación, tematización y reversión instancias de éste. Para hacer operativa la teoría se considera la descomposición genética (DG) donde se precisan las estructuras previas, mecanismos y construcciones necesarias para avanzar en la comprensión del concepto (Arnon et al., 2014).

La comprensión de un concepto matemático K en APOE se describe por los avances en las diferentes estructuras (Acción-Proceso-Objeto-Esquema). Para el caso del concepto de eigenvalor y eigenvector, Betancur et al., (2022) consideran que el aprendizaje inicia mediante la coordinación del Proceso múltiplo por un escalar y el Proceso de Transformación lineal (Proceso 1). Así mismo, la Acción de determinar soluciones de una ecuación vectorial de la forma $T(v) = \lambda_0 v$, con T un operador lineal o matriz asociada, λ_0 un escalar y v un vector arbitrario. Dicha Acción es interiorizada en Proceso 2, al ser coordinada con el Proceso 1 da lugar al Proceso 3 el cual permite reconocer a λ_0 como un eigenvalor de T asociado a cada vector del conjunto solución de $T(v) = \lambda_0 v$. Una concepción Proceso de espacio nulo de $T - \lambda_0 I$ al ser coordinada con el Proceso 3 mediante la contenencia de los conjuntos da origen al Proceso 4, este involucra reconocer a cada elemento no nulo de $Nul(T - \lambda_0 I)$ como un eigenvector de T asociado al eigenvalor λ_0. De esta manera el Proceso de eigenvalor y eigenvector se origina por la coordinación del Proceso 4 con el Proceso de determinante de $T - \lambda_0 I$ donde hay conciencia de la relación bicondicional de existencia entre cada eigenvalor y los respectivos eigenvectores asociados a T. La reflexión sobre el Proceso de eigenvalor y eigenvector permite vincular a todos los eigenvalores de T con el polinomio característico así, el mecanismo de encapsulación da lugar a una Concepción Objeto de eigenvalor y eigenvector (Betancur et al., 2022). Desde la teoría APOE una estructura Esquema es un conjunto de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que interactúan. Los niveles considerados para el Esquema son: *intra* [elementos

aislados, sin relaciones], *inter* [relaciones y transformaciones] y *trans* [pertinencia y alcance] (Arnon et al., 2014).

Principios para el diseño de la situación de modelación

Algunos estudios (Possani et al., 2010; Salgado y Trigueros, 2015) hacen uso complementario entre la teoría APOE con la perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh & Doerr, 2003). Los investigadores que han trabajado con esta perspectiva han establecido seis principios para el diseño de situaciones de modelación que generan modelos y se constituyen en conceptos matemáticos. Tales principios fueron propuestos (Lesh et al., 2000) y son:

Principio de realidad: busca dar sentido al problema según sus conocimientos y experiencias personales, sin embargo, debe suscitar la necesidad de elementos matemáticos de modo que la solución no sea trivial.

Principio de construcción de modelos: busca más que respuestas a preguntas, debe demandar explicaciones, predicciones, justificaciones con el fin de desarrollar un modelo para interpretar los datos y posibles procesos de solución.

Principio de autoevaluación: sugiere criterios para valorar la utilidad de las posibles soluciones con el propósito de avanzar en la elaboración del modelo y cuando es necesario un cambio de plan.

Principio de documentación: la situación determinada debe demandar que el estudiante revele explícitamente cómo está pensando, los objetivos y posibilidades de solución consideradas.

Principio de simplicidad: la situación debe ser retadora y accesible para los estudiantes, de manera que al resolverlas puedan convertirse en prototipos importantes en el aprendizaje y el modelo se puede ser reutilizado.

Principio de generalización: ¿el modelo que se desarrolla de la actividad es válido solo para la situación particular? el desarrollo del modelo debe convertirse en un nuevo objeto matemático que los estudiantes puedan aplicar.

Metodología

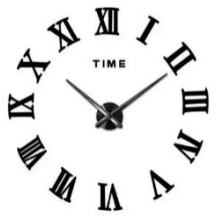
El estudio siguió el ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE el cual consiste en: Análisis Teórico que tiene como resultado una DG para la instrucción del concepto de interés [la DG en este estudio se describió brevemente en la sección de elementos teóricos], Diseño e Implementación de la enseñanza donde se desarrolla la instrucción en el aula siguiendo los momentos de trabajo en pequeños grupos alrededor de una tarea o situación, discusiones generales y tareas complementarias o ejercicios. Finalmente, la recolección y análisis de los datos en el cual se hace seguimiento a las producciones de los estudiantes y se analiza bajo el lente teórico de la DG y discusiones entre investigadores (Arnon et al., 2014). Los participantes del estudio fueron 30 estudiantes de programas STEM de un primer curso de álgebra lineal en una universidad pública colombiana. Se hizo seguimiento a fragmentos de las discusiones realizadas en el aula mediante videograbaciones y también a las producciones escritas en la implementación.

En este escrito nos ocupamos de la situación de modelación referida al diseño de un nuevo reloj.

Situación de modelación

La situación de modelación que se presenta a continuación es reportada en Betancur (2020).

Una empresa está interesada en crear nuevos diseños de relojes de pared. A usted le han solicitado diseñar un nuevo modelo de reloj cuyo contorno sea en forma de elipse y se cumplan algunas condiciones a partir posiciones relativas respecto a otro circular con 1 decímetro de radio. Si el extremo fijo de los minuteros en el reloj circular y en el nuevo diseño es el mismo y se usa esta ubicación como el origen de un plano de coordenadas los requisitos exigidos para el nuevo diseño serían los siguientes:



a). Cuando marca las 12:00 el reloj circular, la ubicación del extremo superior del minutero en el nuevo diseño deberá estar una unidad hacia arriba y otra a la derecha respecto al extremo superior del minutero en el reloj circular.

b). Si son las 3:15 en el reloj circular, la ubicación del extremo derecho del minutero en el nuevo diseño deberá estar una unidad hacia arriba respecto al extremo derecho del minutero del reloj circular.

c). Si en el reloj circular se indica 10 minutos, los minuteros de los dos diseños no pueden estar sobrepuestos.

La empresa se comunicará con usted cuando lo considere necesario. A continuación, se precisa el trabajo que usted debe realizar:

1). Encontrar un modelo para el nuevo diseño de reloj con las condiciones indicadas tal que describa como es transformado cualquier punto del reloj circular y si es el caso, explicar en qué posiciones los minuteros se sobreponen y que relación guardan.

2). Proponer otros modelos de reloj en forma de elipse tal que existan posiciones donde los minuteros se sobrepongan. Mostrar ilustraciones, describir características y condiciones para que esto ocurra y las condiciones para que la posición de las 12:00 y 3:15 en el reloj circular coincida con el eje mayor y menor respectivamente

Momentos con la situación de modelación

Los estudiantes trabajaron en grupos de tres estudiantes durante 40 minutos aproximadamente. Discutían en cada grupo las condiciones propuestas para el diseño del nuevo reloj, realizaban ilustraciones en sus hojas de trabajo para el diseño circular y el diseño en forma de elipse solicitado. Progresivamente las condiciones presentadas en el problema fueron interpretadas y codificadas usando elementos matemáticos; las posiciones de los minuteros para ambos diseños fueron asociadas con vectores bidimensionales y sus respectivas transformaciones. La profesora y el investigador permitían discusiones generales para que los estudiantes comunicaran sus estrategias y razonamientos, dichos momentos eran oportunos para ajustar estrategias o cambiarlas en caso de ser necesario, así como procedimientos equivocados. En las producciones de los estudiantes se evidenció interacciones entre elementos vinculados a los Esquemas de transformación lineal y espacio vectorial.

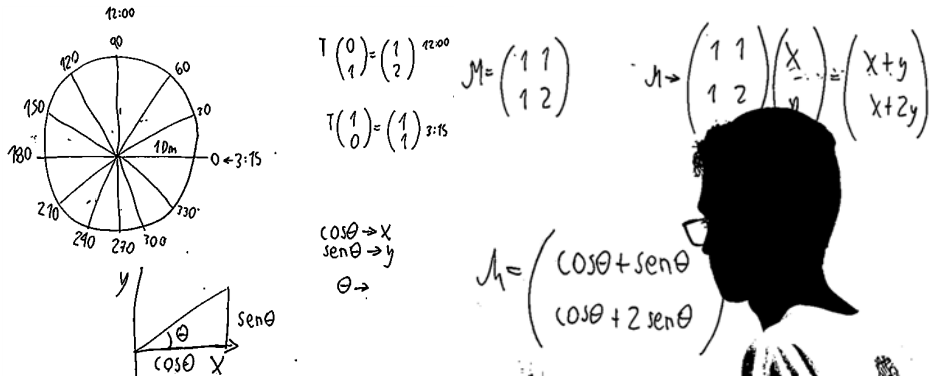


Figura 1. Producciones de los estudiantes sobre la situación de modelación.

En la figura 1 se evidencia que los estudiantes identifican la básica canónica de $\mathbb{R}^2$ y una trasformación que actúa sobre ésta según las condiciones solicitadas. También, pueden evocar una concepción Proceso de transformación lineal y de base para presentar una representación matricial respecto a la base canónica. En discusiones posteriores los estudiantes identifican la necesidad de refinar el modelo propuesto asociando las posiciones de los minuteros en el reloj circular con grados. Tal necesidad de refinar el modelo da cuenta del alcance del diseño de la situación propuesta bajo los principios de la perspectiva de modelos y modelación, así como la interacción más fuerte de elementos de los Esquemas de transformación lineal y espacio vectorial. Lo anterior permite movilizar razonamientos matemáticos más avanzados y construcciones mentales identificadas como necesarias en la DG para el aprendizaje de eigenvalores y eigenvectores.

En la sesión de clase siguiente la profesora y el investigador le facilitan al grupo un archivo de GeoGebra que presenta una simulación del diseño propuesto (ver figura 2), pero al mismo tiempo permite a cada grupo considerar otros posibles diseños de reloj en forma de elipse e investigar condiciones tal que existan posiciones donde los minuteros del reloj circular y otro diseño propuesto se sobrepongan. En la exploración del archivo en GeoGebra los estudiantes identifican como la elección distinta de una base para $\mathbb{R}^2$ y la deformación de dichos vectores determinan modelos distintos de reloj elíptico en algunos casos donde los minuteros no se superponen (figura 2b) y otros donde esto si ocurre (figura 2a).

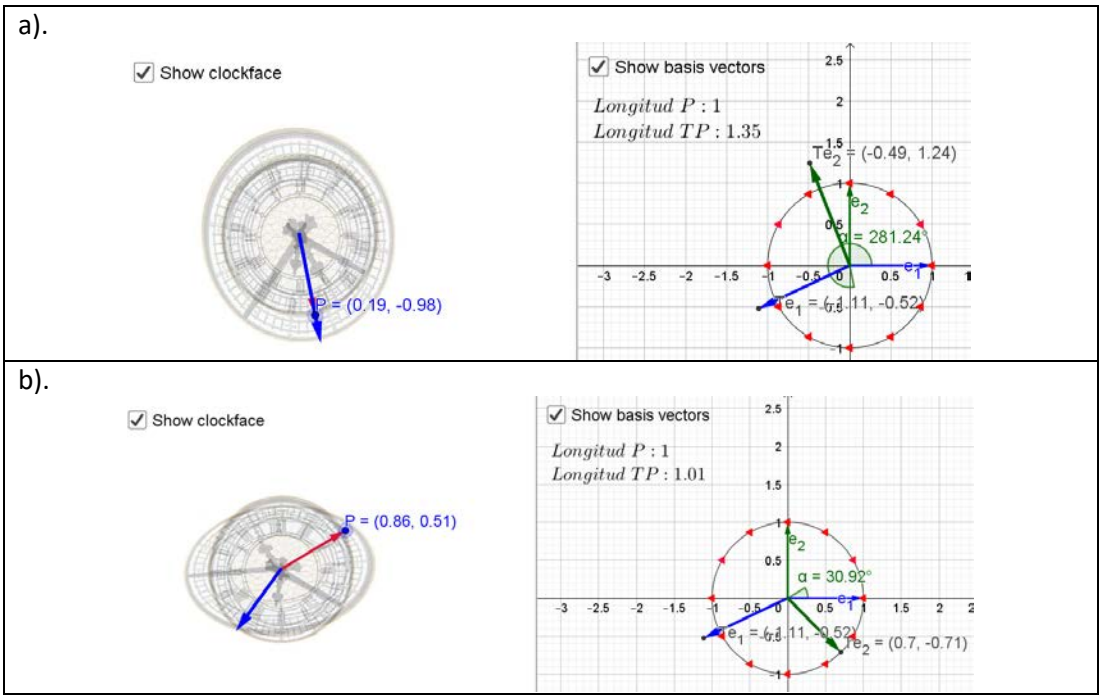


Figura 2. Propuestas de nuevos diseños de reloj en GeoGebra

Reflexiones finales

Las producciones de los estudiantes alrededor de la situación de modelación evidencian que permite movilizar formas de pensar en álgebra lineal asociadas a un Esquema de transformación lineal y Espacio vectorial en el contexto de $\mathbb{R}^2$, lo cual es clave en el aprendizaje de eigenvalor y eigenvector (Betancur et al., 2022; Parraguez et al., 2022). La actividad movilizada por los estudiantes tiene lugar en diferentes ciclos de modelación que involucraron representar, refinar, comunicar, simular y generalizar alrededor de eigenvalores y eigenvectores. La revisión de los fragmentos de videograbación y las hojas de trabajo mostraron evidencia que los estudiantes empiezan a ser conscientes con algunos diseños de la existencia de casos especiales donde los minuteros de ambos diseños se sobreponen, lo cual permite un escenario favorable para dotar de significado geométrico a los eigenvalores y eigenvectores y propiciar la coordinación entre el Proceso de transformación lineal y el Proceso de múltiplo por un escalar. Por otra parte, el uso complementario de la teoría APOE y la perspectiva de Modelos y Modelación mediante los principios de diseño de situaciones de modelación que involucra uso de entornos dinámicos como GeoGebra, deja ver la riqueza de la interacción en el aula para generar aprendizajes en un ambiente dialógico y reflexivo donde el estudiante es el protagonista. La labor conjunta entre los estudiantes, la profesora y el investigador alrededor de la situación de modelación pone en manifiesto formas de pensamiento y construcciones mentales clave en el aprendizaje del álgebra lineal entre ellos referidos a operadores lineales, bases y ortogonalidad.

Referencias y bibliografía

Arnon, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education*. New York: Springer Netherlands. DOI: 10.1007/978-1-4614-7966-6

Beltrán-Meneu, M., Murillo-Arcila, M. y Albarracin, L. (2017). Emphasizing visualization and physical applications in the study of eigevectors and eigenvalors. Teaching Mathematics and its applications 36, 123-135. Doi: 10.1093/teamat/hrw018.

Betancur, A., Roa Fuentes, S. & Parraguez González, M. (2022). Construcciones mentales asociadas a los eigenvalores y eigenvectores: refinación de un modelo cognitivo. AIEM - Avances de investigación en educación matemática, 22, 23-46. https://doi.org/10.35763/aiem22.4005

Betancur-Sanchez, A., Roa-Fuentes, S. y Ballesteros, S. (2021). Una descomposición genética preliminar del concepto de eigenvalor y eigenvector: el análisis de libros de texto como sustrato en la construcción de modelos cognitivos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 24(3), 245-276, https://doi.org/10.12802/relime.21.2431

Betancur, A. (2020). *Construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector: una experiencia con estudiantes universitarios de primer año.* Trabajo de Tesis de Maestría. Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Dorier, J., Robert, A., Robinet, R. y Rogalski, M. (2000) The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. En J.-L. Dorier (Ed.). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear algebra and its applications*, 432(8), 2100-2111. http://doi.10.1016/j.laa.2009.08.039

Lesh, R. & Doerr, H. (2003). *Beyond Constructivist: A Models & Modelling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving*. New Hampshire: Lawrence Erlbaum Associates

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A & Post, T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. In Kelly, A & Lesh, R (Eds.) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Routledge Handbooks Online. Recuperado de https://www.routledgehandbooks.com/doi/10.4324/9781410602725.ch21

Orozco, J., Cuevas, A., Madrid, H., & Trouche, L. (2018). A proposal of instrumental orchestration to introduce eigenvalues and eigenvectors in a first course of linear algebra for engineering students. *In Actes Re(s)source 2018 international conference ENS*, (pp. 320-323).

Parraguez, M., Roa-Fuentes, S., Jiménez, R., y Betancur-Sanchez, A. (2022). Estructuras y mecanismos mentales que desde una perspectiva geométrica modelan y articulan el aprendizaje de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 25(1), 63-92. http://doi.org/10.12802/relime.22.2513

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. Linear Algebra and its Applications, 432(8), 2125-2140. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.05.004

Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 100-120. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.005

Thomas, M. y Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: embodied, symbolic, and formal thinking. *Mathematics Education Research Group of Austaralasia*. 23, 275 - 296. Versión electrónica doi: 10.1007/s13394-011-0016-1.

Modelación Matemática y los Eclipses

Elizabeth **Montoya-Delgadillo**
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
elizabeth.montoya@pucv.cl
Alejandro **Cabrera-Baquedano**
Universidad Paris Cité Francia
Chile
alejandro.cabrera@pucv.cl

Resumen

En la última década en Chile la incorporación de problemas de modelación matemática ha sido fuertemente impulsados para la enseñanza de la Matemática, y más recientemente, la enseñanza interdisciplinar. Sin embargo, los profesores no siempre tienen las herramientas y la concepción clara de lo que es un problema de modelación. En este taller se presentará el fenómeno del eclipse solar y lunar, y como bajo simulaciones, estudiantes de secundaria logran comprender un fenómeno astronómico y la matemática que pueden ser aprendidos. En el taller se discutirán diferentes perspectivas de modelación matemática como la perspectiva cognitiva o realista (Blomhoj, 2009; Kaiser et al., 2006) para la enseñanza y aprendizaje de la matemática y sus implicancias. Nos parece relevante identificar objetivos de propuestas de investigación, como así también, los intereses asociados a los modelos subyacentes. Para esta parte, se cuenta con la teoría de los *Espacios de Trabajo Matemático.*

Palabras claves: Modelación Matemática; Simulación; Eclipses; Astronomía; Trabajo Matemático.

Los eclipses

Chile posee importantes centros de astronomía a nivel mundial y los últimos fenómenos de eclipses han hecho concurrir a diversos astrónomos a estudiarlos, como así también, a su

población en observarlos durante los años 2018, 2019 y 2020. Esto nos parece clave pues genera una oportunidad para que un ciudadano pueda comprender los eclipses como fenómeno astronómico y así comprendiendo la ciencia en sus formas básicas. Es inusual que eclipses totales de Sol consecutivos sean visibles en un mismo país. Sin embargo, debido a los 8.000 kilómetros de longitud que tiene Chile (al considerar la Antártica), se ha dado la posibilidad única de observar durante tres años seguidos espectaculares ocultamientos de nuestra estrella. Así, nos hemos propuesto que los docentes participantes de este taller analicen el razonamiento matemático, desde una perspectiva semiótica, instrumental y discursiva, que desarrollaron estudiantes de liceo al enfrentarse a una actividad de modelación matemática en un contexto de fenómenos reales relacionados con los eclipses, donde es esencial la simulación en la plataforma https://stellarium.org y mediciones con imágenes reales (ver Figura 1) ofrecidas por los físicos (y astrónomos) Caerols y Asenjo (2019).

Figura 1. Imágenes reales del eclipse solar año 2020 la Serena Chile. Imágenes propias de Caerols y Asenjo.

El eclipse (del griego *ἔκλειψις, ékleipsis*, que quiere decir ‘desaparición’, ‘abandono’) es el nombre que se le da al fenómeno astronómico donde 3 cuerpos celestes: estrella, planeta y satélite se alinean en un punto de sus órbitas, interponiéndose uno de estos en el camino de la luz del sol. Existen eclipses solares y lunares. En términos generales, un eclipse solar es un fenómeno que se produce cuando la Luna se interpone en el camino del astro solar, siendo visible desde la Tierra. Para que ocurra, el Sol, la Luna y la Tierra deben estar en el mismo plano, y existen totales, parciales o anulares. Un eclipse lunar se produce cuando la tierra se coloca entre la luna y el sol, de manera que la sombra generada por nuestro planeta se proyecta en el satélite, y existen penumbral, parcial y total. La diferencia visible en algunos eclipses lunares es que además de oscurecerse adquiere un color rojizo o dorado,

La astronomía puede generar diferentes instancias de aprendizaje significativo en los estudiantes al momento de emplear la matemática, y no se trata de usarla sino de comprenderla y tener la posibilidad de enseñar de manera integrada e interdisciplinar. Así, en este taller se mostrarán razonamientos de los estudiantes al comprender los eclipses y su geometría, obtener distancias como el radio de la luna utilizando proporciones, como también, comprender que el error en las aproximaciones implica un error de medidas mucho mayor al tamaño real de la luna. Por último, es importante mencionar el rol que juegan las herramientas digitales que nos permiten indagar en una enseñanza interdisciplinar. Cabe señalar, que en este caso se usará Stellarium puesto que permite a los estudiantes explorar los movimientos de los cuerpos celestes y simular el fenómeno del eclipse y, GeoGebra debido a que es un software de geometría dinámica que permite analizar matemática imágenes importadas a él, además ambos softwares son de acceso abierto.

Modelar fenómenos físicos son temas de interés para muchos investigadores y existen trabajos de larga data, y el congreso ICTMA es un claro ejemplo de las investigaciones que se

desarrollan. En particular, Laguerre (2014) aborda el tema de los eclipses en un programa de física para estudiantes de noveno grado de un establecimiento de Francia; y pone en relieve la comprensión de la realidad y fenómenos físicos con una perspectiva de la Didáctica de los Dominios de Experiencia e integrando la modelación matemática.

En este taller presentamos datos de una investigación (Vergara et al., 2021), en el cual, abordamos modelar un eclipse solar total con estudiantes de nivel 8 (12-13 años) de un establecimiento de Chile.

Marco Teórico

Basados en el objetivo propuesto y el diseño de las tareas, articulamos el ciclo de modelación (Borromeo-Ferri, 2010) y la teoría de Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak et al., 2016; 2022), ver Figura 2. Esta teoría, reconocida por la sigla ETM, permite describir y caracterizar el trabajo matemático de un individuo en una tarea específica. Con esta aproximación es posible describir como elementos epistemológicos y cognitivos son articulados en la resolución de una tarea, mostrando circulaciones entre los distintos elementos que lo componen, e involucrando sus dimensiones semióticas (registros y signos), instrumentales (artefactos digitales o no) y discursivas (razonamientos de prueba y justificación).

Incorporamos determinados conceptos relacionados al modelamiento matemático desde un punto de vista cognitivo, para esto utilizaremos el ciclo de modelación Blum-Borromeo (Borromeo-Ferri, 2010) quien ilustra el ciclo de modelado basado en seis procesos. Así, el modelo matemático es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna forma (gráfica, numérica o algebraica), el fenómeno en cuestión. La autora define la modelización como un proceso cíclico donde la reflexión sobre el modelo y la intención de utilizarlo conducen a una constante redefinición.

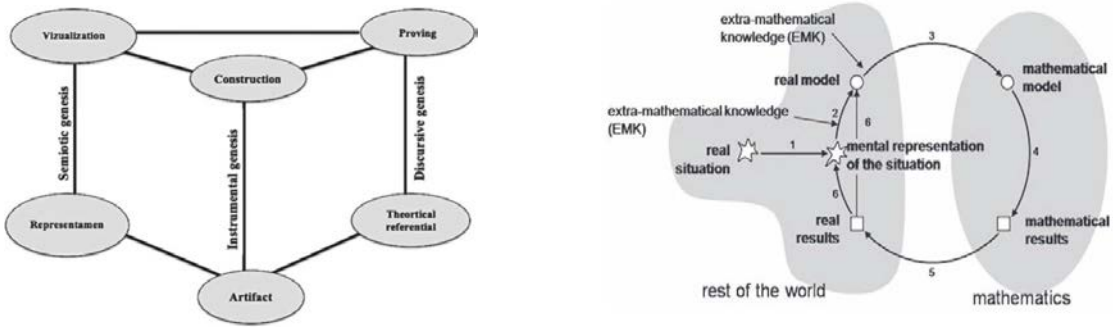


Figura 2. Diagrama del ETM de Kuzniak et al., (2022) y Ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010).

Metodología

La metodología del taller es del tipo teórico-práctica. Durante la sesión se discutirán elementos teóricos asociados a las diferentes perspectivas de modelación matemática y la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático que permitirán a los presentes analizar datos que serán presentados y, por otro lado, los asistentes al taller recrearán el fenómeno de los eclipses lunares

y solares mediante la plataforma Stellarium y posteriormente, realizar procedimientos matemáticos en Geogebra para validar resultados teóricos.

Los datos que se muestran en este taller fueron recolectados durante una sesión de 90 minutos en el año 2021 mediante una situación didáctica que contempló tres etapas. Los estudiantes con quienes se implementó esta situación contaban con acceso a internet y un computador con el software Geogebra. Los participantes de la experimentación fueron 30 estudiantes de 12 a 13 años, de un establecimiento público de Chile. En cuanto a la recolección y análisis de datos esta se realizó a partir de las producciones escritas de los estudiantes, los archivos Geogebra que los estudiantes desarrollaron, y la transcripción de diálogos realizadas entre estudiantes y el profesor.

Resultados

En el taller se recreará la primera etapa y se entregarán datos de las dos etapas siguientes para que los asistentes caractericen y analicen (con un sustento teórico) el trabajo realizado por los estudiantes (que se describen en el apartado de la metodología), y puedan los asistentes analizar el razonamiento empleado por los estudiantes al desarrollar una actividad de modelación matemática en un contexto de fenómeno real como son los eclipses.

También, se espera que los asistentes reflexionen sobre los alcances y limitaciones de un problema de modelación matemática, como así también, comprender la complejidad de esta cuando se elige una perspectiva de modelación epistemológica, cognitiva (como en este caso) o la educacional, socio-crítico, realista y contextual (Blomhoj, 2009; Kaiser et al., 2006; Cosmes Aragón et al., 2021).

A modo de ejemplificar en este escrito, mostramos algunos datos de las etapas que se recrearán en el taller:

Etapa 1. El objetivo de la primera parte es caracterizar los conocimientos previos que poseen los estudiantes en relación con los eclipses y si presenciaron los que ocurrieron en 2019 y 2020. Para ello, los asistentes simularán un eclipse usando el software Stellarium, (ver figura 3).

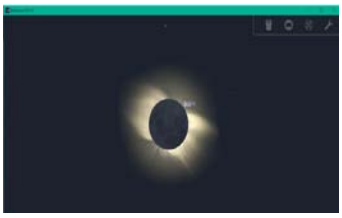


Figura 3. Software Stellarium al momento de suscitarse el eclipse total. Elaboración propia.

Etapa 2. El objetivo consistía en que los estudiantes pudiesen transitar al modelo matemático (MM). Al respecto, reconocemos en la transición entre el modelo real (MR) y el modelo matemático (MM) es influido por el uso del software Stellarium, y los estudiantes obtienen los resultados reales utilizando solo sus competencias matemáticas y la instrumentalización del software Geogebra, (ver figura 4).

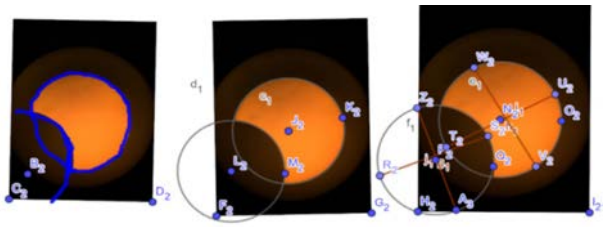


Figura 4. El estudiante traza cuerdas cercanas al diámetro como estrategia para determinar el centro de la circunferencia.

Conclusiones

Si bien es cierto que parece apropiado modelar el sol y la luna como una circunferencia y hacer emerger una matemática con sentido, de lugares geométricos y propiedades en la Geometría Euclidiana, también es apropiado cuestionarse la perspectiva de modelación matemática (MM) que se desea llevar a la sala de clases. Así, tanto formadores como investigadores, pueden discutir frente a estos desafíos y oportunidades de enseñar matemáticas dialogando con otra disciplina, o bien, en un contexto interdisciplinar.

En este taller esperamos que los asistentes reflexionen de sus propias producciones para lograr comprender el trabajo de los estudiantes con una perspectiva práctica y teórica. Nos parece, que generar diálogos es fundamental y la modelación matemática permite generar vínculos interdisciplinares para la enseñanza de la matemática y las ciencias básicas.

Referencias y bibliografía

Bikner-Ashbahs, A., Knipping, C., & Presmeg, N. (2015). Approaches to qualitative research in mathematics education, Dordrecht: Springer.

Blomhoj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching of learning mathematical modelling. In M. Blomhoj, & S. Carreira. *Mathematical application and modelling in the teaching and learning of mathematics. Proceedings from Topics Study Group 21*(pp. 1-18) Monterrey, México.

Borromeo-Ferri, R. (2010). On the Influence of Mathematical Thinking Styles on Learners' Modeling Behaviour. Journal Für Mathematik-Didaktik, *31*(1), 99–118. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8

Caerols, H., & Asenjo, F. (2019). Estimating the Moon to Earth radius ratio with a smartphone, a telescope and an eclipse. *The Physics Teacher*, *58*(7):497–501, 2020.

Cosmes Aragón, S., & Montoya Delgadillo, E. (2021). Understanding links between mathematics and engineering through mathematical modelling- The case of training civil engineers in a course of structural analysis (pp 527-538). In F. Leung, G.A. Stillman, G. Kaiser & K.L. Wong (Eds.), Mathematical Modelling in East and West. Cham: Springer.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. ZDM. *The International Journal On Mathematics Education*, *38*(3), 302-310.

Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., y Vivier, L. (2016). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Cuadernos* xv *de Investigación y Formación en Educación Matemática* (237-251). En Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática, Universidad de Costa Rica, (Eds.), Costa Rica.

Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., & Richard, P. (2022). Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces. Springer Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Laguerre, E. (2014). Une modélisation d'une éclipse solaire totale. Recherches En Didactique Des Mathématiques, *34*(2-3), 133-165. https://revue-rdm.com/2014/une-modelisation-d-une-eclipse/

Vergara, N, y Valenzuela, G. (2021). Enseñanza de círculo y circunferencia en estudiantes de octavo básico, desde la observación de un eclipse solar. Trabajo final para optar al título de profesor de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Yin, R. K. (2009). Case study research. Design and methods (4th ed). Thousand Oaks: SAGE Publications INC.

Modelando a área invadida de uma nascente

José Antonio **Salvador**
Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos
Brasil
jasalvador@ufscar.br

Resumo

Uma preocupação para o desenvolvimento sustentável de nosso planeta é a invasão das áreas de preservação das nascentes. As nascentes são fontes de águas superficiais cristalinas que deveriam ter uma área circular de preservação permanente de 50 m (metros) de raio, para favorecer a infiltração da água das chuvas no solo, mantendo assim, o abastecimento dos aquíferos, garantindo a produção de água potável e contribuindo para redução do risco de escassez, o que é essencial ao equilíbrio ambiental. Apresentamos a Modelagem Matemática, trabalhada com uma turma de Licenciatura em Matemática, para o cálculo da área invadida de uma nascente na direção anelar e radial, usando matemática básica e softwares livres para efetuar cálculos, fazer gráficos e simulações, Dessa forma, se pode fornecer dados para que um agente ambiental possa tomar decisões cabíveis sobre a área invadida.

Palavras-chave: Educação Matemática; Matemática Aplicada; Abordagem de tema transversal; Modelagem Matemática Ambiental; Área de preservação permanente de nascentes no Brasil; Uso de softwares livres.

Introdução

Um dos temas contemporâneos transversais de suma importância no ensino do Brasil é a Educação Ambiental, que foi proposta desde o final do século passado; entretanto, este tema vem sendo tratado timidamente no processo de ensino e aprendizagem de Matemática em todos os níveis, embora já conste dos projetos pedagógicos da maioria dos cursos.

A exploração de temas transversais pode ser inserida em diferentes ambientes acadêmicos permeando várias disciplinas usando a Modelagem Matemática.

Trazemos algumas referências sobre a Modelagem Matemática no ensino e sobre o problema ambiental de uma APP (Área de Preservação Permanente) das nascentes. Além disso, relatamos algumas simulações do cálculo da área de uma nascente invadida k, m (metros), na região anelar e na direção radial, desde sua fronteira de proteção ambiental de 50 m de raio, que foram discutidas e elaboradas dinamicamente por uma turma de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática usando softwares livres.

Dada a importância do tema, cabe ao professor orientador propiciar aos estudantes, em especial, os diversos questionamentos sobre o problema, provocar a elaboração de possíveis formulações matemáticas no nível básico ou superior e investigar simulações. As orientações iniciais para simular o cálculo da área invadida de uma APP de uma nascente, foram, no sentido de usarem os conceitos de Matemática do Ensino Básico, para que um agente ambiental de nível médio, pudesse entender os resultados dos cálculos realizados, e que pudessem levar também aos alunos das escolas básicas. E em seguida, foi proposta a modelagem da área invadida com conceitos matemáticos vistos no início do Ensino Superior.

Algumas referências sobre o problema

Os diversos impactos ambientais estão nos atingindo com mais intensidade nos últimos tempos e estão provocando grandes mudanças no nosso planeta. O fomento de uma discussão crítica e a conscientização dos problemas ambientais nas disciplinas básicas, especialmente a Matemática, como algo lúdico relacionado à natureza que nos cerca, contribuem para preservar a qualidade de vida e a existência das futuras gerações na nossa Terra.

Muitos educadores, como Freire (1987), na segunda metade do século passado, pregavam abordagens educacionais diferenciadas, inclusive com um viés direcionado para o ambiente que vivemos, alertando sobre a importância de o estudante aprender a ler o mundo, e que ele está inserido em um local que faz parte do nosso planeta, que não é algo abstrato viajando no universo, mas que é seu bairro, sua vizinhança.

A BNCC (Base Nacional Comum Curricular) aponta que durante o Ensino Médio se deve consolidar, ampliar e aprofundar as aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Básico e trazer a Matemática para mais perto da realidade. Além disso, elenca e reforça a incorporação de abordagens transversais integradoras para o ensino:

> *"Cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora" (Brasil, 2018, p.19).*

Ela também prega que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Assim, os tópicos transversais devem ser considerados no processo de ensino e de aprendizagem, e podem ser tratados usando a modelagem matemática, que é facilitada com o uso das ferramentas tecnológicas, além de essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático computacional.

Transversalmente, a proposta da investigação dos documentos e das leis ambientais relacionadas ao problema, promove uma interação maior entre os estudantes, o orientador e especialistas ampliando o conhecimento do problema, inclusive ressalta a nossa grande responsabilidade sobre a preservação das nascentes e do ambiente em que vivemos.

O encaminhamento do uso da modelagem matemática para tratar de temas transversais é uma estratégia pedagógica que começa pela iniciativa da escolha do tema, que pode surgir dos próprios estudantes, do professor ou mesmo por uma demanda da realidade local ou global. Neste sentido, o problema real que tratamos para determinar a medida da área invadida ao redor de uma nascente na direção radial, foi motivado por uma demanda local de um agente ambiental.

Resolvido o problema, pensamos levar uma discussão geral para salas de aulas, dada a relevância do tema transversal que é capaz de: promover a cidadania, incrementar o espírito crítico, a autonomia, desenvolver habilidades de cálculos matemáticos e computacionais para a formação do futuro professor de Matemática.

O problema de exploração da área invadida de uma nascente foi inicialmente lançado por Salvador e Arenales (2022), para estudantes de Engenharia Ambiental, e agora exploramos com mais detalhes numa turma do curso de Licenciatura em Matemática, com uma discussão mais geral e com a ideia de que os futuros professores possam levar ao Ensino Básico, modelando as várias possibilidades da área invadida. Mostraremos aqui os casos em que se adentra numa região anelar de espessura k, $0 \leq k \leq 50$, m e na direção radial até uma corda ao círculo da APP.

A modelagem matemática tem um papel relevante na área de pesquisa em Matemática Aplicada, nas mais diversas atividades dos povos ao longo do tempo e vem contribuindo com o avanço das civilizações. Ultimamente, ela vem se tornando uma linha importante de investigação na Educação Matemática e como uma excelente estratégia de ensino e aprendizagem. Segundo Bassanezi (2006), a modelagem matemática é "a arte de transformar um problema da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Vários pesquisadores como Almeida, Araújo e Bisognin (2011), Almeida, Silva e Vertuan (2012), Araujo (2010), Barbosa (2006), Borba e Hermínio (2010), Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), Salvador e Arenales (2022) e outros como aparecem em Matos, Blum, Houston e Carreira (2001), abordam a Modelagem Matemática no processo de ensino e aprendizagem.

Na exploração de um modelo matemático no ensino, simplificadamente podemos afirmar que após a escolha do tema, busca-se o reconhecimento dos dados e variáveis para a formulação matemática, daí o desenvolvimento e aprofundamento do conteúdo envolvido para a resolução do problema, simulações, que são facilitadas pelas ferramentas computacionais, análise crítica das soluções e interpretação dos resultados.

Foi muito importante a pesquisa sobre nascente, fonte de água doce, essencial para a vida na Terra, que deve ter uma APP ao seu redor de 50 m de raio, conforme a Lei 12651/2012 e a resolução do CONAMA (Conselho Nacional do Meio Ambiente) nº 303, de 20 de março de 2002 (Brasil, 2022), que dispõe sobre os parâmetros, as definições e os limites de áreas de preservação permanente, pois muitos estudantes ainda não conheciam este fato.

Na abordagem do problema do cálculo da área de uma APP invadida, com Modelagem Matemática, vislumbramos como a Matemática realmente se insere num problema real e, como é possível explorar vários conteúdos, sem limitar aos procedimentos lineares estabelecidos nas matrizes curriculares dos cursos. Enriquecido, ainda, com a possibilidade do uso de ferramentas computacionais para trabalhar com dados reais, elaborar tabelas, gráficos e fazer simulações, o que é apontado pela BNCC, atividade que pode ser levada para o Ensino Básico.

Observamos que, à medida que os grupos de estudantes vão discutindo e entendendo o problema, os conceitos matemáticos e ideias vão surgindo naturalmente e, quando necessário, questionamos e recapitulamos os conhecimentos prévios e os levamos a pesquisarem, revisarem e descobrirem, ou mesmo, deduzirem novos resultados. Discutimos alguns passos da modelagem com os estudantes: iniciar com a leitura e entendimento do problema, verificar se é possível uma visualização geométrica, identificar os dados e as variáveis. E então, a partir daí, propor uma formulação matemática adequada, buscar uma estratégia para chegar a uma simulação das soluções possíveis, e no final, indagar sobre a coerência dos resultados e sua validade.

Verificamos que a matemática explorada nas várias tentativas dos estudantes de resolver o problema, foi desde os conceitos abordados no Ensino Básico de círculo, centro, raio, diâmetro, circunferência, perímetro e área de um círculo, área de um anel, ângulo, setor circular, regra de três, área de um setor circular, tangente, secante, corda a um círculo, área limitada pela corda e a fronteira de um círculo, triângulo, simetria, trigonometria, triângulo retângulo, teorema de Pitágoras, área de um triângulo, área de um triângulo retângulo, funções discretas e contínuas, funções trigonométricas e porcentagem. Também se abordou ferramentas da Geometria Analítica e do Cálculo Diferencial e Integral para o equacionamento da região limitada pela circunferência limite da APP e da área invadida, a integração definida, o uso de calculadora científica, planilha eletrônica ou um software computacional para explorar cálculos, tabelas, gráficos e fazer as simulações.

O cálculo da área invadida da APP

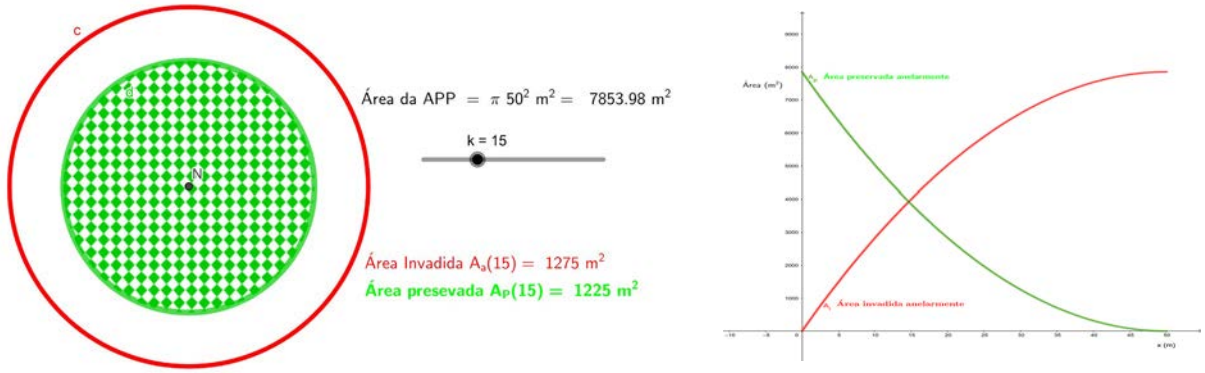
Citamos aqui algumas das principais questões iniciais do problema de invasão da APP de uma nascente que foram levantadas:

- Qual é a área de preservação permanente de uma nascente?
- Que parte da área de preservação da nascente foi invadida?
- Como calcular a área invadida?
- Qual é a porcentagem da área invadida em relação a área que deveria ser preservada?

E, após discussões, um fato relevante, quando perguntados, a maioria dos estudantes disse que nunca tinha visto uma nascente brotando água límpida. E sobre as várias possibilidades de como a APP está sujeita a invasão, ficou claro para eles que a área invadida poderia ser representada como uma parte da área do círculo protetor da nascente. Inicialmente fizeram a representação gráfica de um círculo para a área total de preservação da nascente e, mostraram diferentes formas geométricas de como a área de preservação poderia ser invadida. Neste trabalho mostraremos os casos da invasão anelar (Figura 1a) e a invasão radial adentrando até uma corda a k, $0 \leq k \leq 50$, m da borda da APP (Figura 2a).

Explorando a invasão anelar da APP

Na Modelagem Matemática devemos ter clareza sobre sobre qual é o problema que deve ser modelado e qual é o objetivo do modelo. Neste caso, queremos obter a área da APP, a área invadida segundo um anel ao redor da nascente, e a área que ficou preservada, como mostra a Figura 1a), elaborada com o software GeoGebra (https://www.geogebra.org/classic).



a) *b)*

Figura 1: Simulação da área da APP de uma nascente invadida anelarmente e a preservada e simulação a) e b).

Inicialmente se calculou a área A_N da APP, em m^2, círculo de centro N e raio R = 50 m em torno da nascente, que deveria ser preservado, dada por uma expressão quadrática do raio: $A_N = \pi R^2 = \pi 50^2$

Neste primeiro momento, foi importante observar que, o valor obtido não é um número inteiro ou racional, o que nos leva a investigação de como se calcula o valor aproximado de π. Boyer (1996), cita que o cálculo da área e perímetro de regiões limitadas por curvas, como a do círculo, sempre foi um grande desafio, desde as primeiras civilizações.

Propomos a cada grupo de estudantes a obtenção de um valor aproximado de π de modo lúdico, por exemplo, fazendo experimentos com a média do quociente das medidas dos perímetros de regiões circulares pelos seus respectivos diâmetros. Se estiverem visitando uma nascente com árvores próximas, por exemplo, poderiam calcular a medida da circunferência a altura do peito pelo diâmetro a altura do peito, $\frac{CAP}{DAP}$, e obter o valor aproximado de π. Considerando π = 3.1416, temos a área de preservação de uma nascente A_N, em m^2: A_N = 7854

Uma discussão pertinente aqui, foi sobre as unidades de medidas de comprimento e de áreas de figuras planas, unidades de medidas agrárias como acre (4047 m^2), hectare (10000 m^2) e a medida do alqueire nos diversos estados brasileiros, bem como as conversões de unidades. Solicitamos o cálculo da área $A_a(k)$, em m², da região invadida anelarmente $0 \leq k \leq 50$ m, como mostra a Figura 1a), que é igual, à diferença da área do círculo da APP e a área do círculo de raio menor da APP, r = 50 - k metros, que ficou preservada. Observamos que o problema pode ser resolvido usando a matemática do Ensino Básico:

$$A_a(k) = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi 50^2 - \pi(50-k)^2 = \pi(100k - k^2)$$

Considerado simples pelos estudantes, primeiro calcularam a área invadida e a preservada para alguns valores discretos de k, gerando tabelas e gráficos. Alguns grupos simularam usando o controle deslizante para $0 \leq k \leq 50$ no Geogebra, conforme Figura 1 a) e b), incrementando a ideia do pensamento computacional. Tais valores plotados permitiram a discussão de uma função discreta de k, crescente, à medida que a área invadida vai aumentando. Outros, consideraram a espessura do anel invadido, k = x, variando continuamente para $0 \leq x \leq 50$, e plotaram a função $A_a(x) = \pi(100x - x^2)$, crescente da área invadida, e também a função área que ia ficando preservada $A_p(x) = \pi[50^2 - (100x - x^2)]$, decrescente, com o aumento da invasão, mostrando o ponto onde elas se igualaram quando $k = 50 - 25\sqrt{2} \sim 14.64$ como na Figura 1b). Interessante a observação de que a porcentagem da área invadida, k = 15 m, anelarmente $P_{15} = \frac{A_a(15)}{A_N} = 50{,}97\%$, já ultrapassa 50% da área da APP, como mostra a Figura 1b).

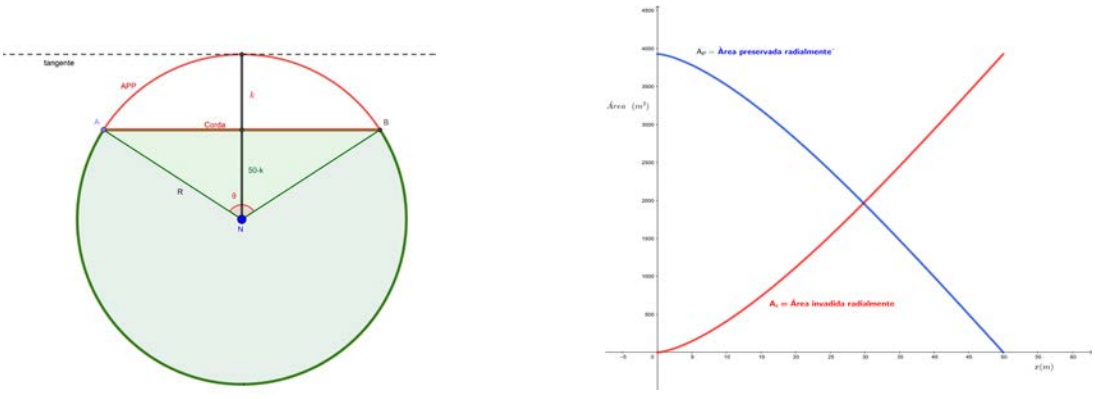
Explorando a invasão radial da APP

A área invadida radialmente até uma corda AB do círculo da APP, foi pensada como a diferença entre a área de um setor circular de um ângulo θ e a área do triângulo ABN, que subentendem a corda AB, adentrada k metros na direção da nascente N, como representada na Figura 2a). Para o entendimento do problema, inicialmente fizeram a visualização geométrica e obtida uma solução da APP invadida radialmente, até uma corda AB adentrada na direção da nascente N, para um valor fixo. Em seguida, foi generalizado até uma região preservada a partir da corda AB com distância d = 50 - k, m do centro da APP, conforme Figura 2a). Da região triangular do setor circular não invadido, o triângulo ABN, suporte da corda, foi dividido em dois triângulos retângulos simétricos, com medidas da hipotenusa, R = 50, cateto d = 50 - k, e outro cateto de L metros, correspondendo a metade da corda AB, que em função de k é dado por:

$$L^2 + (50 - k)^2 = 50^2 \Rightarrow L = \sqrt{100k - k^2}, \quad 0 \leq k \leq 50,$$

que é a medida do cateto do triângulo retângulo, que subentende o ângulo θ/2 radianos, em que:

$$sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{100k-k^2}}{50} \Rightarrow \theta = 2arcsen\left(\frac{\sqrt{100k-k^2}}{50}\right), \text{ ou } cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{50-k}{50} \Rightarrow \theta = 2arccos\left(\frac{50-k}{50}\right)$$



a) b)

Figura 2: Área de uma nascente invadida k metros radialmente e área preservada a) e simulação b).

Aqui, surgiu uma questão deveras importante, que foi discutida com os estudantes: por quê a medida do ângulo para funções trigonométricas é considerado em radianos, não em graus?

A área de todo o setor circular A_s, que abrange a área invadida em m^2, obtida por uma regra de três, é dada em função de k por:

$$A_s = R^2\frac{\theta}{2} = 50^2\left[\frac{2arccos\left(\frac{50-k}{50}\right)}{2}\right] = 2500arccos\left(\frac{50-k}{50}\right)$$

Retirando a área A_T do triângulo ABN, limitado pela corda AB do círculo da APP e vértice N,

$$A_T = \frac{2\left[\sqrt{100k-k^2}\right](50-k)}{2} = \left[\sqrt{100k-k^2}\right](50-k)$$

temos, a área invadida radialmente A_{ri} como uma função de k, igual a:

$$A_{ri}(k) = A_s - A_T = 2500arccos\left(\tfrac{50-k}{50}\right) - \left[\sqrt{100k-k^2}\right](50-k),\ 0 \le k \le 50$$

Com as ferramentas tecnológicas como a calculadora, os softwares livres GeoGebra ou wxMaxima, os estudantes realizaram os cálculos, tabelas, gráficos e simulações para obter a área invadida para diversos valores de k. Com estas abordagens, usando e revisitando os conteúdos básicos, vimos que o problema também pode ser levado para estudantes do Ensino Médio.

Abordagem do problema usando conceitos do Ensino Superior

Numa abordagem com tópicos do ensino superior os estudantes discutiram a formulação matemática com o uso das disciplinas básicas. Representando a nascente N, no centro de um sistema cartesiano plano ortogonal xoy, a função $f(x) = \sqrt{50^2 - x^2}$, $0 \le x \le 50$, representando a semicircunferência superior que limita a área de preservação da nascente e a corda situada a k metros da tangente ao círculo da APP, pela função $g(x) = 50 - x, -L \le x \le L$, que separa a região da nascente invadida da preservada, conforme Figura 2a).

Dessa forma, a integral

$$\int \sqrt{50^2 - (x^2)} - (50-x)dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{50^2-(x^2)} + 1250arcsin\left(\tfrac{x}{50}\right) - (50-x)x$$

da diferença das duas funções f e g, definida de -L a L, nos dá:

$$L\sqrt{50^2 - L^2} + 2500arcsin\left(\tfrac{L}{50}\right) - 100L + 2kL,$$

que em função de k metros, invadido na direção radial é:

$$A(k) = \sqrt{100k-k^2}\left[\sqrt{50^2-(100k-k^2)} + 2k - 100\right] + 2500arcsin\left(\tfrac{\sqrt{100k-k^2}}{50}\right),\ 0 \le k \le 50.$$

Esta função de k foi plotada para valores discretos de k e, também continuamente e simulada com o controle deslizante do GeoGebra. Para a realização ou conferência dos cálculos aritméticos, representações gráficas e simulações, foram usadas as ferramentas computacionais como o GeoGebra ou wxMaxima, conforme sugerimos. Ao checarmos os valores obtidos, verificamos que a medida que a área invadida, na direção radial vai aumentando com o aumento da invasão k, e a área preservada vai diminuindo. Foi verificado, neste caso, para $0 \le x \le 50$ temos que metade da área da APP do lado da invasão se iguala com a área invadida para $k = 30$ m.

Considerações finais

A abordagem do problema ambiental do cálculo da área de invasão de uma APP de uma nascente, com a modelagem matemática, foi uma das possibilidades de ensino atual que encontramos para os licenciandos de uma turma de Matemática pudessem tratar de um tema transversal, explorando e revisando muitos conceitos e conteúdos matemáticos, além das ferramentas computacionais. Mostramos que é de suma importância a apresentação de problemas transversais ambientais em atividades de Matemática, e que os grupos de licenciandos receberam este tema com bastante motivação, se empenharam na busca de soluções para apresentarem seus resultados para a turma, nos propiciando valiosas discussões, inclusive, sobre a influência e as pressões provocadas pelas atividades humanas que vem causando ao ambiente, gerando uma degradação constante.

Nos comentários gerais das discussões provocadas pela turma, citamos, entre elas, o fato de que a água transbordante das nascentes poderia ser escoada para uma área fora da zona de proteção, onde os animais poderiam beber, e em seguida, direcionada seu curso rio abaixo. Levantamos também as sugestões de como se poderia mitigar os danos causados da área invadida ao redor da nascente, como ela deveria ser recomposta e cercada, por exemplo, para impedir o acesso de animais pesados, especialmente em áreas de pastagens, em que, um pisotamento constante pode compactar o solo, bem como favorecer o seu desaparecimento; porém, a tomada de decisões acerca dos resultados obtidos cabe a um profissional como o agente ambiental. A Modelagem Matemática de problemas reais, utilizada por nós constantemente nas disciplinas básicas de Matemática dos cursos de graduação e de mestrado profissional, tem se mostrado uma boa estratégia pedagógica para simulações e a exploração de vários conteúdos matemáticos, pois motiva os grupos de estudantes e o professor orientador a contribuir para a investigação científica e o aprendizado significativo da Matemática.

Referências e bibliografia

Almeida, L. M. W., Araújo, J. L. & Bisognin, E. (2011). Práticas de modelagem matemática na educação matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas. *Londrina: EDUEL*

Almeida, L. M. W., Silva, K. A. P. & Vertuan, R. E. (2012). Modelagem Matemática na Educação Básica. *São Paulo: Contexto.*

Araujo, J. L. (2010). Brasiliam Research on Modelling in Mathematics Education, *ZDM Mathematics Education, 42,* 337-348.

Bassanezi, R. C. (2006). Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. 3. ed. *São Paulo: Contexto.*

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroon: a critical and discursive prespective, *ZDM Mathematics Education, 38, n. 3,* 293-302.

Borba, M. C. y Hermínio, M. H. G. B (2010) A Noção de Interesse em Projetos de Modelagem Matemática, *Educ. Matem. Pesq., 12, n.1,* 111-127.

Boyer, C. B. (1996) História da Matemática. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. *São Paulo: Edgar Blucher*.

Brasil (2018). Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. *Brasília: MEC.*

Brasil (2022). Ministério do Meio Ambiente (MMA). *Conselho Nacional do Meio Ambiente (CONAMA). Resolução CONAMA nº 303, de 20 de março de 2002.*

Freire, P. (1987) Pedagogia do Oprimido. *17. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra.*

Matos, J. F., Blum, W., Houston, S. K. & Carreira, S. P. (2001). Modelling and Mathematics Education ITMA9: Applications in Science and Thecnology, *Horwood Publishing Series: Mathematics and Applications.*

Meyer, J. F. C. A., Caldeira, A. D. & Malheiros, A. P. S. (2011). Modelagem em Educação Matemática. *Belo Horizonte: Autêntica.*

Salvador, J. A. & Arenales, S. (2022). Modelagem Matemática Ambiental. *São Carlos: EdUFSCar.*

Nociones básicas sobre la modelización de profesores de educación primaria en ejercicio

Karen **Porras** Lizano
Escuela de Matemática, Universidad Nacional
Costa Rica
karen.porras.lizano@una.cr
Elena **Castro-Rodríguez**
Universidad de Granada
España
elenacastro@ugr.es
Juan Luis **Piñeiro**
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Chile
juanluis.pineiro@umce.cl

Resumen

En este estudio cualitativo se describen las nociones básicas sobre la modelización que manifiestan un grupo de profesores en ejercicio de educación primaria. Se aplicaron entrevistas en forma presencial y virtual, a 11 profesores de educación primaria en ejercicio, que no contaban con formación previa sobre modelización. La información obtenida fue sometida a un análisis de contenido utilizando tres categorías de nociones básicas de modelización: modelo, modelo matemático y modelización. Concluimos que las nociones de los participantes no son las ideales para un proceso de modelización exitoso. Por tanto, es necesario proveer de experiencias de formación adicional sobre la modelización, que permita desarrollar con éxito su labor docente hacia una enseñanza de calidad.

Palabras clave: Educación matemática; Educación Primaria; Conocimiento del profesor; Modelización; Modelo; Modelo matemático; Costa Rica.

Introducción

En la investigación en educación matemática han surgido diversas posturas teóricas que convergen en la concepción de la modelización como una transición entre la realidad y la matemática, al resolver un problema de contexto real (Ledezma et al., 2022). A través de la construcción y desarrollo de un modelo matemático de una determinada situación problema, la modelización es relevante para comprender mejor el mundo, sirve de apoyo en el aprendizaje, contribuye al desarrollo de diversas competencias y actitudes apropiadas en los estudiantes hacia la matemática (Blum y Borromeo Ferri, 2009).

Borromeo Ferri (2021) divide la investigación sobre la modelización en tres periodos. El primer periodo, antes del año 2000 tuvo más importancia la investigación sobre el aprendizaje de los estudiantes en la modelización. En el segundo periodo, después del año 2000 y antes del 2019, surge la investigación de la profesionalización de los docentes. Esto se realizó mediante el desarrollo de cursos especialmente diseñados para fomentar la competencia profesional sobre modelización matemática. En el tercer periodo, después del año 2019, comienza a realizarse los primeros estudios sobre evaluación de las competencias de los profesores en modelización. Ante esto, la autora concluye que, aunque la investigación sobre la educación y profesionalización de los docentes tiene más de 20 años de estarse gestando, esta debió surgir desde el primer periodo en forma paralela a la investigación del aprendizaje de los estudiantes en la modelización. Sumado a esto, Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri (2022) exponen problemáticas que afectan a la profesionalización sobre la modelización de los docentes en muchos países. Por ejemplo, los autores señalan que los currículos de educación matemática atienden en forma descuidada a la modelización; o que en los planes de formación inicial de los profesores no se ha introducido la enseñanza de la modelización. Además, señalan que las interpretaciones sobre la modelización presentes en el currículo influyen en el tipo de nociones que tienen los profesores, más si no poseen experiencia con el proceso (Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri, 2022). Por tanto, se requiere formación adicional y necesaria sobre la modelización para que los futuros profesores y en servicio enseñen en sus aulas (Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri, 2022). Ante el contexto anterior y dado que investigar el conocimiento del profesor, permite mejorar la formación inicial de profesores y los cursos de desarrollo profesional (Piñeiro et al., 2022), en este estudio nos proponemos describir las nociones básicas sobre la modelización que manifiestan un grupo de profesores en ejercicio de educación primaria.

Aspectos básicos sobre la modelización matemática

Borromeo Ferri (2018) señala que una enseñanza de calidad constituye el factor de impacto principal en el aprendizaje de los estudiantes, en particular si hablamos de la modelización matemática. Para lograr este objetivo el profesor debe poseer conocimientos propios del contenido y del conocimiento didáctico, que permitirá desarrollar con éxito su tarea docente (Piñeiro et al., 2019). Con respecto al conocimiento del contenido, nociones básicas del profesor que deben ser manejadas son la noción de modelo, modelo matemático y modelización matemática (Borromeo Ferri, 2018).

Noción de modelo

En el lenguaje cotidiano existen muchas acepciones sobre la palabra modelo. Rico (2001) señala distintos significados de la noción de modelos como *Modulus* (latín) que significa molde, un arquetipo o punto de referencia para imitarlo o reproducirlo. El autor también considera que un *modelo* es una persona o cosa que se imita o se debe imitar, por sus obras de ingenio y las acciones morales que son indicadores de perfección. A la vez, menciona el significado de *modus* como medida para medir algo. Además, el término *modelo* puede ser entendido como una cosa que se concibe y construye o realiza para que sirva de modelo para hacer otras idénticas o similares. Otro significado expuesto por el autor es percibir el *modelo* como una persona u objeto que posa como modelo y que copia el artista, o una persona encargada de exhibir creaciones de moda. De igual manera, se comprende como un esquema teórico de un sistema o de una realidad compleja. Por último, se le entiende como un esquema conceptual, susceptible de un tratamiento matemático, que interpreta o predice el comportamiento de un sistema en el que se desarrolla un fenómeno determinado. Asimismo, *modelar* es considerado como conformar, constituir algo por procesos naturales, humanos e históricos. Por ejemplo, dar forma artística a una sustancia plástica, hacer que una persona adquiera o desarrolle una aptitud o toda la personalidad, educar (Rico, 2001).

Noción de modelo matemático

Otro nivel de reflexión que realiza Rico (2001) es el empleo técnico del término en otras disciplinas, donde cada una hace un uso técnico específico del término *modelo,* pero mantiene el significado original y lo dota de mayor precisión (Rico, 2001). En particular, en Educación Matemática se puede encontrar un uso propio del concepto de modelo en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Existen investigaciones que han considerado los modelos como sistemas conceptuales que se expresan usando sistemas de notación externos, y que se utilizan para construir, describir o explicar los comportamientos de otro (s) sistema (s) en la Educación Matemática (Lesh y Doerr, 2003; Erbas et al., 2014). Así el término modelo matemático representa un objeto o hecho concreto de la realidad, expresado por diferentes sistemas de representación que ayudan a comunicar las variaciones individuales, tendencias y detalles lo más aproximados posibles a la realidad del fenómeno (Erbas et al., 2014). En efecto, Montejo-Gámez et al. (2021) señalan que, para caracterizar un modelo matemático en un ámbito escolar, se debe contemplar la unión de tres elementos que le dan forma, como el sistema real a modelar, su matematización y las representaciones utilizadas para expresar ambos.

Noción de modelización matemática

Modelización matemática es el proceso de construir, obtener y validar los modelos matemáticos, donde los sistemas conceptuales y modelos se utilizan para crear y desarrollar nuevos modelos en nuevos contextos (Lesh y Doerr, 2003). En consecuencia, un modelo es un producto y la modelización es el proceso de creación de un modelo físico, simbólico o abstracto de una situación (Kaiser y Sriraman, 2006). Otros autores lo consideran como un mecanismo donde se utiliza la abstracción y generalización con el propósito de transformar situaciones de la

realidad en problemas matemáticos y en forma inversa, y donde las soluciones deben ser descifradas en la misma realidad (Erbas et al., 2014).

Metodología

La metodología llevada a cabo es de tipo cualitativo y de carácter descriptivo pues la finalidad es "comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto" (Hernández-Sampieri et al., 2014, p. 358). Los sujetos fueron 11 profesores costarricenses de educación primaria en ejercicio, donde 10 de ellos trabajan como docentes de educación pública y 1 para educación privada. En relación con su experiencia, 2 contaban con 5 años o menos, 1 tenía entre 5 a 10 años y 8 poseían 10 años o más de experiencia en ejercicio docente en educación primaria. Algunos de ellos, específicamente 6 de profesores poseían una formación adicional distinta a la de enseñanza.

El instrumento de recolección de la información fueron entrevistas en profundidad que fueron aplicadas algunas de forma presencial y otras de forma virtual según la disposición y preferencia del profesor. Concretamente, cada entrevista individual constó de 5 preguntas sobre las nociones básicas de modelización matemática: (a) ¿Qué es para usted un modelo? (b) ¿Qué entiendes por modelo matemático? (c) ¿Qué diferencias cree que existen entre un modelo y un modelo matemático? (d) ¿Qué es para usted la modelización matemática? (e) ¿Cuál considera usted que es el objetivo principal de la modelización matemática? Las interrogantes fueron construidas tomando como base la componente noción del problema del conocimiento del profesor sobre la resolución de problemas de Piñeiro et al. (2019). Estas fueron adaptadas al proceso de modelización, dado que en el currículo de Costa Rica se entiende la modelización como la resolución de problemas con contextos de la vida real (MEP, 2012).

Para el análisis de la información obtenida, realizamos un análisis de contenido (Cohen et al., 2007) de los datos obtenidos de las entrevistas aplicadas a los participantes. Dicho análisis implicó que los datos fueran clasificados en 3 nociones básicas basadas en los trabajos de Rico (2001), Lesh y Doerr (2003), Erbas et al. (2014), Montejo-Gámez et al. (2021) y Kaiser y Sriraman (2006), concretamente estas son: modelo, modelo matemático y modelización matemática.

Resultados

En este apartado presentamos en primer lugar los resultados obtenidos sobre la noción de modelo, la cual es dividida en tres categorías: molde o persona a imitar, modelo de pasarelas y modelo como proceso. En segundo lugar, exponemos los resultados que corresponden a la noción de modelo matemático categorizados en: fórmula, estructura, procedimiento para resolver problemas y estrategia para enseñar matemática. Por último, mostramos los resultados de la noción de modelización, concretamente fueron divididos en cuatro categorías: la modelización como transformación de situaciones de la realidad y viceversa, un proceso de enseñanza, un proceso de aplicación de la matemática y un proceso para resolver.

Noción de modelo

Las nociones manifestadas por los profesores sobre modelo se refieren a:

1. **Molde o persona a imitar:** un arquetipo o punto de referencia o persona para imitarlo o reproducir por su perfección. Específicamente 8 de los profesores tuvieron esta noción de modelo (P1, P2, P4, P7, P8, P9, P10, P11). Un ejemplo es lo que considera el profesor 8 como modelo es "algo que seguimos, algo que ya está estructurado y a lo que le damos un seguimiento precisamente según esa estructura establecida".
2. **Modelo de pasarelas:** una persona encargada de exhibir creaciones de moda. Esta noción la evidenciaron 3 de los profesores participantes (P1, P6, P11). Uno de ellos (P6) lo manifiesta en el extracto "es un modelo de modas".
3. **Modelo como proceso:** es cuando el modelo aún no es un producto acabado, sino que aún necesita ser ampliado o conformado por medio de un proceso. Esta noción la manifestaron tres profesores (P3, P5, P6) en frases como la brindada por el profesor 6, donde un modelo "puede ser algún sistema estructurado, o sea algo que ya está estructurado y que se tiene que trabajar".

Noción de modelo matemático

En los resultados, entre las nociones que se encontró sobre modelo matemático tenemos:

1. **Fórmula:** El modelo matemático como el uso de una fórmula o un sistema de representación algebraica. Esta noción la evidenciaron dos profesores (P1, P2) en sus comentarios. Un ejemplo es la expresión dada por el profesor 2 es "modelo matemático tiene que ver con fórmulas, como por ejemplo en el caso del cuadrado al usar la fórmula del perímetro al sumar los lados".
2. **Estructura:** se refiere a que el modelo matemático debe poseer ciertas características que no pueden ser cambiadas y que sirven de guía para un determinado fin. Esto se observó en las nociones de tres profesores (P1, P6, P8) como la del profesor 6 que nos expresa
   > digamos que se puede uno guiar ahí, con la parte del sistema de numeración, que eso ya está estructurado y tienes que verlo como es. O sea, se pueden hacer algunas variaciones pedagógicas, pero al final el modelo está estructurado de esa forma y así tiene que permanecer… todo modelo tiene su estructura, en la parte de modelaje, ya sabemos que se busca las personas con ciertas características para desarrollar esa actividad. Y en la parte matemática, igual. O sea que hay que seguir una estructura, para llegar a conseguir un fin."
3. **Procedimiento para resolver problemas:** corresponde al modelo matemático como un procedimiento o estructura de pasos que se deben seguir para resolver un problema. Cuatro profesores tuvieron esta acepción (P3, P5, P9, P11). Un ejemplo que evidencia esta noción se expone en el extracto de la entrevista:
   > Entrevistadora: ¿qué entiendes por modelo matemático?
   > Profesor 11: Yo lo tomo como una guía, una pauta a seguir para para resolver algo. Por ejemplo, usted me da un ejemplo de suma, un ejemplo alguna operación, para mí eso es un modelo matemático, tengo que seguir más o menos esas pautas como me están explicando.
4. **Estrategias para enseñar matemática:** este caso, se refiere al modelo matemático como un conjunto de estrategias para la enseñanza de la matemática. Se encontró en la noción de 3 profesores (P4, P7, P10), en el siguiente diálogo se muestra un ejemplo:
   Entrevistadora: ¿Qué es para usted un modelo matemático?
   Profesor 4: Si hablamos me parece que es un conjunto como el de estrategias a aplicar en la enseñanza de la matemática.

Noción de modelización

En cuanto a la noción de modelización, se han encontrado las siguientes categorías que manifiestan al proceso como:

1. **Transformación de situaciones de la realidad y viceversa:** Corresponde a la acepción de la modelización como un mecanismo que permite transformar situaciones de la realidad en problemas matemáticos y en forma inversa a través de la abstracción y generalización (Erbas et al., 2014). Este tipo de noción se observó una única vez, en lo manifestado por el profesor 9:

   Entrevistadora: Ok. ¿Qué entiendes por modelización matemática?
   Profesor 9: ...sería así como que yo tomo algún tema de la vida cotidiana y por medio de la matemática busco pasarlo a números...

2. **Un proceso de enseñanza:** En esta noción, encontramos divido en tres perspectivas:
   - **2.1 La modelización como un proceso de actualización de la enseñanza**: Un proceso de actualizado de la enseñanza, donde se deje de lado la memorización y se realice un desarrollo de las habilidades de los estudiantes y estos entiendan mejor. Esta noción se visualiza en los resultados encontrados de 2 profesores (P1, P11) en frases como:

     Profesor 1: A lo que he visto. Es la nueva tendencia de hacer que ya no seamos tan sistemáticos y que el ser humano tenga más explotación de las habilidades. Creo que eso es lo que anda haciendo eso de la modelización matemática, cambiando a buscar más habilidades y menos el memorizar.

   - **2.2 Una metodología actual para la enseñanza de la matemática:** Es una actualización de metodologías de enseñanza donde se resuelva problemas matemáticos relacionados con las vivencias reales del estudiante. Esto permite que el estudiante sea el actor principal al involucrarse en la construcción de su propio aprendizaje. Un ejemplo de esta noción es el único resultado de la subcategoría que se expone en el comentario del siguiente participante:

     Profesor 10: … Avanzar … en un sistema de educativo… ahora creo que lo que es seguir una modelización de esa manera ya matemática es como dar a los estudiantes algo diferente, algo más actual, algo donde ellos experimenten por sí mismos la resolución de problemas que salga de ellos mismos, no solamente encasillarlo, ya que lo que el profesor les da y punto, sino que también ellos puedan explorar, puedan buscar soluciones… Recordando igual que la matemática ahora está enfocada no solamente una forma de solucionar un problema, una situación, sino que hay varias formas de cómo ellos pueden llegar a una respuesta…una metodología donde se integre a los estudiantes a que ellos también participen, sean ellos el eje principal, los autores de ese sistema...

   - **2.3 Una estructura de pasos para enseñar matemática:** En esta noción se presenta la modelización matemática como un conjunto de estrategias para impartir una clase de matemática. Fue propuesta por 3 de los profesores participantes (P4, P6, P8) y encontrada en extractos “Cómo estructurar una serie de pasos para dar una clase o para poder desarrollar un tema matemático”.

3. **Un proceso de aplicación de la matemática:** Aquí encontramos la modelización matemática se considera como:
   - **3.1 Aplicación del aprendizaje en la vida diaria:** trata sobre la aplicación de lo que el estudiante aprende en la vida diaria. Fue encontrada en las frases de un solo profesor (P4), al manifestar que “se vea la aplicabilidad del aprendizaje en la cotidianidad, en la vida diaria”.

3.2 Proceso ordenado y universal de la matemática presente en todo lo que nos rodea: Corresponde a ver la modelización como un proceso matemático ordenado y universal, es decir que se aplica en todas las partes del mundo y en todo lo que nos rodea, y puede hacerse de distintas formas. Esto se evidenció en los comentarios de un solo profesor (P1). Por ejemplo:

> Profesor 1: Tenemos que enseñar que la matemática es universal. Que se habla en cualquier parte del mundo. Eso tiene que saberse, que busco una exactitud, porque no es exacta, porque hay cálculos y estimaciones. Entonces no es exacta. Y también enseñarles que lleva un orden. Pero que al llevar ese orden puede haber diferentes formas de hacerlo, no una sola.

4. La modelización como un proceso para resolver: Para este caso se obtuvo tres énfasis.

4.1 Resolver problemas de la vida real: Aquí, la modelización es un proceso para resolver situaciones-problema de la vida real o cotidiana. Esta acepción fue hallada en los comentarios de 2 profesores (P5, P7), mostrada en frases como "el objetivo es más que todo por el conteo o el uso de la moneda hoy en día. Es lo básico que tiene el ser humano y como resolver problemas".

4.2 Una forma de resolver que usan los estudiantes: Es cuando se resuelven problemas a través de procedimientos que usan los estudiantes en el que adquieren conocimientos. Específicamente se refiere a la noción brindada por un único profesor (P3). Por ejemplo:

> Profesor 3: Hacer el procedimiento. O sea, digamos, la resolución de problemas, en el caso de un modelo de matemática, enfocar bien el modelo, el problema y resolverlo, sea una forma de resolver los problemas.

4.3 Secuencia de fórmulas: Constituye un proceso de aplicación de fórmulas para resolver algo que se puede hacer de distintas formas. Esta acepción se encontró en los comentarios de dos profesores (P1, P2). En particular mostramos la siguiente frase:

> Profesor 2: Usar las fórmulas para hacer estimaciones a largo plazo como por ejemplo al usar Excel y aplicar fórmulas para hacer una estimación dentro de 10 años de un determinado tema, tomando en cuenta por ejemplo el género de la población.

Conclusiones

En este documento se describieron las nociones básicas sobre la modelización que manifiestan un grupo de profesores en ejercicio de educación primaria. Específicamente, en cuanto a las nociones obtenidas a cerca del término modelo —molde o persona a imitar, modelo de pasarelas, modelo como proceso— coinciden con las primeras aproximaciones del término propuestas por Rico (2001).

Con respecto a la noción modelo matemático —fórmula, estructura, procedimiento para al resolver problemas y estrategias para enseñar matemática— algunas de ellas se encuentran muy vinculadas directamente a la matemática. No obstante, no son las nociones ideales para la modelización matemática, no coinciden con la conceptualización de modelo matemático propuesta por Erbas et al. (2014) y no se visualiza la conjugación de los tres elementos que proponen en Montejo-Gámez et al. (2021). Concretamente, nos referimos al sistema real a modelar, su matematización y las representaciones utilizadas para expresar ambos.

Asimismo, se obtuvieron nociones sobre la modelización como transformación de situaciones de la realidad y viceversa, un proceso de enseñanza, un proceso de aplicación de la matemática y un proceso para resolver. En este caso, solamente uno de los maestros propone una noción del significado del proceso modelización cercano al propuesto por Erbas et al. (2014).

Con esto nos referimos a la modelización para transformar situaciones de la realidad en problemas matemáticos y en forma inversa, utilizando la abstracción y generalización. Las otras nociones de los participantes sobre la modelización no coinciden con la noción ideal de modelización propuesta por Lesh y Doerr (2003), Erbas et al. (2014) y Kaiser y Sriraman (2006).

Destacamos que las nociones básicas de la modelización de los participantes no son las ideales para un verdadero proceso de modelización. Por tanto, es importante y necesario proveer de experiencias de formación adicional, donde se dé el acercamiento a la teoría, instrucción y el diagnóstico sobre la modelización, con el fin de que incida correctamente en la implementación del currículo, sus clases y en la formación sus estudiantes.

Reconocimiento

Este trabajo ha sido desarrollado como parte de la tesis doctoral titulada “Conocimiento profesional de maestros de primaria en ejercicio sobre modelización matemática” dentro del Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, España.

Referencias y bibliografía

Blum, W. y Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45–58.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Borromeo Ferri, R. (2021). Mandatory mathematical modelling in school! – What do we want the teachers to know? En F. Leung, G. Stillman, G. Kaiser y K. Wong (Eds.), *Mathematical modelling education in east and west* (pp. 103–117). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_12

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6a ed.). Routledge.

Erbaş, A., Kertil, M., Çetinkaya, B., Çakiroğlu, E., Alacaci, C. y Baş, S. (2014). Mathematical modeling in mathematics education: Basic concepts and approaches. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *14* (4), 1621–1627. https://doi.org/10.12738/estp.2014.4.2039

Guerrero-Ortiz, C. y Borromeo Ferri, R. (2022). Pre-service teachers’ challenges in implementing mathematical modelling: Insights into reality. *PNA*, *16*(4), 309–341. https://doi.org/10.30827/pna.v16i4.21329

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta ed). McGrall Hill.

Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 302–310.

Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2022). Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. *Mathematics Education Research Journal.* Primero online. https://doi.org/10.1007/s13394-022-00411-3

Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–33). Lawrence Erlbaum Association.

Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programas de estudio de matemáticas: I, II y III ciclos de la educación general básica y ciclo diversificado*. Autor. https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E. y Adamuz-Povedano, N. (2021). A tool for the analysis and characterization of school mathematical models. *Mathematics, 9*(13), 1569.

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2019). Componentes de conocimiento del profesor para la enseñanza de la resolución de problemas en educación primaria. *PNA*, *13*(2), 104–129. https://doi.org/10.30827/pna.v13i2.7876

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2022). La investigación sobre el profesor de primaria y la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. En L. Medina, C. Pérez y C. Suárez (Coords.), *Experiencias en contenidos curriculares docentes* (pp. 343–356). Tirant Lo Blanch.

Rico, L. (2001). Análisis conceptual e investigación en didáctica de la matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 179–193). Editorial Universidad de Granada.

Precaución: La resolución de problemas puede generar descubrimiento matemático. El caso de las tuberías.

Rodrigo **Rojas-Muñoz**
Universidad Austral de Chile
Chile
rodolforojas@uach.cl

Palabras clave: Problema de Herón; Resolución de Problemas; Optimización; Aprendizaje Colaborativo.

Contexto

Este descubrimiento se produjo en un taller estudiantes de enseñanza secundaria (13-18 años) de un Club matemático escolar.

El problema de las tuberías

Dos ciudades A y B van a tener un abastecimiento de agua en un río recto que está a *a* km de la ciudad A y a *b* km de la ciudad B. Si los puntos sobre el río más cercano a A y B están separados por *c* km y A y B están en el mismo lado del río, ¿dónde debe estar localizada la estación de bombeo para que se necesite la menor cantidad de tubería?

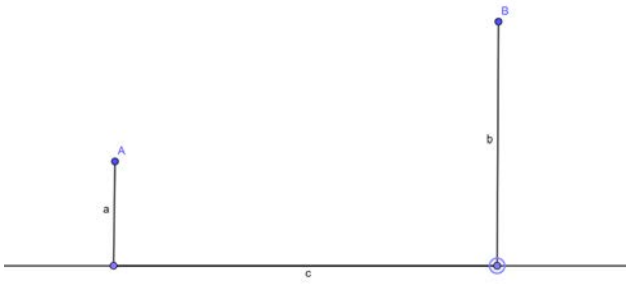


Figura 1. Esquema del problema de las tuberías.

La solución canónica

Este problema se resuelve tradicionalmente mediante derivadas o mediante reflexión. Se refleja axialmente A alrededor del río para obtener A'. Se calcula la distancia d' de B a A'. Esto define un punto C en el río que marca la ubicación de la estación de bombeo. Luego, el largo de las tuberías es igual a

$$d' = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$$

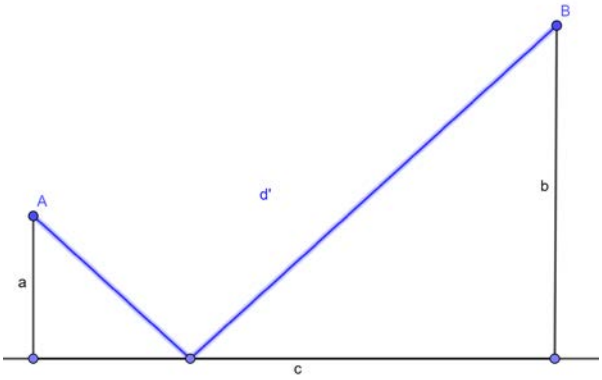


Figura 2. Esquema de resolución del problema de las tuberías por reflexión.

La tarea

Una familia quiere conectar tuberías que unan las dos casas que tienen en un campo con una sola bomba de agua en canal recto. Si una casa está a 10 m del canal y la otra casa está a 20 metros del canal, además los puntos del canal más cercanos a cada casa están a 20 metros entre sí. ¿dónde debe ser ubicada la bomba de agua para que el diseño ocupe menos tubería?

La solución canónica

$$d' = \sqrt{(10+20)^2 + 20^2} = 10\sqrt{13}\, m$$

El descubrimiento

La mayoría de los equipos de la clase llegó a la conclusión tradicional, pero un equipo prefirió un camino que conectara las casas con una tubería y que desde su punto medio saliera una tubería hacia el río. Luego, corrigieron la ubicación hasta darse cuenta que la tubería de menor longitud debía pasar por la casa A.

$d'' = \sqrt{(b-a)^2 + c^2} = \sqrt{(20-10)^2 + 20^2}$
$= 10\sqrt{5}\, m < 10\sqrt{13}\, m$

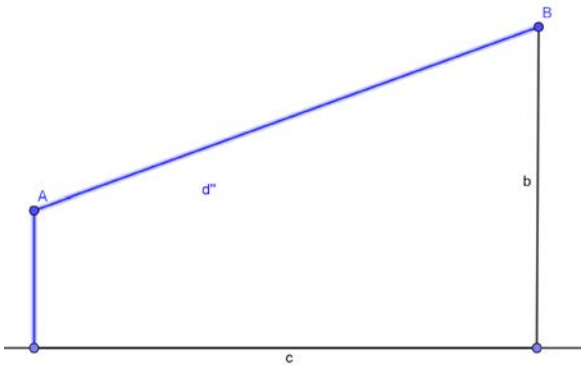


Figura 3. Esquema de resolución del problema pasando la tubería por A.

El teorema

Si A está en el eje Y, existe una hipérbola tal que si B está en la hipérbola las distancias $d' = d''$. La ecuación de la hipérbola es:

$$4\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$$

Si B está arriba de la hipérbola, entonces

$$d' > d''$$

Si B está debajo de la hipérbola, entonces

$$d' < d''$$

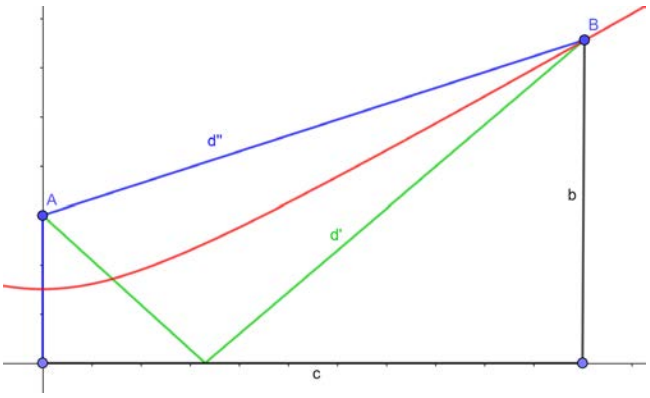


Figura 4. Esquema de la hipérbola de equidistancia.

Reflexiones

- El trabajo colaborativo genera discusión y la discusión genera descubrimiento matemático.
- La resolución de problemas crea un ambiente donde se hace matemática.
- Esté preparado para el pensamiento creativo y divergente.

Referencias y bibliografía

Johnson, D.W., Johnson, R.T. y Holubec, E.J. (1994). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Editorial Paidós SAICF, Argentina.

Morales C., A., Damián M., A., Locia, E. y Contreras, M.G. (2022). Uso de Geogebra para mejorar la comprensión de la resolución de problemas de optimización en el bachillerato. *Números*, 111, 71-89.

Sánchez P., J.A., De la Fuente B., D. y Zamora S., A. (2020). Optimización en Bachillerato: el problema de Herón. *Números*, 104, 75-82.

Problemas de cuadratura de polígonos: pruebas y argumentaciones en el bachillerato

José Luis **López** Hernández
Escuela Nacional Preparatoria Antonio Caso, UNAM
México
jose.lopez@enp.unam.mx

Resumen

En este artículo se reportan los resultados de la aplicación de una estrategia didáctica para explorar el tipo de pruebas y argumentaciones dadas por estudiantes de bachillerato de una escuela pública de la Ciudad de México, al resolver de manera colaborativa, en parejas, problemas de tipo geométrico en torno a la cuadratura de polígonos en ambiente de lápiz-y-papel. De acuerdo con la literatura de investigación relacionada con este tema, se observa que sus pruebas y argumentaciones se apoyan en evidencias empíricas a partir de figuras geométricas; sin embargo, también hay estudiantes que hacen buen uso de un razonamiento deductivo formal y de un lenguaje simbólico claro y ordenado propio de las matemáticas.

Palabras clave: Cuadratura, polígonos, resolución de problemas, geometría, pruebas y argumentaciones.

Introducción

El razonamiento es un elemento fundamental en el estudio y desarrollo de las matemáticas, contribuye en la organización de las ideas y en la articulación del discurso. Para Balacheff (1987) no se debe esperar que los estudiantes de bachillerato razonen de una manera rigurosa y formal, dado que en este nivel educativo básicamente ellos comienzan a aprender, a usar las matemáticas y a comprender y manejar sus métodos de demostración.

Para Hanna y Barbeau (2008), la elaboración de una prueba contribuye al desarrollo de nuevas ideas matemáticas y proporciona a los estudiantes nuevas estrategias y métodos para la resolución de problemas.

Es por ello que en esta investigación se ha decidido poner atención en el problema de las cuadraturas, que consiste en construir un cuadrado de área igual a la de un polígono dado y construir, en general, figuras de áreas iguales (Boyer, 1999; Boltyanskii, 1973; Collette, 2006, entre otros), figuras planas cuya área permanece constante (Galván, 2005).

Marco conceptual

Dentro de la comunidad matemática la demostración se sigue a través de un razonamiento deductivo válido, formal y riguroso. Por ejemplo, Zaslavsky et al, (2012), comentan que dadas ciertas suposiciones un propósito de la demostración es explicar por qué una afirmación es verdadera. Sin embargo, en el ámbito de la matemática educativa la demostración ha sido abordada desde distintos enfoques. De acuerdo con diferentes investigaciones, se ha discutido la importancia de la demostración y sus grados de validez; es decir, la demostración se refiere a un proceso de argumentación que genera y valida conocimientos. Asimismo, se ha puesto énfasis en los tipos de argumentación dados por los estudiantes en los diversos niveles educativos.

Por ejemplo, para Grabiner (2012), las demostraciones proporcionan explicaciones para convencer de la validez y sentido de algún resultado, llevan a cabo verificaciones al ayudar a distinguir entre lo verdadero y lo plausible y logran el descubrimiento de propiedades. Balacheff (1987) menciona dos tipos de demostraciones: (a) las intelectuales, apoyadas en propiedades matemáticas y en las relaciones que existen entre ellas y, (b) las pragmáticas, en que los estudiantes recurren a la acción y a ejemplos concretos, las cuales se subdividen en varios tipos: el empirismo ingenuo, la experiencia crucial, el ejemplo genérico y la experiencia mental.

Camargo, Perry y Samper (2005) destacan la importancia del razonamiento y la visualización. Hanna (1990), así como Siñeriz y Ferraris (2005), se refieren al tipo de lenguaje y grado de formalidad utilizados en la demostración, como son la prueba formal, la prueba que demuestra y la prueba que explica; además de la argumentación deductiva formal y la argumentación deductiva coloquial.

La argumentación deductiva formal se caracteriza por llevar a cabo una serie de inferencias lógicas y válidas basadas en las hipótesis, propiedades, axiomas o definiciones; así. un argumento válido se deduce de la validez de sus premisas y es común el uso de expresiones simbólicas. Mientras que la argumentación deductiva coloquial ocurre cuando el sujeto efectúa inferencias basadas en las hipótesis, propiedades o definiciones, y trata de dar una explicación, sobre todo, por medio del lenguaje coloquial.

Metodología

En esta investigación de tipo cualitativo participaron 12 estudiantes (entre 16 y 17 años de edad) de distintos grupos de bachillerato en la Ciudad de México, que cursaban en ese momento la asignatura Matemáticas V. Los estudiantes trabajaron de manera colaborativa en equipos de dos integrantes cada uno; ellos fueron videos grabados mientras resolvían problemas de cuadratura de polígonos en ambiente de lápiz-y-papel. El acopio de datos se llevó a cabo por medio de videograbaciones y hojas de trabajo.

Como parte de esta investigación, en este artículo sólo se reporta el trabajo de dos de los equipos resolviendo el Problema 1, del cual se habla en el siguiente apartado.

Resultados y análisis

En seguida se muestran algunos extractos de la discusión y reflexión que llevaron a cabo los estudiantes (Pepe y Toño) del Equipo 1 y las estudiantes (Luna y Perla) del Equipo 2 al resolver el Problema 1, así como la descripción y el análisis de los datos obtenidos en relación con sus respuestas. Cada equipo trabajó por separado, en pareja, de manera colaborativa. Ellos compartieron conocimientos y discutieron acerca de sus soluciones en cada problema. La recolección de los datos se llevó a cabo por medio de videograbaciones que evidencian el trabajo de las y los estudiantes, así como sus respuestas por escrito.

Problema 1.
En la Figura 1, las rectas l_1, l_3 y l_5 son, respectivamente, paralelas a las rectas l_2, l_4 y l_6, y H es punto medio de $\overline{EG}$.

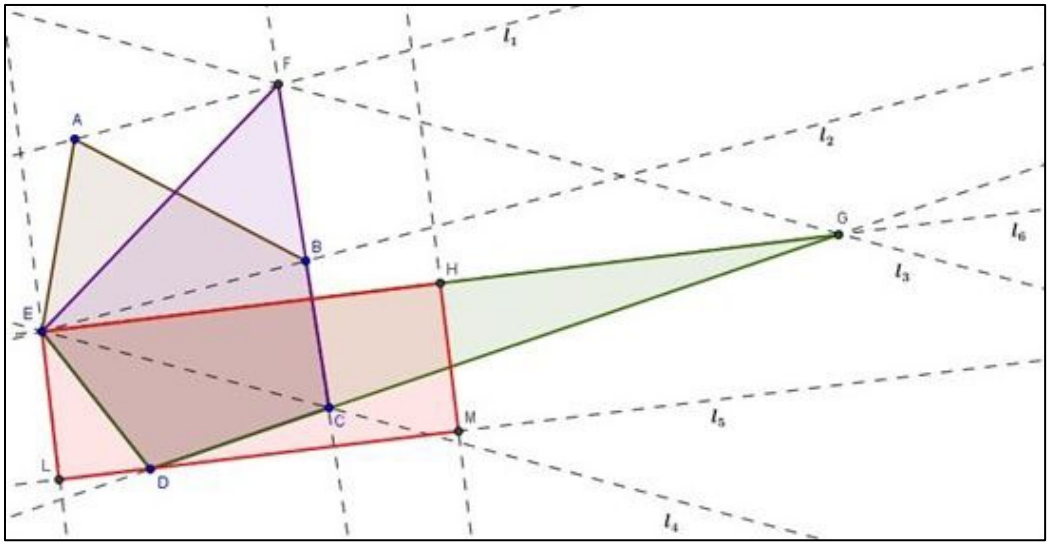


Figura 1. Polígonos de la misma área y de perímetro distinto.

(a) Prueba que las áreas de:

(i) ⬟*ABCDE* [1] con la del ◊*CDEF* [2],

(ii) ◊*CDEF* con la del △*DEG* [3],

(iii) △*DEG* con la del □*EHML* [4] son iguales.

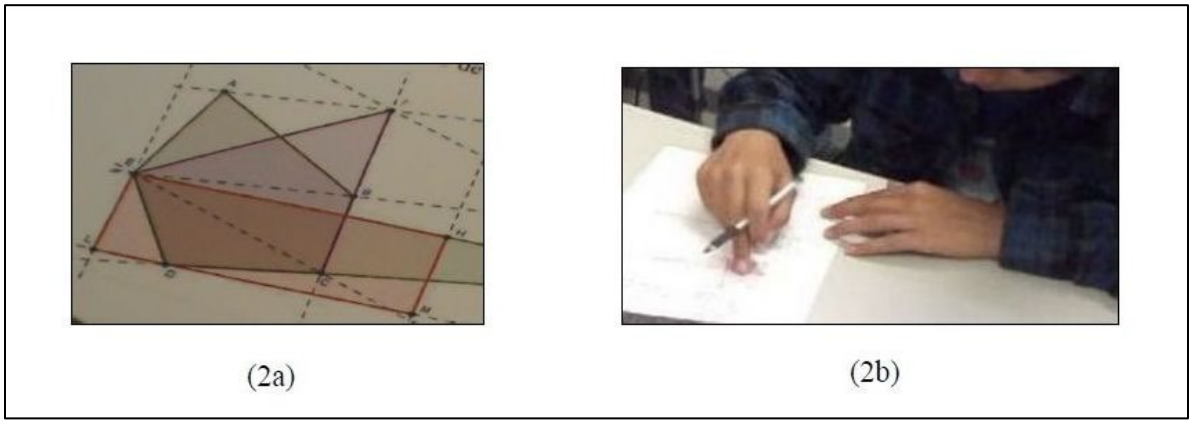
Desarrollo y análisis de la solución del Problema1

Equipo 1. Argumentación deductiva formal

[1] ⬟*ABCDE* se refiere a cualquier pentágono cuyos vértices son los puntos A, B, C, D y E.
[2] ◊*CDEF* se refiere a cualquier cuadrilátero cuyos vértices son los puntos C, D, E.y F.
[3] △*DEG* se refiere a cualquier triángulo cuyos vértices son los puntos D, E y G.
[4] □*EHML* se refiere a cualquier rectángulo cuyos vértices son los puntos E, H, M y L.

(a) (i) Igualdad de las áreas de ⬟*ABCDE* y de ◊*CDEF*

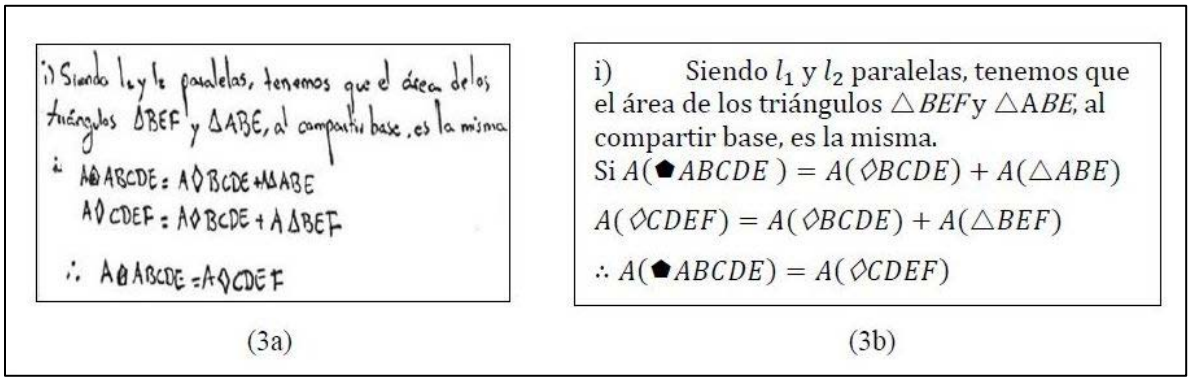
Pepe: Ah, estos [⬟*ABCDE y ◊CDEF; Figura 2a*] tienen áreas en común [*señala con su dedo ◊BCDE; Figura 2b*] y estos [*señala con su dedo △ABE y △FBE*] tienen la misma altura. Y como su base es común…



(2a) (2b)

Figura 2. En (2b), Pepe explica a Toño por qué las áreas de ⬟*ABCDE* y de ◊*CDEF* que se muestran en (2a) son iguales.

Toño*:* Sí, ya con eso. [*En seguida comienzan a escribir la prueba que se muestra en la Figura 3a*].



(3a) (3b)

Figura 3. Prueba escrita de Pepe y Toño para la sección (a) (i) de que las áreas de ⬟ABCDE y ◊CDEF son iguales.

(a) (ii) Igualdad de las áreas de ◊*CDEF* y de △*DEG*

Pepe: Esta área [*señala con su dedo △CDE*] es común a ambas [*señala con su dedo ◊CDEF y △DEG*] y estas dos [*señala con su dedo las rectas l_3 y l_4*] son paralelas. [*Véase la Figura 4a*]

Pepe y Toño: Entonces estos dos triángulos son iguales [*Pepe señala con su dedo △CEF y △CEG*].

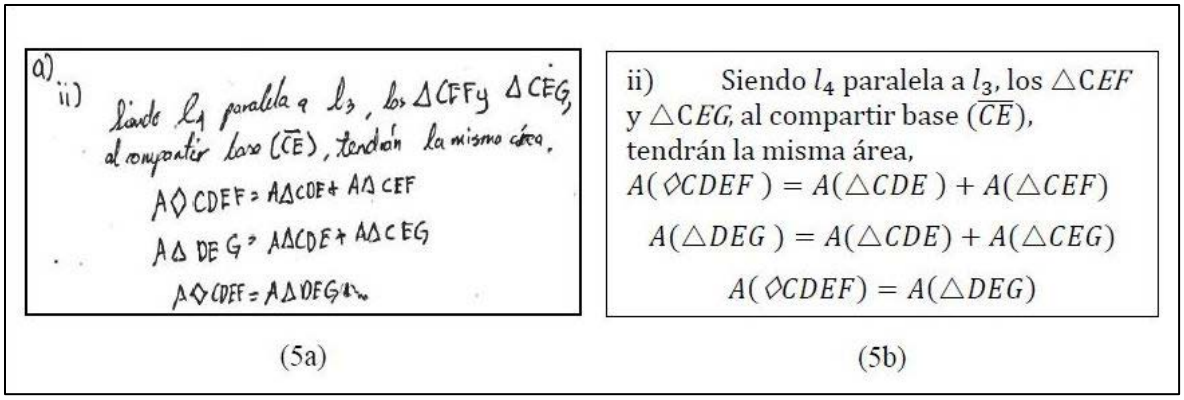
Toño: Sí, este punto [*se refiere al punto de intersección del lado $\overline{CF}$ de ◊CDEF con el lado $\overline{EG}$ de △DEG*]… Si *P* es el punto de intersección del lado $\overline{CF}$ de ◊*CDEF* con el lado $\overline{EG}$ de △*DEG*, entonces, la región común a ambos polígonos es ◊*CDEP* [*se refiere a* la región común entre ◊*CDEF* y △*DEG*]. Y al recortar lo común…

Pepe: Sí, este triangulito [*señala con su dedo* $\triangle CDE$*; Figura 4b*] es común, y ya los otros [*se refiere a* $\triangle CEF$ *y* $\triangle CEG$] tienen áreas iguales.

(4a) (4b)

Figura 4. En (4a) Pepe y Toño identifican las paralelas l_3 y l_4 relacionadas con ◊CDEF y △DEG, y en (4b) identifican la región común a estos polígonos.

A continuación, los estudiantes escriben su respuesta en el papel (Figura 5).



(5a) (5b)

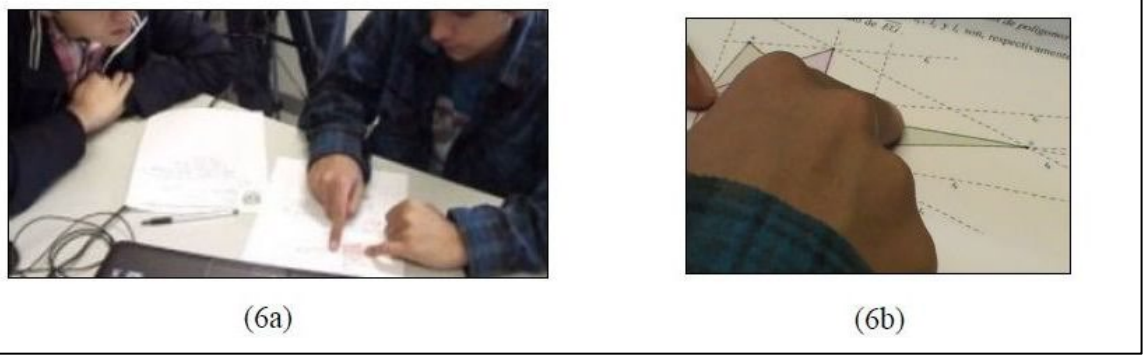
Figura 5. Prueba escrita de Pepe y Toño para la sección (a) (ii) de que las áreas de ◊CDEF y △DEG son iguales.

(a) (iii) Igualdad de las áreas de $\triangle DEG$ y de $\square EHML$

Pepe: Ahora para $\triangle DEG$ y $\square EHML$ (Figura 6a), como nos dijeron que este es punto medio [*se refiere a H*] pues sí, ya está. [*Se refiere a que con eso ya es suficiente, que ya está probado.*]

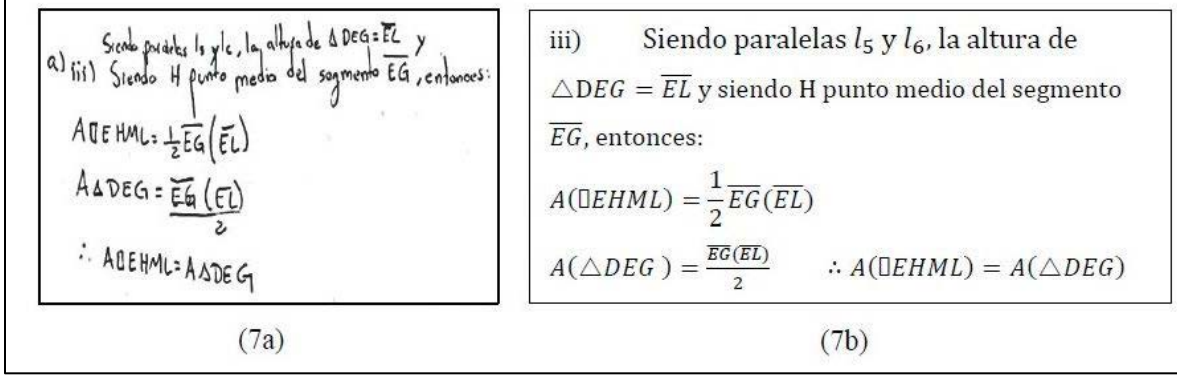
Toño: Ah, es lo mismo, sí; porque son paralelas ésta y ésta [*señala con su dedo* l_6 *y* l_5]. Sí, ya está.

A continuación, los estudiantes escriben su respuesta en el papel (Figura 7).



(6a) (6b)

Figura 6. Pepe explica a Toño la igualdad de las áreas de △DEG y □EHML.



(7a) (7b)

Figura 7. Prueba escrita de Pepe y Toño para la sección (a) (iii) de que las áreas de △DEG y □EHML son iguales.

Durante la resolución del Problema 1, los estudiantes del Equipo 1dialogaron e intercambiaron conocimientos haciendo uso del lenguaje coloquial, que en ocasiones fue impreciso; sin embargo, es de llamar la atención el uso del lenguaje simbólico formal en sus respuestas por escrito. Pepe y Toño explicaron y justificaron por qué son iguales las áreas de los polígonos de interés. Ellos incorporaron conocimientos previos relacionados con conceptos básicos de geometría que desde un principio pusieron en acción, como se muestra en sus diálogos y en las figuras 3 a 7.

En la resolución del Problema1 se manifiesta la presencia de la argumentación deductiva formal por parte de los estudiantes del Equipo E1.

Equipo 2. Argumentación deductiva coloquial

(a) (i) Igualdad de las áreas de ⬟*ABCDE* y de ◊*CDEF*

Luna: [⬟*ABCDE* y ◊*CDEF*] tienen esto de área en común [*comienza señalando el punto E*], [*el cuadrilátero*] *EBCD* es común, su área es común [◊*EBCD es común a* ⬟*ABCDE y a* ◊*CDEF*]. Y como l_1 y l_2 son paralelas, entonces estos triángulos que sobran [*se refiere a* △*ABE y* △*FBE y los señala con su dedo*] tienen la misma base y la misma altura,

entonces son iguales [*se refiere a que △ABE y △FBE son iguales en área*]. [*Véase la Figura 8*]

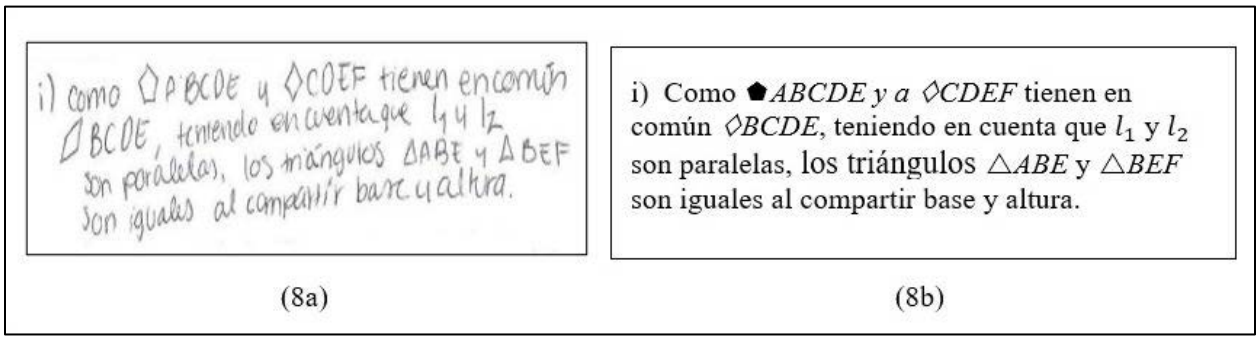


Figura 8. Prueba escrita de Luna y Perla de que las áreas de ⬟*ABCDE y ◊CDEF* son iguales.

(a) (ii) Igualdad de las áreas de ◊*CDEF* y de △*DEG*

Luna: [...] Su área común es ésta, ¿no? [*Señala con su dedo el área determinada por el cuadrilátero común a ◊CDEF y a △DEG*]

Perla: […] Sí, podemos añadir un punto aquí… N. [*Le llama N al punto de intersección de* $\overline{CF}$ *y* $\overline{EG}$]. [...] Pero, ésta y ésta son paralelas [*se refiere a las rectas* l_3 y l_4]. [*ver Figura 9*] [...] Ah, en vez de poner el cuadrilátero común [◊*CDEN*] mejor poner [△] *CDE* [*señala dicho triángulo*], y ya te queda ésta [*se refiere al segmento* $\overline{CE}$] como base de este triángulo [*señala △CFE*] y de este otro triángulo [*señala △CEG*].

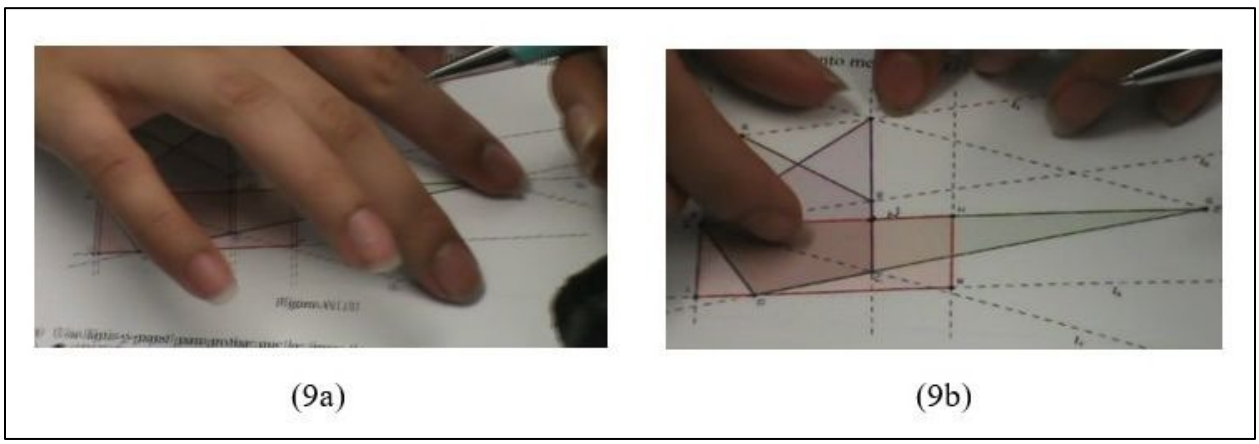


Figura 9. Perla explica a Luna que las rectas l_3 y l_4 son paralelas y cuál es la importancia del segmento $\overline{CE}$.

Luna: Ah, sí. Y como comparten base…

Perla: Comparten base y altura.

Luna: [...] Sí, entonces las áreas totales son iguales. [*Véase la Figura 10*]

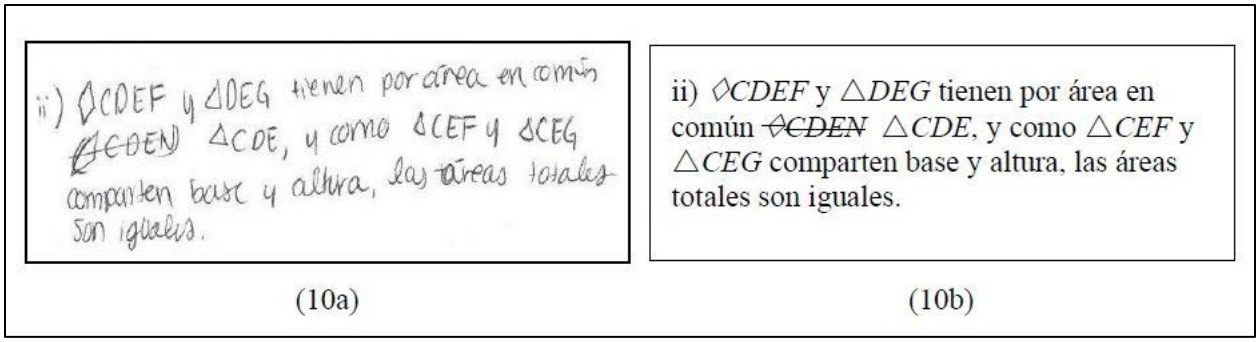


Figura 10. Prueba escrita de Luna y Perla de que las áreas de ◇*CDEF* y △*DEG* son iguales.

(a) (iii) Igualdad de las áreas de △*DEG* y de ▯*EHML*

Luna: Son paralelas [*se refiere a las rectas* l_5 *y* l_6]

Perla: H es punto medio [del segmento $\overline{EG}$]. [*Perla señala el punto H. En seguida Luna señala el punto G y Perla señala también el punto E*]

Luna: Sí, el triángulo [△*DEG*] tiene el doble de la base [*se refiere al segmento* $\overline{LM}$ de ▯*EHML*; *el cual señala con su dedo*], y estos tienen la misma altura [*se refiere al* ▯*EHML y a* △*DEG*]. [...] Entonces, sus áreas son iguales [de △*DEG* y ▯*EHML*]. [*Véase la Figura 11*]

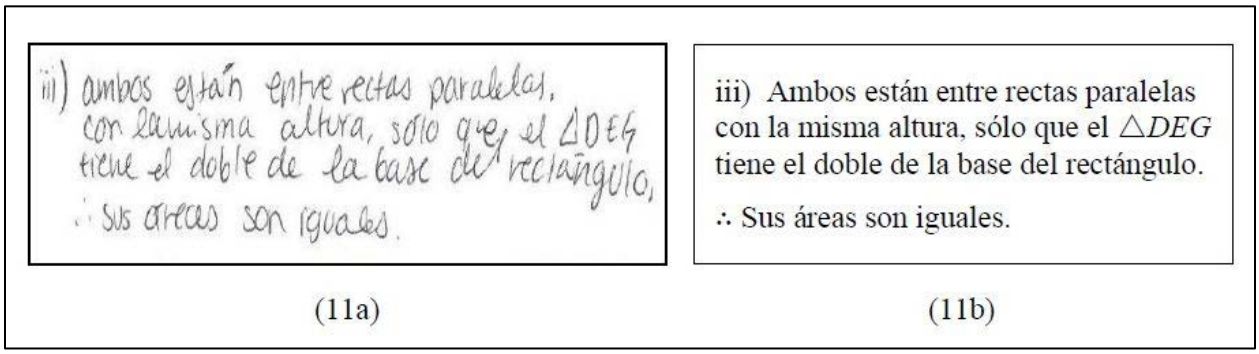


Figura 11. Prueba escrita de Luna y Perla de que las áreas de △*DEG* y ▯*EHML* son iguales.

Durante la resolución del Problema 1, las estudiantes del Equipo 2 intercambiaron conocimientos haciendo uso del lenguaje coloquial, que en ocasiones fue impreciso. Luna y Perla incorporaron conocimientos previos relacionados con conceptos básicos de geometría que desde un principio pusieron en acción para explicar y justificar por qué son iguales las áreas de los polígonos de interés, como se muestra en sus diálogos y en las figuras 8 a11.

En la resolución del Problema1 prevalece la argumentación deductiva formal por parte de las estudiantes del Equipo E2.

Conclusiones

A la luz del análisis de los datos del trabajo realizado por los estudiantes de ambos equipos en torno al Problema 1 en relación con la cuadratura de polígonos, se observa que Pepe y Toño, integrantes del Equipo 1, sí utilizaron un lenguaje simbólico formal con claridad y elaboraron de manera aceptable las demostraciones por medio de una argumentación deductiva formal, dado que llevaron a cabo una serie de inferencias lógicas y válidas basadas en las hipótesis, en las propiedades y en las definiciones.

Mientras que Luna y Perla, integrantes del Equipo 2, sólo dieron explicaciones mediante el uso del lenguaje coloquial, tanto en su argumentación oral como en sus respuestas por escrito, a pesar de haber efectuado inferencias basadas en las hipótesis, en las propiedades y en las definiciones, Ellas llevaron a cabo una argumentación deductiva coloquial.

El diseño e implementación de estas actividades es muy importante, brinda a los estudiantes nuevas estrategias para la resolución de problemas en geometría y les ayuda a desarrollar un pensamiento lógico y un razonamiento intuitivo que con la guía del profesor puede encaminarse al desarrollo de un razonamiento deductivo formal de los objetos geométricos.

Referencias y bibliografía

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(12), 147-176.

Boltyanskii, V. G. (1973). *Figuras equivalentes y equidescomponibles*. México. Editorial Limusa.

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Camargo, L., Perry, P. y Samper, C. (2005). La demostración en la clase de geometría: ¿puede tener un papel protagónico? *Educación Matemática*, 17(3), 53-76.

Collette, J. P. (2006). *Historia de las matemáticas I*. México: Siglo XXI Editores.

Galván, C. (2005). Cuadratura de polígonos. *Unión*, *1*, 7-15.

Grabiner J.V. (2012). "Why proof? A historian's perspective". En Hanna, G., de Villiers, M. (Eds.), *Proof and proving in mathematics education*. The 19th ICMI Study (pp. 147–167).

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13. https://doi.org/10.1007/BF01809605

Hanna, G. & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 40*(3), 345-353.

Siñeriz, L. y Ferraris, C. (2005). Tipos de prueba: una de las categorías de un Modelo Teórico del proceso de aprendizaje de la demostración en geometría. *Memorias del VII Simposio de Educación Matemática*, Chivilcoy, Argentina. Vol. XII.

Zaslavsky, O., Nickerson, S., Styliandes, A., Kidron, I. & Winicki, G. (2012). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. In Hanna, G., de Villiers, M. (Eds.), *Proof and proving in mathematics education*. The 19th ICMI Study (pp. 215-229).

Problemas de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma análise das estratégias dos alunos

Susane Cristina Pasa **Pelaquim**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
susipasa@gmail.com
Karina Alessandra Pessoa **da Silva**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
karinasilva@utfpr.edu.br

Resumo

Neste artigo fazemos uma análise qualitativa das estratégias utilizadas por alunos de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental para resolver um problema de modelagem matemática. Para isso, nos subsidiamos na semiótica peirceana que possibilita inferir sobre a produção e a utilização de signos para se referir a um objeto. Partindo de uma situação da realidade, os alunos estabeleceram estratégias para chegar a uma solução para um problema de modelagem em que signos gesticulados, falados e escritos se articularam com os objetos relativos ao problema, às hipóteses e à matemática empregada sob questionamentos e orientações da professora.

Palavras-chave: Educação Matemática; Modelagem Matemática; Problema de modelagem; Semiótica; Ensino Fundamental.

Introdução

Na Educação Matemática, a modelagem matemática refere-se, em termos gerais, à investigação de uma situação da realidade por meio da matemática (Almeida et al. 2012, Niss & Blum, 2020). Trata-se de uma observação do mundo ao nosso redor de modo a apresentar soluções para um problema formulado.

Formular um problema de modelagem pode se configurar como um desafio, pois é preciso identificar ao nosso redor uma situação possível de ser analisada matematicamente. Documentos oficiais do Ensino Fundamental, no Brasil, asseveram que os procedimentos matemáticos suscitados por meio da modelagem, por exemplo, "são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação)" (Brasil, 2018, p. 266).

Todavia, além da análise matemática, "um problema de modelagem também deve fornecer espaço para que os alunos interpretem o problema e tenham escolhas no processo de solução" (Bliss & Libertini, 2016, p. 12). Essas escolhas podem estar subsidiadas em estratégias dos alunos ao levantar hipóteses sobre a situação em estudo, buscar informações por meio da coleta de dados, identificar e selecionar variáveis, realizar simplificações, representar matematicamente a situação, validar essa representação e comunicar os resultados para os pares (Almeida et al., 2012).

Analisar estratégias que alunos de um 5º ano do Ensino Fundamental utilizaram para resolver um problema de modelagem matemática é nosso foco de análise neste artigo. Entendemos que a mobilização das estratégias é evidenciada por uma multiplicidade de linguagens e representações que os alunos utilizam para resolver um problema de modelagem. Levando em consideração esse fato, nos pautamos na semiótica peirceana que investiga os signos escritos, falados e gesticulados que uma pessoa (intérprete) utiliza para se referir a algo (objeto) (Peirce, 1972). O objeto, em nossa investigação, é o problema de modelagem formulado com uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal brasileira.

Modelagem matemática e semiótica peirceana

Em uma atividade de modelagem matemática parte-se de uma situação inicial (problemática) e, por meio de procedimentos matemáticos, chega-se à uma situação final, uma solução para o problema (Almeida et al., 2012). De modo geral, um problema é entendido como uma situação em que o sujeito identifica qual é seu objetivo, mas não identifica imediatamente meios para atingir esse objetivo (Dörner, 1976). Segundo Elfringhoff & Schukajlow (2021, p. 10) "problemas em modelagem são centrados em uma situação real e requerem uma transferência exigente entre o mundo real e a matemática" (Elfringhoff & Schukajlow, 2021, p. 10).

Solicitar aos alunos que formulem um problema de modelagem e coletem dados empíricos pode ser uma ação que permite inseri-los na atividade de modelagem, promovendo estratégias de resolução. Hartman (2001) caracteriza estratégia como uma operação consciente e planejada e que, embora possa ser aprendida e aplicada conscientemente, no decorrer do tempo pode ter um uso inconsciente.

Por meio do encaminhamento das estratégias para solucionar o problema de modelagem formulado, culmina uma representação matemática, um modelo matemático que tem como objetivo "descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação, responder às perguntas formuladas [...] e até mesmo, em alguns casos, viabilizar a realização de previsões" (Almeida et al., 2012, p. 16). Para Tortola (2016), o modelo matemático deduzido nos anos

iniciais do Ensino Fundamental, apresenta especificidades quanto à simbologia matemática, sendo apresentado de diferentes formas, desde que esteja estruturado e baseado em conceitos matemáticos que o sustente e solucione a situação apresentada. Neste sentido, um modelo matemático pode ser representado por meio de esquemas, gráficos, desenhos, materiais manipuláveis, colagens e língua natural.

A diversidade de representações que um modelo matemático pode assumir está relacionada com os signos produzidos ou utilizados pelos alunos. O signo representa o objeto. Dizer que um signo "representa seu objeto implica que ele afete uma mente, de tal modo que, de certa maneira, determine naquela mente algo que é mediatamente devido ao objeto" (Santaella, 2008, p. 58). Esse "algo" corresponde a um signo – interpretante – criado na mente do intérprete.

Peirce (1972) organizou seus estudos por meio de uma arquitetura triádica na qual o signo estabelece mediação entre objeto e interpretante. Segundo Santaella (2007, p. 7), "o signo é um primeiro (algo que se apresenta à mente), ligando um segundo (aquilo que o signo indica, se refere ou representa) a um terceiro (o efeito que o signo irá provocar em um possível intérprete)". Para Santaella (2012, p. 8), é a mente "que constrói o mundo, de acordo com um potencial que lhe é próprio, a partir de uma matéria bruta fornecida pelos sentidos".

Considerando um problema de modelagem formulado, estratégias para sua solução podem ser evidenciadas pelos signos produzidos ou utilizados por alunos de um 5º ano do Ensino Fundamental. Corroboramos com English (2010, p. 288) que afirma que a implementação da modelagem matemática na sala de aula "fornece às crianças ricas oportunidades para experienciar dados complexos em contextos desafiadores e, ainda, significativos" (English, 2010, p. 288).

Procedimentos metodológicos

Neste artigo trazemos resultados parciais de uma pesquisa de mestrado desenvolvida em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental, formada por 18 alunos de uma escola municipal brasileira. Para analisarmos as estratégias que esses alunos utilizaram para resolver um problema de modelagem nos pautamos nos signos produzidos ou utilizados por eles.

Para isso, nos valemos dos relatórios escritos, bem como das gravações em áudio e vídeo no desenvolvimento de uma atividade de modelagem cujo problema foi formulado pela professora: Quantas pedaladas preciso dar para percorrer o caminho da escola até minha casa? Esse problema foi inserido na terceira atividade de modelagem matemática implementada na referida turma e teve duração de 4 aulas, de 1 hora e 30 minutos, distribuídas entre os dias 10 e 16 de maio de 2022. As discussões foram transcritas na íntegra de modo a se constituírem dados para análise. A análise qualitativa de cunho interpretativo é respaldada na articulação com o referencial teórico.

A equipe diretiva e pedagógica da escola autorizou a realização da pesquisa, além disso, foi solicitado o consentimento dos pais ou responsáveis, a partir do preenchimento e assinatura de um termo livre e esclarecido, autorizando o uso dos dados coletados. De modo a preservar as identidades dos alunos, utilizamos nomes fictícios ao longo do texto.

Estratégias evidenciadas no desenvolvimento de uma atividade de modelagem

A primeira ação para o desenvolvimento da atividade foi solicitada pela professora como tarefa: *anotar no caderno o endereço de casa*. No dia seguinte à solicitação da tarefa, com os registros escritos dos alunos, a distância da casa até a escola de cada um deles foi determinada com o auxílio do Google Earth. Os alunos falavam o endereço da casa e todos observavam, por uma projeção utilizando o Datashow, o caminho e a distância a ser percorrida. Na Figura 1 apresentamos a projeção do caminho e a distância (232,14 m) da casa de Tati (uma das alunas do 5º ano).

Figura 1. Caminho e distância da casa de Tati até a escola.

Ao conhecerem a distância e o caminho que cada colega percorria para chegar à escola, a professora questionou: *Se eu vier de bicicleta para a escola, quantas pedaladas tenho que dar para percorrer a distância da minha casa até na escola?* Tratava-se de um problema que corresponde a uma situação em que há um objetivo, porém ainda não estavam claros meios para atingi-lo (Dörner, 1976).

Em busca de uma solução para essa situação, alguns alunos sugeriram como iriam medir o tamanho da pedalada, como podemos observar na transcrição a seguir:

João: Deixar um pedal aqui e o outro aqui, [coloca uma mão na frente do corpo e outra mão próxima ao corpo para definir a distância dos dois pedais] tem que medir daqui até chegar nesse daqui.
Professora: Tá, mas essa é a distância que você percorreu no chão?
João: Não, então tem que medir amanhã [se referindo a trazer a bicicleta no dia seguinte].
Professora: Tá, mas nós vamos medir no pedal?
João: Sim.
Professora: No pedal?
José: Não!
Professora: Onde, José?
José: Assim, empresta a régua. [segura régua e define a posição dos pedais no início e fim da régua]. O pedal daqui até aqui você vai medir assim [régua na horizontal]. Ele vai ter que girar [gira a régua para a posição vertical].
Professora: Tá, e quanto eu andei na rua está medindo aí?
José: [pensativo]
Professora: Quando o pedal faz esse movimento eu vou medir onde?
João: Mede contando, uma, duas, três, quatro, cinco, seis, sete…. [fazendo o movimento com o corpo como se estivesse pedalando].
Professora: É?
José: [balança os ombros, expressando dúvida].
Professora: Amanhã, com a bicicleta a gente consegue ver melhor esta situação né?
Alunos: Sim

Podemos evidenciar que os alunos entenderam que, ao medir a distância dos pedais e contar quantas pedaladas dariam, estariam medindo a distância que estão percorrendo. O problema formulado pela professora promoveu espaço para interpretação e "escolhas no processo de solução" (Bliss & Libertini, 2016, p. 12), ou seja, se configurou como um problema de modelagem.

Com os questionamentos da professora, o aluno José ficou com dúvidas, havendo necessidade de vivenciar a experiência de andar de bicicleta para perceber como obter o espaço percorrido. José produziu signos interpretantes relacionados à ação de manipular o objeto físico – bicicleta – para solucionar o problema de modelagem – objeto da atividade em estudo. Desse modo, "a partir de uma matéria bruta fornecida pelos sentidos" (Santaella, 2012, p. 8), os alunos produziram signos relativos à estratégia para resolver a situação, via medição da professora. Porém, ainda não estavam certos sobre o que mediriam.

Na aula seguinte, duas bicicletas de alunos foram levadas para a escola. Então, a turma foi dividida em dois grupos com nove alunos cada. Mas antes de cada grupo realizar os procedimentos com as bicicletas, foi promovida uma discussão em sala de aula para perceberem que teriam que medir o espaço que o pneu da bicicleta percorria ao dar uma pedalada. Esta percepção só foi possível ao verem o movimento da pedalada. De acordo com Santaella (2012), a vivência de uma experiência, analisada com questionamentos, mudou o conceito de que a distância dos pedais mede o espaço que a bicicleta percorre ao dar as pedaladas. Na mente do intérprete houve uma ruptura de significado de como medimos o espaço que percorremos ao dar pedaladas. As estratégias planejadas para a coleta de dados possibilitaram evidenciar relações com o problema de modelagem.

Para a coleta de dados, os alunos foram até o pátio da escola. Cada grupo com uma bicicleta iniciou a coleta, medindo o comprimento da circunferência do pneu, com auxílio de barbante e trena (Figura 2).

Figura 2. Alunos coletando dados.

De modo a demarcar a distância de uma pedalada, marcaram com giz a posição inicial do pneu, deram uma pedalada e marcaram a posição em que o pneu parou. Dessa forma, conseguiram medir o espaço percorrido por uma pedalada.

Considerando a aula de matemática, ao retornarem à sala de aula, a professora definiu conceitos matemáticos referentes a círculo e circunferência. Os alunos construíram novos signos para as formas que eles já conheciam, por meio de relação do que se conhece com o que este representa (Santaella, 2007), construindo conceitos na mente do intérprete com relação aos objetos matemáticos círculo e circunferência.

Com a medida da distância percorrida com uma pedalada (229 cm), os alunos definiram hipóteses para calcular a quantidade de pedaladas, além disso, consideraram um percurso plano e manter uma marcha na bicicleta.

Para responder o problema, os alunos fizeram transformações de medidas (deixaram tudo em centímetros ou tudo em metros) e realizaram a divisão da distância de suas residências até a escola. No caso de Tati, cuja distância da casa até a escola é de 232,14 m, ela teria de dar cerca de 101 pedaladas (Figura 3). O modelo matemático foi revelado por meio da linguagem simbólica conhecida pelos alunos dos anos iniciais (Tortola, 2016), ou seja, a estrutura matemática que subsidiou a solução do problema de modelagem foi representada por meio do algoritmo da divisão.

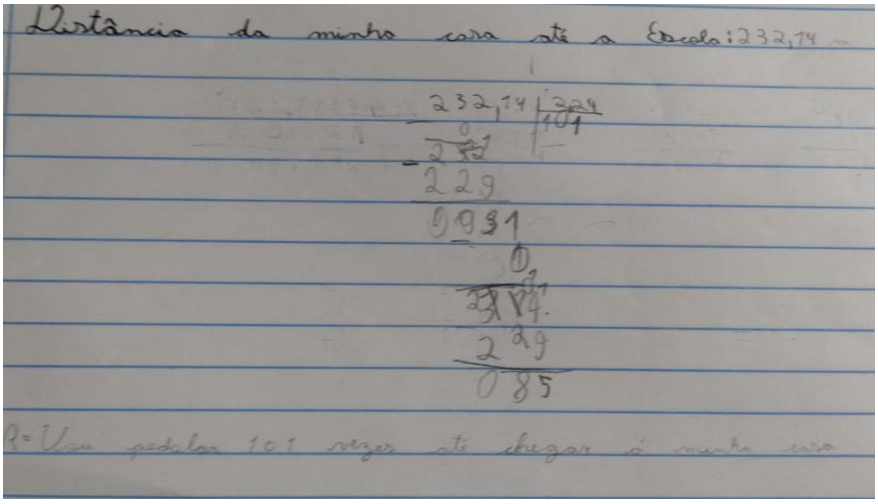


Figura 3. Solução para o problema de modelagem.

A professora sugeriu aos alunos para que verificassem se, de fato, a quantidade de pedaladas calculada seria a necessária para executarem o percurso, como forma de validação dos resultados.

Considerações finais

Nesta atividade de modelagem matemática, evidenciamos as estratégias para a solução de um problema mediada por signos produzidos pelos alunos, sob orientação da professora e que estavam relacionados ao problema, às hipóteses construídas para a dedução de um modelo matemático e para a matemática utilizada.

Ao lançar um problema formulado, a professora convida os alunos a se envolverem com a atividade de modelagem e configurar um problema de modelagem em que estratégias para solucioná-lo foram requeridas. Inicialmente, para o levantamento de hipóteses, utilizaram signos que conheciam sobre pedaladas, todavia elas foram refutadas visto que o espaço percorrido estava associado à distância demarcada pelo pneu da bicicleta utilizada e não entre as posições dos pedais.

Defronte dos dados coletados empiricamente, os alunos utilizaram estratégias para responder, matematicamente, o problema de modelagem – algoritmo da divisão. Para isso, realizaram transformações nas unidades de medida, abarcando conhecimentos já construídos em outros momentos da disciplina, mas que foram retomados pela professora, como círculo e circunferência.

De acordo com English (2010), a implementação da modelagem matemática na sala de aula, propicia aos alunos experiências valiosas, partindo de suas vivências que são discutidas e analisadas para a construção de novos conceitos. Os alunos do 5º ano, utilizando a bicicleta, vivenciaram analisar o que correspondia à distância de uma pedalada com o comprimento da circunferência do pneu obtido com a ajuda de barbante e trena, realizaram a operação de divisão e chegaram à uma solução para o problema. A validação da solução foi sugerida pela professora como uma possibilidade de análise empírica, considerando a contagem de pedaladas no trajeto da casa do aluno até à escola.

Referências

Almeida, L. W., y Silva, K. P., & Vertuan, R. E. (2012). *Modelagem Matemática na Educação Básica*, São Paulo: Contexto.

Bliss, K., y Libertini, J. (2006). What is Mathematical Modeling? En S. Garfunkel, y M. Montgomery. *GAIMME*: Guidelines for Assessment & Instruction in Mathematical Modeling Education. COMAP, SIAM: Reston, Philadelphia.

Brasil (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília.

Dörner, D. (1976). *Problemlösen als Informationsverarbeitung*. Kohlhammer: Stuttgart.

Elfringhoff, M. S., y Schukajlow, S. (2021). What makes a modelling problem interesting? Sources of situational interest in modelling problems. *Quadrante*, *30*(1), 8-30.

English, L. D. (2010). Modeling with Complex Data in the Primary School. En R. Lesha et al. (Eds.). *Modeling students' mathematical modeling competencies.* (pp. 287-300). Springer: New York, London.

Hartman, H. J. (2001). Developing students' metacognitive knowledge and skills. En H. J. Hartman (Ed.). *Metacognition in learning and instruction*. (pp. 33-68). Dordrecht: Springer Neuropsychology and Cognition.

Niss, M., y Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. London, New York: Routledge.

Peirce, C. S. (1972). *Semiótica e filosofia*: textos escolhidos. São Paulo: Cultrix.

Santaella, L. (2007). *Semiótica aplicada*. São Paulo: Thomson Learning.

Santaella, L. (2008). *O que é semiótica*. 27. reimp. São Paulo: Brasiliense.

Santaella, L. (2012). *Percepção*: fenomenologia, ecologia, semiótica. São Paulo: Cengage Learning.
Tortola, E. (2016). *Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental*. (Tese de doutorado). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Brasil. https://pos.uel.br/pecem/teses-dissertacoes/configuracoes-de-modelagem-matematica-nos-anos-iniciais-do-ensino-fundamental/

Herramienta de análisis de las dificultades en la comprensión del Principio de Inducción Matemática

José Ricardo **Herrera** Alfaro
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
herrerauisj@gmail.com
Jorge Enrique **Fiallo** Leal
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
jfiallo@uis.edu.co

Resumen

Se da a conocer un avance de investigación en curso, que tiene como objetivo propiciar la comprensión del Principio de Inducción Matemática, a partir de la ruptura cognitiva (Garuti et al, 1996), entre el planteamiento de conjeturas y la construcción de demostraciones, con estudiantes de un curso de Teoría de Números. Para ello se propone una herramienta de análisis y un marco conceptual que analiza desde el punto de vista estructural y referencial (Fiallo, 2011; Pedemonte, 2005; Pedemonte & Balacheff, 2016) los procesos de planteamiento de conjeturas y construcción de demostraciones, y que permite identificar las dificultades y errores presentes en los dos procesos.

Palabras clave: Argumentación, Inducción Matemática, Demostración.

Introducción

Al realizar una búsqueda de investigación sobre la demostración, se encontró que los estudiantes de todos los niveles educativos tienen dificultades para construir demostraciones en el aula, y poco se ha usado la teoría producida por investigaciones en el campo para abordar dichas dificultades, fenómeno que se convierte en la problemática de la investigación (Stylianides, Stylianides y Philippou 2007; Stylianides y Stylianides, 2017).

Por otro lado, se encontró que el estudio sobre las dificultades al demostrar por inducción matemática es un campo poco explorado; “los estudiantes lo aplican correctamente en muchos

casos y adquieren manejo con su algoritmia, pero lo hacen de manera mecánica y no comprenden su esencia" (Crespo, 2016, p. 244).

De las investigaciones como Crespo (2016); Dubinsky (1990); García y Parraguez (2017); Mariotti (2006); Pedemonte (2008); Ron y Dreyfus (2004); Stylianides, Sandefur y Watson (2016), se toma en cuenta las siguientes dificultades reportadas durante la demostración por inducción matemática a las que se enfrentan los estudiantes:

- Errores numéricos y algebraicos ($\mathbf{J_1}$)
- Dificultad para comprender la importancia del paso base. ($\mathbf{J_2}$)
- Dificultad para comprender la esencia del paso inductivo. ($\mathbf{J_3}$)
- Dificultad para comprender cuando es aplicable la inducción matemática. ($\mathbf{J_4}$)
- Dificultad para identificar la proposición a demostrar. ($\mathbf{J_5}$)
- Dificultad para comprender la relación entre el paso base y el paso inductivo. ($\mathbf{J_6}$)

Estas dificultades se convierten en la razón que da origen a los propósitos de este trabajo, que pretende dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación, ¿Cómo favorecer el proceso de argumentación en la construcción de la demostración por inducción matemática a partir de la ruptura cognitiva?

Elementos Teóricos

Este estudio considera la *demostración* como un caso particular de argumentación que comprende "*todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática* (Fiallo, 2011, pág. 85).

El proceso de argumentación

Teniendo en cuenta las características funcionales de la argumentación, Pedemonte (2002), plantea que la argumentación en matemáticas es una justificación racional; se desarrolla cuando alguien quiere convencer (a uno mismo o a otros) acerca de la verdad de una afirmación; se dirige a una audiencia universal; y pertenece a un "campo", el campo de una argumentación en matemáticas delimita los criterios de validez. Por ejemplo, los axiomas de validación de una argumentación en geometría son diferentes de los axiomas que se utilizan en una argumentación de álgebra.

Desde el punto de vista estructural, Pedemonte (2002) caracteriza la argumentación deductiva, inductiva y abductiva; pero teniendo en cuenta el tipo de problema y la metodología de enseñanza de este trabajo solo presentamos las dos primeras.

En la *argumentación deductiva* es una inferencia que conduce a la construcción de nuevos conocimientos por medio de una regla o teorema a partir de la declaración de una conclusión que se deduce de hipótesis determinadas de antemano, puede que se utilice el lenguaje natural como sistema de representación en la construcción de un enunciado y no estar apoyada por una teoría matemática. Esta es la razón por la que una deducción en la argumentación puede ser semánticamente falsa.

La *argumentación inductiva* o empírica es una inferencia que conduce a la construcción de nuevos conocimientos a partir de la observación de casos particulares o hechos observados que se generalizan en un conjunto más extensos de casos o reglas. La argumentación inductiva puede ser:

- Argumentación inductiva por generalización, es una inferencia práctica que procede analizando casos particulares hasta que se determina una ley general o propiedad. La generalización permite la abstracción de una propiedad o inferencia entre propiedades, en varios casos. Este proceso puede llevar a dos generalizaciones diferentes: *generalización a partir de un caso particular y generalización sobre el proceso realizado.* Estas generalizaciones se dan cuando el estudiante ve una regularidad a partir de una sucesión de procesos realizados, con casos o conclusiones particulares respectivamente.
- Argumentación inductiva por recurrencia, los cuales se basan en una generalización a n. A partir de una propiedad verdadera en un caso $P(1)$ y el descubrimiento de una relación recurrente entre dos casos sucesivos, enlazamos $P(n)$ y $P(n+1)$. La conclusión del razonamiento es que la regla $P(n)$ es verdadera.
- Argumentación inductiva pasando "al límite", suele ser el caso considerado para verificar la propiedad ya derivada de otros casos. Puede considerarse como un caso extremo: si la propiedad es verdadera en este caso, nos lleva a pensar que también puede serlo en los casos anteriores y es considerado como el caso que está conectado con todos los casos precedentes y no sólo con el caso que lo precede (Pedemonte, 2002).

Mariotti (2006) resalta la dificultad sobre la esencia del paso inductivo, afirmando que tal dificultad se vuelve aún más evidentes si se describen en términos de Unidad Cognitiva.

Unidad cognitiva

Para superar la dicotomía entre argumentación y demostración, se han llevado a cabo estudios que plantean la noción de unidad cognitiva de un teorema (Boero y otros, 1996), la cual se dirige a vincular argumentos espontáneos y argumentos matemáticamente aceptables:

> durante la producción de la conjetura, el estudiante elabora progresivamente su enunciado por medio de una intensa actividad argumentativa que está entrelazada funcionalmente con la justificación de la plausibilidad de sus elecciones; y durante la etapa posterior de demostración del enunciado, el estudiante hace conexión con este proceso de manera coherente, organizando algunas de las justificaciones ("argumentos") producidas durante la construcción del enunciado de acuerdo con una cadena lógica (Boero y otros, 1996, p.113).

La unidad cognitiva fue utilizada para expresar una posible continuidad entre los dos momentos ya mencionados, posteriormente fue redefinido y adoptado como una herramienta de investigación que analiza la congruencia entre la argumentación para plantear conjeturas y la subsiguiente producción de la demostración, asumiendo que la congruencia pueda o no ocurrir (Mariotti, 2006, p. 184):

> La principal fortaleza de la unidad cognitiva es que proporciona una forma de evitar la rígida dicotomía que coloca a la argumentación contra la demostración: La posible distancia entre argumentación y demostración no es negada pero tampoco es definitivamente asumida como un obstáculo; desde esta perspectiva, la distinción irreparable entre argumentación y demostración es substituida prestando atención a las analogías, sin olvidar las diferencias.

> De hecho, cuando una conjetura es generada por el resultado de la generalización de patrones, construir una demostración por inducción matemática requiere pasar de un tipo de argumento a otro, lo que significa que el estudiante tiene que controlar la brecha entre los dos tipos de argumentos". (Mariotti 2006, p. 188)

Desde las ideas de Mariotti (2006), las dificultades para demostrar por inducción matemática se visibilizan con estos elementos teóricos; pero en este trabajo no se analizará a fondo la unidad o ruptura cognitiva ya que no es el objetivo de este trabajo. Se usarán estos elementos teóricos para identificar las dificultades de los estudiantes cuando resuelvan problemas de demostración por inducción matemática. El constructo de unidad cognitiva ayudará en este trabajo en el diseño de la secuencia de tareas que promuevan rupturas cognitivas en los problemas.

Pedemonte (2002) analiza y compara la argumentación que sustenta una conjetura y su demostración en la resolución de problemas abiertos en geometría, señala que pueden realizarse desde dos puntos de vista: el del sistema referencial y el de la estructura. El *sistema referencial* está compuesto por el sistema de representación (el lenguaje, la heurística, el dibujo) y el sistema de conocimientos (concepciones, teoremas) de argumentación y demostración, La *estructura* es la conexión cognitiva lógica entre declaraciones (puede ser abductiva, inductiva o deductiva) (Pedemonte, 2008).

Según Pedemonte, hay unidad referencial entre la argumentación y la demostración si algunas palabras, dibujos o teoremas usados en la demostración, han sido usados en la argumentación dando soporte a la conjetura. Además, hay una unidad estructural entre la argumentación y la demostración, si algunos pasos deductivos o inductivos usados en la argumentación también están presentes en la demostración; o de lo contrario, hay una ruptura estructural entre los dos, si la estructura de la argumentación es inductiva y la demostración es deductiva (Pedemonte, 2008).

Modelo de Pedemonte

Pedemonte y Balacheff, (2016) integra el modelo cK¢ (Balacheff y Margolinas, 2005) al modelo de Toulmin (Toulmin, 1958):

Modelo de Toulmin. Este modelo permite analizar la estructura de la argumentación del estudiante atendiendo al contenido empleado. Para ello tiene en cuenta seis elementos básicos: un Enunciado o conclusión *"C" (Claim)* que se refiere a la conclusión de cada argumento que se basa en un cierto número de *datos "D" (Data)*. Para pasar de los datos al enunciado-conclusión es necesario un *permiso de inferir "Pi" (Warrant)* que legitime ese paso (por ejemplo, una regla o un principio general). Vale decir que "*Pi"* establece la conexión lógica entre *D* y *C* al mostrar que el paso de *D* hacia *C* es adecuado y legítimo; el *indicador de fuerza "F" (Modal Qualifier)* que precisa la fuerza con la que la unión entre *D* y *Pi* permite alcanzar *C*; las *refutaciones potenciales "Rp" (Rebuttal)* establecen las restricciones que se aplican a *C*, es decir, las situaciones bajo las cuales *C* no sería válida; y un *soporte "S" (Backing)* que apoya el *Pi*, ya que éste puede ponerse en duda y va a ser necesario respaldarlo con algunos justificativos.

Modelo ck¢. Balacheff y Margolinas (2005) señala cuatro componentes indisociables, que se imponen cuando se requiere evidenciar una concepción *C*: a partir de un *problema matemático "P"* un estudiante puede representarlo con un conjunto de afirmaciones que expresa utilizando un *sistema de representación "L"*, a su vez que lo transforma aplicando una *regla "R"* (un operador); en dicho proceso aplica una *estructura de control "Σ"* para organizar las funciones de decisión, de elección, de juicio de validez y de adecuación de la acción, asegurando la no contradicción de la concepción. La cuádrupla (*P*, *L*, *R*, *Σ)* es suficiente para caracterizar una concepción.

El Modelo de Pedemonte (Figura 1) integra los dos modelos ya que al momento en enfrentarse a problemas de conjetura y demostración los estudiantes acuden a sus *concepciones.*

Las concepciones de los estudiantes que permiten construir una conjetura constituyen la base de la argumentación. Su movilización permite construir el proceso argumentativo. De hecho, es la concepción movilizada durante la construcción de un argumento la que permite responder a las preguntas: ¿Por qué el permiso de inferir es pertinente para quien argumenta? ¿Por qué es correcto? ¿Por qué es adecuado?

Estas permiten movilizar los procesos argumentativos y justificar la existencia del argumento, por lo que pueden remplazar el *soporte* en el modelo de Toulmin y los *operadores* de la concepción pueden reemplazar los *permisos de inferir*. Como el soporte de un argumento corresponde a la concepción movilizada, entonces el permiso de inferir es uno de los operadores que constituyen la concepción (Pedemonte, 2005, p. 327).

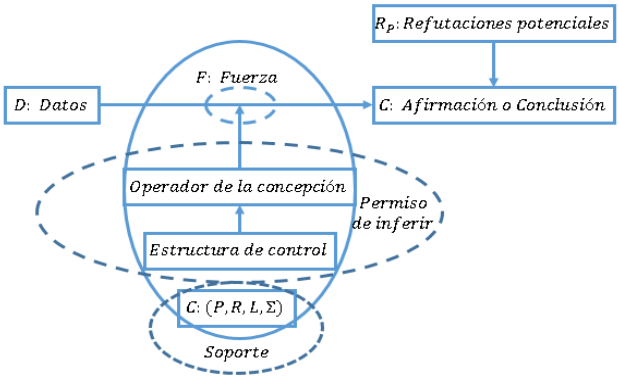


Figura 1. (Esquema del Modelo Pedemonte, diseñado por Pedemonte (2002), en Tesis de doctorado y publicado en Pedemonte y Balacheff (2016)).
Fuente: Adaptado de Pedemonte y Balacheff (2016)

Dificultades de la demostración por Inducción Matemática

Para identificar una posible evolución en la demostración por inducción matemática de los estudiantes, se las dificultades reportadas por la investigación (Crespo 2016; Dubinsky 1990; García y Parraguez 2017; Ron y Dreyfus 2004; Stylianides, Sandefur y Watson 2016), las cuales sirven como indicadores de si se provoca la ruptura cognitiva para favorecer el proceso de argumentación en la construcción de la demostración por inducción matemática: *dificultades de procedimiento numérico-algebraico (J_1), desconocimiento de la importancia del paso base (J_2),*

identificación de la esencia del paso inductivo (J_3), dificultad para comprender cuando es aplicable la inducción matemática (J_4), dificultad para identificar la proposición a demostrar (J_5) y dificultad para comprender la relación entre el paso base y el paso inductivo (J_6).

Método

Esta investigación es de tipo cualitativa, se lleva a cabo con estudiantes de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander que cursan la asignatura Teoría de números, quienes participan en la implementación de la secuencia de enseñanza. En el segundo semestre de 2021 se realizó un pilotaje que permitió esclarecer la metodología del estudio exploratorio que llevará a responder la pregunta de investigación.

Para poder cumplir con el objetivo de investigación, se diseñó una unidad de enseñanza, teniendo en cuenta las dificultades de los estudiantes en la comprensión del PIM, entre ellos, la necesidad de promover la ruptura cognitiva entre el proceso del planteamiento de la conjetura y la construcción de la demostración, y los siguientes tipos de problemas: progresiones, recursividad, situaciones hipotéticas, divisibilidad, teoremas de teoría de números. Cada núcleo contiene 3 o 4 problemas diseñados en tres momentos, i) planteamiento de una conjetura, ii) discusión sobre las conjeturas planteadas, y iii) construcción de una demostración.

De aproximadamente 60 estudiantes de los dos grupos, se trabajó con 4 estudiantes, quienes fueron seleccionados de forma voluntaria, pero bajo el consenso de participación constante, compromiso por realizar lo que le pedía los problemas y asistir a todas las clases. Para el posterior análisis, los datos de los vídeos se sistematizaron para identificar momentos donde se presentó la conjetura y las dificultades para demostrar por inducción matemática, y se transcribieron para examinarlos a la luz de los elementos teóricos.

Análisis de un caso

A continuación, se presenta el análisis de uno de los problemas de demostración de progresiones, los cuales fueron abordados por el estudiante A de manera individual y conjunta para el planteamiento de la conjetura.

Problema: Considere en orden estrictamente creciente los siguientes enteros positivos

$$3, 7, 11, 15, ...$$

Explorando conjeturas

a) ¿Cuál es el décimo término de la progresión? ¿Cuál es el centésimo término de la progresión?
b) Qué patrón de recurrencia identifica entre cada término consecutivo.
c) ¿Cuál es el $n-ésimo$ término de la progresión? construya una conjetura sobre lo encontrado.
d) ¿El patrón de recurrencia del inciso cumple la expresión enunciada en el inciso anterior? **Justifique su respuesta.**

Episodio del Planteamiento de la conjetura

[1] Inv. ¿Qué hizo cada uno para hallar el décimo y centésimo término?

[2] A: Para encontrar el décimo término de la progresión me di cuenta de que los términos se separan por cuatro unidades, a partir de los que nos dan acá, ósea el 3, 7, 11, 15, … entonces fui agregando +4 para hallar el siguiente, 19, +4 para hallar el siguiente y así al décimo término que es 39. En el punto b, pues para hacer los cálculos de a uno por uno ya me resultaba más difícil,

entonces me di cuenta de que en el décimo término para avanzar al número 20 (a_{20}) de la progresión, avanzamos 40 unidades, ósea +40, para hallar el término treinta (a_{30}) de la progresión otra vez +40, y así lo hice hasta el término cien (a_{100}) de la progresión, y así lo hice, es decir, el centésimo término de la progresión me dio 499

[4] A: En el punto c, bueno ya después se separan por 4 unidades y también se da cuenta uno que al sumarse de a cuatro, podrían ser múltiplos de 4, pero no están así, digamos serían 4,8,12,16,20, … pero entonces siempre están restando de a uno. Entonces serían múltiplos de cuatro menos uno [Señala la expresión 4n-1].

[5] Inv. Ok y eso ¿qué vendría siendo?

[6] A: Eso sería el patrón de la progresión. Y ya en el punto d, es que si obtengo el n-ésimo término de la progresión, entonces reemplazando acá por cualquier "n".

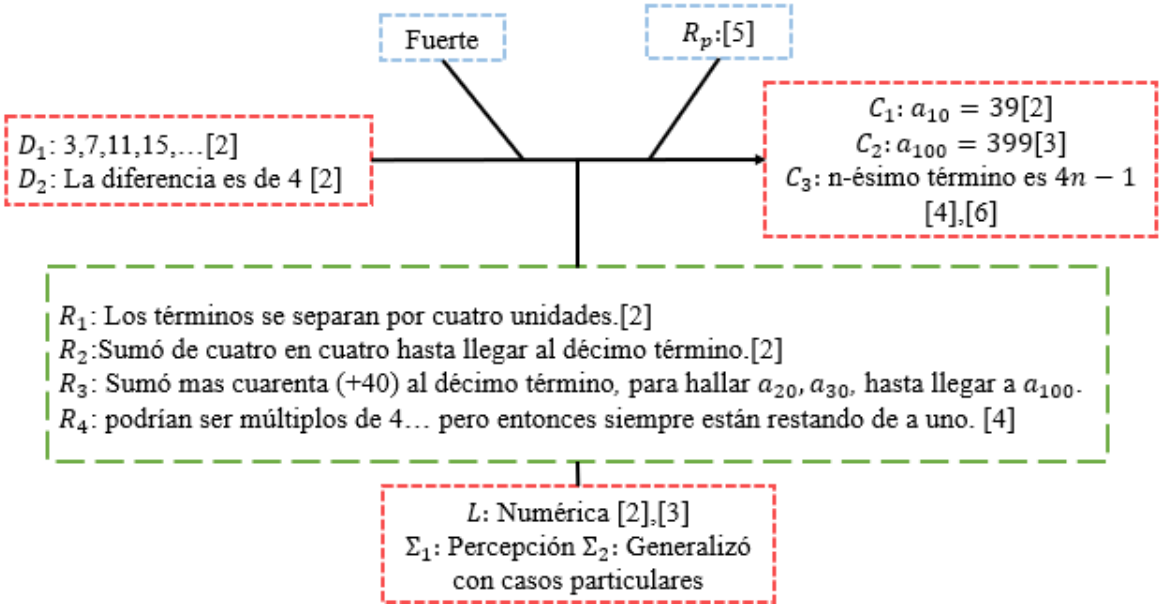


Figura 2. Esquema del Planteamiento de la conjetura empleando el Modelo Pedemonte
Fuente: Elaboración propia.

Demostrando

a) Una conjetura puede ser cierta en muchos casos particulares y sin embargo no ser verdadera en general. Es imposible analizar todos los casos particulares. ¿Cómo podemos saber, si la conjetura planteada es cierta para todo natural?

b) Construya una demostración para cada conjetura planteada en **1) d)**, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente.

Episodio de la demostración

[7] A: Yo de igual manera **utilicé el método de inducción matemática** para probar de que se cumplía para todos.

[9] A: **primero se parte de la base inducción**, que es probar para el primero, pero como yo empecé en n=1, entonces pruebo para n=1, y la fórmula es 4n-1. **Entonces para n=1 vemos que está porque 4(1)-1=3 y ese término está en la progresión.** Entonces ahora **la hipótesis de**

inducción, supongo que para n=k también se cumple, eso ya lo doy por sentado, y **veamos que también se cumple para $\boldsymbol{n = k + 1}$** es decir, para el siguiente.

[10] A: listo. **Bueno entonces para $\boldsymbol{4k - 1}$, es decir, reemplazamos $\boldsymbol{n = k + 1}$, $\boldsymbol{4(k + 1) - 1}$ y ahí hacemos una propiedad distributiva, $\boldsymbol{4k + 4 - 1}$, eso también se puede mirar como $\boldsymbol{4k - 1 + 4}$,** $4k - 1$ está por hipótesis de inducción está en la progresión y si yo le sumo 4, voy a obtener el siguiente término de **la relación de recurrencia es $+4$**, es decir, **la diferencia entre un término y otro es de 4, entonces si sumo cuatro (4)**, ese término también va a estar en la progresión, entonces, el $k + 1$ término está en la progresión.

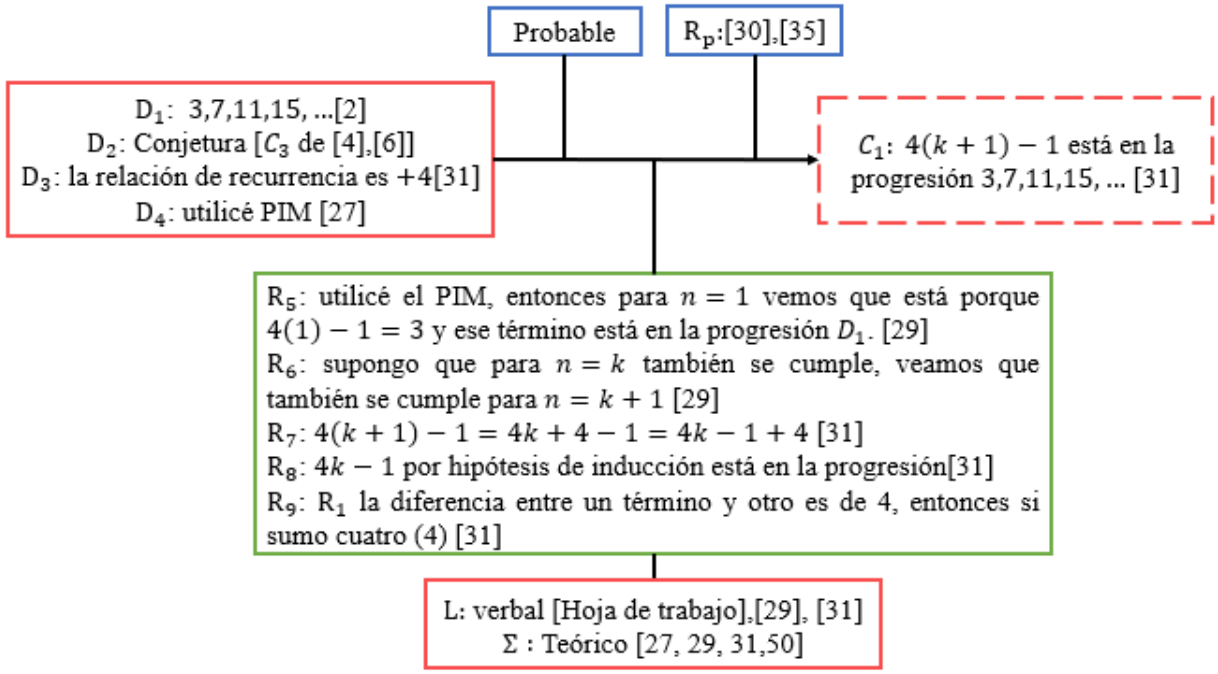


Figura 3. Esquema de la demostración empleando el Modelo Pedemonte
Fuente: Elaboración propia.

En la construcción de la demostración, A utilizó el principio de inducción matemática, declarado como dato (D_4) extraído del inciso 3a) planteado en el problema, utilizó D_4 como operador en R_5, R_6, R_7, validó su proceso mediante la demostración del paso base y paso inductivo del PIM, pero no usa el principio correctamente, ya que asume la conclusión del paso inductivo como conclusión de la demostración. Los operadores en la demostración no son los mismos del planteamiento de la conjetura.

Ruptura cognitiva

Tala 1
Comparación del sistema de referencia de A

PLANTEAMIENTO DE LA CONJETURA	**DEMOSTRACIÓN**
CONCLUSIÓN C_3: n-ésimo término es $4n-1$	CONCLUSIÓN C_1: $4(k+1)-1$ está en la progresión 3,7,11,15, ...
OPERADORES R_1: los términos se separan por cuatro unidades. R_2: sumo de cuatro en cuatro hasta llegar al décimo término. R_3: sumo mas cuarenta (+40) al décimo término, para hallar a_{20}, a_{30}, hasta llegar a a_{100}. R_4: podrían ser múltiplos de 4… pero entonces siempre están restando de a uno.	OPERADORES R_5: utilicé el PIM, entonces para $n=1$ vemos que está porque $4(1)-1=3$ y ese término está en la progresión D_1. R_6: supongo que para $n=k$ también se cumple, veamos que también se cumple para $n=k+1$ R_7: $4(k+1)-1=4k+4-1=4k-1+4$ R_8: $4k-1$ por hipótesis de inducción está en la progresión R_9: R_1 la diferencia entre un término y otro es de 4, entonces si sumo cuatro.
REPRESENTACIÓN L: Numérica	REPRESENTACIÓN L: verbal
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1: Percepción Σ_2: Generalizó con casos particulares	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ: Teórico
RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA	

Tala 2
Comparación del sistema estructural de A

PLANTEAMIENTO DE CONJETURA	**DEMOSTRACIÓN**
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva	FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización sobre el proceso	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Demostración por inducción
RUPTURA ESTRUCTURAL	

Resultado

Se concluye que el proceso de argumentación del planteamiento de la conjetura del estudiante se produjo basado en la generalización de un patrón de casos particulares, ya que predomina lo perceptivo y la escogencia los datos necesarios para generalizar, pero sin criterios teóricos que le den fuerza al análisis realizado.

En este proceso de argumentación de conjetura y demostración se verifica una ruptura cognitiva dada la ruptura referencial y estructural ya que, los operadores usados en la demostración son distintos a los usados para plantear la conjetura.

Aunque se provocó la ruptura, se identificó la dificultad (J_5) ya que, en el proceso de la demostración usó el lenguaje natural en carencia de comprender lo que quería demostrar. Otras dificultades identificadas son (J_2) y (J_6); el estudiante asume la conclusión del paso inductivo como la conclusión de la demostración, lo cual muestra que (1) el estudiante no contempla que es demostrada la proposición cuando son demostrados el paso base y el paso inductivo y (2) asumen el paso base como un requisito desligado de la demostración.

Reflexiones finales

La ruptura cognitiva entre el planteamiento de conjeturas y su demostración se presenta cuando el estudiante no usa los argumentos del planteamiento de la conjetura en la demostración, sino que los transforma en argumentos que permiten validar la conjetura, en nuestro caso, las valida usando el principio de inducción matemática; este escrito buscó por medio de la unidad de enseñanza, provocar la ruptura mediante las serie de preguntas planteadas en la primera etapa del problema, las preguntas se diseñaron de tal manera que el estudiante plantee su propia conjetura inductivamente, el diseño de la unidad se basó en la hipótesis que indica: promover el desarrollo de generalización de patrones facilita posteriormente la construcción de la demostración por inducción matemática Mariotti (2006).

Por otra parte, para verificar si hubo o no una ruptura cognitiva se hizo uso del modelo Pedemonte (2002); Pedemonte y Balacheff, (2016) como herramienta de análisis ya que permite visibilizar los argumentos presentes en la movilización de los dos momentos del problema y obtener a detalle qué forma de argumentación utilizó el estudiante para abordar las preguntas planteadas.

Se presenta el primer problema como punto de partida para comprender el uso de la herramienta de análisis; los elementos teóricos del modelo desglosan el argumento y permite identificar qué forma de argumentos está presente, qué conjetura plantea el estudiante y qué elementos requirió para lograrlo. Estos datos a su vez indican que promover el planteamiento de conjeturas requirió mas tiempo que la misma demostración, esto muestra que poco se ha desarrollado este proceso en el estudiante y la necesidad de promover el planteamiento de estos problemas para enseñar la demostración por inducción matemática.

Referencias y bibliografía

Balacheff, N., Margolinas, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier, C. Margolinas (Eds.), Balises pour la didactique des mathématiques (pp. 75-106). Francia: La Pensée Sauvage -Editions-.

Crespo, C. (2016). Argumentaciones en el aula de matemática. La estrategia de inducción completa. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame), 28*, 243-252.

Fiallo, J. (2011). Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica. [Tesis Doctoral, Universitat de València, España].

Fiallo, J. y Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2). 145-167.

García-Martínez, I., & Parraguez, M. (2017). The basis step in the construction of the principle of mathematical induction based on APOS theory. Journal of Mathematical Behavior, 46, 128–143.

Garuti, R., Boero, P., Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. Proceedings of the 22th PME International Conference, 345 - 352.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l`analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. Recherches en didactique des mathematiques, 25(3), 313-348.

Pedemonte, B., y Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 104–122.

Ron, G. y Dreyfus, T. (2004). The use of models in teaching proof by mathematical induction. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the twenty-eighth conference of the international group for the Psychology of Mathematics education PME* (pp.113-120). Bergen, Norge: Bergen University College.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(3), 145-166.

Stylianides, G. J., Sandefur, J., & Watson, A. (2016). Conditions for proving by mathematical induction to be explanatory. The Journal of Mathematical Behavior, 43, 20–34.

Toulmin, S.E. (1958) The use of argument, Cambridge University Press.

Proposição de Problemas de Matemática por crianças do 1º ano do Ensino Fundamental

Janaína Poffo **Possamai**
Universidade Regional de Blumenau
Brasil
janainap@furb.br
Norma Suely Gomes **Allevato**
Universidade Cruzeiro do Sul
Brasil
normallev@gmail.com
Susane Barth **Strelow**
Colégio Sagrada Famíliaf
Brasil
susane.strelow@sagrada.net

Resumo

A Proposição de Problemas é um tema de ponta na pesquisa internacional, insistentemente indicada nas prescrições curriculares atualmente em vigor no Brasil, embora timidamente presente nos livros didáticos, e que, por isso, demanda análise cuidadosa da implementação de práticas educativas. O estudo retratado no presente trabalho tem como objetivo analisar, considerando elementos disparadores e o *prompt* fornecidos, problemas elaborados por crianças de 1º ano do Ensino Fundamental. O estudo é de natureza qualitativa, cujos dados foram construídos a partir de análise documental – das produções das crianças, desenvolvidas como tarefa extraclasse – e entrevistas. A análise realizada nos permite salientar a importância de associar atividades de proposição de problemas com a resolução de problemas, ampliando as possibilidades e potencializando os resultados de aprendizagem, bem como vislumbrar a necessidade de fornecer elementos disparadores menos estruturados e com menos informações nas primeiras experiências com atividades de proposição de problemas pelas crianças.

Palavras-chave: Proposição de Problemas; Resolução de Problemas; Ensino de Matemática; Práticas Educativas; Ensino Fundamental.

Introdução

Orientações curriculares em diversos países (Brasil, 2018; NCTM, 2000) têm indicado que além dos estudantes estarem envolvidos na resolução de problemas, também sejam aqueles que criam problemas nas aulas de Matemática.

Inicialmente cabe destacar nosso entendimento sobre o termo em língua inglesa *problem posing*:

> A partir dos estudos que realizamos com base nas produções brasileiras e internacionais, e de significações linguísticas inerentes ao idioma brasileiro, estamos utilizando a expressão *proposição de problemas* para denotar todo o conjunto de ideias que constitui os processos envolvendo a *criação de problemas*, que inicia com a organização e construção das primeiras ideias matemáticas e da estrutura de constituição do problema – *formulação*; e avança para a sua expressão, na qual se estabelece o enunciado, associando as linguagens materna e matemática – *elaboração*. Então, a proposição segue para a apresentação do problema criado a um potencial resolvedor. (Allevato & Possamai, 2022, p. 156, grifo das autoras)

A proposição de problemas matemáticos tem sido indicada como uma possibilidade de ampliar e aprofundar os significados atribuídos à Resolução de Problemas (Brasil, 2018), sendo que o objetivo de aprendizagem se efetiva no processo de criação do problema pelos estudantes.

Neste estudo, discutimos a atividade de proposição de problemas realizada com crianças de seis e sete anos de idade, do 1º ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de analisar os problemas criados a partir de um elemento disparador envolvendo dados numéricos, uma imagem que sugere um contexto e um *prompt* que inclui resolver o problema.

A partir desta breve introdução, na sequência apresentamos alguns fundamentos teóricos relacionados com a Proposição de Problemas, bem como análise e discussão dos dados.

Proposição de Problemas.

A Proposição de Problemas tem sido incluída nas aulas de Matemática, tanto com o intuito de desenvolver aspectos formativos quanto como atividade proeminente para desenvolver aprendizagem matemática.

A pesquisa que trata dessa temática ainda é recente (Cai & Hwang, 2020; Possamai & Allevato, 2022), especialmente no que tange à discussão da natureza complexa de ensinar através da Proposição de Problemas. Há necessidade de análises cuidadosas de como diferentes atividades podem impactar de forma produtiva na aprendizagem matemática e no desenvolvimento de aspectos formativos dos estudantes.

Na Proposição de Problemas, os estudantes são solicitados a criarem problemas matemáticos com base em determinados elementos previamente fornecidos. Nesse aspecto, cabe destacar que, enquanto na Resolução de Problemas o objetivo de aprendizagem se constitui no processo de busca pela solução de um problema, na Proposição de Problemas o foco está na criação do problema pelos estudantes e nas discussões decorrentes com a turma (Allevato & Possamai, 2022).

Para tanto, a partir do objetivo didático que se quer alcançar, é preciso estabelecer qual o elemento disparador que será utilizado e partir do qual os estudantes vão criar o problema, podendo ser uma imagem, um conjunto de dados para serem considerados, dentre outras possibilidades, que incluem a associação de diferentes informações; ou ainda, um problema, sendo solicitado em que sejam alteradas suas condições, como a pergunta, o contexto, entre outras (Possamai & Allevato, 2022). Esses elementos disparadores devem vir acompanhados de um *prompt* (Cai, 2022), que se refere a um comando que é definido pelo professor, por exemplo: crie e resolva o problema, crie um problema difícil, crie quantos problemas você conseguir. Esses são elementos essenciais a serem definidos, uma vez a escolha "[...] pode influenciar tanto o foco matemático dos estudantes, quanto o nível de desafio ou engajamento afetivo que a atividade de proposição de problemas pode apresentar" (Cai, 2022, p. 39, tradução nossa).

Além disso, cabe destacar a importância de se estabelecer e informar aos estudantes como os problemas propostos por eles serão resolvidos e discutidos: cada estudante resolve o próprio problema que criou; eles trocam os problemas entre eles; alguns problemas são selecionados para serem resolvidos por todos; os problemas são analisados e classificados em níveis de dificuldades para, então, definir como serão resolvidos, entre outras possibilidades (Allevato & Possamai, 2022; Cai, 2022). A resolução dos problemas criados, pelo próprio criador ou por outro estudante, gera oportunidades de avaliar e melhorar a qualidade dos problemas propostos (Koichu & Kontorovich, 2013), possibilitando a melhoria dos processos de leitura e escrita de problemas matemáticos (Cai, 2022).

Diversas pesquisas têm salientado a importância de associar a Proposição de Problemas com a Resolução de Problemas, indicando resultados positivos na aprendizagem dos estudantes, ressaltando que o desempenho dos estudantes na resolução de problemas está altamente correlacionado com o desempenho na proposição de problemas (Silver & Cai, 1996). Os autores consideram, em particular, que experiências prévias com a resolução de problemas melhoram a qualidade dos problemas criados pelos estudantes.

Com o intuito de ampliar a discussão dessa temática, na sequência apresentamos e analisamos o contexto de uma prática educativa, considerando os elementos disparadores e o *prompt* utilizados em uma atividade de Proposição de Problemas.

Discussão e análise de dados

Este estudo é de natureza qualitativa cujo processo é pautado na interpretação dos fenômenos e atribuição de significados (Kauark, Manhães & Medeiros, 2010) e visa analisar os problemas criados a partir de elementos disparadores e do *prompt* fornecidos. Os problemas foram criados por crianças, de seis e sete anos de idade, na etapa escolar do 1º ano do Ensino Fundamental, de uma escola de Blumenau, Santa Catarina, Brasil.

Foram analisados os problemas elaborados pelas crianças, uma entrevista com uma das crianças, e uma entrevista realizada com a professora da turma. A atividade foi desenvolvida extraclasse pelas crianças, para a qual foram fornecidos, como elementos disparadores, uma

imagem que sugere um contexto e dados numéricos a serem considerados, conforme ilustra a Figura 1.

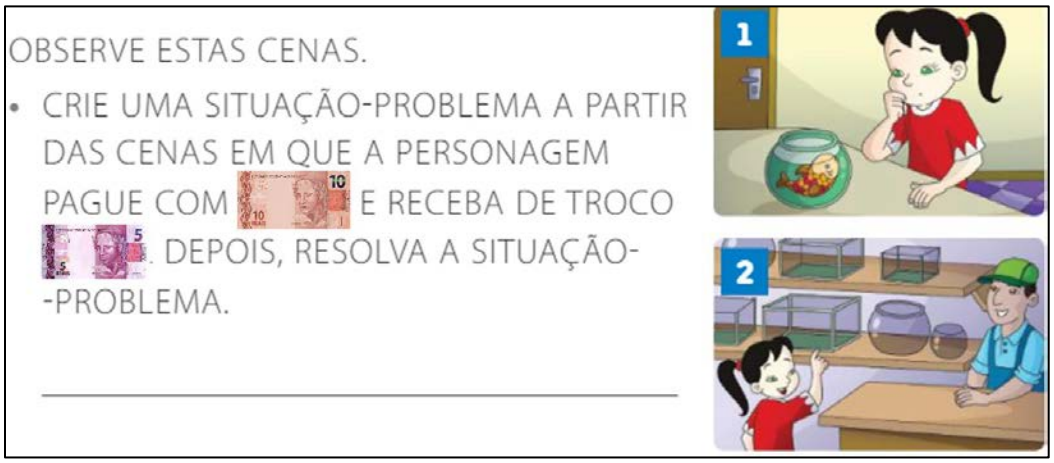


Figura 1. Atividade de Proposição de Problemas
Fonte: Centurión, Scala e Rodrigues (2019, p. 193)

Conforme mostra a Figura 1, para criar o problema as crianças precisavam envolver o contexto sugerido pelas duas imagens associado à ideia de “pagar” e de “troco”, considerando os valores monetários fornecidos. Ainda, deveriam pensar na resolução do problema criado, considerando as informações recebidas.

Assim, os elementos disparadores se constituem de: (1) uma imagem, (2) dados numéricos, (3) um contexto e, (4) uma suposta solução do problema (“troco” de 5 reais). Além disso, o *prompt* solicita que a criança crie e resolva o problema.

A professora da turma solicitou que as crianças realizassem essa atividade como tarefa de casa e no dia seguinte algumas leram o problema criado para a turma. Sobre o contexto de sala de aula, cabe destacar que a professora comentou que atividades de resolução de problemas já haviam sido trabalhadas oralmente, discutindo com as crianças algumas situações, mas que atividades em que as crianças são solicitadas a resolver problemas formalmente haviam sido pouco exploradas.

Os problemas que foram elaborados pelas crianças, a partir dos elementos disparadores e do *prompt* fornecidos, podem ser classificados em três categorias: o problema não foi elaborado, mas a situação foi descrita; o problema foi elaborado, mas se supõe, pela linguagem, a participação dos pais; o problema foi elaborado pela criança.

O primeiro caso, em que as crianças descrevem a situação, mas sem efetivamente constituir um problema, pois não há uma pergunta a ser respondida pelo resolvedor, é apresentada na Figura 2.

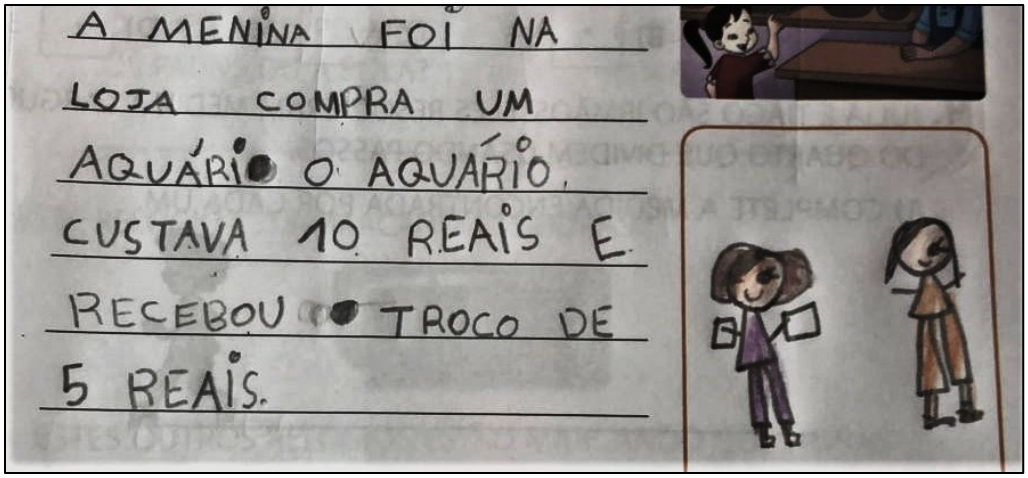


Figura 2. Proposição da criança F

O problema elaborado pela criança F ilustra como se constituíram as proposições de várias crianças. Na verdade, elas descreveram a situação, e não propuseram um problema, que foi o tipo mais frequente apresentado. Entendemos que isso pode ter acontecido devido ao elemento disparador incluir a "resposta" a ser considerada; e, ainda, dada a pouca experiência das crianças com atividades de proposição e, também, de resolução de problemas. Consideramos ademais, que há muitos elementos disparadores fornecidos a serem incluídos no problema proposto.

Nesse aspecto, cabe ressaltar a importância de se associar atividades de Resolução e Proposição de Problemas, uma vez isso potencializa os resultados em relação à aprendizagem matemática, demandando que a criança conecte seus conhecimentos e vivências, selecione e analise os dados, e articule ideias com o texto elaborado (Allevato & Possamai, 2022; Cai, 2022).

Além disso, no contexto deste estudo, em que as crianças estão em processo de alfabetização, a Proposição de Problemas, também, contribui na apropriação escrita da língua materna associada à linguagem matemática. Nesse aspecto, cabe destacar que a Proposição de Problemas:

> [...] promove a compreensão conceitual e o desenvolvimento da capacidade de raciocinar e de se comunicar matematicamente; aumenta o interesse pela Matemática; fomenta a criatividade e a autonomia; conecta a Matemática com os interesses pessoas dos estudantes; e melhora os processos leitura e interpretação/compreensão de problema. (Possamai & Allevato, 2022, p. 5)

A importância de as crianças terem experiências com a Resolução de Problemas, antes de serem envolvidas com a Proposição de Problemas, é reforçada pelo problema apresentado pela criança A, conforme apresentado na Figura 3.

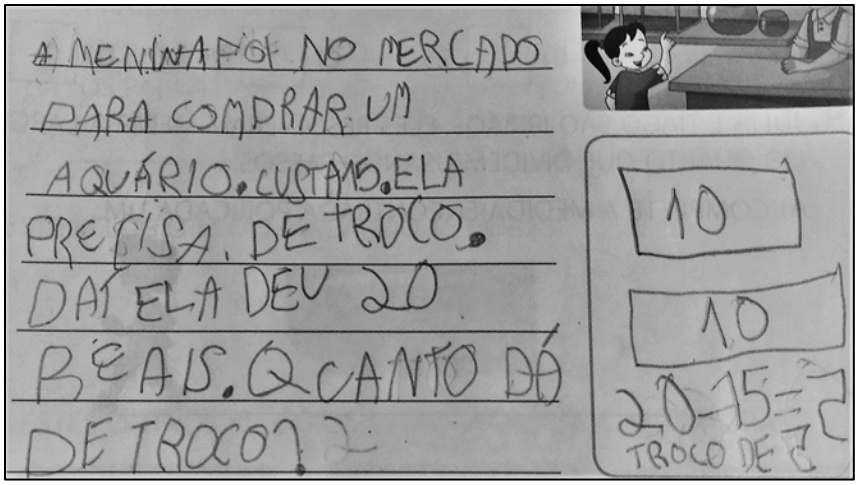


Figura 3. Proposição da criança A

Essa criança, teve experiências anteriores, tanto com a Resolução de Problemas quanto com a Proposição de Problemas, por meio de atividades realizadas em casa com sua mãe, que é professora de Matemática. Mas a única interferência realizada pela mãe da criança, na criação deste problema, foi lembrando-a de que o problema deveria ter uma pergunta para ser respondida.

Vale observar que a criança usou duas notas de dez reais e, ao ser questionada sobre isso, ela explicou que já havia vivenciado a compra de um aquário e um peixe e que, ao querer um aquário grande, sua mãe explicou que não seria possível pois era caro. Há, também, um combinado com a criança, nas idas ao mercado com sua família, de que coisas acima de dez reais são caras. Essas vivências se refletiram na criação do problema pela criança, ao determinar o valor do aquário. Isso refere-se, conforme ressaltam Allevato e Possamai (2022), ao fato de quando as crianças têm a oportunidade de relacionar os problemas com os seus próprios interessantes e com situações que fazem parte de suas experiências cotidianas, há maior interesse e melhores resultados com as atividades de proposição e resolução de problemas.

Analisar essa prática educativa desenvolvida, que surgiu de uma demanda desencadeada pelo livro didático, é importante para avaliarmos as potencialidades e os resultados de diferentes elementos disparadores e *prompt*s para atividades de proposição de problemas. Essa análise sugere, para as primeiras práticas de Proposição de Problemas, a utilização de elementos disparadores menos estruturados, que permitam às crianças expressarem suas compreensões em relação à Matemática e construírem com mais naturalidade problemas que envolvam suas vivências e experiências. Por exemplo, se poderia fornecer apenas a imagem da Figura 1 e solicitar que as crianças criassem um problema a partir dela.

Estes resultados, decorrentes de uma análise preliminar dos dados, estão sendo ampliados e aprofundados com a análise de todos os problemas elaborados pelas crianças.

Considerações finais.

Este estudo teve como objetivo analisar, considerando elementos disparadores e o *prompt* fornecidos, problemas elaborados por crianças de 1º ano do Ensino Fundamental, de seis e sete anos de idade, de uma escola de Blumenau, Santa Catarina, Brasil.

As análises realizadas até o momento nos permitem salientar a importância de associar atividades de proposição de problemas com a resolução de problemas, ampliando as possibilidades de aprendizagem e potencializando os resultados, desde os anos iniciais da escolaridade.

Além disso, é importante que as primeiras experiências com a proposição de problemas não sejam demasiado exigentes em termos que informações que precisam ser agregadas e consideradas na criação do problema, de modo que as crianças fiquem mais livres no que se refere a articular conhecimento matemático e vivências cotidianas, estruturando, assim, gradativamente, o entendimento de como se constitui um problema na linguagem matemática.

Por fim, cabe salientar que cada vez mais os livros didáticos têm trazido atividades de proposição de problemas e, por isso, se faz necessário que mais práticas educativas sejam implementadas e analisadas, de modo que possamos avançar nos entendimentos dos condicionantes, das contribuições e dificuldades na proposição de problemas a partir de diferentes elementos disparadores e *prompt*s, além de compreender melhor os resultados no que se refere aos objetivos de aprendizagem associados.

Referências

Brasil. Ministério da Educação. (2018) Secretaria de Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEB.

Allevato, N. S. G. & Possamai, J. P. (2022). Proposição de Problemas: possibilidades e relações com o trabalho através da Resolução de Problemas. *Com a Palavra, O Professor*, 7(18), 153-172. https://doi.org/10.23864/cpp.v7i18.817

Cai, J. (2022). What research says about teaching mathematics through problem posing. *Éducation et Didactique*, 16, 31-50. DOI: https://doi.org/10.4000/educationdidactique.10642

Cai, J. & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 101420. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001

Kauark, F. S., Manhães, F. C.& Medeiros, C. H. Metodologia da Pesquisa: Um guia prático. Itabuna: Via Litterarum, 2010.

Koichu, B. & Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: A case of the Billiard Task. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 71–86.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000) *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Possamai, J. P. & Allevato, N. S. G. (2022) Elaboração/Formulação/Proposição de Problemas em Matemática: percepções a partir de pesquisas envolvendo práticas de ensino. *Educação Matemática Debate*, 6(12), 1-28. https://doi.org/10.46551/emd.v6n12a01

Silver, E. A. & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 521-539

Refletindo sobre conceitos básicos acerca da área de trapézios através da Resolução de Problemas

Érica Marlúcia Leite **Pagani**
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFETMG
Brasil
leitepagani@gmail.com
Marcio **Pironel**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP, Campus Salto
Brasil
marcio.pironel@gmail.com
Manoel dos Santos **Costa**
Instituto Estadual de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão – IEMA
Brasil
manolopromat@hotmail.com

Resumo

As atuais orientações curriculares no Brasil e pesquisas consideram que o ensino e a aprendizagem devem acontecer em processos que priorizem o uso de metodologias que favoreçam a (re)construção de conhecimentos. Neste trabalho, analisamos uma atividade ocorrida no âmbito de um curso de extensão para professores da Educação Básica, em que puderam vivenciar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. O objetivo foi o de analisar aspectos do uso de tecnologias no processo de ensino-aprendizagem da área de um trapézio através da resolução de problemas. A investigação, de natureza qualitativa, enfoca a análise das produções digitais dos alunos e discussões realizadas durante a apresentação das resoluções. O dinamismo do GeoGebra permitiu aos alunos verificar que o problema tinha solução, ao contrário do que pensavam. Os alunos (re)significaram ideias e incorporaram novas formas de levá-las para a sala de aula, estabelecendo conexões entre ideias matemáticas.

Palavras-chave: Educação Matemática; Resolução de Problemas; Polígonos; GeoGebra; Orientações Curriculares; Formação de Professores.

Introdução

Este trabalho apresenta uma das etapas do desenvolvimento de um curso de extensão para professores de Matemática da Educação Básica que atuavam em escolas públicas das redes de ensino no Brasil e objetiva analisar aspectos do uso da tecnologia no ensino-aprendizagem da área de um trapézio através da resolução de problemas, principalmente, no problema proposto na décima etapa. Com a chegada abrupta da Pandemia do COVID-19, as discussões sobre o uso de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem de Matemática tornaram-se ainda mais necessárias e evidentes. O enfrentamento das dificuldades que se apresentavam nesse cenário gerou conhecimentos que nos levaram a modificar nossa prática educativa com o desafio de promover a aprendizagem dos estudantes. Entretanto, a escolha das ferramentas mais adequadas a cada situação que se apresenta ainda é um desafio para professores e para escolas.

Levando em consideração o contexto que estávamos vivendo e as condições de trabalho que possuíamos, organizamos um curso para ser realizado remotamente, por meio da Plataforma *TEAMS*[1], estruturado em cinco módulos, cada um com duração de uma semana. No módulo que aqui relatado, o trabalho realizado propôs discussões acerca da Resolução de Problemas à luz da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) associado ao uso de tecnologias digitais em que a vivência da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, na perspectiva da proposta das pesquisadoras Allevato e Onuchic (2021). As atividades desse módulo tiveram a duração de uma semana, com aulas na modalidade híbrida (síncronas e atividades assíncronas). No momento síncrono, discutimos a BNCC, ressaltando suas orientações sobre os processos matemáticos da resolução de problemas, que podem "ser ao mesmo tempo objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental" (Brasil, 2018, p. 264).

Metodologia

A pesquisa foi realizada remotamente com 15 professores de diferentes localidades do país, que atuam na Educação Básica (Ensinos Fundamental e Médio) na modalidade regular e/ou na Educação de Jovens e Adultos (EJA). Assim, quando nos referirmos aos participantes, estaremos nos referindo a esses 15 professores. Inicialmente, os participantes responderam a um questionário de sondagem que intencionava verificar o perfil de cada um. Trata-se de um estudo de natureza qualitativa, de modo que o pesquisador manteve contato direto com o ambiente da pesquisa, com os sujeitos envolvidos e com os problemas que estavam sendo estudados (Fiorentini & Lorenzato, 2012).

Nesta pesquisa, utilizamos a observação participante e a análise documental, buscando identificar aspectos relevantes, dificuldades encontradas e atitudes perante a resolução dos problemas apresentados e o conteúdo matemático. Os documentos utilizados para obtenção de informações através da análise são as respostas do questionário de sondagem inicial e os registros escritos das resoluções dos problemas propostos aos participantes (Helder, 2006).

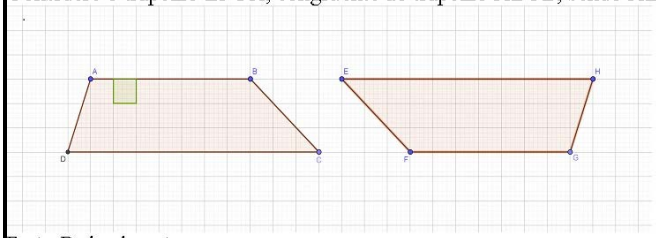
[1] A *TEAMS* é uma plataforma de comunicação digital com funcionalidades específicas para atender às necessidades de instituições de ensino.

Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), tal como é apresentada por Allevato e Onuchic (2021), é uma metodologia diferente daquele trabalho em que regras de "como fazer" são privilegiadas. Trata-se de uma metodologia na qual o problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento se fará através de sua resolução. Outros pesquisadores (Pagani, 2019; Pironel, 2019; Costa, 2021) também utilizam a resolução de problemas nessa mesma linha, constatando que importantes conceitos e procedimentos podem ser mais bem ensinados se ela for utilizada. De acordo com Allevatto e Onuchic (2021), nessa metodologia de ensino a palavra composta Ensino-Aprendizagem-Avaliação expressa uma concepção em que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento de um determinado conteúdo através da resolução de problemas. É nesse sentido que Cai e Lester (2012) indicam que os problemas criam oportunidades de avaliação, em que o professor pode perceber "o que" e "como" os alunos estão aprendendo e onde estão encontrando dificuldades. Neste trabalho, utilizamos o problema para desenvolver a construção de conhecimentos sobre área de um trapézio e encaminhamos as atividades segundo as dez etapas da MEAAMaRP, propostas por Allevato e Onuchic (2021). Todas essas etapas são trespassadas por um processo de avaliação para a aprendizagem e vale destacar que nessa metodologia o problema gerador é proposto aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático mais apropriado à sua resolução.

Após as considerações sobre a parte teórica em que se fundamenta a MEAAMaRP, seguimos para etapa em que os alunos vivenciaram essa metodologia. Agrupamos os participantes em duplas ou trios em diferentes equipes no *TEAMS*. Essa é uma funcionalidade dessa plataforma que permite que o professor possa visitar cada equipe, observar e incentivar os estudantes. Iniciamos com o seguinte problema:

Considere o trapézio EFGH, congruente ao trapézio ABCB, sendo AB=FG e CD=EH.



Fonte: Dados dos autores

1) Forme um paralelogramo justapondo esses 2 trapézios.
2) Qual a área do paralelogramo formado? (considere que cada quadradinho verde tem 1 u.a)
3) Qual a relação entre a área do trapézio ABCD e a área do paralelogramo formado?
4) Você consegue escrever uma expressão para o cálculo de área de um trapézio qualquer?

Figura 1. Problema Gerador
Fonte: Elaborado pelos autores

Os participantes foram orientados a não utilizar fórmulas previamente conhecidas que determinam a área de um trapézio uma vez que o propósito era que eles vivenciassem a

metodologia como se fossem seus alunos. Preparamos esse problema gerador com a finalidade de promover a construção da noção de área de um trapézio à luz da Resolução de Problemas, mas também atentos às orientações da BNCC que sugere,

> [..] recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas, e softwares de geometria dinâmica tem um papel essencial para compreensão e utilização de noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados à situações que levem à reflexão e à sistematização para que se inicie um processo de formalização" (Brasil, 2018, p.270).

De maneira geral, não tiveram dificuldades em resolver o problema gerador e sua resolução foi formalizada pela professora que conduzia a aula síncrona. Na 10ª etapa das atividades em sala de aula, qual sejam a proposição e resolução de novos problemas, o professor deve propor aos alunos "novos problemas relacionados ao problema gerador" (Allevato & Onuchic, 2021, p. 50). Nesse sentido, propusemos o seguinte problema:

Um dos tios de Gisele faleceu e deixou, em testamento, seus terrenos como herança para alguns sobrinhos. Ao realizar a leitura do testamento, percebeu-se que o tio tinha descrito a partilha desses terrenos através de problemas. Assim, para saber se teria direito a algum terreno, cada sobrinho teria que revolver um problema e, caso esse problema tivesse solução, o (a) sobrinho(a) receberia um terreno com área equivalente.

No caso da Gisele, o problema era: é possível construir um trapézio cujos lados paralelos medem 66 e 90 metros e os outros dois lados medem 34 e 50 metros?

1.Resolva analiticamente o problema.

2. Esse problema tem solução?

3. Caso sua resposta seja afirmativa, calcule a área do terreno herdado por Gisele.

4. Anote os conteúdos matemáticos que você utilizou para resolver o problema.

Figura 2: Problema proposto na 10ª etapa
Fonte: Adaptado de Viana (2019)[2]

Análise do processo de resolução do problema da 10ª etapa

De posse desse novo problema, os participantes reuniram-se novamente em duplas (ou trios). A professora observou cada equipe e mediou as discussões geradas na tentativa de resolver o problema acompanhando, remotamente, o trabalho de maneira muito semelhante ao que seria feito presencialmente. A maioria das duplas respondeu que Gisele não teria herança, uma vez que o problema não tinha solução. Apenas uma dupla disse achar que havia uma solução possível, mas não conseguiram concluir. Eles relataram estar tentando verificar se os dados do problema satisfaziam as condições matemáticas para a construção de um trapézio. As resoluções das duplas que disseram que o problema não tinha solução estão retratas a seguir, na Figura 3.

[2] Adaptação do Problema *o terreno de Letícia* de José Paulo Viana, publicado na Revista Educação e Matemática, n. 151, janeiro/fevereiro/março, 2019, p. 41.

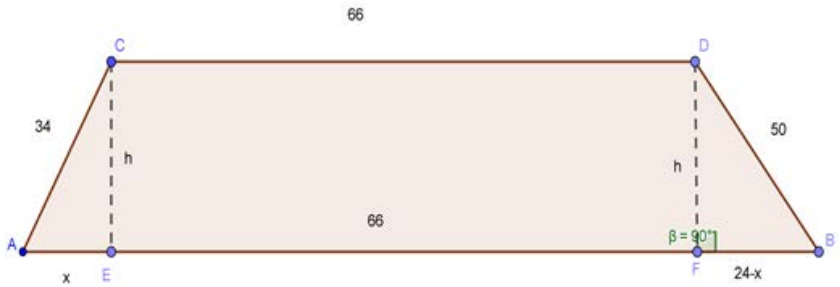


Figura 3. Resolução da maioria dos participantes
Fonte: Dados da Pesquisa

A partir daí usaram o Teorema de Pitágoras para calcular as medidas dos segmentos x e h mostrados na figura:

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 34^2 \\ (24 - x)^2 + h^2 = 50^2 \end{cases} \Rightarrow x = -16$$

Encontraram um valor negativo para uma das medidas e, por esse motivo, concluíram que o problema não tinha solução. Essa é a configuração para um trapézio que está enraizada no conhecimento do professor de tal forma que ele não consegue extrapolar e pensar em outras configurações possíveis. A partir dessa resolução, os participantes foram questionados se poderia haver uma outra configuração, um outro "formato" para o trapézio. Alguns disseram que não e outros sugeriram, até mesmo antes da professora, a utilização do software GeoGebra na busca por uma resposta. Reuniram-se e por conta das manipulações com esse *software*, novas discussões sugiram entre os pares e foram observadas pela professora Esse movimento fez surgir algumas dúvidas e questionamentos que foram compartilhadas com todos ao retornarem à sala principal no *TEAMS*. A professora deu início à construção de um trapézio usando o *software* GeoGebra que gerou a seguinte imagem:

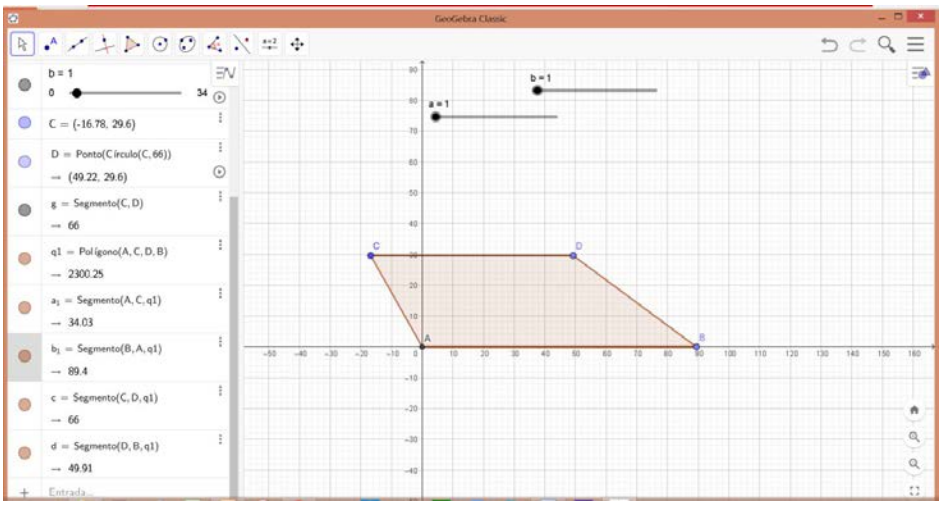


Figura 4. Construção com o GeoGebra
Fonte: Dados da Pesquisa

Diante da Figura 4 apresentada, o diálogo entre alunos-professora e alunos-alunos se estabeleceu permitindo um amplo debate sobre conceitos relacionados a figuras poligonais. Para exemplificar, fragmentos desse diálogo são apresentamos a seguir. Para manter o sigilo das identidades, os alunos foram nomeados como A_1, A_2, ..., A_{15}.

Aluno A_2*: Professora, eu até cheguei numa figura parecida com a sua.... os lados estavam chegando perto de 66 e 90... mas eu parei porque pensei que isso não era trapézio... isso é mesmo um trapézio?*

Professora: *Para você, o que é um trapézio? Os colegas podem ajudar...*

Aluno A_2*: Uai... um quadrilátero com 2 lados paralelos mas...Ah! Tem sim... do jeito que você construiu o lado menor, o de 66, ele ficou paralelo ao de 90.... Nossa! Nunca tinha pensado nesse formato, achava que só podia ser o outro... Na verdade acho que nunca tinha parado pra pensar na definição.*

Os participantes também tiveram a oportunidade de expressar algumas de suas angústias no que se refere à interpretação e implementação das orientações metodológicas apresentadas pela BNCC. Essa inquietação pode ser retratada na fala a seguir:

Aluno A_5: *Professora, finalmente alguém mostrou pra gente como faz essas coisas em sala de aula.... porque na escola, eles reúnem a gente nos horários de reuniões pedagógicas e só falam pra gente ler a BNCC e que tem usar resolução de problemas pra ensinar, tecnologias e etc. Mas ninguém diz como... e a gente não sabe nem onde aprender....*

Os diálogos apresentados denotam o "papel do professor, como avaliador, se confunde, portanto, com o papel de interventor, de questionador, de condutor das aprendizagens [...]" (Pironel & Onuchic, 2021, p.75). Esses momentos de questionamentos e discussões estabelecidos evidenciam como a utilização da MEAAMaRP aliada ao uso de tecnologias permitiu-nos perceber lacunas no conhecimento matemático prévio dos participantes e (re)construí-los.

Considerações

Embora a atividade narrada nesse artigo faça parte de um contexto maior, ela consegue nos fornecer elementos sobre a validação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas enquanto estratégia metodológica que favorece a construção ou reconstrução de conceitos matemáticos pelos alunos. O trabalho em grupo tem se revelado um importante elemento na (re)significação de conceitos por permitir a discussão entre os pares durante a resolução do problema e por facilitar o processo de avaliação para a aprendizagem ao permitir uma troca de *feedbacks* entre professor e alunos. Além disso, a utilização de software de geometria dinâmica, o GeoGebra, possibilitou aos alunos uma exploração interativa da situação problemática apresentada e esse bate-papo, aparentemente informal, fornece dados importantes para uma avaliação (trans)formativa, facilitando a intervenção imediata pelo professor, promovendo ações de autoavaliação e de autogestão da aprendizagem e auxiliando na condução da prática docente em situações futuras.

É interessante e importante ressaltar a surpresa dos alunos, professores de matemática em exercício, ao descobrir que há uma forma alternativa de trapézio, gerando a percepção de que a aprendizagem que tiveram não fora construída com compreensão e significado.

Referências

Allevato, N. S. G. & Onuchic, L. R. (2021). Ensino-Aprendizagem-Avaliação: por que através da Resolução de Problemas. In: Onuchic, L. R., Allevato, N. S. G.; Noguti, F. C. H.; Justilin, A. M. (Orgs.). *Resolução de Problemas*: Teoria e Prática. 2ª ed. Jundiaí, Paco Editorial.

Brasil, Conselho Nacional de Educação. *Base Nacional Curricular Comum* (2018). Brasília: Ministério da Educação. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc-etapa-ensino-medio. Acesso em: 22 abr. 2020.

Cai, J.; Lester, F. (2012). Por que o Ensino com Resolução de Problemas é Importante para a Aprendizagem do Aluno? In: *Boletim GEPEM*. Tradução: Bastos, A. S. A. M.; Allevato, N. S. G., Rio de Janeiro, n. 60, p. 241-254.

Costa, M. S. (2021) Um panorama da resolução de problemas na visão das pesquisadoras brasileiras Onuchic e Allevato. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, Bento Gonçalves, RS, v. 7, n. especial, p. e4006. DOI: 10.35819/remat2021v7iespecialid5489. Acesso em: 16 jan. 2022.

Fiorentini, D. Lorenzato, S. (2012). *Investigação em Educação Matemática*: percursos teóricos metodológicos. 3ª ed. rev. Campinas: Autores Associados.

Helder, R. (2006) *Como fazer análise documental*. Porto: Universidade de Algarve.

Pagani, E.M.L. (2019). A (re)construção de saberes matemáticos proporcionada pela metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de derivadas através da Resolução de Problemas. *Anais...* XV Conferência Interamericana de Educação Matemática. Medellin, Colômbia.

Pironel, M. (2019). Avaliação para a Aprendizagem: A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em Ação. *Tese de Doutorado*. Rio Claro: Unesp. 297p.

Pironel, M. & Onuchic, L. R. (2021). Resolução de Problemas: oportunidade de avaliação para a aprendizagem. In: Onuchic, L. R., Allevato, N. S. G.; Noguti, F. C. H.; Justilin, A. M. (Orgs.). *Resolução de Problemas*: Teoria e Prática. 2ª ed. Jundiaí, Paco Editorial.

Reflexiones sobre la solución de problemas que involucran funciones por tramos

Maritza **Luna** Valenzuela
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
luna.m@pucp.edu.pe
Elizabeth Milagro **Advíncula** Clemente
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
eadvincula@pucp.edu.pe

Resumen

El objetivo de este trabajo es promover una reflexión didáctica sobre la resolución de problemas que involucran funciones por tramos de variable real, en profesores de matemáticas en ejercicio o en formación. Se presenta evidencias de una experimentación que se llevó a cabo en un taller con estudiantes ingresantes a carreras de ciencias e ingeniería de una universidad peruana. En el taller se proponen a los estudiantes problemas para que los resuelvan y comenten sus estrategias o procesos de solución, donde se resaltan conceptos, propiedades y procedimientos matemáticos usados. Para el análisis se ha utilizado elementos del enfoque instrumental de Rabardel. Entre los resultados se ha identificado que los estudiantes tienen dificultades para traducir los enunciados verbales a representaciones matemáticas. Además, presentan dificultades con las propiedades de las formas geométricas tridimensionales, específicamente de prismas y pirámides, las cuales complican establecer relaciones entre elementos que están asociados a variables.

Palabras clave: Funciones por tramos; resolución de problemas; contextos geométricos; figuras tridimensionales; Enfoque instrumental

Introducción

El estudio de la función por tramos, también denominada función definida por partes, por secciones o a trozos, resulta complejo para los estudiantes, tanto de educación secundaria como

superior. Las dificultades se agudizan cuando se propone la resolución de problemas definidas por partes vinculado a modelación de situaciones en diversos contextos. Cabe resaltar que la resolución de problemas según Mallart, Font y Malaspina (2016), en las tres últimas décadas, constituye una actividad central en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes.

A nivel de educación secundaria, se suele enfatizar el tratamiento algebraico de las funciones por tramos, dejando de lado la modelización (Leguizamón y Caidedo, 1999). Vernaza y Tapia (2013) proponen la enseñanza de la función definida por tramos usando situaciones de modelación que incluyen el uso del periódico y del software GeoGebra. Caro (2013) propone desarrollar la modelación de funciones por tramos en la educación secundaria, que permita a los estudiantes identificar el modelo que representa el problema dado y usar los pasos de resolución de problemas de Pólya.

A nivel universitario, Gatica et al. (2010) enfatizan la relevancia del estudio de las funciones definidas a trozos para la comprensión posterior del concepto de continuidad de funciones, por ejemplo, mencionan que los alumnos universitarios de ciencias económicas tienen dificultades para determinar la continuidad de una función definida a trozos. Chumpitaz (2013) señala que la modelación mediante funciones por tramos de variable real genera dificultades en la mayoría de estudiantes de los primeros ciclos del nivel superior. Díaz y Ordoñez (2019) precisan que los docentes de educación secundaria en formación inicial también presentan dificultades con las funciones definidas por partes. Saa y Trochez (2013) diseñan y aplican una secuencia de actividades de función por tramos con uso del GeoGebra, basada en aspectos de los registros de representación semiótica y de la ingeniería didáctica, y concluyen que el GeoGebra es un medio que proporciona la comprensión de la función por tramos en sus diferentes representaciones.

La enseñanza de las matemáticas en la formación de estudiantes de las carreras de ciencias e ingeniería debería estar enfocada en el uso de herramientas matemáticas que permitan la modelización de diversos fenómenos. Según Trejo, Camarena y Trejo (2013) el objetivo de las matemáticas es lograr que todo ingeniero domine el aparato matemático que lo haga capaz de modelar y analizar los procesos técnicos, económicos, productivos y científicos, de manera que utilice tanto métodos analíticos como aproximados, y use eficientemente herramientas tecnológicas. Estos autores también señalan que el estudio de la función es un conocimiento básico en la formación del ingeniero, que sirve de base al estudio de diferentes temas de matemáticas.

Consideramos importante conocer los conocimientos que movilizan los estudiantes cuando resuelven problemas con funciones por tramos, haciendo explicito el uso de conceptos, procedimientos, registros de representación semiótica, modelización de situaciones en diversos contextos (intra matemáticos y extra matemáticos) pues esto nos ayudará a realizar intervenciones didácticas que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes, desde una comprensión de lo que hacen, atribuyendo sentido y significado a sus resultados.

Para lograr nuestro objetivo de promover una reflexión didáctica sobre la resolución de problemas que involucran funciones por tramos de variable real, en profesores de matemáticas en

ejercicio o en formación inicial, mostraremos el análisis con elementos del enforque instrumental de Rabardel a la solución de un problema presentado por tres alumnos.

Referentes teóricos

Para el análisis de las soluciones de los alumnos se utilizará el enfoque instrumental de Rabardel (1995), donde se plantea un enfoque teórico que pretende dar cuenta de la naturaleza compleja del instrumento y la génesis del instrumento en el sujeto, enfatizando en la relación de este con la actividad humana. Según dicho enfoque el autor considera que las herramientas de este ambiente, artefactos en un primer momento, pueden transformarse en instrumentos para los estudiantes en un segundo momento, según los esquemas de uso que le den. En este sentido, cabe señalar que los recursos tecnológicos son herramientas con gran potencialidad que podemos usar como medio para construir y crear conocimiento.

> Para Rabardel (1999) un artefacto puede ser material o un sistema simbólico, empleado como medio para la acción. Mientras que un instrumento es una entidad que comprende el artefacto material y los esquemas de uso que le da el usuario, los cuales son resultado de una construcción propia mediante las acciones que realiza. También señala que el instrumento no es algo que existe en sí mismo, sino que es elaborado por el usuario en un proceso denominado génesis instrumental. Es decir, el instrumento se concibe como tal cuando el usuario se apropia de este y lo integra a su actividad.

Cabe resaltar que Rabardel (1999) considera que los instrumentos cumplen una función muy importante para los estudiantes, pues involucra las acciones que estos realicen con el artefacto, constituyéndose de esta manera en parte activa en la construcción de sus conocimientos. El artefacto en nuestro caso es el dominio de la definición por tramos.

También se utiliza las herramientas del programa de geometría dinámica, en este caso el GeoGebra 3D como un medio para la representación o simulación y según las acciones que realicen sobre este, ofrecen un ambiente favorable para la exploración y construcción de conocimientos matemáticos.

Metodología

La experiencia didáctica se realizó con un grupo de 15 estudiantes ingresantes a carreras de ciencias e ingeniería de una universidad peruana. Se desarrolló de manera virtual y por la plataforma Zoom. La sesión se divide en dos momentos, en un primer momento consideramos un trabajo individual, donde se propone un problema a los estudiantes y se les da un tiempo para que lean y resuelvan; en un segundo momento, proponemos un trabajo grupal donde se le pide a cada estudiante que comente su proceso de solución o escriba en el chat. A modo de ejemplo, mostramos un problema propuesto. Para arribar a las reflexiones se consideró la solución de tres alumnos, las cuales fueron las de mayor avance respecto a los demás alumnos en el primer momento, es decir en el trabajo individual.

Función definida por tramos

Se considera la siguiente definición como artefacto.

Las funciones definidas por tramos o por secciones o por partes o definidas a trozos están definidas mediante expresiones algebraicas, definidas en intervalos distintos. Es decir,

Una función definida por tramos en los intervalos disjuntos I_1, I_2, ..., I_k, es una función de la forma $f: I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & si\ x \in I_1 \\ f_2(x), & si\ x \in I_2 \\ f_3(x), & si\ x \in I_3 \\ \quad\vdots & \\ \quad\vdots & \\ f_k(x), & si\ x \in I_k \end{cases}$$

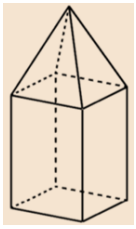
donde $f_1: I_1 \to \mathbb{R}$, $f_2: I_2 \to \mathbb{R}$, ..., $f_k: I_k \to \mathbb{R}$ son funciones obtenidas por operación o composición de funciones elementales. El dominio de la función definida a trozos es la unión de los intervalos I_1, I_2, ... e I_k.

Esta definición constituye el artefacto que será instrumentalizado para resolver problemas.

Problema con función por tramos

Mostramos un problema con enunciados verbales vinculados a funciones por tramos en contextos geométricos.

Problema 1



En la figura se muestra un recipiente. La parte inferior es un prisma regular de 10 cm de altura y cuya base es un cuadrado de 36 cm^2 de área. La parte superior es una pirámide regular de 4 cm de altura. Si el recipiente contiene agua hasta una altura h (medida desde la base), exprese el volumen del agua en términos de h.

Análisis de las soluciones

Las dificultades que presentan los estudiantes ingresantes a una carrera de ciencias e ingeniería de una universidad privada peruana cuando resuelven problemas de modelación que involucran funciones por tramos de variable real se relacionan con los conceptos y procesos matemáticos involucrados para determinar la expresión matemática o regla de correspondencia de estas funciones a partir de enunciados verbales. A modo de ejemplo mostramos las respuestas dadas por tres estudiantes al problema.

El primer alumno presenta tres casos descritos en la figura 1.

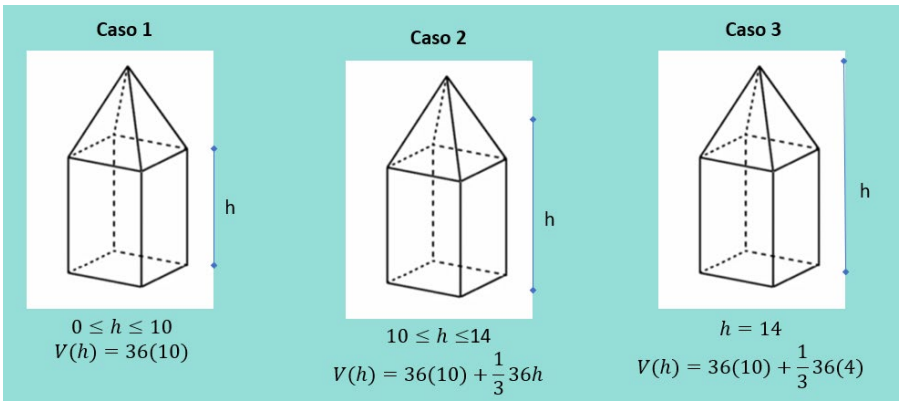


Figura 1. Respuesta al problema 1 dado por el estudiante 1

En la tabla 1 se explicitan detalles del análisis a la solución del alumno 1.

Tabla 1
Análisis de la solución del alumno 1.

Solución alumno 1	Artefacto (elementos del artefacto)	Instrumento
Considera como primer tramo cuando $0 \leq h \leq 10$ $V(h) = 36(10)$	La expresión algebraica no es la correcta para el dominio descrito. No considera que el volumen del recipiente varia cuando la altura h varia, es decir $V(h) = 36(h)$, si $0 \leq h \leq 10$.	No logra instrumentalizar la definición de función en el contexto dado.
Considera segundo tramo cuando $10 \leq h \leq 14$ $V(h) = 36(10) + \frac{1}{3}36h$	Expresión algebraica incorrecta, en el segundo tramo, ya que se debe considerar la suma del volumen del prisma rectangular y un tronco de pirámide de base rectangular.	Error en dominio y regla de correspondencia.
Finalmente considera el tercer tramo cuando $h = 14$	Expresión correcta del volumen total cuando *h* alcanza la altura máxima.	Expresión correcta de la definición de función para un unitario.

Fuente. Producción de las autoras.

A continuación, las repuesta de alumno 2, en el que considera dos casos mostrados en la figura 2.

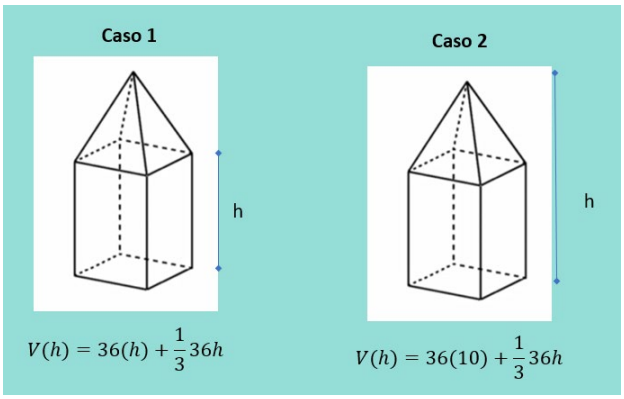


Figura 2. Respuesta al problema 1 dado por el estudiante 2

La solución permite describir elementos que evitan la instrumentalización de la definición de función por tramos, podemos observar el análisis en la tabla 2.

Tabla 2
Análisis de la solución del alumno 2

Solución alumno 2	Artefacto (elementos del artefacto)	Instrumento
De la figura Caso 1 ($0 \leq h \leq 10$) $V(h) = 36(h) + \frac{1}{3}36h$	La expresión algebraica del tramo que muestra la figura no es la correcta.	No describe el modelo y la expresión algebraica, es decir no instrumentalizar la definición de función.
Considera segundo tramo cuando $10 \leq h \leq 14$ $V(h) = 36(10) + \frac{1}{3}36h$	Expresión algebraica incorrecta, en el segundo tramo, ya que se debe considerar la suma del volumen del prisma rectangular, pero no describe el tronco de pirámide de base rectangular.	Error en dominio y regla de correspondencia.

Fuente. Producción de las autoras.

Seguidamente tenemos la respuesta del alumno 3 que se muestra en la Figura 3.

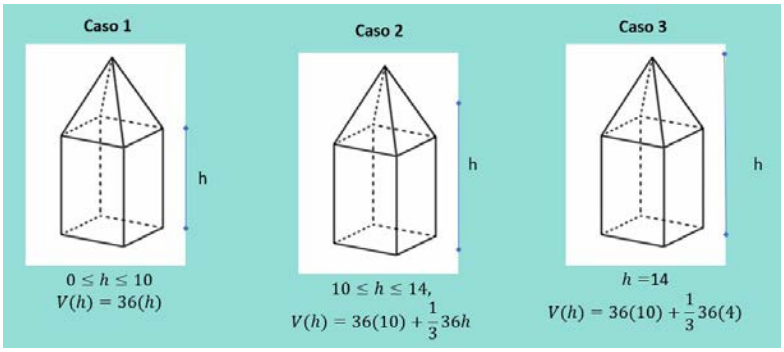


Figura 3. Respuesta al problema 1 dado por el estudiante 3

En la tabla 3 podemos apreciar detalles del análisis a la respuesta de alumno 3.

Tabla 3
Análisis de la solución del alumno 3.

Solución alumno 3	Artefacto (elementos del artefacto)	Instrumento
Para $0 \leq h \leq 10$ $V(h) = 36(h)$	La expresión algebraica es la correcta para el dominio descrito.	Logra instrumentalizar la definición de función en para este caso.
Considera segundo tramo cuando $10 \leq h \leq 14$ $V(h) = 36(10) + \frac{1}{3}36h$	Expresión algebraica incorrecta, en el segundo tramo, ya que se debe considerar la suma del volumen del prisma rectangular y un tronco de pirámide de base rectangular.	Error en dominio y regla de correspondencia.
Para $h = 14$ $V(h) = 36(10) + \frac{1}{3}36(4)$	Expresión correcta del volumen total cuando *h* alcanza la altura máxima.	Expresión correcta de la definición de función para un unitario.

Fuente. Producción de las autoras.

Podemos observar que las dificultades que presentan este grupo de estudiantes ingresantes a una especialidad de ciencias e ingeniería cuando resuelven problemas que involucran funciones por tramos de variable real en contextos geométricos son:

- No reconocen las propiedades geométricas vinculadas con la variación del nivel de agua en el recipiente formado por un prisma y una pirámide.
- No logran establecer una relación correcta entre el nivel de agua en el recipiente con el volumen de agua en el mismo, sobre todo cuando el nivel de agua supera la parte del prisma y requieren establecer relaciones en un tronco de pirámide.
- No logran determinar la regla de correspondencia que le corresponde a cada tramo de la función por tramos involucrada.
- No identifican el dominio que corresponde a la regla de correspondencia de cada tramo.

El instrumento que es la definición de función por tramo de variable real en este momento del taller no se convirtió en instrumento para describir el modelo matemático.

Con esta información en el segundo momento de discusión grupal y uso de herramientas del GeoGebra se logró ayudar en la comprensión y resolución del problema. Para el siguiente problema solicitado, la definición de función por tramos fue un instrumento aplicado correctamente por la gran mayoría de alumnos asistentes a dicho taller. Por tanto, la definición de funciones por tramos de variable real en la resolución de problemas no generó una génesis instrumental en primera instancia y demoró lograr el dominio de la mayoría de estudiantes.

Conclusiones

Esta experiencia didáctica permitió identificar las dificultades que los alumnos ingresantes presentan al ser enfrentados a la resolución de problemas que involucran funciones por tramos de variable real y más aún que surja de la modelación incluyendo elementos de la geometría. La explicitación de estas dificultades permite cuestionar y reflexionar sobre las formas de superar estas dificultades. Como muestran diversos investigadores para superar estas dificultades podemos hacer uso de herramientas tecnológicas para simulaciones. También las falencias en elementos de la geometría alertan a buscar reforzar estos conocimientos. Luego de complementar, explicar y absolver las dudas y solicitar problemas similares se logró en la mayoría de alumnos una génesis instrumental de la definición de función por tramos de variable real.

Consideraciones Finales

Consideramos que la resolución de problemas en contextos diversos de modelización es sumamente importante en la formación básica de los estudiantes de los primeros ciclos de carreras universitarias, pues desarrollan la creatividad, el uso adecuado del leguaje matemático, el uso correcto de conceptos, propriedades y procedimientos matemáticos, entre otros.
Nos interesa promover una reflexión en los profesores de matemática de educación secundaria y de educación superior, en relación a la enseñanza y el aprendizaje de las funciones por tramos de variable real, a partir de situaciones en diversos contextos que acerquen a los estudiantes a fenómenos reales que tengan sentido y resulten interesantes.

Referencias y bibliografía

Caro, S. A. (2013). *Propuesta de enseñanza sobre la modelación de funciones por tramos pasando de lo concreto a lo abstracto*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias Medellín] http://bdigital.unal.edu.co/12376/1/71295941.2014.pdf

Chumpitaz, L. (2013). *La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el* software *GeoGebra con estudiantes de ingeniería*. [Tesis de maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú].

Díaz, R. L. y Ordoñez, C. (2019). Dificultades en la compresión de la función por tramos en estudiantes universitarios. *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Colombia.

Gatica, N., Maz-Machado, M., May, G., Cosci, C., Echevarría, G. y Renaudo, J. (2010). Un acercamiento a la idea de continuidad de funciones en estudiantes de Ciencias Económicas. *Unión*, *22*, 121-131.

Leguizamón, C. y Caicedo, C. (1999). Funciones a trozos. Un camino hacia su comprensión. *Educación Matemática*, *11*(1), 103-118.

Mallart, A., Font, V. y Malaspina, U. (2016). Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema en la formación inicial de maestros. *Perfiles Educativos*, *38*(152), 1-30.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin. http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site

Rabardel, P. (1999) Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. En : Bailleul M. (Ed) Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques. Évolution des enseignants de mathématiques; rôle des instruments informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques. Caen: IUFM de Caen.

Trejo, N., Camarena, P. y Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: la matemática en contexto como propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria*, *11* (Número especial), 397-424.

Vernaza, A. y Tapia, A. (2013). Una propuesta de enseñanza de la función por tramos usando el periódico y Geogebra. [Tesis de licenciatura, Universidad del Valle] http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/6774/1/CD-0395402.pdf

Resolução de Problemas de adição com crianças em processo de alfabetização

Gracielle Zager **Mandel**
Universidade Regional de Blumenau
Brasil
gzmandel@furb.br
Janaína Poffo **Possamai**
Universidade Regional de Blumenau
Brasil
janainap@furb.br

Resumo

O estudo tem como objetivo analisar contribuições da resolução de problemas na aprendizagem matemática das crianças, envolvendo um problema de adição. Para tanto, discute-se a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A partir dessa metodologia, as crianças, de 6 e 7 anos de idade, em processo de alfabetização, resolveram um problema de adição. Essa pesquisa, de natureza qualitativa, analisa os resultados com base no referencial teórico. Os resultados indicam que essa estratégia metodológica envolve as crianças como protagonistas de suas aprendizagens, favorecendo a socialização das ideais por meio de um trabalho individual, em pequenos grupos e em plenária. Ainda, ressaltam a importância de o professor acompanhar as crianças, para que elas avancem no registro de suas ideias, articulando a linguagem matemática, a oralidade, a expressão por meio de desenhos e o processo de escrita.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Educação Matemática; Ensino Fundamental; Alfabetização; Problemas de adição.

Introdução

Este estudo se alinha com as tendências atuais em Educação Matemática, no que se refere ao ensino por meio da Resolução de Problemas. Diversas pesquisas (Van de Walle, 2009; Allevato & Onuchic, 2021) indicam a demanda emergente de pesquisa relacionada com a

resolução de problemas, que tem potencial para personalizar e humanizar a Matemática escolar, com as crianças sendo convidadas a expressar suas experiências vividas, refletindo valores e compromissos pessoais. Quando as crianças são convidadas a resolverem problemas, sem que um método ou o conteúdo necessário para a solução já tenha sido apresentado previamente, elas se envolvem na construção do seu próprio conhecimento matemático, especialmente quando a partir de propostas relacionadas ao seu meio ou que façam sentido para sua realidade.

A importância atribuída à resolução de problemas, também, é reforçada pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), que é o documento de caráter normativo que estabelece a organização do currículo da Educação Básica no Brasil, ao explicitar na grande e crescente de vezes que a palavra resolver problemas está indicada nas habilidades enunciadas. O documento enfatiza que:

> *[...] os processos matemáticos de **resolução de problemas**, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como **formas privilegiadas da atividade matemática**, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. (Brasil, 2018, p. 268, grifo nosso)*

Assim, este estudo tem como objetivo analisar as contribuições da resolução de problemas na aprendizagem matemática das crianças, envolvendo um problema de adição, utilizando a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, conforme se discute na sequência.

Resolução de Problemas no ensino de Matemática

Inicialmente cabe esclarecer que um problema é “uma tarefa apresentada aos estudantes em um ambiente instrucional que apresenta uma pergunta a ser respondida, mas para a qual os estudantes não têm um procedimento ou estratégia prontamente disponível para respondê-la” (Lester & Cai, 2016, p. 122, tradução nossa).

Ao falar da resolução de problemas no ensino de matemática, Van de Walle (2009, p. 57) destaca que o professor precisa conhecer os seus estudantes, de modo a propor um problema para o qual eles tenham “[...] as ideias apropriadas para se envolver e resolver o problema e, ainda assim, considerá-lo desafiante e interessante”.

Nessa vertente, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (Allevato & Onuchic, 2021) se constitui numa forma de trabalho em que os estudantes individualmente, em pequenos grupos e em plenária resolvem um problema, denominado problema gerador. Nessa metodologia, o problema se configura como “ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos” (Allevato & Onuchic, 2021, p. 47).

A Figura 1 apresenta um roteiro de 10 etapas que são sugeridas por Allevato e Onuchic (2021) para o trabalho em sala de aula com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

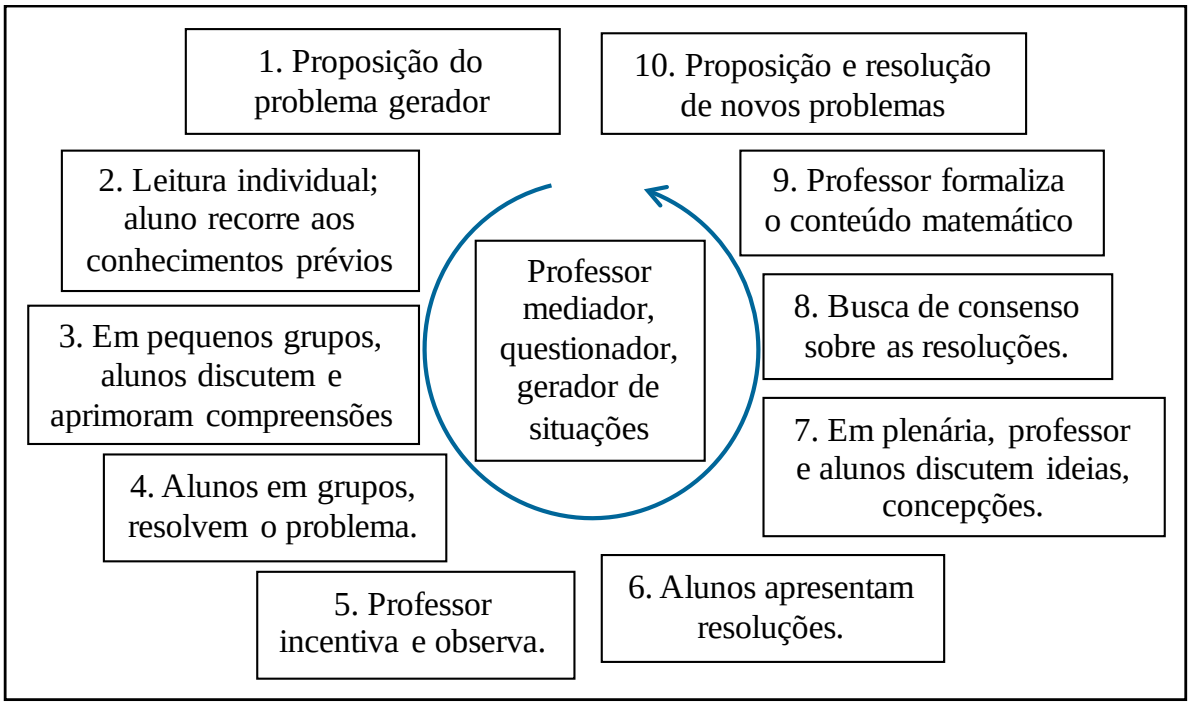


Figura 1. Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas
Fonte: Allevato e Onuchic (2021, p. 51)

Nessa metodologia o termo ensino-aprendizagem-avaliação tem como objetivo "[...] expressar uma concepção em que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno com o professor atuando como guia e mediador" (Allevato & Onuchic, 2021, p. 47). E, assim, todos os processos acontecem durante a realização da resolução do problema, observando sempre os registros, a oralidade, apresentação e discussões em grupo.

As pesquisas realizadas no Brasil que usam essa metodologia de ensino são desenvolvidas em todas as etapas da Educação Básica (Costa, Allevato & Nunes, 2017; Mandel & Possamai, 2022) e do Ensino Superior (Bertotti Junior & Possamai, 2021), mas requer, por vezes, alguma adaptação das etapas dependendo da faixa etária dos estudantes. Não há uma forma rígida de desenvolver essa Metodologia, porém utilizar um problema gerador, que conduza os estudantes durante sua resolução à novas aprendizagens, bem como a formalização do conteúdo pretendido pelo professor, são aspectos essenciais que caracterizam o ensino através da resolução de problemas. No primeiro ano do Ensino Fundamental conseguimos desenvolver quase todos as etapas, com exceção da leitura individual que somente poucas compreendem o que leem, quando ainda não alfabetizadas.

Nessa Metodologia, o estudante é colocado como protagonista de sua aprendizagem e o professor "[...] é o guia, o orientador dos processos de construção do conhecimento e os alunos são co-construtores desse conhecimento" (Allevato & Onuchic, 2019, p. 3). Isso implica em uma abordagem de ensino diferente das práticas ditas "tradicionais" nas quais o professor apresenta o conteúdo e exemplos, para depois apresentar uma lista de questões para que os estudantes apliquem a Matemática que foi ensinada.

Este estudo é parte de uma pesquisa de mestrado, orientado por essas discussões, no qual foram criados/adaptados vários problemas com crianças do primeiro ano do Ensino Fundamental, com seis e sete anos de idade. Os problemas foram criados com o intuito desenvolver aprendizagens relacionadas com as operações de adição e subtração de números naturais, a partir da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Na sequência, um dos problemas que foram resolvidos pelas crianças é analisado.

Discussão e análise de dados

Este estudo é de natureza qualitativa cujo processo é pautado na interpretação dos fenômenos e atribuição de significados (Kauark, Manhães & Medeiros, 2010) e visa analisar uma aula baseada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas com 20 crianças entre 6 e 7 anos de idade, de uma turma do 1º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública da cidade de Blumenau, Santa Catarina, Brasil. Ressalta-se que a pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética da Universidade Regional de Blumenau, os responsáveis pelas crianças assinaram o termo de consentimento e as crianças o termo de assentimento.

As crianças foram solicitadas em duplas a resolverem um problema relacionado com adição, apresentado na Figura 2.

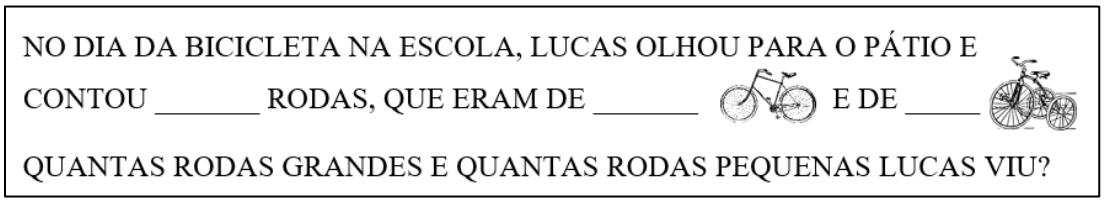


Figura 2. Problema das bicicletas e triciclos.

Para resolver esse problema, as crianças receberam fichas com os números 2, 3 e 13 e deveriam colá-las nas lacunas adequadas. As crianças resolveram individualmente o problema. Para análise foram consideradas os registros produzidos pelas crianças, áudios registrados pela professora da turma com as crianças e, também, dos diferentes momentos da aula. Cabe destacar que trata-se de uma pesquisa de mestrado e a pesquisadora é a professora da turma.

Inicialmente o problema foi entregue impresso para as crianças e foi solicitado que fizessem uma leitura individual. Cabe destacar que várias crianças ainda não têm domínio da leitura, mas esse é um momento em que a professora as auxilia individualmente a reconhecerem sílabas e avançar no processo. Além disso, algumas já sabem ler, sendo que para essas é importante que tenham esse momento de leitura e interpretação sem qualquer intervenção, desenvolvendo confiança e autonomia.

Na sequência, a professora realiza uma leitura do problema com a turma toda, registrando-o no quadro, de modo que as crianças possam acompanhar esse processo, auxiliando-as a acompanharem a leitura. Esses dois momentos duraram 15 min e algumas crianças já indicaram

que o número 2 deveria corresponderia às bicicletas que têm 2 rodas e o número 3 aos triciclos que têm 3 rodas. Nesse momento a professora lembrou as crianças que o total de rodas precisava ser considerado e, então, deixou as crianças avançarem para a resolução e registro do problema.

A etapa de resolução do problema durou uma hora e a professora atuou ajudando algumas crianças relendo a pergunta, incentivando que desenhassem para construir sua resolução e questionando o entendimento e os registros produzidos. Todas as crianças conseguiram preencher os dados do problema, sendo que 4 resolveram sozinhas e as demais precisaram de algum auxílio. O processo mais recorrente foi o uso de desenho para contar as rodas, conforme ilustra a Figura 3.

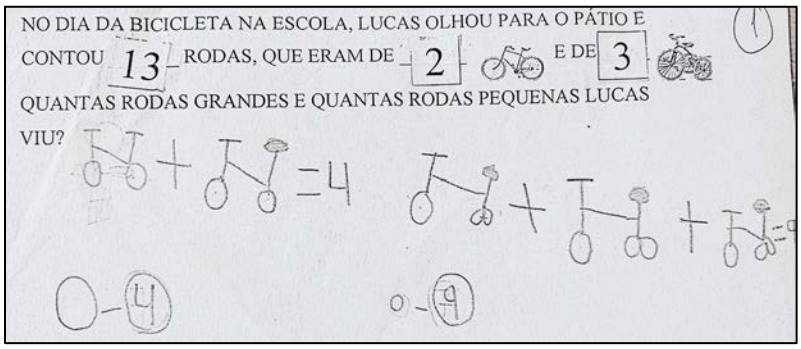


Figura 3. Resolução apresentada pela criança A.

Na resolução apresentada na Figura 3, verifica-se que a criança construiu o desenho para verificar o total de 13 rodas e, também, conclui que há 4 rodas grandes e 9 pequenas.

O processo de registrar a resolução é uma construção que precisa ser incentivada, para que as crianças consigam expressar o que pensam, por meio de desenhos, de palavras e de números. Por vezes, os registros demandam que a professora os questione para compreender o significado, como o apresentado na Figura 4.

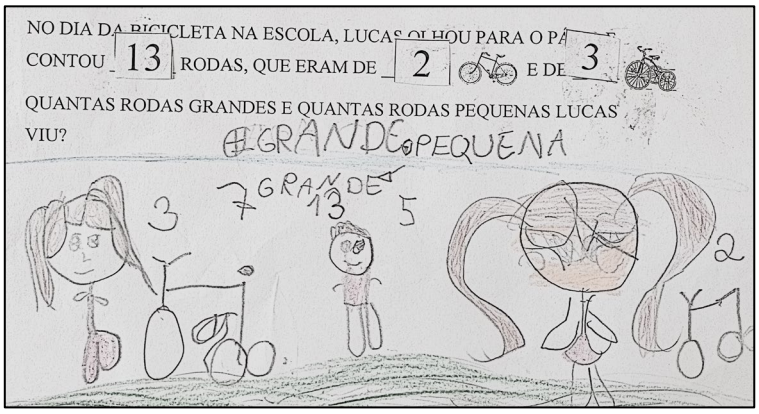


Figura 4. Resolução apresentada pela criança L.

Para compreender o registro apresentado na Figura 4, a professora questionou o significado dos números, sendo que a criança explicou que 7 indica o número de rodas grandes,

considerando as rodas das bicicletas e a roda da frente dos triciclos como grandes, enquanto 5 (contado erroneamente, o correto seriam 6) seriam as demais rodas do triciclo como pequenas. Verifica-se que a criança utiliza um processo mental para a contagem das rodas e acaba cometendo um erro nas rodas pequenas, porém o processo de resolução é adequado.

Van de Walle (2009, p. 67) ressalta a importância de questionar as crianças, solicitando explicações para seus registros, sejam eles corretos ou incorretos:

> *Exija explicações para acompanhar todas as respostas. Assim, o pedido para uma explicação não sinalizará que uma resposta esteja incorreta, como as crianças inicialmente acreditarão. As respostas corretas podem não representar o pensamento conceitual que você assumiu. As respostas incorretas podem ser apenas o resultado de um erro facilmente corrigível. Exigindo explicações, os alunos aprendem que o raciocínio em matemática é importante e útil. (Van de Walle, 2009, p.67)*

Há ainda crianças que não conseguiram produzir um registro adequado, conforme ilustra a Figura 5, sendo que a resolução foi apresentada oralmente para a professora.

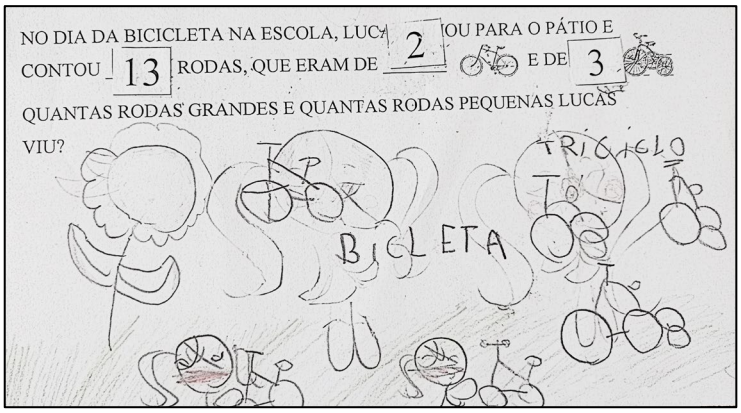


Figura 5. Resolução apresentada pela criança IR.

Em sua resolução, apresentada para a professora, a criança IR diz que as duas bicicletas pequenas vão ter roda pequena e, ainda, pede para a professora como se escreve a palavra “pequena”. A professora questiona quantas rodas são grandes e a criança responde que as rodas grandes são do triciclo, mas não consegue definir quantas são. A professora, então, pergunta se a criança consegue imaginar os triciclos no pátio e contar quantas rodas têm. A criança então responde que são nove rodas. Esse é um dos exemplos em que a criança conseguiu com o auxílio da professora resolver o problema, mas não conseguiu realizar o registro de modo que fosse compreender o que foi conversado.

Essa discussão com a criança, guiando-a para buscar estratégias de resolução com base em suas vivências, ressalta a importância de, sempre que possível e, com maior relevância nas primeiras experiências dos estudantes com a Resolução de Problemas, utilizar problemas retratando situações do mundo real, uma vez que

> *“A resolução de problemas ‘reais’ envolve os estudantes e promove o estabelecimento e o uso de conexões [...] e, embora não*
> *seja condição suficiente para o sucesso na resolução de um problema, a habilidade de*

> *estabelecer conexões é necessária para o desenvolvimento da autonomia do estudante nessa atividade" (Allevato & Onuchic, 2019, p. 7).*

Cabe enfatizar que das 20 crianças, 11 não conseguiram produzir um registro que expressasse o processo de resolução produzido oralmente, enquanto algumas crianças que fizeram um registro adequado, no momento de apresentar as resoluções não conseguiam explicar o que haviam feito.

Estimular esse processo de registro é necessário, e carece da intervenção contínua do professor. Como as crianças estão em processo de alfabetização, é necessário, também, estimular que associem os desenhos utilizados nos seus registros com a escrita, uma vez que "O ato da escrita é um processo reflexivo. Conforme os estudantes se esforçam para explicar seus raciocínios e defender suas respostas, eles passarão um período mais concentrado pensando nas ideias envolvidas" (Van de Walle, 2009, p. 73).

A apresentação das resoluções é um momento em que não são todas as crianças que participam, apenas algumas são convidadas, pois nessa idade ainda não conseguem manter a concentração de modo a acompanhar e que seja proveitoso para seu aprendizado esse momento de discussão das resoluções. Na plenária e busca de consenso, as crianças aceitaram duas soluções possíveis, sendo 4 ou 7 rodas grandes. Na formalização a professora retoma a resolução, registrando no quadro, a partir do que foi construído pelas crianças, permitindo que eles analisassem os registros dos colegas e se autoavaliem.

Considerações finais

Concluímos que todos as crianças conseguiram completar o problema encaixando corretamente as opções de números disponibilizados (13, 2 e 3), realizando operações de adição mentalmente, por meio de contagem com os dedos ou por desenhos.

No processo de registro da resolução de problemas obtivemos dois grupos de soluções, no primeiro, as crianças que conseguiram fazer a resolução do problema oralmente, mas, ainda não conseguiram realizar um registro que seja possível entender. O segundo, as crianças que conseguiram explicar suas resoluções e conseguiram realizar o registro de modo que a professora entendesse o processo que foi utilizado para chegar ao resultado.

As 10 etapas para a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas foram implementadas com adaptações aos tempos de aprendizagem e às necessidades das crianças. O registro é um processo que carece de atenção do professor, pois precisa ser incentivado para que as crianças consigam avançar da oralidade para a escrita, por meio de palavras, desenhos ou esquemas.

A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas possibilitou envolver as crianças, colocando-as como produtoras do seu próprio conhecimento, evoluindo em todos as etapas da metodologia, encorajando-as a buscarem por um consenso, sem medo de errar ou serem questionadas pelo erro. A dinâmica em grupo envolveu as crianças para crescerem juntas e aprenderem cada vez mais.

Referências

Allevato, N. S. G. & Onuchic, L. de la R. (2019). As conexões trabalhadas através da Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10(2), pp. 1–14. DOI: https://doi.org/10.26843/rencima.v10i2.2334

Allevato, N. S. G. & Onuchic, L. de la. R. (2021). Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que através da Resolução de Problemas? Em Lourdes de la R. O. et. al. (org.). *Resolução de Problemas*: teoria e prática (pp. 37 – 57). Paco.

Bertotti Junior, V. I. & Poffo Possamai, J. (2021). Resolução de Problemas no Ensino Superior – uma análise na visão dos acadêmicos. *Revista Paranaense De Educação Matemática*, 10(21), pp. 184–208. DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2021.10.21.184-208

Brasil. Ministério da Educação (2018). Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEB.

Costa, M. S., Allevato, N. S. G. & Nunes, C. B. (2017). Trabalhando números e operações com alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental sob a ótica da Resolução de Problemas. *Interfaces da Educação*, 8, pp. 230-252.

Kauark, F. S., Manhães, F. C.& Medeiros, C. H. Metodologia da Pesquisa: Um guia prático. Itabuna: Via Litterarum, 2010.

Lester, F. & Cai, J. (2016). Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research. Em Patric, F. et al. *Posing and Solving Mathematical Problems*: Advances and New Perspectives (pp. 117-135). Springer.

Mandel, G. Z. & Possamai, J. P. (2022) Resolução do problema dos cilindros na Educação Infantil. *Com a Palavra, o Professor*, 7, pp. 279-292. DOI: https://doi.org/10.23864/cpp.v7i18.829

Van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no Ensino Fundamental*: formação de professores e aplicações em sala de aula. 6. Artmed.

Agradecimento: À FAPESC – Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina pela concessão de bolsa de mestrado à Gracielle Zager Mandel.

Resolución de problemas verbales en un ambiente dinámico y formación de profesores de matemáticas

Adrián **Gómez-Árciga**
Facultad de Pedagogía e Innovación Educativa, Universidad Autónoma de Baja California
México
adrian.arciga@uabc.edu.mx
Gricelda **Mendivil** Rosas
Facultad de Pedagogía e Innovación Educativa, Universidad Autónoma de Baja California
México
gmendivil@uabc.edu.mx

Resumen

En este estudio se analizan y documentan los recursos, estrategias y formas de razonamiento matemático que exhiben profesores de nivel bachillerato cuando utilizan un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) durante el proceso de resolución de problemas verbales. Los resultados mostraron que el uso de un SGD (GeoGebra) favorece diferentes formas de representar, explorar y resolver los problemas, promoviendo la discusión y significado de los conceptos involucrados en los enunciados.

Palabras clave: Resolución de problemas; Formación de profesores; Álgebra; Tecnología digital.

Introducción

La agenda de investigación sobre el estudio y aprendizaje del álgebra destaca la importancia de que los estudiantes construyan y analicen el significado y sentido de los objetos y procesos algebraicos de tal manera que se favorezca la comprensión conceptual y la resolución de problemas (Kieran, 2020). En este sentido, la presencia de la tecnología digital en el ámbito escolar puede favorecer este tipo de prácticas, sin embargo, exige la participación de los distintos actores educativos en la reestructuración de los ambientes de aprendizaje (Santos-Trigo, 2018). En la enseñanza del Álgebra, se ha indagado sobre qué ofrecen o qué pueden ofrecer las diferentes tecnologías digitales para alcanzar los objetivos específicos de aprendizaje en este

campo y cómo aprovecharlas de manera eficiente. De hecho, en varios países han ido disminuyendo gradualmente los ejercicios que requieren simplificación algebraica en las evaluaciones finales de los estudiantes y, además, les permiten el uso de un Sistema Algebraico Computacional (CAS, por sus siglas en inglés), como herramientas para simplificar y resolver ecuaciones (Arcavi et al., 2017).

Este reporte atiende a la pregunta de investigación ¿cómo se caracterizan las formas de razonamiento que exhiben profesores de bachillerato cuando resuelven problemas verbales con el uso de un SGD (GeoGebra) en un ambiente que promueve la perspectiva de resolución de problemas? El objetivo es abonar información a la discusión del uso eficiente de la tecnología digital en los procesos de enseñanza del Álgebra, en donde se reconoce que uno de los temas principales en la asignatura de álgebra de nivel bachillerato es el de los problemas verbales (problemas que pueden ser resueltos mediante el uso de sistemas de ecuaciones lineales o de segundo grado) (Verschffel et al., 2020).

Marco conceptual

Una manera de evaluar y explicar el proceso que un individuo sigue cuando resuelve problemas se basa en identificar: (1) los recursos o dominio de conocimiento conceptual y procedimental, (2) los métodos heurísticos o estrategias de búsqueda para analizar problemas, (3) las estrategias metacognitivas o de monitoreo y control y, (4) las creencias o actitudes que toma antes, durante y después del proceso de solución (Schoenfeld, 1985). Estas cuatro fases son importantes para analizar y comprender los acercamientos a la solución de los problemas que muestran los profesores que participaron en este estudio.

Por otro lado, como mencionan Santos-Trigo y Aguilar-Magallón (2018), en la actualidad "un ambiente de enseñanza basado en la resolución de problemas debe incorporar ya como un elemento esencial el uso de las tecnologías digitales en las formas de representar y de explorar las tareas o problemas matemáticos" (p. 164). Por eso, resulta importante integrar un marco que considere no solo las fases de la resolución de problemas, sino también el uso de las tecnologías digitales durante el proceso de resolución.

En este sentido, Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) propusieron cuatro episodios que se caracterizan por incentivar el uso de la tecnología digital y la formulación de preguntas, que dirigen las acciones del individuo durante el proceso de la resolución de problemas. Los episodios son: **Comprensión**: ¿cómo representar la información descrita en la situación problemática con el medio tecnológico implementado? Buscar formas de representar un problema en un ambiente distinto a lápiz y papel implica identificar los conceptos involucrados y vincularlos a las herramientas del medio. **Exploración**: ¿cómo se resuelve el problema utilizando el medio tecnológico? ¿De qué manera se relacionan los elementos puestos en juego? Explorar e identificar posibles relaciones entre los datos proporcionados. Así como plantear conjeturas que puedan ser discutidas y exploradas también.**Búsqueda de distintos acercamientos a la solución**: ¿cómo proponer al menos un acercamiento a la solución del problema con base en el medio utilizado? Argumentar los resultados obtenidos y, de ser posible, presentar una solución formal. **Integración y reflexiones**: ¿cuáles fueron las ideas principales en el proceso? Discutir

sobre el significado o la interpretación que se les dio en el medio tecnológico a los conceptos involucrados en el enunciado del problema.

Los problemas que se utilizaron para este estudio fueron desarrollados y resueltos con el uso de un SGD (GeoGebra) a través de los episodios planteados por Santos-Trigo y Camacho-Machín, para promover y facilitar el estudio de las relaciones entre las cantidades como se desea en el álgebra escolar (NCTM, 2010).

Metodología

La naturaleza del estudio es cualitativa, busca caracterizar en qué medida profesores de bachillerato se apropian de las herramientas que ofrece un SGD (GeoGebra) para representar y explorar dinámicamente los conceptos involucrados en los problemas verbales y proponer posibles rutas o caminos para solucionarlos. Mediante la observación e interacción controlada se busca comprender cómo los profesores interpretan las situaciones problemáticas que se les plantean cuando utilizan GeoGebra, y qué significado y sentido geométrico les dan a los conceptos involucrados en los problemas.

Se llevó a cabo con diez profesores de matemáticas de Bachillerato. Cinco de los profesores contaban con una formación inicial normalista, cuatro con formación en matemáticas y uno en ingeniería. Los años de experiencias frente a grupo oscilaban desde uno hasta diez años. Respecto al manejo de GeoGebra, su experiencia se limitaba a graficar funciones.

Las actividades formaron parte de un diplomado sobre la incorporación de las herramientas digitales en la enseñanza de funciones en el nivel medio superior. El diplomado tuvo una duración de 120 horas, de las cuales 80 fueron presenciales impartidas en 16 sesiones de cinco horas cada una. Las sesiones de trabajo se desarrollaron en un aula que contaba con una computadora que estaba conectada a un proyector, la cual fue utilizada para mostrar las actividades y exponer los acercamientos en GeoGebra elaborados por los profesores durante el desarrollo de las sesiones. Cada profesor contaba con su computadora en la que previamente habían instalado GeoGebra.

Dentro de las actividades que se abordaron en el diplomado, se consideraron tres problemas verbales que involucraban el concepto de velocidad. Estos problemas los trabajaban de manera individual los profesores y, posteriormente, se hacia una discusión entre todo el grupo (profesores e investigador) sobre las ideas o acercamientos explorados. Los acercamientos que se muestran en la siguiente sección fueron el resultado de una discusión grupal. Los problemas seleccionados fueron:

Problema 1. Un barco navega a la velocidad de 45 km/h, ¿en cuánto tiempo recorrerá 180 km?

Problema 2. Un grupo de deportistas efectúan un recorrido de 380 km en siete horas durante una expedición de caza. Durante cuatro horas viajan a lo largo de una carretera pavimentada y el resto del tiempo por un camino de herradura. Si la velocidad media en el camino de herradura es de 25 km/h menor que la velocidad media en la carretera, encuéntrese la velocidad media y la distancia recorrida en cada uno de aquellos tramos de camino.

Problema 3. Charles Curtis decide dar un paseo relajante en su lancha de motor por el río Potomac. Inicia su recorrido en Bethesda, Maryland. Después de recorrer 12 millas a favor de la corriente, decide regresar. Su paseo tuvo una duración de 5 horas y la corriente del río se movía a una velocidad de 2 millas por hora. Si todo el trayecto lo hizo a la misma velocidad, determine la velocidad de la lancha en aguas tranquilas.

El Problema 1, involucra una situación cuyo objetivo fue introducir a los participantes en el uso de la herramienta como un medio para representar geométricamente o modelar la situación planteada (Gómez-Arciga & Reyes-Martínez, 2019). El Problema 2 que, a diferencia del Problema 1, es de tratamiento algebraico, se planteó con el objetivo de introducir estrategias con GeoGebra que ayudaran a los profesores a representar condiciones generales, es decir, condiciones que ya no son datos específicos como en el Problema 1 (Gómez-Arciga, Olvera-Martínez, Aguilar-Magallón & Poveda, 2018).

En este reporte se analiza el trabajo que los profesores desarrollaron en la resolución del Problema 3 con el uso de GeoGebra, porque interesa caracterizar los procesos de solución e identificar los recursos y estrategias que utilizaron después de enfrentarse a los dos primeros problemas. Los datos se recolectaron a través de videograbaciones de las sesiones, archivos de GeoGebra con las construcciones dinámicas que elaboraron los profesores y las notas de campo de los investigadores.

Resultados

En esta sección se hace un análisis sobre los recursos, estrategias y formas de razonamiento que exhibieron los profesores durante una discusión grupal en el proceso de resolución del Problema 3. Se discuten dos acercamientos que propusieron para llegar a la solución. El primero, es una solución algebraica del problema; el segundo es un acercamiento basado en la construcción de un modelo dinámico con GeoGebra.

Acercamiento algebraico

Este acercamiento es el que se estudia y enfatiza en los libros de texto cuando se resuelve este tipo de problemas. En él se pueden identificar cinco fases. 1) identificar los datos del problema; 2) determinar la incógnita; 3) escribir los datos en términos de la incógnita; 4) plantear la ecuación y; 5) resolver la ecuación y dar la solución al problema. El procedimiento que mostraron fue el siguiente:
$\boldsymbol{r}$ =velocidad de la lancha en aguas tranquilas.

Dirección	Distancia	Velocidad	Tiempo
Trayecto de ida (a favor de la corriente)	12	$r+2$	$\frac{12}{r+2}$
Trayecto de vuelta (en contra de la corriente)	12	$r-2$	$\frac{12}{r-2}$

Luego, **trayecto de ida + trayecto de vuelta = tiempo total;** $\frac{12}{r+2}+\frac{12}{r-2}=\mathbf{5}$

$$(\boldsymbol{r}+\mathbf{2})(\boldsymbol{r}-\mathbf{2})\left(\frac{12}{r+2}+\frac{12}{r-2}\right)=(\boldsymbol{r}+\mathbf{2})(\boldsymbol{r}-\mathbf{2})(\mathbf{5})$$

$$(r+2)(r-2)\left(\frac{12}{r+2}\right)+(r+2)(r-2)\left(\frac{12}{r-2}\right)=(r+2)(r-2)(5)$$
$$12(r-2)+12(r+2)=5(r^2-4)$$
$$12r-24+12r+24=5r^2-20$$
$$24r=5r^2-20$$

Los participantes, en general, usaron la formula cuadrática y obtuvieron las raíces 5.5 y -0.7. Así que la velocidad de la lancha en aguas tranquilas es de alrededor de 5.5 millas por hora.

Acercamiento geométrico con GeoGebra

Episodio de comprensión: En la Figura 1a se muestra el modelo dinámico con el que se representó la información descrita en la situación problemática, donde las unidades del *eje x* representan el tiempo medido en horas y las unidades del *eje y* la distancia medida en millas. Los segmentos *j* y *k* representan los tiempos transcurridos por la lancha de ida y vuelta, respectivamente; el punto *C* señala la distancia recorrida de ida y el punto *A'* la distancia total recorrida; las pendientes *m* y m_1 reproducen las velocidades de ida y vuelta según la posición del punto *E* (punto que controla el modelo).

La condición que se fijó del problema en el modelo geométrico fue la duración del paseo. En términos del modelo, la suma de las longitudes de los segmentos *j* y *k* era 5 ($j + k = 5$).

Episodio de exploración: Los profesores observaron la variación de las velocidades en función de la posición del punto *E*. Definieron la variable *diferencia* = $m - m_1$ y hallaron la posición de *E* donde la *diferencia = 4* (Figura 1b). En el contexto del problema se interpreta como hallar la velocidad tanto de ida como de vuelta cuando éstas tienen una diferencia de 4 millas por hora.

Esta aproximación del modelo a las condiciones del problema permitió la estimación de la velocidad de la lancha en aguas tranquilas, ya que solo fue necesario aplicar una operación mental que implicó disminuir dos unidades a *m* o aumentárselas a m_1. De esta manera, los profesores consideraron correcta la construcción del modelo porque el valor estimado era aproximado a la solución algebraica.

Teniendo en cuenta esto último, los profesores hicieron dos tipos de exploraciones. La primera fue explorar los valores que tomaba la variable definida como *diferencia* con relación a la posición del punto *E* (Figura 1c), a través del lugar geométrico descrito por el punto *P* = (*j*, *diferencia*); la segunda fue explorar la relación entre *m – 2* (velocidad de la lancha) y la *diferencia* (Figura 1d), a través del lugar geométrico descrito por el punto *J* = (*m – 2*, *diferencia*).

Al comparar las exploraciones, se observa que los profesores analizan la diferencia de las velocidades. Solo que en la primera lo hacen en términos del tiempo recorrido en el tramo de ida mientras que en la segunda lo hacen en términos de la velocidad de la lancha.

Este episodio concluyó con una discusión que se dio en torno a las preguntas ¿cómo se interpreta la intersección del lugar geométrico con el *eje x*?, ¿qué información se obtiene de la parte negativa del lugar geométrico?, ¿en qué intervalo del *eje x* tiene sentido mover el punto *E*

para explorar relaciones entre los elementos contenidos en el modelo?, es decir, ¿cuál es su dominio?

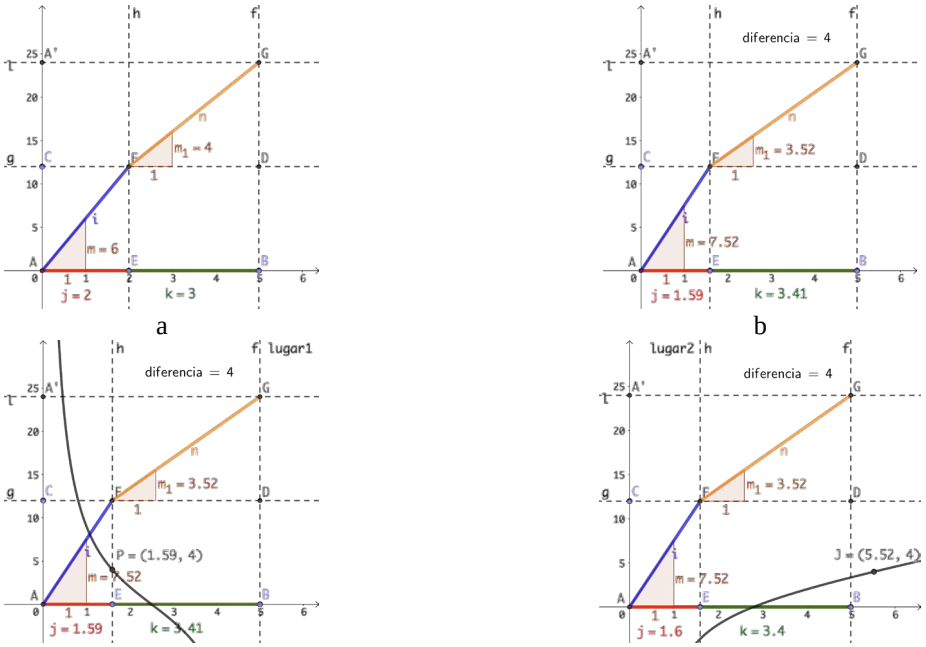


Figura 1. Representación dinámica de los conceptos involucrados en el problema y exploraciones.

Es importante mencionar que las unidades de los ejes cambian cuando se están analizando los lugares geométricos. Para el primero se toman como tiempo versus velocidad y para el segundo como velocidad versus velocidad.

Episodio de búsqueda de distintos acercamientos a la solución: El objetivo de los profesores en este episodio fue trazar los lugares geométricos de forma robusta (parametrizarlos) para hallar la solución exacta en cada caso con el SGD. En la Figura 2a se muestra la parametrización y gráfica del lugar geométrico descrito por el punto *P* (Figura 1c), y en la Figura 2b se intersecta con la recta $y = 4$, que se interpreta como el momento en que se cumple la condición de que la diferencia de las velocidades de ida y vuelta es cuatro millas por hora, obteniendo el tiempo en que la lancha recorre el tramo de ida en la coordenada *x* del punto *A*. Por lo tanto, la solución al Problema 3 es $12/1.59 - 2 \approx 5.5$.

$$y = diferenncia$$
$$y = m - m_1$$
$$y = \frac{12}{j} - \frac{12}{5-j}$$
$$y = \frac{60-24j}{5j-j^2}$$

Se renombra *j* como *x*

$$y = \frac{60-24x}{5x-x^2}$$

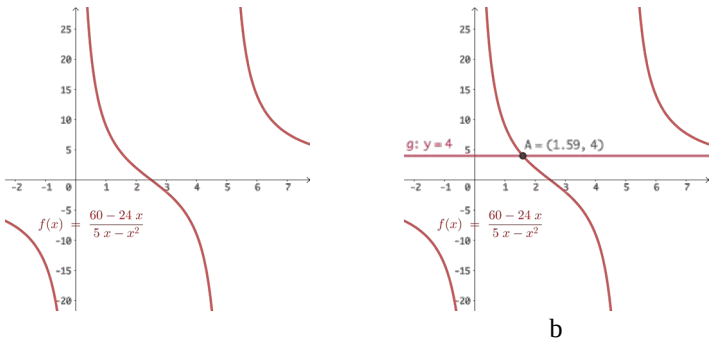


Figura 2. Graficación del lugar geométrico descrito por P e intersección con la recta y = 4.

De la misma manera, en la Figura 3a se muestra la parametrización y gráfica de lugar geométrico descrito por el punto *J* (Figura 1d) y en la Figura 3b se intersecta también con la recta *y = 4*, obteniendo la solución (la velocidad de la lancha en aguas tranquilas) en la coordenada *x* del punto *A*.

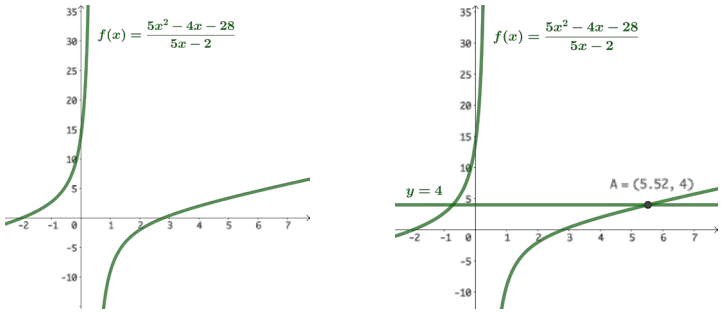
$(m-2, m-m_1)$

$\left(m-2, m-\frac{12m}{5m-12}\right)$

$\left(m-2, \frac{5m^2-24m}{5m-12}\right)$

Se renombra *m - 2* como *x* y se escribe como función

$$y=\frac{5x^2-4x-28}{5x-2}$$



a b

Figura 3. Graficación del lugar geométrico descrito por J y solución gráfica del Problema 3.

Episodio de integración y reflexiones: Los profesores discutieron sobre el significado geométrico de los conceptos involucrados en el enunciado del problema. Analizaron e interpretaron los lugares geométricos en términos de la construcción dinámica y del contexto del problema. En el desarrollo del episodio se reflexionó sobre ¿cómo se compara el tiempo de ida y vuelta de la lancha en aguas tranquilas con el tiempo de ida y vuelta cuando hay corriente?, ¿cómo varía la solución si se modifica la velocidad de la corriente?, ¿cambia el dominio del problema según la relación que se analice?, ¿cuáles son las características de las funciones asociadas a los lugares geométricos y cómo se interpretan las asíntotas en el contexto del problema? La meta es que los profesores conecten e integren sus recursos algebraicos con el medio geométrico y tengan la oportunidad de explorar los conceptos que aparecen en los problemas verbales desde otra perspectiva diferente a la algebraica. Por ejemplo, un concepto clave en la construcción y análisis del modelo fue el de razón que se asocia tanto a la velocidad como a la pendiente.

Discusión de los resultados y conclusiones

Al contrastar el acercamiento algebraico y el modelo dinámico o geométrico del problema, se observa que la construcción del modelo geométrico requirió que los profesores enfocaran la atención hacia el significado geométrico de la velocidad y la representación como pendiente de una recta. Esto implicó que activaran diferentes recursos, estrategias y se cuestionaran constantemente sobre el proceso que llevaron a cabo para resolver el problema.

Con ayuda de las herramientas implementaron las estrategias de punto con movimiento ordenado (punto *E* de la Figura 1 y punto *C* de la Figura 4), definición de una relación funcional (punto *P* en figuras 1c y 4c) y trazo de lugar geométrico, que permitieron la exploración, análisis y formulación y validación de conjeturas, de las relaciones inmersas en el modelo. Propusieron una solución robusta (que llega a la solución exacta dentro del SGD) posterior a los acercamientos discutidos en el modelo y, finalmente, reflexionaron sobre la importancia de plantear preguntas para extender el problema una vez que se contaba con el modelo dinámico.

Además, se obtuvieron modelos algebraicos a partir del modelo geométrico mediante la parametrización.

A pesar de que un modelo algebraico se asocia con el método formal de solución, no significa que un profesor deba estar limitado a enseñar este enfoque exclusivamente o darle prioridad en sus cursos impartidos. Pues, mientras el enfoque algebraico se sustenta fuertemente en recursos como la manipulación simbólica y dominio aritmético, el enfoque geométrico basado en un SGD (GeoGebra) da la posibilidad de construir y utilizar recursos y estrategias, y poner en práctica los hábitos del razonamiento matemático.

El hecho de que los profesores enfoquen la atención hacia el significado geométrico del problema y utilicen la herramienta para representar, explorar y resolver los problemas tiende a ampliar sus formas de razonamiento y así contrastar y potenciar las estrategias que se utilizan en la construcción de los modelos algebraicos. Además, dado que los episodios demandan una actitud inquisitiva porque requiere cuestionarse sobre ¿cómo representar el problema en GeoGebra?, ¿qué explorar?, ¿qué caminos pueden llevar a la solución?, ¿cuáles son las ideas principales detrás de este proceso?; los profesores pueden mejorar el tipo de preguntas que formulan no solo para resolver y extender el problema al que se enfrentan, sino también para dirigir la actividad de los estudiantes cuando resuelven problemas.

El uso de GeoGebra (SGD) en la resolución de problemas verbales ofrece la posibilidad de que los profesores busquen nuevas rutas para resolverlos, transformarlos o extenderlos, coadyuvando en su labor profesional.

Referencias

Arcavi, A., Drijvers, P., & Stacey, K. (2017). The Learning and Teaching of Algebra: Ideas, Insights and Activities. Routledge.

Gómez-Arciga, A., Olvera-Martínez, C., Aguilar-Magallón, D., & Poveda, W. E. (2018). Digital Reasoning: Representing, exploring and solving word problems through the use of GeoGebra. En T. E. Hodges, G. J. Roy, & A. M. Tyminski (Eds), *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Pyschology of Mathematics Education* (pp. 1171-1186). Greenville, SC: University of South Carolina & Clemson University.

Gómez-Arciga, A., & Reyes-Martínez, I. (2019). Acercamientos Geométricos a Problemas Verbales en un Ambiente de Resolución de Problemas con GeoGebra. En S. Otten, A. G. Candela, Z. de Araujo, C. Haines, & C. Munter (Eds), *Proceedings of the forty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 820-828). St Louis, MO: University of Missouri.

Kieran, C. (2020). Algebra Teaching and Learning. En *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 27-32). Springer Netherlands.

National Council of Teacher of Mathematics (2010). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making in Algebra*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Santos-Trigo, M. (11 de enero de 2018). Irrupción digital y escenarios de aprendizaje disciplinario. *Ciencia y Cultura*. Recuperado de: https://www.revistac2.com/irrupcion-digital-aprendizaje/

Santos-Trigo, M., & Aguilar-Magallón, D. (2018). Resolución de problemas matemáticos: del trabajo de Pólya al razonamiento digital. En *Rutas de la Educación Matemática* (pp. 148-167). Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C. México.

Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 279-302.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Verschffel, L., Depaepe, F., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (2da ed., pp. 908-911). Springer.

Sobre o tema de uma atividade de modelagem matemática: uma abordagem com professores em formação continuada

Karina Alessandra Pessoa da **Silva**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Brasil
karinapessoa@utfpr.edu.br
Jader Otavio **Dalto**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Brasil
jaderdalto@utfpr.edu.br

Resumo

De modo a evidenciar o que revelam as considerações relatadas por um grupo de professores sobre o tema de uma atividade de modelagem que desenvolveram como modeladores, neste artigo realizamos uma análise qualitativa de cunho interpretativo fundamentada no quadro teórico da formação de professores em Modelagem Matemática. Considerando as situações de aprender sobre, aprender por meio e ensinar usando modelagem, bem como nas abordagens da modelagem como conteúdo e veículo, evidenciamos que um grupo de professores em formação continuada sugeriram usar ou mesmo adaptar o tema de uma atividade para ser implementado em sala de aula que atuam. De modo geral, as adaptações levam em consideração despertar o interesse dos alunos para com o tema a partir de interpretação da situação, coleta de dados empíricos e outra configuração de encaminhamento.

Palavras-chave: Educação Matemática; Formação continuada de professores; Modelagem Matemática; Aprender por meio da modelagem; Modelagem como veículo; Modelagem como conteúdo; Tema.

Introdução

Para que professores implementem práticas com modelagem matemática em sala de aula, é preciso que conheçam aspectos relativos ao fazer modelagem e métodos apropriados para ensinar

usando modelagem (Almeida & Silva, 2015, Borromeo Ferri, 2018, Malheiros et al., 2020). Esses aspectos, de modo geral, podem ser abordados na formação inicial ou continuada de professores.

Na literatura é crescente o interesse por estudos e pesquisas relativos à formação de professores em modelagem. No entanto, ainda existem desafios no que compete à implementação de práticas com modelagem na sala de aula e defende-se que devam existir espaços para que essas práticas sejam mais discutidas nos cursos de formação de professores (Malheiros et al., 2020).

Almeida & Silva (2015) ponderam que o professor em formação experiencie três situações: aprender sobre modelagem, aprender por meio da modelagem e ensinar usando modelagem. Aprender sobre modelagem consiste em conhecer os aportes teóricos relativos a essa tendência da Educação Matemática. Aprender por meio da modelagem matemática diz respeito a desenvolver atividades de modelagem enquanto modeladores. Já ensinar usando modelagem matemática se configura com a implementação de uma ou mais experiências com atividades de modelagem na prática de sala de aula. Essas situações de formação podem dar subsídios aos professores para articularem teoria e prática quando da implementação em uma prática de sala de aula.

Ponderando que professores em formação continuada articulam suas aprendizagens com o contexto da sala de aula em que estão atuando, neste artigo, centramos nossa atenção na questão de pesquisa: O que revelam as considerações relatadas por um grupo de professores sobre o tema de uma atividade de modelagem que desenvolveram como modeladores, ou seja, na situação de aprender por meio da modelagem? Para trazer reflexões sobre essa questão de pesquisa, realizamos uma análise qualitativa de cunho interpretativo sobre as considerações dos professores em formação continuada em uma disciplina de Modelagem Matemática no contexto de um mestrado em ensino de matemática no ano de 2022.

Formação de professores em Modelagem Matemática

Embora existam diferentes configurações e formas de tratar a modelagem matemática na Educação Matemática, Galbraith (2012) indica que, de modo geral, existam duas abordagens com objetivos e perspectivas específicas: modelagem como veículo e modelagem como conteúdo.

Na modelagem como veículo, o foco está em ensinar conteúdos matemáticos. Galbraith (2012, p. 13) afirma que “algumas partes de um processo de modelagem, ou aspectos relacionados à modelagem, são usadas para melhorar a aprendizagem de conceitos matemáticos que formam parte da matemática curricular incluída nos programas”. Na abordagem da modelagem como conteúdo tem-se como objetivo aprender sobre modelagem. Com isso, o foco está em “capacitar os alunos a usar seus conhecimentos matemáticos para resolver problemas reais e que continuem a desenvolver essa habilidade com o tempo” (Galbraith, 2012, p. 13).

As abordagens supracitadas podem se fazer presentes na formação de professores, tanto inicial quanto continuada, de modo a prepará-los para a implementação de práticas com modelagem nos diferentes níveis de escolaridade. Conhecer sobre as diferentes configurações e

modos de resolver problemas e implementar práticas de modelagem são ações que podem ser articuladas à modelagem como conteúdo e como veículo e as três situações de formação em modelagem matemática sugeridas por Almeida & Silva (2015) – aprender sobre modelagem, aprender por meio da modelagem e ensinar usando modelagem.

Conjecturamos que o eixo aprender sobre se aproxima da abordagem da modelagem como conteúdo, em que é discutida a existência de diferentes configurações para caracterizá-la na literatura. O eixo aprender por meio permite articular as duas abordagens – modelagem como veículo e modelagem como conteúdo – visto que os professores desenvolvem atividades de modelagem enquanto modeladores e, com isso, vivenciam aspectos do saber como usar os procedimentos de modelagem e como usar a matemática para resolver os problemas. Já o eixo ensinar usando se aproxima da modelagem como veículo, pois a implementação de práticas de sala de aula tem como objetivo ensinar conteúdos matemáticos.

Uma formação de professores considerando as abordagens abarcadas por Galbraith (2012), seguindo as situações sugeridas por Almeida & Silva (2015), "fornece subsídios para o professor pensar sua prática e conduzir as atividades conforme o contexto escolar em que se encontra" (Almeida & Silva, 2015, p. 15).

Neste artigo lançamos um olhar para o eixo aprender por meio da modelagem em que os professores em formação foram convidados a assumir o papel de modeladores. Com isso, estamos em concordância com Pollak e Garfunkel (2013, p. 8), que professores em formação "devem participar na formulação da situação-problema, decidir o que manter e o que ignorar na criação de um modelo idealizado, fazer a matemática na situação idealizada e, em seguida, examinar se os resultados fazem ou não sentido na situação original".

Aspectos metodológicos

Neste artigo apresentamos resultados parciais de um projeto de pesquisa aprovado no Edital Universal do CNPq de 2021 em que o foco está em ambientes de formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática. Neste artigo apresentamos uma investigação realizada na disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva do Ensino em um mestrado em Ensino de Matemática de uma universidade federal brasileira no primeiro semestre de 2022 com nove professores. A disciplina, que contou com quatorze encontros de três horas cada, foi organizada segundo as indicações de aprender sobre, aprender por meio e ensinar usando modelagem matemática.

Nos quarto e quinto encontros, após conhecer os aportes teóricos relativos à modelagem matemática na Educação Matemática subsidiados em ciclos de modelagem (Borromeo Ferri, 2018) e compreender que existem diferentes configurações para caracterizar a modelagem na literatura, os professores reunidos em trios desenvolveram atividades de modelagem e relataram o seu aprender sobre modelagem. Os relatos foram gravados em áudio e vídeo com o consentimento deles. Para manter o anonimato, nos referimos aos nove professores como Prof_1, Prof_2, ..., Prof_9.

A análise qualitativa de cunho interpretativo que realizamos da atividade *Parquímetro em Londrina* subsidia nossas argumentações com respeito à questão: O que revelam as considerações relatadas por um grupo de professores sobre o tema de uma atividade de modelagem que desenvolveram como modeladores, ou seja, na situação de aprender por meio da modelagem?

Após desenvolverem a atividade (Figura 1), foi encaminhada uma discussão com toda a turma de modo a viabilizar sua implementação com os alunos da Educação Básica. A partir da análise das transcrições, evidenciamos que as discussões se enveredaram por quatro considerações: adequar ou usar o próprio tema com os alunos; considerar conteúdos matemáticos conhecidos pelos alunos; avançar na abordagem matemática para sistematizar conteúdos matemáticos; auxiliar na matematização.

Neste artigo nos debruçamos na consideração relativa a *adequar ou usar o próprio tema com os alunos*, vislumbrando as assertivas de que o tema "pode despertar o interesse do aluno pela atividade" (Almeida et al., 2012, p. 25).

Descrição e análise da atividade de modelagem matemática desenvolvida

Na atividade Parquímetro em Londrina, a professora formadora disponibilizou informações relativas à forma de cobrança do estacionamento rotativo, conforme apresentado na Figura 1.

Segundo dados da CMTU, a Zona Azul de Londrina conta atualmente com 121 parquímetros instalados na cidade, sendo 94 na área central e 27 em diversos outros pontos de Londrina, totalizando 1.900 vagas, sendo 450 na Avenida Bandeirantes, 200 na região do Centro Cívico e 1.250 no quadrilátero central.

O estacionamento rotativo é administrado pelo Instituto Leonardo Murialdo (Epesmel). O serviço funciona de segunda a sexta-feira, das 8h às 18h, e das 9h às 13h aos sábados.

Os valores cobrados são de R$ 0,85 por meia hora e R$ 1,70 por hora – limitado a duas horas na mesma vaga. Há tolerância nos 15 minutos iniciais de estacionamento na vaga.

Fonte: Londrix – Portal da região metropolitana de Londrina.

Informações sobre como usar os parquímetros podem ser encontradas em https://zonaazulepesmel.com.br/como-usar-o-parquimetro/

Figura 1. Informações sobre a cobrança do estacionamento rotativo.

Os professores, em seus respectivos trios, resolveram a atividade e compartilharam os resultados em uma plenária. Assim que finalizaram a apresentação dos resultados obtidos para o tema investigado e sob o questionamento da professora formadora sobre a possibilidade de desenvolver a atividade em sala de aula, a Prof_5, que não reside em Londrina, sugeriu sondar os

alunos para saber se já viram e fizeram uso desses equipamentos em visita a essa cidade, conforme evidenciado no excerto transcrito a seguir:

> *Prof_5 [...] lá em Assaí [cidade a cerca de 50 km de Londrina] os alunos que têm mais condições [financeiras], são muito vinculados com Londrina, para médico, para tudo. Então eu acho que... Eu não sei a realidade ali das salas, tem aluno que tem uma condição menos favorecida que eu acho que não vem pra Londrina com frequência. Mas se for numa sala de aula que os alunos conhecem, aí tem que identificar, com eles se já vieram, se já pararam de carro para poder fazer compras ou ir em algum lugar. Na realidade deles, senão fica muito fora, né?*
> *[...]*
> *Professora formadora: [...] Não está próximo da realidade deles, mas a gente pode colocar no sentido de inteirá-los, explicar o que é, mostrar uma foto, né, aqui na atividade tem uma imagem!*
> *Prof_9: Acho que até um vídeo, né?*
> *Professora formadora: Dá para mostrar o vídeo de como que cobra...*

A interação com o tema é uma fase do desenvolvimento da atividade que "representa um primeiro contato com uma situação-problema que se pretende estudar com a finalidade de conhecer as características e especificidades da situação" (Almeida et al., 2012, p. 15). Os professores pareceram revelar que a ação de inteirar os alunos pode fazer com que eles se interessem pelo tema e por um possível problema a ser investigado. Segundo Elfringhoff e Schukajlow (2021),

> *"quando os alunos têm um alto nível de interesse inicial antes de resolverem um problema, seu envolvimento na solução de problemas pode aumentar e, por meio do envolvimento, os alunos podem manter o interesse e aumentar suas competências de modelagem a longo prazo" (Elfringhoff & Schukajlow,2021, p. 27).*

Os professores entenderam que, com essa configuração de abordagem do tema, os alunos apresentar uma solução para o problema que os próprios professores resolveram enquanto modeladores e que é apresentado na Figura 2.

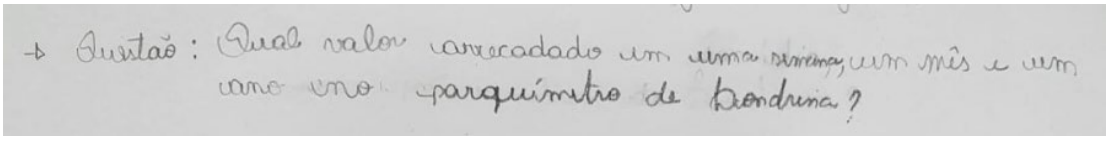


Figura 2. Problema investigado pelos professores.

Além de considerar a mesmas informações das quais tiveram acesso, os professores também sugeriram o uso do tema, porém com adaptações, a partir dos valores cobrados na cidade em que os alunos residem, conforme excerto a seguir:

> *Prof_7: Eu aplicaria em sala de aula. Porque na cidade que dou aula também tem parquímetro no centro da cidade. Então em uma aula, eu pediria para eles irem lá analisar alguma rua ou algum pedaço ali da cidade, para daí na outra aula, com os dados da minha cidade, a gente desenvolver a atividade. Porque daí o valor muda de lá [se referindo à cidade em que leciona], aí a quantidade que tem também muda [se referindo ao valor obtido nos parquímetros]*
> *Professora formadora: Na sua cidade tem parquímetro também?*
> *Prof_7: Tem, na que eu dou aula tem.*

A solicitação de uma coleta de dados empíricos pode ser uma ação a ser considerada para inserir os alunos na atividade de modelagem, permitindo inclusive um avanço na discussão a partir de uma localidade da cidade sob a dinâmica da cobrança do estacionamento rotativo, a partir das informações que têm acesso, de modo a "descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação, responder às perguntas formuladas [...] e até mesmo, em alguns casos, viabilizar a realização de previsões" (Almeida et al., 2012, p. 16). Os procedimentos e as estratégias para a coleta empírica podem ser delineados em conjunto de modo que os dados sejam suficientes para o que se pretende investigar.

Considerando a dinâmica da cobrança pelo estacionamento rotativo, mas sem a presença de parquímetro com um viés de projeção de como seria a arrecadação, os professores também sugeriram adaptar o tema, conforme transcrição a seguir:

> *Prof_8: Eu achei bem bacana uma resolução simples, sabe, que dá pra gente aplicar né, no Ensino Fundamental.*
> *Prof_3: É, e trazer diferentes, né, abordagens de discussão. Pela realidade que a gente tem lá em Apucarana [cidade a cerca de 60 km de Londrina] e é um movimento danado! Os alunos podem até mesmo fazer uma análise no local mesmo. Ali na nossa Catedral que é um movimento maior de gente. Bem legal! [...]*
> *Prof_8: É, e eles poderiam fazer uma análise "Ah, quanto que é por meio período?", por exemplo. Ficar lá a manhã toda analisando, ou um dia inteiro.*
> *[...]*
> *Prof_9: E acredito que daria, por exemplo, para usar essa ideia em volta da igreja que tem alguns estacionamentos, não sei a cidade de vocês... Eu digo com relação à minha que tem as vagas. Pensando assim, que num dia festivo o pessoal precisa parar ali rapidinho.*
> *[...]*
> *Prof_7: Mas na frente da escola, dá pra gente analisar os carros dos professores mesmo.*

A sugestão da coleta *in loco* permite que os alunos produzam os dados a serem utilizados para uma possível cobrança para manter o carro estacionado em uma região movimentada da cidade cuja instalação de parquímetros permitiram uma maior rotatividade de veículos estacionados a partir de vagas demarcadas ao redor da localidade. Porém, as adaptações sugeridas pelos professores também levaram em consideração a possibilidade de os alunos realizarem estimativas quando não há marcação da vaga para estacionar:

> *Prof_3: E tem marcação de separação de vagas? [...] Pra saber quantos carros vai caber por quarteirão pra gente poder fazer a partir disso uma estimativa do que geraria?*
> *Professora formadora: É, de quantos carros conseguem estacionar?*
> *Prof_3: Isso, em média!*
> *Prof_1: Isso, e o carro ocupa o espaço. Então isso dá pra pesquisar também, qual o espaço que é destinado para um carro estacionar. [...]*
> *Prof_7: E aquelas vagas que a gente estaciona...*
> *Prof_3: Inclinada né? [...] Então, qual seria a melhor possibilidade para arrecadar mais, se tem o espaço pro carro passar, porque será que lá na minha cidade vai ter? Não necessariamente...*
> *Professora formadora: Até na inclinação, né, do carro. O carro pode estacionar em vagas com marcação inclinada.*
> *Prof_3: Para calcular o ângulo daí, né?*

Neste sentido, o tema abarcado na situação do aprender por meio da modelagem pode ser implementado em sala de aula de modo que se elucide a abordagem de problemas que, de acordo

com Bliss e Libertini (2016), requer interpretação e a possibilidade de tomar diferentes caminhos para a solução.

Considerações finais

Levar em consideração uma formação continuada de professores em que se aborde a modelagem matemática a partir de três situações – aprender sobre, aprender por meio e ensinar usando – pode se constituir enquanto um meio de aproximar as abordagens modelagem como veículo e modelagem como conteúdo (Galbraith, 2012).

Estudar aspectos teóricos da modelagem, colocar os professores em ação, como modeladores, e solicitar que articulem o tema para ser empreendido em sala de aula, nos permitiu evidenciar aspectos relativos aos encaminhamentos da modelagem como conteúdo, bem como veículo, de modo que quatro considerações puderam ser evidenciadas. Todavia, no tocante do artigo nos debruçamos sobre a consideração *adequar ou usar o próprio tema com os alunos*, visto que nosso foco estava em trazer reflexões para a questão: O que revelam as considerações relatadas por um grupo de professores sobre o tema de uma atividade de modelagem que desenvolveram como modeladores, ou seja, na situação de aprender por meio da modelagem?

Seja qual forem os encaminhamentos para a implementação do tema estudado, o que podemos evidenciar é o fato de os professores estarem atentos no interesse dos alunos, colocando-os "no centro da ação pedagógica" (Campos & Araújo, 2015, p. 168). Cabe ao professor atribuir-lhes responsabilidade na investigação que é algo característico desse tipo de atividade, de modo que a "orientação do professor que discursará a exequibilidade de cada tema, facilidade na obtenção dos dados, visitas, bibliografia etc." (Bassanezi, 2002, p. 46).

Referências

Almeida, L. M. W., & Silva, K. A. P. (2015). Práticas de professores com Modelagem Matemática: algumas configurações. *Educação Matemática em Revista*, *46*, 6-15.

Almeida, L. W., Silva, K. P., & Vertuan, R. E. (2012). *Modelagem Matemática na educação básica*. São Paulo: Contexto.

Bassanezzi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto.

Bliss, K., & Libertini, J. (2016). What is Mathematical Modeling? En S. Garfunkel, y M. Montgomery. *GAIMME*: Guidelines for Assessment & Instruction in Mathematical Modeling Education. COMAP, SIAM: Reston, Philadelphia.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. New York: Springer International Publishing.

Campos, I. S., & Araújo, J. L. (2015) Envolvimento dos alunos em atividades de modelagem matemática: relação com o saber e possibilidades de ação. *Bolema*, *29*(51), 167-182.

Elfringhoff, M. S., & Schukajlow, S. (2021). What makes a modelling problem interesting? Sources of situational interest in modelling problems. *Quadrante*, *30*(1), 8-30.

Galbraith, P. (2012). Models of modelling: genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, Blumenau, *1*(5), 3-16.

Malheiros, A. P. S., Forner, R, & Souza, L. B. (2020). Formação de professores em modelagem e a escola: que caminhos perseguir? *ReBECEM*, *4*(1), 1-22.

Pollak, H., & Garfunkel, S. (2013). A View of Mathematical Modeling in Mathematics Education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*.

Taller Modelación Matemática para la resolución de problemas de optimización en trabajo colaborativo

Natalia **Alvarado-Garcés**
Centro Educacional San Carlos de Aragón
Chile
n.alvarado.04@hotmail.com
Rodrigo **Rojas-Muñoz**
Universidad Austral de Chile
Chile
rodolforojas@uach.cl

Resumen

El presente taller corresponde a la adaptación de un trabajo de investigación aplicado con estudiantes de educación media. En este taller buscamos mostrar esta innovación, observar las competencias de modelación matemática en docentes que se desempeñen haciendo clases de matemática en educación media o superior y evaluar la situación de aula. La actividad se centra en la resolución de un problema de optimización en una situación contextualizada. La metodología por utilizar el trabajo en equipo según el modelo ARPA y el uso de elementos tecnológicos como lo son el uso de Geogebra para el análisis de las soluciones. En aplicaciones previas los hallazgos han sido: es un problema desafiante que involucra diversas habilidades matemáticas, discursivas e interpersonales, que puede ser aplicado a estudiantes que cursen distintos niveles de enseñanza, debido a que puede ser resuelto mediante diversas estrategias.

Palabras clave: Modelación matemática; Resolución de problemas en el aula; optimización; uso de TIC; Pensamiento matemático sociocrítico; aprendizaje colaborativo.

Introducción

El presente taller, surge de una adaptación de una situación de aula creada y aplicada en el trabajo de tesis de grado de Alvarado (2021), en la que se buscaba modelar la función cuadrática

con estudiantes de segundo año medio (15 – 16 años). Dicha situación de aula fue mejorada acorde a los obstáculos detectados en la transición de los estudiantes por las fases de modelación propuesta por Blomhøj y Højgaard (2003), para ello se tomó como muestra estudiantes de educación media de la región de Aysén, sur de Chile, donde se agrega la intencionalidad del uso de herramientas tecnológicas en el aula, además de modificar elementos como el tiempo y los momentos para el ciclo de modelización, los cuales generaron dificultades a los estudiantes para la transición en todos los momentos de la modelización matemática propuesta.

La situación de aula busca dar cuenta a lo que plantean las Bases Curriculares, que los estudiantes comprendan el concepto de función cuadrática y sus respectivos elementos, entre ellos los máximos y mínimos a través del vértice de la función, en donde estos además deben ser aprendidos a través de la resolución de problemas y procesos de modelamiento matemático.

Es por esto que el presente taller pretende a su vez ser parte de tal extensión con docentes que se desempeñen haciendo clases de matemática en educación media o superior, a modo de complementar lo observado con esta implementación.

Indagación bibliográfica

En Chile, en la actualidad podemos evidenciar dificultades en el aprendizaje, dentro de esta área el trabajo con las funciones, ya que es enseñado desde un punto de vista principalmente formal, generando una serie de obstáculos y dificultades en la comprensión de los conceptos y procesos matemáticos (Aravena y Caamaño, 2007).

En un estudio realizado a estudiantes entre 12 – 13 años se destaca que “al analizar dichos resultados podemos afirmar que son muy pocos los estudiantes que logran modelar fenómenos de la realidad mediante funciones. De acuerdo con lo observado, podemos inferir que la gran mayoría de los estudiantes tienen dificultades, para representar fenómenos de la realidad por medio de expresiones analíticas o gráficas” (Huapaya, 2012, p. 18).

Por consiguiente, es de creencia común que todo problema de optimización debe ser resuelto a través de derivadas (Morales et al., 2022), es posible trabajar algunos de estos problemas en estudiantes de nivel secundario que no manejan todavía esta herramienta matemática (Morales et al., 2022; Portillo et al., 2019; Moreno *et al.*, 2021; Acosta, *et al*., 2020; Alvarado, 2022), o incluso un problema de optimización puede ayudar a construir la herramienta derivada (Montejo-Gámez, *et al.*, 2018).

Una de las formas en que se busca contribuir a resolver un problema de optimización es a través del uso de la geometría dinámica (Morales *et al*., 2022, Portillo *et al*., 2019; Acosta *et al*., 2020; Balcaza, 2018; Sánchez *et al.*, 2020), dado que mejora la interpretación y visualización del problema y brindan seguridad al estudiante (Portillo *et al*., 2019; Morales *et al*., 2022). También, el uso del software de geometría dinámica ayuda al docente a rediseñar los problemas de optimización para su adecuación a un nivel de precálculo (Portillo *et al.*, 2019).

Sin embargo, la acción más importante para un buen proceso de enseñanza-aprendizaje de los problemas de modelización y optimización es que los docentes tengan la experiencia de

enfrentarse a la resolución de este tipo de problemas en su formación (Montejo-Gámez *et al*., 2018; Moreno *et al*, 2021; Felmer, *et al*., 2019).

Marco teórico

Dentro de lo que conocemos como modelación matemática es importante destacar que en el caso de Barbosa y Da Silva (2011) argumentan que la expresión "sociocrítica", implica una forma de ver la modelización en la Educación Matemática como un reconocimiento a aquellas prácticas pedagógicas que entienden este ambiente como una oportunidad para que los estudiantes discutan la naturaleza y el papel de los modelos matemáticos en la sociedad.

Según como se entiende “la modelización como un entorno de aprendizaje en el que, los alumnos, a través de las matemáticas, son invitados a indagar e investigar situaciones originadas en otros ámbitos de la realidad. Siguiendo este entendimiento, este ambiente de aprendizaje se constituye de relaciones interpersonales, posibilitando a los participantes la producción de varios tipos de acciones, como: esquematizar, desarrollar operaciones aritméticas, generar ecuaciones, hacer dibujos, trazar gráficos y, principalmente, producir discursos” (Barbosa y Da Silva, 2011, p 199).

A pesar de que se reconoce que las situaciones originadas para el proceso de modelación provienen de contextos distintos a los de la matemática, como plantea Blum y Niss (1991), este proceso invita a los alumnos a utilizar ideas, conceptos y algoritmos de las matemáticas para ser abordadas abordarlas, para ello en este caso se plantea un ciclo de modelación basado en Blum y Niss (1991).

Marco metodológico

Felmer *et al.* (2019), dan a conocer cómo se construyó la Iniciativa ARPA de acción y reflexión. Esta Iniciativa considera a la resolución de problemas como el eje articulador del proceso de enseñanza-aprendizaje y destacan las oportunidades que ofrece al estudiante para el desarrollo matemático, como la conexión de elementos matemáticos, la promoción de las habilidades de representación y aplicación, y el uso de pensamiento matemático. Ellos señalan que la Iniciativa ARPA nace con el objetivo de dar a los profesores oportunidades para experimentar en resolución de problemas, dado que un profesor sólo podrá enseñar a resolver problemas si antes ha experimentado la ansiedad y la satisfacción en la resolución de problemas por su parte.

Así es como los investigadores, diseñaron talleres de desarrollo profesional, llamados Iniciativa ARPA, basados en los principios básicos de hacer y reflexionar. “Estos talleres tienen a la resolución de problemas como eje articulador y están destinados a profesores que enseñan matemáticas, con el propósito de instalar la resolución de problemas y prácticas escolares efectivas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática escolar” (Felmer *et al.*, 2019, p. 314). En el bloque de resolución de problemas, los participantes resuelven problemas con sus pares en grupos, con apoyo de un monitor que sólo interactúa con ellos mediante preguntas. Se considera que un grupo ha resuelto un problema cuando todos los miembros pueden explicar la solución y las estrategias usadas. Cuando un grupo resuelve el problema, el

monitor puede proporcionar un problema de extensión, hacer una nueva pregunta o dar un nuevo problema. De esta forma, cada grupo trabaja a su ritmo y la dificultad del problema es graduada por el monitor, según las habilidades de los participantes, así el problema es un desafío constante y efectivo.

El bloque de reflexión se trabaja en plenario, donde los profesores/actores reflexionan sobre su habilidad para resolver problemas, su conocimiento matemático y su aprendizaje, las estrategias usadas para resolver los problemas y las emociones que han sentido en esta tarea. También sobre cómo el monitor interactúa con ellos, cómo esta estrategia puede ser un modelo para el trabajo en aula, y cómo ellos pueden llegar a implementarlo.

Nosotros proponemos así desarrollar este taller siguiendo la estrategia ARPA para que los profesores experimenten la resolución de este problema de modelación y para que reflexionen sobre el nivel de enseñanza, las adecuaciones a su entorno escolar y la relación profesor-estudiante y estudiante-estudiante en un trabajo desarrollado en equipos.

Diseño taller

El taller tiene como principal objetivo desarrollar competencias de resolución de problemas mediante un trabajo de modelación matemática y haciendo uso de herramientas tecnológicas y en equipos, con profesores que se desempeñen realizando clases de matemáticas.

Para la creación y la aplicación del taller, esta se basó en la Teoría Socio-Crítica de Barbosa Jonei, complementada con la metodología ARPA de acción y reflexión de Felmer *et al.* (2019).

La estrategia metodológica está comprendida por la resolución y discusión de forma grupal y generalización en plenario. Al comienzo de la actividad se formarán equipos de tres personas mediante una dinámica de conformación de grupos. Cada equipo resolverá el problema de optimización haciendo uso de guía y Geogebra, posteriormente un integrante de cada equipo expone sus soluciones y la metodología utilizada, finalmente los participantes del taller discuten la generalización de la solución del problema. Además, se realiza un breve análisis pedagógico y didáctico de la clase, la situación y las metodologías utilizadas.

Los tiempos en cada uno de los momentos del taller se encuentran descritos en la siguiente tabla:

Tabla 1
Agenda taller de Modelación Matemática para la resolución de problemas de optimización en trabajo colaborativo

Duración	110 minutos	
Tiempo	**Actividad**	**Descripción**
10 minutos	Organización de grupos	Actividad introductoria al taller en el cual los participantes se agrupan de 3 personas a través de una dinámica para la conformación de equipos. En esta actividad los participantes deben identificar el lugar de trabajo mediante un acertijo matemático.
30 minutos	Resolución problema	Los equipos resuelven problema de optimización haciendo uso de guía y GeoGebra para su presentación en plenario y la explicación de procedimientos utilizados.
30 minutos	Plenario	Un integrante de cada equipo expone sus soluciones y la metodología utilizada a través de GeoGebra prediseñado
20 minutos	Generalización	Los participantes del taller en pleno discuten la generalización de la solución del problema, de acuerdo con las soluciones presentadas anteriormente.
20 minutos	Reflexión final	Los participantes en pleno analizan la clase, la situación y las metodologías utilizadas.

Fuente: elaboración propia. 2022.

Situación de aula

El espacio triangular de la fotografía corresponde a un triángulo rectángulo, donde los catetos miden 50 metros y 84 metros, respectivamente. Este es un espacio no edificado, el cual la junta de vecinos desea utilizar, para lo que han solicitado a diferentes constructoras que presenten proyectos que sean favorables para el sector y a su vez se utilice de la mejor manera posible el espacio. Para lo que se propone como condiciones que debe ser una construcción de base rectangular que utilice la esquina de 90° como vértice y otro vértice se ubique en la hipotenusa.

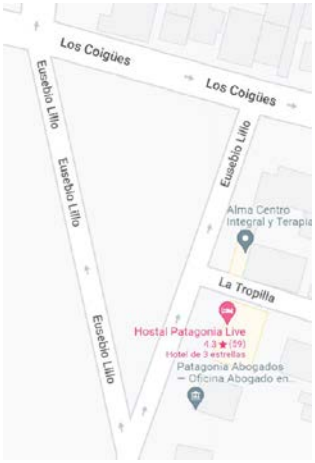


Figura 1. Imagen de mapa de un sector de la ciudad de Coyhaique extraída de Google Maps.

¿Cuáles son las dimensiones basales del edificio de base rectangular que mejor aprovecha el área disponible?

Conclusiones y proyecciones

Considerando los resultados obtenidos de la aplicación de esta situación de aula en el trabajo de tesis de Alvarado (2021), en donde los estudiantes no son capaces de transitar por los diferentes subprocesos de modelación, debido a las principales dificultades presentadas como lo fueron el tiempo de desarrollo de la actividad, la envergadura de la actividad y de objetivos planteados en correlación con la estrechez de los tiempos definidos para el desarrollo total, además de no contar con las herramientas necesarias y previamente trabajadas que les permitirá cumplir con el objetivo de transitar por el ciclo de modelación propuesto por Blomhøj (2004). Es importante abordar esta adecuación de situación de aula, con docentes que se encuentren en formación inicial y con docentes en ejercicio de matemática, ya sea de educación media o superior, dada la estrecha conexión entre lo aprendido por los estudiantes y las habilidades desarrolladas por los docentes en su formación. Por ello la importancia de analizar dichos datos, sin el sesgo producido por el poco tiempo en marcha de las bases curriculares en Chile, ya que pudiese ser una situación particular en la formación inicial docente y una desactualización en el área de la didáctica de las matemáticas por parte de los docentes en ejercicio del país.

Referencias y bibliografía

Acosta G., R.P., Almeida C., O. y Acosta V., J. (2020). Enfoque integral para modelar y resolver problemas de optimización. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 33(1), 186-196.

Alvarado, N. (2021). *Estudio de clases de modelación matemática de la función cuadrática con estudiantes de segundo año medio según el modelo de Blomhøj y Højgaard*. Tesis de Magister, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Aravena, M. & Caamaño, C. (2007). *Modelización Matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile*. Estudios Pedagógicos XXXIII, 2, 7-25.

Barbosa, J. C. (2008). *As discussões paralelas no ambiente de aprendizagem modelagem matemática.* Acta Scientiae, 10, págs. 47-58. Canoas.

Barbosa, J. C. y Da Silva, J. (2011). Modelagem Matemática: as discussões técnicas e as experiências prévias de um grupo de alunos. Boletim de Educação Matemática, vol. 24, núm. 38, abril, 2011, pp. 197-218 Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil

Balcaza B., T. (2018). Investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la optimización en Bachillerato, desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico y de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (Tesis doctoral). Universidad de Jaén, España.

Blomhøj, M. y Højgaard, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3), 123-139.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 37-68.

Felmer, P., Perdomo-Díaz J. y Reyes, C. (2019). The ARPA Experience in Chile: Problem Solving for Teachers' Professional Development. En Liljedahl, P., Santos-Trigo, M. (Eds.), Mathematical Problem Solving, ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Huapaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria.* Tesis de Magister, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Ministerio de Educación (7 de septiembre de 2021). *Curriculum Nacional: Matemática*. Gobierno de Chile.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E. y Adamuz-Povedano, N. (2018). Modelización matemática en el proceso de resolución de problemas contextualizados. ¿Cómo surge un modelo? En Rodríguez-Muñiz, L.J., Muñiz-Rodríguez, L., Aguilar-González, A., Alonso, P., García García, F.J. y Bruno, A. (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII, 368-377, SEIEM, Gijón.

Morales C., A., Damián M., A., Locia, E. y Contreras, M.G. (2022). Uso de Geogebra para mejorar la comprensión de la resolución de problemas de optimización en el bachillerato. Números, 111, 71-89.

Moreno, A., Marín, M. y Ramírez-Uclés, R. (2021). Errores de profesores de matemáticas en formación inicial al resolver una tarea de modelización. PNA ,15(2), 109-136.

Portillo-Lara, H.J., Ávila-Sandoval, M.S., Cruz-Quiñones, M.A. y López-Ruvalcaba, C. (2019). Geogebra y problemas de optimización. Cultura Científica y Tecnológica, 16(1), 5-11.

Sánchez P., J.A., De la Fuente B., D. y Zamora S., A. (2020). Optimización en Bachillerato: el problema de Herón. sNúmeros, 104, 75-82.

Ultrapassando uma misconcepção em uma atividade de modelagem matemática

Kassiana Schmidt **Surjus**
Universidade Estadual de Londrina
email.kaka@gmail.com
Brasil
Lourdes Maria Werle de **Almeida**
Universidade Estadual de Londrina
lourdes@uel.br
Brasil
Rosângela Maria **Kowalek**
Universidade Estadual de Londrina
rosangelakowalek1@gmail.com
Brasil

Resumo

Nos processos de ensino e de aprendizagem erros e misconcepções são recorrentes entre estudantes e professores**.** Neste estudo realizamos uma reflexão sobre misconcepções em conceitos matemáticos. Pautados em pressupostos teóricos da modelagem matemática como alternativa pedagógica, inferimos que atividades desse tipo podem ser utilizadas para ultrapassar misconcepções. A pesquisa segue uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo e apresenta uma situação em que uma atividade de modelagem é usada como meio para proporcionar aos estudantes ultrapassar uma misconcepção relativa ao conceito de sequência limitada.

Palavras – chave: Educação Matemática; Ensino Superior; Ensino Remoto; Implementação Curricular; Modelagem Educacional; Pesquisa Qualitativa; Ensino de Análise Matemática; Misconcepção.

Introdução

No âmbito escolar muitos são os desafios de professores e estudantes no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos. O encaminhamento das aulas e a avaliação do

conteúdo são ações cotidianas do professor, necessárias para a dinâmica do ensino. A avaliação muitas vezes gera ansiedade tanto para professores como para estudantes, pois estes almejam um bom desempenho. Segundo Cury (2006, p.96) “muitas vezes os erros são associados a esses procedimentos de avaliação, como se fosse possível e necessário apenas pontuar as produções dos estudantes pelos acertos e erros cometidos”.

Na dinâmica do ensino e aprendizagem podem se identificar misconcepções. Para Nesher (1987, p.35), "a noção de misconcepção denota uma linha de pensamento que causa erros resultantes de uma premissa incorreta, ao invés de erros esporádicos, desconexos e não sistemáticos". Misconcepções podem não ser percebidas como um fator importante nesta dinâmica, e podem se tornar resistentes a mudanças (Nesher, 1987). Uma misconcepção pode ser um impedimento para o aprendizado de novos conceitos. Por exemplo, misconcepções sobre o conceito de limite podem prejudicar o aprendizado de outros conceitos que usam limite como um pré-requisito. Instaladas as misconcepções, que caminho poderia ser trilhado de forma a ultrapassá-las?

Na Educação Matemática se tem discutido a respeito de caminhos para abordar o ensino da matemática nos diversos níveis de escolaridade. Dentre as tendências da Educação Matemática, a modelagem matemática se apresenta como uma alternativa pedagógica que pode oportunizar dinamismo e motivação para estudantes e professores em sala de aula. Assim, na presente pesquisa nos referimos a um cenário em que uma misconcepção foi identificada e a atividade de modelagem ofereceu meios para que os estudantes pudessem percebê-la e, provavelmente, superá-la.

A abordagem de nosso estudo se enquadra na metodologia de pesquisa qualitativa de cunho interpretativo. A pesquisa qualitativa tem como objetivo principal investigar o processo na sua ocorrência, envolvendo compreensões, descrições, observações e significados, assim como hipóteses construídas após observação e não pré-concebidas (Bogdan & Biklen, 1994). A luz do referencial teórico adotado, buscamos compreender como misconcepções podem ser identificadas e ultrapassadas em atividades de modelagem.

O que é Modelagem Matemática

Partindo de uma situação–problema da realidade a modelagem matemática é “a arte de transformar um problema da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (Bassanezzi, 2006, p. 16). Na Educação Matemática é tida como alternativa pedagógica da qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática (Almeida et al., 2013). A modelagem matemática envolve os estudantes em um processo dinâmico que não visa somente a obtenção de uma resposta, mas também leva os sujeitos envolvidos a refletir, investigar, conjecturar, inferir sobre as questões que emergem com o problema.

Na busca da solução para o problema, diversos procedimentos matemáticos podem emergir e ser apresentados por meio de gráficos, expressões algébricas ou geométricas, caracterizadas como modelo matemático. Almeida et al. (2013) afirmam que o modelo matemático é o que dá forma à solução do problema e a modelagem matemática é a atividade de busca por esta solução.

Segundo Almeida et al. (2012) uma atividade deste tipo envolve fases relacionadas ao conjunto de procedimentos necessários para analisar, estruturar uma situação-problema caracterizadas como: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação (Figura 1).

Figura 1: Fases de Modelagem Matemática
Fonte: Almeida et al. (2012, p.15)

Na *inteiração* ocorre a formulação do problema e a coleta de dados. Na *matematização* o que se pretende é encontrar meios para definir métodos e conceitos matemáticos para estudar a situação da realidade com a formulação de hipóteses, seleção de variáveis e a simplificação da situação. Na *resolução* se dá a construção do modelo matemático que descreva a situação-problema. A fase da *interpretação de resultados e validação* permite ao modelador verificar se o modelo obtido é adequado ou não, analisando sua resposta em relação à matemática utilizada e se esta resposta é adequada em relação ao problema proposto. Se o modelo não for satisfatório volta-se para o início do processo para uma redefinição de variáveis e hipóteses simplificadoras.

As fases da modelagem matemática promovem interação entre estudantes e docente, proporcionando discussões e reflexões que auxiliam as decisões necessárias em todo o processo. Segundo Swan et al (2007), na medida que grupos de estudantes formulam problemas, a discussão pode permitir que eles façam a distinção entre o que é relevante e o que é irrelevante para abordar uma situação da realidade e então construir relações entre variáveis. Nessas interações o professor pode perceber possíveis misconcepções de conceitos matemáticos nos estudantes, foco de nossa pesquisa.

Misconcepções

De acordo com Makonye(2012), uma misconcepção é um erro sistemático que é evidenciado por respostas erradas metodicamente reaplicadas através do espaço e do tempo em resposta a tipos específicos de perguntas matemáticas. Para Nesher (1987) misconcepções geralmente são um desdobramento de um sistema já adquirido de conceitos e crenças mal aplicados, e podem estar escondidos mesmo nas respostas corretas dos estudantes. Para Chi (2005) “as misconcepções não são meramente pedaços isolados imprecisos e incompletos de conhecimento (com relações às concepções científicas corretas) mas sim, elas podem ser retratadas como concepções alternativas”. É uma interpretação errônea geral de algum tipo de processo para outro tipo, que pode ocorrer para vários conceitos em muitos domínios (CHI, 2005).

Para desfazer uma misconcepção D’Amore (2007) sugere que os estudantes podem dar passos apoiados em uma organização pedagógica que inclui situações didáticas que lhes permitam aprender. O professor deve proporcionar ambiente de aprendizagem que dê

oportunidades para o estudante testar seu conhecimento, explorar suas crenças e manifestar suas misconcepções, recebendo desta forma o *feedback* específico por suas ações (Nesher, 1987).

Desta forma propomos o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática como uma situação didática para abordar conceitos matemáticos e investigar a manifestação de misconcepções percebidas pelo professor e qual o encaminhamento utilizado pelo professor para auxiliar os estudantes a ultrapassar misconcepções.

Um Cenário para Discussão

A disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática para estudantes do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática foi o cenário proposto para a discussão. Em duas aulas deu-se o desenvolvimento de uma atividade de modelagem com a temática *A temperatura da terra: o aquecimento global*. Este tema foi sugerido aos estudantes pela professora, e as aulas, devido às restrições impostas pela pandemia do Covid -19, foram realizadas em encontros virtuais usando o Google Meet no segundo semestre do ano de 2020.

Durante a inteiração com o tema, foi definido o problema: *Qual será a temperatura média global no ano de 2052?*

Os estudantes realizaram a coleta de dados para iniciar a matematização, obtendo a sequência das temperaturas médias da terra (13,914, 14,002 , 14,026 , 14,254 , 14,274 , 14,316 , 14,476 , 14,582 , 14,79 , 14,89 , 14,99, ...). A matematização da temperatura global se baseia numa hipótese fundamental usada nessa situação: a temperatura global não será infinitamente grande. Diante da hipótese os estudantes teriam que relacioná-la com a sequência das temperaturas médias. Esta sequência deveria ser estudada para proporcionar a obtenção de uma solução para o problema.

Nas discussões sobre como trabalhar a sequência das temperaturas, emergiu o conceito de sequência limitada. A discussão conduzida pela professora revelou que alguns estudantes tinham uma misconcepção relativa ao conceito de sequência limitada, conforme indica transcrição de parte da aula:

P: Então a sequência das temperaturas é uma sequência limitada. Certo, mas o que é uma sequência limitada?
A1: Sequência limitada é a que tem limite, professora!
P: É isso, turma?
A2: Sim, se a sequência é limitada então ela tem limite, sim professora.
(Audio-visual da aula transmitida via Google Meet, 2021).

Tendo identificado a misconcepção, a professora fez uma intervenção apresentando a definição de sequência limitada: Uma sequência (x_n) de números reais é limitada se existem a e b dois números reais tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo número n natural. Isto quer dizer que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $[a,b]$ (Lima, 1982). Para ilustrar, a professora utilizou o exemplo da sequência $(x_n) = (-1)^n$e solicitou que os estudantes usassem outras

representações e compartilhassem com o grupo. A partir dessas representações, um diálogo foi direcionado para que os estudantes percebessem o seu equívoco conceitual.

P: Vejam essa sequência turma $(x_n) = (-1)^n$ *. Ela é uma sequência limitada?*
Vários estudantes responderam: Sim, professora!
P: Por quê?
A2: Porque dá pra achar a e b como pede na definição que a senhora apresentou.
P: Certo. Quais podem ser a e b, por exemplo?
A3: Ah, acho que dá pra pegar a = -1,5 e b = 1,5, não dá?
Vários estudantes responderam: Dá sim, né professora?
P: Isso, a e b atendem à condição de $a \leq x_n \leq b$ *para todo número n natural. Vejam na representação de vocês, por exemplo, (Figura 2).*
P: Mas agora a minha pergunta para vocês é: essa sequência tem limite? O que significa uma sequência ter limite? Qual é a definição de limite de uma sequência de números reais?
A1: Ter limite não é ser limitada né?
A2: Professora, acho que tem que falar que é sequência convergente, não é, se ela tem limite?
P: Muito bem, mas o que é limite de uma sequência?
(Audiovisual da aula transmitida via Google Meet, 2021).

Então, parte da aula foi destinada à definição de limite de uma sequência e, por consequência, sequência convergente. Os estudantes então produziram representações para sequência limitada e sequência convergente conforme ilustra a Figura 2.

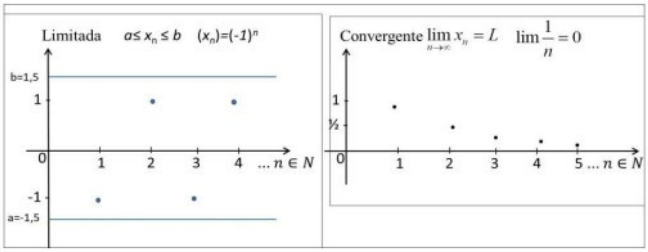


Figura 2. Sequência limitada e sequência convergente
Fonte: as autoras

Para retomar a problemática da situação da realidade em estudo, entretanto, era preciso retomar a definição de sequência limitada e identificar porque uma sequência limitada pode não ser convergente. Com esta finalidade foi apresentado o teorema "Toda sequência monótona e limitada é convergente." (Lima, 1982, p. 86).

Retornando a discussão com os estudantes, foi possível constatar que os alunos compreenderam que uma sequência ser limitada não é necessariamente convergente:

P: Pessoal, vejam, então ficou claro que a sequência $(x_n) = (-1)^n$ *é limitada, certo?*
Vários estudantes responderam: Sim
P: Mas ela é convergente? Sim ou não? Por quê?

A2: Professora, ela não é convergente, e eu acho que é porque ela não é monótona.
A4: Ela é limitada, mas não é convergente. Agora, porque ela não é convergente, eu sei dizer, mas acho que não lembro como mostra.
P: Isso, muito bem! A sequência é limitada, mas não é convergente e isso podemos mostrar usando outro teorema.
[...]
P: Muito bem, então o que precisamos concluir aqui é que sequência limitada não é mesma coisa que sequência convergente. Também, que existem sequências que são limitadas, mas não são convergentes, ou seja, não possuem limite. Portanto, sequência limitada não é aquela que tem limite. Sequência que tem limite é chamada convergente, beleza?
Alguns estudantes respondem afirmativamente com um sinal de positivo no chat!
(Audiovisual da aula transmitida via Google Meet, 2021).

O que se pode inferir da descrição desse cenário é que, muito provavelmente os estudantes, tinham uma definição equivocada de sequência limitada, partindo da premissa equivocada de que "ser limitado" refere-se a "ter limite", como usado no senso comum e fora de um contexto matemático. A atividade de modelagem fez emergir essa misconcepção dos estudantes e a necessidade do uso desse conceito no desenvolvimento da atividade também subordinou a professora a encontrar meios de desfazer esse equívoco conceitual dos estudantes. De fato, apresentando a definição de sequência limitada e de limite de uma sequência e solicitando aos estudantes que compartilhassem suas representações gráficas, permitiu que os próprios estudantes percebessem sua misconcepção de que uma sequência limitada necessariamente tem um limite. Ter limitantes (superior ou inferior), como é requerido de uma sequência dita limitada, não é equivalente a ter um limite, que é característica de uma sequência convergente. O uso de teorema que, no contexto matemático estabelece a relação entre sequência limitada e sequência convergente, fortaleceu nos estudantes meios para superar o equívoco.

Considerações Finais

Na busca por fomentar discussões relativas à modelagem matemática e misconcepções realizamos esta investigação visando investigar se atividades de modelagem matemática podem oferecer meios para a emergência e a superação de uma misconcepção dos estudantes.

A modelagem matemática proporciona um ambiente de interação entre professor e estudantes, promovendo discussões e reflexões, que ocorrem durante as fases da modelagem. Nessa dinâmica o professor pode perceber misconcepções e realizar intervenções de forma a resgatar conceitos e superar equívocos.

Nesse sentido, nossa análise evidencia que misconcepções podem emergir da demanda dos procedimentos realizados no decorrer de diferentes fases de uma atividade de modelagem. Na atividade aqui apresentada os estudantes manifestaram a misconcepção do conceito de sequências limitadas durante a matematização e resolução do problema. Desta forma a professora pode resgatar esses conceitos e intervir para que uma misconcepção fosse superada.

Referências e bibliografia

Almeida, L. M. W., Silva, K. A. P., & Vertuan, R. E. (2012). *Modelagem Matemática na Educação Básica*. São Paulo: Contexto.

Bassanezi, R. C. (2006). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. 3.ed. São Paulo: Contexto.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Portugal: Porto Editora.

Cury, H. N. (2006). Análise de Erros e Formação de Professores: Sugestões de Ensino e Pesquisa em Cursos de Licenciatura em Matemática. *Revista Contexto e Educação*, *21*(76), 95 – 113.

Chi, Michelene T. H. (2005). Commonsense conceptions of emergent processes: Why some misconceptions are robust. *The journal of the learning sciences*, *14* (2), 161-199.

D'amore, B. (2007). *Elementos de didática da matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Lima, E. L. (1982). *Curso de Análise*. Rio de Janeiro: IMPA.

Makonye, J. P. (2012). *Learner mathematical errors in introductory differential calculus tasks: A study of misconceptions in the senior school certificate examinations* [Tese de doutoramento]. University of Johannesburg, South Africa.

Nesher, P. (1987). Towards an instructional theory: the role of student's misconceptions. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 33-40.

Swan, M. et al. (2007). The roles of modelling in learning mathematics. In: *Modelling and applications in mathematics education*. Springer, Boston, MA, 275-284.

Uma abordagem para o ensino de Geometria Analítica através da Resolução de Problemas

Mário Barbosa da **Silva**
Instituto Federal de São Paulo - campus Itaquaquecetuba
Brasil
prof.mariodasilva@outlook.com
Ilda Pavret **Silva**
Universidade Cruzeiro do Sul
Brasil
ildapavret@gmail.com
Norma Suely Gomes **Allevato**
Universidade Cruzeiro do Sul
Brasil
normallev@gmail.com
Janaína Posso **Possamai**
Universidade Regional de Blumenau
Brasil
janainap@furb.br

Resumo

Este trabalho apresenta a implementação de uma atividade de sala de aula desenvolvida com estudantes da 3ª série Ensino Médio Profissionalizante e tem por objetivo analisar a construção do conhecimento matemático em relação aos conceitos da Geometria Analítica, tendo sido implementada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. São desenvolvidas considerações teóricas sobre Resolução de Problemas, e o estudo configurou-se como uma pesquisa de natureza qualitativa, com dados construídos a partir da implementação de uma estratégia de ensino por meio da resolução de um problema gerador. Os resultados evidenciaram que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas contribuiu na construção do conhecimento matemático do estudante em relação aos conceitos de circunferência e suas conexões com outras áreas do saber e, também, favoreceu processos avaliativos ao professor, em relação à aprendizagem desencadeada e orientada pelo problema gerador.

Palavras-chave: Educação Matemática; Resolução de Problemas; Geometria Analítica; Ensino-Aprendizagem-Avaliação; Ensino Médio.

Introdução

As transformações sociopolíticas e econômicas no mundo atual têm ocorrido de forma latente, e exigido que os sistemas educacionais ofereçam, aos estudantes da Educação Básica, uma formação para enfrentar novos desafios, valorizar a criatividade, desenvolver o pensamento reflexivo e, principalmente, resolver problemas. Isso significa que os sistemas educacionais precisam preparar o professor para utilizar métodos eficazes para melhorar a qualidade de ensino em uma sociedade economicamente competitiva, tecnológica, complexa e em constante mudança em todas as áreas do saber. Nesse contexto, a resolução de problemas pode ser uma estratégia de ensino eficiente para promover a compreensão do conteúdo, em particular do conteúdo matemático, e desenvolver diversas habilidades cognitivas nos estudantes que são relevantes para a vida e para novas aprendizagens.

No âmbito da Educação Matemática, a literatura sobre Resolução de Problemas se constitui numerosa e diversificada em todos os níveis de ensino em território brasileiro (Allevato & Onuchic, 2021; Possamai & Silva, 2020; Silva & Allevato, 2021) e internacional (Cai & Hwang, 2020; Cai & Lester, 2012; Leikin & Elgrably, 2020), sendo indicada nos documentos oficiais (BRASIL, 2018; NCTM, 2000) como uma forma privilegiada na aprendizagem matemática.

Desse modo, a Resolução de Problemas, como uma abordagem atual, apresenta características notáveis em sala de aula, no sentido de promover aprendizagem, despertar o interesse e a participação dos estudantes de forma contextualizada e dinâmica, e adequada ao cenário de complexidade em que se encontram as escolas. Vale (2017, p. 131), ao mencionar a resolução de problemas como uma demanda emergente da prática cotidiana dos professores, tendo em vista suas contribuições no processo de ensino e aprendizagem, é contundente em relação “à necessidade de práticas de sala de aula onde se desenvolvam capacidades criativas dos estudantes, permitindo que todos participem ativamente na sua aprendizagem, onde possam fazer as suas pesquisas e compartilhar as suas descobertas”.

Por meio do presente trabalho, se objetiva apresentar e analisar a implementação de uma atividade em sala de aula e as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, segundo Allevato e Onuchic (2021), na construção de conhecimento matemático por estudantes do Ensino Médio relacionado ao conceito de circunferência.

Para fundamentar este trabalho, na sequência desta introdução, realizamos breve discussão teórica sobre Resolução de Problemas. Em seguida, explicitamos os procedimentos metodológicos adotados, apresentamos a discussão e análise da atividade e, por fim, as considerações finais.

Resolução de Problemas

Allevato e Onuchic (2021) defendem o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de um novo conteúdo matemático através da Resolução de Problemas, iniciando com um problema gerador. A dinâmica de trabalho, nessa metodologia de ensino, exige uma nova postura, tanto do professor como do estudante. O processo é centrado no estudante enquanto o professor atua como mediador, incentivador, questionador. Segundo Cai e Lester (2012, p. 149) "orientar os alunos a investigarem ideias matemáticas importantes" é essencial para uma boa aula de matemática.

Essas pesquisadoras apresentam uma sugestão de como pode ser realizado esse trabalho em sala de aula, organizando-o em dez etapas:

> (1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de novos problemas. (Allevato & Onuchic, 2021, p. 52)

A eficácia dessa metodologia decorre de um conjunto de fatores e ações tanto do professor como do estudante. O primeiro precisa, diante de seus compromissos com o ensino, preparar e selecionar problemas geradores que, de acordo com Allevato e Onuchic (2021, p. 47), são "[...] o ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos", visando contemplar o conteúdo a ser trabalhado em sala de aula. O estudante, por sua vez, precisa se interessar e se responsabilizar pela construção do seu conhecimento (Onuchic & Allevato, 2011).

Nesse contexto, a compreensão dos conteúdos matemáticos emergirá; ocorrerá a busca por justificativas embasadas em conceitos, para refutar ou não uma resolução; se apresentará a possibilidade de aprender diversas formas de resolução; e serão construídos dados avaliativos durante a aprendizagem. Esclarecendo essas ideias, na sequência apresentamos a metodologia de pesquisa, o relato e a análise da prática desenvolvida em sala de aula.

Metodologia de Pesquisa

A investigação apresentada neste trabalho é parte de uma pesquisa de doutorado. A prática aqui relatada foi desenvolvida em cinco encontros, realizados em setembro e outubro de 2022, e envolveu 30 estudantes da 3ª série do Ensino Médio do curso de Edificações, de uma escola técnica da cidade de São Paulo, Brasil.

Trata-se de um estudo de natureza qualitativa, priorizando a compreensão da dinâmica da sala de aula, as discussões e as produções dos estudantes que vivenciaram o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática, conforme sugerem Borba, Almeida e Gracias (2018).

Após serem fornecidas orientações sobre a pesquisa, aos estudantes, no primeiro encontro, além da entrega do Termo de Esclarecimento e Livre Consentimento, foi proposto o problema apresentado no Quadro 1.

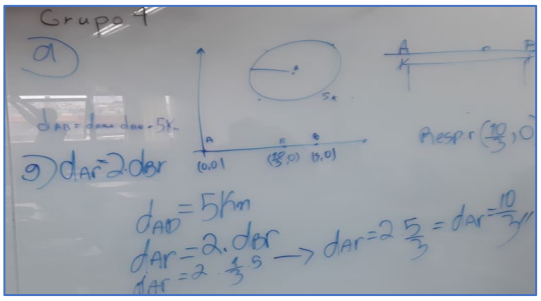
Quadro 1
Problema gerador sobre as emissoras de rádio

Duas emissoras de rádio, a primeira com uma potência que é o dobro da segunda, estão separadas por uma distância de 5 quilômetros. Sabe-se que a intensidade com que um receptor recebe os sinais emitidos é proporcional à potência e inversamente proporcional ao quadrado da distância da emissora ao receptor segundo a equação: $I = \frac{P}{d^2}$, onde: (I corresponde a intensidade, P a potência e d, a distância). Determine:

a) Os pontos nos quais a qualidade de recepção das emissoras é a mesma;
b) Utilizando o GeoGebra, faça a representação dessa situação com a resposta do item anterior e informe qual é o tipo da figura encontrada e os seus elementos;
c) Explore o software de geometria dinâmica e crie novas figuras similares à situação expressa no problema.
d) A figura encontrada sugere qual significado em relação à situação expressa no problema?
e) A expressão encontrada no item (a) pode ser representada de outra maneira? Como?
f) No seu conhecimento, este novo conteúdo está relacionado com outro conceito matemático?
g) Encontrar a expressão analítica que generaliza o item (a).
h) Elabore um novo problema sobre o mesmo conteúdo para propor aos seus colegas.

(Fonte: Adaptado de Giovanni & Bonjorno, 2005, p. 82)

O principal objetivo do problema proposto foi iniciar um novo tópico matemático através de um problema gerador, conforme as recomendações de Allevato e Onuchic (2021), promovendo a aprendizagem do conceito e da equação da circunferência, trabalhados na Geometria Analítica. Tínhamos em mente a dedução formal dessa equação, mobilizada pela utilização do GeoGebra associada à exploração matemática necessária à resolução do problema, com vistas à valorização das relações entre a resolução de problemas e a prova matemática.



Transcrição da imagem:

- Representação no plano cartesiano da situação problema sendo: A(0,0); B(5,0) e R(x,0);
- Representação da situação fora do plano cartesiano;
- $d_{AB} = d_{AR} + d_{RB} = 5km$;
- $d_{AB} = 5km$
- $d_{AR} = 2d_{RB}$
- $d_{AR} = 2 * \frac{1}{3} * 5 \rightarrow d_{AR} = 2 * \frac{5}{3} = d_{AR} = \frac{10}{3}$;
- $Resp$: r$\left(\frac{10}{3}, 0\right)$

Figura 1. Resolução do item (a) do grupo 4

Cada estudante recebeu uma cópia do problema gerador para uma leitura individual. Em seguida, foi solicitado que formassem grupos[1] de no máximo quatros pessoas e discutissem o problema com os colegas, para desenvolverem uma estratégia de resolução. Esperávamos que os estudantes, após a compreensão do problema, elaborassem uma representação da situação utilizando os recursos do GeoGebra no seu smartphone ou com papel e lápis, e, depois, utilizassem os seus conhecimentos prévios para encaminhar uma possível resolução. Os

[1] Foram formados oito grupos, sendo seis com quatros estudantes e dois com três.

estudantes trabalharam durante quatro encontros[2] para finalizar uma resolução para o problema. Em seguida os grupos apresentaram as resoluções a toda a turma, registrando-as no quadro branco e explicando o que tinham pensado. A apresentação não teve uma ordem pré-estabelecida, ocorrendo conforme cada grupo se dispunha a mostrar os resultados obtidos aos seus colegas. O grupo 4 apresentou, para o item (a), a resolução indicada da Figura 1:

No presente trabalho, vamos nos ater a este item do problema, o item (a), por ser suficiente para as discussões que aqui pretendemos desenvolver, com relação aos conteúdos prévios manifestados pelos alunos e a aprendizagem que desenvolveram através da resolução deste problema. Na plenária e busca pelo consenso, a resolução apresentada por esse grupo gerou discussões envolvendo tanto a representação pictórica como a algébrica. Os estudantes informaram que as emissoras e o receptor poderiam estar representados em uma região do plano cartesiano, e que a circunferência é a melhor figura para representar esse contexto, pois contemplaria as informações do enunciado do problema. Essa compreensão se mostra nos registros dos alunos, indicando as coordenadas dos pontos são A(0,0), B(5,0) e R(x,0) nas representações, uma usando o plano cartesiano (para circunferência) e a outra, numa reta (para a distância entre as emissoras A e B. Além disso, ao escrever $d_{AR} = 2d_{RB}$, estão considerando a informação fornecida no enunciado de que "a primeira [emissora] com uma potência que é o dobro da segunda" tem implicações na razão entre as distâncias de cada um das emissoras ao receptor. Dito de outro modo: os alunos consideraram a potência de emissão de sinais para deduzir a relação entre as distâncias necessária para a resolução de problemas, muito embora a relação entre as distâncias, assumida por eles, não esteja correta.

Ademais, este grupo foi contundente ao enfatizar que as coordenadas do centro da circunferência precisariam ser as coordenada da emissora A, e que as coordenada da emissora B ficariam sobre uma circunferência, respeitando a distância de 5 km entre elas, constituindo o raio. O receptor ficaria entre as duas emissoras, conforme a representação apresentada pelos alunos. Cabe ressaltar, como pode ser observado na resolução apresentada na Figura 1, que o grupo não encontrou a resposta correta, devido a não elevar a distância ao quadrado. Um estudo prévio mais cuidadoso por parte dos alunos com relação à intensidade, à potência, e à distância envolvida, é essencial para o encaminhamento correto de estratégia de resolução deste problema. Não raro isso se mostra nas primeiras tentativas de resolução de um problema gerador, nessa metodologia. As compreensões e resoluções são aprimoradas nas próximas etapas, como veremos nos dados que ainda serão apresentados neste artigo. Também podemos observar que os alunos, inicialmente, não adotaram uma representação para a incógnita (distância entre o receptor e a emissora B) na resolução algébrica, conforme a Figura 2:

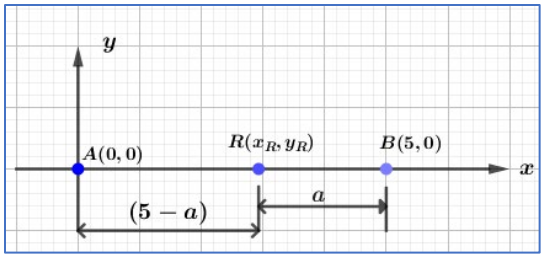


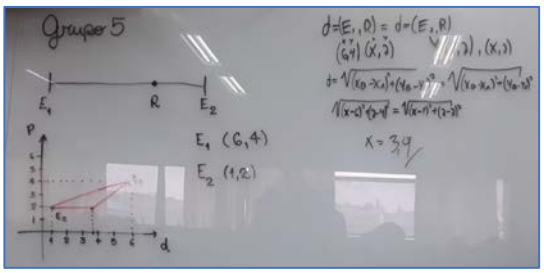
Figura 2. Possível representação pictórica da resolução do grupo 4

[2] Cada encontro teve duração de 100 minutos, ou seja, duas aulas de 50 minutos cada.

A resolução do grupo 4 desencadeou uma discussão importante entre os estudantes. Os demais grupos conseguiram identificar tanto a coerência e a concordância com as informações do problema como os erros e os equívocos que haviam sido realizados em suas próprias resoluções, ao compreender a resolução do grupo 4. Esses fatos contribuíram para o grupo 4 empenhar-se em "convencer" os estudantes de outros grupos sobre qual seria a resolução adequada para o problema. Na Figura 3 está registrado o momento em que um estudante (de camisa branca) de outro grupo vem à lousa e questiona os procedimentos adotados na resolução apresentada, pelo grupo 4:

Figura. 3 – Interação entre os estudantes na apresentação do grupo 4

Conforme apontam Allevato e Onuchic (2021, p. 50), o objetivo da plenária é fazer com que "[...] o professor estimule os alunos a compartilharem e justificarem suas ideias, defenderem pontos de vistas, compararem e discutirem as diferentes soluções, isto é, avaliarem suas próprias resoluções de modo a aprimorarem a apresentação (escrita) da resolução". O estudante de camisa branca, do grupo 3, foi convencido de que a sua resposta estava incorreta, e que a dos seus colegas (grupo 4) apresentava coerência com o contexto do problema devido a sua estratégia de resolução acatar as informações fornecidas no enunciado. O grupo 4 explicou que a potência da emissora A é o dobro da emissora B, então, a unidade receptora precisa ficar entre as emissoras, porém, mais próxima da B, para que a qualidade de sinal recebido seja a mesma a partir de ambas.



Transcrição da imagem

- Representação no plano cartesiano da situação problema, sendo: $E_1(6, 4)$; $E_2(1, 2)$ e R(x, 2);
- Representação da situação fora do plano cartesiano;
- $d = (E_1, R) = d = (E_2, R)$
- $\binom{x}{6}, \binom{y}{4}\binom{x}{x}, \binom{y}{2}$ $(1, 2), (x, 2)$;
- $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$;
- $\sqrt{(x-6)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (2-2)^2}$;
- $x = 3{,}9$

Figura. 4 – Resolução do item (a) do grupo 5

Outro fato similar a esse ocorre com a resolução do grupo 5, ao ser compartilhada com colegas de sala durante a plenária: o estudante do grupo 4 identificou que o grupo 5 não acatou a informação sobre a distância entre as emissoras, que era de 5 km. O estudante verificou com o GeoGebra a distância entre elas, e informou ao grupo 5 que os valores adotados para as

coordenadas das emissoras $E_1(6, 4)$ e $E_2(1, 2)$, estabelecidos por eles na resolução, não corresponde a 5 km. E utilizou uma justificativa matemática para refutar a resolução dos seus colegas, pois os estudantes já haviam aprendido o conceito de distância entre dois pontos na geometria analítica no primeiro semestre. A Figura 4 apresenta a resolução do grupo 5.

Esses aspectos vêm ao encontro das pesquisas de Allevato e Onuchic (2021) e Vale (2017), ao mencionarem que a resolução de problemas pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem durante apresentação da resposta dos estudantes, promover a participação ativa em todo o processo de resolução e de apresentação de suas respostas, estimular o compartilhamento de descobertas e aprendizagens, e desenvolver a capacidade criativa.

Na resolução desenvolvida pelo grupo 5 (figura 4), o equívoco na distância entre as emissoras e a consideração de um valor específico, 2, como ordenada do ponto R impediram que o grupo chegasse a uma expressão genérica – a equação de uma circunferência – que respondesse ao que foi solicitado neste item do problema.

Em consenso, os estudantes concluíram que os equívocos nas resoluções apresentadas pelos grupos os levaram a, inicialmente, não encontrar a resposta correta do item (a); porém, contribuíram para sanar dúvidas, aprender novos conceitos e relembrar outros que já haviam aprendido anteriormente. Iniciando a formalização do conteúdo o pesquisador apresentou o seguinte exemplo aos estudantes: utilizando os pontos A(4, 2), B(7, 6), R(x, y) e as informações dadas no problema, foi deduzida a equação $[x_R^2 + y_R^2 - 20x_R - 20y_R + 150 = 0]$. Ela responde ao que foi solicitado, representando uma circunferência com centro no ponto (10, 10) e raio $\sqrt{50}$; em qualquer ponto dessa circunferência em que se encontre o receptor, a intensidade do sinal recebida será igual a partir de ambas as emissoras. Na sequência, os estudantes conseguiram identificar que o principal objetivo da resolução do problema gerador foi promover uma melhor compreensão do conceito de circunferência e da dedução de sua equação. Assim, conforme defendem Allevato e Onuchic (2021), pudemos evidenciar como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas contribuiu no processo de ensino e aprendizagem sobre circunferência.

Os alunos empenharam esforço e curiosidade para encontrar uma resposta, enfrentaram o desafio de ultrapassar os obstáculos proporcionados pelo problema e de aprender Matemática por essa abordagem. Ao serem questionados pelo pesquisador se a resolução desse problema promoveu alguma aprendizagem matemática, eles foram categóricos, ou seja, se manifestaram com muita segurança e clareza na resposta: “diversos conhecimentos matemáticos, por exemplo, equação da circunferência, distância entre dois pontos, operações algébricas, equações e outros”.

Alguns estudantes apontaram fenômenos físicos e da engenharia, ou seja, fizeram conexões do conteúdo matemático que foi abordado através do problema gerador com outras áreas do conhecimento, conforme recomendam Allevato e Onuchic (2019). Ademais, o processo avaliativo foi contemplado em toda a atividade. Os aspectos relacionados à avaliação, embora não sejam o foco deste estudo, ocorreram no sentido de que foi possível perceber as dúvidas e os equívocos dos alunos na resolução do problema ao longo da implementação da metodologia, possibilitando ao pesquisador realizar mediações que auxiliassem os alunos a corrigir e

compreender seus erros e avançar na construção de conhecimento. (Allevato & Onuchic, 2021; Pironel & Onuchic, 2021; Pironel & Vallilo, 2017)

Considerações finais

As discussões realizadas durante o desenvolvimento dessa atividade e as análises dos protocolos produzidos possibilitaram evidenciar as contribuições, para a aprendizagem dos estudantes, dos momentos da apresentação das resoluções e plenária, na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Ela visa conduzir os estudantes na construção de conhecimento matemático de forma consciente, responsável e criativa, diante dos objetivos estabelecidos pelo professor para a temática de aula. Ressalte-se que, ao valorizar o protagonismo do estudante, as diferenças individuais na resolução proposta por cada um, seus processos de pensamentos e esforços com a atividade proposta, a interação e a aprendizagem promovida no momento de plenária e na busca pelo consenso e, também, a aceitação do erro um caminho que conduz ao conhecimento, são habilidades relevantes ao desenvolvimento da compreensão do conteúdo neste processo de aprendizagem. Nesse contexto, o professor consegue avaliar e identificar os avanços, as compreensões e as dificuldades apresentadas pelos estudantes e ajudá-los em sua aprendizagem.

Referências

Allevato, N. S. G., & Onuchic, L. R. (2021). Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. In: Onuchic, L. R., & Allevato, N. S. G., & Noguti, F. C. H., & Justulin, A. M. (org.): *Resolução de Problemas teoria e prática (2ª ed.,* pp. 37–58). Paco Editorial.

Allevato, N S. G., & Onuchic, L. R. (2019). As conexões trabalhadas através da Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10*(2), 1–14.

Brasil. MEC. Base Nacional Comum Curricular: educação é a base. Brasília: Ministério da Educação, 2018. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

Borba, M. C., & Almeida, H. R. F. L., & Gracias, T. A. S. (2018). Pesquisa em ensino e sala de aula: Diferentes vozes em uma investigação. Autêntica.

Cai, J.; & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: theorical considerations, methodology, and directions for future research. In *International Journal of Educational Research*, 102, (pp. 1–8).

Cai, J., & Lester, F. (2012). Por que o ensino com a Resolução de Problemas é importante a aprendizagem do aluno? In *Bolletin GEPEM,* (60), 241–254.

Leikin, R., & Elgrably, H. (2020). Problem posing through investigations for the developmed and evaluation of proof-related skills and creativity skills of prospective high school mathematics teachers. In *International Journal of Educational Research*, 102, (pp. 1–13).

National Coucinl of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics, Reston*.

Onuchic, L. R., & Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Boletim de Educação Matemática, 25*(11), 73–98.

Pironel, M., & Onuchic, L. R. (2021). Resolução de problemas: oportunidade de avaliação para a aprendizagem. In: Onuchic, L. R., & Allevato, N. S. G., & Noguti, F. C. H., & Justulin, A. M. (org.): *Resolução de Problemas teoria e prática* (2ª ed., pp. 59–74). Paco Editorial.

Pironel, M., & Vallilo, S. A. M. (2017). O papel da avaliação na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. In: Onuchic, L. R., & Leal Junior, L. C., & Pironel, M. (org.): *Perspectivas para a resolução de problemas* (pp. 279–304). Livraria da Física.

Possamai, J. P., & Silva, V. C. S. (2020). Comunicação Matemática na Resolução de Problemas. *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 17*(e020026), 1-15. https://doi.org/10.37001/remat25269062v17id277

Silva, M. B., & Allevato, N. S. G. (2021, 29 a 30 de julho). A Resolução de Problemas em um Ciclo de Formação Continuada de Professore de Matemática [Apresentação de Comunicação Oral]. *I Simpósio de Resolução de Problemas na Educação Matemática*. Maringá, PR, Brasil. https://drive.google.com/drive/folders

Vale, I. (2017). Resolução de Problema um Tema em Contínua Discussão: vantagens das Resoluções Visuais. In: Onuchic, L. R., & Leal Junior, L. C., & Pironel, M. (org.): *Perspectivas para Resolução de Problemas* (pp. 131–162). Livraria da Física.

Validación de conjeturas en el aprendizaje de la Matemática

Leticia **Aguilar** Pascual
Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM
México
leticia.aguilar@cch.unam.mx
Ángel Homero **Flores** Samaniego
Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM
México
ahfs@unam.mx

Resumen

La validación de conjeturas y la argumentación son parte esencial de los debates y de la producción de conocimiento. Según John Dewey, el pensamiento reflexivo es parte inherente del ser humano, todos pensamos de manera reflexiva y este pensamiento puede fomentarse y perfeccionarse en la escuela. Según nuestra experiencia, es posible trasladar el proceso de producción de conocimiento (en este caso, matemático) al salón de clase y fomentar el pensamiento reflexivo en nuestros estudiantes.

El propósito de este taller, dirigido a docentes de bachillerato y nivel superior e investigadores interesados, es ilustrar, desde el modelo de intervención didáctica, *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (Flores, 2010), cómo se trabajan algunas actividades de aprendizaje en geometría euclidiana. El desarrollo de la actividad se hará en grupos pequeños, de preferencia en parejas, con un momento final de reflexión grupal; en un ambiente en el que se fomentaría el respeto, la tolerancia y la colaboración.

Palabras clave: Educación Matemática; Pensamiento Reflexivo; Geometría; Validación de conjeturas; Argumentación en matemática; Resolución de problemas.

Introducción

La matemática se aprende haciendo y reflexionando sobre lo que se hace, éste es el principio que norma nuestro trabajo en el aula de matemática. En este contexto, la argumentación y la validación de conjeturas son dos aspectos importantes del aprendizaje de la disciplina. De hecho, forman parte del concepto de *pensamiento reflexivo* caracterizado por John Dewey (1910, 1916) como una cadena de ideas que parten de una conjetura y llegan a una conclusión razonable.

El proceso de pensamiento reflexivo se inicia con un razonamiento abductivo (Peirce, 1877; Fann, 1970) que lleva al planteamiento de una conjetura como explicación de un hecho inesperado o que llama nuestra atención (despierta nuestra curiosidad); el proceso continúa con la búsqueda de explicaciones plausibles a nuestra conjetura siguiendo razonamientos inductivos y deductivos hasta llegar a una conclusión razonable o aceptable.

El pensamiento reflexivo está en la base del conocimiento científico que caracterizamos como una serie de hipótesis que se corroboran de manera experimental o una serie de experimentos que producen hipótesis por comprobar (Peirce, 1877). Esta indagación, combinación de experimentación y reflexión nos lleva a producir conocimiento nuevo y a comprender mejor el entorno en el que nos desenvolvemos. Para nosotros, los pensamientos matemático, científico, crítico, histórico, social, etcétera, nos son otra cosa que manifestaciones del pensamiento reflexivo cuando se hacen tareas y actividades en esos cuerpos de conocimiento.

La producción de conocimiento matemático no es la excepción. La matemática descansa en una serie de definiciones y axiomas o postulados que la fundamentan; a partir de éstos se plantean hipótesis o conjeturas que, al ser validadas por la comunidad, adquieren el estatus de teoremas que se utilizan en el mismo rango que los axiomas. Así, al igual que todo cuerpo de conocimiento, la matemática produce su conocimiento en dos niveles: el primero se refiere al trabajo individual o colectivo de un grupo de matemáticos que producen un cierto conocimiento y adquieren la certeza de que es válido; el segundo nivel tiene que ver con la presentación de dicho conocimiento a la comunidad matemática (a través de publicaciones en revistas o la presentación en congresos) quien lo somete a un proceso de revisión y escrutinio que culmina con su aceptación o rechazo.

En ambos niveles, la validación de conjeturas y la argumentación son parte esencial de los debates y de la producción de conocimiento. Según Dewey (1910, 1916), el pensamiento reflexivo es parte inherente del ser humano, todos pensamos de manera reflexiva y este pensamiento puede fomentarse y perfeccionarse en la escuela. Según nuestra experiencia, es posible trasladar el proceso de producción de conocimiento (en este caso, matemático) al salón de clase y fomentar el pensamiento reflexivo en nuestros estudiantes.

El propósito de este taller es ilustrar, mediante una situación concreta, como desarrollamos algunas actividades de aprendizaje en geometría euclidiana, en las que se plantean conjeturas y se busca su validación, desde el modelo de intervención didáctica, *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (Flores, 2010).

Aprender Matemática, Haciendo Matemática

El marco de referencia es el modelo de intervención didáctica *Aprender Matemática, haciendo Matemática* (AMHM) que se ha venido desarrollando desde 2007, en un principio como modelo de enseñanza centrado en el estudiante. El propósito es conformar en el aula un ambiente de aprendizaje en el que todos los estudiantes tengan la oportunidad de aprender haciendo la matemática y debatiendo sobre sus resultados.

Para que sea efectivo, el ambiente que se busca es de respeto, tolerancia y cooperación (adaptado de Flores y Gómez, 2009):

- **Tolerancia**. Capacidad de considerar y aceptar las ideas de los demás; esto implica una convivencia armónica en la que no existen prejuicios acerca del género, la raza o las preferencias sexuales. La tolerancia y el respeto están en la base de la no discriminación.

- **Respeto**. Reconocimiento del derecho a ser de los seres vivos; con respecto a las personas, se trata del reconocimiento de sus derechos y su dignidad. Implica una actitud de tolerancia y reconocimiento a las personas, la sociedad y la naturaleza. El respeto y la tolerancia implican un aumento en la autoestima de los estudiantes.

- **Cooperación**. Trabajo conjunto para el logro de metas comunes; el propósito de la cooperación es el beneficio mutuo; implica la capacidad de hacer de lado ideas y propuestas propias, cuando sea necesario.

Cada ambiente escolar de aprendizaje se conforma a partir de cinco dimensiones (Flores 2017, adaptadas de Schoenfeld y *The teaching for a Robust Understanding Project*, 2016) que, en nuestro caso definimos como:

- **Contenido Curricular**. Temática, aprendizajes, estrategias didácticas y objetivos contemplados en el currículo; debe estar acorde con el nivel educativo del que se trate. En un buen ambiente de aprendizaje, las actividades contribuyen al desarrollo de los estudiantes como pensadores reflexivos, flexibles y con recursos teóricos para afrontar las situaciones a las que se enfrenten.

- **Demanda Cognitiva**. Es el grado de complejidad con que se deben manipular la información y los conceptos disciplinares en las actividades de aprendizaje para su buen desarrollo. Debe ser tal que signifique un reto para el estudiante sin llegar a ser algo imposible de llevar al cabo. Un buen ambiente de aprendizaje sería aquel en el que la demanda cognitiva fuera la adecuada con el nivel educativo, y el esfuerzo cognitivo de los estudiantes para realizarla fuera mínimo.

- **Acceso Equitativo al Contenido**. Un ambiente de aprendizaje equitativo debe permitir y fomentar la participación de todos los estudiantes en las actividades de aprendizaje. El trabajo en equipo es el vehículo para establecerlo, así como la supervisión continua del profesor y los debates grupales. Un ambiente de aprendizaje equitativo deja de lado

prejuicios de género, raza, religión o preferencia sexual, y da voz a todos los integrantes de la comunidad.

- **Identidad y Pertenencia**. Es el grado en que un estudiante se siente identificado con el ambiente de aprendizaje e integrante de la comunidad conformada por el grupo. Parte de su identidad tiene que ver con la concepción del estudiante sobre sí mismo como un buen aprendiz, dispuesto a compartir su conocimiento con los demás y a recibir ideas y comentarios de otros aprendices o del profesor. El ambiente de aprendizaje debe fomentar la autoestima del estudiante y su capacidad como aprendiz afectivo y autónomo.
- **Retroalimentación Formativa**. Está conformada por las actividades de aprendizaje y la información que el profesor lleva al aula como productos de una evaluación. Los resultados de la evaluación en el aula sirven, en parte, para identificar errores y debilidades en el aprendizaje; la retroalimentación formativa sirve para eliminar debilidades y corregir errores.

El equilibrio entre estas dimensiones y el fomento del respeto, la tolerancia y la cooperación se conjuntan para crear el ambiente idóneo de aprendizaje a través de las actividades que el docente diseña o que los estudiantes proponen.

Por su parte, las actividades de aprendizaje se basan, principalmente, en la resolución de problemas o en la exploración de situaciones matemáticas en las que es necesario plantear conjeturas y buscar su validación de manera individual y colectiva.

La siguiente es un ejemplo del tipo de actividad que se lleva al aula:

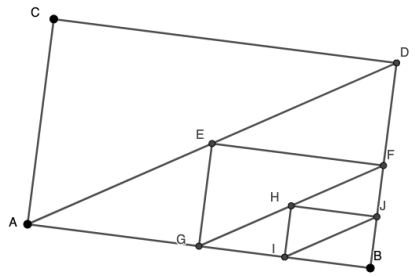


Figura 1. Rectángulos y sus diagonales.

En la figura se muestra el rectángulo ABDC de dimensiones a y b y su diagonal, y otros rectángulos construidos a partir del punto medio de las diagonales.

¿Cuánto mide la diagonal mayor? Explica tu respuesta. ¿Puedes hallar una expresión que dé la longitud de una diagonal dadas las dimensiones del rectángulo? Explica tu respuesta.

En caso afirmativo, ¿qué expresión es? ¿Cómo sabes si es correcta?

Los conceptos que habría que utilizar para llevar al cabo la actividad corresponden a una geometría básica: teorema de Pitágoras, definición de rectángulo, triángulos semejantes y algo de álgebra elemental, entre otros; conceptos que se estudian en secundaria (edades entre los 11 y 15 años); ¿cuál es la demanda cognitiva de la actividad? ¿El estudiante será capaz de generalizar el procedimiento y dar con la relación que se pide?

La labor del profesor, además de diseñar y plantear la actividad, consistiría en determinar si la demanda cognitiva es adecuada para el nivel académico de los estudiantes y, en todo caso, proporcionar el andamiaje necesario para que la actividad sea realizada con éxito.

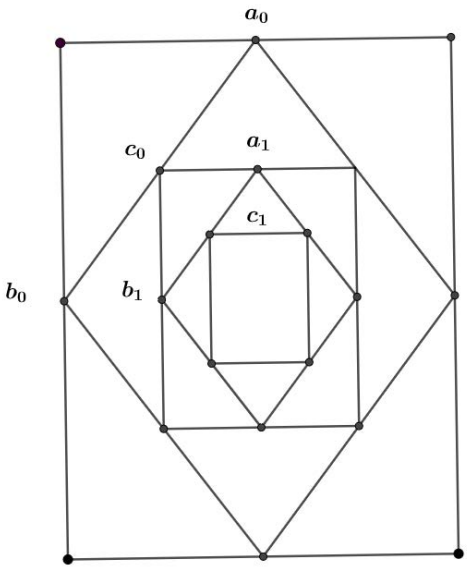


Figura 2. Cuadriláteros de puntos medios.

Otro factor importante es la comunicación durante el proceso de resolución de los problemas o del desarrollo de las actividades; ésta debe ser abierta, el estudiante debe sentirse con la confianza de preguntar a sus compañeros o al profesor si tiene dudas sobre lo que se está haciendo, o con la con la libertad de asesorar a sus compañeros y compartir información e ideas que ayuden a completar la tarea. El profesor funge, entre otras cosas, como una especie de catalizador que coadyuva en la resolución de problemas; es una especie de abeja que lleva el polen de la información de un equipo a otro.

Al final, como recapitulación, el profesor hace un balance grupal de la actividad y aprovecha para entablar un diálogo con sus estudiantes sobre las dificultades y los retos que enfrentaron y la mejor manera de superarlos.

Grosso modo, en el taller se procederá haciendo un resumen de AMHM y del planteamiento de la actividad (inicio del taller), la organización de los integrantes en equipos y el desarrollo de la actividad (desarrollo), y una reflexión final sobre los resultados de la actividad y su potencial para ser llevada a clase (conclusión).

Desarrollo

Para fines del presente taller, se plantea realizar una actividad de generalización de patrones, parecida a la que presentamos como ejemplo, que los asistentes abordarían siguiendo, lo más de cerca posible, la metodología de AMHM. Estamos ciertos que será difícil desarrollar la actividad completamente y con todo su potencial, debido a las limitaciones de tiempo; sin embargo, será una buena aproximación al funcionamiento del modelo y dará idea de cómo planteamos el trabajo en clase.

La actividad es la siguiente:

Cuadriláteros de puntos medios

a) Si unimos los puntos medios de un rectángulo, ¿qué tipo de cuadrilátero se obtiene? ¿Cómo validas tu respuesta (conjetura)?

b) Si el rectángulo tiene dimensiones a_0, b_0, ¿qué dimensiones tendrá el cuadrilátero de los puntos medios?

c) Si, ahora, unimos los puntos medios del cuadrilátero de los puntos medios, ¿qué tipo de cuadrilátero se obtiene? ¿Cómo validas tu conjetura?

d) ¿Qué dimensiones tiene este segundo cuadrilátero? Justifica tu respuesta.

e) De acuerdo con la Figura 2, ¿es posible llegar a una expresión que relacione el área del cuadrilátero de los puntos medios cuando el proceso se hace k veces?

f) Si la respuesta al inciso e) es negativa, explica tu respuesta.

g) Si la respuesta al inciso e) es positiva, ¿cómo sería la generalización?

La revisión de la actividad se hará de preferencia en parejas y, después de un tiempo razonable de trabajo en cada inciso, se tendrá una discusión global sobre las posibles respuestas a las preguntas planteadas. También se hará un análisis de la actividad en cuanto a su contenido curricular y su demanda cognitiva. Como cierre del taller, se hará una reflexión con todos los integrantes sobre la viabilidad de instrumentar el modelo en el aula.

A manera de conclusión

En nuestra opinión, la matemática escolar se ha visto como una herramienta para resolver problemas, y su estudio se asemeja en mucho al estudio de un manual de uso: si se siguen los pasos correctamente, tendremos éxito en el "aprendizaje" de la materia.

Sin embargo, la matemática es mucho más que una mera herramienta. Se trata de una ciencia que estudia fenómenos exclusivamente matemáticos (matemática pura); una teoría que ayuda a entender y explicar de mejor manera los fenómenos de nuestro entorno (matemática aplicada); y un lenguaje universal que nos sirve para comunicar ideas científicas (SUMEM, 2012); y su desarrollo y comprensión requiere de algo más que lógica como lo apunta Torres (2016; página 88):

La construcción, manejo y observación de casos particulares, las analogías y la imaginería visual se no se pueden echar así nomás por la borda.

La hipótesis que subyace en el planteamiento de AMHM es que, si se estudia la matemática en sus cuatro aspectos, desde los niveles básicos, en un ambiente de cooperación, respeto y tolerancia, se facilitaría con mucho su aprendizaje y se aprovecharía todo su potencial, sobre todo en el desarrollo del pensamiento reflexivo.

Así, la actividad que se propone desarrollar en el taller pretende ilustrar la metodología de trabajo del modelo de intervención didáctica AMHM e iniciar, en los participantes, una reflexión sobre el cambio de paradigma en la docencia. La actividad también servirá para hacer un análisis de la conexión que tiene con algunos temas que se estudian en Cálculo Diferencial.

Referencias y bibliografía

Dewey, J. (1910) *How we think*. EUA: D. C. Heath & co. Publishers.

Dewey, J. (1916). *Democracy & Education. EUA, McMillan.*

Fann, K. T. (1970). *Peirce's theory of abduction*. The Hague: Nijhoff.

Flores, A. H. (2010). Learning Mathematics, Doing Mathematics: a learner centered teaching model. *Educaçao Matemática Pesquisa*. v.2. (n.1), 75-87. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/2331

Flores, A. H. (2017). Pensamiento Matemático y El Quehacer Científico. *Revista Pädi.* n. 1, 26-39. Universidad Autónoma de Querétaro, México.

Flores, A. H., y Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática.* vol. 21, núm. 2, 117-142.

Peirce, C. S. (1877). *The Fixation of Belief.* https://en.wikisource.org/wiki/The_Fixation_of_Belief.

Schoenfeld, A. y The Teaching for Robust Understanding Project. (2016). https://truframework.org/.

SUMEM. (2014). *Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM.* México. Secretaría de Desarrollo Institucional, UNAM.

Torres, C. (2016). Acerca de la comprensión en matemáticas. *Miscelánea Matemática*. 62, 81-103. https://miscelaneamatematica.org/download/tbl_articulos.pdf2.a3941dd027236826.363230362e706466.pdf.

Habilidades para la resolución de problemas posibilitadas en un curso de refuerzo

Ana Mileydy **González** Garcia
Departamento de Matemática, Universidad Industrial de Santander
Colombia
ana2208097@correo.uis.co
Sandra Evely **Parada** Rico
Departamento de Matemática, Universidad Industrial de Santander
Colombia
sanevepa@uis.edu.co

Resumen

Se reportan resultados de una investigación que pretendió responder a: ¿Qué habilidades para la resolución de problemas logran desarrollar estudiantes de admisión especial de la Universidad Industrial de Santander que participaron de un curso de refuerzo de matemáticas? El estudio se sustenta teóricamente en documentos oficiales del Ministerio de Educación Nacional de esta manera, utiliza el proceso de resolución de problemas como eje orientador y organizador del currículo. Se siguió el proceso metodológico de diseño curricular. Como resultados del estudio se describieron y categorizaron teóricamente tres habilidades para el proceso de resolución de problemas: i) comprender el problema; ii) plantear y ejecutar diversos caminos de solución iii) validar y verificar la solución del problema.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación superior; Enseñanza remota; Diseño curricular, Software; Investigación Cualitativa; Cálculo diferencial; Colombia.

Introducción

En Colombia, el Ministerio de Educación Nacional MEN (2013) establece que la educación superior inclusiva está relacionada con la capacidad de potenciar y valorar la diversidad. Específicamente, la Universidad Industrial de Santander (UIS) mediante la política de admisión especial, favorece el acceso de estudiantes provenientes de grupos étnicos, víctimas del conflicto armado y habitantes de la población fronteriza o de difícil acceso (Acuerdo 282, 2017). Para la admisión de esta población se aplican requisitos académicos mayores o iguales al

80% en el examen estatal en relación con el corte solicitado del programa al que se solicita.

Asimismo, el MEN (2013) establece para las Instituciones de Educación Superior (IES) diversos retos en cuanto a la adaptación de sus programas académicos, la formación del personal docente y el empleo de prácticas pedagógicas a fin de mitigar las barreras de aprendizaje, las cuales corresponden a situaciones de tipo económico, social, político, lingüístico, cultural y físico que imposibilitan el acceso, la permanencia y la culminación de los estudios universitarios.

De esta manera, se tiene un registro de 503 estudiantes que ingresaron por medio de esta modalidad desde el año y periodo 2014-I hasta 2021-II. El 62% (314 estudiantes) accedieron a programas de ciencias e ingenierías, lo cual implico que cursaran asignaturas como Álgebra lineal y/o Cálculo diferencial que según informes de la vicerrectoría académica de la UIS tuvieron un índice alto de repitencia y deserción. Además, Pineda (2018) y Echeverria (2022) reportan que en la UIS existen criterios de admisión especial para estudiantes de diferentes grupos étnicos y culturales, pero, no existe un acompañamiento para afrontar las exigencias de formación, adaptación y permanencia en la vida universitaria.

Considerando lo anterior, se realizó la investigación cuyo objetivo fue: Diseñar, implementar y evaluar un curso de refuerzo inicial dirigido a estudiantes de admisión especial de la UIS con el fin de favorecer en ellos el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas. El curso se convirtió en una alternativa de acompañamiento académico previo a los estudios formales en la universidad.

Los resultados que se reportan en este artículo se extraen de la segunda implementación del curso realizado en el año 2021, enseñanza remota a causa de la COVID-19, a través de la plataforma Zoom y el Aula Virtual de GeoGebra (AVG). En este artículo, se presentan evidencias de las habilidades del proceso de resolución de problemas manifestadas por estudiantes que participaron del curso. Como resultado se exponen algunos descriptores y ejemplos de las habilidades para: i) comprender el problema; ii) plantear y ejecutar diversos caminos de solución iii) validar y verificar la solución del problema.

Aspectos teóricos.

El estudio se fundamenta teóricamente premisas del libro principios y estándares para la educación matemática del The National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2003) donde se expone que “La resolución de problemas es una característica notable de la actividad matemática y un medio importante para desarrollar el conocimiento matemático. Consiste en encontrar una manera de alcanzar un objetivo que no es directamente asequible” (p.120). Además, en nuestro país el MEN (1998) y MEN (2006) establecen que la resolución de problemas es un eje organizador del currículo porque sirve de contexto para llevar a cabo el quehacer matemático y les permite a los estudiantes acceder a las matemáticas con sentido. Por otra parte, Santos-Trigo (2014) comenta que un problema o tarea es una oportunidad para los estudiantes, puesto que, promueve en ellos: formular preguntas, expresar y comunicar sus razonamientos, establecer y utilizar diversas formas de representación, plantear diversos caminos de solución, establecer conexiones entre los conceptos y procedimientos; es decir, es un proceso que favorece el aprendizaje y la enseñanza matemáticas y se sugiere se emplee durante el desarrollo de trabajo en el aula.

En cuanto a los documentos oficiales del MEN (1998), MEN (2006) y los del NCTM (2003) se indica que los estudiantes aprenderán a identificar, percibir, reconocer, expresar y comprender patrones, relaciones y funciones, hacer uso de las distintas representaciones (verbal, icónico, gráfico, tabular y algebraico) para modelar el cambio presente en fenómenos de variación inmersos en situaciones de la vida cotidiana, las ciencias y las matemáticas mismas. Así pues, los problemas planteados promovieron el desarrollo de estas acciones en los estudiantes.

Con respecto a la definición de habilidad, para efectos de esta investigación se acogió lo expresado por Rueda (2016) "corresponde a el conjunto de acciones secuenciales coherentes y coordinadas realizadas por un individuo, en la consecución de un objetivo. Estas acciones están mediadas por los conocimientos previos y pueden desarrollarse mediante la práctica" (p. 57). A continuación, describiremos las habilidades del proceso de resolución de problemas, recalcando los planteamientos de algunos autores.

Comprender el problema: Polya (1965) menciona que es necesario que los estudiantes identifiquen en un problema los datos, las incógnitas y las relaciones entre ellos. Además, implica la obtención de información y la capacidad de utilizar la información. Esta última habilidad es una parte esencial del proceso de resolución de problemas. En efecto, la comprensión del problema requiere análisis y síntesis, es decir, no es suficiente con la identificación de la información, el estudiante deberá hacer uso del repertorio de procedimientos, conocimientos y habilidades que posee para establecer cómo utilizará la información, de este modo, los estudiantes formulan una serie de preguntas cuando se enfocan en el proceso de resolución de problemas para establecer relaciones que ayuden a representar y entender las condiciones del problema Santos-Trigo (2014).

Plantear y ejecutar diversos caminos de solución: según Krulik, & Rudnick (1989), los estudiantes deberían desarrollar un repertorio amplio de estrategias sobre la resolución de problemas; algunos enfoques o alternativas pueden servir, mientras que, otros deben ser abandonados por ser acercamientos que no conducen a la solución. Polya (1965) indica que las heurísticas (estrategias) que se desarrollan en la resolución de problemas son diversas, algunas de estas son: la búsqueda de analogías o una especie de similitud, descomponer o combinar elementos del problema, dibujar figuras, construir una tabla, descomponer y recomponer el problema, variar el problema o trabajar con casos particulares, entre otras.

Validar y verificar las soluciones encontradas: Santos-Trigo (2014) manifiesta que, los estudiantes monitorean, verifican y validan sus procedimientos e ideas. También, Polya (1965), establece la necesidad de realizar una visión retrospectiva o "mirar hacia atrás" lo cual hace que sea necesario que los estudiantes se estén preguntando: ¿Qué necesito?, ¿qué debo hacer?, ¿hacia dónde voy?, ¿qué conocimientos utilicé?, ¿corresponde la solución con las condiciones del problema?, entre otras.

Metodología

La investigación sigue una metodología de diseño curricular (Díaz-Barriga et al. 1990). Arredondo citado por Díaz menciona que el diseño es un proceso que, consiste en la

organización y estructuración del currículo, por lo tanto, este estudio se plantea en las siguientes 8 fases:

La fase I refiere al análisis previo donde se estudian las características y condiciones económicas, políticas y sociales del contexto en particular. La fase II consistió en la planificación de curso que se caracterizó por tener una con duración de 15 días, organizadas en 4 horas diarias, bajo la modalidad de enseñanza remota atendiendo a la emergencia sanitaria por la Covid-19. Por tanto, se establecieron encuentros de manera sincrónica con la docente. En la fase III se diseñaron 14 talleres cada uno de los cuales, sigue el proceso metodológico propuesto por los investigadores Fiallo y Parada (2018) mostrando 5 momentos de la clase, es decir: i) información y exploración libre; ii) socialización de resultados; iii) exploración dirigida; iv) explicación, finalmente, la v) tarea retadora. En la fase IV se realizó la primera implementación de los talleres, la investigadora asumió el rol de profesora y participaron 23 estudiantes que ingresaron a la UIS en el periodo 2021-I. La Fase V permitió la evaluación de la primera implementación, es decir, se contrarrestó los alcances en cuanto a los fines, objetivos, medios y procedimientos considerando las condiciones del análisis previo y se analizó lo relacionado con la eficiencia y eficacia de los componentes para satisfacer las necesidades del contexto. La fase V se enfocó en el replanteamiento y rediseño del curso dando lugar a algunos ajustes en los talleres diseñados e implementados, en esta fase se instituyó el diseño final del curso para potenciar las habilidades. En la fase VI se ejecutó la segunda implementación con 14 estudiantes de primer semestre 2021-II. En la fase VII se realizó la categorización de habilidades y en la fase VIII se emitió el reporte de investigación, allí se logró identificar, describir y ejemplificar algunas habilidades emergentes de la resolución de problemas.

Análisis y de discusión de resultados

De acuerdo con Echeverria (2022), para la enseñanza de los objetos matemáticos del Cálculo diferencial es pertinente el uso de problemas contextualizados, es decir, aquellos que responde a una situación que se presenta en la cultura (D'Ambrosio, 2008). Se argumenta que, desde el punto de vista didáctico, emplear problemas rediseñados y adaptados a los contextos cercanos de los estudiantes puede favorecer e incentivar el interés y la solución de posibles necesidades propias de sus realidades. Por lo anterior, el problema que se reporta en esta comunicación corresponde al contexto de una actividad económica: "Venta de leche" propia de la comunidad palenquera.

Se muestran evidencias (capturas de pantalla e imágenes) de los procedimientos efectuados por los estudiantes en la segunda implementación del curso de refuerzo. Estas fueron extraídas de la plataforma del Aula Virtual de GeoGebra (AVG) de los estudiantes. En esta implementación participaron 14 estudiantes, 10 de los cuales autorizaron el tratamiento de sus datos. Llamaremos a los estudiantes E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10 y a la docente-investigadora In.

En el problema de información y exploración libre del taller 11 (Figura 1) esperábamos que los estudiantes plantearan un modelo matemático compuesto por dos funciones lineales que satisfacen las condiciones específicas del problema; además, se solicita analizar un punto en el dominio de la función para estudiar la tendencia y aproximación cuando se acerca por derecha y por izquierda, con ello, las nociones de límite en un punto.

Para el inciso a) las evidencias de E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10 muestran que los estudiantes definieron una función por partes cuyo dominio son todos los números reales positivos, lo cual, cumplió con las condiciones del problema (contexto).

Actividad 1.1 Información y exploración libre

Según el ministerio de cultura de la república de Colombia, las mujeres palenqueras se dedican a la venta de dulces en ciudades turísticas, principalmente en Cartagena, con el fin de obtener ingresos monetarios para comprar bienes y servicios que no pueden autoproducir, tales como: los servicios de comunicación, transporte, educación de sus hijos y algunos víveres.

Los hombres palenqueros se dedican a actividades agrícolas como la siembra de ñame, yuca, arroz, patilla, melón, frijol y maní. Además de actividades agropecuarias como la cría de cerdos, aves de corral y ganado vacuno lechero.

Supongamos que los palenqueros venden la leche de vaca a 2000 pesos por litro y si la compra es superior a 3 litros la venden a 1900 pesos el litro.

a) Realice una función, que modele la situación, y grafíquela.
b) Si tengo 5800 pesos ¿Cuántos litros de leche puedo comprar?
c) Si tengo entre 5000 y 6000 pesos ¿Cuántos litros de leche puedo comprar?
d) ¿A qué valor se aproxima el precio de la leche si deseo comprar una cantidad, en litros, muy cercana a 3 litros, pero menor a 3 litros? ¿Y si la cantidad que deseo comprar es muy cercana a los 3 litros, pero mayor que los 3 litros?

Figura 1. Fuente: Echeverria, 2022 p.81

Los estudiantes definieron que "x" representa la cantidad de litros de leche y "$f(x)$" representa el costo de la leche. Se evidencia una comprensión del problema, ya que, el autor Polya (1965) expresa que son acciones propias de esta habilidad: el identificar los datos, las variables y las relaciones entre ellos, de tal forma que, el modelo matemático planteado en los procedimientos de los estudiantes cumplió con las condiciones del problema, tal como se ilustra en el recuadro azul de la Figura 4.

Por otra parte, para el inciso b) los procedimientos de E3, E4, E7, E8, E9, E10 permitieron inferir la búsqueda de los valores de "x" para los cuales la imagen de $f(x) = 5800$ (Figura 2). De esta manera, los acercamientos son de tipo aritmético, buscando una estimación numérica mediante la estrategia heurística de particularización (Polya,1965) así, determinaron y expresaron aproximadamente la cantidad de litros de leche que compran dada una cantidad de dinero definida.

b) Si tengo 5800 pesos ¿Cuántos litros de leche puedo comprar? **Explica tu respuesta**

A

(2.8)(2000)=5600 y le sobran $200
(2.85)(2000)=5700 y le sobra $100

Figura 2. Respuesta de E7 al inciso b) del problema de información y exploración libre del taller 11

Para el inciso c) los procedimientos de E1, E2, E5, E6 observados en el AVG los estudiantes consideraran el intervalo [5000, 6000] del rango de la función "$f(x)$", luego, identificaron una discontinuidad en el punto $x = 3$. En este caso, consideramos que en los razonamientos empleados por los estudiantes evidencian de manera implícita la construcción de un intervalo en el dominio de la función [2,5; 3] para los cuales puede tener una correspondencia única con la tarifa de 2000 pesos por litro. De esta manera, fueron monitoreando y validando el modelo que plantearon (Santos-Trigo, 2014) y establecieron un rango de valores la cantidad de litros de leche "x", acciones propias de la habilidad para verificar y validar la solución el problema.

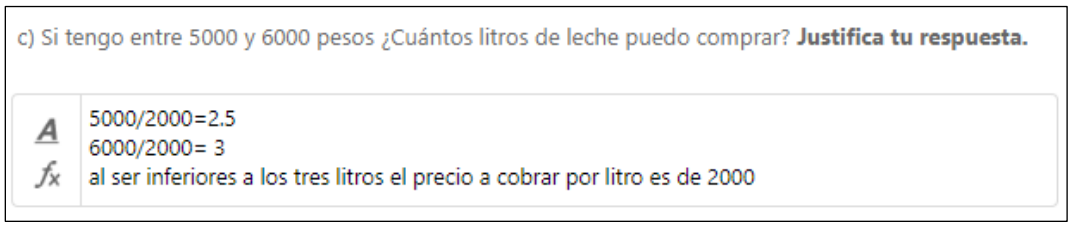
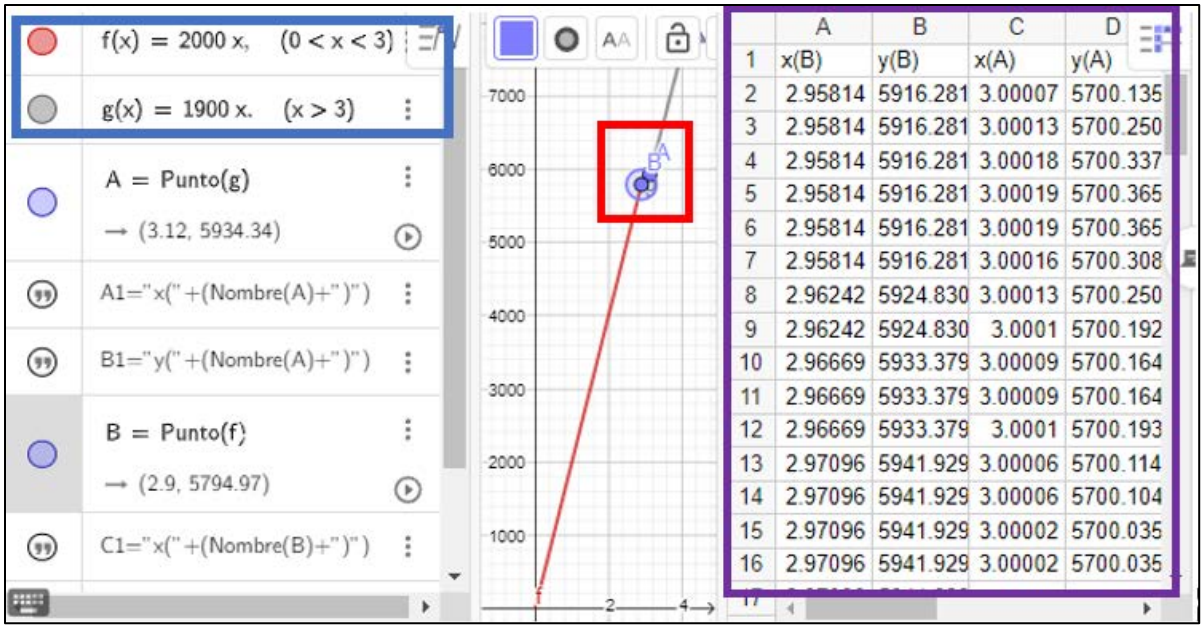


Figura 3. Respuesta de E2 al inciso c) del problema de información y exploración libre del taller 11

En el inciso d) los procedimientos de E1, E4, E6, E7, E8, E9, E10 evidenciaron el uso diversas estrategias heurísticas planteadas por Polya (1965): construcción de una tabla, particularización, construcción de una gráfica, uso de elementos auxiliares (puntos A y B sobre la representación gráfica). Con estas acciones, de acuerdo con Krulik, & Rudnick (1989) los estudiantes desarrollaron un repertorio amplio de estrategias, con ello, realizaron acciones que dan cuenta de la habilidad de plantear y ejecutar diversos caminos de solución.

Es importante mencionar, que la condición de acercarse al punto del dominio de la función ($x = 3$) tanto por derecha y por izquierda haciendo uso del software les permitió visualizar la tendencia y aproximación de la función, los estudiantes lograron construir una tabla de valores, finalmente, establecieron que, para los valores próximos a $x = 3$ pero menores, la función tiende 5700 pesos, mientras que, para los valores cercanos a $x = 3$ pero mayores, la función tiende a 6000 pesos (Ver, recuadro morado Figura 4)

A su vez, para dar respuesta a el inciso d) destacamos el procedimiento de E4. Él empleó el software de GeoGebra para crear una representación gráfica, luego, construyo los elementos auxiliares Punto A y B (ver recuadro rojo Figura 4) y su respectivo registro en la hoja de cálculo (Ver, recuadro morado de la Figura 4). Establecemos que estas acciones estuvieron enfocadas en el monitoreo, validación y verificación del modelo, porque, le permitió coordinar las representaciones creadas y establecer las parejas ordenadas que dan cuenta de la relación de covariación entre las variables, es decir, el precio de la leche en función de la cantidad de producto adquirido.



	A	B	C	D
1	x(B)	y(B)	x(A)	y(A)
2	2.95814	5916.281	3.00007	5700.135
3	2.95814	5916.281	3.00013	5700.250
4	2.95814	5916.281	3.00018	5700.337
5	2.95814	5916.281	3.00019	5700.365
6	2.95814	5916.281	3.00019	5700.365
7	2.95814	5916.281	3.00016	5700.308
8	2.96242	5924.830	3.00013	5700.250
9	2.96242	5924.830	3.0001	5700.192
10	2.96669	5933.379	3.00009	5700.164
11	2.96669	5933.379	3.00009	5700.164
12	2.96669	5933.379	3.0001	5700.193
13	2.97096	5941.929	3.00006	5700.114
14	2.97096	5941.929	3.00006	5700.104
15	2.97096	5941.929	3.00002	5700.035
16	2.97096	5941.929	3.00002	5700.035

Figura 4. Respuesta E4 al inciso d) del problema de información y exploración libre del taller 11

Finalmente, destacamos la respuesta realizada por el estudiante E1, quien hizo uso de sus conocimientos previos (Santos-Trigo, 2014) proporcionó una solución analítica. Manifestando una acción que da cuenta de la habilidad para plantear y ejecutar diversos caminos solución. Él logró expresar, empleando notación matemática la existencia de los límites laterales cuando "x" tiende al punto 3, tanto por la derecha como por la izquierda. Sin embargo, expresa en sus procedimientos que el límite en el punto $x = 3$ no existe. (ver, Figura 5).

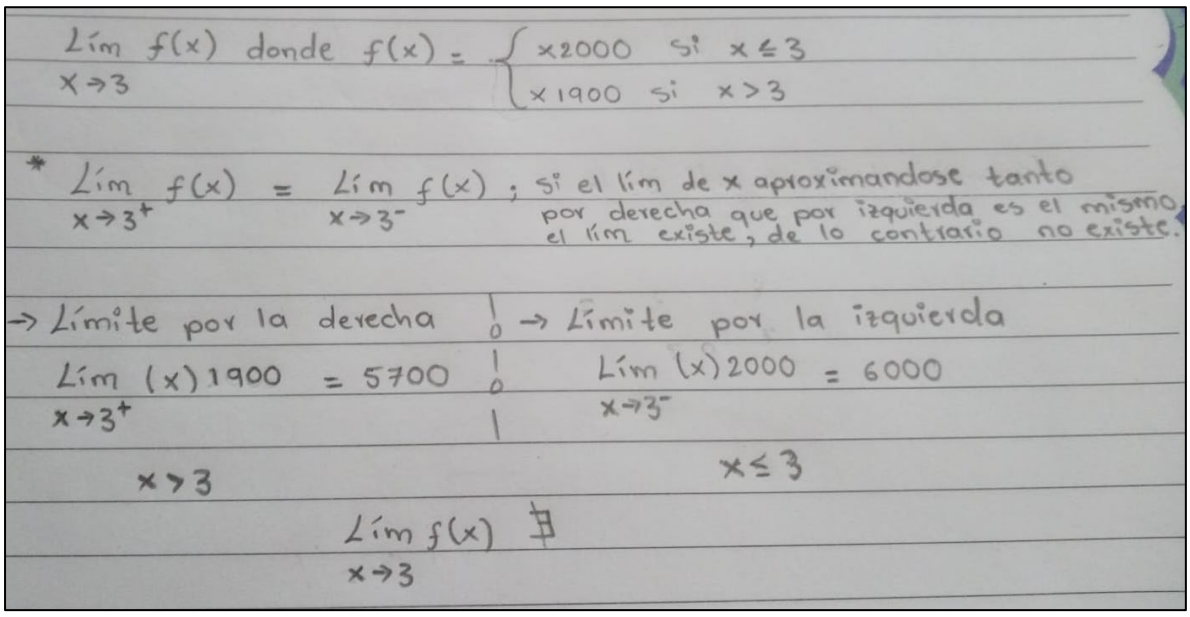


Figura 5 Respuesta E1 al inciso d) del problema de información y exploración libre del taller 11

Conclusiones

La valoración del problema nos permite plantear, sin generalizar, que la habilidad para comprender el problema es fundamental. Para el tratamiento del problema los estudiantes realizaron acciones como: extraer los datos y las variables del problema, asimismo, establecer las relaciones entre estos, convirtiéndolos en recursos para abordarlo.

En la resolución del problema se pudo evidenciar el empleo de diversas estrategias heurísticas: el uso de casos particulares para determinar algunos valores numéricos que den cuenta de la variación, la construir una tabla de valores, graficas, el empleo de elementos auxiliares (puntos sobre la gráfica), de esta manera, los estudiantes lograron identificar qué magnitudes permanecían variantes o invariantes y establecer el modelo matemático que da tratamiento al cambio del precio de la leche respecto a la cantidad adquirida. Estas acciones son evidencias de la habilidad para plantear y ejecutar diversos caminos solución.

Los diversos incisos del problema permitieron a los estudiantes la necesidad de ir monitoreando cada estrategia o heurística que emplearon para el desarrollo del problema. Además, les ayudó a recordar, afianzar y/o adquirir algunos conceptos, procedimientos, definiciones, de esta forma, validaron y verificaron la solución encontrada.

Finalmente, el problema contextualizado sirvió para generar interés en el aprendizaje de la noción de límite, fue cercano a la realidad de algunos de los estudiantes de admisión especial, además, permitió la consideración de un problema definido por una función por partes.

Agradecimientos

Al Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, Colombia – MINCIENCIAS quien está financiando el programa de investigación “Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro”. Código1115-852 70767, con el proyecto “Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnología: procesos de formación y reflexión con profesores”. Financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología. Código70783, con recursos del Patrimonio autónomo Fondo Nacional de financiamiento para la ciencia, la tecnología y la innovación Francisco José de Caldas, contrato CT 183-2021.

Referencias y bibliografía

Acuerdo Académico 282 (2017) [Consejo Académico]. Por la cual se dictan disposiciones sobre el ingreso a la Universidad de aspirantes por la modalidad de Admisiones Especiales. Noviembre 17 de 2017.

D’Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la moderni*dad. México D. F.: Ediciones Díaz de Santos.

Díaz-Barriga, F., Lule, M., Pacheco, D., Rojas, S., & Saad, E. (1990). *Metodología de diseño curricular para educación superior*. Editorial Trillas.

Echeverria, C. (2022). *Enseñanza del cálculo a personas con características diferenciadas: Reflexiones de una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación* (tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Fiallo, J., & Parada, S. (2018). *Estudio Dinámico del cambio y la variación, curso de precálculo mediado por GeoGebra*. Ediciones UIS.

Krulik, S., & Rudnick, J. (1989). *Problem solving: A handbook for teachers*. Allyn and Bacon, Inc., 7 Wells Avenue, Newton, Massachusetts 02159.

MEN (1998*). Lineamientos curriculares en matemáticas.* Colombia.

MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Colombia.

MEN (2013). *Lineamientos política de educación superior inclusiva*. Colombia.

NCTM (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Traducción de M. Fernández (Traducción de la versión del 2000 del NCTM). SAEM Thales. Sevilla.

Pineda, S. (2018). *Formación Inicial De Profesores De Matemáticas Alrededor De La atención a la Diversidad* (tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Polya, G., (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.

Rueda, N. (2016*). Habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de vari*ación (tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

Santos-Trigo, L. (2014) *Resolución de problemas matemáticos fundamentos cognitivos.* Editorial Trillas.

Índice alfabético de autores

Adrián Gómez Árciga, 225
Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa, 1
Alejandro Cabrera Baquedano, 139
Alexander Betancur Sánchez, 132
Ana Elizabeth González, 78
Ana Mileydy González García, 272
Ángel Homero Flores Samaniego, 265
Beatriz Brandão Silva, 26
Carlos André Bogéa Pereira, 124
Carlos Quispe Palomino, 16
César Elmer Molina Quispe, 75
Cintya Sherley Gonzales Hernández, 75
Claudia Margarita Acuña Soto, 103
Cristina De Jesus Teixeira, 57
David Rodríguez Muelas, 42
Elena Castro-Rodríguez, 154, 95
Elizabeth Milagro Advíncula Clemente, 209
Elizabeth Montoya Delgadillo, 139
Elvis Bustamante Ramos, 16
Erica Marlucia Leite Pagani, 202
Fabiane Fischer Figueiredo, 1
Flavia Fabiani Marcatto, 108
Geraldo Eustácio Moreira, 57
Gracielle Zager Mandel, 217
Gricelda Mendivil Rosas, 225
Guillermo Enrique Ramírez Montes, 8
Ilda Pavret Silva, 256
Jader Otavio Dalto, 234
Jainer Andres Gomez-Chavarro, 67
Janaína Poffo Possamai, 194, 217, 256
Jazmín Adriana Juárez Ramírez, 42
Jhony Alexander Villa-Ochoa, 67
Jorge Enrique Fiallo Leal, 183
José Antonio Salvador, 145
José Luis López Hernández, 166
José María Chamoso Sánchez, 42
José Ricardo Herrera Alfaro, 183
Juan Luis Piñeiro Garrido, 95, 154
Karen Porras Lizano, 154, 95
Karina Alessandra Pessoa da Silva, 175, 234, 34
Kassiana Schimidt Surjus, 50, 249
Leticia Aguilar Pascual, 265
Lourdes Maria Werle de Almeida, 249, 50
Luz Marina Fonseca Vizcaya, 116
Manoel dos Santos Costa, 202
Marcio Pironel, 202

Mário Barbosa da Silva, 256
Maritza Luna Valenzuela, 209
Maximiliano Andrés Núñez González, 86
Natalia Alvarado Garcés, 242
Noé Fernando Aguilar Perdomo, 103
Norma Suely Gomes Allevato, 194, 256
Osvaldo Jesús Rojas Velázquez, 116, 78
Pedro Mikael Santos Silva, 1
Renata Cristina Geromel Meneghetti, 26
Rodrigo Rojas Muñoz, 163, 242
Rosângela Maria Kowalek, 249, 50
Sandra Evely Parada Rico, 272
Susane Barth Strelow, 194
Susane Cristina Pasa Pelaquim, 175
Waléria de Jesus Barbosa Soares, 124

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en las AMÉRICAS 2023

Resolución de Problemas y Modelización

ISBN: 978-9945-18-792-2

https://ciaem-iacme.org